

Schriftliche Hausarbeit
Ausarbeitung der Theorie und eines Experiments
für den Unterricht zur Quantenphysik (Ph 10,
G8) zum Thema 'Quantisierter Widerstand von
Nanodrähten'

Matthias Brandl¹

¹Studienseminar Hardenberg Gymnasium Fürth 05/07

„Table-top quantum theory“



Abbildung: Karikatur aus „The Economist“, 28. Oktober 1995

Einleitung

Historie

Theorie

Experiment

Versuchsaufbau

Versuchsdurchführung

Ergebnisse und Auswertung

Einbindung in den Fachlehrplan Ph10, G8

Meilensteine

- ▶ 14.12.1900 Max Planck: Hypothese über die Quantelung der Energie el.mg. Strahlung
- ▶ 23.12.1947 Bell Labs: Transistor
- ▶ Wafer - Mikrosystemtechnik
- ▶ Nanotechnologie
- ▶ 1981 Rastertunnelmikroskop (Binning, Rohrer; Nobelpreis 1986)
Spitze Nadel aus Metall in die Nähe der Oberfläche eines Materials
Tunneleffekt: Elektronen treten aus dem Material aus

J.K. Gimzewski und R. Möller (1987)

- Untersuchung des „Übergangs vom Tunnelbereich zum Punktkontakt“ (Silberoberfläche)
- interessante Entdeckung an der Grenze zwischen klassischer Physik und Quantenphysik
- Sprunghafter Anstieg des Tunnelstroms

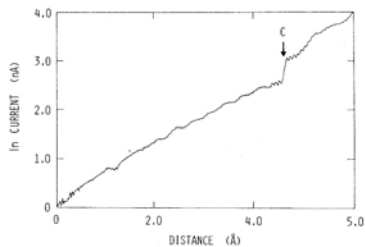


Abbildung: FIG. 2. aus [2]

IBM

- Mittels Punktkontakt mit der Oberfläche können kleine Hügel auf der Oberfläche erzeugt werden.
- Beispiel: 1990 IBM-Laboratorium in San Jose (Xenon-Atome)

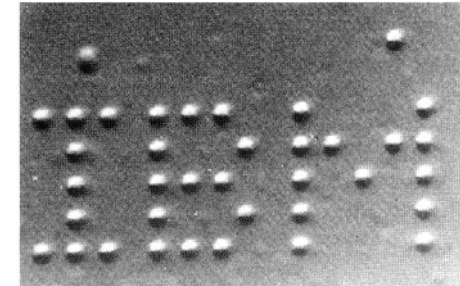


Abbildung: Abbildung 5 d) aus Tipler „Physik“, S. 1383

- Dimensionen: 1 Nanometer x 1 Nanometer

Pascual et. al. (Madrid 1993)

- Untersuchung des Phänomens an Goldoberflächen
- Gleiche Beobachtung bei direktem Kontakt mit der Oberfläche
- Glattes Verhalten der Stromstärke für große Abstände, diskretes für kleine.
- Leitfähigkeit kann nur ganzzahlige Vielfache der Quantenleitfähigkeit annehmen:

$$G = 2e^2/h (= 1/12906 \Omega)$$

- Erklärung durch Ausbildung eines „Nanodrahts“

Nanodraht

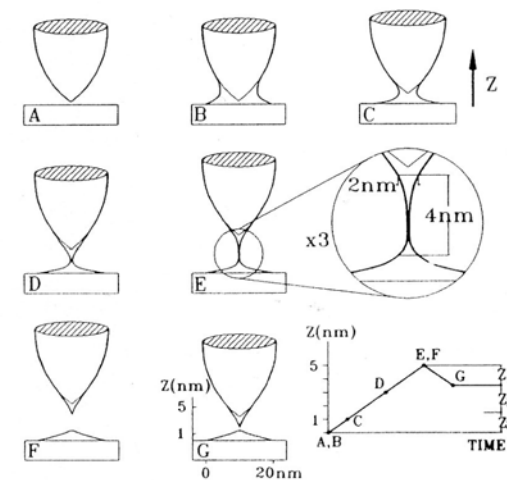


Abbildung: FIG. 3. aus [3]

J.L. Costa-Krämer et al. (Madrid 1995)

- Vermutung: Nanodrähte bei beliebigen Materialien
- Simpler Versuchsaufbau::
zwei dünne Metalldrähte auf Tischplatte in losem Kontakt
- Klopfen auf die Tischplatte
- Oszilloskop über Vorwiderstand:

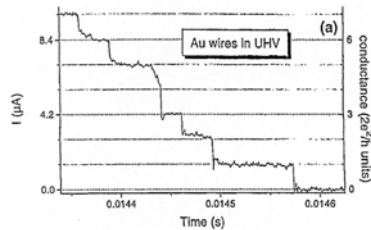


Abbildung: Fig. 6. aus [4]: Golddrähte in Ultrahochvakuum, umstandardisiert auf Einheiten der Quantenleitfähigkeit G

- Vermutung bestätigt

Klassische Physik

- klassisch: Drude-Modell des Elektronengases
- elektrische Leitfähigkeit:

$$\sigma = \frac{1}{R} = \frac{e^2 \cdot \tau \cdot n}{m}$$

- ABER: Quantenmechanische Aspekte nicht erklärbar
- QM: nur Elektronen des sog. Leitungsbandes für Ladungstransport verantwortlich

Gillingham et al. (Cambridge 2002)

- Speziell: Kupfer
- Ergebnis: Leitfähigkeit sowohl in ganzzahligen wie auch exakt halb so großen Vielfachen der Quantenleitfähigkeit quantisiert
- Deutet darauf hin, dass die Spin-Entartung bei den nicht-magnetischen Kupferdrähten aufgehoben ist.

Quantenphysik I

- Modell: e^- im Nanodraht als 3-dim. Welle
- Typische Durchmesser: 100 \AA
- x-y-Richtung: Teilchen im Kastenpotential;
z-Richtung: quasi-frei
 \rightsquigarrow „1-dim. quantenmechanisches System“

Quantenphysik II

- ▶ ortsabh. Teil (x-Richtung): $\Psi(x) = A \sin(k_x \cdot x)$
- ▶ Randbedingung: $\Psi(0) = \Psi(L_x) = 0$
- ▶ diskrete Lösungen: $k_{xn} = n \frac{\pi}{L_x}$ mit $n \in \mathbb{N}$
- ▶ Wellenfunktionen: $\Psi(x) = A \sin(n \frac{\pi}{L_x} \cdot x)$
- ▶ Energieabstände: $E_{xn} = \frac{p_n^2}{2m} = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL_x^2}$
- ▶ z-Richtung: $E_{nz} = 10^{-8} \cdot E_{nx}$
- ▶ Parabeln für Gesamtenergie eines Elektrons
 \rightsquigarrow diskrete Folge von Subbändern

Subbandmodell

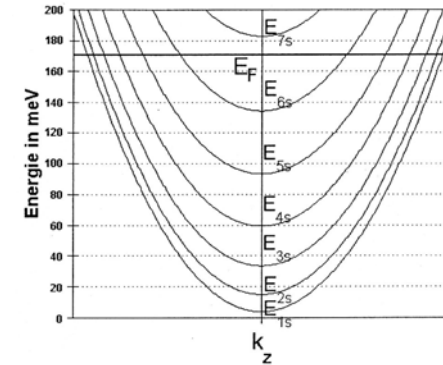


Abbildung: Abb. 7. aus [6]: exemplarische Darstellung der Energieverteilung im eindimensionalen quantenmechanischen System. Jede Parabel bildet ein Subband. Nur Elektronen, deren Energie über der Fermi-Kante E_F liegt, können zur Leitfähigkeit beitragen.

Quantenphysik III

- ▶ plausible Annahme („Käsefäden“): Masse des Nanofadens bleibt beim Auseinanderziehen konstant
- ▶ \rightsquigarrow die Durchmesser L_x bzw. L_y der Nanofäden werden immer kleiner
- ▶ \rightsquigarrow Subbänder liegen immer enger beieinander, rutschen nach und nach unter die Fermikante
- ▶ \rightsquigarrow Stromstärke springt auf zunehmend niedrigere Niveaus

Quantenphysik IV

- ▶ Zustandsdichte (auf L_z normiert): $\rho(E) = \frac{1}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}}$
- ▶ Stromstärke: $\Delta I = \Delta n \cdot e \cdot v$
- ▶ $\rightsquigarrow \Delta n = \rho(E) \cdot \Delta E = \frac{1}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot e \Delta V$
- ▶ $\rightsquigarrow \Delta I = \frac{2e^2}{h} \Delta V$
- ▶ Leitwert $G := \frac{\Delta I}{\Delta V}$: $G = \frac{2e^2}{h} \approx \frac{1}{12906} \Omega$
- ▶ 1-dim. Leitfähigkeit (N Anzahl der am Stromfluss beteiligten Subbänder): $\sigma(N) = G \cdot N = \frac{N}{12906} \Omega$
- ▶ Quantisierter Widerstand:

$$R(N) = \frac{1}{\sigma(N)} = \frac{12906 \Omega}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Warum bevorzugt Gold?

- ▶ Gold oxidiert nicht \rightsquigarrow Kontaktstellen \approx punktuelle Kaltverschweißung
- ▶ hohe Duktilität des Goldes \rightsquigarrow kein Abreißen, sondern Nanofäden

Versuchsaufbau

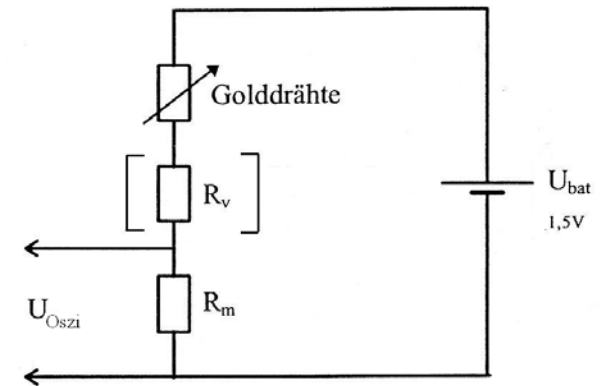


Abbildung: Der verwendete Versuchsaufbau. In der Schaltung gilt für den Messwiderstand $R_m = 10\text{ k}\Omega$. Der kleine Vorwiderstand $R_v = 100\text{ }\Omega$ wurde bei manchen Messungen optional verwendet.

Details I

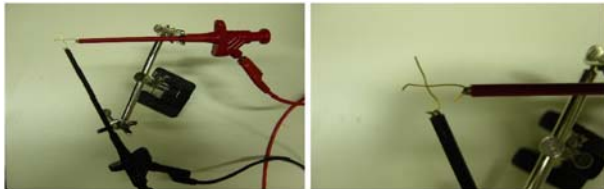


Abbildung: Golddrähte (hier Durchmesser 0,4 mm) in Hirschmannklemmen, die auf einer „Dritten Hand“ befestigt wurden.

Details II

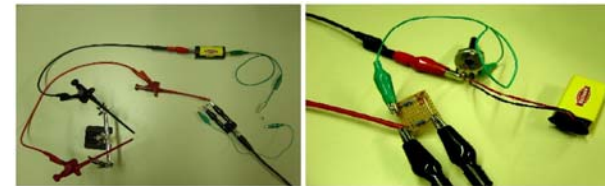


Abbildung: Realisierter Aufbau mittels Krokodilklemmen (links) und mit gelöteten Widerständen (rechts).

Oszilloskop und Spannungsquelle

- ▶ Hochauflösendes Speicheroszilloskop der Baureihe Hewlett Packard Infinium Oscilloscope HP 548xxA; Auflösung von 500 MHz bei einer maximalen Abtastrate von 2 GSa/s (Giga-Samples pro Sekunde)
- ▶ 9V-Block, dessen Spannung durch einen Spannungsteiler bzw. ein Potentiometer auf unter 1 V reduziert wird, um nichtlineare Effekte zu vermeiden (N. Garcia und J.L. Costa-Krämer 1996)
- ▶ Bei Trennungsvorgang selbst bei höchster Auflösung so gut wie nie eine akzeptable Quantisierung der Leitfähigkeit
- ▶ Ausreichend: lediglich eine 1,5 V-Batterie als Spannungsquelle und ein 200 MHz (USB-)Speicheroszilloskop (\approx 700 Euro)

Setup

- ▶ Oszilloskop: höchste Auflösung und zu beobachtender Zeitraum $1 \mu\text{s}$
- ▶ Optimales Triggerlevel bei etwa einem Drittel der zu erwartenden Spannungsbandbreite
- ▶ leichtes Klopfen auf den Tisch

Drähte

- ▶ 1) 999-Feingolddraht vom Juwelier der Stärke 0,4 mm (40 cm zu 48 Euro)
- ▶ 2) Golddraht der Dicke 0,025 mm (1 m zu 30 Euro); Alfa Aesar GmbH & Co KG (<http://www.alfa-chemcat.com>) als optimaler Lieferant für dünnen Golddraht; Verwendungszweck: in der Halbleiterindustrie bei der Herstellung von Mikrochips zum sogenannten „Bonden“.
- ▶ 3) Kupferdraht der Dicke 0,05 mm (25 m zu 4 Euro)

Annäherung vs. Trennung des Kontakts I

- ▶ Trennvorgang von starken Oszillationen überlagert \rightsquigarrow Diagramme nicht verwertbar



Abbildung: Trennung des Kontakts: Oszillationen (links); Verwendung eines Potentiometers (rechts). Beide Diagramme sind für eine Auswertung unbrauchbar.

Annäherung vs. Trennung des Kontakts II

- ▶ Laut [7] bilden sich die Nanodrähte aber nicht nur bei der Trennung, sondern auch bei der Annäherung eines mechanischen Kontaktes aus.
- ▶ konnten sehr häufig nachgewiesen werden

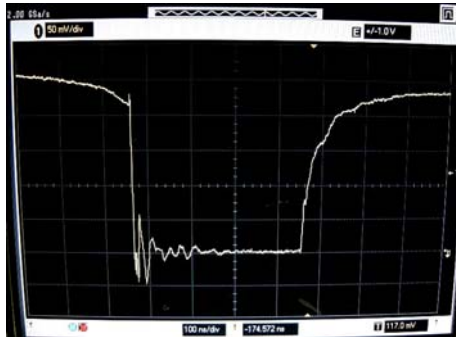


Abbildung: Das Diagramm zeigt das Öffnen und Schließen des Kontakts. Die Trennung ist von einer Oszillation überlagert.

Problem der Reproduzierbarkeit

- ▶ Bei „ungeübter“ Durchführung zeigt nur etwa jede zehnte Kurve das gewünschte Muster.

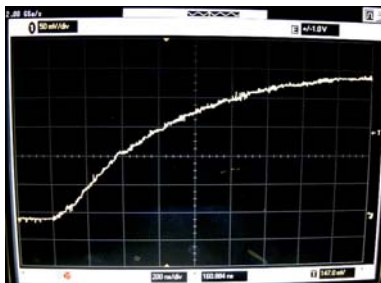


Abbildung: Die Abbildung zeigt ein ungeeignetes Diagramm, das keine signifikanten Quantisierungsniveaus aufweist.

- ▶ Bei „geübter“ Durchführung kann bereits jede dritte Messkurve das ersehnte Muster zeigen.

Offene Frage

- ▶ Bild vom „Eintunken“ der Spitze in die Oberfläche, wie es in [3], FIG. 3. nahegelegt wird, ist dann als Veranschaulichung aber eher irreführend und ungeeignet
- ▶ „Ziehen von Käsefäden bei der Pizza“ wie in [1] kann nur beim Trennvorgang des Kontakts als erklärendes Bild verwendet werden
- ▶ **Frage:** Warum beschreibt das Modell der Nanodrähte auch beim Schließen des Kontakts die Plateauhöhen korrekt, obwohl a priori nicht klar ist, wie eine plötzliche Existenz eines sehr dünnen Nanofadens zu rechtfertigen ist, der dann mit zunehmender Dicke schrumpft?
- ▶ keine Erklärungs- bzw. Deutungsversuche in Literatur

Widerstands-Spannungs-Relation

- ▶ aus Schaltung: $\frac{U_{Osz}(N)}{R_M} = \frac{U_{max}}{R_M + R(N) + R_V}$

▶ \Rightarrow

$$U_{Osz}(N) = \frac{10 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + \frac{12906}{N} \Omega + 100 \Omega} \cdot U_{max}$$

- ▶ Gemeinhin galt: $U_{max} \leq U_{Batterie}$

Glatte Kurven im klassischen Fall

- spezifischer Widerstand:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

- plausible Annahme: Nanodraht konstanter Masse in der Form eines Zylinders o.ä.

$$\rightsquigarrow R(l) = \rho \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l}{\frac{V}{l}} = \frac{\rho}{V} \cdot l^2 = k \cdot l^2, \quad k = \text{const.}$$

- Damit gilt für die verwendete Schaltung näherungsweise:

$$U_{\text{Osz}}(l) \approx \frac{1}{1+k' \cdot l^2} \cdot U_{\text{max}}, \quad k' = \text{const.}$$

Diagramm: Trennung

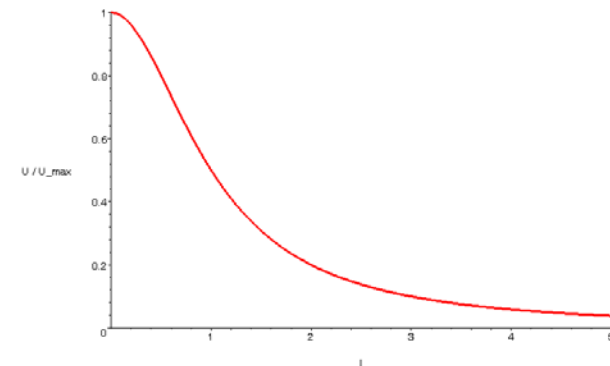


Abbildung: Mit MAPLE generiertes Diagramm, das das von der klassischen Physik vorhergesagte Verhalten der abfallenden Spannung beim Trennen des Kontakts zeigt.

Diagramm: Schließen

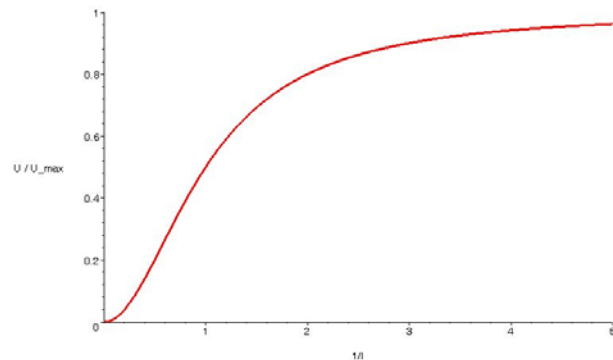


Abbildung: Mit MAPLE generiertes Diagramm, das das von der klassischen Physik vorhergesagte Verhalten der abfallenden Spannung beim Schließen des Kontakts zeigt.

Prognose der Plateauhöhen



$$U_{\text{Osz}}(N=1) \approx 0,44 \cdot U_{\text{max}}$$

$$U_{\text{Osz}}(N=2) \approx 0,61 \cdot U_{\text{max}}$$

$$U_{\text{Osz}}(N=3) \approx 0,70 \cdot U_{\text{max}}$$

$$U_{\text{Osz}}(N=4) \approx 0,76 \cdot U_{\text{max}}$$

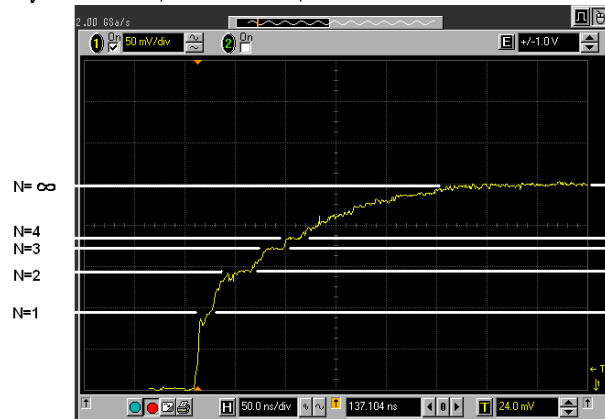
...

- asymptotisch erreichte Maximalspannung am Kontakt:

$$U_{\text{max}} \approx \frac{U_{\text{Osz}}(N=1)}{0,44}$$

Positive Beispiele I

999-Feingolddraht, Durchmesser 0,4 mm, mit Vorwiderstand
 $R_V = 100 \, \Omega$, Batterie 1,5 V



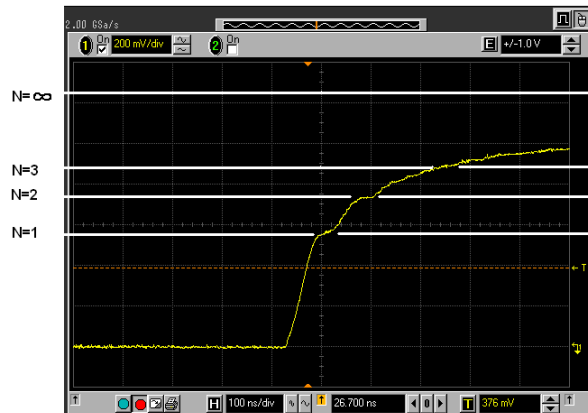
Positive Beispiele II

Golddraht, Durchmesser 0,025 mm, mit Vorwiderstand
 $R_V = 100 \, \Omega$, Batterie 1,5 V



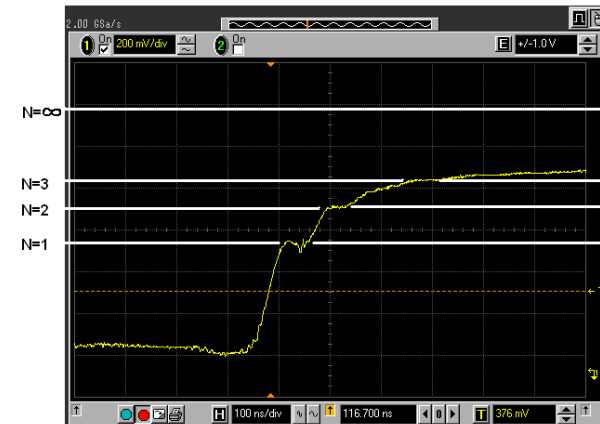
Positive Beispiele III

Golddraht, Durchmesser 0,025 mm, ohne Vorwiderstand, Batterie
 1,5 V



Positive Beispiele IV

Golddraht, Durchmesser 0,025 mm, ohne Vorwiderstand, Batterie
 1,5 V



- ▶ **Entweder** nur als Motivation für die
„Erkenntnis der Notwendigkeit einer von der klassischen Theorie abweichenden Physik für den Mikro- und Nanokosmos, die zwangsläufig zu einem fundamental anderen physikalischen Weltbild führt“
[Ph 10.3],
- ▶ **oder** auch grober Erklärungsversuch.

- ▶ Schüler mit Widerstand und Aufbau einfacher Schaltkreise vertraut (NT 7, Ph 8)
- ▶ Kenntnis des Oszilloskops (Ph 9)
- ▶ nicht mehr verpflichtend: spezifischer Widerstand
- ▶ Spezifischer Widerstand ermöglicht die Prognose der vermeintlichen Oszilloskopbilder („glatte Kurven“).
- ▶ Kognitiver Konflikt durch Versuchsergebnis

Möglicher Erklärungsversuch

- ▶ Konzept eines „freien“ Elektrons bekannt (spätestens Ph 8)
- ▶ Übergang zu quantenmechanischer Denkweise: **Zustand** „frei“
- ▶ Wellenphysik und Wellencharakter des Elektrons bekannt (Ph 10); evtl. auch Akustik („Schwingende Saite“)
- ▶ Schwingende Saite: bestimmte Zustände in Abhängigkeit von der Dimensionierung
- ▶ Mitteilung: gewisse höhere Schwingungsmoden des Elektrons entsprechen dem Zustand „frei“.
- ▶ ⇨ „**naives Bändermodell**“
- ▶ Nanofaden verändert sich
 - ⇨ Zustände der e^- ändern sich **sprunghaft**
 - ⇨ Anzahl der e^- im „freien“ Zustand ändert sich **sprunghaft**
 - ⇨ Widerstand ändert sich **sprunghaft**