Die Isometriegruppe einer Riemann-Hilbertmannigfaltigkeit

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Augsburg

vorgelegt von
Oliver Claß
aus Augsburg

Augsburg 2008

Erstgutachter: Prof. Dr. Ernst Heintze
Zweitgutachter: Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg

Tag der mündlichen Prüfung: 27.1.2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist die Frage nach einer unendlich-dimensionalen Version eines klassischen Satzes von Myers und Steenrod [7], der folgendes besagt: Die Isometriegruppe $I(M)$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist eine Lie-Transformationsgruppe bezüglich der kompakt-offen Topologie. Zum Beweis wird $I(M)$ in das $n+1$-fache kartesische Produkt M^{n+1} von M eingebettet, wobei n die Dimension von M ist. Die Autoren weisen nach, dass für Punkte $x_0, \ldots, x_n \in M$ in allgemeiner Lage, die Abbildung $f \mapsto (f(x_0), \ldots, f(x_n))$ von $I(M)$ nach M^{n+1} injektiv ist und dass das Bild eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M^{n+1} ist. Bezüglich der dadurch induzierten differenzierbaren Struktur wird $I(M)$ zu einer Lie-Transformationsgruppe von M.

Diese Beweisidee von Myers und Steenrod eignet sich nicht, um den Fall einer unendlich-dimensionalen Riemann-Hilbertmannigfaltigkeit M zu behandeln. Stattdessen beweisen wir zunächst eine unendlich-dimensionale Version eines Resultates von Kobayashi [5]. Dieses besagt, dass die Automorphismengruppe einer 1-Struktur, d.h. einer Parallelisierung, auf einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit N eine Lie-Transformationsgruppe ist. Im Beweis von Kobayashis Satz werden strikt endlich-dimensionale Konzepte wie Koordinatensysteme der 2. Art und lokale Kompaktheit von N verwendet. Unter der zusätzlichen Annahme, dass alle Vektorfelder auf N, die mit der 1-Struktur kommutieren, vollständig sind, können wir Kobayashis Satz im Unendlich-dimensionalen beweisen. Dazu verwenden wir insbesondere ein kürzlich publiziertes Resultat von Abouqateb und Neeb [1].

Im zweiten Kapitel wenden wir das Hauptresultat des ersten Kapitels an, um zu zeigen, dass die Gruppe der affinen Transformationen $\mathcal{A}$ einer Banachmannigfaltigkeit mit Zusammenhang eine Lie-Transformationsgruppe von M ist, sofern M geodätisch vollständig ist. Dazu geben wir eine 1-Struktur auf dem Rahmenbündel $N = LM$ von M an und zeigen, dass die Automorphismen dieser 1-Struktur genau den affinen Transformationen von M entsprechen. Wir zeigen ferner, dass die Liealgebra von $\mathcal{A}$ aus den infinitesimalen affinen Transformationen besteht.

Analog dazu betrachten wir im letzten Abschnitt eine Riemann-Hilbertmannigfaltigkeit M. Anstelle des Rahmenbündels LM tritt hier das Bündel der orthogonalen Rahmen OM. Wir erklären wieder eine 1-Strukur auf OM und weisen nach, dass die Isometrien von M den Automorphismen der 1-Strukur entsprechen. Aus dem Hauptresultat des ersten Kapitels erhalten wir schliesslich eine Version des Satzes von Myers und Steenrod im Fall einer unendlich-dimensionalen Riemann-Hilbertmannigfaltigkeit M unter der Annahme, dass M geodätisch vollständig ist. Die Liealgebra der Isometriegruppe $I(M)$ von M besteht hierbei aus den infinitesimalen Isometrien.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Ernst Heintze und bei Dr. Bogdan Popescu. Für die finanzielle Unterstützung danke ich dem Graduiertenkolleg “Nichtlineare Probleme in Analysis, Geometrie und Physik” und der Universität Augsburg.

Kapitel 1

Die Automorphismengruppe einer 1-Struktur

Im Folgenden sei N eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, die über einem Banachraum F modelliert ist.

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die Automorphismengruppe einer 1-Struktur auf N eine Lie-Transformationsgruppe ist, unter der Voraussetzung, dass alle Vektorfelder auf N, die mit der 1-Struktur kommutieren, vollständig sind. Im Endlich-dimesionalen (d.h. $F = \mathbb{R}^n$) wurde dies (ohne die Vollständigkeit obiger Vektorfelder vorauszusetzen) von Kobayashi [5] gezeigt. Für eine sorgfältige Ausarbeitung von Kobayashis Beweis sei auf [3] verwiesen.

Definition 1.1. Eine *1-Struktur auf* N ist ein Diffeomorphismus $\Phi : N \times F \to TN$, so dass

$$\Phi(p, \cdot) : F \to T_pN \tag{1.1}$$

für alle $p \in N$ ein topologisch linearer Isomorphismus ist.

Bemerkung 1.2. Eine 1-Struktur auf N definiert eine lineare Abbildung $F \to \mathfrak{X}(N)$, bei der jedem Element $z \in F$ das Vektorfeld $Z := \Phi(\cdot, z)$ zugeordnet wird. Man nennt Z das *konstante Feld* zu z.

Definition 1.3. Sei N eine Mannigfaltigkeit mit 1-Struktur Φ. Dann heisst die Menge aller Diffeomorphismen $f : N \to N$ für die gilt

$$Df \circ Z = Z \circ f \tag{1.2}$$

für alle konstanten Felder Z, die *Automorphismengruppe von* Φ, kurz $\mathrm{Aut}(\Phi)$.

Offenbar ist $\mathrm{Aut}(\Phi)$ tatsächlich eine Gruppe bezüglich der Komposition. Anders als in der endlich-dimensionalen Situation versehen wir $\mathrm{Aut}(\Phi)$ nicht mit der kompakt-offen Topologie. Die Toplogie wird durch einen Atlas, den wir konstruieren werden, gegeben sein.

Wir bezeichnen die maximale Integralkurve des konstanten Feldes Z mit Anfangswert $p \in N$ zur Zeit t mit $\varphi(p, z, t)$. Eine 1-Strukur definiert eine Schar von Vektorfeldern, die differenzierbar von dem Parameter $z \in F$ abhängen. Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Parameter folgt, dass der Definitionsbereich $\mathcal{O}$ von φ eine offene Teilmenge von $N \times F \times \mathbb{R}$ ist mit $N \times F \times \{0\} \subset \mathcal{O}$. Der Fluss φ ist differenzierbar auf $\mathcal{O}$.

Lemma 1.4. *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $f \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ gilt*

$$\varphi(p, \alpha z, t) = \varphi(p, z, \alpha t) \tag{1.3}$$
$$f(\varphi(p, z, t)) = \varphi(f(p), z, t) \tag{1.4}$$

Beweis: Die erste Gleichung folgt aus der Linearität der Abbildung $z \mapsto Z$. Die zweite Gleichung gilt wegen (1.2). □

Zur Abkürzung schreiben wir $\varphi_z(p) := \varphi_p(z) := \varphi(p, z, 1)$ und bezeichen die zugehörigen maximalen Definitionsbereiche von φ_z und φ_p mit $D_z \subset N$ bzw. $D_p \subset F$. Dabei kann D_z auch leer sein, D_p ist eine offene Umgebung von $0 \in F$. Wir schreiben

$$\Delta := \{\gamma = \varphi_{z_1} \circ \ldots \circ \varphi_{z_m} | z_i \in F,\ m \in \mathbb{N}\}$$

für die Menge der lokalen Diffeomorphismen $\varphi_{z_1} \circ \ldots \circ \varphi_{z_m}$. Wegen $\varphi_z^{-1} = \varphi_{-z}$ ist Δ eine Gruppe bezüglich der Komposition. Den Definitionsbereich von γ bezeichnen wir mit D_γ.

Lemma 1.5. *Sei $f \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ und $\gamma \in \Delta$. Dann gilt $f \circ \gamma = \gamma \circ f$ und $f(D_\gamma) = D_\gamma$.*

Beweis: Das folgt sofort aus Gleichung (1.4). □

Lemma 1.6. *Zu $p \in N$ gibt es offene Umgebungen U von p in N und V von 0 in F, so dass für jedes $q \in U$ die Abbildung $\varphi_q : V \to M$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von q in N ist.*

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $g : N \times W \to N \times N,\ (p, z) \mapsto (p, \varphi_z(p))$, wobei W eine offene Umgebung von 0 in F ist, so dass $\varphi_z(p)$ für alle $z \in W$ erklärt ist. Für die partielle Ableitung $D_1 g_{(p,0)}$ von g in $(p, 0)$ gilt offensichtlich

$$D_1 g_{(p,0)} : T_pN \to T_pN \times T_pN,\ X_p \mapsto (X_p, X_p).$$

Zur Berechnung der zweiten Komponente von $D_2 g_{(p,0)}$ sei $c(t)$ eine differenzierbare Kurve in F der Form $c(t) = \lambda(t) z$. Dabei ist $\lambda(t)$ eine differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}$ mit $\dot{\lambda}(0) = 1$ und $\lambda(0) = 0$ und $z \in F$. Dann ist wegen (1.3)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(p, c(t), 1) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(p, z, \lambda(t)) = \dot{\lambda}(0) Z_p = Z_p.$$

Damit ist $D_2 g_{(p,0)} z = (0, Z_p)$. Für die Ableitung von g in $(p, 0)$ gilt insgesamt $Dg_{(p,0)}(X, z) = D_1 g_{(p,0)} X + D_2 g_{(p,0)} z = (X, X) + (0, Z_p)$. Da $z \mapsto Z_p, F \to T_p N$ ein topologisch linearer Isomorphismus ist, folgt, dass auch $Dg_{(p,0)}$ ein topologisch linearer Isomorphismus ist. Wir können nun auf g im Punkt $(p, 0)$ den Umkehrsatz anwenden und erhalten so die Behauptung. $\square$

Lemma 1.7. *Zu je zwei Punkten $p, q \in N$ gibt es $\gamma \in \Delta$ mit $\gamma(p) = q$.*

Beweis: Sei $p \in N$ gegeben. Wegen Lemma 1.6 ist der Orbit $\Delta(p) = \{\gamma(p) | \, \gamma \in \Delta\}$ offen in N. Da Δ eine Gruppe ist, liefern die Orbits eine disjunkte Zerlegung von N und der Orbit $\Delta(p)$ ist als Komplement der Vereinigung aller anderen Orbits, abgeschlossen. Da N zusammenhängend ist, folgt $\Delta(p) = N$. $\square$

Proposition 1.8. *(i) Sei $f : N \to N$ eine Abbildung mit $f \circ \gamma = \gamma \circ f$ für alle $\gamma \in \Delta$. Dann ist f differenzierbar und es gilt $f \in \mathrm{Aut}(\Phi)$.*

(ii) Sei X ein (nicht notwendigerweise differenzierbares) Vektorfeld auf N mit $X \circ \gamma = D\gamma \circ X$ für alle $\gamma \in \Delta$. Dann ist X ein differenzierbares Vektorfeld und es gilt $[X, Z] = 0$ für alle konstanten Felder Z. Ist ferner X vollständig, so ist der zugehörige Fluss φ_t^X Element von $\mathrm{Aut}(\Phi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: (i) Sei $p \in N$ und V die Umgebung von $0 \in F$ aus Lemma 1.6. Für jeden Punkt q in einer Umgebung von p gibt es ein $z \in V$ mit $q = \varphi_p(z)$. Wegen $f(\varphi_p(z)) = \varphi_{f(p)}(z)$ folgt die Differenzierbarkeit von f in p. Zum Beweis der zweiten Aussage setzen wir $\gamma = \varphi_{tz}$ mit $z \in F$ und $t \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt $f(\varphi_{tz}(p)) = \varphi_{tz}(f(p))$. Das ist äquivalent zu $f(\varphi(p, z, t)) = \varphi(f(p), z, t)$. Ableiten nach t in $t = 0$ liefert $Df \circ Z = Z \circ f$, wobei Z das konstante Feld zu z bezeichnet.

(ii) Die Differenzierbarkeit zeigt man wie in (i). Mit $\gamma = \varphi_{tz} = \varphi(\cdot, z, t)$ gilt nach Voraussetzung $X \circ \varphi_t^Z = D\varphi_t^Z \circ X$, wobei φ_t^Z den Fluss von Z zur Zeit t bezeichnet. Dann gilt wegen der Definition der Lieklammer $[X, Z] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(D\varphi_t^Z(X_{(\varphi_{-t}^Z(p))}) - X_p) = 0$ für alle $p \in N$. Für die letzte Behauptung nehmen wir nun an, dass X zusätzlich vollständig sei. Aus $[X, Z] = 0$ folgt $\varphi_t^X \circ \varphi_s^Z = \varphi_s^Z \circ \varphi_t^X$ für alle s in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$. Wie in (i) sieht man, dass $\varphi_t^X \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Wir bezeichnen die Menge aller Vektorfelder auf N die mit der 1-Struktur kommutieren mit $\mathfrak{l}$, d.h.

$$\mathfrak{l} := \{X \in \mathfrak{X}(N) | \; [X, Z] = 0 \text{ für alle konstanten Felder } Z\}.$$

Es folgt sofort aus der Jacobi-Identität und der Linearität der Klammer, dass $\mathfrak{l}$ eine Liealgebra ist.

Lemma 1.9. *Die lineare Abbildung $i_p : \mathfrak{l} \to T_p N, \; X \mapsto X_p$, für ein festes $p \in N$, ist injektiv.*

Beweis: Wegen $[X, Z] = 0$ für $X \in \mathfrak{l}$ und ein konstantes Feld Z gilt für die Flüsse

$$\varphi_t^X(\varphi_s^Z(p)) = \varphi_s^Z(\varphi_t^X(p)) \tag{1.5}$$

für alle $|s|, |t|$ hinreichend klein. Um die Injektivität von i_p zu zeigen, nehmen wir $X_p = 0$ an. Wir wollen zeigen, dass daraus $X = 0$ folgt. Gleichung (1.5) impliziert dann wegen $\varphi_t^X(p) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_t^X(\varphi_s^Z(p)) = \varphi_s^Z(p) \text{ für alle } |s|, |t| \text{ hinreichend klein.}$$

Also gilt $X_q = 0$ für alle q in einer Umgebung von p. Die Menge der Ruhelagen von X ist also offen. Sie ist ebenfalls abgeschlossen und da N zusammenhängend ist, folgt $X = 0$ und damit die Behauptung. □

Proposition 1.10. *Der lineare Unterraum $\mathfrak{l}_p := i_p(\mathfrak{l})$ ist abgeschlossen in T_pN und damit ein Banachraum.*

Beweis: Sei (X^n) eine Folge in $\mathfrak{l}$ mit $X_p^n \to Y$ für $n \to \infty$. Wir zeigen, dass es ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{l}$ gibt mit $X_p = Y$. Sei $q \in N$ gegeben, dann gibt es nach Lemma 1.7 ein $\gamma \in \Delta$ mit $q = \gamma(p)$. Definiere $X_q := D\gamma_p X_p$. Dies ist unabhängig von der Wahl von γ, denn sei $\tilde{\gamma} \in \Delta$ mit $q = \tilde{\gamma}(p)$, so gilt $X_q = D\gamma_p X_p = D\gamma_p \lim X_p^n = \lim D\gamma_p X_p^n = \lim X_{\gamma(p)}^n = \lim X_{\tilde{\gamma}(p)}^n = \lim D\tilde{\gamma}_p X_p^n = D\tilde{\gamma}_p \lim X_p^n = D\tilde{\gamma}_p X_p$. Es gilt ferner $X_q = \lim X_q^n$ für jedes $q \in N$ nach obiger Gleichung. Wir erhalten weiter für alle $\mu \in \Delta$ und alle $q \in N$ die Gleichung $X \circ \mu(q) = X_{\mu(q)} = \lim X_{\mu(q)}^n = \lim D\mu_q X_q^n = D\mu_q \lim X_q^n = D\mu_q X_q$. Aus Proposition 1.8 (ii) folgt, dass X ein differenzierbares Vektorfeld ist mit $[X, Z] = 0$ für alle konstanten Felder Z und somit gilt $X \in \mathfrak{l}$. □

Mittels i_p können wir $\mathfrak{l}$ mit $\mathfrak{l}_p$ identifizieren und somit $\mathfrak{l}$ als Banachraum ansehen.

Proposition 1.11. *Die Klammer $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ ist eine stetige Abbildung. Somit ist $\mathfrak{l}$ (und $\mathfrak{l}_p$) eine Banach-Liealgebra.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $X_p \mapsto X$, $\mathfrak{l}_p \to \mathfrak{l}$ eine Schar von Vektorfeldern erklärt, die differenzierbar von X_p abhängen. Sei dazu $q \in N$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $\gamma \in \Delta$ mit $\gamma(p) = q$. Dabei hat γ die Form $\gamma = \varphi_{z_1} \circ \ldots \circ \varphi_{z_m}$. Es gilt $X_q = D\gamma_p X_p = D\varphi_{z_1} \circ \ldots \circ D\varphi_{z_m} X_p$. Die Abbildung $\tilde{z}_1 \mapsto \varphi_{\tilde{z}_1} \circ \varphi_{z_2} \circ \ldots \circ \varphi_{z_m}(p)$, $F \to N$ ist ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von z_1. Somit gibt es eine Umgebung U von q, so dass für jedes $\tilde{q} \in U$ gilt $\tilde{q} = \varphi_{\tilde{z}_1(\tilde{q})} \circ \varphi_{z_2} \circ \ldots \circ \varphi_{z_m}(p)$, wobei $\tilde{z}_1(\tilde{q})$ differenzierbar von $\tilde{q}$ abhängt. Ferner gilt $X_{\tilde{q}} = D\varphi_{\tilde{z}_1(\tilde{q})} \circ D\varphi_{z_2} \circ \ldots \circ D\varphi_{z_m} X_p$. Also ist durch $X_p \mapsto X$, $\mathfrak{l}_p \to \mathfrak{l}$ eine Schar von Vektorfeldern auf N gegeben, die differenzierbar von dem Parameter X_p abhängen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Parameter folgt, dass der zugehörige Fluss $\varphi_t^X(p)$ differenzierbar von $X_p \in \mathfrak{l}_p$ und damit von $X \in \mathfrak{l}$ abhängt, wobei wir $\mathfrak{l}$ als Banachraum ansehen mittels der Identifikation durch i_p.

Nach der bekannten Formel für die Klammer (Exercise 4.2-4 in [2]) gilt

$$[X,Y]_p = \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\bigg|_{t=s=0} \varphi^X_{-t}\circ\varphi^Y_s\circ\varphi^X_t(p).$$

Da nach dem oben Gezeigten die Flüsse differenzierbar von X bzw. Y abhängen, folgt, dass auch $[X,Y]_p$ und damit $[X,Y]$ differenzierbar und somit insbesondere stetig von X bzw. Y abhängen. □

Wenn wir nun annehmen, dass alle Vektorfelder aus $\mathfrak{l}$ vollständig sind, dann ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{l} \to \mathrm{Aut}(\Phi)$, $\exp(X) := \varphi^X_1$ definiert. Genauer gesagt benötigen wir für das Weitere, dass exp auf einer offenen Umgebung von $0 \in \mathfrak{l}$ erklärt ist, was ohne die Vollständigkeit der Vektorfelder aus $\mathfrak{l}$ nicht gegeben ist. Für den zu konstruierenden Atlas auf $\mathrm{Aut}(\Phi)$ werden wir eine beliebige Karte auf die Exponentialabbildung, eingeschränkt auf eine offene Umgebung von $0 \in \mathfrak{l}$, zurückführen. Zu diesem Zweck zeigen wir zunächst, dass exp in einer offenen Umgebung von 0 injektiv ist. Dazu verwenden wir folgenden Satz.

Satz 1.12. *Seien E und F Banachräume und $f : U \subset E \to F$ eine C^1-Abbildung, wobei $Df_{u_0}(E)$ abgeschlossen in F ist und $Df_{u_0} \in \mathrm{Gl}(E, Df_{u_0}(E))$. Dann gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von u_0, so dass $f|_V$ injektiv ist.*

Beweis: Theorem 2.5.10 in [2]. □

Wir betrachen die Abbildung $f : \mathfrak{l}_p \to N$, $X_p \mapsto \varphi^X_1(p)$. Zur Berechnung der Ableitung von f in 0 sei $c(t) = \lambda(t)X_p$ eine Kurve in $\mathfrak{l}_p$ mit $\lambda(0) = 0$ und $\dot\lambda(0) = 1$. Damit gilt für die Ableitung von f in 0

$$Df_0(X_p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi^{c(t)}_1(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi^{X_p}_{\lambda(t)}(p) = \dot\lambda(0)\ X_p = X_p \tag{1.6}$$

für alle $X_p \in \mathfrak{l}_p$. Es gilt also $Df_0 : \mathfrak{l}_p \to T_pN$, $X_p \mapsto X_p$.

Proposition 1.13. *Es gibt eine offene Umgebung V von 0 in F, so dass $\exp|_V$ injektiv ist.*

Beweis: Nach obiger Rechnung ist $Df_0(\mathfrak{l}_p) = \mathfrak{l}_p$ und daher abgeschlossen in T_pN nach Proposition 1.10. Somit sind die Voraussetzungen aus Satz 1.12 erfüllt und wir erhalten eine offene Umgebung V_p von 0 in $\mathfrak{l}_p$, so dass $F|_{V_p}$ injektiv ist. Daraus folgt, dass $\exp|_V$ injektiv ist, wobei $V := (i_p)^{-1}(V_p)$. □

Wir werden in Satz 1.18 einen Atlas auf $\mathrm{Aut}(\Phi)$ konstruieren, indem wir das exp-Bild einer kleinen Umgebung von 0 von links mit sämtlichen Elementen aus $\mathrm{Aut}(\Phi)$ multiplizieren. Um zu zeigen, dass der Kartenwechsel differenzierbar ist und für den Nachweis der Differenzierbarkeit der Gruppenmultiplikation in

$\mathrm{Aut}(\Phi)$ benötigen wir folgendes Resultat. Es besagt, dass es lokal eine differenzierbare Verknüpfung in $\mathfrak{l}_p$ gibt, nämlich die Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe, die sich mit der Multiplikation in $\mathrm{Aut}(\Phi)$ verträgt.

Proposition 1.14. *Es gibt eine offene und zusammenhängende Umgebung T_0 von 0 in $\mathfrak{l}$, so dass die Baker-Campbell-Hausdroff-Reihe in $\mathfrak{l}$ eine differenzierbare Abbildung $\cdot * \cdot : T_0 \times T_0 \to \mathfrak{l}$ definiert. Nehmen wir zusätzlich an, dass alle Vektorfelder aus $\mathfrak{l}$ vollständig sind, so gilt $\exp(X * Y) = \exp Y \exp X$ für alle $X, Y \in T_0$.*

Beweis: Da $\mathfrak{l}$ eine Banach-Lieabgebra ist, folgt die erste Behauptung aus Proposition 1, Ch II, §7 in [4]. Zum Nachweis der zweiten Aussage verwenden wir Proposition 5.4 in [1], die folgendes besagt:

Sei M ein Mannigfaltigkeit, die über einem lokal-konvexen Raum modelliert ist und sei $G \subset \mathfrak{g}$ eine exponentielle lokale Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Dabei heisst $G \subset \mathfrak{g}$ exponentielle lokale Liegruppe, wenn $\mathfrak{g}$ eine lokal-konvexe Liealgebra ist, G eine kreisförmige offene Umgebung von $0 \in \mathfrak{g}$ und auf G eine lokale differenzierbare Gruppenstruktur erklärt ist mit folgenden Eigenschaften: Es gibt eine offene Menge $D_G \subset G \times G$, so dass für die lokale Gruppenmultiplikation $m_G : D_G \to G,\ (x, y) \mapsto x * y$ gilt

(E1) Für $x \in G$ und $|t|, |s|, |s+t| \leq 1$ folgt $(tx, sx) \in D_G$ mit $tx * sx = (t+s)x$.

(E2) Der quadratische Term in der Taylorentwicklung von m_G ist $\frac{1}{2}[x, y]$.

Sei nun $D_G^0 \subset D_G$ die Zusammenhangskomponente von D_G, die $(0, 0)$ enthält. Dann gilt für alle $(x, y) \in D_G^0$

$$\mathrm{Exp}_\alpha(x * y) = \mathrm{Exp}_\alpha(x)\mathrm{Exp}_\alpha(y).$$

Hierbei ist $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ ein Liealgebrenmorphismus, für den folgende Voraussetzungen gelten:

(i) Jedes Vektorfeld $\alpha(x)$ ist vollständig.

(ii) $\mathrm{Exp}_\alpha : \mathfrak{g} \to \mathrm{Diff}(M),\ x \mapsto (-\alpha(x))$ ist differenzierbar, d.h.

$$(x, p) \mapsto \exp(-\alpha(x))(p),\ \mathfrak{g} \times N \to N$$

ist differenzierbar.

Um dieses Resultat auf unseren Fall anwenden zu können, stellen wir zunächst fest, dass nach Remark 4.3(b) in [1], jede Banach-Liealgebra lokal exponentiell ist. Dabei ist die exponentielle lokale Liegruppenstruktur in einer offenen Umgebung von 0 durch die Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe gegeben. Der Liealgebrenmorphismus ist in unserer Situation $\alpha : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l},\ X \mapsto X$. Damit ist (i) nach Voraussetzung erfüllt. Die Bedingung (ii) gilt nach dem Satz über parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen. □

Zum Nachweis der Differenziebarkeit der Gruppenmultiplikation in $\mathrm{Aut}(\Phi)$ benötigen wir ebenfalls folgende Proposition.

Proposition 1.15. *Seien alle Vektorfelder aus* $\mathfrak{l}$ *vollständig. Dann gibt es zu* $g \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ *eine Abbildung* $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{l}_p)$*, so dass folgendes Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(\Phi) \arrow[r, "\mathrm{Int}(g)"] & \mathrm{Aut}(\Phi) \\
\mathfrak{l} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "i_p"'] & \mathfrak{l} \arrow[u, "\exp"'] \arrow[d, "i_p"] \\
\mathfrak{l}_p \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)"] & \mathfrak{l}_p
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

Dabei ist $\mathrm{Int}(g)h := ghg^{-1}$ *für* $h \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ *und* $g_*X := Dg \circ X \circ g^{-1}$ *für* $X \in \mathfrak{l}$*. Durch die Identifikation von* $\mathfrak{l}_p$ *mit* $\mathfrak{l}$ *mittels* i_p*, können wir* $\mathrm{Ad}(g)$ *ebenfalls als Element von* $\mathrm{Gl}(\mathfrak{l})$ *ansehen.*

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass $g_*X \in \mathfrak{l}$ für jedes $X \in \mathfrak{l}$, denn dies ist äquivalent zu $\varphi_t^{g_*X} \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Letztere Bedingung ist wahr, da $\varphi_t^{g_*X} = g \circ \varphi_t^X \circ g^{-1}$ und wegen $g, \varphi_t^X, g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ folgt $\varphi_t^{g_*X} \in \mathrm{Aut}(\Phi)$. Mit $\mathrm{Ad}(g)X_p := (g_*X)_p$ wird obiges Diagramm kommutativ. Es muss nur noch gezeigt werden, dass $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{l}_p)$. Da die Abbildungen $X_p \mapsto X$, $\mathfrak{l}_p \to \mathfrak{l}$ und $i_p : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}_p$ differenzierbar sind und g differenzierbar ist, ist die Komposition $X_p \mapsto i_p(Dg \circ X \circ g^{-1})$ ebenfalls differenzierbar. Wegen $(\mathrm{Ad}(g))^{-1} = \mathrm{Ad}(g^{-1})$ gilt $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{l}_p)$. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren. Wir stellen folgende Definition einer Lie-Transformationsgruppe voran, die wir [8] entnommen haben.

Definition 1.16. *Eine Gruppe G von Diffeomorphismen auf N heisst* Lie-Transformationsgruppe von N *wenn gilt*

(i) G ist eine Banach-Liegruppe.

(ii) Die Abbildung $G \times N \to N$, $(g, p) \mapsto g(p)$ ist differenzierbar.

(iii) Sei X ein vollständiges Vektorfeld auf N mit $\varphi_t^X \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann ist $t \mapsto \varphi_t^X$ eine 1-Parameteruntergruppe von G.

Die Bedingung (iii) sorgt dafür, dass die Topologie auf G nicht zu fein ist, denn die ersten beiden Bedingungen sind stets erfüllt, wenn man G mit der diskreten Topologie versieht. Folgendes Beispiel ist ebenfalls keine Lie-Transformationsgruppe in unserem Sinn.

Beispiel 1.17. *Sei $N = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Topologie gegeben. Die Gruppe G sei ebenfalls $G = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, allerdings wird sie mit folgender Topologie versehen: In der ersten Komponente wählen wir die diskrete Topologie, in der zweiten Komponente die übliche Topologie. Damit wird $(G, +)$ zu einer 1-dimensionalen Liegruppe bezüglich der Produkttopologie. Die Abbildung $G \times N \to N$, $(g, p) \mapsto g + p$ ist differenzierbar, aber die Bedingung (iii) in Definition 1.16 ist verletzt. Um das zu sehen, sei X ein Vektorfeld auf N, mit $X_p := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ für alle $p \in N$. Dann gilt für den Fluss $\varphi_t^X(p) = p + t$, also $\varphi_t^X \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $t \mapsto \varphi_t^X$, $\mathbb{R} \to G$ ist jedoch nicht stetig und damit keine 1-Parameteruntergruppe von G.*

In der endlich-dimensionalen Situation kann gezeigt werden (Theorem V in Chapter IV in [8]), dass jede Gruppe G von Diffeomorphismen höchstens eine Topologie hat, die G zu einer Lie-Transformationsgruppe macht. Der Beweis beruht auf der Verwendung eines Koordinatensystems der 2. Art. Damit ist folgendes gemeint: Sei G eine endlich-dimensionale Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^n \to G$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \exp t_1 X_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_n X_n$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Somit ist $(t_1, \ldots, t_n)$ ein lokales Koordinatensystem um $e \in G$, genannt Koordinatensystem der 2. Art. Da solche Koordinatensysteme keine unendlich-dimensionale Verallgemeinerung haben, ist unklar, ob eine entsprechende Eindeutigkeitsaussage auch im Unendlich-dimensionalen getroffen werden kann.

Satz 1.18. *Sei N eine Mannigfaltigkeit mit einer 1-Struktur und sei $\mathfrak{l}$ die Menge der Vektorfelder X auf N, für die gilt $[X, Z] = 0$ für alle konstanten Felder Z. Angenommen alle Vektorfelder aus $\mathfrak{l}$ sind vollständig. Dann ist* $\mathrm{Aut}(\Phi)$ *eine Lie-Transformationsgruppe mit Liealgebra $\mathfrak{l}$.*

Beweis: Wir verwenden im Folgenden Argumente aus dem Beweis von Theorem 7.4 in [10]. Nach Proposition 1.13 ist $\exp : \mathfrak{l} \to \mathrm{Aut}(\Phi)$ in einer offenen Umgebung von 0 injektiv. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass diese Umgebung gleich der offenen Umgebung T_0 von 0 aus Proposition 1.14 ist. Ferner nehmen wir an, dass T_0 symmetrisch ist. Da $0 * 0 = 0$ gilt und $T_0 \times T_0 \to \mathfrak{l}$, $(x, y) \mapsto x * y$ stetig ist, gibt es symmetrische offene Umgebungen $T_1 \subset T \subset T_0$ von 0 in $\mathfrak{l}$, so dass $T_1 * T_1 \subset T$ und $T * T \subset T_0$. Wir setzen $S_0 := \exp T_0$, $S := \exp T$ und $S_1 := \exp T_1$. Da exp auf T_0 injektiv ist, können wir folgende Abbildung definieren $p : S_0 \to T_0$, $p(\exp X) = X$. Ferner definieren wir $p_g : gS \to T$, $p_g(h) = g^{-1}h$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A} := \{(gS, p_g) |\ g \in \mathrm{Aut}(\Phi)\}$ ein Atlas für $\mathrm{Aut}(\Phi)$ ist. Dazu betrachten wir den Kartenwechsel: Sei $R := gS \cap hS \neq \emptyset$. Dann ist

$$p_h \circ p_g^{-1}(Y) = p(h^{-1} g \exp Y) \text{ für alle } Y \in p_g(R). \tag{1.8}$$

Da $gS \cap hS \neq \emptyset$, gibt es $s_1, s_2 \in S$ mit $gs_1 = hs_2$, also $h^{-1}g = s_2 s_1^{-1} \in S_0$, da T symmetrisch ist und $T * T \subset T_0$ gilt. Also gibt es ein $X \in T_0$ mit $h^{-1}g = \exp(X)$.

Damit lässt sich (1.8) wegen Proposition 1.14 wie folgt schreiben

$$p_h \circ p_g^{-1}(Y) = p(\exp(X)\exp(Y)) = (Y * X). \tag{1.9}$$

Da $\cdot * \cdot$ differenzierbar ist, müssen wir nur noch zeigen, dass bei dem Kartenwechsel $p_h \circ p_g^{-1} : p_g(R) \to p_h(R)$, die Mengen $p_g(R)$ und $p_h(R)$ offen in $\mathfrak{l}$ sind: Es gilt $p_g(R) = p(g^{-1}R) = p(g^{-1}gS) \cap p(g^{-1}hS) = T \cap T * (-X)$. Da T_0 symmetrisch ist, gilt $-X \in T_0$. Wir betrachten die Abbildung $\cdot * (-X) : T \to T * (-X)$. Diese Abbildung ist stetig, da $\cdot * \cdot$ differenziebar ist. Ferner ist sie bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung. Wir behaupten $(\cdot * (-X))^{-1} = (\cdot * X)$. Dazu muss für ein beliebiges $Z \in T$ gezeigt werden $Z = ((Z * (-X)) * X)$. Letzteres gilt, da $\exp((Z * (-X)) * X) = \exp X \exp(Z * (-X)) = \exp X \exp(-X) \exp Z = \exp Z$. Aus der Injektivität von exp auf T folgt die Behauptung. Damit ist also die Abbildung $\cdot * (-X) : T \to T * (-X)$ ein Homöomorphismus und da T offen ist, folgt, dass auch $T * (-X)$ offen in $\mathfrak{l}$ ist. Somit wurde also gezeigt, dass $\mathcal{A}$ einen Atlas für $\mathrm{Aut}(\Phi)$ definiert.

Wir zeigen als nächstes, dass $\mathrm{Aut}(\Phi)$ bezüglich dieser differenzierbaren Struktur eine Liegruppe ist. Dazu prüfen wir folgende drei Eigenschaften nach, die laut §1.1, Ch. III in [4], genau dann erfüllt sind, wenn $\mathrm{Aut}(\Phi)$ eine Liegruppe ist:

(GL1) Für alle $g, h \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ ist die Abbildung $h \mapsto gh = l_g(h)$ differenzierbar.

(GL2) Für alle $g \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ ist die Abbildung $h \mapsto ghg^{-1} = \mathrm{Int}(g)h$ differenzierbar in einer offenen Umgebung von e.

(GL3) Die Abbildung $(g, h) \mapsto gh^{-1},\ \mathrm{Aut}(\Phi) \times \mathrm{Aut}(\Phi) \to \mathrm{Aut}(\Phi)$ ist differenzierbar in einer offenen Umgebung von (e, e).

Zu (GL1): Wir zeigen, dass l_g in h differenzierbar ist. Dazu sind $p_h : hS \to T$ und $p_{gh} : ghS \to T$ Karten um h bzw. $l_g(h)$. Für die lokale Darstellung von l_g gilt dann $p_{gh} \circ p_g^{-1} : T \to T,\ Y \mapsto Y$. Da $g, h \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ beliebig gewählt waren, folgt die Differenziebarkeit von l_g.

Zu (GL2): Setze $T_g := T \cap \mathrm{Ad}(g)^{-1}T$. Da $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Gl}(\mathfrak{l})$, ist T_g eine offene Umgebung von 0 für jedes $g \in \mathrm{Aut}(\Phi)$. Es gilt $\mathrm{Ad}(g)T_g = \mathrm{Ad}(g)(T \cap \mathrm{Ad}(g)^{-1}T) = \mathrm{Ad}(g)T \cap T \subset T$ und $\mathrm{Int}(g)\exp T_g = g \exp T_g g^{-1} = g \exp(T \cap \mathrm{Ad}(g)^{-1}T)g^{-1} \subset g(\exp T \cap \exp \mathrm{Ad}(g)^{-1}T)g^{-1} = g \exp T g^{-1} \cap g \exp \mathrm{Ad}(g)^{-1}T g^{-1} = g \exp T g^{-1} \cap gg^{-1} \exp T g g^{-1} \subset S$. Damit ist nach Proposition 1.15 folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} \exp T_g & \xrightarrow{\mathrm{Int}(g)} & S \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ T_g & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)} & T \end{array} \tag{1.10}$$

Bezüglich der Karten $p : \exp T_g \to T_g$ um e und $p : S \to T$ um $\mathrm{Int}(e) = e$, erhalten wir für $\mathrm{Int}(g)$ um e folgende lokale Darstellung $p \circ \mathrm{Int}(g) \circ p^{-1} : T_g \to T,\ Y \mapsto \mathrm{Ad}(g)Y$. Somit ist $\mathrm{Int}(g)$ in einer Umgebung von e differenzierbar.

Zu (GL3): Seien $g, h \in S_1$ gegeben. Dann gibt es $X, Y \in T_1$ mit $g = \exp(X)$ und $h = \exp(Y)$. Ferner gilt $gh^{-1} = \exp X(\exp Y)^{-1} = \exp X \exp(-Y) = \exp((-y) * X)$, nach Proposition 1.14. Da S_1 symmetrisch ist, folgt $-Y \in S_1$ und weiter $(-Y) * X \in T_1$, wegen $T_1 * T_1 \subset T$. Somit ist $gh^{-1} \in S$. Da $\cdot * \cdot$ differenzierbar ist, gilt dies auch für die Abbildung $S_1 \times S_1 \to S,\ (g, h) \mapsto gh^{-1}$. Das Produkt $S_1 \times S_1$ ist eine offene Umgebung von (e, e) und wir haben damit (GL3) gezeigt.

Die Topologie auf $\mathrm{Aut}(\Phi)$ ist Hausdorffsch, da der Schnitt über alle abgeschlossenen Umgebungen von e gleich $\{e\}$ ist.

Die Bedingung (ii) in Definition 1.16, folgt aus dem Satz über parameterabhängige Differentialgleichungen.

Zum Nachweis von Bedinung (iii) in Definition 1.16 sei X ein vollständiges Vektorfeld auf N mit $\varphi_t^X \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $X \in \mathfrak{l}$ und $\varphi_t^X = \exp tX$. Nach Konstruktion der differenzierbaren Struktur auf $\mathrm{Aut}(\Phi)$ folgt, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\Phi),\ t \mapsto \varphi_t^X$ differenzierbar ist.

Insgesamt ist damit gezeigt, dass $\mathrm{Aut}(\Phi)$ ein Lie-Transformationsgruppe von N ist. □

Eine Folge (g_n) die in $\mathrm{Aut}(\Phi)$ gegen g konvergiert, konvergiert auch punktweise, d.h. $g_n(p) \to g(p)$ für alle $p \in N$. Zur Begründung genügt es nach Konstruktion der Topologie auf $\mathrm{Aut}(\Phi)$ den Spezialfall $g = e$ zu betrachten, also $g_n \to e$. Für alle hinreichend grossen n gilt dann $g_n = \exp X_n$ mit $X_n \to 0$ für $n \to \infty$. Aus dem Satz über parameterabhängige Differentialgleichungen folgt, dass $g_n(p) \to p$ für alle $p \in N$.

Im Fall $\dim N < \infty$ folgt aus der Konvergenz von $g_n(p)$ für ein $p \in N$ die Konvergenz von g_n in der kompakt-offen Topologie [3]. Dabei wird verwendet, dass $\mathbb{R}^n$ lokal-kompakt und metrisierbar ist. In der unendlich-dimesionalen Situation können wir zumindest folgendes zeigen:

Proposition 1.19. *Sei* (g_n) *eine Folge in* $\mathrm{Aut}(\Phi)$ *und* $g_n(p)$ *konvergiere in* N *für ein* $p \in N$. *Dann konvergiert* $g_n(\tilde{p})$ *für jedes* $\tilde{p} \in N$. *Die Limesfunktion* $g(\tilde{p}) := \lim g_n(\tilde{p})$ *ist ein Element von* $\mathrm{Aut}(\Phi)$.

Beweis: Mit $q := \lim g_n(p)$ gilt für alle n gross genug $g_n(p) = \varphi_q(z_n)$, wobei $z_n \to 0$ in F. Es folgt $q = \varphi(g_n(p), -z_n, 1)$ und wegen Gleichung (1.4)

$$g_n^{-1}(q) = g_n^{-1}(\varphi(g_n(p), -z_n, 1)) = \varphi_p(-z_n) \to p. \tag{1.11}$$

Sei nun $\tilde{p} \in N$ beliebig gegeben. Dann gibt es nach Lemma 1.7 ein $\gamma \in \Delta$ mit $\tilde{p} = \gamma(p)$. Da $p \in D_\gamma$ und D_γ offen ist, gilt wegen (1.11) $g_n^{-1}(q) \in D_\gamma$ für alle n hinreichend gross. Nach Lemma 1.5 ist D_γ invariant unter $\mathrm{Aut}(\Phi)$ und somit gilt $q = g_n(g_n^{-1}) \in D_\gamma$. Mit Lemma 1.5 folgt daraus

$$g_n(\tilde{p}) = g_n(\gamma(p)) = \gamma(g_n(p)) \to \gamma(q).$$

Damit ist gezeigt, dass $g_n(\tilde{p})$ für alle $\tilde{p} \in N$ konvergiert.

Wir begründen noch, dass $g \in \mathrm{Aut}(\Phi)$: Sei $\tilde{\gamma} \in \Delta$ beliebig, dann gilt für alle $\tilde{p} \in N$ wegen Lemma 1.5

$$g \circ \tilde{\gamma}(\tilde{p}) = \lim g_n \circ \tilde{\gamma}(\tilde{p}) = \lim \tilde{\gamma} \circ g_n(\tilde{p}) = \tilde{\gamma} \circ \lim g_n(\tilde{p}),$$

also $g \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma} \circ g$. Aus Proposition 1.8(i) folgt, dass g differenzierbar ist. Wie im Beweis von Proposition 1.8(i) sieht man, dass $Dg \circ Z = Z \circ g$ für alle konstanten Felder Z. Wir müssen noch zeigen, dass g ein Diffeomorphismus ist. Nach Gleichung (1.11) konvergiert (g_n^{-1}) in einem Punkt (nämlich in q). Daher kann man die gleiche Konstruktion wie oben auf g_n^{-1} an Stelle von g_n durchführen und sieht, dass (g_n^{-1}) punktweise konvergiert und dass die Limesfunktion die Inverse von g ist. Wie oben folgt ebenfalls, dass g^{-1} differenzierbar ist und mit allen konstanten Feldern kommutiert. Damit ist gezeigt, dass $g \in \mathrm{Aut}(\Phi)$. $\square$

Anknüpfend an Proposition 1.19 gilt im Fall $\dim N < \infty$ weiter: Die punktweise Konvergenz $g_n \to g$ ist lokal gleichmässig, d.h. zu jedem $\tilde{p} \in N$ gibt es eine Umgebung U von $\tilde{p}$, so dass $g_n|_U$ gleichmässig gegen $g|_U$ konvergiert.

Zur Begründung seien U und V die Umgebungen von $\tilde{p}$ bzw. von 0 aus Lemma 1.6, so dass $\varphi_{\tilde{p}} : V \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Sei K eine kompakte Umgebung von 0 mit $K \subset V$. Wegen $g_n(\varphi_{\tilde{p}}(z)) = \varphi(g_n(\tilde{p}), z, 1)$ müssen wir zum Nachweis der lokal gleichmässigen Konvergenz folgendes zeigen: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ und alle $z \in K$ gilt

$$d(\varphi(g(\tilde{p}), z, 1), \varphi(g_n(\tilde{p}), z, 1)) < \varepsilon,$$

wobei d eine mit der Topologie von N kompatible Metrik ist. Da K kompakt ist, hat die Abbildung $z \mapsto d(\varphi(g(\tilde{p}), z, 1), \varphi(g_n(\tilde{p}), z, 1))$ ein Maximum M_n auf K. Da $g_n(\tilde{p}) \to g(\tilde{p})$, folgt $M_n \to 0$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Aus der lokal gleichmässigen Konvergenz können wir nun die Konvergenz von g_n in der kompakt-offen Topologie von $\mathrm{Aut}(\Phi)$ herleiten:

Sei W eine beliebige Umgebung in der kompakt-offen Topologie von g. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass W die Form hat $W = W(K, U) = \{f \in \mathrm{Aut}(\Phi) |\ f(K) \subset U\}$ mit einer kompakten Menge $K \in N$ und einer offen Menge $U \subset N$. Da $g(K)$ kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(q) \subset U$ für alle $q \in g(K)$. Wegen der lokal gleichmässigen Konvergenz von (g_n) und der Kompaktheit von K, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ und alle $p \in K$ gilt $d(g_n(p), g(p)) < \varepsilon$. Damit gilt $g_n \in W$ für alle $n > n_0$ und daher konvergiert g_n in der kompakt-offen Topologie.

Im endlich-dimensionalen Fall wird $\mathrm{Aut}(\Phi)$ mit der kompakt-offen Topologie versehen und es wird gezeigt, dass das Bild von $\mathrm{Aut}(\Phi)$ unter der Orbitabbildung $I_p : \mathrm{Aut}(\Phi) \to N,\ g \mapsto g(p)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von N ist und dass I_p eine Einbettung, d.h. ein Homöomorphismus auf das Bild $I_p(\mathrm{Aut}(\Phi))$ ist [3]. Zu diesem Zweck werden mit Hilfe eines Koordinatensystems der 2. Art Karten in N konstruiert, die zeigen, dass $I_p(\mathrm{Aut}(\Phi))$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von N ist. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(\Phi)$ erhält die differenzierbare Struktur von dieser Untermannigfaltigkeit und es wird nachgewiesen, dass $\mathrm{Aut}(\Phi)$ dadurch zu einer Liegruppe wird.

Die Verwendung von Koordinatensystemen der 2. Art und der Tatsache, dass $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt und N metrisierbar ist im Beweis der endlich-dimensionalen Version von Kobayashis Satz, machen im Unendlich-dimensionalen eine andere Beweisstrategie notwendig. Insbesondere ist unklar, ob I_p die Gruppe als Untermannigfaltigkeit in N einbettet. Es gilt allerdings Folgendes:

Proposition 1.20. *Die Orbitabbildung* $I_p : \mathrm{Aut}(\Phi) \to N$ *ist eine injektive Immersion. Das Bild* $I_p(\mathrm{Aut}(\Phi))$ *ist abgeschlossen in* N.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Injektivität von I_p. Sei dazu $g \in \mathrm{Aut}(\Phi)$ mit $g(p) = p$ für ein $p \in N$ gegben. Zu $q \in N$ gibt es $\gamma \in \Delta$ mit $q = \gamma(p)$. Ferner gilt offenbar

$$g(q) = g(\gamma(p)) = \gamma(g(p)) = \gamma(p) = q,$$

d.h. $g = e$. Daraus folgt die Injektivität.

Um die Immersionseigenschaft von I_p zu begründen, genügt es zu zeigen, dass $D(I_p)_e$ injektiv ist. Anhand einer Rechnung wie in Gleichung (1.6) sieht man, dass $D(I_p)_e X = X_p$. Somit ist I_p eine Immersion.

Die Abgeschlossenheit von $I_p(\mathrm{Aut}(\Phi))$ in N folgt sofort aus Proposition 1.19.

□

Kapitel 2

Geometrische Anwendungen

2.1 Die affine Gruppe einer Banachmannigfaltigkeit

Im diesem Abschnitt sei M eine zusammenhängende Banachmannigfaltigkeit mit Modellbanachraum E.

Wir wollen Satz 1.18 anwenden, um zu zeigen, dass die Gruppe der affinen Transformationen einer Banachmannigfaltigkeit mit Zusammenhang eine Lie-Transformationsgruppe von M ist. Dazu definieren wir zunächst das Rahmenbündel LM und geben eine geeignete 1-Struktur auf LM an, so dass die affinen Transformationen von M genau den Automorphismen der 1-Struktur auf LM entsprechen. Für die Theorie der Zusammenhänge in endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sei auf [6] verwiesen.

Definition 2.1. Ein topologisch-linearer Isomorphismus $u : E \to T_pM$ heisst *Rahmen in* $p \in M$. Die Menge $LM := \bigcup_{p \in M} \{u |\ u \text{ ist ein Rahmen in } p\}$ heisst *Rahmenbündel von* M.

Proposition 2.2. *Das Rahmenbündel LM ist ein Hauptfaserbündel über der Basis M mit Strukturgruppe* $\mathrm{Gl}(E)$.

Beweis: (i) Differenzierbare Strukur auf LM:

Sei $u \in LM$ gegeben und sei $\phi : U \to U'$ eine Karte um $\pi(u)$ in M, wobei U offen in M und U' offen in E ist. Dabei ist $\pi : LM \to M,\ (u : E \to T_pM) \mapsto p$ die natürliche Projektion. Dann ist die bijektive Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) & \to & U' \times \mathrm{Gl}(E) \\ u & \mapsto & (\phi(\pi(u)), D\phi_{\pi(u)} \circ u) \end{array}$$

eine Karte um u in LM. Hierbei ist $U' \times \mathrm{Gl}(E)$ offen in dem Banachraum $E \times \mathrm{gl}(E)$, über dem LM modelliert wird.

Wir wählen auf LM die gröbste Topologie, so dass alle Karten der obigen Form Homöomorphimen sind.

Der Kartenwechsel ist differenzierbar: Seien $\varphi : U \to U'$ und $\phi : V \to V'$ Karten für M mit $U \cap V \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\phi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathrm{Gl}(E) & \to & \phi(U \cap V) \times \mathrm{Gl}(E) \\ (q, a) & \mapsto & (\phi \circ \varphi^{-1}(q), D\phi_{\varphi^{-1}(q)} \circ (D\varphi_{\varphi^{-1}(q)})^{-1} \circ a). \end{array}$$

Offenbar ist diese Abbildung differenzierbar.

(ii) Die Banachliegruppe $\mathrm{Gl}(E)$ operiert frei von rechts:

$$\begin{array}{rcl} LM \times \mathrm{Gl}(E) & \to & LM \\ (u, a) & \mapsto & u \circ a =: ua \end{array}$$

Es gilt $u \,\mathrm{id} = u$ und $(ua)b = (u \circ a)b = u \circ a \circ b = u(a \circ b)$.

(iii) Lokale Trivialität:

Sei $\varphi : U \mapsto U'$ eine Karte um $\pi(u) \in M$. Folgende Abbildung liefert einen äquivarianten Diffeomorphismus:

$$\begin{array}{rcl} \bar{\phi} : \pi^{-1}(U) & \to & U \times \mathrm{Gl}(E) \\ u & \mapsto & (\pi(u), D\varphi_{\pi(u)} \circ u). \end{array}$$

Es gilt

$$\bar{\phi}(ua) = (\pi(ua), D\varphi_{\pi(ua)} \circ (ua)) = (\pi(u), D\varphi_{\pi(u)} \circ u)a,$$

wobei die Rechtsoperation von $\mathrm{Gl}(E)$ auf $U \times \mathrm{Gl}(E)$ wie folgt definiert ist:

$$(q, a)b = (q, a \circ b).$$

Es ist klar, dass die Rechtsoperation von $\mathrm{Gl}(E)$ auf LM differenzierbar ist. □

Wir bemerken, dass die natürliche Projektion $\pi : LM \to M$ differenzierbar ist mit surjektiver Ableitung $D\pi_u$. Für den Kern der Ableitung gilt $\ker D\pi_u = L(E, T_{\pi(u)}M)$ für alle $u \in LM$. Dabei ist $L(E, T_{\pi(u)}M)$ der Banchraum der stetigen linearen Abbildungen von E nach $T_{\pi(u)}M$. Nach Wahl der differenzierbaren Struktur auf LM, folgt aus dem Submersionstheorem (Theorem 3.5.4 in [2]), dass die Faser $\pi^{-1}(p)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von LM ist für alle $p \in M$.

Proposition 2.3. *Die Rechtsoperation von* $\mathrm{Gl}(E)$ *auf* LM *induziert einen injektiven Liealgebrenhomomorphismus* $\sigma : \mathrm{gl}(E) \to \mathfrak{X}(LM)$. *Ferner gilt* $\sigma(A)_u \neq 0$ *für alle* $u \in LM$, *sofern* $A \neq 0$.

Beweis: Wir definieren σ wie folgt: $A^*_u := \sigma(A)_u := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(u \exp tA)$. Für die Orbitabbildung $\sigma_x : \mathrm{Gl}(E) \to LM,\ \sigma_x(a) = xa$ gilt

$$D(\sigma_x)_e A = (\sigma A)_x = A^*_x. \tag{2.1}$$

Daraus folgt die Linearität von σ.

Mit der Abkürzung $a_t := \exp tA$ gilt für die Klammer (siehe Proposition 1.9 in Ch.I in [6])

$$[A^*, B^*] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B^* - (R_{a_t})_* B^*).$$

Hierbei ist R_{a_t} die Rechtsmultiplikation mit a_t. Wegen $R_{a_t} \circ \sigma_{xa_t^{-1}}(c) = xa_t^{-1}ca_t$ für alle $c \in \mathrm{Gl}(E)$ und (2.1) gilt

$$((R_{a_t})_* B^*)_x = R_{a_t}(D(\sigma_{xa_t^{-1}})_e B_e) = D(\sigma_x)_e(\mathrm{Ad}\ (a_t^{-1})B_e).$$

Damit erhalten wir für die Klammer

$$\begin{aligned}
[A^*, B^*]_x &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(D(\sigma_x)_e B_e - D(\sigma_x)_e(\mathrm{Ad}\ (a_t^{-1})B_e)\right) \\
&= D(\sigma_x)_e\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B_e - \mathrm{Ad}\ (a_t^{-1})B_e)\right) \\
&= D(\sigma_x)_e([A, B]_e) = (\sigma[A, B])_x = [A, B]^*_x.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Injektivität von σ nehmen wir an, dass $A^* = 0$ auf LM. Da $\mathrm{Gl}(E)$ frei und damit insbesondere effektiv auf LM operiert, folgt daraus $A = 0$.

Für den letzten Teil der Behauptung nehmen wir an, dass $A^*_u = 0$ für ein $u \in LM$. Dies impliziert $R_{a_t}u = u$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da $\mathrm{Gl}(E)$ frei operiert, folgt $a_t = e$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $A = 0$. □

Definition 2.4. Das Vektorfeld $A^* := \sigma(A)$ aus Proposition 2.3 nennt man *fundamentales Vektorfeld zu A.*

Mit σ können wir die Liealgebra der fundamentalen Vektorfelder mit der Banachliealgebra $\mathrm{gl}(E)$ identifizieren.

Bemerkung 2.5. *Die Abbildung* $\mathrm{gl}(E) \to T_uLM,\ A \mapsto A^*_u$ *ist eine injektive stetige lineare Abbildung. Ferner ist* $\mathrm{gl}(E) \to L(E, T_{\pi(u)}M),\ A \mapsto A^*_u$ *ein topologisch linearer Isomorphismus, wobei $L(E, T_{\pi(u)}M)$ der Tangentialraum im Punkt u an die Faser $\pi^{-1}(\pi(u))$ ist.*

Wir bezeichnen im Folgenden den Tangentialraum in u an die Faser $\pi^{-1}(\pi(u))$ mit G_u. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir für die Ableitungen von π und R_a ebenfalls π bzw. R_a.

Definition 2.6. Ein *Zusammenhang für LM* ist eine Abbildung, die jedem $u \in LM$ einen abgeschlossenen Unterraum Q_u von T_uLM zuordnet, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) $T_uLM = G_u \oplus Q_u$ im Sinne eines Banachraumsplittings,

(ii) $Q_{ua} = R_a Q_u$ für alle $u \in LM,\ a \in \mathrm{Gl}(E)$,

(iii) Q_u hängt differenzierbar von u ab, in folgendem Sinn: Für ein differenzierbares Vektorfeld X auf LM sind die Horizontal- und Vertikalfelder $u \mapsto (hX)_u \in Q_u$ bzw. $u \mapsto (vX)_u \in G_u$, gemäss des Splittings in (i), ebenfalls differenzierbare Vektorfelder.

Ein Zusammenhang für LM heisst auch *linearer Zusammenhang.*

Lemma 2.7. *Die Projektion $\pi : LM \to M$ induziert durch die Ableitung einen topologisch linearen Isomorphismus $\pi : Q_u \to T_{\pi(u)}M$.*

Beweis: Da $T_uLM = Q_u \oplus \operatorname{Ker} \pi$ und $\pi : T_uLM \to T_{\pi(u)}M$ surjektiv und stetig ist, folgt $\pi : Q_u \to T_{\pi(u)}M$ ist bijektiv und stetig. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $\pi : Q_u \to T_{\pi(u)}M$ ein topologisch linearer Isomorphismus. □

Definition 2.8. Sei ein linearer Zusammenhang gegeben. Durch folgende Bedingung wird die $\mathrm{gl}(E)$-wertige 1-Form ω auf LM, die man *Zusammenhangsform* nennt, definiert: Zu einem Vektorfeld X auf LM gibt es genau ein $A \in \mathrm{gl}(E)$ mit $(vX)_u = A^*_u$. Definiere $\omega_u(X) := A$.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass $\omega(A^*) = A$ und $\omega(X) = 0$ genau dann, wenn X horizontal ist.

Proposition 2.9. *Sei X ein Vektorfeld auf M. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld X^* auf LM, so dass $X^*_u \in Q_u$ und $\pi X^*_u = X_{\pi(u)}$ für alle $u \in LM$. Der Lift X^* ist invariant unter Rechtsmultiplikation, d.h. $R_a X^*_u = X^*_{ua}$ für alle $u \in LM$, $a \in \mathrm{Gl}(E)$.*

Andererseits ist jedes horizontale Vektorfeld X^* auf LM, welches invariant unter Rechtsmultiplikation ist, der horizontale Lift eines Vektorfeldes X auf M.

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit von X^* folgt aus der Tatsache, dass π einen topologisch linearen Isomorphismus von Q_u nach $T_{\pi(u)}M$ induziert, nach Lemma 2.7. Wir zeigen noch, dass X^* differenzierbar ist. Sei $\bar{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{Gl}(E)$ eine lokale Trivialisierung um $x \in U$. Definiere auf $U \times \mathrm{Gl}(E)$ das Vektorfeld $\bar{Y}$ durch $\bar{Y}(y, a) := X_y$ und setze $Y := (D\bar{\varphi})^{-1}\bar{Y}$. Dann ist Y ein differenzierbares Vektorfeld auf $\pi^{-1}(U)$. Wegen der Äquivarianz von $\bar{\varphi}$ gilt $\pi Y_u = X_{\pi(u)}$ für alle $u \in \pi^{-1}(U)$. Aus der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts folgt $hY = X^*$. Wegen der Bedinung (iii) in Definition 2.6 ist hY und damit X^* diffenrenzierbar. Die behauptete Invarianz unter Rechtsmultiplikation ergibt sich aus (ii) in Definition 2.6.

Sei nun andererseits ein horizontales Vektorfeld X^* auf LM gegeben, das unter Rechtsmultiplikation invariant ist. Zu $x \in M$ definiere $X_x := \pi X^*_u$ für ein $u \in \pi^{-1}(x)$. Das ist wohldefiniert, da für ein $u' \in \pi^{-1}(x)$ gilt $u' = ua$ mit einem $a \in \mathrm{Gl}(E)$. Damit gilt $\pi X^*_{u'} = \pi X^*_{ua} = \pi X^*_u$ wegen der Invarianz unter Rechtsmultiplikation von X^*. Offensichtlich ist X^* der horizontale Lift von X. □

Definition 2.10. Das Vektorfeld X^* aus Proposition 2.9 nennt man den *horizontalen Lift von X.*

Definition 2.11. Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ eine differenzierbare Kurve in M. Der *horizontale Lift von* γ ist die horizontale Kurve $\gamma^* : [t_0, t_1] \to LM$, d.h. $\dot{\gamma}^*(t) \in Q_{\gamma^*(t)}$, so dass gilt $\pi\gamma^*(t) = \gamma(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$.

Proposition 2.12. *Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ eine differenzierbare Kurve in M mit $\gamma(t_0) = x_0$. Zu $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ gibt es einen eindeutig bestimmten horizontalen Lift $\gamma^* : [t_0, t_1] \to LM$ mit $\gamma^*(t_0) = u_0$.*

Beweis: Auf Grund der lokalen Trivialität von LM gibt es eine differenzierbare Kurve $\mu(t)$ in LM mit $\pi\mu(t) = \gamma(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ und $\mu(t_0) = u_0$. Der gesuchte Lift von γ hat dann die Form $\gamma(t) = \mu(t)a(t)$, wobei $a(t)$ ein differenzierbarer Weg in $\mathrm{Gl}(E)$ ist mit $a(t_0) = e$. Um eine Bedingung an $a(t)$ zu erhalten, so dass γ eine horizontale Kurve wird, betrachten wir die Ableitung $\dot{\gamma}(t) = \dot{\mu}(t)a(t) + \mu(t)\dot{a}(t)$. Setzen wir das in die Zusammenhangsform ein, so erhalten wir

$$\omega(\dot{\gamma}(t)) = \omega(\dot{\mu}(t)a(t)) + \omega(\mu(t)\dot{a}(t)) = \mathrm{Ad}(a(t))\omega(\dot{\mu}(t)) + a(t)^{-1}\dot{a}(t)$$

Für die letzte Gleichheit haben wir Proposition 1.1 (b') aus [6] verwendet, die man im unendlich-dimensionalen Fall genau so wie im Endlich-dimensionalen beweist. Die Kurve γ ist genau dann horizontal, wenn $\omega(\dot{\gamma}(t)) = 0$, also $\mathrm{Ad}(a(t))\omega(\dot{\mu}(t)) = -a(t)^{-1}\dot{a}(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$. Dies ist äquivalent zu der Gleichung $\omega(\dot{\mu}(t)) = -\dot{a}(t)a(t)^{-1}$, die eine Kurve in $\mathrm{gl}(E)$ beschreibt. Wir zeigen nun, dass es zu $\omega(\dot{\mu}(t))$ eine Kurve $a(t)$ in $\mathrm{Gl}(E)$ gibt mit

$$\omega(\dot{\mu}(t)) = -\dot{a}(t)a(t)^{-1} \text{ für alle } t \in [t_0, t_1],\ a(t_0) = e, \tag{2.2}$$

was den Beweis abschliesst. Dazu definieren wir ein Vektorfeld X auf $\mathrm{Gl}(E) \times [t_0, t_1]$ wie folgt: Der Vektor im Punkt $(a, t) \in \mathrm{Gl}(E) \times [t_0, t_1]$ ist gegeben durch $(-\omega(\dot{\mu}(t))a, 1) \in \mathrm{gl}(E) \times T_t\mathbb{R}$. Eine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems durch (e, t_0) zu Zeit $t = t_0$ hat die Form $(a(t), t)$, wobei offenbar $a(t)$ das Anfangswertproblem (2.2) löst.

Wir müssen noch zeigen, dass $a(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ definiert ist. Wir bezeichnen den lokalen Fluss auf $\mathrm{Gl}(E) \times [t_0, t_1]$ mit φ_t. Nach einem bekannten Satz über Differentialgleichungen in Banachräumen, gibt es zu $s \in \mathbb{R}$ ein $\delta_s > 0$, so dass $\varphi_t(e, r)$ definiert ist für $|t| < \delta_s$ und $|r - s| < \delta_s$. Da $\{e\} \times [t_0, t_1]$ kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\varphi_t(e, r)$ für jedes $r \in [t_0, t_1]$ und $|t| < \delta$ erklärt ist. Wähle $t_0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = t_1$ mit $s_i - s_{i-1} < \delta$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann ist $\varphi_t(e, t_0) = (a(t), t)$ definiert für $t \in [t_0, s_1]$. Ferner gilt $\varphi_\tau(e, s_1) = (a^1(\tau), \tau + s_1)$ für alle $\tau \in [0, s_2 - s_1]$, wobei $a^1(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{a}^1(t)a^1(t)^{-1} = -\omega(\dot{\mu}(t+s_1))$, $a^1(t_0) = e$ ist. Dann gilt $a(t) = a^1(t-s_1)a(s_1)$ für $t \in [s_1, s_2]$, wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (2.2). So fortfahrend erhalten wir $\varphi_\tau(e, s_i) = (a^i(\tau), \tau + s_i)$ für alle $\tau \in [0, s_{i+1} - s_i]$. Dabei ist $a^i(t)$ die Lösung von $\dot{a}^i(t)a^i(t)^{-1} = -\omega(\dot{\mu}(t + s_i))$, $a^i(t_0) = e$ für $i = 1, \ldots k - 1$. Damit gilt $a(t) = a^i(t - s_i)a(s_i)$ für alle $t \in [s_i, s_{i+1}]$. Auf diese Weise haben wir insgesamt gezeigt, dass $a(t)$ auf $[t_0, t_1]$ definiert ist. $\square$

Definition 2.13. Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ eine differenzierbare Kurve in M mit $\gamma(t_0) = x_0$ und $u \in \pi^{-1}(x_0)$. Für den horizontalen Lift γ^* von γ gilt $\pi(\gamma^*(t_1)) = \gamma(t_1) =: x_1$. Die dadurch induzierte Bijektion $\pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$ heisst *Parallelverschiebung entlang* γ und wird mit $\gamma_{t_1}^{t_0}$ bezeichnet.

Bemerkung 2.14. *Offenbar gilt* $\gamma_{t_1}^{t_0} \circ R_a = R_a \circ \gamma_{t_1}^{t_0}$ *für alle* $a \in \mathrm{Gl}(E)$*, da* R_a *horizontale Kurven in horizontale Kurven abbildet.*

Definition 2.15. Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ eine differenzierbare Kurve in M mit $\gamma(t_0) = x_0$ und $u \in \pi^{-1}(x_0)$. Dann ist die Abbildung $T_{x_0}M \to T_{x_1}M,\ X_{x_o} \mapsto (\gamma_{t_1}^{t_0} u)(u^{-1} X_{x_0})$ wegen Bemerkung 2.14 unabhängig von der Wahl von u in der Faser $\pi^{-1}(x_0)$ und somit wohldefiniert. Sie wird ebenfalls *Parallelverschiebung entlang* γ genannt und mit $\gamma_{t_1}^{t_0}$ bezeichnet.

Definition 2.16. Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ eine differenzierbare Kurve in M und X ein Vektorfeld auf M. Dann ist die *kovariante Ableitung* $\nabla_{\dot\gamma(t)} X$ von X im Punkt $\gamma(t)$ in Richtung $\dot\gamma(t)$ definiert durch

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} X := \lim_{h \to 0} \frac{1}{t} (\gamma_t^{t+h}(X_{\gamma(t+h)}) - X_{\gamma(t)}). \tag{2.3}$$

Definition 2.17. Sei $X(t)$ ein Vektorfeld entlang einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \to M$. Dann heisst $X(t)$ *parallel entlang* γ, wenn

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} X(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Definition 2.18. Die eindeutig bestimmte E-wertige 1-Form θ auf LM, für die gilt

$$\theta(X_u) = u^{-1}(\pi(X_u)) \text{ für alle } X_u \in T_u LM$$

heisst *kanonische Form.*

Anders als die Zusammenhangsform, hängt die kanonische Form nicht von dem linearen Zusammenhang ab.

Definition 2.19. Zu jedem $\xi \in E$ ist ein Vektorfeld $B(\xi)$, das sogenannte *standard-horizontale Vektorfeld zu* ξ, auf LM folgendermassen definiert: Im Punkt $u \in LM$ ist $B(\xi)_u$ der eindeutig bestimmte horizontale Vektor, für den gilt $\pi(B(\xi)_u) = u(\xi)$.

Proposition 2.20. *Es gilt*

(i) $\theta(B(\xi)) = \xi$ *für alle* $\xi \in E$,

(ii) $(R_a)_*(B(\xi)) = B(a^{-1}\xi)$ *für alle* $\xi \in E,\ a \in \mathrm{Gl}(E)$,

(iii) Falls $\xi \neq 0$*, dann ist* $B(\xi)_u \neq 0$ *für alle* $u \in LM$.

Beweis: (i) Für $u \in LM$ gilt $\theta(B(\xi)_u) = \xi$ genau dann, wenn $\pi(B(\xi)_u) = u(\xi)$. Letzte Gleichung ist nach Definition 2.22 offensichtlich wahr.

(ii) Es gilt $((R_a)_*(B(\xi))_u = R_a(B(\xi)_{ua^{-1}}) \in Q_u$. Wegen $\pi(R_a X_u) = \pi(X_u)$ für alle $X_u \in Q_u$, folgt $\pi(R_a(B(\xi)_{ua^{-1}})) = \pi(B(\xi)_{ua^{-1}}) = ua^{-1}(\xi)$. Andererseits gilt $\pi(B(a^{-1}\xi)_u = u(a^{-1}\xi)$. Daraus folgt die Behauptung.

(iii) Sei $B(\xi)_u = 0$, dann gilt $0 = \pi(B(\xi)_u) = u(\xi)$. Da $u : E \to T_{\pi(u)}M$ ein linearer Isomorphismus ist, folgt $\xi = 0$. □

Bemerkung 2.21. *Das standard-horizontale Vektorfeld $B(\xi)$ ist durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt:*

(i) $\theta(B(\xi)) = \xi$ *und*

(ii) $\omega(B(\xi)) = 0$,

da (ii) genau dann erfüllt ist, wenn $B(\xi)$ horizontal ist.

In folgendem Sinn sind $B(\xi), A^*$ und ω, θ zueinander dual, was unmittelbar aus den Definitionen folgt:

$$\theta(B(\xi)) = \xi, \quad \omega(B(\xi)) = 0$$

$$\theta(A^*) = 0, \quad \omega(A^*) = A$$

Definition 2.22. Eine differenzierbare Kurve $\gamma : [t_o, t_1] \to M$ heisst *Geodäte in* M, falls $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.23. *Die Projektion einer Trajektorie eines standard-horizontalen Vektorfeldes auf M ist eine Geodäte in M. Andererseits ist jede Geodäte in M die Projektion einer Trajektorie eines standard-horizontalen Vektorfeldes.*

Beweis: Sei $B(\xi)$ das standard-horizontale Vektorfeld auf LM zu $\xi \in E$ und sei $\tilde\gamma : [t_0, t_1] \to LM$ eine Trajektorie von $B(\xi)$. Setze $\gamma(t) := \pi(\tilde\gamma(t))$. Dann gilt $\gamma^t_{t_0}(\dot\gamma(t)) = \gamma^t_{t_0}(\tilde\gamma(t)\xi) = \tilde\gamma(t_0)\xi = \dot\gamma(t_0)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$. Daraus folgt, dass γ eine Geodäte ist.

Sei nun andererseits $\gamma : I \to M$ eine Geodäte in M, wobei I ein offenes Intervall ist mit $0 \in I$. Sei $u_0 \in LM$ mit $\pi(u_0) = \gamma(0)$ und $\tilde\gamma : I \to LM$ der horizontale Lift von γ mit $\tilde\gamma(0) = u_0$. Setze $\xi := u_0^{-1}\dot\gamma(0) \in E$. Da γ eine Geodäte ist, gilt $\dot\gamma(t) = \tilde\gamma(t)\xi$. Da $\tilde\gamma$ horizontal ist und $\theta(\dot{\tilde\gamma}(t)) = \tilde\gamma(t)^{-1}(\pi(\dot{\tilde\gamma}(t)) = \tilde\gamma(t)^{-1}\dot{\tilde\gamma}(t) = \xi$ gilt, folgt, dass $\tilde\gamma(t)$ eine Trajektorie von $B(\xi)$ ist. □

Korollar 2.24. *Ein linearer Zusammenhang ist vollständig, d.h. jedes Geodäte ist für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ erklärt, genau dann, wenn jedes standard-horizontale Vektorfeld auf LM vollständig ist.*

Proposition 2.25. *Die Abbildung $\Phi : LM \times E \times \mathrm{gl}(E) \to T(LM)$, $(u, \xi, A) \mapsto B(\xi)_u + A^*_u$ ist eine 1-Struktur auf LM.*

Beweis: Die stetige lineare Abbildung $\mathrm{gl}(E) \to G_u,\ A \mapsto A_u^*$ ist bijektiv und somit, nach dem Satz von der offenen Abbildung, ein topologisch linearer Isomorphismus. Gleiches gilt für die Abbildung $E \to Q_u,\ \xi \mapsto B(\xi)_u$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 2.26. *Durch ω und θ ist eine 1-Struktur auf LM gegeben, da die standard-horizontalen und die fundamentalen Vektorfelder durch ω und θ gemäss der Dualität in Bemerkung 2.21 eindeutig bestimmt sind.*

Lemma 2.27. *Jeder Diffeomorphismus $f : M \to M$ induziert durch die Ableitung einen Bündelautomorphismus $\tilde{f}$ von LM, folgendermassen: $\tilde{f}(u) = Df_{\pi(u)} \circ u$.*

Beweis: Sei $a \in \mathrm{Gl}(E)$, dann gilt $\tilde{f}(ua) = Df_{\pi(ua)} \circ ua = Df_{\pi(u)} \circ u \circ a = \tilde{f}(u) \circ a$, da $\pi(ua) = \pi(u)$. $\square$

Da $\tilde{f} : LM \to LM$ ein Bündelautomorphismus ist, lässt $\tilde{f}$ die fundamentalen Vektorfelder invariant, d.h. $D\tilde{f}_u(A_u^*) = A^*_{\tilde{f}(u)}$.

Proposition 2.28. *(i) Sei $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Dann lässt $\tilde{f} : LM \to LM$ die kanonische Form θ invariant, d.h. $\theta_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u(X_u^*)) = \theta_u(X_u^*)$ für alle $u \in LM$ und alle $X_u^* \in T_uLM$.*

(ii) Andererseits wird jeder fasernerhaltende Diffeomorphismus $F : LM \to LM$, der θ invariant lässt, durch einen Diffeomorphismus $f : M \to M$ induziert, d.h. $F = \tilde{f}$.

Beweis: (i) Sei $X_u^* \in T_uLM$ und setze $X_x := \pi(X_u^*)$ mit $x := \pi(u)$, also $X_x \in T_xM$. Dann gilt $\theta(X_u^*) = u^{-1}(X_x)$ und $\theta_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u(X_u^*)) = \tilde{f}(u)^{-1}(Df_x(X_x))$. Mit $\tilde{f}(u)^{-1} = u^{-1} \circ (Df_x)^{-1}$ folgt, $\theta_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u(X_u^*)) = u^{-1}(X_x) = \theta_u(X_u^*)$.

(ii) Sei $F : LM \to LM$ ein fasernerhaltender Diffeomorphismus der θ invariant lässt. Da F Fasern erhält, wird ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ induziert, $f(\pi(u)) = \pi(F(u))$. Wir zeigen, dass $F = \tilde{f}$ gilt. Setze dazu $J := \tilde{f}^{-1} \circ F$. Dann ist zu zeigen, dass $\tilde{f}^{-1} \circ F = \mathrm{id}$ auf LM. Als Komposition zweier fasernerhaltender Diffeomorphismen, die θ invariant lassen, ist J ebenfalls fasernerhaltend und lässt θ invariant. Offenbar induziert J auf M die Identität. Dann gilt für alle $X_u^* \in T_uLM$

$$u^{-1}(X_x) = \theta_u(X_u^*) = \theta_{J(u)}(DJ_uX_u^*) = J(u)^{-1}(X_x).$$

Daraus folgt $J(u) = u$ für alle $u \in LM$ und insgesamt $\tilde{f} = F$. $\square$

Bemerkung 2.29. *Sei LM versehen mit der 1-Struktur Φ, die durch θ und ω gegeben ist. Nach Definition sind die Automorphismen von Φ alle Diffeomorphismen $F : LM \to LM$ mit*

$$DF_u(A_u^* + B(\xi)_u) = A_{F(u)}^* + B(\xi)_{F(u)} \tag{2.4}$$

für alle $A \in \mathrm{gl}(E)$, $\xi \in E$ und $u \in LM$.

Setzt man $\xi = 0$ bzw. $A = 0$, so folgt aus (2.4), dass jeder Automorphismus von Φ Horizontal- in Horizontalräume, bzw. Vertikal- in Vertikalräume abbildet, d.h. $DF_u(Q_u) = Q_{F(u)}$, bzw. $DF_u(G_u) = G_{F(u)}$ für alle $u \in LM$.

Proposition 2.30. *Sei LM versehen mit der 1-Struktur Φ, die durch θ und ω gegeben ist. Dann bildet jeder Automorphismus der 1-Struktur Fasern in Fasern ab und lässt θ invariant.*

Beweis: Sei $F \in \mathrm{Aut}(\Phi)$. Die Faser $\pi^{-1}(\pi(u))$ ist Integralmannigfaltigkeit durch den Punkt $u \in LM$ der Distribution $A \mapsto A^*$ auf LM. Nach Bemerkung 2.29 lässt F diese Distribution invariant. Somit bildet F die Integralmannigfaltigkeit $\pi^{-1}(\pi(u))$ durch u in die Integralmannigfaltigkeit $\pi^{-1}(\pi(F(u)))$ durch $F(u)$ ab. Also ist F fasernerhaltend.

Für die Invarianz von θ unter F ist folgendes zu zeigen:

$$\theta_{F(u)}(DF_u X_u) = \theta_u(X_u) \tag{2.5}$$

für alle $X_u \in T_uLM$. Es gibt $A \in \mathrm{gl}(E)$, $\xi \in E$, so dass $X_u = A_u^* + B(\xi)_u$. Das in obige Gleichung eingesetzt, liefert für die linke Seite $\theta_{F(u)}(DF_u X_u) = \theta_{F(u)}(DF_u(B(\xi)_u)) + \theta_{F(u)}(DF_u(A_u^*))$. Da F Vertikalräume invariant lässt, verschwindet der zweite Summand. Unter Verwendung von (2.4) erhalten wir

$$\theta_{F(u)}(DF_u X_u) = \theta_{F(u)}(B(\xi)_{F(u)}) = \xi.$$

Die rechte Seite von (2.5) ergibt $\theta_u(X_u) = \theta_u(B(\xi)_u) + \theta_u(A_u^*) = \theta_u(B(\xi)_u) = \xi$. Damit ist die Invarianz von θ unter F gezeigt. □

Definition 2.31. Die Propositionen 2.28(ii) und 2.30 implizieren, dass jedes Element $F : LM \to LM$ aus $\mathrm{Aut}(\Phi)$ durch einen Diffeomorphismus $f : M \to M$ induziert wird, d.h. $F = \tilde{f}$. Diesen Diffeomorphismus f nennen wir *affine Transformation* von M.

Die Menge der affinen Transformationen bilden eine Gruppe bezüglich der Komposition, die wir mit $\mathcal{A}$ abkürzen.

Proposition 2.32. *Ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ ist genau dann eine affine Transformation von M, wenn f jedes parallele Vektorfeld entlang einer beliebigen Kurve γ in M in ein paralleles Vektorfeld entlang der Kurve $f \circ \gamma$ abbildet. Insbesondere bildet f Geodäten in Geodäten ab.*

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei $X(t)$ ein paralleles Vektorfeld entlang $\gamma : [t_0, t_1] \to M$, d.h. $\gamma_t^{t_0} X(t_0) = X(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$. Sei $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(t_o))$, dann ist $X(t) = (\gamma_t^{t_0} u_0)(u_0^{-1} X(t_0))$. Da $\tilde{f}$ Horizontalräume invariant lässt, ist $\tilde{f}(\gamma_t^{t_0} u_0)$ ebenfalls eine horizontale Kurve mit $\pi(\tilde{f}(\gamma_t^{t_0}u_0)) = f\circ\gamma(t)$. Wegen der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts ist $\tilde{f}(\gamma_t^{t_0}u_0)$ der Lift von $f\circ\gamma(t)$ durch $\tilde{f}(u_0)$. Die Parallelverschiebung von $Df_{\gamma(t_0)}X(t_0)$ längs $f\circ\gamma$ ist nach Definition gleich

$$((f\circ\gamma)_t^{t_0}(\tilde{f}(u_0)))(\tilde{f}(u_0)^{-1}Df_{\gamma(t_0)}X(t_0)). \tag{2.6}$$

Dabei gilt $(f\circ\gamma)_t^{t_0}(\tilde{f}(u_0)) = \tilde{f}(\gamma_t^{t_0}u_0)$ wegen der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts und da $\tilde{f}(u_0)\in\pi^{-1}(f\circ\gamma(t_0))$. Obige Parallelverschiebung (2.6) ist also gleich $\tilde{f}(\gamma_t^{t_0}u_0)(u_0^{-1}X(t_0))$. Also wird $X(t)$ durch f auf die Parallelverschiebung von $Df_{\gamma(t_0)}X(t_0)$ längs $f\circ\gamma$ abgebildet.

($\Leftarrow$) Wir zeigen zunächst $D\tilde{f}_uB(\xi)_u = B(\xi)_{\tilde{f}(u)}$ für $u\in LM$, $\xi\in E$. Sei $\gamma:[t_0,t_1]\to M$ die Geodäte in M mit $\gamma(t_0)=\pi(u)$ und $\dot\gamma(t_0)=\pi(B(\xi)_u)$. Dann ist nach Proposition 2.23 der horizontale Lift $\tilde\gamma$ von γ durch u eine Lösungskurve von $B(\xi)$. Nach Voraussetzung ist $f\circ\gamma$ ebenfalls eine Geodäte mit $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t_0) = Df_{\gamma(t_0)}(\pi(B(\xi)_u))$. Da $f\circ\gamma$ eine Geodäte ist, ist der horizontale Lift von $f\circ\gamma$ durch $\tilde{f}(u)$ Lösungskurve von $B(\tilde\xi)$ mit einem gewissen $\tilde\xi$. Wir zeigen $\xi=\tilde\xi$: Es gilt $\tilde\xi = \tilde{f}(u)^{-1}(Df_{\gamma(t_0)}\dot\gamma(t_0)) = (Df_{\gamma(t_0)}\circ u)^{-1}(Df_{\gamma(t_0)}\dot\gamma(t_0)) = u^{-1}\dot\gamma(t_0) = \xi$. Da $\tilde{f}$ nach Voraussetzung horizontale Kurven in LM in horizontale Kurven abbildet, folgt, dass $\tilde{f}$ Horizontalräume in Horizontalräume abbildet, wie man durch Ableiten nach der Zeit leicht sieht. Daher ist der horizontale Lift von $f\circ\gamma$ durch $\tilde{f}(u)$ gleich $\tilde{f}\circ\tilde\gamma$, was aus der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts folgt. Da nun $\tilde{f}\circ\tilde\gamma$ Lösungskurve von $B(\xi)$ ist, ergibt sich $D\tilde{f}_uB(\xi)_u = B(\xi)_{\tilde{f}(u)}$.

Um den Beweis abzuschliessen, bemerken wir noch, dass $D\tilde{f}_uA_u^* = A_{\tilde{f}(u)}^*$ gilt, da $\tilde{f}$ ein Bündelautomorphismus ist.

Damit erhalten wir insgesamt $D\tilde{f}_u(A_u^*+B(\xi)_u) = A_{\tilde{f}(u)}^* + B(\xi)_{\tilde{f}(u)}$, d.h. f ist eine affine Transformation. □

Wir definieren die geometrische Exponentialabbildung Exp wie folgt: Angenommen es gäbe eine Geodäte $\gamma: I\to M$, wobei I ein Intervall ist, dass $[0,1]$ enthält, mit $\gamma(0)=x$ und $\dot\gamma(0)=X,\ X\in T_xM$. Dann gilt für die Exponentialabbildung $\mathrm{Exp}X=\gamma(1)$.

Korollar 2.33. *Eine affine Abbildung $f: M\to M$ kommutiert mit der Exponentialabbildung, d.h. $f\circ\mathrm{Exp}X = \mathrm{Exp}\circ Df_x(X)$ für alle $X\in T_xM,\ x\in M$.*

Beweis: Das ist klar, da f Geodäten in Geodäten abbildet, nach obiger Proposition.

□

Proposition 2.34. *(i) Sei $f: M\to M$ eine affine Transformation von M. Dann lässt $\tilde{f}: LM\to LM$ die kanonische Form θ und die Zusammenhangsform ω invariant.*

(ii) Andererseits wird jeder fasernerhaltende Diffeomorphismus $F : LM \to LM$, der θ und ω invariant lässt, durch eine affine Transformation $f : M \to M$ induziert, d.h. $F = \tilde{f}$.

Beweis: (i) Da $\tilde{f}$ ein Bündelautomorphismus ist, lässt $\tilde{f}$ die kanonische Form θ invariant. Wir zeigen noch, dass dies auch für ω gilt. Sei $X_u \in T_uLM$ gegeben. Dann ist $X_u = B(\xi)_u + A^*_u$ für gewisse $A \in \mathrm{gl}(E)$, $\xi \in E$. Es gilt $\omega_u(X_u) = \omega_u(B(\xi)_u) + \omega_u(A^*_u) = A$. Andererseits ist $\omega_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u X_u) = \omega_{\tilde{f}(u)}(B(\xi)_{\tilde{f}(u)}) + \omega_{\tilde{f}(u)}(A^*_{\tilde{f}(u)}) = A$, da f eine affine Transformation ist. Also folgt insgesamt $\omega_u(X_u) = \omega_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u X_u)$.

(ii) Nach Proposition 2.28(ii) wird F von einem Diffeomorphismus $f : M \to M$ induziert. Da F die Zusammenhangsform ω invariant lässt, wird jede horizontale Kurve unter F in eine horizontale Kurve abgebildet. Daraus folgt, dass f parallele Vektorfelder entlang einer beliebigen Kurve γ in parallele Vektorfelder entlang $f \circ \gamma$ abbildet. Nach Proposition 2.32 ist f eine affine Abbildung. □

Proposition 2.35. *Ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ ist genau dann eine affine Transformation, wenn $\tilde{f}$ jedes standard-horizontale Vektorfeld invariant lässt, d.h. $D\tilde{f}_u B(\xi)_u = B(\xi)_{\tilde{f}(u)}$ für alle $\xi \in E$, $u \in LM$.*

Beweis: ($\Rightarrow$) Setze $A = 0$ in (2.4).

($\Leftarrow$) Da $\tilde{f}$ Horizontalräume in Horizontalräume abbildet, folgt, dass f parallele Vektorfelder entlang einer Kurve γ in parallele Vektorfelder entlang $f \circ \gamma$ abbildet. Aus Proposition 2.32 ergibt sich die Behauptung. □

Proposition 2.36. *Sei X ein Vektorfeld auf M. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $\tilde{X}$ auf LM mit*

(i) $\tilde{X}$ ist invariant unter Rechtsmultiplikation, d.h. $R_a \tilde{X}_u = \tilde{X}_{ua}$ für alle $u \in LM$, $a \in \mathrm{Gl}(E)$.

(ii) Die Lieableitung von θ in Richtung $\tilde{X}$ verschwindet, d.h. $L_{\tilde{X}}\theta = 0$.

(iii) $\pi(\tilde{X}_u) = X_u$ für alle $u \in LM$.

Andererseits gibt es zu jedem Vektorfeld $\tilde{X}$ auf LM, welches (i) und (ii) erfüllt, ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld X auf M, für das (iii) gilt.

Beweis: Sei X ein Vektorfeld auf M, $x \in M$ und $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ der lokale Fluss auf M in einer Umgebung U von x. Die induzierte Abbildung $\tilde{\varphi}_t : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(\varphi_t(U))$ definiert ein Vektorfeld $\tilde{X}$ auf LM, so dass $\tilde{\varphi}_t$ der Fluss von $\tilde{X}$ ist. Da $\tilde{\varphi}_t$ mit allen R_a kommutiert, folgt (i). Ferner lässt $\tilde{\varphi}_t$ die kanonische Form θ auf $\pi^{-1}(U)$ invariant und somit erhalten wir (ii). Wegen $\pi \circ \tilde{\varphi}_t = \tilde{\varphi}_t \circ \pi$, folgt (iii). Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, $\tilde{X}_1$ sei ein weiteres Vektorfeld auf LM für das (i),(ii) und (iii) gilt. Sei ϕ_t der Fluss von $\tilde{X}_1$. Wegen (i) und (ii) lässt ϕ_t die kanonische Form θ invariant und kommutiert mit R_a. Wie in

Proposition 2.28 folgt, dass ϕ_t durch einen Fluss ψ_t auf M induziert wird, d.h. $\phi_t = \tilde{\psi}_t$. Die Eigenschaft (iii) impliziert, dass ψ_t der Fluss von X auf M ist, also $\psi_t = \varphi_t$ und somit folgt $\tilde{\psi}_t = \tilde{\varphi}_t$. Daraus ergibt sich $\tilde{X} = \tilde{X}_1$.

Sei nun andererseits ein Vektorfeld $\tilde{X}$ auf LM gegeben, für das (i) und (ii) gilt. Aus (i) folgt sofort (iii). Die Eindeutigkeit ist klar. □

Man nennt $\tilde{X}$ den *natürlichen Lift von* X. Der natürliche Lift ist unabhängig von dem Zusammenhang auf LM.

Definition 2.37. Ein Vektorfeld X auf M heisst *infinitesimale affine Transformation von* M, wenn der lokale Fluss φ_t eine affine Abbildung ist, genauer: Sei $x \in M$ und $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ für $|t| < \delta$ der Fluss auf einer Umgebung U von x. Dann ist X infinitesimale affine Transformation von M, wenn

$$(D\tilde{\varphi}_t)_u B(\xi)_u = B(\xi)_{\tilde{\varphi}_t(u)} \tag{2.7}$$

$$(D\tilde{\varphi}_t)_u A^*_u = A^*_{\tilde{\varphi}_t(u)} \tag{2.8}$$

für alle $u \in \pi^{-1}(U),\ A \in \mathrm{gl}(E),\ \xi \in E,\ |t| < \delta.$

Lemma 2.38. *Ein Vektorfeld X auf M ist eine infinitesimale affine Transformation von M genau dann, wenn für den natürlichen Lift $\tilde{X}$ gilt $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$ für alle $\xi \in E$.*

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei X eine infinitesimale affine Transformation von M, dann folgt $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$ unmittelbar aus der Definition 2.37.

($\Leftarrow$) Sei φ_t der Fluss von X, dann ist $\tilde{\varphi}_t$ der Fluss von $\tilde{X}$. Aus $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$ folgt sofort (2.7). Da φ_t mit der Rechtsmultiplikation R_a kommutiert für alle $a \in \mathrm{Gl}(E)$ gilt (2.8). □

Offenbar ist eine infinitesimale affine Transformation X von M mit Fluss φ_t genau dann vollständig, wenn der Fluss $\tilde{\varphi}_t$ von $\tilde{X}$ vollständig ist. Es gilt dann $\pi\tilde{\varphi}_t = \varphi_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.39. *Der Zusammenhang auf M sei vollständig. Dann ist jede infinitesimale affine Transformation von M vollständig.*

Beweis: Sei X eine infinitesimale affine Transformation von M. Wir zeigen, dass der Fluss $\tilde{\varphi}_t$ von $\tilde{X}$ vollständig ist. Zu diesem Zweck sei $u_0 \in LM$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\tilde{\varphi}_t(u_0)$ für alle $|t| < \delta$ definiert ist. Wir werden zeigen, dass $\tilde{\varphi}_t(u)$ für alle $|t| < \delta$ und alle $u \in LM$ definiert ist. Daraus folgt dann die Vollständigkeit von $\tilde{X}$ und damit von X. Wir behaupten, dass es zu $u \in LM$ endlich viele standard-horizontale Vektorfelder $B(\xi_1), \ldots, B(\xi_k)$ und ein $a \in \mathrm{Gl}(E)$ gibt, mit

$$u = (b^1_{t_1} \circ \ldots \circ b^k_{t_k} u_0)a \tag{2.9}$$

für gewisse Zeiten $t_1, \ldots, t_k$. Dabei bezeichnet $b^i_{t_i}$ den Fluss von $B(\xi_i)$ zur Zeit t_i. Betrachte dazu die Menge $\mathcal{M}$ der Punkte in M, die man durch eine endliche Folge von Geodätenstücken $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ von $\pi(u_0)$ ausgehend erreichen kann. Da der Zusammenhang vollständig ist, ist Exp insbesondere auf einer offenen Umgebung, die $0 \in T_{\pi(u)}M$ enthält, definiert. Durch Anwendung des Umkehrsatzes folgt, dass Exp ein lokaler Diffeormorphismus um $0 \in T_{\pi(u)}M$ ist. Dies impliziert, dass $\mathcal{M}$ offen ist. Andererseits ist $\mathcal{M}$ aus Stetigkeitsgründen auch abgeschlossen. Dies zeigt $M = \mathcal{M}$, da M zusammenhängend ist.

Unter Berücksichtigung von Proposition 2.23 erhält man zu $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ gewisse standard-horizontale Vektorfelder $B(\xi_1), \ldots, B(\xi_k)$, mit $b^1_{t_1} \circ \ldots \circ b^k_{t_k} u_0 \in \pi^{-1}(\pi(u))$. Durch Rechtsmultiplikation mit einem $a \in \mathrm{Gl}(E)$ ergibt sich (2.9).

Wir setzen

$$\psi_t(u) = \varphi_t((b^1_{t_1} \circ \ldots \circ b^k_{t_k} u_0)a) = (b^1_{t_1} \circ \ldots \circ b^k_{t_k} \circ \varphi_t(u_0))a$$

für alle $|t| < \delta$. Da $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$ und $\tilde{X}$ invariant unter R_a ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_t(u) &= (Db^1_{t_1} \circ \ldots \circ Db^k_{t_k} \tilde{X}_{\tilde{\varphi}_t(u_0)} a) = (\tilde{X}_{b^1_{t_1} \circ \ldots \circ b^k_{t_k}(\tilde{\varphi}_t(u_0))})a \\ &= \tilde{X}_{b^1_{t_1} \circ \ldots \circ b^k_{t_k}(\tilde{\varphi}_t(u_0 a))} = \tilde{X}_u \end{aligned}$$

für alle $|t| < \delta$. Also gilt $\psi_t(u) = \varphi_t(u)$ für alle $|t| < \delta$. Aus obiger Gleichung ergibt sich ebenfalls, dass $\psi_t(u)$ unabhängig von der speziellen Wahl von $\xi_1, \ldots \xi_k$ und a in (2.9) ist. Somit ist insgesamt gezeigt, dass der Fluss $\tilde{\varphi}_t(u)$ von $\tilde{X}$ durch $u \in LM$ für jedes $u \in LM$ und alle $|t| < \delta$ definiert ist, woraus die Vollständigkeit von $\tilde{X}$ folgt. □

Proposition 2.40. *Sei ein vollständiger Zusammenhang gegeben. Für ein Vektorfeld Y auf LM gilt $[Y, A^* + B(\xi)] = 0$ für alle $\xi \in F$, $A \in \mathrm{gl}(E)$ genau dann, wenn es eine infinitesimale affine Transformation X von M gibt mit $\tilde{X} = Y$.*

Beweis:

($\Rightarrow$) Aus $[Y, A^* + B(\xi)] = 0$ folgt, dass die zugehörigen Flüsse kommutieren. Sei φ der Fluss von Y und ψ der Fluss von $A^* + B(\xi)$. Dann gilt

$$\varphi_t \circ \psi_s(u) = \psi_s \circ \varphi_t(u) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R},\ u \in LM. \tag{2.10}$$

Durch Ableiten von (2.10) nach s in $s = 0$ erhalten wir

$$D(\varphi_t)_u(A^*_u + B(\xi)_u) = A^*_{\varphi_t(u)} + B(\xi)_{\varphi_t(u)}.$$

Also ist φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Automorphismus der 1-Struktur und X somit ist $\pi \circ \varphi_t$ eine infinitesimale affine Transformation von M. Offenbar ist φ_t der Fluss von $X := \pi Y$ und es gilt $\tilde{X} = Y$.

($\Leftarrow$) Sei X eine infinitesimale Transformation von M und setze $Y := \tilde{X}$. Sei φ_t der Fluss von X, dann ist $\tilde{\varphi}_t$ der Fluss von $\tilde{X}$. Dann ist $\tilde{\varphi}_t$ ein Automorphismus der 1-Struktur und durch Wahl von $\xi = 0$ in (2.4) folgt $[Y, A^*] = 0$. Aus Lemma 2.38 erhalten wir $[Y, B(\xi)] = 0$.

□

Wir nennen solche Vektorfelder Y aus Proposition 2.40 *infinitesimale Automorphismen von LM.*

Korollar 2.41. *Die Menge der infinitesimalen Automorphismen bilden eine Banach-Liealgebra.*

Beweis: Das folgt sofort aus Proposition 2.40 und der Jacobi-Identiät.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun Satz 1.18 anwenden. Das Rahmenbündel LM entspricht der Banachmannigfaltigkeit N in der Notation von Kapitel 1. Die 1-Struktur ist gegeben durch $A^* + B(\xi)$ mit $A \in \mathrm{gl}(E), \xi \in E$. Die Liealgebra der infinitesimalen Automorphismen ist gleich der Liealgebra $\mathfrak{l}$ der Vektorfelder, die mit der 1-Struktur kommutieren. Unter der Annahme, dass der Zusammenhang vollständig ist, sind alle infinitesimalen Automorphismen ebenfalls vollständig nach Proposition 2.39.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 1.18 erfüllt und wir erhalten unmittelbar:

Die Automorphismen der 1-Struktur bilden eine Lie-Transformationsgruppe von LM. Die zugehörige Liealgebra besteht aus den infinitesimalen Automorphismen.

Bemerkung 2.42. *Jeder Automorphismus der 1-Struktur ist von der Form $\tilde{f} : LM \to LM$ mit einer affinen Transformation $f : M \to M$. Ferner ist die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ ein Gruppenautomorphismus von $\mathcal{A}$ in die Gruppe der Automorphismen der 1-Struktur. Somit wird $\mathcal{A}$ zu einer Banach-Liegruppe, deren Liealgebra aus den infinitesimalen affinen Transformationen besteht. Wegen $\pi(\tilde{f}(u)) = f(\pi(u))$ folgt, da $\pi : LM \to M$ differenzierbar ist, dass $\mathcal{A}$ eine Lie-Transformationsgruppe von M ist.*

Zusammenfassend halten wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts fest.

Satz 2.43. *Sei die Banachmannigfaltigkeit M mit einem vollständigen Zusammenhang versehen. Dann ist die Gruppe der affinen Transformationen von M eine Lie-Transformationsgruppe von M. Die zugehörige Liealgebra besteht aus den infinitesimalen affinen Transformationen.*

2.2 Die Isometriegruppe einer Riemann-Hilbertmannigfaltigkeit

Im Folgenden sei M eine zusammenhängende Riemann-Hilbertmannigfaltigkeit, die über dem Hilbertraum H modelliert ist. Ähnlich wie in Abschnitt 2.1 werden wir durch Anwendung von Satz 1.18 zeigen, dass die Isometriegruppe $I(M)$ von M eine Lie-Transformationsgruppe auf M ist. Anstelle des Rahmenbündels LM haben wir es hier mit dem Bündel der orthogonalen Rahmen OM, einem Unterbündel von LM, zu tun. Ausgehend von der Riemannschen Metrik auf M, werden wir eine 1-Struktur auf OM angeben und zeigen, dass die Automorphismen dieser 1-Struktur genau den Isometrien von M entsprechen.

Definition 2.44. Eine lineare Isometrie $u : H \to T_pM$ heisst *orthogonaler Rahmen in* $p \in M$. Die Menge

$$OM := \bigcup_{p\in M} \{u|\ u \text{ ist ein orthogonaler Rahmen in } p\}$$

nennt man das *Bündel der orthogonalen Rahmen von*M.

Das Bündel der orthogonalen Rahmen ist ein Unterbündel von LM mit Strukturgruppe $O(H)$. Dabei ist $O(H)$ die Banach-Liegruppe der orthogonalen Abbildungen auf H. Das Bündel OM ist eine Banachmannigfaltigkeit mit Modellraum $H \times o(H)$. Der Banachraum $o(H)$ besteht aus den schiefsymmetrischen stetigen Abbildungen auf H.

Definition 2.45. Seien P_1, P_2 Hauptfaserbündel mit Strukturgruppen G_1, G_2, wobei G_1 eine Untergruppen von G_2 ist. Einen Bündelhomomorphismus $f : P_1 \to P_2$, d.h. $f(ua) = f(u)a$ für alle $u \in P_1,\ a \in G_1$, nennt man eine *Reduktion der Strukturgruppe* G_2 von P_2 nach G_1 von P_1. P_1 heisst *reduziertes Bündel von* P_2 mit Strukturgruppe G_1.

Die nächste Proposition zeigt, dass die reduzierten Bündel von LM mit Strukturgruppe $O(H)$ in bijektiver Beziehung zu den Riemannschen Metriken auf M stehen.

Proposition 2.46. *(i) Sei Q ein reduziertes Bündel von LM mit Strukturgruppe $O(H)$. Dann definiert Q eine Riemannsche Metrik auf M.*

(ii) Anderseits sei eine Riemannsche Metrik auf M gegeben. Dann ist dadurch ein reduziertes Bündel, nämlich OM, mit Strukturgruppe $O(H)$ von LM erklärt.

Beweis: (i) Sei $u \in Q$ und $X_p, Y_p \in T_pM$ mit $p := \pi(u)$. Definiere ein Skalarprodukt $g_p(X_p, Y_p) := (u^{-1}X_p, u^{-1}Y_p)$, dabei ist $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt des Hilbertraums H. Das ist wohldefiniert, denn für $u' \in \pi^{-1}(p)$ gilt $u = u'a$ für ein $a \in O(H)$. Damit gilt $(u^{-1}X_p, u^{-1}Y_p) = (a^{-1}u'^{-1}X_p, a^{-1}u'^{-1}Y_p) = (u'^{-1}X_p, u'^{-1}Y_p)$. Da Q ein differenzierbares $O(H)$-Hauptfaserbündel ist, hängt dieses Skalarprodukt differenzierbar vom Basispunkt p ab. Somit ist g eine Riemannsche Metrik.

(ii) Sei eine Riemannsche Metrik auf M gegeben. Dann ist offensichtlich OM bezüglich der Inklusion nach LM ein reduziertes Bündel von LM mit Strukturgruppe $O(H)$. □

Eine Riemannsche Metrik definiert folgendermassen einen Zusammenhang in OM: Sei G_u der Tangentialraum im Punkt u an die Faser $\pi^{-1}(p)$ mit $p := \pi(u)$, wobei $\pi : OM \to M$ die natürliche Projektion ist. Sei $\gamma : [0, t_1] \to M$ die Geodäte in M mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = X_p \in T_pM$. Dann gibt es zu $u \in OM$ eine eindeutig bestimmte Kurve $\gamma^* : [0, t_1] \to OM$ mit $\pi(\gamma^*) = \gamma$ und $\gamma^*(0) = u$, nämlich $\gamma^*(t) = (\xi \mapsto \gamma_t^0(u(\xi)),\ H \to T_{\gamma(t)}M)$. Hierbei bezeichnet γ_t^0 die Parallelverschiebung, die durch die Levi-Civita-Ableitung gegeben ist, entlang γ von der Zeit 0 bis zur Zeit t. Da diese Parallelverschiebung eine lineare Isometrie von $T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ induziert, ist $\gamma^*(t)$ tatsächlich eine Kurve in OM. Wir definieren den Horizontalraum Q_u in OM im Punkt u durch

$$Q_u := \{ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma^*(t) |\ \gamma \text{ ist Geodäte mit } \gamma(0) = p,\ \dot\gamma(0) = X_p,\ X_p \in T_pM, \gamma^*(0) = u\}.$$

Die Zuordnung $u \mapsto Q_u$ definiert einen Zusammenhang auf OM. Wir prüfen dazu die drei Eigenschaften aus Definition 2.6 nach:

(i) Offenbar ist Q_u ein abgeschlossener Unterraum von T_uOM und somit ein Banachraum. Da $T_uOM = Q_u \oplus G_u$, als direkte Summe im algebraischen Sinn, gilt und ferner G_u und Q_u abgeschlossen sind, folgt, dass diese direkte Summe ein Banachraumsplitting ist.

(ii) Sei $a \in O(H)$ gegeben, dann gilt mit $Y_u \in Q_u$, d.h. $Y_u = \dot{\gamma^*}(0)$ für eine gewisse Geodäte γ mit $\gamma(0) = p$

$$R_a Y_u = (\xi \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((\gamma_t^0 u(\xi))a) = (\xi \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_t^0(ua(\xi)) = Y_{ua},$$

also $R_a Q_u = Q_{ua}$.

(iii) Nach Konstruktion ist der Zusammenhang differenzierbar.

Proposition 2.47. *Es gibt einen eindeutig bestimmten linearen Zusammenhang in LM, so dass die Horizontalräume von LM gleich denen von OM sind.*

Beweis: Sei $u \in LM$ gegeben, dann gibt es $v \in OM$ und $a \in \mathrm{Gl}(H)$ mit $u = va$. Wir definieren den Horizontalraum Q_u in T_uLM durch $Q_u := R_a Q_v$. Dabei ist Q_v der Horizontalraum in T_vOM bezüglich des gegebenen Zusammenhangs in OM. Dies ist wohldefiniert, denn seien $v' \in OM$ und $a' \in \mathrm{Gl}(H)$ gegeben mit $u = v'a'$. Dann gibt es $b \in O(H)$ mit $v' = vb$. Es gilt $Q_u = R_{a'}Q_{v'} = R_{a'}Q_{vb} = R_{a'}R_bQ_v$. Wegen $R_a = R_{a'}R_b$ folgt die Wohldefiniertheit. Die so gegebene Zuordnung $u \mapsto Q_u$ auf LM ist tatsächlich ein Zusammenhang:

(i) Da G_u als Tangentialraum in $u \in LM$ an die Faser $\pi^{-1}(\pi(u))$ mit $\pi : LM \to M$, und Q_u abgeschlossen sind und $T_uLM = G_u \oplus Q_u$ als algebraisch direkte Summe, folgt, dass die direkte Summe ein Banachraumsplitting ist.

(ii) Seien $u \in LM$ und $b \in \mathrm{Gl}(H)$ gegeben. Es gibt $v \in OM$ und $a \in \mathrm{Gl}(H)$ mit $u = va$. Dann ist $R_b Q_u = R_b R_a Q_v = R_{ab} Q_v = Q_{vab} = Q_{ub}$.

(iii) Nach Konstruktion ist der Zusammenhang differenzierbar. □

Offenbar gilt mit diesem von OM auf LM induzierten Zusammenhang folgendes: Die Parallelverschiebung im Sinne von Definition 2.15 stimmt mit der Parallelverschiebung im Sinne der Riemannschen Geometrie überein.

Lemma 2.48. *Ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ ist genau dann eine Isometrie von M, wenn der induzierte Bündelautomorphismus $\tilde{f} : LM \to LM$ das Unterbündel OM invariant lässt, d.h. $\tilde{f}(OM) = OM$.*

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei f eine Isometrie von M und sei $(u : H \to T_pM) \in OM$. Dann ist $\tilde{f}(u) = Df_p \circ u : H \to T_{f(p)}M \in OM$.

($\Leftarrow$) Sei $u \in OM$, dann ist $\tilde{f}(u) \in OM$ nach Voraussetzung. Setze $p := \pi(u)$. Also sind $u : H \to T_pM$ und $\tilde{f}(u) = Df_p \circ u : H \to T_{f(p)}M$ lineare Isometrien und somit ist auch $Df_p : T_pM \to T_{f(p)}M$ eine lineare Isometrie. □

Proposition 2.49. *(i) Sei $f : M \to M$ eine Isometrie, dann lässt der induzierte Bündelautomorphismus $\tilde{f} : OM \to OM$ die kanonische Form θ und die Zusammenhangsform ω auf OM invariant, d.h.*

$$\theta_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u(X_u^*)) = \theta_u(X_u^*) \tag{2.11}$$

$$\omega_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u(X_u^*)) = \omega_u(X_u^*) \tag{2.12}$$

für alle $u \in OM$ und alle $X_u^* \in T_uOM$.

(ii) Ein fasernerhaltender Diffeomorphismus $F : OM \to OM$, der θ auf OM invariant lässt, wird von einer Isometrie $f : M \to M$ induziert, d.h. $F = \tilde{f}$.

Beweis: (i) Aus Proposition 2.34(ii) folgt, dass $\tilde{f}$ die kanonische Form θ auf OM invariant lässt. Zum Nachweis der Invarianz von ω, genügt es die Fälle X_u^* horizontal und X_u^* vertikal zu betrachten. Da $\tilde{f}$ Horizontalräume in Horizontalräume abbildet, sind beide Seiten von (2.12) gleich Null, wenn X_u^* horizontal ist. Sei nun X_u^* vertikal, d.h. $X_u^* = A_u^*$ für ein $A \in o(H)$. Da $\tilde{f} : OM \to OM$ ein Bündelautomorphismus ist, gilt $\tilde{f}(ua) = \tilde{f}(u)a$ für alle $a \in O(H)$ und damit $D\tilde{f}_u X_u^* = A^*_{\tilde{f}(u)}$. Somit folgt

$$\omega_u(X_u^*) = \omega_u(A_u^*) = A = \omega_{\tilde{f}(u)}(A^*_{\tilde{f}(u)}) = \omega_{\tilde{f}(u)}(D\tilde{f}_u(X_u^*)).$$

(ii) Sei $f : M \to M$ der Diffeomorphismus, der von F induziert wird. Dann ist $J := \tilde{f}^{-1} \circ F : OM \to OM$ fasernerhaltend und lässt θ invariant. Dann gilt für alle $u \in OM,\ X_u^* \in T_uOM$ mit $X_p := \pi X_u^*,\ p := \pi(u)$

$$u^{-1}(X_p) = \theta(X_u^*) = \theta(JX_u^*) = J(u)^{-1}(X_u^*).$$

Daraus folgt $J(u) = u$ für alle $u \in OM$, also $\tilde{f}(u) = F(u)$. Nach Lemma 2.48 ist f eine Isometrie. $\square$

Die kanonische Form θ und die Zusammenhangsform ω auf OM definieren wie in Proposition 2.25 eine 1-Struktur auf OM. Seien A^* und $B(\xi)$ mit $\xi \in H,\ A \in o(H)$ die zugehörigen kanonischen bzw. standard-horizontalen Vektorfelder auf OM.

Proposition 2.50. *(i) Sei $f : M \to M$ eine Isometrie, dann gilt*

$$D\tilde{f}_u A^*_u = A^*_{\tilde{f}(u)} \tag{2.13}$$

$$D\tilde{f}_u B(\xi)_u = B(\xi)_{\tilde{f}(u)} \tag{2.14}$$

für alle $u \in OM, \xi \in H,\ A \in o(H)$.

(ii) Andererseits sei $F : OM \to OM$ ein Automorphismus der 1-Struktur auf OM. Dann wird F von einer Isometrie $f : M \to M$ induziert, d.h. $F = \tilde{f}$.

Beweis: (i) Da $\tilde{f} : OM \to OM$ ein Bündelautomorphismus ist, folgt (2.13). Um die Invarianz der standard-horizontalen Vektorfelder zu zeigen, seien $u \in OM,\ \xi \in H$ gegeben. Sei γ die Geodäte mit $\gamma(0) = \pi(u) =: p$ und $\dot{\gamma}(0) = u(\xi)$. Dann ist $f \circ \gamma$ eine Geodäte mit $f \circ \gamma(0) = f(p)$ und $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f \circ \gamma(t) = Df_p(u(\xi))$. Der horizontale Lift von γ ist Lösungskurve von $B(\xi)$ durch u und der horizontale Lift von $f \circ \gamma$ ist Lösungskurve von $B(\xi)$ durch $\tilde{f}(u)$. Da $\tilde{f}$ Horizontalräume in Horizontalräume abbildet, folgt $D\tilde{f}_u B(\xi)_u = B(\xi)_{\tilde{f}(u)}$.

(ii) Wie in Proposition 2.30 sieht man, dass F von einem Diffeomorphismus $f : M \to M$ induziert wird. Nach Lemma 2.48 ist f eine Isometrie. $\square$

Analog zu Proposition 2.36 definieren wir den eindeutig bestimmten natürlichen Lift $\tilde{X}$ auf OM eines Vektorfeldes X auf M.

Definition 2.51. Ein Vektorfeld X auf M heisst *infinitesimale Isometrie von M*, wenn der lokale Fluss φ_t isometrisch ist, genauer: Sei $x \in M$ und $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ für $|t| < \delta$ der Fluss auf einer Umgebung U von x. Dann ist X eine infinitesimale Isometrie, wenn $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ für $|t| < \delta$ eine Isometrie ist.

Proposition 2.52. *Ein Vektorfeld X auf M ist eine infinitesimale Isometrie von M genau dann, wenn für den natürlichen Lift $\tilde{X}$ gilt $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$ für alle $\xi \in E$*

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ eine Isometrie, dann gilt nach Proposition 2.50

$$D(\tilde{\varphi}_t)_u B(\xi)_u = B(\xi)_{\tilde{\varphi}_t(u)}$$

für alle $|t| < \delta, A \in o(H), \xi \in H, u \in \pi^{-1}(U)$. Durch Ableiten nach t in $t = 0$ folgt $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$.

($\Leftarrow$) Gelte $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$ für alle $\xi \in H$. Dann folgt sofort (2.14) mit $\tilde{\varphi}_t$ anstelle von $\tilde{f}$. Da $\tilde{\varphi}_t : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(\varphi_t(U))$ mit R_a kommutiert, folgt entsprechend (2.13). Proposition 2.50(ii) impliziert, dass φ_t eine Isometrie ist. □

Wir geben noch zwei Propositionen an, die man in unserer jetzigen Situation, d.h. mit OM anstelle von LM, genau so beweist wie in Abschnitt 2.1.

Proposition 2.53. *Sei M vollständig, d.h. die Geodäten sind für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert. Dann ist jede infinitesimale Isometrie von M vollständig.*

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition 2.39. □

Proposition 2.54. *Sei M vollständig. Für ein Vektorfeld Y auf OM gilt $[Y, A^* + B(\xi)] = 0$ für alle $\xi \in F$, $A \in o(H)$ genau dann, wenn es eine infinitesimale Isometrie X von M gibt mit $\tilde{X} = Y$.*

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition 2.40. □

Wir nennen solche Vektorfelder Y aus Proposition 2.54 *infinitesimale Automorphismen von OM*.

Korollar 2.55. *Die Menge der infinitesimalen Automorphismen von OM bilden eine Banach-Liealgebra.*

Beweis: Das folgt sofort aus Proposition 2.54 und der Jacobi-Identiät.

Wir sind jetzt wieder in der Lage, Satz 1.18 aus dem ersten Kapitel anzuwenden. Die Banachmannigfaltigkeit N entspricht nun OM. Die 1-Struktur Φ ist gegeben durch $A^* + B(\xi)$ mit $A \in o(H), \xi \in H$. Die Liealgebra der infinitesimalen Automorphismen von OM ist gleich der Liealgebra $\mathfrak{l}$ aus Kapitel 1, die aus den Vektorfeldern besteht, die mit der 1-Struktur Φ kommutieren. Diese Vektorfelder sind vollständig, sofern wir annehmen, dass die Mannigfaltigkeit M vollständig ist.

Damit erhalten wir aus Satz 1.18 Folgendes: Die Automorphismen der 1-Struktur bilden eine Lie-Transformationsgruppe von OM. Die zugehörige Liealgebra besteht aus den infinitesimalen Automorphismen von OM. Berücksichtigen wir die Bemerkung 2.42, so erhalten wir das Hauptergebnis:

Satz 2.56. *Sei M eine vollständige Riemann-Hilbertmannigfaltigeit. Dann ist die Gruppe der Isometrien von M eine Lie-Transformationsgruppe von M. Die zugehörige Liealgebra besteht aus den infinitesimalen Isometrien.*

Literaturverzeichnis

[1] A. Abouqateb, K.-H. Neeb, *Integration of locally exponential Lie algebras of vector fields*, Ann. Golb. Anal. Geom. 33 (2008), 89-100

[2] R. Abraham, J. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications,* Springer-Verlag, 1988.

[3] W. Ballmann, *Automorphism groups*, unveröffentlicht, 2000

[4] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras, Chapters 1-3*, Springer Verlag, 1989

[5] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer Verlag, 1995

[6] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience, 1963

[7] S. Myers, N. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math. (2) 40 (1939), 400-416

[8] R.S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. AMS, 1957

[9] B. Popescu, Banach Transformation Groups, preprint, 2008

[10] H. Uppmeier, *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras*, North-Holland Mathematics Studies 104, 1985