

Immersierte Kurven in der Ebene

Bachelor-Arbeit

Phillip Prestel

16. Juli 2018

Universität Augsburg

Lehrstuhl für Analysis und Geometrie

Betreuer:
Prof. Dr. Urs Frauenfelder

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Ebene Kurven	4
2.1	Definitionen zur ebenen Kurve	4
2.2	Der Rotationsindex	5
2.3	Das Whitney-Graustein Deformations-Theorem	7
2.4	Die Whitney Funktion	9
3	Die Basis-Invarianten	15
3.1	Die drei Desaster	15
3.2	Die Standardkurven	16
3.3	Die Invarianten	17
4	Neue Invarianten	20
4.1	Die I^\pm Invarianten	20
4.2	Der Zusammenhang mit den Basis-Invarianten	21
4.3	Die Additivität der Invarianten	33
5	Doppeltangenten	37
5.1	Doppeltangenten	37
5.2	Der Zusammenhang mit J^\pm	38
	Anmerkungen	47

1 Einleitung

Im Jahre 1770 wurde eine Arbeit des Mathematikers und Physikers Albrecht Meister (1724-1788) veröffentlicht, aus der ersichtlich wird, dass er sich unter anderem bereits mit geschlossenen ebenen Kurven auseinandergesetzt hat ([7]). Insbesondere beschreibt er eine schwächere Version der Aussage, dass Kurven ineinander verformt beziehungsweise zueinander homotopiert werden können, wenn sie denselben Rotationsindex haben. Ein handfester Beweis dieser Aussage wurde jedoch erst im Jahre 1937 von Hassler Whitney (1907-1989) und William Caspar Graustein (1888-1941) präsentiert ([9]). Der erste Schritt zur Klassifikation ebener Kurven war getan. Allerdings können unter generischen Homotopien drei Desaster auftreten, welche Vladimir Igorevich Arnold (1937-2010) näher untersucht hat. In seinem 1993 verfassten Paper konnte er beweisen, dass es drei Invarianten gibt, welche unter je zweien der drei Desaster invariant bleiben ([1]). Mit Hilfe dieser Invarianten konnte man nun Kurven bis auf generische Homotopien voneinander unterscheiden. Da die Bestimmung der Invarianten nicht immer ganz einfach ist, suchte man bald nach einer Möglichkeit, die Invarianten direkt aus einer Kurve zu bestimmen. Emmanuel Ferrand fand eine solche schließlich 1997 mit Hilfe von Doppeltangenten ([4]).

Im Folgenden werden nun zunächst die Grundlagen der ebenen Kurven vorgestellt und das Whitney-Graustein Deformations-Theorem sowie ein weiteres Theorem von Whitney bewiesen (Kapitel 2). Danach betrachten wir besagte Desaster und führen Arnolds Basis-Invarianten ein (Kapitel 3). In Kapitel 4 werden mit Hilfe von Doppelpunktindices weitere Invarianten definiert und ein Zusammenhang dieser mit den Basis-Invarianten bewiesen, aus welchem die Additivität der Invarianten gefolgert werden kann. Zuletzt wird das Konzept der Doppeltangenten eingeführt und ein Theorem bewiesen, welches es ermöglicht, die Basis-Invarianten direkt aus einer Kurve zu bestimmen (Kapitel 5).

2 Ebene Kurven

In diesem Kapitel beginnen wir mit grundlegenden Definitionen zur ebenen Kurve und werden den Rotationsindex sowie das Whitney-Graustein Deformation-Theorem kennenlernen. Danach betrachten wir die sogenannte Whitney-Funktion und deren Zusammenhang mit dem Rotationsindex. Inhalt und Aufbau orientieren sich an [5] (Kapitel 2 und 4) sowie an [2] (S. 4-10).

2.1 Definitionen zur ebenen Kurve

Definition. Eine geschlossene **ebene Kurve** ist eine Immersion $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren Ableitung γ' nirgends verschwindet.

Beispiel.



Abbildung 2.1: ebene Kurve



Abbildung 2.2: keine ebene Kurve

Abbildung 2.1 zeigt die einfachste eben Kurve; bei Abbildung 2.2 handelt es sich nicht um eine ebene Kurve, da die Ableitung an der Spitze verschwindet.

Definition. Ein **Doppelpunkt** ist das Bild zweier verschiedener Punkte auf S^1 mit der Eigenschaft, dass die Tangentenvektoren verschieden sind.

Beispiel.



Abbildung 2.3: Kurve mit Doppelpunkt

Definition. Eine ebene Kurve heißt **generisch**, wenn sie sich selbst nur in Doppelpunkten schneidet.

Beispiel.



Abbildung 2.4: generische Kurve



Abbildung 2.5: nicht generische Kurve

Die Kurve in Abbildung 2.5 ist nicht generisch, da sie sich in einem Dreifachpunkt schneidet.

Im Folgenden ist eine Kurve stets eine generische geschlossene ebene Kurve, sofern nicht anders vermerkt.

2.2 Der Rotationsindex

Definition. Der **Rotationsindex** (kurz: **Index**) $ind(\gamma)$ einer ebenen Kurve γ ist die Anzahl der Umdrehungen des Tangentenvektors γ' in positiver Richtung.

Der Rotationsindex lässt sich leicht mit der so genannten **Seifert-Zerlegung** bestimmen, welche nun erläutert wird.

Definition. Sei $\gamma(t_D)$ für $t_D \in S^1$ ein Doppelpunkt der Kurve γ . Die **Auflösung des Doppelpunkts** ist eine Veränderung des Doppelpunkts in einer kleinen Umgebung, die wie folgt aussieht:

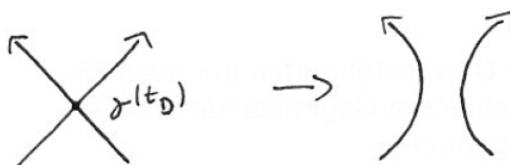


Abbildung 2.6: Auflösung eines Doppelpunkts

Die Orientierung der beiden Äste bleibt erhalten und der Doppelpunkt wird aufgelöst.

Löst man nun alle Doppelpunkte der Kurve γ auf, so bleiben nur einfach geschlossene Kurven (i.e. Kurven ohne Selbstschnitte) übrig; diese heißen **Seifert-Kreise**.

Beispiel.

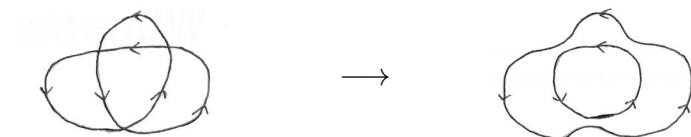


Abbildung 2.7: Beispiel einer Auflösung von Doppelpunkten

Insbesondere gilt für einfach geschlossene Kurven der Hopf'sche Umlaufsatz:

Satz 1 (Hopf'scher Umlaufsatz). *Die Gesamtänderung der Tangentenrichtung bei einmaligem Durchlaufen der einfach geschlossenen Kurve γ beträgt $\pm 2\pi$, i.e. die Anzahl der Umdrehungen des Tangentenvektors γ' ist ± 1 .*

Die grobe Idee des Beweises besteht darin, ein Dreieck zu definieren, welches aus Wertepaaren von Zeiten einer Kurve besteht. Nun kann man von diesem Dreieck aus eine wohldefinierte stetige Sekantenfunktion nach S^1 finden. Da alle Werte dieser Funktion auf S^1 liegen, existiert eine Winkelfunktion, durch welche sich die Sekantenfunktion darstellen lässt. Betrachtet man diese genauer, so erkennt man, dass diese bei einmaligem Durchlaufen der Kurve genau $\pm 2\pi$ ergibt.

Für einen ausführlichen Beweis siehe [6] (S.53-55).

Mit Hilfe dieses Satzes und der Seifert-Kreise erhalten wir eine einfache Methode, den Index einer Kurve zu bestimmen.

Satz 2. *Der Index einer orientierten Kurve ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der positiv und negativ orientierten Seifert-Kreise.*

Beweis. Sei γ eine Kurve mit mindestens einem Doppelpunkt. Zunächst lösen wir einen dieser Doppelpunkte auf:

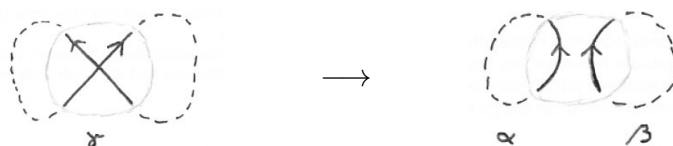


Abbildung 2.8: Doppelpunktauflösung

Es gilt: $ind(\gamma) = ind(\alpha) + ind(\beta)$.¹

Wenn wir nun alle Doppelpunkte von γ auflösen, so erhält man folgende Gleichung, wobei S_i die entstehenden Seifert-Kreise bezeichnet:

$$ind(\gamma) = \sum_{i=1}^n ind(S_i) .$$

Nach dem Hopf'schen Umlaufsatz (Satz 1) gilt $ind(S_i) = \pm 1$ und daraus folgt die Aussage. □

Diesen Beweis findet man auf das Wesentliche reduziert auch in [5] (S.60).

Der Index der Kurve im obigen Beispiel (siehe Abb. 2.7) ist dann also gleich 2, da wir nach dem Auflösen aller Doppelpunkte zwei positiv orientierte Seifert-Kreise haben.

2.3 Das Whitney-Graustein Deformations-Theorem

Nun können wir das Deformations-Theorem von Whitney-Graustein formulieren.

Theorem 3 (Whitney-Graustein Deformations-Theorem²). *Zwei ebene Kurven γ und η sind genau dann homotop, wenn $\text{ind}(\gamma) = \text{ind}(\eta)$ gilt.*

Erickson schreibt, dass ein gewisser Werner Boy dieses Theorem bereits 30 Jahre zuvor bewiesen hat ([2] (S. 10)). Außerdem könnte dieses Resultat – zumindest in einer schwächeren Version – bereits im 18. Jahrhundert bekannt gewesen sein.³

Bevor wir das Theorem beweisen können, benötigen wir noch den Begriff der Umlaufzahl und ein Lemma aus [9] (S. 3).

Definition. Die **Umlaufzahl** (auch: **Windungszahl**) $\text{wind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$ gibt an, wie oft eine Kurve γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ in positiver Richtung umläuft.

Bemerkung 4. Mit dieser Definition können wir den Rotationsindex einer Kurve γ als die Umlaufzahl seines Tangentenvektors γ' um den Ursprung auffassen, i.e. $\text{ind}(\gamma) = \text{wind}(\gamma', 0)$.

Lemma 5. Sei $\alpha'(t)$ eine stetige Vektorfunktion auf S^1 mit $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in S^1$ und sei $p \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\alpha(t) = p + \int_0^t \alpha'(\tilde{t}) d\tilde{t}$ genau dann eine Kurve, wenn gilt:

$$\alpha'(0) = \alpha'(1) \wedge \int_0^1 \alpha'(t) dt = 0.$$

Die zweite Bedingung kann man auch so auffassen, dass der Mittelwert von $\alpha'(t)$ gleich 0 ist.

Diese Aussage ist evident, da die erste Bedingung jede Kurve erfüllen muss (die Kurve wäre sonst nicht glatt) und die zweite Bedingung folgt aus der Geschlossenheit einer Kurve ($\alpha(0) = \alpha(1)$):

$$\alpha(0) = p + \int_0^0 \alpha'(t) dt = p = p + \int_0^1 \alpha'(t) dt = \alpha(1) \Leftrightarrow \int_0^1 \alpha'(t) dt = 0.$$

Mit diesem Rüstzeug sind wir nun für den Beweis von Theorem 3 gewappnet. Dieser führt den Beweis von Erickson ([2] S.10) genauer aus, welcher sich im Wesentlichen nicht besonders vom ursprünglichen Beweis in [9] (S. 4) unterscheidet, und verwendet Beispiele aus [8] zur Veranschaulichung.

Beweis von Theorem 3. " \Rightarrow " : Seien γ und η homotope Kurven; o.B.d.A. beide nach Bogenlänge parametrisiert, i.e. $\|\gamma'\| = \|\eta'\| = 1 \forall t \in S^1$.

Dann existiert eine stetige Homotopie $H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(s, t) \mapsto H(s, t)$, sodass H für alle (s, t) eine ebene Kurve ist. Insbesondere existiert ein eindeutiger Index $\text{ind}(H(s, t))$ für alle $s \in [0, 1]$. Des Weiteren sind γ' und η' (frei) homotop via $\frac{\partial H}{\partial t}$ und, da H eine ebene Kurve ist, gilt insbesondere $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$; man erhält also:

$$\gamma \simeq \eta \text{ in } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \gamma' \simeq \eta' \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Daraus folgt $wind(\gamma', 0) = wind(\eta', 0)$, da γ' und η' beide auf S^1 liegen (γ und η sind nach Bogenlänge parametrisiert) und dieselbe Umlaufzahl um den Ursprung haben müssen, weil sie homotop auf S^1 sind.

Mit Bemerkung 4 folgt:

$$ind(\gamma) = wind(\gamma', 0) = wind(\eta', 0) = ind(\eta).$$

Damit ist diese Richtung bewiesen.

" \Leftarrow " : Seien nun γ und η zwei Kurven mit $ind(\gamma) = ind(\eta)$; wieder o.B.d.A. nach Bogenlänge parametrisiert. Mit Bemerkung 4 folgt:

$$wind(\gamma', 0) = wind(\eta', 0).$$

Ergo sind γ' und η' homotop auf S^1 .

Sei $h' : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$ eine Homotopie von γ' zu η' .

Wir halten zunächst fest, dass kein $h'(s, \cdot)$ konstant sein kann, falls $ind(\gamma) = wind(\eta', 0) \neq 0$. Denn gäbe es ein $s \in [0, 1]$ mit konstantem $h'(s, \cdot)$, so wäre $wind(h'(s, \cdot), 0) = 0$ für dieses s . Da die Homotopie h' die Windungszahl erhält, kann dies jedoch nicht sein.

Ist hingegen $ind(\gamma) = 0$, so kann ein $h'(s, \cdot)$ konstant sein. In diesem Fall ist die zu diesem $h'(s, \cdot)$ gehörende Kurve eine Gerade, was zu einem Problem führt. Dieses werden wir umgehen, indem wir h' derart stören, dass es für alle s nicht konstant ist. Bevor wir uns diesem Spezialfall widmen, betrachten wir zunächst nur Kurven mit $ind(\gamma) \neq 0$.

Fall 1: $ind(\gamma) \neq 0$

Wir wollen nun mit Hilfe von Lemma 5 aus der Homotopie h' eine Homotopie von γ zu η konstruieren, welche zu jedem Zeitpunkt eine ebene Kurve ist.

Wir beginnen mit dem naiven Versuch die Kurve lediglich aus $h'(s, \cdot)$ zu rekonstruieren. Dieser scheitert daran, dass es Zeitpunkte geben kann, bei denen man keine geschlossene Kurve erhält.⁴

Wir müssen unser h' also derart modifizieren, dass wir zu allen Zeitpunkten eine geschlossene Kurve erhalten.

Dazu definieren wir $c(s) := \int_0^1 h'(s, t) dt$; für dieses c gilt offensichtlich $c(0) = c(1) = 0$. Da $c(s)$ der Mittelwert von $h'(s, t)$ ist, muss $c(s)$ im Inneren des Kreises S^1 liegen. Insbesondere folgt daraus: $h'(s, t) \neq c(s) \forall s \in [0, 1], \forall t \in S^1$.

Nun definieren wir uns folgendermaßen eine neue Homotopie \tilde{h}' von γ' zu η' :

$$\tilde{h}' : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (s, t) \mapsto \tilde{h}'(s, t) := h'(s, t) - c(s).$$

Damit haben wir nun eine Homotopie von γ' zu η' via Ableitungen von ebenen Kurven (denn $-c(s)$ annulliert den Abstand zwischen Start- und Endpunkt der Kurve) und können aus dieser nun mit Lemma 5 eine Homotopie h von γ zu η rekonstruieren, welche zu jedem Zeitpunkt eine ebene Kurve ist:⁵

$$h : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, (s, t) \mapsto h(s, t) := \int_0^t \tilde{h}'(s, \tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Fall 2: $\text{ind}(\gamma) = 0$

Whitney (beziehungsweise Graustein) gibt in seinem Beweis an, was in diesem Fall zu tun ist:⁶

Wir müssen $h'(s, t)$ derart stören, dass es für kein s konstant ist; dann können wir die Homotopie aus Fall 1 anwenden.

Dazu wählen wir ein t_0 mit $h'(1, t_0) = \eta'(t_0) \neq 0$ und verformen $h'(0, t) = \gamma'(t)$ in einer Umgebung von t_0 zu $h'(1, t) = \eta'(t)$ in dieser Umgebung. Dann können wir das so veränderte γ' wie in Fall 1 homotopieren, da nun kein $h'(s, t)$ konstant ist, was daran liegt, dass $\gamma'(t)$ bereits in einer Umgebung zu $\eta'(t) \neq 0$ verformt worden ist und dieser Teil sich während h' nicht verändert und insbesondere $\neq 0$ ist).⁷

Ergo haben wir auch die andere Richtung und somit das Theorem bewiesen. □

Im nächsten Kapitel widmen wir uns der sogenannten Whitney Funktion und deren Zusammenhang mit dem Index einer Kurve.

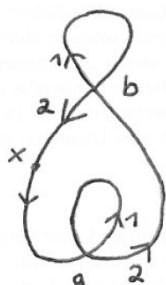
2.4 Die Whitney Funktion

Definition. Sei γ eine Kurve und x ein beliebiger Startpunkt von γ , von dem aus wir die Kurve durchlaufen. Ein Doppelpunkt von γ heißt **positiv/negativ bezüglich x** , wenn die beiden Äste $(1, 2)$, die den Doppelpunkt verlassen, die Ebene positiv/negativ orientieren.

Bemerkung 6. Die Orientierung der Ebene kann mithilfe einer einfachen „rechten Hand Regel“ bestimmt werden. Zeigen die Finger der rechten Hand in Richtung 1, so ist die Ebene positiv/negativ orientiert, falls der Daumen in dieselbe/entgegengesetzte Richtung zeigt wie Richtung 2.

Bevor wir die Whitney Funktion definieren, schauen wir uns ein Beispiel zu jener etwas sperrigen Definition an.

Beispiel.



Der Doppelpunkt a ist negativ bzgl. x , während der Doppelpunkt b positiv bzgl. x ist.

Abbildung 2.9: Kurve mit negativem und positivem Doppelpunkt

Definition. Die **Whitney Funktion** $w(x)$ für einen Startpunkt x einer Kurve ist die Differenz zwischen der Anzahl der positiven Doppelpunkte $w_+(x)$ bezüglich x und der Anzahl der negativen Doppelpunkte $w_-(x)$ bezüglich x :

$$w(x) = w_+(x) - w_-(x) .$$

Definition. Ein Punkt einer Kurve heißt **äußerer Punkt**, falls eine Linie von diesem Punkt aus gefunden werden kann, welche, ins unendliche verlängert, die Kurve in keinem anderen Punkt schneidet oder berührt.

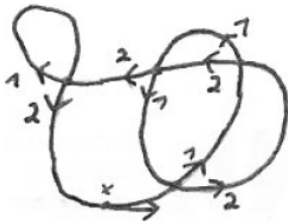
Theorem 7. Sei γ eine Kurve mit einem äußeren Startpunkt x , dann gilt:

$$\text{ind}(\gamma) = \mu - w(x), \text{ mit } \mu = \pm 1 .$$

Wenn die Kurve γ so verschoben und gedreht wird, dass sie oberhalb der x -Achse liegt und die x -Achse die Tangente am Startpunkt x ist, dann ist $\mu = +1$, falls der Tangentenvektor von x in die positive x -Richtung zeigt, und $\mu = -1$, falls dieser in die negative x -Richtung zeigt.

Bevor wir dieses Theorem beweisen, wollen wir uns dessen Aussage anhand eines Beispiels klarmachen.

Beispiel.



Diese Kurve hat zwei positive, sowie zwei negative Doppelpunkte, also gilt $w(x) = 0$. Der Tangentenvektor am Startpunkt zeigt in positive x -Richtung, i.e. $\mu = 1$. Also folgt mit Theorem 7 $\text{ind} = 1$, was offensichtlich der Fall ist.

Abbildung 2.10: Beispiel zu Theorem 7

Whitney gibt in [9] (S.6-9) einen Beweis dieses Theorems mit Hilfe des Hopf'schen Umlaufsatzes an. Dabei geht er genau wie Hopf von einem Dreieck aus Wertepaaren von Zeiten einer Kurve aus und definiert eine leicht modifizierte Abbildung von diesem Dreieck aus. Da hier die Kurve nicht einfach geschlossen ist, müssen deren Doppelpunkte betrachtet werden. Dazu legt Whitney innerhalb des Dreiecks ein Quadrat um die Wertepaare, die einen Doppelpunkt der Kurve beschreiben. Beim Umlaufen dieser Quadrate dreht sich die obige Abbildung um den Winkel $\pm 2\pi$ bei einer negativen/positiven Kreuzung. Den Rest des Dreiecks füllt Whitney mit kleinen Dreiecken und weist nach, dass sich beim Umlaufen dieser Dreiecke obige Abbildung insgesamt nicht dreht. Danach zeigt er, dass der Winkel, um den sich obige Abbildung beim Umlaufen des Dreiecks dreht, derselbe ist, wie wenn man die Winkel beim Umlauf der inneren Quadrate und Dreiecke summiert. Aus dieser Gleichheit folgt nach weiteren Überlegungen das Theorem.

Da dieser Beweis allerdings etwas langwierig ist, werden wir das Theorem mittels Induktion über die Anzahl der Doppelpunkte und der Auflösung eines Doppelpunkts beweisen, wie auch bei Erickson ([2] S. 8/9).

Beweis von Theorem 7. Sei γ eine Kurve mit n Doppelpunkten und äußerem Startpunkt x . Wir verschieben γ so, wie in Theorem 7 beschrieben. Die Whitney Funktion $w(x)$ fassen wir wie folgt auf:

$$w(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x).$$

Dabei ist i der i -te Doppelpunkt vom Startpunkt x aus und

$$w_i(x) := \begin{cases} +1 & , \text{ falls } i \text{ ein positiver Doppelpunkt.} \\ -1 & , \text{ falls } i \text{ ein negativer Doppelpunkt.} \end{cases}$$

INDUKTIONSANFANG: $n = 0$

Eine Kurve γ mit $n = 0$ Doppelpunkten ist einfach geschlossen und hat damit nach Satz 1 $ind(\gamma) = \pm 1$. Außerdem gilt offensichtlich $w(x) = 0$ und man erkennt leicht, dass $\mu = \pm 1$ bei $ind(\gamma) = \pm 1$.



Die linke Kurve hat $\mu = ind = 1$, die rechte $\mu = ind = -1$.



Abbildung 2.11: $\mu = ind$ bei einfach geschlossenen Kurven

Also ist die Behauptung für $n = 0$ erfüllt, denn:

$$ind(\gamma) = \pm 1 = \pm 1 - 0 = \mu - w(x).$$

INDUKTIONSVORAUSSSETZUNG:

Für n gelte $ind(\gamma) = \mu - \sum_{i=1}^n w_i(x)$.

INDUKTIONSSCHRITT: $n \rightarrow n + 1$

Habe γ nun $n + 1$ Doppelpunkte. Wir nehmen o.B.d.A. den Doppelpunkt $i = 1$ mit $w_1(x) = \pm 1$ und lösen diesen auf. Wie wir im Beweis von Satz 2 gesehen haben, erhält man dadurch zwei Kurven α und β und es gilt $ind(\gamma) = ind(\alpha) + ind(\beta)$ (siehe Abb. 2.8). Insbesondere haben α und β beide weniger als $n + 1$ Doppelpunkte. Daher können wir die Induktionsvoraussetzung für diese anwenden. Es bezeichne n_α beziehungsweise

n_β die Anzahl der Doppelpunkte von α beziehungsweise β . Sei \tilde{x} ein äußerer Startpunkt von β ; o.B.d.A. enthalte α den äußeren Startpunkt x .

$$\stackrel{IV.}{\Rightarrow} \text{ind}(\gamma) = \mu_\alpha - \sum_{j=1}^{n_\alpha} w_j(x) + \mu_\beta - \sum_{k=1}^{n_\beta} w_k(\tilde{x}). \quad (2.1)$$

Beachte: Die Punkte, an denen sich α und β schneiden, tragen nicht zu dieser Gleichung bei, da sie keine Doppelpunkte einer der beiden Kurven sind.

Insbesondere können wir die beiden Kurven so verschieben, dass sie sich nicht schneiden. Dies müssen wir bedenken, wenn wir die Whitney Funktion von γ betrachten:

$$\sum_{i=1}^{n+1} w_i(x) = w_1(x) + \sum_{j=1}^{n_\alpha} w_j(x) + \sum_{k=1}^{n_\beta} w_k(x) + \sum_{l=1}^m w_l(x). \quad (2.2)$$

Dabei steht m für die Anzahl der Schnittpunkte von α und β . Jeder der Doppelpunkte von γ kann eindeutig einem der vier Summanden zugeordnet werden.

Behauptung 1.

$$\sum_{l=1}^m w_l(x) = 0$$

denn:

Wir betrachten nur die Schnittpunkte von α und β und zerlegen β in Seifert Kreise. Da x ein äußerer Startpunkt von α ist, liegt dieser auch außerhalb von β . Wenn nun α einen der Seifert Kreise der Kurve β schneidet, so ist α ab diesem Punkt innerhalb des Kreises. Um nun aber wieder zu ihrem äußerem Startpunkt x zurückkehren zu können, muss α den Kreis ein zweites Mal schneiden.

$\Rightarrow m$ ist gerade und es gibt die beiden folgenden Fälle:



Abbildung 2.12: Die beiden Fälle beim Schneiden eines Seifert Kreises

Beide Fälle liefern $\sum_{l=1}^2 w_l(x) = 0$. Das gilt für alle Seifert Kreise und für alle geraden Anzahlen von Schnitten von α mit einem dieser Kreise.

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^m w_l(x) = 0.$$

Behauptung 1 \square

Damit können wir (2.2) umformen zu:

$$\sum_{j=1}^{n_\alpha} w_j(x) + \sum_{k=1}^{n_\beta} w_k(x) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i(x) - w_1(x). \quad (2.3)$$

Wenn wir nun (2.3) in (2.1) einsetzen, so erhalten wir:

$$\text{ind}(\gamma) = \mu_\alpha + \mu_\beta - \sum_{i=1}^{n+1} w_i(x) + w_1(x). \quad (2.4)$$

Da der äußere Startpunkt x von γ zu α gehört, gilt $\mu_\alpha = \mu_\gamma = \mu$. Betrachten wir nun $\mu_\beta + w_1(x)$.

Behauptung 2.

$$\mu_\beta + w_1(x) = 0$$

denn:

Fall 1: Der Doppelpunkt $i = 1$ ist positiv

Es gilt $w_1(x) = 1$ und an folgendem Bild erkennen wir $\mu_\beta = -1$:



Abbildung 2.13: positiver Doppelpunkt $i = 1$

$$\Rightarrow \mu_\beta + w_1(x) = 0.$$

Fall 2: Der Doppelpunkt $i = 1$ ist negativ

Es gilt $w_1(x) = -1$ und an folgendem Bild erkennen wir $\mu_\beta = 1$:

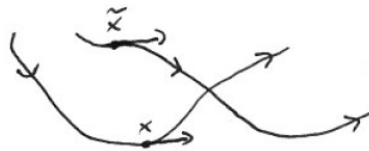


Abbildung 2.14: negativer Doppelpunkt $i = 1$

$$\Rightarrow \mu_\beta + w_1(x) = 0.$$

Und somit folgt die Behauptung. Behauptung 2

□

Folglich ergibt sich aus (2.4):

$$\text{ind}(\gamma) = \mu - \sum_{i=1}^{n+1} w_i(x).$$

Damit ist das Theorem bewiesen. □

Nun können wir noch zwei einfache, aber interessante Korollare aus Theorem 7 ziehen.

Korollar 8. $|ind(\gamma)| \leq n + 1$, wobei n die Anzahl der Doppelpunkte der Kurve γ ist.

Beweis.

$$-1 - n \leq ind(\gamma) = \pm 1 - w(x) \leq 1 + n,$$

denn es gilt $w(x) \leq \pm n$, da bei n Doppelpunkten maximal alle n positiv beziehungsweise negativ sein können. □

Korollar 9. *Es gilt: $ind(\gamma) - n \equiv 1 \pmod{2}$.*

Beweis. Ist $ind(\gamma)$ gerade/ungerade, so muss $w(x)$ ungerade/gerade sein und dies ist genau dann der Fall, wenn n ungerade/gerade ist. □

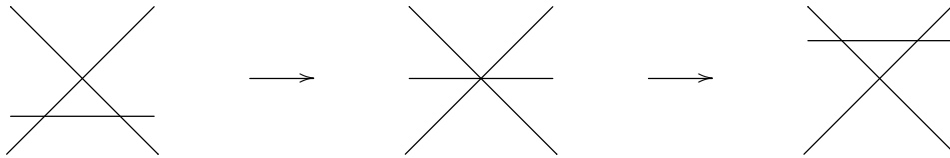
3 Die Basis-Invarianten

Inhalt und Aufbau dieses Kapitels haben [1] (Kapitel 1) sowie [5] (Kapitel 3) zum Vorbild.

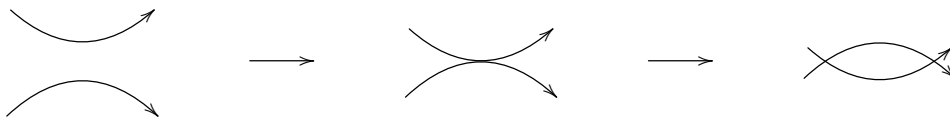
3.1 Die drei Desaster

Wir haben gesehen, dass der Rotationsindex eine Invariante von Kurven unter Homotopien ist. Allerdings können bei solchen Homotopien folgende drei Desaster auftreten:

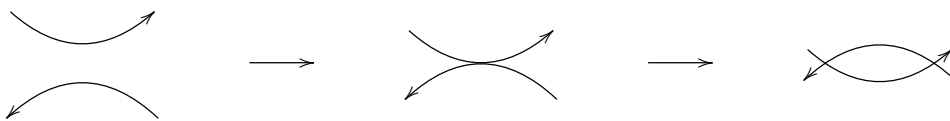
1. Dreifachpunkt:



2. direkte Berührung:



3. inverse Berührung:



Definition. (i) Das Durchlaufen einer Berührung ist **positiv/negativ**, wenn die Anzahl der Doppelpunkte steigt/fällt (jeweils um 2).

(ii) Das Durchlaufen eines Dreifachpunkts ist **positiv/negativ**, wenn das neue Dreieck positiv/negativ ist (und das verschwindende negativ/positiv).

Dreiecke

Definition. Das *neue/verschwindende Dreieck* ist das Dreieck, welches von den drei Ästen einer Kurve vor/nach dem Dreifachpunkt gebildet wird.

Um nun das signum des Dreiecks zu finden, sei x ein Startpunkt auf der Kurve, welcher nicht auf dem Dreieck liegt. Laufen wir von diesem x aus die Kurve entlang, so wird das Dreieck durch die Reihenfolge unseres Besuchs der drei Seiten orientiert. Die Seiten des Dreiecks sind jeweils durch die Richtung der Kurve orientiert.

Definition. Sei q die Anzahl der Seiten, deren Orientierung mit der des Dreiecks übereinstimmt. Das *signum* eines Dreiecks ist $(-1)^q$.

Beispiel.

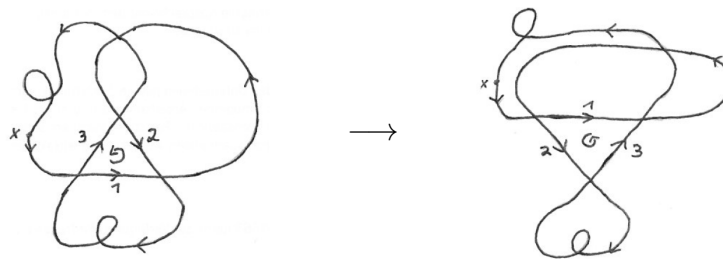


Abbildung 3.1: Beispiel des Durchlaufes eines Dreifachpunkts

Beim verschwindenden Dreieck stimmt lediglich die Orientierung von Seite 1 mit der des Dreiecks überein, i.e. $q = 1$ und das signum ist somit $-$. Beim neuem Dreieck stimmen die Orientierungen der Seiten 2 und 3 mit der Orientierung des Dreiecks überein, i.e. $q = 2$ und das signum ist dann $+$. Also ist das Durchlaufen des Dreifachpunkts positiv.

Bemerkung 10. Kehrt man die Orientierung der Kurve um, so ändert sich q nicht, denn sowohl die Reihenfolge unseres Besuchs als auch die Richtung der Seiten wird umgekehrt.

3.2 Die Standardkurven

Definition. Die *Standardkurve* K_i ist die einfachste Kurve mit Index $i = |\text{ind}|$.⁸

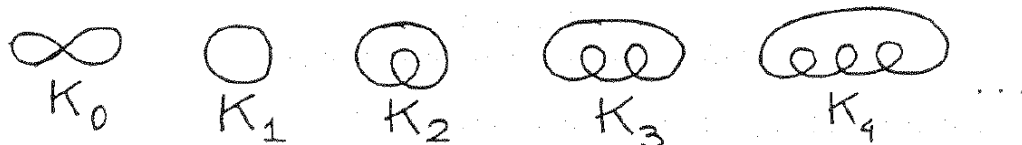


Abbildung 3.2: Die Standardkurven mit Indices $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (aus [1])

Bemerkung 11. Das signum von ind gibt lediglich die Orientierung der Kurve an.

Bemerkung 12. Wie man leicht sieht, erhält man für die Standardkurven mit $i > 0$ folgenden Zusammenhang: $\#\text{Doppelpunkte} = n = i - 1$.

3.3 Die Invarianten

Arnold hat in [1] (§2) bewiesen, dass drei Invarianten existieren, welche je unter zwei der drei Desaster invariant bleiben. Diese werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

Definition. Die Invariante St (von „strangeness“) bleibt unverändert unter den Berührungsdesastern, aber steigt/fällt um 1 bei einem positiven/negativen Dreifachpunkt. St wird durch folgende Bedingungen normalisiert:

$$St(K_0) = 0, \quad St(K_i) = i - 1 \quad (i \in \mathbb{N}_0).$$

Den Grund für die Normalisierung beschreibt Arnold ebenfalls in [1] (§5).

Definition. Die Invariante J^+ bleibt unverändert unter der inversen Berührung und dem Dreifachpunkt, aber steigt/fällt um 2 bei einer positiven/negativen direkten Berührung. J^+ wird durch folgende Bedingungen normalisiert:

$$J^+(K_0) = 0, \quad J^+(K_i) = -2(i - 1) \quad (i \in \mathbb{N}_0).$$

Definition. Die Invariante J^- bleibt unverändert unter der direkten Berührung und dem Dreifachpunkt, aber steigt/fällt um -2 bei einer positiven/negativen inversen Berührung. J^- wird durch folgende Bedingungen normalisiert:

$$J^-(K_0) = -1, \quad J^-(K_i) = -3(i - 1) \quad (i \in \mathbb{N}_0).$$

Bemerkung 13. Die Invarianten sind unabhängig von der Orientierung der Kurve.

Bemerkung 14. Mit Bemerkung 12 erhält man folgenden Zusammenhang zwischen den Invarianten der Standardkurven K_i mit $i > 0$ und deren Doppelpunktzahl n :

$$St(K_i) = i - 1 = n, \quad J^+(K_i) = -2(i - 1) = -2n, \quad J^-(K_i) = -3(i - 1) = -3n.$$

Die Definitionen und Normalisierungen der Basis-Invarianten lassen sich in folgender Tabelle zusammenfassen, wobei $a(\cdot)$ einen positiven Übergang beim Desaster (\cdot) bezeichnet.

	$a(\times)$	$a(\times)$	$a(\times)$	∞	\circ	\odot	$\odot\odot$	$\odot\odot\odot$...
St	1	0	0	0	0	1	2	3	...
J^+	0	2	0	0	0	-2	-4	-6	...
J^-	0	0	-2	-1	0	-3	-6	-9	...

Abbildung 3.3: Die Definition der Basis-Invarianten (aus [1])

Bemerkung 15. Die Werte von J^+ und J^- wurden so gewählt, dass $J^+ - J^- = n$, wobei $n = \# \text{Doppelpunkte}$, denn:

$J^+(K_0) - J^-(K_0) = 0 + 1 = 1 = n_{K_0}$ und $J^+(K_i) - J^-(K_i) = -2(i-1) + 3(i-1) = i-1 = n_{K_i}$, wie man aus den Definitionen und Bemerkung 12 entnehmen kann. Außerdem steigt/fällt $J^+ - J^-$ bei positiver/negativer Selbstberührung um 2, genau wie die Anzahl der Doppelpunkte. \square

Bemerkung 16. Korollar 9 folgt auch aus der Definition der Standardkurven K_i und der Tatsache, dass die Anzahl der Doppelpunkte n immer um 2 steigt oder fällt, denn ist i gerade, so ist n ungerade und vice versa.

Um nun die Werte der Invarianten einer Kurve zu bestimmen, geht man von der Standardkurve mit demselben Index aus und betrachtet die Disaster, die auftreten, wenn man diese Standardkurve zur betrachteten Kurve homotopiert.

Beispiel. Wir wollen die Basis-Invarianten der folgenden Kurve bestimmen:



Abbildung 3.4: Beispielkurve γ

Diese Kurve hat den Index 3. Daher müssen wir zur Berechnung der Invarianten K_3 in γ umformen:

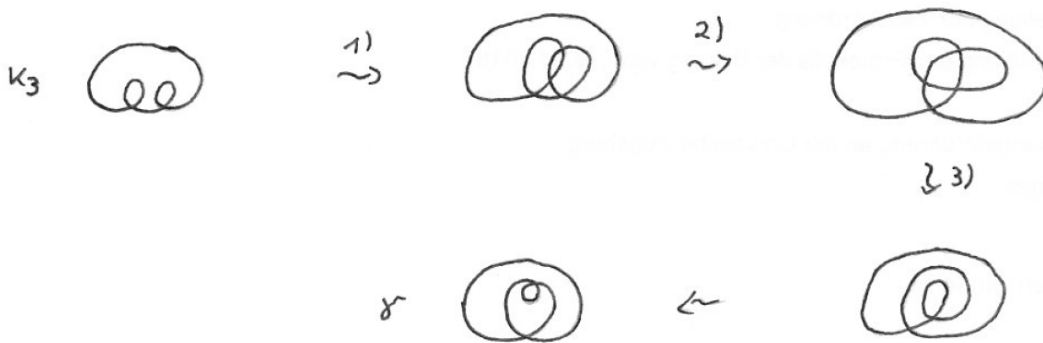
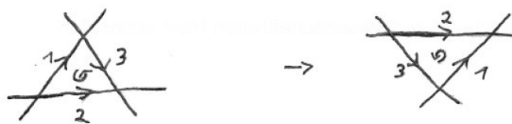


Abbildung 3.5: Verformung von K_3 zu γ

In Schritt 1) durchlaufen wir eine positive inverse Berührung, i.e. J^- sinkt um 2. In Schritt 2) durchlaufen wir einen Dreifachpunkt; wir betrachten die zugehörigen Dreiecke:



Das verschwindende Dreieck ist negativ ($q = 1$), das neue positiv ($q = 2$).

Abbildung 3.6: Dreiecke in Schritt 2)

*Wir haben also ein positives Durchlaufen des Dreifachpunkts, i.e. St steigt um 1.
In Schritt 3) durchlaufen wir eine negative Berührung, i.e. J^+ sinkt um 2.
Insgesamt erhalten wir:*

$$\begin{aligned} St(\gamma) &= St(K_3) + 1 = 3 \\ J^+(\gamma) &= J^+(K_3) - 2 = -6 \\ J^-(\gamma) &= J^-(K_3) - 2 = -8 . \end{aligned}$$

4 Neue Invarianten

Nachdem wir im letzten Kapitel die drei Basis-Invarianten kennengelernt haben, wollen wir nun eine weitere Invariante definieren, untersuchen, wie diese mit den Basis-Invarianten zusammenhängt, und aus diesem Zusammenhang die Additivität unter der zusammenhängenden Summe von J^\pm schließen. Aufbau und Inhalt orientieren sich an [1] (Kapitel 3 und 4) sowie [5] (Kapitel 5 und 6.1).

4.1 Die I^\pm Invarianten

Zunächst homotopieren wir unsere Kurven oder wählen eine Metrik derart, dass sich die beiden Äste bei einem Doppelpunkt immer orthogonal schneiden. Dann wählen wir eine Anordnung der Richtungen der abgehenden Äste (1, 2) an jedem Doppelpunkt so, dass diese die Ebene positiv orientiert.

Definition. Der **Halbindex** i_j eines Doppelpunkts ist der Rotationswinkel des Vektors, welcher den Doppelpunkt mit einem Punkt verbindet, welcher sich entlang des Astes j vom Doppelpunkt zu selbigem bewegt, geteilt durch $\frac{\pi}{2}$.

Der **Index** eines Doppelpunkts ist $i = i_1 - i_2$.

Bemerkung 17. Der Index eines Doppelpunkts hängt nicht von der Orientierung der Kurve ab, denn:

Angenommen wir haben einen Doppelpunkt mit Index $i = i_1 - i_2$ und ändern nun die Orientierung der Kurve, so ändert sich auch die Richtung der ausgehenden Äste:

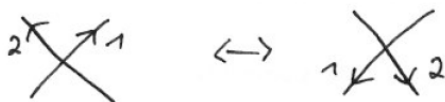


Abbildung 4.1: Doppelpunktindex bei Orientierungsumkehr

Dann ist der Index des Doppelpunkts $i = \tilde{i}_1 - \tilde{i}_2$ und wir erkennen, dass $\tilde{i}_1 = -i_2$ und $\tilde{i}_2 = -i_1$.

$$\Rightarrow i = \tilde{i}_1 - \tilde{i}_2 = -i_2 - (-i_1) = i_1 - i_2 \quad \square$$

Definition. Sei n die Anzahl der Doppelpunkte der Kurve und i_j der Index des Doppelpunkts a . Dann sind die Invarianten I^\pm wie folgt definiert:

$$I^\pm = \frac{\sum_{a=1}^n i_a \pm 2n}{4}.$$

Beispiel.

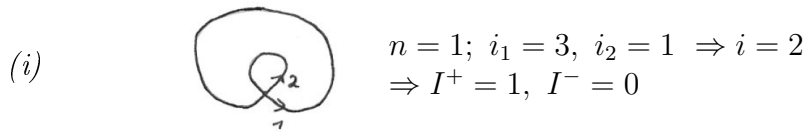


Abbildung 4.2: Beispielkurve (i) zum Doppelpunktindex

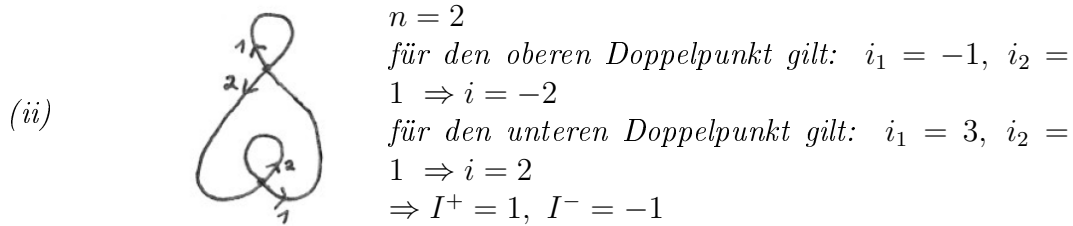


Abbildung 4.3: Beispielkurve (ii) zum Doppelpunktindex

4.2 Der Zusammenhang mit den Basis-Invarianten

Nachdem wir im letzten Abschnitt I^\pm eingeführt haben, können wir nun einen interessanten Zusammenhang dieser Invariante mit den Basis-Invarianten beweisen.

Theorem 18. Die Invarianten J^\pm und St sind mit den Invarianten I^\pm wie folgt verknüpft:

$$I^\pm = J^\pm + 3St.$$

Folgender Beweis orientiert sich an [1] (S.13-15), führt den Beweis für die Standardkurven näher aus und verwendet jeweils eine Fallunterscheidung um die gleiche Veränderung der Invarianten unter den Desastern zu beweisen statt jeweils eines Lemmas.

Beweis. Wir definieren $I^\pm := J^\pm + 3St$ und $(I^\pm)' := \frac{\sum_{a=1}^n i_a \pm 2n}{4}$. Wir zeigen nun in zwei Schritten, dass $I^\pm = (I^\pm)'$ gilt.

Schritt 1: Beweis für die Standardkurven K_i

$\underline{K_0}$: Es gilt $n = 1$, $ind(K_0) = 0$ und für die drei Basis-Invarianten nach Definition $St = 0, J^+ = 0, J^- = -1$. Der Index des Doppelpunkts ergibt sich wie folgt:

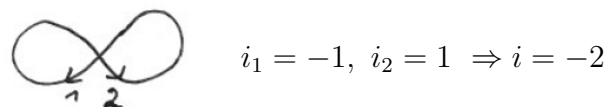


Abbildung 4.4: Doppelpunktindex von K_0

Man erhält also:

$$I^+ = 0 = \frac{-2+2}{4} = (I^+) \wedge I^- = -1 = \frac{-4}{4} = (I^-)'.$$

K_1 : Es gilt $n = 0$, $ind(K_0) = 1$ und für die drei Basis-Invarianten nach Definition: $St = 0$, $J^+ = 0$, $J^- = 0$. Nachdem wir keine Doppelpunkte haben, gibt es auch keine Doppelpunktindices.

Wir sehen:

$$I^+ = 0 = (I^+) \wedge I^- = -1 = (I^-)'.$$

K_2 : Es gilt $n = 1$, $ind(K_0) = 2$ und für die drei Basis-Invarianten nach Definition: $St = 1$, $J^+ = -2$, $J^- = -3$. Den Index des Doppelpunkts haben wir bereits oben in Beispiel (i) berechnet (siehe Abb. 4.2). Wir erhalten:

$$I^+ = -2 + 3 = 1 = \frac{4}{4} = (I^+) \wedge I^- = -3 + 3 = 0 = \frac{0}{4} = (I^-)'.$$

Die restlichen Standardkurven K_i für $|ind| > 2$ sind von der selben Gestalt wie K_2 nur mit mehr Doppelpunkten beziehungsweise Loops ($n > 1$). Diese Doppelpunkte beziehungsweise Loops sind alle von der gleichen Form:

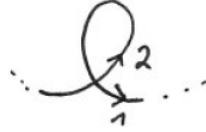


Abbildung 4.5: Loop mit Anordnung (1, 2) der abgehenden Äste

Jeder solche Doppelpunkt hat den Index $i = 2$. Des Weiteren gilt für die Standardkurven mit $|ind| > 2$ Folgendes für die Basis-Invarianten (siehe Bemerkung 14):

$$St(K_i) = n, J^+ = -2n, J^- = -3n.$$

$$\Rightarrow I^+ = -2n + 3n = n = \frac{4n}{4} = \frac{\sum_{a=1}^n 2 + 2n}{4} = (I^+) \wedge I^- = -3n + 3n = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\sum_{a=1}^n 2 - 2n}{4} = (I^-)'.$$

Insgesamt gilt ergo $I^\pm(K_i) = (I^\pm)'(K_i)$ für die Standardkurven und damit ist Schritt 1 gezeigt.

Schritt 2: I^\pm und $(I^\pm)'$ verändern sich unter den drei Desastern gleich, i.e. $\Delta(I^\pm) = \Delta((I^\pm)')$

Sei γ eine beliebige Kurve mit n Doppelpunkten. Wir betrachten jeweils eine Umgebung um ein Desaster.

Direkte Berührung:

Nach Definition steigt/fällt J^+ um 2 und die anderen Basis-Invarianten bleiben unverändert; die Anzahl der Doppelpunkte n steigt/fällt ebenfalls um 2.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I^+ &= J^+ \pm 2 + 3St \quad \wedge \quad I^- = J^- + 3St. \\ \Rightarrow \Delta(I^+) &= \pm 2 \quad \wedge \quad \Delta(I^-) = 0. \end{aligned}$$

Um $\Delta((I^\pm)')$ zu erhalten, müssen wir die Doppelpunktindices der neuen beziehungsweise verschwindenden Doppelpunkte A und B betrachten:

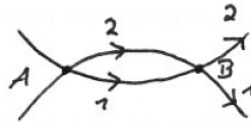
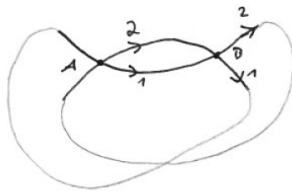


Abbildung 4.6: Doppelpunkte bei direkter Berührung

Es gibt vier Möglichkeiten, wie die Enden verbunden werden können, damit wir eine Kurve erhalten. Diese werden wir nun einzeln betrachten.

Fall 1:



$$\begin{aligned} A: i_1 &= -1, i_2 = -3 \Rightarrow i_A = 2 \\ B: i_1 &= -1, i_2 = -3 \Rightarrow i_B = 2 \end{aligned}$$

Abbildung 4.7: Doppelpunktindices bei Fall 1

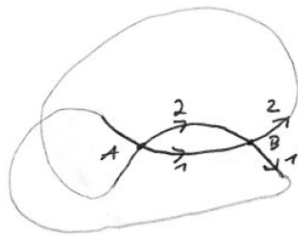
Wir sehen: $i_A + i_B = 4$.

O.B.d.A. seien nun n und $n - 1$ beziehungsweise $n + 1$ und $n + 2$ die Doppelpunkte A und B .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (I^+)' &= \frac{\sum_{a=1}^{n \pm 2} i_a + 2(n \pm 2)}{4} \\
&= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^{n+2} i_a + 2(n+2)}{4} & , \text{ bei positiver direkter Berührung} \\ \frac{\sum_{a=1}^{n-2} i_a + 2(n-2)}{4} & , \text{ bei negativer direkter Berührung} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a + i_A + i_B + 2n + 4}{4} & , \dots \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a - i_A - i_B + 2n - 4}{4} & , \dots \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a + 2n + 8}{4} & , \dots \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a + 2n - 8}{4} & , \dots \end{cases} \\
&= (I^+)' \pm 2 \\
\Rightarrow \Delta((I^+)') &= \pm 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (I^-)' &= \frac{\sum_{a=1}^{n \pm 2} i_a - 2(n \pm 2)}{4} \\
&= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^{n+2} i_a - 2(n+2)}{4} & , \text{ bei positiver direkter Berührung} \\ \frac{\sum_{a=1}^{n-2} i_a - 2(n-2)}{4} & , \text{ bei negativer direkter Berührung} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a + i_A + i_B - 2n - 4}{4} & , \dots \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a - i_A - i_B - 2n + 4}{4} & , \dots \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a - 2n}{4} & , \dots \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a - 2n}{4} & , \dots \end{cases} \\
&= (I^-)' \\
\Rightarrow \Delta((I^-)') &= 0
\end{aligned}$$

Fall 2:



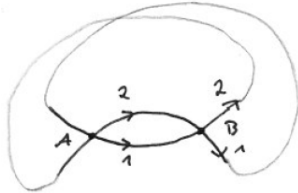
$$\begin{aligned}
A: i_1 &= 3, i_2 = -3 \Rightarrow i_A = 6 \\
B: i_1 &= -1, i_2 = 1 \Rightarrow i_B = -2
\end{aligned}$$

Abbildung 4.8: Doppelpunktindices bei Fall 2

Wieder gilt $i_A + i_B = 4$ und wir erhalten genau wie in Fall 1 $\Delta((I^+)') = \pm 2$ und $\Delta((I^+)') = 0$.

Die restlichen beiden Fälle gehen analog.

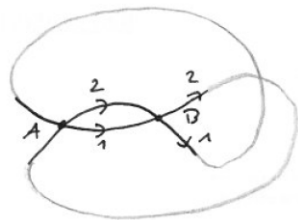
Fall 3:



$$\begin{aligned} A: i_1 = 3, i_2 = 1 &\Rightarrow i_A = 2 \\ B: i_1 = 3, i_2 = 1 &\Rightarrow i_B = 2 \end{aligned}$$

Abbildung 4.9: Doppelpunktindices bei Fall 3

Fall 4:



$$\begin{aligned} A: i_1 = -1, i_2 = 1 &\Rightarrow i_A = -2 \\ B: i_1 = 3, i_2 = -3 &\Rightarrow i_B = 6 \end{aligned}$$

Abbildung 4.10: Doppelpunktindices bei Fall 4

Offensichtlich gilt jeweils $i_A + i_B = 4$.

Für die direkte Selbstberührung gilt also $\Delta(I^\pm) = \Delta((I^\pm)')$.

Inverse Berührung:

Nach Definition steigt/fällt J^- um 2 und die anderen Basis-Invarianten bleiben unverändert; die Anzahl der Doppelpunkte n steigt/fällt ebenfalls um 2.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I^+ &= J^+ + 3St \quad \wedge \quad I^- = J^- \pm (-2) + 3St. \\ \Rightarrow \Delta(I^+) &= 0 \quad \wedge \quad \Delta(I^-) = \mp 2. \end{aligned}$$

Um $\Delta((I^\pm)')$ zu erhalten, müssen wir wieder die Doppelpunktindices der neuen beziehungsweise verschwindenden Doppelpunkte A und B betrachten:

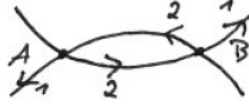
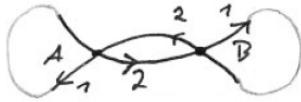


Abbildung 4.11: Doppelpunkte bei indirekter Berührung

Es gibt wieder vier Möglichkeiten, wie die Enden verbunden werden können, damit wir eine Kurve erhalten.

Fall 1:



$$A : i_1 = -1, i_2 = 1 \Rightarrow i_A = -2$$

$$B : i_1 = -1, i_2 = 1 \Rightarrow i_B = -2$$

Abbildung 4.12: Doppelpunktindices bei Fall 1

Wir sehen: $i_A + i_B = -4$.

Seien nun wieder o.B.d.A. n und $n-1$ beziehungsweise $n+1$ und $n+2$ die Doppelpunkte A und B .

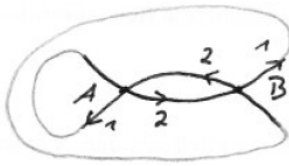
$$\begin{aligned} \Rightarrow (I^+)' &= \frac{\sum_{a=1}^{n \pm 2} i_a + 2(n \pm 2)}{4} \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a + i_A + i_B + 2n + 4}{4} & , \text{ bei positiver direkter Berührung} \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a - i_A - i_B + 2n - 4}{4} & , \text{ bei negativer direkter Berührung} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a + 2n}{4} & , \dots \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a + 2n}{4} & , \dots \end{cases} \\ &= (I^+)' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta((I^+)') = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (I^-)' &= \frac{\sum_{a=1}^{n \pm 2} i_a - 2(n \pm 2)}{4} \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a + i_A + i_B - 2n - 4}{4} & , \text{ bei positiver direkter Berührung} \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a - i_A - i_B - 2n + 4}{4} & , \text{ bei negativer direkter Berührung} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{a=1}^n i_a - 2n - 8}{4} & , \dots \\ \frac{\sum_{a=1}^n i_a - 2n + 8}{4} & , \dots \end{cases} \\ &= (I^-)' \mp 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta((I^-)') = \mp 2$$

Fall 2:



$$A: i_1 = -1, i_2 = 5 \Rightarrow i_A = -6$$

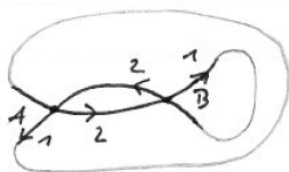
$$B: i_1 = 3, i_2 = 1 \Rightarrow i_B = 2$$

Abbildung 4.13: Doppelpunktindices bei Fall 2

Wieder gilt $i_A + i_B = -4$ und wir erhalten genau wie in Fall 1 $\Delta((I^+)') = 0$ und $\Delta((I^+)') = \mp 2$.

Die restlichen beiden Fälle gehen wieder analog.

Fall 3:

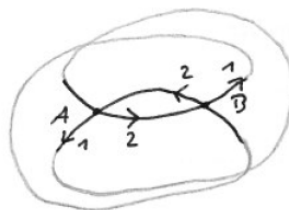


$$A: i_1 = 3, i_2 = 1 \Rightarrow i_A = 2$$

$$B: i_1 = -1, i_2 = 5 \Rightarrow i_B = -6$$

Abbildung 4.14: Doppelpunktindices bei Fall 3

Fall 4:



$$A: i_1 = 3, i_2 = 5 \Rightarrow i_A = -2$$

$$B: i_1 = 3, i_2 = 5 \Rightarrow i_B = -2$$

Abbildung 4.15: Doppelpunktindices bei Fall 4

Offensichtlich gilt jeweils $i_A + i_B = -4$.

Für die indirekte Selbstberührung gilt also $\Delta(I^\pm) = \Delta((I^\pm)')$.

Dreifachpunkt:

Nach Definition steigt/fällt St um 1 und die anderen Basis-Invarianten bleiben unverändert; die Anzahl der Doppelpunkte n bleibt erhalten.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I^+ &= J^+ + 3(St \pm 1) \quad \wedge \quad I^- = J^- + 3(St \pm 1) \\ I^+ &= J^+ + 3St \pm 3 \quad \wedge \quad I^- = J^- + 3St \pm 3 \\ \Rightarrow \Delta(I^+) &= \Delta(I^-) = \pm 3. \end{aligned}$$

Um $\Delta((I^\pm)')$ zu erhalten, müssen wir die Doppelpunktindices der drei Doppelpunkte A , B und C und deren Veränderung beim Durchlaufen eines Dreifachpunkts betrachten:



Abbildung 4.16: Doppelpunkte beim Dreifachpunkt

Da es für jede Seite des Dreiecks zwei verschiedene Möglichkeiten zur Orientierung gibt, müssen wir insgesamt acht verschiedene Dreiecke betrachten. Wie wir allerdings feststellen werden, gehören davon je zwei „zusammen“ in dem Sinne, dass sie beim Durchlauf eines Dreifachpunkts ineinander übergehen. Wir gehen nun alle Möglichkeiten durch und betrachten die jeweils dazugehörigen Möglichkeiten, das Dreieck zu einer Kurve zu machen.

Fall 1:



Abbildung 4.17: Orientierung Fall 1

Für diese Orientierung gibt es folgende Möglichkeiten, die Enden zu einer Kurve zu verbinden:

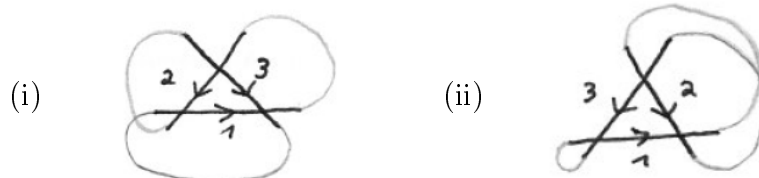


Abbildung 4.18: mögliche Kurven

Wir untersuchen bei beiden die Veränderung von St und sehen, dass unser Startdreieck durch Drehen in ein anders orientiertes übergeht:

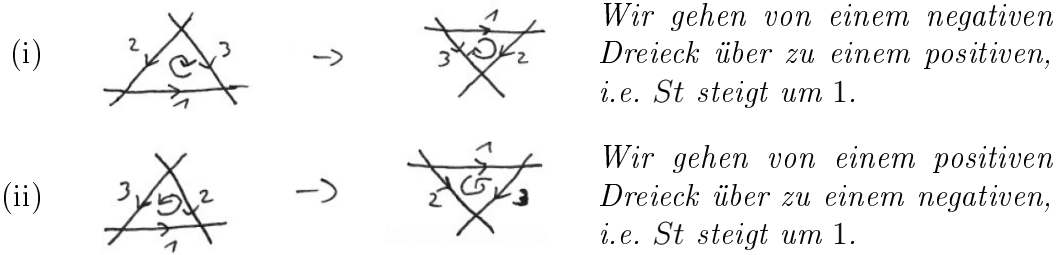


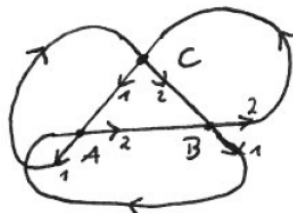
Abbildung 4.19: Veränderung von St bei den möglichen Kurven

Durch Drehen des neuen Dreiecks erhalten wir das Dreieck mit folgender Orientierung:



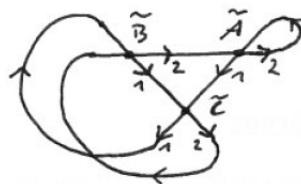
Abbildung 4.20: Orientierung des neuen Dreiecks

Unser Startdreieck und diese Dreieck gehen also durch die St -Bewegung ineinander über. Wir betrachten nun zunächst die Doppelpunktindices von Kurve (i) vor und nach dem Durchlaufen des Dreifachpunkts:



$$\begin{aligned} A: i_1 = -5, i_2 = 1 &\Rightarrow i_A = -6 \\ B: i_1 = -1, i_2 = 1 &\Rightarrow i_B = -2 \\ C: i_1 = -1, i_2 = 1 &\Rightarrow i_C = -2 \end{aligned}$$

Abbildung 4.21: Kurve (i) vor der St -Bewegung



$$\begin{aligned} \tilde{A}: i_1 = -1, i_2 = -3 &\Rightarrow i_{\tilde{A}} = 2 \\ \tilde{B}: i_1 = -1, i_2 = 1 &\Rightarrow i_{\tilde{B}} = -2 \\ \tilde{C}: i_1 = -1, i_2 = -3 &\Rightarrow i_{\tilde{C}} = 2 \end{aligned}$$

Abbildung 4.22: Kurve (i) nach der St -Bewegung

Wir sehen: $i_A + i_B + i_C = -10$ und $i_{\tilde{A}} + i_{\tilde{B}} + i_{\tilde{C}} = 2$. Damit wollen wir nun $(I^\pm)'_{vor}$ und $(I^\pm)'_{nach}$ berechnen. Seien dazu o.B.d.A. $n-2, n-1, n$ die Doppelpunkte A, B, C beziehungsweise $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$.

$$\begin{aligned} (I^\pm)'_{vor} &= \frac{\sum_{j=1}^{n-3} i_j + i_A + i_B + i_C \pm 2n}{4} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n-3} i_j - 10 \pm 2n}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I^\pm)'_{nach} &= \frac{\sum_{j=1}^{n-3} i_j + i_{\tilde{A}} + i_{\tilde{B}} + i_{\tilde{C}} \pm 2n}{4} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n-3} i_j + 2 \pm 2n}{4}. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir nun $\Delta((I^\pm)')$:

$$\begin{aligned} \Delta((I^\pm)') &= (I^\pm)'_{nach} - (I^\pm)'_{vor} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= +3. \end{aligned}$$

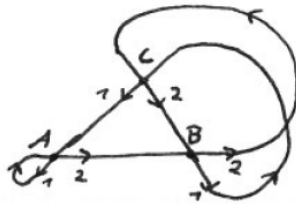
Da wir einen positiven Durchlauf des Dreifachpunkts haben, gilt dann $\Delta(I^\pm) = +3 = \Delta((I^\pm)')$.

Um den negativen Durchlauf zu überprüfen, gehen wir bei obigen Kurven einfach von Abbildung 4.22 zu Abbildung 4.21, i.e. wir müssen bei der Berechnung von $\Delta(I^\pm)$ einfach $(I^\pm)'_{nach}$ und $(I^\pm)'_{vor}$ vertauschen:

$$\begin{aligned} \Delta((I^\pm)') &= (I^\pm)'_{vor} - (I^\pm)'_{nach} \\ &= \frac{-12}{4} \\ &= -3 \end{aligned}$$

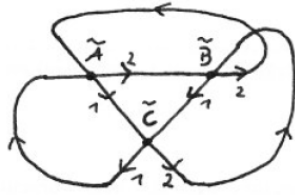
Wir erkennen $\Delta(I^\pm) = -3 = \Delta((I^\pm)')$ beim negativen Durchlauf des Dreifachpunkts.

Betrachten wir nun Kurve (ii):



$$\begin{aligned} A: i_1 = -1, i_2 = 1 &\Rightarrow i_A = -2 \\ B: i_1 = 3, i_2 = 1 &\Rightarrow i_B = 2 \\ C: i_1 = 3, i_2 = 1 &\Rightarrow i_C = 2 \end{aligned}$$

Abbildung 4.23: Kurve (ii) vor der *St*-Bewegung



$$\begin{aligned} \tilde{A}: i_1 = -1, i_2 = 1 &\Rightarrow i_{\tilde{A}} = -2 \\ \tilde{B}: i_1 = -1, i_2 = 5 &\Rightarrow i_{\tilde{B}} = -6 \\ \tilde{C}: i_1 = 1, i_2 = -1 &\Rightarrow i_{\tilde{C}} = -2 \end{aligned}$$

Abbildung 4.24: Kurve (ii) nach der *St*-Bewegung

Wir sehen: $i_A + i_B + i_C = 2$ und $i_{\tilde{A}} + i_{\tilde{B}} + i_{\tilde{C}} = -10$. Eine zu Kurve (i) analoge Rechnung ergibt wieder $\Delta(I^\pm) = \pm 3 = \Delta((I^\pm)')$.

Die restlichen drei Fälle ergeben wieder durch analoge Rechnung dasselbe Ergebnis; der Vollständigkeit wegen werden noch die Bilder der restlichen Fälle angeben.

Fall 2:

Das Dreieck vor und nach Durchlaufen des Dreifachpunkts:



Abbildung 4.25: Orientierung der Dreiecke in Fall 2

Für diese Orientierung gibt es folgende Möglichkeiten, die Enden zu einer Kurve zu verbinden:

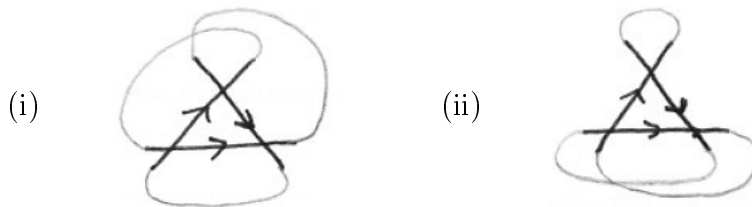


Abbildung 4.26: mögliche Kurven

Fall 3:

Das Dreieck vor und nach Durchlaufen des Dreifachpunkts:



Abbildung 4.27: Orientierung der Dreiecke in Fall 3

Für diese Orientierung gibt es nun folgende Möglichkeiten, die Enden zu einer Kurve zu verbinden:

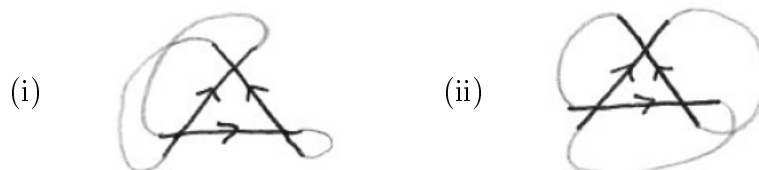


Abbildung 4.28: mögliche Kurven

Fall 4:

Das Dreieck vor und nach Durchlaufen des Doppelpunkts:



Abbildung 4.29: Orientierung der Dreiecke in Fall 4

Hier gibt es folgende Möglichkeiten für die Orientierung, die Enden zu einer Kurve zu verbinden:

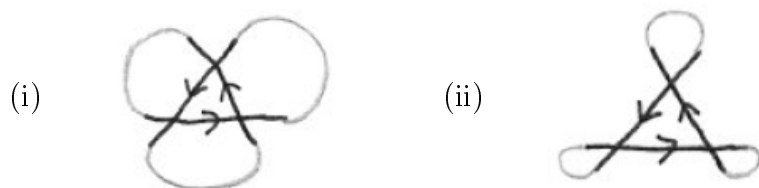


Abbildung 4.30: mögliche Kurven

Insgesamt gilt dann die Gleichheit $\Delta(I^\pm) = \Delta((I^\pm)')$ auch für Dreifachpunkte und Schritt 2 ist damit beendet.

Aus beiden Schritten zusammen erhalten wir $I^\pm = (I^\pm)'$ und das Theorem ist bewiesen. \square

Bemerkung 19. *Es gilt $I^+ - I^- = J^+ - J^- = n = \#Doppelpunkte$.*

4.3 Die Additivität der Invarianten

Wir wollen in diesem Abschnitt die Additivität der Invarianten untersuchen und starten dazu mit der Definition der Summe zweier Kurven.

Definition. Die *zusammenhängende Summe* zweier Kurven, eine in der linken, eine in der rechten Halbebene, erhalten wir, indem wir die beiden Kurven durch eine Brücke verbinden, welche die Orientierung der beiden Kurven erhält.

Beispiel.



Abbildung 4.31: zusammenhängende Summe von K_2 und K_3

Bemerkung 20. Die *zusammenhängende Summe* ist keine Operation auf den Kurvenklassen, denn manche Kurven können nicht durch eine Brücke verbunden werden und bei manchen Kurve gibt es mehrere Brücken, welche zu unterschiedlichen Kurven führen.

Beispiel. Zwei unterschiedlich orientierte K_1 Kurven können nicht zusammenhängend summiert werden:

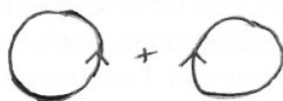


Abbildung 4.32: nicht zusammenhängend summierbare Kurven

Für folgende beiden Kurven existieren zwei Brücken:

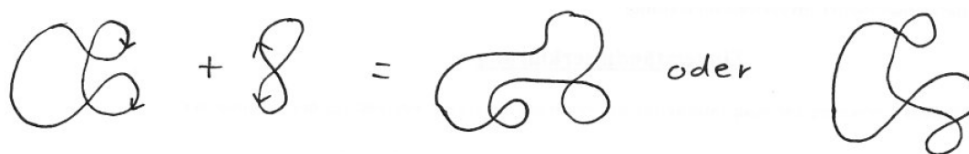


Abbildung 4.33: zwei verschiedene Brücken möglich

Theorem 21. Die Invariante St ist additiv (unter der Voraussetzung, dass eine Brücke zwischen den beiden Kurven existiert), i.e.

$$St(\gamma + \eta) = St(\gamma) + St(\eta).$$

Der folgende Beweis orientiert sich an [5] (S. 68).

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für die Standardkurven und dann für allgemeine Kurven.

Schritt 1:

Zuerst betrachten wir die Standardkurven. Wie man aus Abbildung 3.3 erkennen kann, erhält man die Standardkurven K_i mit $i \geq 2$, indem man $(i - 1)$ K_2 Kurven addiert; es gilt also: $K_i = K_2 \cdot (i - 1)$.

Mit der Definition von St sehen wir $St(K_i) \stackrel{\text{Def.}}{=} i - 1 = (i - 1) \cdot St(K_2)$.

$\Rightarrow K_i$ mit $i \geq 2$ sind additiv.

Für K_1 gilt offensichtlich: $St(K_i + K_1) = St(K_i) = i - 1 = i - 1 + 0 = St(K_i) + St(K_1) \forall i$, denn die Addition einer Kurve mit K_1 verändert die Kurve nicht.

$\Rightarrow K_1$ ist additiv.

Es fehlt noch K_0 . Für die Addition mit K_1 gilt obiges; daher müssen wir nur die Addition mit K_2 betrachten. Schauen wir uns also die Kurve $K_0 + K_2$ etwas genauer an:

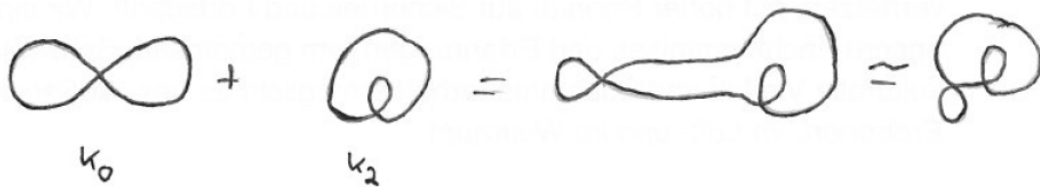


Abbildung 4.34: zusammenhängende Kurve von K_0 und K_2

Nun betrachten wir folgendes Teilstück und beobachten die Veränderung von St :

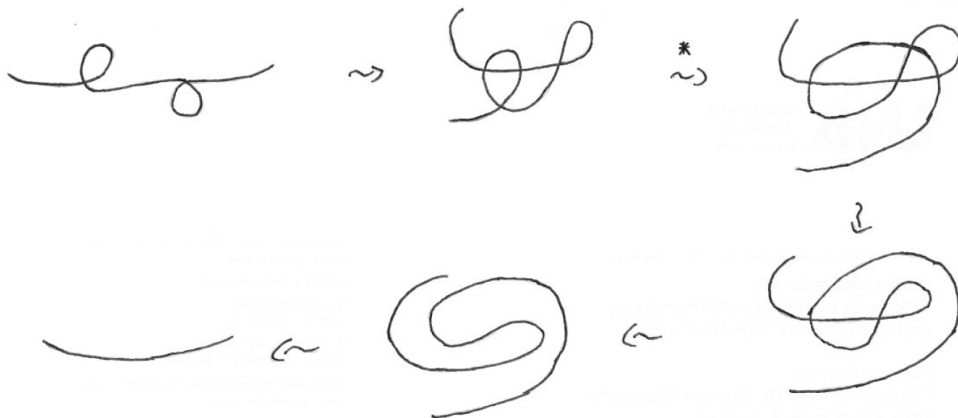


Abbildung 4.35: Auflösung zweier benachbarten entgegengesetzt orientierter Loops

Wir betrachten die St -Bewegung im Schritt * näher:



Abbildung 4.36: Dreiecke bei der St -Bewegung

Das verschwindende Dreieck ist positiv ($q = 2$), das neue negativ ($q = 1$), i.e. St sinkt um 1.

Beachte: Um St von $K_0 + K_2$ zu erhalten, müssen wir von K_1 ausgehen und diese Sequenz rückwärts durchlaufen, i.e. St steigt dann um 1.

Insgesamt sehen wir: $St(K_0 + K_2) = 1 = 0 + 1 = St(K_0) + St(K_2)$.

$\Rightarrow K_0$ ist additiv.

Folglich ist St für die Standardkurven additiv.

Schritt 2:

Nun wollen wir die Additivität für allgemeine Kurven zeigen. Seien dazu γ und η zwei Kurven mit $ind(\gamma) = i$, $ind(\eta) = j$.

Sei $\zeta := \gamma + \eta$ mit $ind(\zeta) = k$. Dann gilt für die drei Kurven:

$$St(\gamma) = St(K_i) + \Delta St(K_i),$$

$$St(\eta) = St(K_j) + \Delta St(K_j),$$

$$St(\zeta) = St(K_k) + \Delta St(K_k).$$

Da St unter den Standardkurven additiv ist, erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned} St(\gamma + \eta) &= St(K_i + K_j) + \Delta St(K_k) \\ &= St(K_i) + St(K_j) + \Delta St(K_k) \\ &= St(\gamma) - \Delta St(K_i) + St(\eta) - \Delta St(K_j) + \Delta St(K_k) \\ &\stackrel{*}{=} St(\gamma) - \Delta St(K_i) + St(\eta) - \Delta St(K_j) + \Delta St(K_i) + \Delta St(K_j) \\ &= St(\gamma) + St(\eta). \end{aligned}$$

* : Es gilt $\Delta St(K_k) = \Delta St(K_i) + \Delta St(K_j)$, da $\Delta St(K_k)$ die Veränderung von St bei der Umformung von $K_k = K_i + K_j$ zu $\zeta = \gamma + \eta$ ist und eine St -Bewegung lokal ist. Somit betrifft sie je nur einen Teil (K_i oder K_j) der Kurve K_k .

□

Damit können wir nun folgendes Korollar aus Theorem 18 ziehen.

Korollar 22. *Die Invarianten J^\pm sind additiv bezüglich der zusammenhängenden Summe zweier Kurven.*

Beweis. Es ist evident, dass die Anzahl der Doppelpunkte n additiv ist, und nach Theorem 21 ist auch St additiv.

Wir zeigen nun, dass die Summe über die Indices der Doppelpunkte additiv ist, denn dann ist I^\pm additiv. Die Additivität von J^\pm folgt dann aus der Additivität von I^\pm und St und aus $J^\pm = I^\pm - 3St$.

Sei $\zeta = \gamma + \eta$. Die Addition erhält die Halbindices an jedem Doppelpunkt von γ beziehungsweise η , denn der Rotationswinkel des Vektors ändert sich insgesamt beim zusätzlichen Durchlaufen von η beziehungsweise γ nicht. Ergo ist der Index eines Doppelpunkts additiv und damit auch die Summe über die Indices der Doppelpunkte. □

5 Doppeltangenten

In diesem finalen Kapitel werden wir das Konzept der Doppeltangenten einführen und mit deren Hilfe eine Möglichkeit finden, die Basis-Invarianten direkt aus einer gegebenen Kurve zu berechnen. Inhaltlich orientieren wir uns hier lose an [4] (Kapitel 3 und 4.1). Ferrand setzt sich dort primär mit sphärischen Wellenfronten auseinander. Für ebene Kurven ergeben sich einige Vereinfachungen, jedoch können wir Ferrands Beweisideen nicht übernehmen.

5.1 Doppeltangenten

Definition. Eine Tangente t an einem Punkt p der Kurve γ ist eine **Doppeltangente** d , falls t auch die Tangente eines anderen Punkts $\tilde{p} \neq p$ von γ ist.

Wir nehmen an, dass alle Doppeltangenten **einfach** sind, i.e. jede Doppeltangente hat nur zwei verschiedene Kontaktpunkte mit der Kurve. Des Weiteren nehmen wir an, dass keine Doppeltangente tangential zu einem Wendepunkt der Kurve ist.



Abbildung 5.1: einfache Doppeltangente



Abbildung 5.2: nicht einfache Doppeltangente

Definition. Ein **Wendepunkt** einer Kurve γ ist ein Punkt $p = \gamma(t)$, welcher Krümmung $\kappa(t) = 0$ hat und bei dem die Krümmung in $[t - \epsilon, t + \epsilon]$ das signum ändert. Die Anzahl der Wendepunkte einer Kurve wird mit f bezeichnet.

Bemerkung 23. f ist stets gerade, denn:

Angenommen wir starten bei einem Punkt mit positiver/negativer Krümmung und durchlaufen einen Wendepunkt; danach ist die Krümmung negativ/positiv. Also muss es einen weiteren Wendepunkt geben, um wieder zur Ausgangskrümmung zurückzukommen. Das gilt für alle Wendepunkte, die das signum der Krümmung derart verändern, dass es vom signum der Krümmung des Ausgangspunkts verschieden ist.

Folglich muss f gerade sein. □

Klassifikation von Doppeltangenten

Definition. Einer Doppeltangente d ordnen wir drei grundlegende signa $\epsilon_{s,c,i}$ zu. Diese sind wie folgt definiert:

- $\epsilon_s(d)$ ist positiv (negativ), wenn die Tangentenvektoren an den beiden Kontaktpunkten von d mit der Kurve über die Doppeltangente (nicht) übereinstimmen
- $\epsilon_c(d)$ ist positiv (negativ), wenn die Kurve lokal (nicht) auf der selben Seite der Doppeltangente d liegt
- $\epsilon_i(d)$ ist positiv (negativ), wenn die Normalenvektoren der Kurve an den beiden Kontaktpunkten mit d über die Doppeltangente (nicht) übereinstimmen

Wir nennen eine Doppeltangente **direkt/entgegengesetzt**, falls $\epsilon_i(d) = +/-$.

Bemerkung 24. Für ebene Kurven gilt: $\epsilon_i = \epsilon_s$, denn:

Der Normalenvektor ist immer orthogonal zum Tangentenvektor und es gibt nach der Wahl der Richtung des Normalenvektors keine Möglichkeit, dass sich diese Richtung beim Durchlaufen einer Kurve ändert. \square

Definition. Das **signum** einer Doppeltangente d , egal ob direkt oder entgegengesetzt, ist definiert durch:

$$\sigma(d) := \epsilon_s(d) \cdot \epsilon_c(d)$$

Definition. Mit $T_{\epsilon_i}^\sigma$ bezeichnen wir die Anzahl der Doppeltangenten von Typ (σ, ϵ_i) einer Kurve.

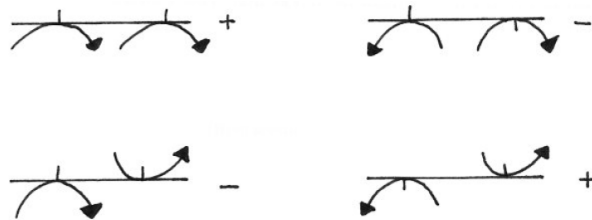


Abbildung 5.3: Die Signa direkter und entgegengesetzter Doppeltangenten

Bemerkung 25. $\sigma(d)$ zeigt an, ob der Normalenvektor sich an den beiden Kontaktpunkten der Kurve mit d in dieselbe Richtung dreht oder nicht (siehe Abb. 5.3).

5.2 Der Zusammenhang mit J^\pm

In diesem Abschnitt werden wir den Zusammenhang von $T_{\epsilon_i}^\sigma$ und J^\pm beweisen, womit wir dann J^\pm und auch St direkt aus einer Kurve berechnen können. Außerdem wird die Fabricius-Bjerre Formel aus diesem Zusammenhang folgen.

Wir beginnen mit einem vorbereitenden Lemma.

Lemma 26. Die folgende Relation gilt für jede Doppeltangente d einer ebenen Kurve:

$$\sigma(d) = (-1)^{f_d} = (-1)^{f'_d}$$

Dabei ist f_d beziehungsweise f'_d die Anzahl der Wendepunkte auf den beiden Stücken der Kurve, welche durch die Kontaktpunkte mit d getrennt werden.

Beweis. Da $f = f_d + f'_d$ nach Bemerkung 23 gerade ist, müssen f_d und f'_d die gleiche Parität haben. Damit folgt $(-1)^{f_d} = (-1)^{f'_d}$.

Wir betrachten nun die beiden Kontaktpunkte einer Kurve mit d .

Drehen sich die Normalenvektoren an diesen beiden Punkten in dieselbe Richtung, so ist das signum der Krümmung an beiden Punkten gleich. Damit muss zwischen diesen beiden Punkten eine gerade Anzahl von Wendepunkten f_d liegen und es gilt $\sigma(d) = +1$ in Übereinstimmung mit Bemerkung 25.

Drehen sich die Normalenvektoren in unterschiedliche Richtungen, so ist das signum der Krümmung an beiden Punkten verschieden und daher muss f_d ungerade sein. Es folgt $\sigma(d) = -1$ in Übereinstimmung mit Bemerkung 25. □

Beispiel.



Die einzige Doppeltangente der Kurve K_2 unterteilt die Kurve in das gepunktete und das durchgezogene Stück.

Abbildung 5.4: Beispiel zur Trennung einer Kurve durch die Kontaktpunkte mit einer Doppeltangente

Definition. Eine Kurve heißt **lokal konvex**, falls sie überall positive Krümmung hat.

Bemerkung 27. Eine lokal konvexe Kurve hat keine Wendepunkte.

Bemerkung 28. Die Standardkurven für $|ind| > 0$ sind lokal konvex.

Bemerkung 29. Nach Lemma 26 gilt für lokal konvexe Kurven $\sigma(d) = +1$ für alle Doppeltangenten d .

Theorem 30. Für eine ebene Kurve γ gilt:

$$J^+(\gamma) = T_+^+ - T_+^- + 1 - ind(\gamma)^2 - \frac{f}{2},$$

$$J^-(\gamma) = T_-^+ - T_-^- + 1 - ind(\gamma)^2.$$

Ferrand verwendet in seinem Beweis ([4] (S. 230)) seine Ergebnisse von der Betrachtung sphärischer Wellenfronten; daher wird hier ein neuer Beweis dieses Theorems angegeben.

Beweis. Wir gehen wie beim Beweis von Theorem 18 vor und definieren $\tilde{J}^+ := T_+^+ - T_+^- + 1 - \text{ind}(\gamma)^2 - \frac{f}{2}$ und $\tilde{J}^- := T_-^+ - T_-^- + 1 - \text{ind}(\gamma)^2$. Allerdings können Doppeltangenten auch unter generischen Homotopien entstehen. Daher müssen wir dies in einem weiteren Schritt untersuchen.

Schritt 1: Beweis für die Standardkurven

K_0 :

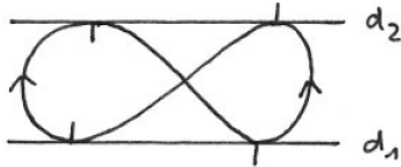


Abbildung 5.5: K_0 mit Doppeltangenten

K_0 hat $f = 2$ Wendepunkte und die beiden Doppeltangenten d_1 und d_2 , deren Typ wir nun herausfinden wollen.

Für beide Doppeltangenten gilt $\epsilon_c = +$, da die Kurve jeweils lokal auf derselben Seite der Doppeltangente liegt. Außerdem stimmen jeweils die Tangentenvektoren an den Kontaktpunkten nicht überein, i.e. beide Doppeltangenten haben $\epsilon_s = \epsilon_i = -$.

$\Rightarrow \sigma = -$ für beide Doppeltangenten.

\Rightarrow Beide Doppeltangenten sind vom Typ $(-, -)$, i.e. $T_-^- = 2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{J}^+(K_0) &= 0 - 0 + 1 - 0 - \frac{2}{2} = 0 = J^+(K_0), \\ \tilde{J}^-(K_0) &= 0 - 2 + 1 - 0 = -1 = J^-(K_0). \end{aligned}$$

K_1 : hat offenbar weder Wendepunkte noch Doppeltangenten.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{J}^+(K_1) &= 0 - 0 + 1 - 1 - \frac{0}{2} = 0 = J^+(K_1), \\ \tilde{J}^-(K_1) &= 0 - 0 + 1 - 1 = 0 = J^-(K_1). \end{aligned}$$

K_2 :



Abbildung 5.6: K_2 mit Doppeltangente

Die Doppeltangente d ist vom Typ $(+, +)$, i.e. $T_+^+ = 1$, und nach Bemerkung 28 gilt $f = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{J}^+(K_2) &= 1 - 0 + 1 - 4 - \frac{0}{2} = 0 = J^+(K_2), \\ \tilde{J}^-(K_2) &= 0 - 0 + 1 - 4 = 0 = J^-(K_2). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die K_i mit $i > 2$:

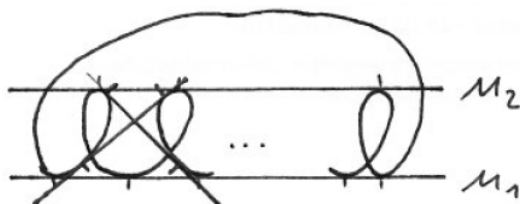


Abbildung 5.7: K_i für $i > 2$ mit Doppel- und Multitangenten

Mehr als die hier eingezeichneten Doppel- beziehungsweise Mehrfachtangente gibt es offenbar nicht.

Wir betrachten zunächst die zwei Multitangenten M_1 und M_2 . M_1 hat m und M_2 hat $m - 1$ Berührungspunkte mit der Kurve. Nun stören wir die Kurve so, dass sich die beiden Multitangenten in mehrere Doppeltangenten aufteilen:

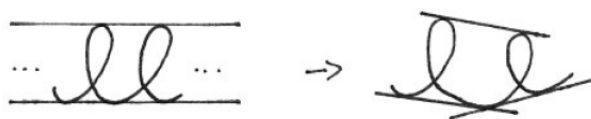


Abbildung 5.8: Störung der Multitangenten

Wir erkennen:

- jeder der m Berührungspunkte von M_1 bildet $m - 1$ Doppeltangenten (je einen mit den restlichen Berührungspunkten)
- jeder der $m - 1$ Berührungspunkte von M_2 bildet $m - 2$ Doppeltangenten (je eine mit den restlichen Berührungspunkten)

Nach den Bemerkungen 28 und 29 ist $\sigma = +1$ für alle diese Doppeltangenten. Außerdem gilt $\epsilon_i = +1$, wie wir Abbildung 5.7 entnehmen.

Ergo sind alle diese Doppeltangenten vom Typ $(+, +)$ und deren Anzahl ergibt sich wie folgt:

$$T_+^+ = \frac{m \cdot (m - 1)}{2} + \frac{(m - 1) \cdot (m - 2)}{2} = (m - 1)^2.$$

Betrachten wir nun die schrägen Doppeltangenten.

Jeder der $m - 2$ „Übergänge“ zwischen den Loops bildet je $m - 3$ Doppeltangenten mit den Spitzen der restlichen Loops, wobei die beiden benachbarten Loops nicht getroffen werden. Die beiden „Übergänge“ außen bilden je $m - 2$ Doppeltangenten mit den Spitzen der Loops; der benachbarte Loop wird auch hier nicht getroffen.

Für alle diese Doppeltangenten gilt wie oben $\sigma = +1$; jedoch stimmen die Normalenvektoren nicht über die Doppeltangente überein, i.e. $\epsilon_i = -1$. Also sind die schrägen Doppeltangenten vom Typ $(+, -)$ und deren Anzahl erhält man wie folgt:

$$T_-^+ = (m - 2) \cdot (m - 3) + 2 \cdot (m - 2) = (m - 1) \cdot (m - 2).$$

Die Standardkurve K_i hat $i - 1$ Loops und M_2 hat $m - 1$ Berührungspunkte, i.e. $m = i$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_+^+ &= (i - 1)^2, \\ T_-^+ &= (i - 1) \cdot (i - 2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{J}^+(K_i) &= (i - 1)^2 + 1 - i^2 = 2(i - 1) = J^+(K_i), \\ \tilde{J}^-(K_i) &= (i - 1) \cdot (i - 2) + 1 - i^2 = -3(i - 1) = J^-(K_i). \end{aligned}$$

Und damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2: \tilde{J}^\pm bleibt auch unter generischen Homotopien erhalten

Wir homotopieren nun die Kurve in einer Umgebung; es gelten folgende drei Äquivalenzen:

- (i) es entsteht/verschwindet ein Paar Wendepunkte in der Umgebung \Leftrightarrow eine Doppeltangente vom Typ $(+, +)$ entsteht/verschwindet in der Umgebung

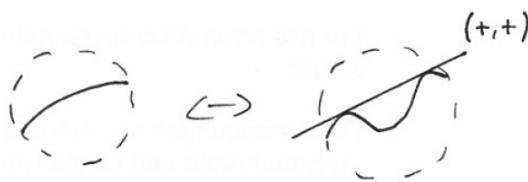


Abbildung 5.9: Äquivalenz (i)

- (ii) es entsteht/verschwindet eine Doppeltangente vom Typ $(+, +)$ mit dem Rest der Kurve \Leftrightarrow eine Doppeltangente vom Typ $(-, +)$ mit dem Rest der Kurve entsteht/verschwindet

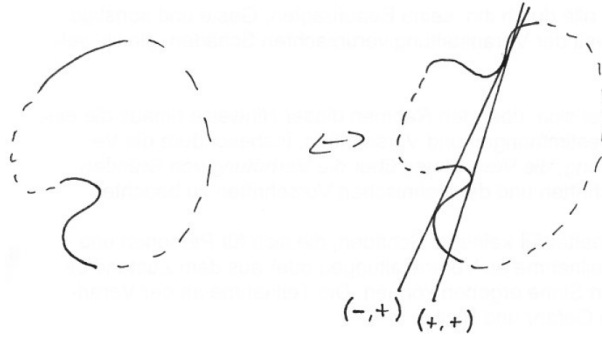


Abbildung 5.10: Äquivalenz (ii)

- (iii) es entsteht/verschwindet eine Doppeltangente vom Typ $(+, -)$ mit dem Rest der Kurve \Leftrightarrow eine Doppeltangente vom Typ $(-, -)$ mit dem Rest der Kurve entsteht/verschwindet

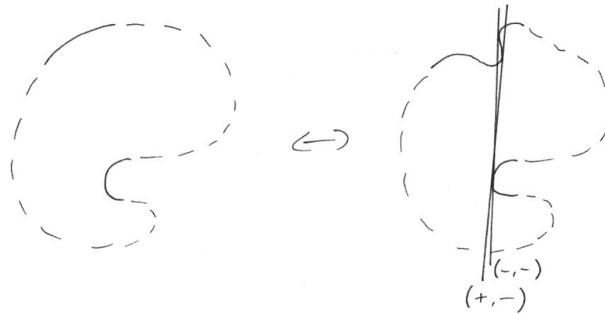


Abbildung 5.11: Äquivalenz (iii)

Damit folgt $\Delta(\tilde{J}^\pm) = 0 = \Delta(J^\pm)$ für generische Homotopien und Schritt 2 ist gezeigt.

Schritt 3: \tilde{J}^\pm und J^\pm verändern sich unter den Desastern gleich, i.e. $\Delta(\tilde{J}^\pm) = \Delta(J^\pm)$

Sei γ eine Kurve mit je $T_{\epsilon_i}^\sigma$ Doppeltangenten der Art (σ, ϵ_i) .

O.B.d.A. betrachten wir die Desaster in einer Umgebung, in welcher die Kurve keine Doppeltangenten mit außerhalb der Umgebung hat (wir können die Kurve immer so homotopieren, dass das der Fall ist). Des Weiteren homotopieren wir die Berührungsdaster o.B.d.A. so, wie in Kapitel 3.1 dargestellt.

Im Falle einer St -Bewegung verändert sich offenbar kein $T_{\epsilon_i}^\sigma$.

Betrachten wir nun zunächst die J^+ -Bewegung:



Abbildung 5.12: Doppeltangenten bei J^+ -Bewegung

Beide Doppeltangenten haben $\epsilon_c = -$ und $\epsilon_s = \epsilon_i = +$, i.e. beide sind vom Typ $(-, +)$.
Bei der positiven J^+ -Bewegung verschwinden diese beiden Tangenten.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(\tilde{J}^+) &= \tilde{J}^+_{nachher} - \tilde{J}^+_{vorher} \\ &= T_+^+ - (T_+^- - 2) + 1 - ind(\gamma)^2 - \frac{f}{2} - T_+^+ + T_+^- - 1 + ind(\gamma)^2 + \frac{f}{2} \\ &= 2 = \Delta(J^+). \end{aligned}$$

Ähnlich sieht es bei der J^- -Bewegung aus:

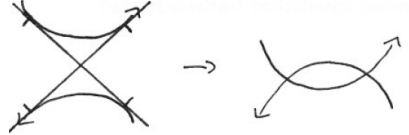


Abbildung 5.13: Doppeltangenten bei J^- -Bewegung

Beide Doppeltangenten haben $\epsilon_c = -$ und $\epsilon_s = \epsilon_i = -$, i.e. beide sind vom Typ $(+, -)$.
Bei der positiven J^- -Bewegung verschwinden diese beiden Tangenten.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(\tilde{J}^-) &= \tilde{J}^-_{nachher} - \tilde{J}^-_{vorher} \\ &= (T_-^+ - 2) - T_-^- + 1 - ind(\gamma)^2 - T_-^+ + T_-^- - 1 + ind(\gamma)^2 \\ &= -2 = \Delta(J^-). \end{aligned}$$

Für die negativen Bewegungen erhält man analog $\Delta(\tilde{J}^+) = -2 = \Delta(J^+)$ und $\Delta(\tilde{J}^-) = 2 = \Delta(J^-)$.

Und damit ist Schritt 3 vollendet.

Das Theorem folgt aus den drei Schritten. □

Mit diesem Theorem können wir nun J^+ und J^- direkt aus der Kurve bestimmen. Da I^\pm auch direkt aus der Kurve bestimmt werden kann, ist es uns mit Theorem 18 auch möglich, St direkt zu bestimmen.

Definition. $S :=$ Anzahl der Doppeltangenten, bei welchen die Kurve lokal auf der selben Seite liegt (i.e. $\epsilon_c = +$).

$O :=$ Anzahl der Doppeltangenten, bei welchen die Kurve lokal nicht auf der selben Seite liegt (i.e. $\epsilon_c = -$).

Nach Bemerkung 24 gilt dann also:

$$S = T_+^+ + T_-^- \quad \wedge \quad O = T_+^- + T_-^+.$$

Damit können wir nun mit Hilfe von Theorem 30 und Bemerkung 15 die Fabricius-Bjerre Formel herleiten, welche Fabricius-Bjerre zuerst in [3] bewiesen hat.

Korollar 31 (Fabricius-Bjerre Formel).

$$S - O = n + \frac{f}{2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} n &= J^+ - J^-, \\ n &= T_+^+ - T_+^- + 1 - ind^2 - \frac{f}{2} - T_-^+ + T_-^- - 1 + ind^2, \\ n &= T_+^+ + T_-^- - (T_-^+ + T_+^-) - \frac{f}{2}, \\ S - O &= n + \frac{f}{2}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 32. *Im Falle einer lokal konvexen Kurve folgt aus Bemerkung 27 und Bemerkung 29, dass $T_+^- = T_-^- = 0$, und damit erhalten wir aus Theorem 30 und Korollar 31:*

$$\begin{aligned} J^+ &= T_+^+ + 1 - ind^2 = T_-^+ + n + 1 - ind^2, \\ J^- &= T_-^- + 1 - ind^2 = T_+^+ - n + 1 - ind^2. \end{aligned}$$

Nun kann man sich die Frage stellen, für welche lokal konvexen Kurven mit einer festen Anzahl an Doppelpunkten n die Anzahl der Doppeltangenten minimal ist. Da $T_+^+ = T_-^+ + n$ gilt, müssen wir also T_-^+ minimieren.

Folgende Kurve erfüllt dies beispielsweise:

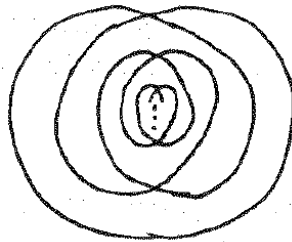


Abbildung 5.14: Die allgemeine \mathcal{A}_n Kurve (aus [1] (S. 31))

Die \mathcal{A}_n Kurve hat n Doppelpunkte und den Index $ind(\mathcal{A}_n) = n + 1$. Des Weiteren hat sie nur Doppeltangenten vom Typ $(+, +)$, wie wir in folgendem Beispiel sehen:⁹

Beispiel.

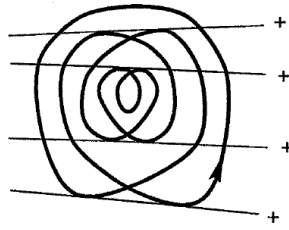


Abbildung 5.15: Die \mathcal{A}_4 Kurve (aus [4] (S. 232))

Für die \mathcal{A}_n Kurven gilt dann:

$$\begin{aligned} J^+ &= n + 1 - ind^2 = n + 1 - (n + 1)^2 = -n(n + 1), \\ J^- &= 1 - ind^2 = 1 - (n + 1)^2 = -n(n + 2). \end{aligned}$$

Insgesamt können wir nun die Basis-Invarianten direkt aus einer gegebenen Kurve bestimmen. Außerdem haben wir eine lokal konvexe Kurve gefunden, welche die Werte von J^+ und J^- für eine vorgegebene Anzahl n an Doppelpunkte minimiert.

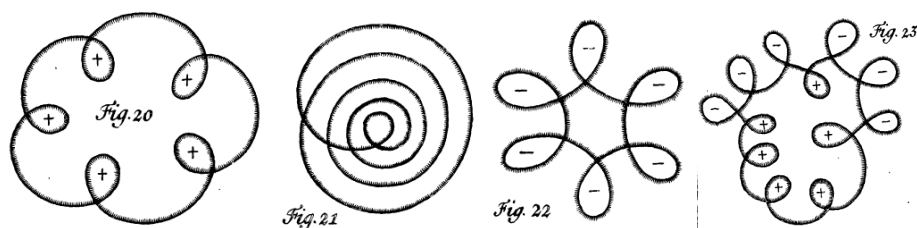
Anmerkungen

¹Beweisen lässt sich dies mit Hilfe der Umlaufzahl und deren Zusammenhang mit dem Rotationsindex (siehe Kapitel 2.3). Man beachte, dass sich die Summe der Umlaufzahlen durch das Auflösen eines Doppelpunkts nicht verändert.

²Dieses Theorem hat W. C. Graustein H. Whitney zusammen mit einem Beweis vorgeschlagen. Letzterer hat es in seinem Paper [9](S. 4) veröffentlicht.

³Im Jahre 1770 wurden die „*novi commentarii societatis regiae scientiarum gottin-
gensis*“ veröffentlicht. Darin befindet sich ein Beitrag des Mathematikers und Physikers Albrecht Ludwig Friedrich Meister mit dem Titel „*generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus*“([7]). Es geht darin wohl um Vielecke. Jedoch findet sich in Abschnitt V folgender Abschnitt (aus dem Lateinischen vom Verfasser dieser Arbeit):

Der Kürze wegen werden wir den Umlauf des Umfangs unterscheiden, indem wir ihn zuerst positiv und später negativ nennen; und wir werden nicht diese Figuren selbst betrachten, sondern Kurven, die durch diese begrenzt sind. Und zuerst ist es offensichtlich, dass die positiv umlaufenen Umfänge zu den allgemeinen Formen der Kurven in den Abbildungen 20 und 21, je nach Anzahl der Umläufe, gemacht werden können und dass die negativ umlaufenen Umfänge zur Form der Kurve in Abbildung 22 gemacht werden können. Diese (Abb. 22) unterscheidet sich bei gleicher Anzahl an Umläufen von der Kurve in Abbildung 20 nur darin, dass auch die äußeren und inneren Winkel berücksichtigt worden sind. Ferner ist es offenkundig, dass sich positive Umläufe und negative Umläufe bei gleicher Anzahl aufheben; sodass, wenn in der gesamten Kurve in Abbildung 23 die Anzahl von beiden gleich war, jene zur einfachen Figur übergeht und die Summe der Winkel hervorbringt, welche auf die gewohnte Weise aus der Anzahl der Seiten berechnet werden kann. Und ich füge auch dies hinzu: dass, wenn der Bogen (Anmerkung des Übersetzers; *sinus* kann auch „Krümmung“ oder „Sinus“ heißen) der Summe aus den Bögen der einzelnen Winkel der Figur gesucht wird, es dasselbe sein wird, wie wenn man alle Figuren berücksichtigt, die die gleiche Anzahl an Seiten haben, wenn der Umfang entweder mehr oder weniger umlaufen wird.



Abbildungen 20-23 aus [7]

Im ersten Teil dieses Abschnitts schreibt Meister, dass alle Kurven zu den allgemeinen

Formen der Kurven von Abbildung 20, 21 und 22 umgeformt werden können (die Kurven sind stets positiv orientiert); allerdings ohne diese Aussage in irgendeiner Weise zu beweisen. Des Weiteren gibt Meister keine Regeln an, welche beim Verformen von Kurven einzuhalten sind. Deshalb ist es fragwürdig, ob wir es hier mit einer frühen schwachen Version des Deformations-Theorems zu tun haben.

Allerdings muss man fairerweise auch sagen, dass es bislang keine vollständige Übersetzung von Meisters Paper gibt; es ist also durchaus vorstellbar, dass in den vorherigen Kapiteln Regeln für die Verformung von Kurven angegeben und Ergebnisse präsentiert werden, mit denen jene Aussage offensichtlich wird.

Weiterhin beschreibt er, dass sich positive und negative Umläufe (gemeint sind positiv und negativ durchlaufene Loops) bei gleicher Anzahl aufheben.

Den letzten, etwas unverständlichen Teil interpretiert Erickson ([2] (S. 18)) so, dass die Summe der integralen Winkel stets ein Vielfaches von π ist, also sein Sinus stets 0 ist. Jedoch kann das lateinische Wort *sinus* auch Bogen oder Krümmung bedeuten und es ist folglich nicht ganz klar, was Meister tatsächlich damit meint; auch hier könnte eine vollständige Übersetzung des Papers aufschlussreich sein.

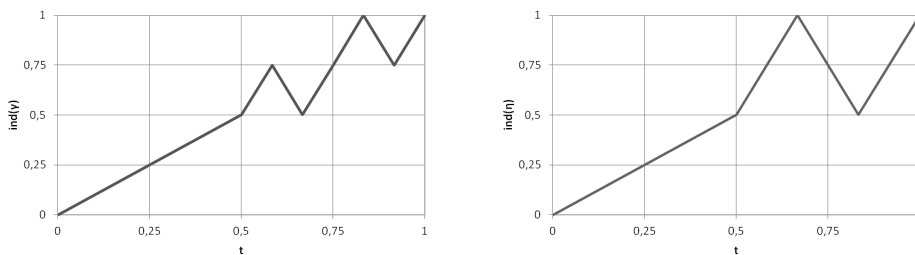
⁴Folgendes Beispiel aus [8] illustriert dies gut:

Wir betrachten die folgenden zwei nach Bogenlänge parametrisierten Kurven γ und η mit $ind(\gamma) = 1 = ind(\eta)$:



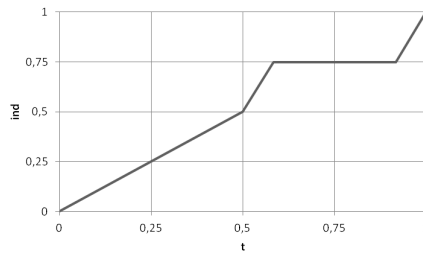
Beispielkurven γ und η

γ' und η' liegen beide auf S^1 , verlaufen jedoch unterschiedlich, wie folgende Diagramme, die den Verlauf der Umlaufzahlen um 0 darstellen, zeigen:



Verlauf der Umlaufzahlen von γ' und η' um 0

Wenn wir nun die Homotopie h' zum Zeitpunkt $s = \frac{1}{2}$ betrachten, erhalten wir folgendes Diagramm:



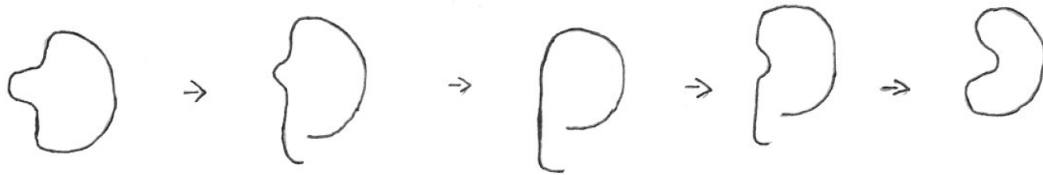
Verlauf der Umlaufzahl von h' zum Zeitpunkt $s = \frac{1}{2}$ um 0

Die aus $h'(\frac{1}{2}, t)$ rekonstruierte Kurve ist allerdings nicht geschlossen:



Die aus $h'(\frac{1}{2}, t)$ rekonstruierte Kurve

Insgesamt sieht die rekonstruierte Homotopie so aus:

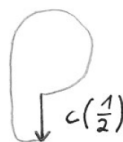


Die rekonstruierte Homotopie

Wir haben also nicht zu jedem Zeitpunkt eine geschlossene Kurve

⁵Um zu verstehen, was diese neue Homotopie anders macht, betrachten wir wieder obiges Beispiel:

Für $s = \frac{1}{2}$ erhalten wir $c(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2}, 1) - h(\frac{1}{2}, 0)$. Das ist der Vektor vom Startpunkt zum Endpunkt der Kurve:

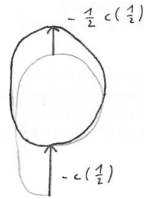


Der Vektor $c(\frac{1}{2})$

Damit erhalten wir für die rekonstruierte Homotopie:

$$h\left(\frac{1}{2}, t\right) = \int_0^t \tilde{h}'\left(\frac{1}{2}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} = \int_0^t h'\left(\frac{1}{2}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} - \int_0^t c\left(\frac{1}{2}\right) d\tilde{t} = \int_0^t h'\left(\frac{1}{2}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} - t \cdot c\left(\frac{1}{2}\right).$$

Das bedeutet, obige nicht geschlossene Kurve wird zu jedem Zeitpunkt um das $-t$ -fache des Vektors $c\left(\frac{1}{2}\right)$ verschoben. $h\left(\frac{1}{2}, t\right)$ sieht also so aus:



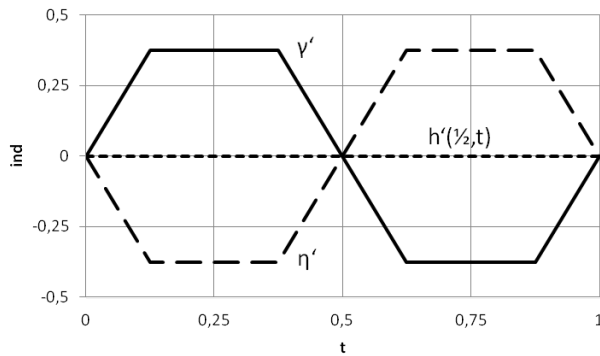
Die rekonstruierte Kurve $h\left(\frac{1}{2}, t\right)$

⁶Wir wollen das Problem bei diesem Fall wieder mit einem Beispiel aus [8] veranschaulichen und betrachten dazu die folgenden beiden 8-er Kurven:



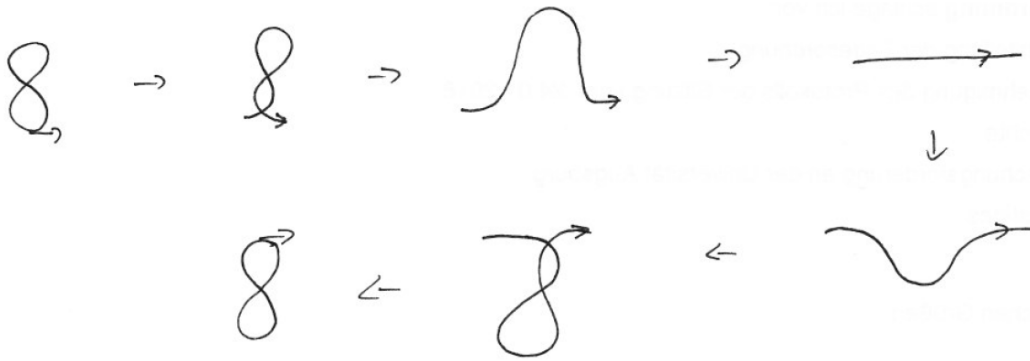
Beispiel 8er Kurven γ und η

Deren Verlauf der Umlaufzahl um 0 sieht folgendermaßen aus:



Verlauf der Umlaufzahl um 0 von γ' , η' und $h'\left(\frac{1}{2}, t\right)$

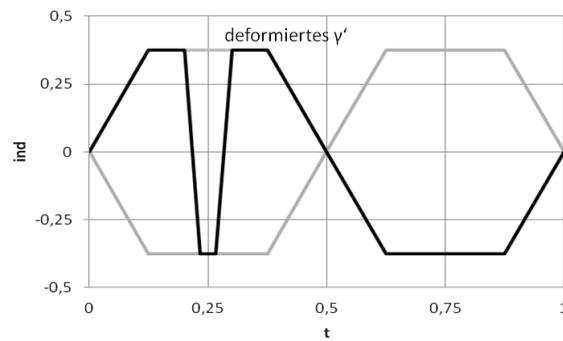
Die rekonstruierte Homotopie sieht wie folgt aus:



Die rekonstruierte Homotopie

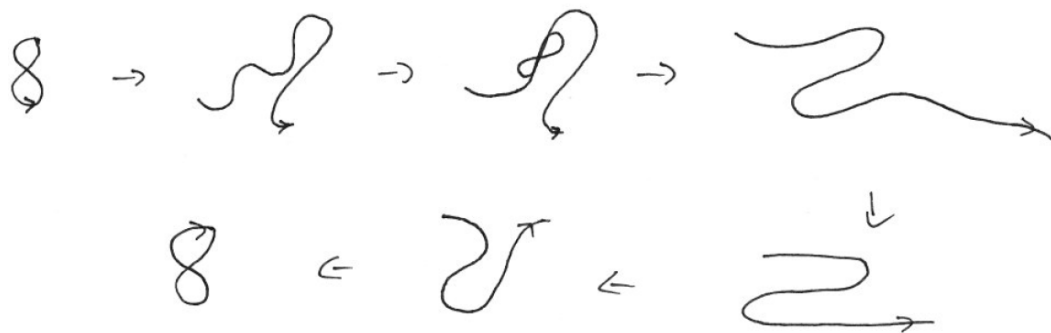
Wir sehen, dass $h'(\frac{1}{2}, t)$ konstant ist. Wenn wir nun wie in Fall 1 daraus die Kurve rekonstruieren möchten, erhalten wir nur einen Punkt, da $c(\frac{1}{2})$ dann genau der Gerade von $\int_0^t h'(\frac{1}{2}, \tilde{t}) d\tilde{t}$ entspricht und damit $h(\frac{1}{2}, t)$ stets am Startpunkt bleibt. Das ist unter Homotopien jedoch nicht erlaubt.

⁷In obigem Beispiel können wir dies folgendermaßen anwenden:



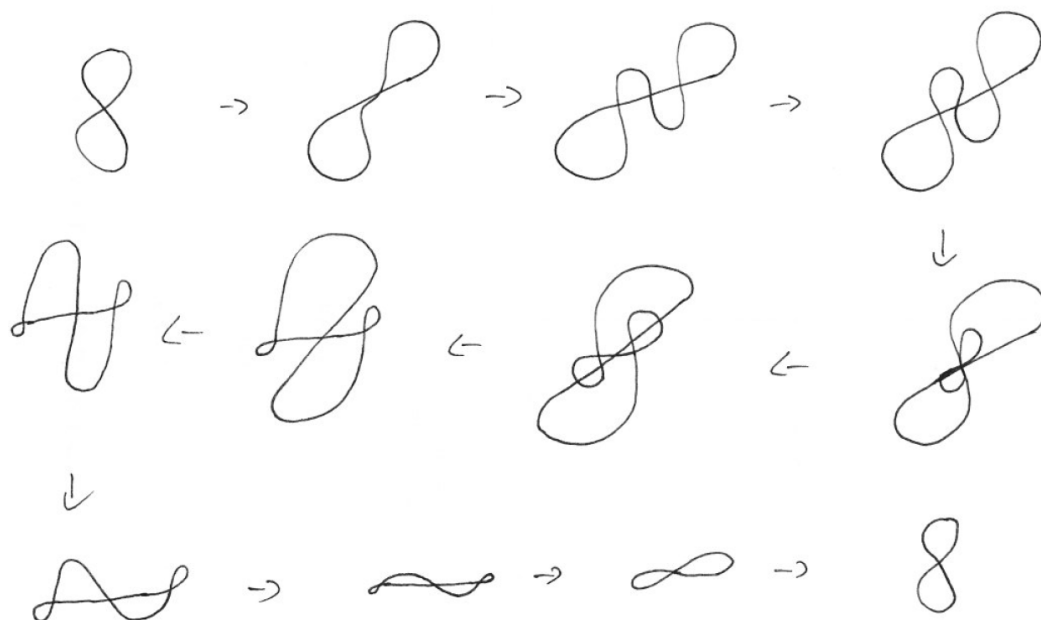
Das deformierte γ'

Dann gibt es kein konstantes $h'(s, t)$ mehr und die aus rekonstruierte Homotopie sieht so aus:



Die rekonstruierte Homotopie

Die wie in Fall 1 modifizierte Homotopie sieht damit folgendermaßen aus:



Die modifizierte Homotopie

⁸Interessanterweise ist die erste Kurve von Meister in Anmerkung 3 auch eine Standardkurve und im übersetzten Abschnitt schreibt Meister auch von der allgemeinen Form dieser Kurve. Also könnte Meister bereits die Standardkurven gekannt haben.

⁹Interessant ist, dass die zweite Kurve von Meister in Anmerkung 3 dieselben Eigenschaften wie die \mathcal{A}_4 Kurve ($n = 4$, $ind = 5$ und nur Doppeltangeten vom Typ $(+, +)$) hat.

Die allgemeine Form jener Kurve von Meister minimiert also ebenfalls T_{-}^{\pm} .

Literaturverzeichnis

- [1] Vladimir Arnold. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. pages 1–58, 1993.
- [2] Jeff Erickson. Generic and regular curves. pages 1–22, 2013.
- [3] Fr. Fabricius-Bjerre. On the double tangents of plane curves. *Math. Scand.*, 11:113–116, 1962.
- [4] Emmanuel Ferrand. On the bennequin invariant and the geometry of wave fronts. *Geometriae Dedicata*, 65, pages 219–245, 1997.
- [5] Sarah Gulde. Classification of plane curves. pages 54–76, 1999.
- [6] Heinz Hopf. Über die drehung der tangente und sehnens ebener kurven. *Compositio Mathematica*, tome 2, pages 50–62, 1935.
- [7] Albrecht Ludwig Friedrich Meister. Generalia de genesi figurarum planarum, et independentibus earum affectionibus. *Novi commentarii societatis regiae scientiarum gotttingensis*, pages 144–180 + 9 Seiten mit Abbildungen, 1770.
- [8] The Topology Films Project. Regular homotopies in the plane. 1972.
- [9] Hassler Whitney. On regular closed curves in the plane. *Compositio Mathematica*, tome 4, pages 276–284, 1937.