

ALGORITHMEN  
ZUR  
BESTIMMUNG  
DER STRUKTUR KONVEXER HÜLLEN  
UND  
DER ECKENMENGE VON POLYEDERN

– EINE VERGLEICHENDE PROBABILISTISCHE ANALYSE –

Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Augsburg

vorgelegt von  
Dipl.-Math. oec. Thomas Wörle

Augsburg, Dezember 2011

---

Erstgutachter: Prof. Dr. Karl Heinz Borgwardt  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Dieter Jungnickel

Tag der mündlichen Prüfung: 1. März 2012

## **Danksagung**

Zu Beginn möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die in irgendeiner Form zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Karl Heinz Borgwardt für die Überlassung dieses interessanten Themas und für die hervorragende Betreuung in all den Jahren der Bearbeitung.

Weiter danke ich meinen Kollegen Herrn Matthias Tinkl und Herrn Markus Göhl, die mir in zahlreichen Diskussionen wertvolle Anregungen und Ratschläge gaben.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Dieter Jungnickel und allen weiteren Mitarbeitern des Lehrstuhls „Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research“ für ihre Unterstützung.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mir stets moralisch zur Seite standen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>15</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>17</b>
1.1 Motivation . . . . .	17
1.2 Inhalt . . . . .	19
1.3 Schreibweisen und Bezeichnungen . . . . .	21
1.4 Vereinheitlichung der Problemstellung . . . . .	23
1.5 Das Simplextableau als Grundlage mehrerer Lösungsmethoden . . . . .	24
1.6 Das probabilistische Modell . . . . .	27
1.7 Allgemeines zu empirischen Analysen in dieser Arbeit . . . . .	36
1.8 Empirische Analyse der erwarteten Eckenzahl . . . . .	38
<b>2 Der Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur</b>	<b>51</b>
2.1 Der einfache Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur . . . . .	51
2.2 Der einfache Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation . . . . .	54
2.3 Komplexitätsanalyse der primalen Version des einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus . . . . .	56
2.4 Einschub: Beschleunigung des Gift-Wrapping-Algorithmus . . . . .	58
<b>3 Der Algorithmus von Avis und Fukuda</b>	<b>77</b>
3.1 Formulierung des Algorithmus . . . . .	77
3.2 Komplexitätsanalyse . . . . .	80
3.3 Eine empirische Bestätigung unseres Average-Case-Ergebnisses . . . . .	85
3.4 Empirische Untersuchung der Auswertungen in der Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung . . . . .	86
3.5 Empirische Untersuchung der Anzahl an Ecken mit einer bestimmten Anzahl aufsteigender Richtungen . . . . .	89
3.6 Untersuchung der Auf- und Abstiegswahrscheinlichkeit . . . . .	96
3.7 Empirische Analyse der Aufstiegswahrscheinlichkeiten . . . . .	117
<b>4 Der Shelling-Algorithmus</b>	<b>123</b>
4.1 Der Shelling-Algorithmus in seiner Originalvariante . . . . .	123
4.2 Überführung des Shelling-Algorithmus in die primale Problemstellung . . . . .	127
4.3 Das Crashing-Verfahren bei Nichtentartungsbedingung . . . . .	131
4.4 Das Crashing-Verfahren für den allgemeinen Fall . . . . .	133
4.5 Die Worst-Case-Komplexität des Shelling-Algorithmus . . . . .	135
4.6 Empirische Analyse der durchschnittlichen Schrittzahl durch das Crashing . . . . .	137
4.7 Empirische Untersuchung des Such- und Einfügeaufwandes . . . . .	139

<b>5 Die Double-Description-Methode</b>	<b>145</b>
5.1 Einführung in die Double-Description-Methode . . . . .	145
5.2 System zum Auffinden redundanter Restriktionen . . . . .	149
5.3 Die erwartete Anzahl an nichtredundanten Restriktionen . . . . .	152
5.4 Empirische Untersuchung der Anzahl an redundanten Restriktionen . . . . .	159
<b>6 Fazit und Ausblick</b>	<b>163</b>
6.1 Subjektiver Vergleich der Algorithmen auf Basis der Implementierungserfahrungen . . . . .	163
6.2 Vergleich der Komplexitäten . . . . .	165
6.3 Empirische Untersuchung der Laufzeiten . . . . .	169
6.4 Ausblick . . . . .	174
<b>A Nützliche Formeln</b>	<b>177</b>
A.1 Die Gamma- und Betafunktion . . . . .	177
A.2 Das Lebesgue-Maß . . . . .	178
A.3 Weitere Formeln . . . . .	180
A.4 Zusatz zu Abschnitt 3.6 . . . . .	181
<b>B Ergänzende Graphiken</b>	<b>183</b>
B.1 Ergänzungen zu Kapitel 1 . . . . .	183
B.2 Ergänzungen zu Kapitel 2 . . . . .	185
B.3 Ergänzungen zu Kapitel 3 . . . . .	191
B.4 Ergänzungen zu Kapitel 4 . . . . .	206
B.5 Ergänzungen zu Kapitel 5 . . . . .	211
B.6 Ergänzungen zu Kapitel 6 . . . . .	213
<b>C Beispiele</b>	<b>223</b>
C.1 Der Gift-Wrapping-Algorithmus . . . . .	224
C.2 Das Verfahren von Avis und Fukuda . . . . .	234
C.3 Der Shelling-Algorithmus . . . . .	251
C.4 Die Double-Description-Methode . . . . .	258
<b>Index</b>	<b>271</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>273</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Konvexe Hülle aus 120 Punkten im zweidimensionalen Raum . . . . .	18
1.2	Konvexe Hülle aus 200 Punkten im dreidimensionalen Raum . . . . .	18
1.3	Dreidimensionales Polyeder konstruiert aus 200 Restriktionen . . . . .	19
1.4	Beispiel für eine Facette 1. Art . . . . .	23
1.5	Beispiel für eine Facette 2. Art . . . . .	23
1.6	Graphik zur Veranschaulichung von Facetten 2. Art und Nullfacetten . . . . .	24
1.7	Beispiele für die Radialdichte $f_k(r)$ . . . . .	29
1.8	Beispiele für die Verteilungsfunktion $F_k(r)$ . . . . .	30
1.9	Veranschaulichung des Einflusses des Parameters $k$ auf die Verteilung von 120 Punkten im zweidimensionalen Raum . . . . .	31
1.10	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 7$ und $k \rightarrow -1$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	40
1.11	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 5$ und $k \rightarrow -1$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	41
1.12	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 7$ und $k = 0$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	41
1.13	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 5$ und $k = 0$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	42
1.14	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 7$ und $k = 1$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	43
1.15	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 7$ und $k = 10$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	43
1.16	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 5$ und $k = 1$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	44
1.17	Durchschnittliche Anzahl der Ecken für $n = 5$ und $k = 10$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	44
1.18	Darstellung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken für $n = 5$ unter Variation des Parameters $m$ durch logarithmische Ordinatenkalierungen . . . . .	45
1.19	Darstellung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken für $n = 7$ unter Variation des Parameters $m$ durch logarithmische Ordinatenkalierungen . . . . .	46
1.20	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Restriktionszahl $m = 50$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	47
1.21	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Restriktionszahl $m = 50$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	48
1.22	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Restriktionszahl $m = 50$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	48
1.23	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Restriktionszahl $m = 50$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	49

2.1	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und $n = 7$ unter Variation von $m$ . . . . .	64
2.2	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 0$ und $n = 7$ unter Variation von $m$ . . . . .	65
2.3	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 1$ und $n = 7$ unter Variation von $m$ . . . . .	66
2.4	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 10$ und $n = 7$ unter Variation von $m$ . . . . .	66
2.5	Vergleich der Obergrenzen und empirischen Ergebnisse für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei $n = 7$ unter Variation von $m$ . . . . .	67
2.6	Vergleich der Obergrenzen von $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei $n = 7$ unter Variation von $m$ mit verschiedenen Skalierungen in der Abszisse . . . . .	67
2.7	Darstellung der Mittelwerte von $\sum_{e \in V} s(h_e)$ für $n = 5$ unter Variation von $m$ durch logarithmische Ordinatenkalierungen . . . . .	68
2.8	Darstellung der Mittelwerte von $\sum_{e \in V} s(h_e)$ für $n = 7$ unter Variation von $m$ durch logarithmische Ordinatenkalierungen . . . . .	69
2.9	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und $m = 50$ unter Variation von $n$ . . . . .	70
2.10	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 1$ und $m = 50$ unter Variation von $n$ . . . . .	71
2.11	Vergleich der Obergrenzen und empirischen Resultate für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei $m = 50$ unter Variation von $n$ . . . . .	71
2.12	Durchschnittliche Anzahl an einzusortierenden Punkten bei $n = 5$ und $k = 0$	72
2.13	Durchschnittliche Anzahl an einzusortierenden Punkten bei $n = 5$ und $k = 1$	73
2.14	Durchschnittliche Anzahl an einzusortierenden Punkten bei $n = 5$ und $k = 10$	73
2.15	Vergleich der trivialen Obergrenze mit Borgwardts Obergrenze . . . . .	74
2.16	Durchschnittliche Anzahl einzusortierender Punkte für $m = 500$ unter Variation des Parameters $n$ . . . . .	74
3.1	Veranschaulichung unserer speziellen Liste . . . . .	78
3.2	Veranschaulichung der modifizierten Hashtable . . . . .	80
3.3	Empirischer Mittelwert für $r_\ell$ unter $n = 7$ und $m = 50$ . . . . .	86
3.4	Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung bei Variation des Parameters $m$ unter der Dimension $n = 5$ . . . . .	87
3.5	Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung bei Variation des Parameters $m$ unter der Dimension $n = 7$ . . . . .	88
3.6	Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung bei Variation der Dimension $n$ unter $m = 50$ . . . . .	89
3.7	Verteilung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken hinsichtlich der Anzahl an Aufstiegsrichtungen $\ell$ bei $n = 7$ und $m = 50$ . . . . .	90
3.8	Verteilung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken hinsichtlich der Anzahl an Aufstiegsrichtungen $\ell$ bei $n = 8$ und $m = 50$ . . . . .	91
3.9	Alle Plots der Abbildungen 3.7 bzw. 3.8 in einer Graphik . . . . .	92
3.10	Durchschnittlicher Anteil der Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen im Verhältnis zur Gesamtzahl der Ecken . . . . .	92



3.11	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Dimension $n = 7$ und Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ unter Variation der Restriktionszahl $m$ . . . . .	93
3.12	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl $m = 50$ und Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	94
3.13	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $n = 5$ und $k \rightarrow -1$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	95
3.14	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $n = 5$ und $k = 1$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	95
3.15	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $m = 500$ und $k \rightarrow -1$ unter Variation des Parameters $n$ . . . . .	96
3.16	Veranschaulichung der Ausgangslage unserer Problemstellung bei einem Winkel $\varphi > \frac{\pi}{2}$ . . . . .	97
3.17	Veranschaulichung der Ausgangslage unserer Problemstellung bei einem Winkel $\varphi < \frac{\pi}{2}$ . . . . .	98
3.18	Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ . . . . .	101
3.19	Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für $\varphi < \frac{\pi}{2}$ . . . . .	101
3.20	Weitere Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für den Fall 1 mit $c_n^{n-1} < \vartheta$ . . . . .	103
3.21	Weitere Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für den Fall 2 mit $c_n^{n-1} > \vartheta$ . . . . .	103
3.22	Veranschaulichung der Problemstellung nach Entfernen der künstlichen Konstante $\varepsilon$ für den Fall 1 mit $c_n^{n-1} < \vartheta$ . . . . .	108
3.23	Veranschaulichung der Problemstellung nach Entfernen der künstlichen Konstante $\varepsilon$ für den Fall 2 mit $c_n^{n-1} > \vartheta$ . . . . .	109
3.24	Veranschaulichung der Auswirkungen kleiner und großer Schrittweiten nahe am Nordpol . . . . .	117
3.25	Vermutete Verteilung der Aufstiegswahrscheinlichkeiten . . . . .	118
3.26	Verteilung der Aufstiegswahrscheinlichkeiten nach unserem Resultat für eine große Restriktionszahl $m$ . . . . .	118
3.27	Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 15$ , $n = 5$ und $k \rightarrow -1$ . . . . .	119
3.28	Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 2000$ , $n = 5$ und $k \rightarrow -1$ . . . . .	120
3.29	Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 15$ , $n = 5$ und $k = 0$ . . . . .	121
3.30	Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 2000$ , $n = 5$ und $k = 0$ . . . . .	122
4.1	Veranschaulichung der Vorgehensweise des Shelling-Algorithmus von Seidel . . . . .	125
4.2	Veranschaulichung beider Versionen des Shelling-Algorithmus . . . . .	128
4.3	Unbeschränktes Polyeder mit beliebig verbesserbarer Zielfunktion . . . . .	131
4.4	Flowchart zum allgemeinen Crashing-Algorithmus . . . . .	134

---

4.5	Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters $m$ unter der Dimension $n = 7$ . . . . .	137
4.6	Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters $m$ unter der Dimension $n = 5$ . . . . .	138
4.7	Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters $n$ unter $m = 50$ . . . . .	138
4.8	Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters $n$ unter $m = 500$ . . . . .	139
4.9	Suchaufwand unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	140
4.10	Suchaufwand unter Variation des Parameters $n$ . . . . .	140
4.11	Maximale und durchschnittliche Listengröße bei $n = 7$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	141
4.12	Maximale und durchschnittliche Listengröße bei $n = 5$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	142
4.13	Maximale und durchschnittliche Listengröße bei $m = 50$ . . . . .	143
5.1	Veranschaulichung von Fall 3 . . . . .	151
5.2	Veranschaulichung von Fall 4 . . . . .	152
5.3	Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei $n = 7$ . . . . .	160
5.4	Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei $n = 5$ . . . . .	160
5.5	Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei $m = 50$ . . . . .	161
5.6	Die Obergrenze für die erwartete Anzahl an redundanten Restriktionen für $m = 50$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	161
6.1	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	170
6.2	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	171
6.3	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	172
6.4	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	172
6.5	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	173
6.6	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	173
B.1	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Restriktionszahl $m = 500$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	183
B.2	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Restriktionszahl $m = 500$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	184
B.3	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Restriktionszahl $m = 500$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	184
B.4	Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Restriktionszahl $m = 500$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	185

B.5	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und $n = 5$ unter Variation von $m$ . . . . .	185
B.6	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 0$ und $n = 5$ unter Variation von $m$ . . . . .	186
B.7	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 1$ und $n = 5$ unter Variation von $m$ . . . . .	186
B.8	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 10$ und $n = 5$ unter Variation von $m$ . . . . .	187
B.9	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ unter Verteilungsparameter $k = 0$ und $m = 50$ unter Variation von $n$ . . . . .	187
B.10	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ unter Verteilungsparameter $k = 10$ und $m = 50$ unter Variation von $n$ . . . . .	188
B.11	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und $m = 500$ unter Variation von $n$ . . . . .	188
B.12	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 0$ und $m = 500$ unter Variation von $n$ . . . . .	189
B.13	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ bei Verteilungsparameter $k = 1$ und $m = 500$ unter Variation von $n$ . . . . .	189
B.14	Mittelwert für $\sum_{e \in V} s(h_e)$ unter Verteilungsparameter $k = 10$ und $m = 500$ unter Variation von $n$ . . . . .	190
B.15	Durchschnittliche Anzahl einzusortierender Punkte für $m = 500$ unter Variation des Parameters $n$ . . . . .	190
B.16	Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung bei Variation der Dimension $n$ unter $m = 500$ . . . . .	191
B.17	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Dimension $n = 7$ und Verteilungsparameter $k = 0$ unter Variation der Restriktionszahl $m$ . . . . .	192
B.18	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Dimension $n = 7$ und Verteilungsparameter $k = 1$ unter Variation der Restriktionszahl $m$ . . . . .	192
B.19	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Dimension $n = 7$ und Verteilungsparameter $k = 10$ unter Variation der Restriktionszahl $m$ . . . . .	193
B.20	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl $m = 50$ und Verteilungsparameter $k = 0$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	193
B.21	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl $m = 50$ und Verteilungsparameter $k = 1$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	194
B.22	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl $m = 50$ und Verteilungsparameter $k = 10$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	194
B.23	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $n = 5$ und $k = 0$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	195
B.24	Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $n = 5$ und $k = 10$ unter Variation des Parameters $m$ . . . . .	195

B.25 Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $m = 500$ und $k = 0$ unter Variation des Parameters $n$ . . . . .	196
B.26 Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $m = 500$ und $k = 1$ unter Variation des Parameters $n$ . . . . .	196
B.27 Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit $\ell$ Aufstiegsrichtungen bei $m = 500$ und $k = 10$ unter Variation des Parameters $n$ . . . . .	197
B.28 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 15$ , $n = 5$ und $k = 1$ . . . . .	198
B.29 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 2000$ , $n = 5$ und $k = 1$ . . . . .	199
B.30 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 15$ , $n = 5$ und $k = 10$ . . . . .	200
B.31 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 2000$ , $n = 5$ und $k = 10$ . . . . .	201
B.32 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 30$ , $n = 5$ und $k \rightarrow -1$ . . . . .	202
B.33 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 30$ , $n = 5$ und $k = 0$ . . . . .	203
B.34 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 30$ , $n = 5$ und $k = 1$ . . . . .	204
B.35 Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für $m = 30$ , $n = 5$ und $k = 10$ . . . . .	205
B.36 Einfluss der Anzahl an Restriktionen auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang unter der Dimension $n = 7$ . . . . .	206
B.37 Einfluss der Anzahl an Restriktionen auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang unter der Dimension $n = 5$ . . . . .	207
B.38 Einfluss der Dimension auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang bei $m = 50$ . . . . .	208
B.39 Einfluss der Dimension auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang bei $m = 500$ . . . . .	209
B.40 Maximale und durchschnittliche Listengröße bei $m = 500$ . . . . .	210
B.41 Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei $n = 7$ unter Variation von $m$ .	211
B.42 Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei $m = 50$ unter Variation der Dimension $n$ . . . . .	212
B.43 Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei $m = 500$ . . . . .	212
B.44 Obergrenze für die Anzahl redundanter Restriktionen bei $m = 500$ . . . .	212
B.45 Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	213
B.46 Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	213
B.47 Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	214
B.48 Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	214

B.49	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	215
B.50	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Dimension $n = 7$ . . . . .	215
B.51	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	216
B.52	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	216
B.53	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	217
B.54	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 1$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	217
B.55	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	218
B.56	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Restriktionszahl $m = 150$ . . . . .	218
B.57	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	219
B.58	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k \rightarrow -1$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	219
B.59	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	220
B.60	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 0$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	220
B.61	Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	221
B.62	Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter $k = 10$ und Dimension $n = 5$ . . . . .	221



# Tabellenverzeichnis

1.1	Interessante Werte des Parameters $k$ . . . . .	31
1.2	Festlegungen zu den empirischen Analysen . . . . .	37
1.3	Alternative Festlegungen zu den empirischen Analysen . . . . .	38
2.1	Übersicht zur Komplexität des einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation . . . . .	57
2.2	Übersicht zur Komplexität des beschleunigten Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation . . . . .	63
3.1	Übersicht zur Komplexität des Algorithmus von Avis und Fukuda . . . . .	82
3.2	Übersicht der verwendeten Ereignisse . . . . .	98
4.1	Übersicht zur Komplexität des Crashing-Algorithmus . . . . .	133
4.2	Übersicht zur Komplexität des Shelling-Algorithmus . . . . .	136
5.1	Übersicht zur Komplexität des Preprocessings . . . . .	152
6.1	Subjektive Einschätzung der implementierten Algorithmen . . . . .	164





# Kapitel 1

## Einführung

Die Konstruktion der konvexen Hülle einer vorgegebenen Punktmenge gehört zu einem der ersten und wahrscheinlich am besten erforschten Gebiete der „Computational Geometry“ („Algorithmische Geometrie“). Zur Lösung des sogenannten „Konvexe-Hülle-Problems“ wurden über einige Jahrzehnte hinweg mehrere Verfahren entwickelt, welche auf teilweise völlig verschiedenen Ansätzen basieren. Es stellt sich unweigerlich die Frage, welchem Algorithmus zur Bestimmung der konvexen Hülle der Vorzug gegeben werden sollte. Eine Antwort hierauf kann man mit Hilfe einer Aufwandsanalyse oder auch mittels empirischer Untersuchungen erlangen. Während sich eine Worst-Case-Untersuchung der Komplexität einzelner Lösungsalgorithmen meist noch als relativ einfach erweist, stellt eine Average-Case-Analyse eine weitaus größere Herausforderung dar und wird daher im Fokus dieser Arbeit stehen. Zwar wollen wir für die meisten untersuchten Zufallsgrößen analytische Aussagen gewinnen, aufgrund der damit verbundenen hohen Schwierigkeit werden wir uns aber für einige interessante Größen auf empirische Untersuchungen der Mittelwerte beschränken.

### 1.1 Motivation

Konvexe-Hülle-Algorithmen finden auf vielen verschiedenen Gebieten Anwendung und sind somit auch in der Praxis von Interesse. Nachfolgend werden einige Beispiele hierzu aufgeführt: In Geoinformationssystemen, welche der Erfassung, Verarbeitung und Speicherung von Daten in einer Geodatenbank dienen, bilden konvexe Hüllen oft eine Basis für weiterführende Abfragen. Sie werden etwa zur Reduzierung relevanter Punkte bei der Abstandsmessung zweier Objekte oder für eine vereinfachte Positionsbestimmung eingesetzt. Des Weiteren sind Konvexe-Hülle-Algorithmen auch in der Robotik zu finden. Aus dem Scannen von Objekten ergeben sich meist nur Punktwolken, deren konvexe Hülle zu berechnen ist. Vor allem beschränkte Ebenen, auf denen weitere Objekte stehen, werden auf diese Weise von Robotern erfasst. Weitere wichtige Einsatzgebiete vor allem für Probleme im dreidimensionalen Raum sind durch die Bereiche Bildverarbeitung und Computergraphik gegeben. Hier sind insbesondere CAD-Programme („Computer Aided Design“) zu nennen. Eine mehrdimensionale Anwendung stellt die Mehrzieloptimierung dar. Hier ist man an paretooptimalen Punkten interessiert.<sup>1</sup> Relevant wird die konvexe Hülle auch in der ganzzahligen Optimierung, insbesondere wenn Mehrzieloptimierung und Ganzzahligkeitsbedingungen miteinander kombiniert werden.

---

<sup>1</sup>Wie man alle paretooptimalen Ecken und Kanten in einem Polyeder effizient mit Hilfe eines Konvexe-Hülle-Algorithmus bestimmen kann, wird ausführlich in [Wör06] behandelt.

Doch handelt es sich bei der Konstruktion einer konvexen Hülle tatsächlich um ein so schwieriges Problem, dass man seit vielen Jahren daran interessiert ist, hierzu neue und bessere Lösungsverfahren zu entwerfen? Wenn man sich eine Punktmenge im zweidimensionalen Raum vor Augen führt, so kann hieraus graphisch sehr leicht die konvexe Hülle konstruiert werden. Sie ergibt sich vereinfacht gesprochen wie ein enges Gummiband um die Punktmenge. Dies wird in Abbildung 1.1 mit 120 Punkten veranschaulicht.

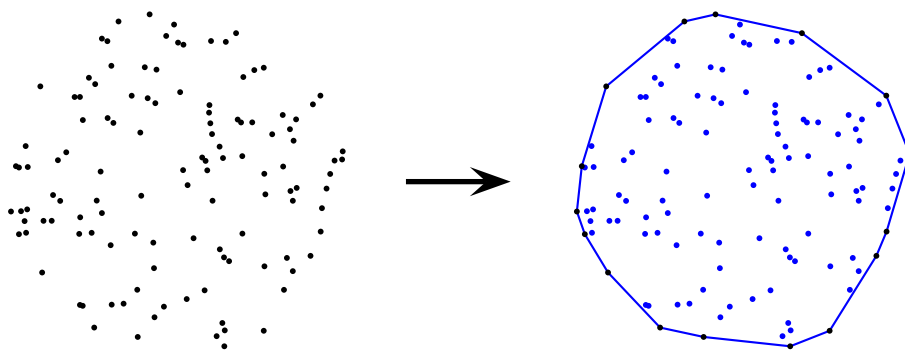


Abbildung 1.1: Konvexe Hülle aus 120 Punkten im zweidimensionalen Raum

Jedoch schon im Dreidimensionalen stößt man graphisch an Grenzen, die konvexe Hülle zu bestimmen. In Abbildung 1.2 ist diese beispielhaft für 200 (auf der Kugeloberfläche erzeugte) Punkte dargestellt. Es ist bemerkenswert, wie komplex das Polyeder bereits bei dieser moderaten Anzahl an Punkten im dreidimensionalen Raum erscheint.

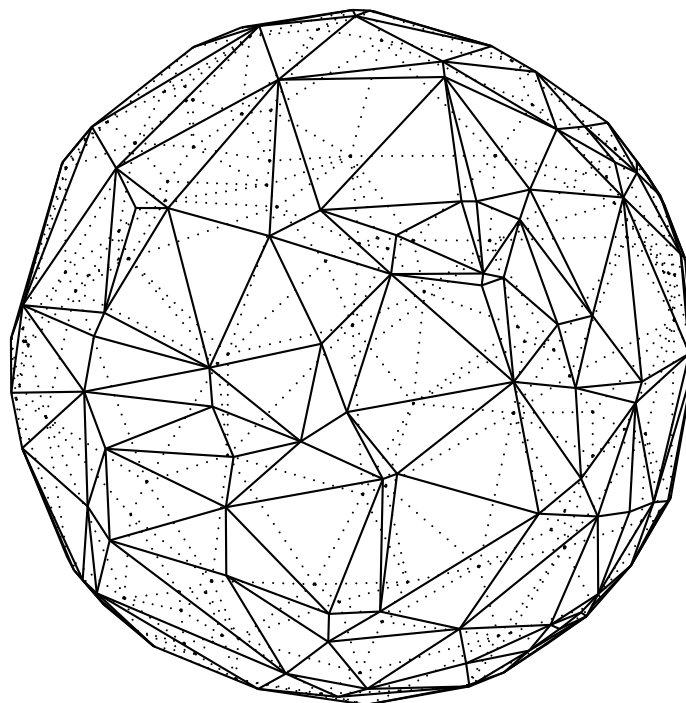


Abbildung 1.2: Konvexe Hülle aus 200 Punkten im dreidimensionalen Raum

Später werden wir zu einer anderen (dazu dualen) Sichtweise übergehen, die die erzeugten Zufallsdaten zur Generierung von Restriktionen im Raum benutzt. Hier sind wir dann an der Enumeration aller Ecken interessiert. Wie in Abschnitt 1.4 ausführlicher erläutert wird, handelt es sich dabei um ein (fast) äquivalentes Problem. Bezüglich obiger Graphik würde sich bei entsprechender Änderung unserer Sichtweise das Polyeder aus Abbildung 1.3 ergeben. Auch dieses scheint nicht minder komplex zu sein.

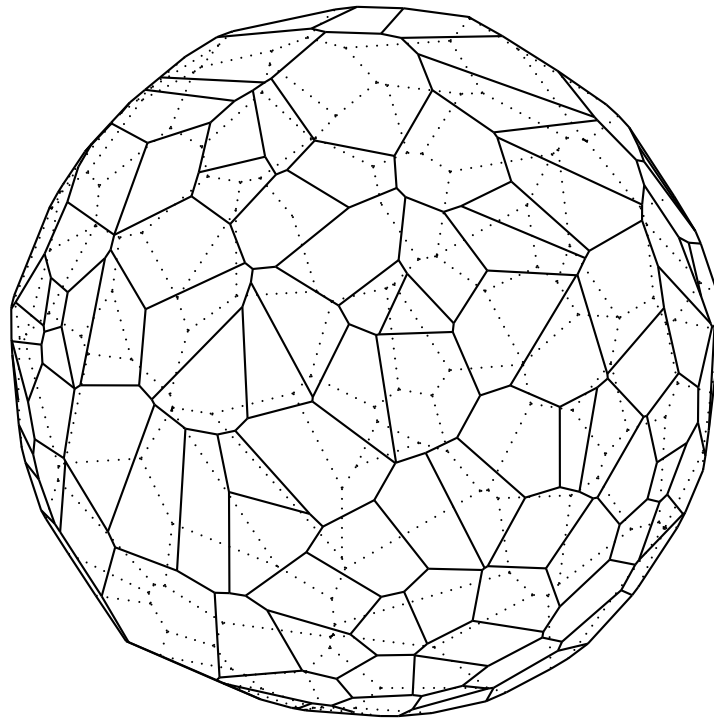


Abbildung 1.3: Dreidimensionales Polyeder konstruiert aus 200 Restriktionen

Zwar sind das zwei- und dreidimensionale Beispiel dieses Abschnittes aufgrund unterschiedlicher Verteilungsarten und Anzahlen an Punkten nicht direkt miteinander vergleichbar, dennoch bekommt man einen groben Eindruck, wie stark sich die Komplexität durch den Übergang in den mehrdimensionalen Raum erhöht. Somit ist durchaus nachvollziehbar, dass man stets nach besseren Alternativen zur Konstruktion konvexer Hüllen sucht bzw. unter den bereits entwickelten Verfahren gerne eine Entscheidung für einen der Algorithmen treffen möchte. Auf Letzterem beruht die Motivation der hier vorliegenden Arbeit.

## 1.2 Inhalt

Wir wollen vier bekannte Verfahren aus dem Bereich der Konvexe-Hülle-Bestimmung vorstellen, untersuchen und einer probabilistischen Analyse unterziehen:

- den Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur (siehe Kapitel 2),
- das Verfahren von Avis und Fukuda (siehe Kapitel 3),

- den Shelling-Algorithmus von Seidel (siehe Kapitel 4) und
- die Double-Description-Methode von Motzkin et al. (siehe Kapitel 5).

Ziel und Zweck dieser Untersuchungen ist eine unter einheitlichen Vergleichsbedingungen<sup>2</sup> vorgenommene Bewertung des (erwarteten) Rechenaufwands bei Verwendung der vier Algorithmen. Dabei soll nicht nur die größenordnungsmäßige Abhängigkeit von  $m$ , der Anzahl an Punkten bzw. Restriktionen und somit die größere Dimension, erklärt werden (dies ist an verschiedenen Stellen schon geschehen), sondern es soll auch der Einfluss von  $n$ , der Dimension des Raumes, genau erfasst werden. Denn insbesondere hier treten die Unterschiede in den algorithmischen Ansätzen zutage und hier wird der Unterschied zwischen einer rein geometrisch orientierten Zählung (Eckenzahl) und einer algorithmischen Zählung (Erfassungsaufwand) deutlich.

In Kapitel 6 werden wir die analysierten Verfahren nochmals vergleichen, um ein Fazit zu ziehen. Dies wird zusammen mit einem kurzen Ausblick über weitere Untersuchungsmöglichkeiten in diesem Gebiet den Abschluss der Arbeit bilden.

Da eine Average-Case-Analyse des Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur bereits von Borgwardt (vgl. [Bor93] und [Bor97]) vorgenommen wurde, werden wir bezüglich dieses Verfahrens die Ergebnisse unter leichter Anpassung an eine einheitliche Problemstellung zitieren und Borgwardts Resultate mittels empirischer Methoden bestätigen. Ebenso werden die Ergebnisse von Borgwardt zur Double-Description-Methode (vgl. [Bor07]) wiedergegeben und darauf aufbauend weitere probabilistische Untersuchungen vorgenommen. Für das Verfahren von Avis und Fukuda versuchen wir aus der Worst-Case-Komplexität heraus eine Erwartungswertanalyse einer besonders interessanten Größe vorzunehmen, nämlich der Anzahl an notwendigerweise durchzuführenden Auswertungen durch die sogenannte reverse Blandüberprüfung. Des Weiteren tangiert man bei diesem Berechnungsverfahren die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit man unter gewissen Annahmen auf eine Auf- bzw. Abstiegs-kantenrichtung trifft. Dies wird in Abschnitt 3.6 genauer analysiert. Bezüglich des Shelling-Algorithmus erweist sich eine Average-Case-Analyse der relevanten Zufallsgrößen als besonders schwierig, so dass wir uns hierfür auf empirische Untersuchungen beschränken werden.

Für eine gelungene probabilistische Analyse ist ein geeignetes stochastisches Modell zur Erzeugung der Problembeispiele unerlässlich. Dazu hat sich das Rotationssymmetriemodell schon des Öfteren bewährt (vgl. u.a. [Bor87], [Küf92], [Höf95], [Bor97], [Huh97], [BH99] und [Bor07]). Eine besonders geeignete Unterklasse dieses Modells soll im Abschnitt 1.6 eingeführt und erläutert werden. Diese wird somit die Grundlage für unsere probabilistischen und empirischen Untersuchungen bilden.

Zunächst aber wollen wir in Abschnitt 1.3 einige häufig verwendete Schreibweisen und Bezeichnungen aufführen. Anschließend werden wir in Abschnitt 1.4 mit dem Ziel einer besseren Vergleichbarkeit der verschiedenen Lösungsalgorithmen eine Vereinheitlichung der Problemstellung vornehmen und in Abschnitt 1.5 das Simplextableau als Hilfsmittel zur Ausführung verschiedener Verfahren vorstellen. Der Abschnitt 1.7 dient allgemeinen Erläuterungen zu den in dieser Arbeit vorgenommenen empirischen Untersuchungen. In Abschnitt 1.8 wird darauf aufbauend eine erste Zufallsgröße, die durchschnittliche Anzahl an Ecken in einem Polyeder,

---

<sup>2</sup>Diese werden durch die Festlegung der Problemstellung in Abschnitt 1.4 und des stochastischen Modells (Rotationssymmetriemodell) in Abschnitt 1.6 geschaffen.

empirisch analysiert. Dabei werden wir Vergleiche mit Borgwardts Obergrenze zum Erwartungswert dieser Größe aus [Bor97] und [Bor07] vornehmen.

## 1.3 Schreibweisen und Bezeichnungen

Um unnötige Missverständnisse zu vermeiden, sind einheitliche Schreibweisen und klar festgelegte Bezeichnungen<sup>3</sup> erforderlich. Da die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der konvexen Hülle im euklidischen Raum beliebige (endliche) Dimensionen erlauben, treffen wir zunächst bezüglich Vektoren und Matrizen einige Vereinbarungen.

### Vereinbarungen zu Vektoren und Matrizen

Vektoren werden bei uns stets als Spaltenvektoren aufgefasst. Dabei bezeichnen oben stehende Indizes die Komponenten dieser Vektoren. Untere Indizes hingegen werden zur Unterscheidung verschiedener Vektoren benutzt.

Des Weiteren verwenden wir nachfolgende Kurznotationen für besonders häufig auftauchende Vektoren:

- Mit  $\mathbf{1}$  wird ein Vektor dargestellt, der in allen Komponenten eine Eins besitzt (Einheitsvektor).
- Der Nullvektor wird mit  $0$  bezeichnet und besteht seinem Namen entsprechend nur aus Nullen.
- Für den  $i$ -ten Einheitsvektor schreiben wir  $e_i$ .

Soll dabei die Dimension  $n$  hervorgehoben werden, so kann diese als (weiterer) Index angehängt werden zu  $\mathbf{1}_n$ ,  $0_n$  bzw.  $e_{i,n}$ .

Da unsere Problemstellung durch Punkte  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  gegeben ist (vgl. dazu die Abschnitte 1.4 und 1.6), wird sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a_1^T & - \\ \vdots & \\ -a_m^T & - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

als nützlich erweisen. Hier bilden also  $a_1^T, \dots, a_m^T$  die entsprechenden Zeilen der Matrix.  $A_M$  gebe für ein Tupel  $M := (M^1, \dots, M^\ell)$  mit  $M^1, \dots, M^\ell \in \{1, \dots, m\}$  die Untermatrix von  $A$  an, deren Zeilen durch  $a_{M^1}^T, \dots, a_{M^\ell}^T$  gebildet werden:

$$A_M = \begin{pmatrix} -a_{M^1}^T & - \\ \vdots & \\ -a_{M^\ell}^T & - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$$

Die Einheitsmatrix bezeichnen wir mit  $I$  bzw.  $I_n$ . Letztere Schreibweise dient dabei der Hervorhebung, dass es sich um eine Matrix aus  $\mathbb{R}^{n \times n}$  handelt.

<sup>3</sup>Die hier verwendeten Notationen lehnen sich weitgehend an das Lehrbuch von Borgwardt [Bor01] an.

Die konvexe Hülle einer Menge ist in dieser Arbeit von besonderer Relevanz. Aber auch weitere Hüllenbegriffe spielen in der von uns betrachteten Thematik eine wichtige Rolle. Hierzu führen wir nachfolgende Schreibweisen ein.

### Definitionen und Schreibweisen zu verschiedenen Hüllenbegriffen

Sei  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Menge.

- Die Linearkombination der Vektoren von  $Y$  wird mit  $\text{LH}(Y)$  bezeichnet. Hierbei spricht man von der **linearen Hülle** der Menge  $Y$ . Formal lässt sich diese wie folgt beschreiben:

$$\text{LH}(Y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, y_1, \dots, y_k \in Y \text{ mit } x = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i \right\} = \text{lin}(Y)$$

- Mit  $\text{KH}(Y)$  wird die **konvexe Hülle** von  $Y$  bezeichnet. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\text{KH}(Y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, y_1, \dots, y_k \in Y \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ und } x = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i \right\} = \text{conv}(Y)$$

- Der **konvexe Kegel** von  $Y$  (auch **konische Hülle** genannt) wird mit  $\text{KK}(Y)$  dargestellt. Er beschreibt die Menge aller konischen Kombinationen der Vektoren in  $Y$ :

$$\text{KK}(Y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, y_1, \dots, y_k \in Y \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \right. \\ \left. \text{und } x = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i \right\} = \text{cone}(Y)$$

- $\text{AH}(Y)$  steht für die **affine Hülle** von  $Y$  und ist wie folgt definiert:

$$\text{AH}(Y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, y_1, \dots, y_k \in Y \text{ mit } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right. \\ \left. \text{und } x = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i \right\} = \text{aff}(Y)$$

*Bemerkung 1.1.* Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise lassen wir bei den eben eingeführten Hüllenbezeichnungen für eine konkret gegebene Menge die Mengenklammern weg und schreiben beispielsweise statt  $\text{KH}(\{a_1, \dots, a_m\})$  kürzer  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$ .

Die nun getroffenen Vereinbarungen und Notationen dienen der einfacheren Darstellung und bilden gleichzeitig eine wichtige Grundlage zum Verständnis der Inhalte. Einige spezielle Schreibweisen werden wir in dieser Arbeit aber erst später an besser geeigneten Stellen einführen.

## 1.4 Vereinheitlichung der Problemstellung

Die Entwickler der in Abschnitt 1.2 erwähnten Verfahren gingen von verschiedenen Problemstellungen aus: Während Avis und Fukuda mit ihrem Verfahren (siehe [AF92]) sowie Motzkin et al. in ihrer Arbeit [MRTT53] sich vorwiegend um die Ermittlung sämtlicher Ecken eines Polyeders bemühten, ging es für Seidel in seinem Shelling-Algorithmus (siehe [Sei86]) sowie für Chand und Kapur in ihrem Gift-Wrapping-Algorithmus (siehe [CK70]) um die Enumeration aller Facetten des Polytops, das aus der konvexen Hülle einer gegebenen Punktmenge entsteht. Für Letzteres kann weiter unterschieden werden, ob das Enthaltensein des Nullpunktes in der Punktmenge gefordert wird. Dies ist im Hinblick auf den Grad der Verwandtschaft der hier aufgezählten Problemstellungen von besonderer Relevanz.

Etwas konkreter ausgedrückt, können die betrachteten Algorithmen für die nachfolgenden drei Problemstellungen eingesetzt werden:

$$\text{Bestimmung sämtlicher Ecken des Polyeders } X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1\} \quad (P1)$$

$$\text{Bestimmung aller Facetten des Polytops } Y := \text{KH}(0, a_1, \dots, a_m) \quad (P2)$$

$$\text{Bestimmung sämtlicher Facetten des Polytops } \bar{Y} := \text{KH}(a_1, \dots, a_m) \quad (P3)$$

*Bemerkung 1.2.* Da sich bei Einhaltung der Nichtentartungsbedingung (siehe Definition 1.6, Seite 28) aus den Facetten ohne Weiteres auch alle Seitenflächen niedrigerer Dimension bestimmen lassen, kann man sich bei der Ermittlung der konvexen Hülle einer Punktmenge auf die Aufzählung der Facetten beschränken. In analoger Weise reicht es in einem Ungleichungssystem aus, die Basen sämtlicher Ecken aufzulisten, um die erzeugenden Restriktionen aller Seitenflächen höherer Dimension zu erhalten.

Wir wollen nun auf die enge Verwandtschaft der drei Problemstellungen eingehen. Hierzu ist nachfolgende Definition nützlich:

**Definition 1.3.** Eine Facette eines Polytops heißt **Facette 1. Art**, wenn sie die Eigenschaft besitzt, dass ihre affine Hülle den Nullpunkt und alle Erzeuger des Polyeders in denselben Halbraum stellt. Trennt die Facette allerdings den Ursprung von der erzeugenden Punktmenge, so wird sie **Facette 2. Art** genannt.

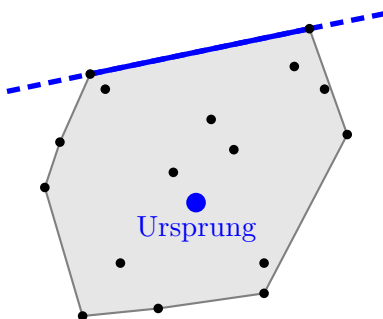


Abbildung 1.4: Beispiel für eine Facette  
1. Art

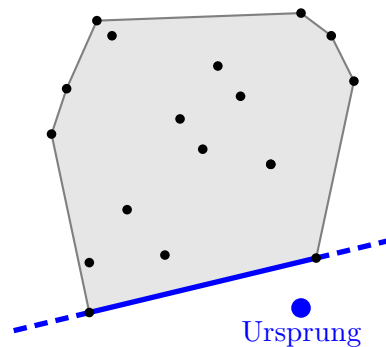


Abbildung 1.5: Beispiel für eine Facette  
2. Art

Zur Veranschaulichung zeigen die Abbildungen 1.4 und 1.5 ein Beispiel für eine Facette 1. Art bzw. 2. Art im jeweiligen Polytop.

Es ist offensichtlich, dass sich die Problemstellungen ( $P2$ ) und ( $P3$ ) vor allem in der Existenz der Facetten 2. Art unterscheiden. Da  $0 \in Y$  ist, können solche Facetten in  $Y$  nicht entstehen. Stattdessen lassen sich unter Umständen Facetten zusammen mit dem Nullpunkt bilden. Diese nennen wir kurz **Null-Facetten**. Im Gegensatz dazu sind für  $\bar{Y}$  sehr wohl Facetten 2. Art möglich. Man beachte aber, dass es sich bei den Nullfacetten in  $Y$  um keinen äquivalenten Ersatz für Facetten 2. Art in  $\bar{Y}$  handelt, wie leicht durch Betrachtung eines geeigneten Beispiels klar wird. In Abbildung 1.6 etwa sind nur zwei Nullfacetten von  $Y$  festzustellen, während die Zahl der Facetten 2. Art in  $\bar{Y}$  fünf beträgt.

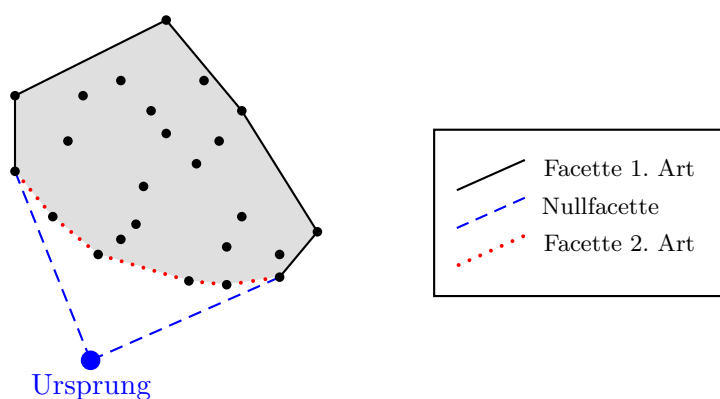


Abbildung 1.6: Graphik zur Veranschaulichung von Facetten 2. Art und Nullfacetten

Wie in [Bor87, S. 69+70] beschrieben wird, besteht eine 1-zu-1-Beziehung zwischen den Ecken in  $X$  und den Facetten in  $Y$ . Dabei sind allerdings mögliche Nullfacetten gesondert zu betrachten: Sie entsprechen in  $X$  den fiktiven Endpunkten unbeschränkter Kanten. Erweitert man also die Problemstellung ( $P1$ ) um die zusätzliche Ermittlung der extremalen freien Richtungen, so können ( $P1$ ) und ( $P2$ ) als äquivalent eingestuft werden.

Um unsere Analysen so weit wie möglich zu vereinfachen, verzichten wir auf das Vorhandensein von Facetten 2. Art und auf die Bestimmung von Nullfacetten. D.h. wir entscheiden uns zu Gunsten der Problemstellung ( $P1$ ). Unter besonderer Berücksichtigung der Sonderrolle der Nullfacetten ist es uns aber für eine andere (und damit eventuell günstigere) Sichtweise weiterhin möglich auf die Problemstellung ( $P2$ ) zu wechseln.

**Sprechweisen:** Wir nennen die Problemstellungen ( $P1$ ) und ( $P2$ ) **dual** zueinander. Da wir in dieser Arbeit meist im Sinne von ( $P1$ ) argumentieren wollen, sei dies nun unsere **primale** Sichtweise. Bezüglich ( $P2$ ) sprechen wir folglich von der **dualen** Interpretation.

## 1.5 Das Simplextableau als Grundlage mehrerer Lösungsmethoden

Um unsere Problemstellung ( $P1$ ) zu lösen, kann das Simplextableau zur effizienten Darstellung aller notwendigen Informationen an einer Ecke des Polyeders verwendet werden. Auf-



grund der kanonischen Form des Zulässigkeitsbereiches  $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  erweist sich das Tableau des restriktionsorientierten Simplexverfahrens<sup>4</sup> als besonders geeignet. Daher wollen wir nun eine kurze Einführung in diese Darstellungsform geben.

*Bemerkung 1.4.* Infolge der engen Verwandtschaft der drei Problemstellungen (P1), (P2) und (P3) kann das restriktionsorientierte Simplextableau auch zur Bestimmung aller Facetten von  $\text{KH}(0, a_1, \dots, a_m)$  bzw.  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  eingesetzt werden (vgl. dazu u.a. [Bor97, S. 86–89]).

Zu Beginn führen wir einige Bezeichnungen ein:

- $\Delta = \{\Delta^1, \dots, \Delta^n\} \subseteq \{1, \dots, m\}$  sei stets die Menge der Indizes der aktuellen Basis. Diese ist damit durch die linear unabhängigen Vektoren  $a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n}$  gegeben. Wird hier auf die Reihenfolge der Basiseinträge Wert gelegt, so fassen wir  $\Delta$  als ein  $n$ -Tupel  $(\Delta^1, \dots, \Delta^n)$  mit paarweise verschiedenen  $\Delta^1, \dots, \Delta^n \in \{1, \dots, m\}$  auf.
- $A_\Delta$  gebe gemäß unserer Notation aus Abschnitt 1.3 die Untermatrix von  $A$  an, welche aus den Zeilen  $a_{\Delta^1}^T, \dots, a_{\Delta^n}^T$  besteht.

Damit liefern

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_\Delta^{-T} a_1, \dots, \alpha_m = A_\Delta^{-T} a_m \quad \text{und} \\ \gamma_1 &= A_\Delta^{-T} (-e_1), \dots, \gamma_n = A_\Delta^{-T} (-e_n) \end{aligned}$$

eine Repräsentation der Vektoren  $a_1, \dots, a_m$  bzw.  $-e_1, \dots, -e_n$  im neuen Koordinatensystem zur Basis  $a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n}$ . Analog kann auch ein Zielfunktionsvektor  $c$ , falls vorhanden, dargestellt werden:

$$\xi = A_\Delta^{-T} c$$

Weitere wertvolle Information erhalten wir durch die sogenannten Schlüpf:

$$\begin{aligned} \beta^j &= 1 - a_j^T A_\Delta^{-1} \mathbf{1}_n = 1 - \alpha_j^T \mathbf{1}_n \\ x^i &= e_i^T A_\Delta^{-1} \mathbf{1}_n = \gamma_i^T \mathbf{1}_n \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $x = (x^1, \dots, x^n)^T$  unsere aktuelle Ecke und damit gleichzeitig den Normalenvektor zur Hyperebene  $H(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n}) = \text{AH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$ , für welchen

$$a_{\Delta^1}^T x = 1, \dots, a_{\Delta^n}^T x = 1$$

gilt. Somit weist das Skalarprodukt für alle Punkte  $y \in H(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  mit  $x$  den Wert eins auf.

Falls eine Zielfunktion vorhanden ist, können wir auch hierzu in analoger Weise den negativen Zielfunktionswert (dies entspricht dann dem Schlupf zu der Restriktion  $c^T x \leq 0$ ) festhalten:

$$-Q = -c^T A_\Delta^{-1} \mathbf{1}_n = -\xi^T \mathbf{1}_n$$

Diese Daten speichern wir in einem Tableau, das mit unseren Bezeichnungen folgende Gestalt aufweist:

<sup>4</sup>Eine ausführliche Einführung in den restriktionsorientierten Simplexalgorithmus ist in [Bor01, S. 83–110] zu finden.

	$a_1$	$\dots$	$a_\ell$	$\dots$	$a_j$	$\dots$	$a_r$	$\dots$	$a_m$	$-e_1$	$\dots$	$-e_s$	$\dots$	$-e_n$	$c$
$a_{\Delta^1}$	$\alpha_1^1$	$\dots$	$\alpha_\ell^1$	$\dots$	$\alpha_j^1$	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha_m^1$	$\gamma_1^1$	$\dots$	$\gamma_s^1$	$\dots$	$\gamma_n^1$	$\xi^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{\Delta^k}$	$\alpha_1^k$	$\dots$	$\alpha_\ell^k$	$\dots$	$\alpha_j^k$	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha_m^k$	$\gamma_1^k$	$\dots$	$\gamma_s^k$	$\dots$	$\gamma_n^k$	$\xi^k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{\Delta^i} = a_r$	$\alpha_1^i$	$\dots$	$\alpha_\ell^i$	$\dots$	$\alpha_j^i$	$\dots$	1	$\dots$	$\alpha_m^i$	$\gamma_1^i$	$\dots$	$\gamma_s^i$	$\dots$	$\gamma_n^i$	$\xi^i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{\Delta^n}$	$\alpha_1^n$	$\dots$	$\alpha_\ell^n$	$\dots$	$\alpha_j^n$	$\dots$	0	$\dots$	$\alpha_m^n$	$\gamma_1^n$	$\dots$	$\gamma_s^n$	$\dots$	$\gamma_n^n$	$\xi^n$
	$\beta^1$	$\dots$	$\beta^\ell$	$\dots$	$\beta^j$	$\dots$	0	$\dots$	$\beta^m$	$x^1$	$\dots$	$x^s$	$\dots$	$x^n$	$-Q$

Nachfolgendes Tableau gibt die Darstellung mit den verwendeten Matrizen wieder:

	$a_1$	$\dots$	$a_m$	$-e_1$	$\dots$	$-e_n$	$c$
$a_{\Delta^1}$	$\hat{A}^T = (AA_{\Delta}^{-1})^T$			$-(A_{\Delta}^{-1})^T$		$(A_{\Delta}^{-1})^T c$	
$\vdots$							
$a_{\Delta^n}$	$(\mathbb{1}_m - AA_{\Delta}^{-1}\mathbb{1}_n)^T$			$x^T = (A_{\Delta}^{-1}\mathbb{1}_n)^T$		$-Q = -c^T A_{\Delta}^{-1}\mathbb{1}_n$	

Um aus der Basis einen Restriktionsvektor  $a_{\Delta^i}$  zu entfernen und für diesen einen Nichtbasisvektor  $a_j$  einzuwechseln, ist ein sogenannter Pivotschritt notwendig. Der Tableaueintrag  $\alpha_j^i$  wird dabei Pivotelement genannt. Die Zeile zum Basisvektor  $a_{\Delta^i}$  heißt Pivotzeile, die Spalte  $a_j$  wird entsprechend als Pivotspalte bezeichnet. Das neue Tableau lässt sich direkt aus dem aktuellen Simplextableau berechnen und sieht nach dem Austauschschritt wie folgt aus:

	$\dots$	$a_\ell$	$\dots$	$a_j$	$\dots$	$a_r$	$\dots$	$\dots$	$-e_s$	$\dots$	$c$
$a_{\Delta^1}$	$\dots$	$\alpha_\ell^1 - \frac{\alpha_\ell^1 \alpha_j^1}{\alpha_j^1}$	$\dots$	0	$\dots$	$-\frac{\alpha_j^1}{\alpha_j^1}$	$\dots$	$\dots$	$\gamma_s^1 - \frac{\gamma_s^1 \alpha_j^1}{\alpha_j^1}$	$\dots$	$\xi^1 - \frac{\xi^1 \alpha_j^1}{\alpha_j^1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{\Delta^k}$	$\dots$	$\alpha_\ell^k - \frac{\alpha_\ell^k \alpha_j^k}{\alpha_j^k}$	$\dots$	0	$\dots$	$-\frac{\alpha_j^k}{\alpha_j^k}$	$\dots$	$\dots$	$\gamma_s^k - \frac{\gamma_s^k \alpha_j^k}{\alpha_j^k}$	$\dots$	$\xi^k - \frac{\xi^k \alpha_j^k}{\alpha_j^k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{\Delta^i}^{\text{neu}} = a_j$	$\dots$	$\frac{\alpha_j^i}{\alpha_j^i}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{1}{\alpha_j^i}$	$\dots$	$\dots$	$\frac{\gamma_s^i}{\alpha_j^i}$	$\dots$	$\frac{\xi^i}{\alpha_j^i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{\Delta^n}$	$\dots$	$\alpha_\ell^n - \frac{\alpha_\ell^n \alpha_j^n}{\alpha_j^n}$	$\dots$	0	$\dots$	$-\frac{\alpha_j^n}{\alpha_j^n}$	$\dots$	$\dots$	$\gamma_s^n - \frac{\gamma_s^n \alpha_j^n}{\alpha_j^n}$	$\dots$	$\xi^n - \frac{\xi^n \alpha_j^n}{\alpha_j^n}$
	$\dots$	$\beta^\ell - \frac{\alpha_j^i \beta^\ell}{\alpha_j^i}$	$\dots$	0	$\dots$	$-\frac{\beta^j}{\alpha_j^i}$	$\dots$	$\dots$	$x^s - \frac{\gamma_s^i \beta^j}{\alpha_j^i}$	$\dots$	$-Q - \frac{\xi^i \beta^j}{\alpha_j^i}$

Durch diesen Schritt wird die aktuelle Ecke  $x$  verlassen und zu einer benachbarten Basislösung übergegangen. Damit bei einer solchen Auswechslung der Zulässigkeitsbereich  $X$  nicht verlassen wird, d.h. die neue Basislösung zulässig bleibt und somit eine Ecke darstellt, muss

zur Bestimmung der Pivotspalte der sogenannte Quotiententest durchgeführt werden. Dazu bestimmt man in der Tableauzeile  $i$ , in der der Austausch stattfinden soll, den Eintrag  $\alpha_t^i$ , so dass

$$\frac{\beta^t}{\alpha_t^i} \geq \frac{\beta^j}{\alpha_j^i} \text{ für alle } j \text{ mit } \alpha_j^i < 0$$

gilt. Kann in der Zeile kein negativer Eintrag gefunden werden, so zeigt dies eine unbeschränkte Kante (extremale freie Richtung) auf. D.h. ein Austauschschritt zu einer Nachbarecke ist zumindest in dieser Laufrichtung nicht möglich.

*Bemerkung 1.5.* Etwas komplizierter verhält es sich bezüglich des Quotiententests in der Problemstellung (P3), da hier auch Facetten 2. Art gesucht werden. Diese sind in unserem Tableau daran zu erkennen, dass  $\beta^i \leq 0 \forall i = 1, \dots, m$  gilt. Da wir uns in dieser Arbeit auf die Problemstellung (P1) bzw. mit Einschränkung auf (P2) konzentrieren, soll hier nicht näher auf die Anpassung des Quotiententests eingegangen werden. Sie kann in [Bor97, S. 88] nachgelesen werden.

## 1.6 Das probabilistische Modell

In diesem Abschnitt stellen wir das Rotationssymmetriemodell als Grundlage unserer probabilistischen Analyse vor<sup>5</sup>. Dabei beschränken wir uns auf eine Klasse von rotationssymmetrischen Verteilungen, in der keine Punkte außerhalb der Einheitskugel erzeugt werden.

### Festlegung

Die Punkte  $a_1, \dots, a_m$  seien stochastisch unabhängig und über der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel (ohne den Ursprung) identisch und rotationssymmetrisch verteilt.

Eine rotationssymmetrische Verteilung kann eindeutig über ihre **Radialverteilungsfunktion**

$$F(r) := \mathbb{P}(\|x\| \leq r) \text{ für } r \in [0, \infty)$$

charakterisiert werden, wobei  $\mathbb{P}(\|x\| \leq r)$  die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass die euklidische Norm eines zufälligen Punktes  $x$  nicht größer als  $r$  ist. Da wir nur Verteilungen mit Beschränkung auf die Einheitskugel betrachten, muss

$$F(r) = 1 \quad \forall r \geq 1$$

gelten. Wenn die Radialverteilungsfunktion eine Dichte besitzt, dann bezeichnen wir diese mit  $f(r)$ , d.h. es ist

$$F(r) = \int_0^r f(\rho) d\rho \quad \forall r \in [0, \infty). \quad (1.1)$$

Die Dichte der Verteilung über  $\mathbb{R}^n$  werde mit  $\hat{f}$  bezeichnet. Aufgrund der Rotationssymmetrie gilt für  $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\hat{f}(x_1) = \hat{f}(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \text{ mit } \|x_1\| = \|x_2\|. \quad (1.2)$$

<sup>5</sup>Die in diesem Abschnitt zusammengestellten Definitionen und Formeln sind zum Großteil aus den Arbeiten von Borgwardt (siehe [Bor87, S. 112–114], [Bor97, S. 95–98] und [Bor07, S. 179–181, 188–190]) entnommen.

Weiter sei  $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die mittels

$$\tilde{f}(\|x\|) = \hat{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

beschrieben ist. Damit lässt sich nachfolgende Beziehung beobachten:

$$F(r) = \lambda_{n-1}(\omega_n) \int_0^r t^{n-1} \tilde{f}(t) dt \quad (1.3)$$

Dabei gilt

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(r) = f(r) \cdot \frac{1}{r^{n-1} \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n)} \quad \text{mit } r = \|x\|. \quad (1.4)$$

Das Rotationssymmetriemodell erfüllt fast sicher (d.h. mit Wahrscheinlichkeit eins) die Nicht-entartungsbedingung. Diese ist wie folgt definiert:

**Definition 1.6.** Die sogenannte **Nichtentartungsbedingung** ist genau dann erfüllt, wenn jede Teilauswahl von  $n$  Vektoren aus der Menge  $\{a_1, \dots, a_m\}$  linear unabhängig und jede Teilauswahl von  $(n+1)$  Vektoren in allgemeiner Lage (d.h. affin unabhängig) ist.

**Definition 1.7.**  $\omega_n$  bezeichnet den Rand der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel (oder kürzer die  $n$ -dimensionale Einheitssphäre<sup>6</sup>):

$$\omega_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

$\Omega_n$  schreiben wir für die  $n$ -dimensionale Einheitskugel:

$$\Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

$\lambda_k$  steht für das  $k$ -dimensionale Lebesgue-Maß einer Menge. Es gilt:

$$\lambda_{n-1}(\omega_n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (1.5)$$

$$\lambda_n(\Omega_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad (1.6)$$

Hierbei bezeichnet  $\Gamma(\cdot)$  die bekannte Gammafunktion. Die zugehörige Definition sowie wichtige Eigenschaften dieser sind im Anhang A.1 ab Seite 177 zu finden.

Wir beschränken uns weiter auf eine spezielle Unterfamilie von rotationssymmetrischen Verteilungen auf  $\Omega_n$ , welche für die später notwendigen Integrationsoperationen besonders geeignet ist.

**Definition 1.8.** Nachfolgende Radialverteilungsfunktionen mit Parameter  $k \in (-1, \infty)$  werden definiert:

$$F_k(r) := \begin{cases} 0 & \text{für } r < 0 \\ \frac{\int_0^r (1-\tau^2)^k \tau^{n-1} d\tau}{\int_0^1 (1-\tau^2)^k \tau^{n-1} d\tau} & \text{für } 0 \leq r \leq 1 \\ 1 & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

---

<sup>6</sup>Der Rand einer Kugel wird auch Kugelsphäre genannt.

Die zugehörigen Radialdichten lauten:

$$f_k(r) := \begin{cases} \frac{(1-r^2)^k r^{n-1}}{\int_0^1 (1-\tau^2)^k \tau^{n-1} d\tau} & \text{für } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.8)$$

*Bemerkung 1.9.* Der Parameter  $k$  gibt das Gewicht der Verteilung auf dem Radius zwischen null und eins an.  $k \rightarrow -1$  bedeutet dabei extremes Gewicht auf dem Rand der Einheitskugel, so dass hiermit eine Verteilung auf  $\omega_n$  ausgedrückt wird. Steigendes  $k$  beschreibt eine Erhöhung des Gewichts auf das Innere und damit gleichzeitig ein entsprechendes Absinken vom Rand der Kugel.

Zur Veranschaulichung werden in den Abbildungen 1.7 und 1.8 die Dichtefunktion  $f_k(r)$  bzw. die Verteilungsfunktion  $F_k(r)$  beispielhaft für einige festgelegte Parameter  $n$  und  $k$  visualisiert.

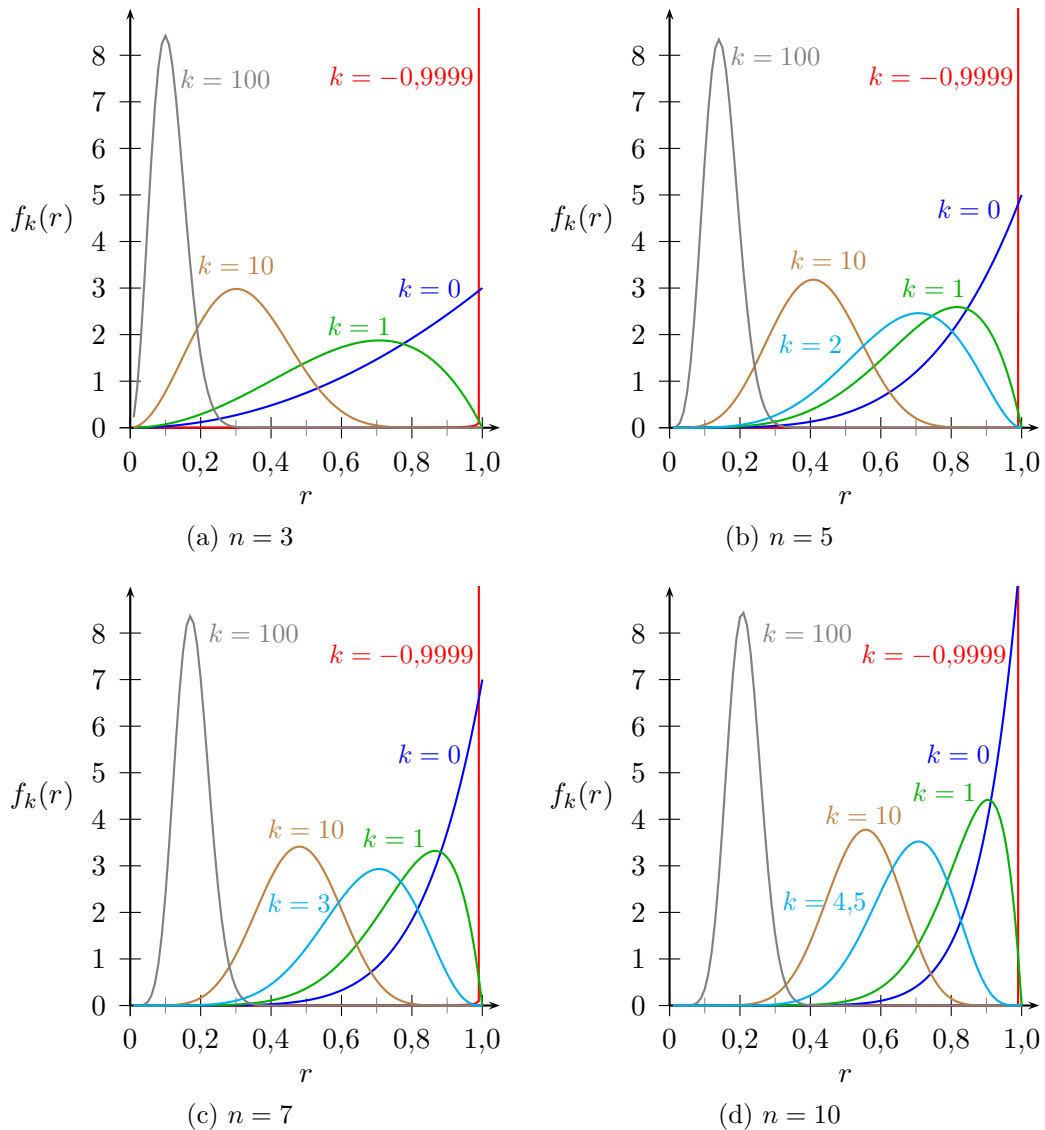


Abbildung 1.7: Beispiele für die Radialdichte  $f_k(r)$

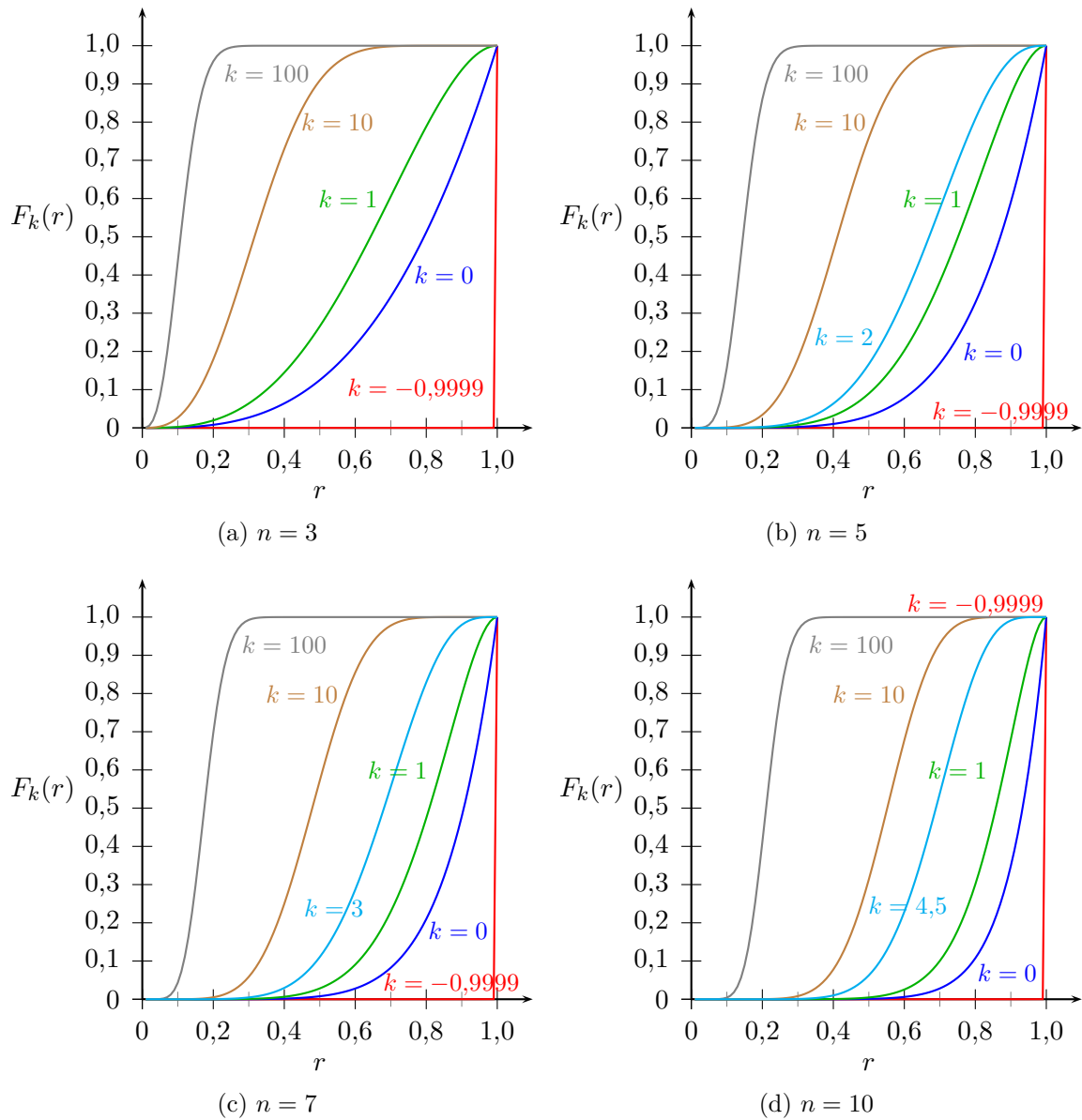


Abbildung 1.8: Beispiele für die Verteilungsfunktion  $F_k(r)$

Da die Formel (1.4) zu

$$\begin{aligned}
 f(r) &= \lambda_{n-1}(\omega_n) \cdot r^{n-1} \cdot \hat{f}(x) \quad \forall x \text{ mit } \|x\| = r \quad \text{bzw.} \\
 \hat{f}(x) &= \frac{f(r)}{\lambda_{n-1}(\omega_n) \cdot r^{n-1}} \quad \forall x \text{ mit } \|x\| = r \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

führt, gilt für unsere spezielle Verteilungsfamilie mit Parameter  $k$ :

$$\hat{f}_k(x) = \frac{f_k(\|x\|)}{\lambda_{n-1}(\omega_n) \cdot \|x\|^{n-1}} = \frac{(1 - \|x\|^2)^k}{\lambda_{n-1}(\omega_n) \cdot \int_0^1 (1 - \tau^2)^k \tau^{n-1} d\tau}
 \tag{1.10}$$

Setzen wir für die Formel (1.10)  $k$  auf null, so wird die Dichtefunktion  $\hat{f}_k(x)$  konstant, also unabhängig vom Punkt  $x$ . D.h. hier ist jeder Punkt der Einheitskugel gleichwahrscheinlich. Dieser und weitere interessante Spezialfälle für den Parameter  $k$  sind in nachfolgender Tabelle zusammengefasst:

$k$	BESCHREIBUNG
$k = 0$	$\hat{f}$ konstant auf $\Omega_n \hat{=}$ Gleichverteilung auf $\Omega_n$
$k \rightarrow -1$	Extreme Dominanz bei $r = 1 \hat{=}$ Gleichverteilung auf $\omega_n$
$k \rightarrow \infty$	Extreme Dominanz bei $r = 0 \hat{=}$ Totale Zentrierung
$k = \frac{n-1}{2}$	Radialdichte symmetrisch um $r = \frac{1}{2}$

Tabelle 1.1: Interessante Werte des Parameters  $k$

Um eine bessere Vorstellung vom Einfluss dieses Parameters zu bekommen, betrachte man die Graphiken aus Abbildung 1.9. Hier wurden nach unserer Verteilung für verschiedene Werte von  $k$  jeweils 120 Punkte im zweidimensionalen Raum erzeugt. Zur besseren Orientierung ist in diesen Graphiken zusätzlich der Kreis mit Radius  $\frac{1}{2}$  eingezeichnet.

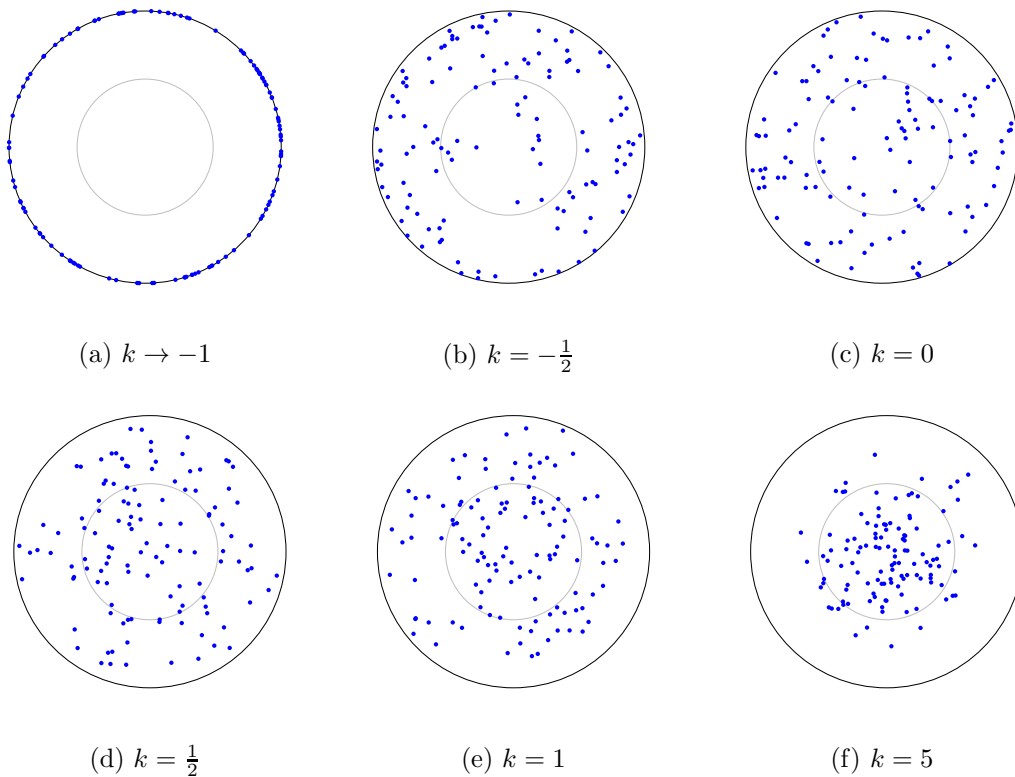


Abbildung 1.9: Veranschaulichung des Einflusses des Parameters  $k$  auf die Verteilung von 120 Punkten im zweidimensionalen Raum

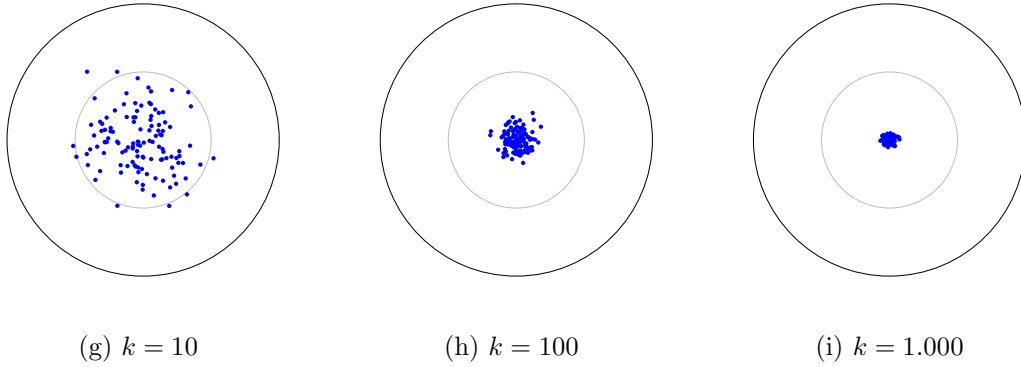


Abbildung 1.9 (Fortsetzung): Veranschaulichung des Einflusses des Parameters  $k$  auf die Verteilung von 120 Punkten im zweidimensionalen Raum

Als Grundlage für die explizite Berechnung einiger wichtiger Funktionen dienen nachfolgende Formeln:

$$\int_0^1 (1 - \tau^2)^k \tau^{n-1} d\tau = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(k+1+\frac{n}{2})} = \frac{1}{2}B\left(k+1, \frac{n}{2}\right) \quad \forall k > -1, n > -1 \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \int_h^1 (r^2 - h^2)^\ell (1 - r^2)^k r dr &= \frac{1}{2}(1 - h^2)^{\ell+k+1} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(k+\ell+2)} \\ &= \frac{1}{2}(1 - h^2)^{\ell+k+1} B(k+1, \ell+1) \quad \forall k > -1, \ell > -1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Hierbei steht  $B(\cdot, \cdot)$  für die Betafunktion. Die Definition dieser bekannten Funktion findet sich im Anhang A.1 auf Seite 178.

*Bemerkung 1.10.* Die Gleichung (1.11) erhält man mittels der Substitution  $u := \tau^2$ . Für (1.12) setzt man  $u := \frac{r^2-h^2}{1-h^2}$  zur Berechnung des Integrals.<sup>7</sup>

**Definition 1.11.** Die Randverteilung (Marginalverteilung) bzgl. der  $n$ -ten Koordinate ist definiert durch

$$G : [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad G(h) := \mathbb{P}(x^n \leq h).$$

Die Randdichtefunktion (Marginaldichtefunktion) lässt sich durch

$$g : [-1, 1] \rightarrow [0, \infty) \quad \text{mit} \quad \int_{-1}^h g(\xi) d\xi = G(h)$$

beschreiben.

---

<sup>7</sup>Eine detaillierte Ausführung dieser Berechnungen ist in [Bor07, S. 189] zu finden.



Für unsere Zwecke sind nachfolgende Randverteilungsfunktionen und zugehörige Funktionen für allgemeine rotationssymmetrische Verteilungen nützlich:

$$G(h) = 1 - \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \int_h^1 \int_{\frac{h}{r}}^1 (1 - \sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} d\sigma dF(r) \quad (1.13)$$

$$g_0(h) := g(h) = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \int_h^1 \frac{(r^2 - h^2)^{\frac{n-3}{2}}}{r^{n-2}} dF(r) \quad (1.14)$$

$$g_1(h) := g_0(h) \cdot \mathbb{E}(|x^1| \mid x^n = h) = \frac{1}{\pi} \int_h^1 \frac{(r^2 - h^2)^{\frac{n-2}{2}}}{r^{n-2}} dF(r) \quad (1.15)$$

$$g_2(h) := g_0(h) \cdot \mathbb{E}((x^1)^2 \mid x^n = h) = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1)\lambda_{n-1}(\omega_n)} \int_h^1 \frac{(r^2 - h^2)^{\frac{n-1}{2}}}{r^{n-2}} dF(r) \quad (1.16)$$

$$\Lambda_1(h) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\det B)^2 \hat{f}(b_1) \dots \hat{f}(b_n) d\bar{b}_1 \dots d\bar{b}_n = n! g_2(h)^{n-1} g_0(h) \quad (1.17)$$

$$\text{mit } B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_n^1 & \dots & b_n^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^{n-1} \\ h \end{pmatrix}, \bar{b}_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}^8$$

In unserer speziellen Verteilungsfamilie ergeben sich in Abhängigkeit vom Parameter  $k$  folgende Funktionen:

$$G_k(h) = 1 - \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \frac{2\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{n}{2})} \int_h^1 \int_{\frac{h}{r}}^1 (1 - \sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} d\sigma (1-r^2)^k r^{n-1} dr \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} g_{0,k}(h) &= \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \frac{2\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{n}{2})} \int_h^1 \frac{(r^2 - h^2)^{\frac{n-3}{2}}}{r^{n-2}} \cdot (1-r^2)^k \cdot r^{n-1} dr = \\ &= \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})} \cdot (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}+k} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$g_{1,k}(h) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{n}{2})} \int_h^1 \frac{(r^2 - h^2)^{\frac{n-2}{2}}}{r^{n-2}} \cdot (1-r^2)^k \cdot r^{n-1} dr = \frac{1}{\pi} (1-h^2)^{\frac{n}{2}+k} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} g_{2,k}(h) &= \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{(n-1) \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n)} \cdot \frac{2\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{n}{2})} \int_h^1 \frac{(r^2 - h^2)^{\frac{n-1}{2}}}{r^{n-2}} \cdot (1-r^2)^k \cdot r^{n-1} dr = \\ &= \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n+1}{2})} \cdot (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \end{aligned} \quad (1.21)$$

<sup>8</sup>Die Vektoren  $b_1, \dots, b_n$  sind das Resultat einer Koordinatentransformation, bei der  $\text{KH}(a_1, \dots, a_n)$  durch eine Drehung auf die Höhe  $h$  positioniert wird. Vgl. hierzu [Bor87, S. 134–137].

$$\Lambda_{1,k}(h) = n! \cdot g_{2,k}(h)^{n-1} \cdot g_{0,k}(h) = \tag{1.22}$$

$$= n! \cdot \left( \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+1 + \frac{n+1}{2})} \right)^{n-1} (1-h^2)^{\frac{n^2-1}{2} + k(n-1)} \cdot \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2})} (1-h^2)^{\frac{n-1}{2} + k} =$$

$$= n! \cdot \frac{(\Gamma(k+1 + \frac{n}{2}))^n \cdot (k+1 + \frac{n-1}{2})}{2^{n-1} (\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n+1}{2}))^n} \cdot (1-h^2)^{kn + \frac{n^2+n-2}{2}} \tag{1.23}$$

Obige Formeln sind bereits aus den Arbeiten von Borgwardt (vgl. [Bor87], [Bor97] und [Bor07]) bekannt. Weiter trifft Borgwardt an einigen Stellen auf Oberschranken der Form

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 G^L \cdot (1-G)^M dG \quad \text{mit } L \in \mathbb{N} \text{ und } M > 0 \tag{1.24}$$

und macht dabei für seine Analysen von nachfolgender banaler Abschätzung Gebrauch:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 G^L \cdot (1-G)^M dG \leq \int_0^1 G^L \cdot (1-G)^M dG \tag{1.25}$$

Für unsere Zwecke wird es zu einem späteren Zeitpunkt notwendig sein, das Integral auf der linken Seite exakt auszurechnen. Daher wird dies nun durchgeführt.

Hierzu benötigen wir die bekannte Formel der partiellen Integration, welche unmittelbar aus der Produktregel der Differentialrechnung folgt:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Diese Formel wird zur Berechnung unseres Integrals (zunächst mit  $f'(G) = (1-G)^M$  und  $g(G) = G^L$ ) in mehreren Wiederholungen solange angewendet, bis sich der Exponent  $L \in \mathbb{N}$  im Integral auf Null reduziert hat.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{G^L}_{g(G)} \cdot \underbrace{(1-G)^M}_{f'(G)} dG = \left[ \underbrace{G^L}_{g(G)} \cdot \underbrace{\left( -\frac{1}{M+1} \cdot (1-G)^{M+1} \right)}_{f(G)} \right]_{\frac{1}{2}}^1 -$$

$$- \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{\left( -\frac{1}{M+1} \cdot (1-G)^{M+1} \right)}_{f(G)} \cdot \underbrace{L \cdot G^{L-1}}_{g'(G)} dG =$$

$$= \left[ -\frac{1}{M+1} \cdot G^L \cdot (1-G)^{M+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{M+1} \cdot L \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-G)^{M+1} \cdot G^{L-1} dG =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ -\frac{1}{M+1} \cdot G^L \cdot (1-G)^{M+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{M+1} \cdot L \cdot \left( \left[ -\frac{1}{M+2} \cdot G^{L-1} \cdot (1-G)^{M+2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{M+2} \cdot (L-1) \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-G)^{M+2} \cdot G^{L-2} dG \right) = \\
 &= \left[ -\frac{1}{M+1} \cdot G^L \cdot (1-G)^{M+1} - \frac{1}{M+1} \cdot \frac{1}{M+2} \cdot L \cdot G^{L-1} \cdot (1-G)^{M+2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \\
 &\quad + \frac{1}{M+1} \cdot \frac{1}{M+2} \cdot L \cdot (L-1) \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-G)^{M+2} \cdot G^{L-2} dG = \\
 &= \left[ -\frac{1}{M+1} \cdot G^L \cdot (1-G)^{M+1} - \frac{1}{M+1} \cdot \frac{1}{M+2} \cdot L \cdot G^{L-1} \cdot (1-G)^{M+2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(M+1) \cdot (M+2) \cdot (M+3)} \cdot L \cdot (L-1) \cdot G^{L-2} \cdot (1-G)^{M+3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \\
 &\quad + \frac{1}{(M+1) \cdot (M+2) \cdot (M+3)} \cdot L \cdot (L-1) \cdot (L-2) \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-G)^{M+3} \cdot G^{L-3} dG = \\
 &= \dots = \left[ -\sum_{i=1}^L \frac{1}{\prod_{q=1}^i (M+q)} \cdot \frac{L!}{(L-i+1)!} \cdot G^{L-i+1} \cdot (1-G)^{M+i} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \\
 &\quad + \frac{1}{(M+1) \cdot (M+2) \cdot \dots \cdot (M+L)} \cdot L! \int_{\frac{1}{2}}^1 G^0 \cdot (1-G)^{M+L} dG = \\
 &= \left[ -\sum_{i=1}^L \frac{1}{\prod_{q=1}^i (M+q)} \cdot \frac{L!}{(L-i+1)!} \cdot G^{L-i+1} \cdot (1-G)^{M+i} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(M+1) \cdot (M+2) \cdot \dots \cdot (M+L) \cdot (M+L+1)} \cdot L! \cdot (1-G)^{M+L+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \\
 &= - \left[ \sum_{i=1}^{L+1} \frac{1}{\prod_{q=1}^i (M+q)} \cdot \frac{L!}{(L-i+1)!} \cdot G^{L-i+1} \cdot (1-G)^{M+i} \right]_{\frac{1}{2}}^1
 \end{aligned}$$

Setzen wir nun unsere Integrationsgrenzen ein, so erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^1 G^L \cdot (1-G)^M dG &= \sum_{i=1}^{L+1} \frac{1}{\prod_{q=1}^i (M+q)} \cdot \frac{L!}{(L-i+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{L+M+1} = \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{L+M+1} \cdot \left( \sum_{i=1}^{L+1} \frac{1}{\prod_{q=1}^i (M+q)} \cdot \frac{L!}{(L-i+1)!} \right) \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist zumindest für konkret gegebene  $M$  und  $L$  explizit berechenbar. Da die Gammafunktion der Funktionsgleichung

$$\Gamma(x) = (x - 1) \cdot \Gamma(x - 1)$$

genügt, kann das Ergebnis (1.26) auch folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 G^L \cdot (1 - G)^M dG &= \left(\frac{1}{2}\right)^{L+M+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{L+1} \frac{\Gamma(M+1)}{\Gamma(M+i+1)} \cdot \frac{\Gamma(L+1)}{\Gamma(L-i+2)}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{L+M+1} \cdot \Gamma(M+1) \cdot \Gamma(L+1) \cdot \sum_{i=1}^{L+1} \frac{1}{\Gamma(M+i+1) \cdot \Gamma(L-i+2)} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Diese Auswertung wird in Kapitel 5 zum Einsatz kommen.

*Bemerkung 1.12.* Setzt man zusätzlich  $M \in \mathbb{N}$  voraus und geht zur Berechnung des Integrals mit vertauschten Rollen der Parameter  $M$  und  $N$  bezüglich partieller Integration vor, so ergibt sich nachfolgendes Ergebnis:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 G^L \cdot (1 - G)^M dG = \frac{M! \cdot L!}{(L + M + 1)!} - \left(\frac{1}{2}\right)^{L+M+1} \sum_{i=1}^{M+1} \frac{L!}{(L+i)!} \cdot \frac{M!}{(M-i+1)!} \quad (1.28)$$

Neben der probabilistischen Analyse ist das hier vorgestellte stochastische Modell auch die Grundlage zur Erzeugung der Problembeispiele für unsere empirischen Untersuchungen. Wie diese durchgeführt werden und welche Vereinbarungen wir hierzu treffen, wird im nachfolgenden Abschnitt behandelt.

*Bemerkung 1.13.* Man beachte, dass bei  $L \rightarrow \infty$  und  $M$  fest der relative Unterschied zwischen dem Resultat der Abschätzung in (1.25) und dem exakten Ergebnis aus (1.27) bzw. (1.28) unbedeutend wird. Dies ist der Grund dafür, dass in Abschnitt 1.8 beim Vergleich zwischen empirischen Auswertungen und den mit (1.25) gewonnenen Obergrenzen zunächst eine große Diskrepanz, dann aber asymptotisch ( $m \rightarrow \infty$  und  $n$  fest) eine ziemlich gute Übereinstimmung auftritt.

## 1.7 Allgemeines zu empirischen Analysen in dieser Arbeit

Bei der Untersuchung der einzelnen Algorithmen werden wir auf viele interessante Zufallsgrößen treffen, deren Average-Case-Analyse sich leider als äußerst schwierig herausstellt. Daher werden wir, um zumindest einen Eindruck von gewissen Größen zu bekommen, auf empirische Ergebnisse zurückgreifen. Des Weiteren sollen bekannte Average-Case-Resultate durch empirische Testläufe überprüft bzw. Erkenntnisse über die Schärfe von Abschätzungen gewonnen werden.

Prinzipiell stehen bei der Erzeugung der Problembeispiele drei auszuwählende Parameter zur Verfügung:

- der Verteilungsparameter  $k \in (-1, \infty)$ ,
- die Dimension der Polyeder  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  und
- die Anzahl an Restriktionen (bzw. die Anzahl an Punkten)  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq n$ .

Um anschauliche und aussagekräftige Graphiken zur Darstellung der empirischen Beobachtungen zu den betrachteten Zufallsgrößen zu erhalten, wird folgendes vereinbart: Wir variieren für jede Abbildung nur einen der oben aufgezählten Parameter und halten dabei die anderen fest. Soll der Verlauf der empirischen Ergebnisse aufgrund der Änderung des Parameters  $m$  erfolgen, so wird die Dimension auf  $n = 7$  festgesetzt und  $m$  beginnend mit  $m = 10$  bis auf  $m = 200$  bei einer jeweiligen Erhöhung von zehn variiert. Als zweite Variante setzen wir  $m = 50$  und variieren  $n$  beginnend bei zwei bis zehn unter einer Schrittweite von eins. Um den Verlauf der Resultate zu verdeutlichen, werden dabei die empirischen Einzelergebnisse zu einer differenzierbaren Kurve miteinander verbunden.

Für die Verteilung bieten sich die sehr interessanten Fälle der Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche ( $k \rightarrow -1$ ) und die Gleichverteilung in der Kugel ( $k = 0$ ) an. Um neben diesen Spezialfällen auch positive Verteilungsparameter zu untersuchen, setzen wir als dritte und vierte Verteilung  $k = 1$  und  $k = 10$  fest. Für eine bessere Unterscheidbarkeit der Resultate und zur schnellen Assoziation mit der jeweiligen Verteilung werden dabei in dieser Arbeit den Werten von  $k$  verschiedene Farben zugeordnet (siehe Tabelle 1.2). Insgesamt stehen also für jede Größe acht Testreihen an, nämlich die jeweilige Variation von  $n$  und  $m$  unter den vier genannten Verteilungen. Um mit unseren Testläufen Ergebnisse möglichst nahe am Erwartungswert zu erhalten, werden dabei für jede Parameterkombination stets 1.000 Problembeispiele erzeugt und die Resultate gemittelt. Auf Untersuchungen, die rein auf eine Änderung des Verteilungsparameters bei festem  $m$  und  $n$  basieren, verzichten wir in dieser Arbeit.

VARIERTER PARAMETER	FESTER PARAMETER	VERTEILUNGS-PARAMETER	FARBE	ANZAHL TESTBEISPIELE
$m = 10, 20, \dots, 200$ (Schrittweite 10)	$n = 7$	$k \rightarrow -1$	rot	1.000
		$k = 0$	blau	1.000
		$k = 1$	grün	1.000
		$k = 10$	braun	1.000
$n = 2, 3, \dots, 10$ (Schrittweite 1)	$m = 50$	$k \rightarrow -1$	rot	1.000
		$k = 0$	blau	1.000
		$k = 1$	grün	1.000
		$k = 10$	braun	1.000

Tabelle 1.2: Festlegungen zu den empirischen Analysen

In Tabelle 1.2 sind unsere Festlegungen nochmal zusammengefasst. Diese Parameterkombinationen sind exemplarisch gewählt. Einerseits sollen nicht zu kleine Werte verwendet werden, um ein häufiges Auftreten von Spezialfällen zu unterbinden. Andererseits sollen die Rechen-

laufzeiten nicht zu stark ansteigen. An einigen Stellen ist jedoch ein Verlauf der empirischen Resultate für sehr viel höheres  $m$  interessant. Um auch hierzu Untersuchungen mit akzeptablen Laufzeiten vornehmen zu können, wird die Zahl der Testläufe bei Variation des Parameters  $m$  auf 100 reduziert und die Dimension  $n$  auf fünf gesenkt. Will man bei hoher Restriktionszahl  $m$  auch die Dimension  $n$  variieren, so stellt sich heraus, dass hier die Rechenlaufzeiten besonders stark ansteigen. Um dennoch auch dazu aussagekräftige Graphiken zu erhalten, reduzieren wir die Anzahl an Testbeispielen pro Parameterkombination noch weiter auf 20. Die Restriktionszahl wird hierbei auf  $m = 500$  festgesetzt. Die kompletten Festlegungen für diese Fälle sind in übersichtlicher Form nachfolgender Tabelle zu entnehmen:

VARIERTER PARAMETER	FESTER PARAMETER	VERTEILUNGS-PARAMETER	FARBE	ANZAHL TESTBEISPIELE
$m = 50, 100, \dots, 2.000$ (Schrittweite 50)	$n = 5$	$k \rightarrow -1$	rot	100
		$k = 0$	blau	100
		$k = 1$	grün	100
		$k = 10$	braun	100
$n = 2, 3, \dots, 10$ (Schrittweite 1)	$m = 500$	$k \rightarrow -1$	rot	20
		$k = 0$	blau	20
		$k = 1$	grün	20
		$k = 10$	braun	20

Tabelle 1.3: Alternative Festlegungen zu den empirischen Analysen

*Bemerkung 1.14.* Um eine erhöhte Vergleichbarkeit zwischen den verschiedenen Verfahren und Untersuchungsgrößen zu erhalten, entstanden die meisten Graphiken in dieser Arbeit gemäß obigen Festlegungen. Abweichungen hiervon werden wir an entsprechender Stelle begründen.

## 1.8 Empirische Analyse der erwarteten Eckenzahl

Eine besonders große Rolle für die Gesamtkomplexität aller in dieser Arbeit untersuchten Algorithmen spielt die Anzahl an Ecken des Polyeders  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbb{1}\}$ . Daher soll hier noch vor der Einführung in das erste Berechnungsverfahren ein Überblick über vorhandene Erkenntnisse zum Erwartungswert der Eckenzahl gegeben und empirische Untersuchungen zu dieser Zufallsgröße durchgeführt werden.

Der Analyse der erwarteten Eckenzahl in einem Polyeder (bzw. der erwarteten Facettenzahl in der dualen Sicht) widmen sich schon seit vielen Jahren mehrere Mathematiker. Die Arbeit von Buchta [Buc85] liefert hierzu eine schöne Übersicht über die Entwicklung der Forschung bezüglich dieser und weiteren Problemstellungen aus der Polyedertheorie bis hin ins Jahr 1985. Da die Integralansätze von Borgwardt (siehe [Bor97] und [Bor07]) für eine Anpassung zur Average-Case-Analyse anderer algorithmischer Zufallsgrößen besonders geeignet sind, ziehen wir in dieser Arbeit dessen Ergebnisse und Abschätzungen in Betracht. Man beachte aber, dass vor allem bei Vorliegen von Gleichverteilung auch schärfere Oberschranken zur erwarteten Ecken- bzw. Facettenzahl gefunden wurden als die unten angegebenen von Borgwardt. An dieser Stelle ist besonders auf die Arbeiten von Buchta et al. [BM84] und [BMT85] hinzuwei-

sen. In Ersterem werden Ergebnisse bei Gleichverteilung in  $\Omega_n$  berechnet. Letztere beschäftigt sich speziell mit der Gleichverteilung der Punkte auf der Kugeloberfläche.

In [Bor97, S. 98–101] kam Borgwardt für die Anzahl an Facetten 1. Art ( $\#F_1$ ) und die Zahl der Facetten 2. Art ( $\#F_2$ ) des Polytops  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  zu den nachfolgenden Abschätzungen des Erwartungswertes:

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#F_1) \leq \frac{2\sqrt{n!}}{n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot (n+1+2k)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left( \frac{m \cdot \Gamma\left(k+1+\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(k+1+\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \quad (1.29)$$

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#F_2) \leq \binom{m}{n} \cdot \frac{\sqrt{n!} \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{m-1} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{(n+1+2k)^{\frac{n-1}{2}}}{m - \frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot \left( \frac{\Gamma\left(k+1+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(k+1+\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \quad (1.30)$$

Wie wir bereits wissen, entsprechen die Ecken in unserer primalen Sichtweise den Facetten 1. Art bei Betrachtung der Problemstellung (P3) (siehe Abschnitt 1.4). Daher gilt die Oberschranke (1.29) auch für  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V)$ , der erwarteten Anzahl an Ecken des Polyeders  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbb{1}\}$ .

Durch Ausnutzung einer schärferen Oberschranke für

$$\binom{k}{\ell} \int_0^1 (1-x)^{k-\ell} x^{\ell-1-\delta} dx$$

konkret für die Belegung

$$k = m, \quad \ell = n, \quad x = 1 - G \quad \text{und} \quad \delta = \frac{n-1}{m+1+2k}$$

wurde in [Bor07, S. 191–193] eine etwas schärfere Oberschranke für  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V)$  bzw.  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\#F_1)$  angegeben:

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V) = \mathbb{E}_{m,n}^k(\#F_1) \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n!}}{n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left( \frac{\left(m + \frac{2+2k}{n+1+2k}\right) \cdot \Gamma\left(k+1+\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \cdot (n-1) \cdot \Gamma\left(k+1+\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot (n+1+2k)^{\frac{n-1}{2}} \quad (1.31)$$

*Bemerkung 1.15.* Des Weiteren konnte Borgwardt in seiner Arbeit [Bor07, S. 194–197] speziell für den Fall der Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  auf der Kugeloberfläche ( $k \rightarrow -1$ ) und für die Gleichverteilung dieser Vektoren in der Kugel ( $k = 0$ ) seine Abschätzungen für die erwartete Anzahl an Ecken weiter verbessern:

$$\mathbb{E}_{m,n}^{k \rightarrow -1}(\#V) \leq \frac{m}{n} \cdot (n-1)^{n-3} \cdot \left( \frac{2\pi}{n-2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{n^2 - 2n + 1} \quad (1.32)$$

$$\mathbb{E}_{m,n}^{k=0}(\#V) \leq \left( \frac{m + \frac{2}{n+1}}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n-2+\frac{2}{n+1}}}{n} \cdot \left( \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right)^{n-1+\frac{2}{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{n^2 + 1} \quad (1.33)$$

Es werde hier nochmal explizit darauf hingewiesen, dass die Abschätzungen von Borgwardt innerhalb einer Methodik gewonnen wurden, die sich für die Analyse weiterer Zufallsvariablen, welche für den algorithmischen Verlauf entscheidend sind, besonders eignen. Dies ist bei

den vorher erwähnten Ergebnissen von Buchta et al. nicht der Fall. Daher werden die Oberschranken (1.31),(1.32) und (1.33) für den nun folgenden empirischen Vergleich herangezogen.

Präziser ausgedrückt wollen wir im Folgenden durch empirische Testläufe einerseits den exakten Erwartungswert anhand einer Durchschnittsbildung der Resultate über mehrere Problembeispiele simulieren und andererseits untersuchen, wie scharf obige Oberschranken sind. Dazu enthalten die Graphiken in diesem Abschnitt neben den Kurvenverläufen aus den empirischen Untersuchungen auch die bekannten Oberschranken aus den Formeln (1.32) für  $k \rightarrow -1$ , (1.33) für  $k = 0$  und (1.31) für die Fälle  $k = 1$  und  $k = 10$  in den jeweils dunkleren Farben.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der erwarteten Anzahl an Ecken unter der Dimension  $n = 7$  bei Variation des Parameters  $m$ . In Abbildung 1.10 betrachten wir die Gleichverteilung der Restriktionsvektoren auf der Kugeloberfläche ( $k \rightarrow -1$ ). Hier weist die Oberschranke aus Formel (1.32) für festes  $n$  einen linearen Kurvenverlauf auf und beträgt im konkreten Fall für  $n = 7$ :

$$\frac{62208}{875} \cdot \pi^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot m \approx 1.758,846202 \cdot m$$

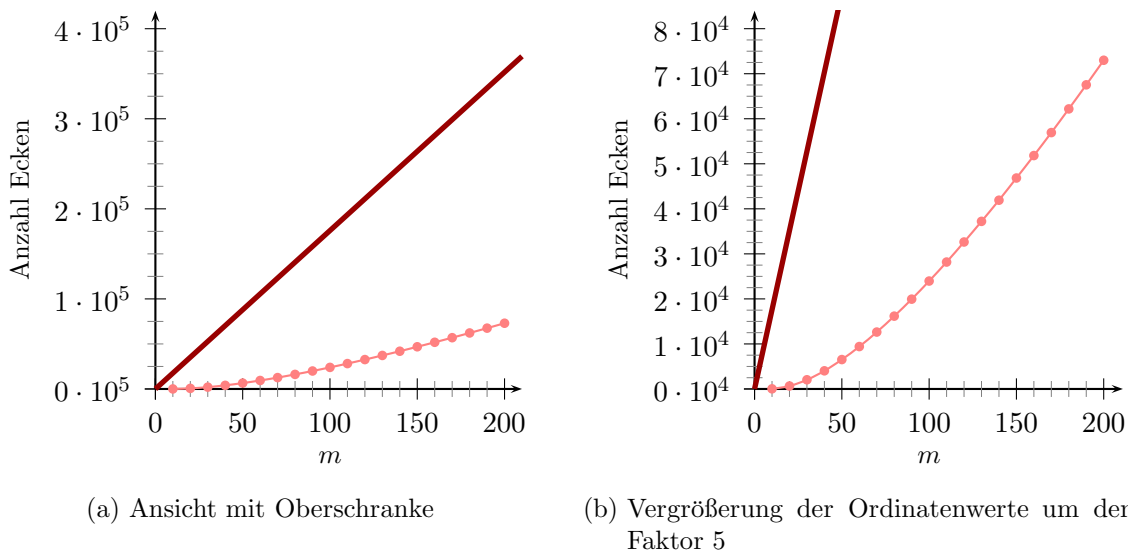


Abbildung 1.10: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 7$  und  $k \rightarrow -1$  unter Variation des Parameters  $m$

Wie in der Graphik deutlich zu sehen ist, liegt die Oberschranke von Borgwardt klar über unseren empirischen Ergebnissen und scheint sich sogar bei Erhöhung von  $m$  noch weiter von diesen zu entfernen. Also die Steigung unserer Oberschranke ist größer als die der empirischen Kurve. Letztere scheint zwar zunächst ein überproportionales Wachstum aufzuweisen, betrachtet man jedoch ausschließlich große  $m$ , so erkennt man annähernd einen linearen Kurvenverlauf. Um dies zu manifestieren, zeigt die Abbildung 1.11 die durchschnittliche Anzahl an Ecken für unsere alternative Parameterfestlegung gemäß Tabelle 1.3. Durch die langfristige Betrachtung bei Variation der Restriktionszahl werden dabei eben gemachte Beobachtungen besonders deutlich. Der zunächst superlineare Anstieg der empirischen Kurve für kleine  $m$  ist hier jedoch aufgrund der hohen Skalierung nicht mehr erkennbar.



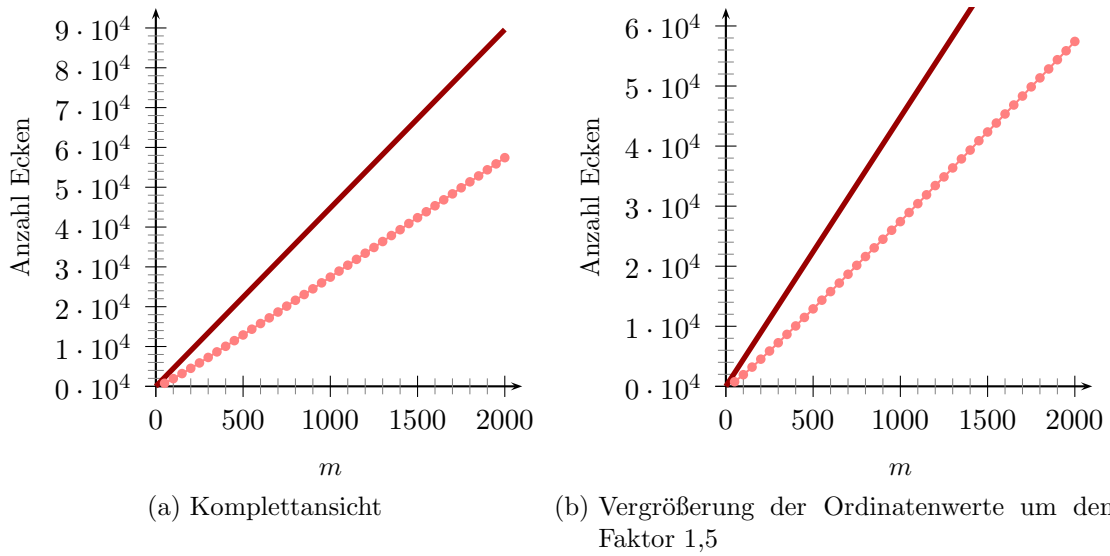


Abbildung 1.11: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 5$  und  $k \rightarrow -1$  unter Variation des Parameters  $m$

Betrachten wir den Verteilungsparameter  $k = 0$ , also die Gleichverteilung der Restriktionsvektoren in der Kugel, so erhalten wir durch Einsetzen von  $n = 7$  in die Formel (1.33) den Ausdruck:

$$\frac{10}{7\sqrt{\pi}} \cdot 8^{\frac{21}{4}} \cdot \left(\frac{2\pi}{7}\right)^{\frac{25}{8}} \cdot \left(\frac{m}{6} + \frac{1}{24}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 31.690,58 \cdot \left(\frac{m}{6} + \frac{1}{24}\right)^{\frac{3}{4}}$$

D.h. die Obergrenze gibt hier einen sublinearen Verlauf wieder.

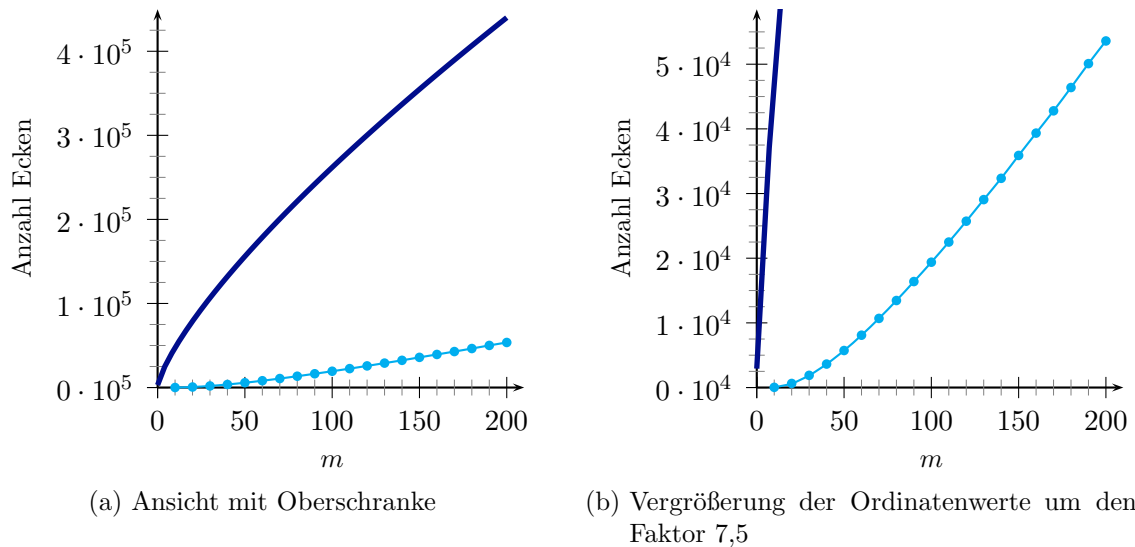


Abbildung 1.12: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 7$  und  $k = 0$  unter Variation des Parameters  $m$

Auch hier bestätigen sich einige Eindrücke, die bereits für die Verteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  auf der Kugeloberfläche festgestellt wurden: Die Oberschranke liegt deutlich über den empirischen Ergebnissen und entfernt sich von diesen in unserem Betrachtungsbereich bei steigendem  $m$  noch weiter. Der sublineare Verlauf lässt sich auf die nun mögliche Redundanz der Restriktionen zurückführen. Dass auch die empirischen Resultate für große  $m$  zu einer sublinearen Kurve führen, wird jedoch erst durch unsere Alternativfestlegung der Parameter ersichtlich (siehe Abbildung 1.13).

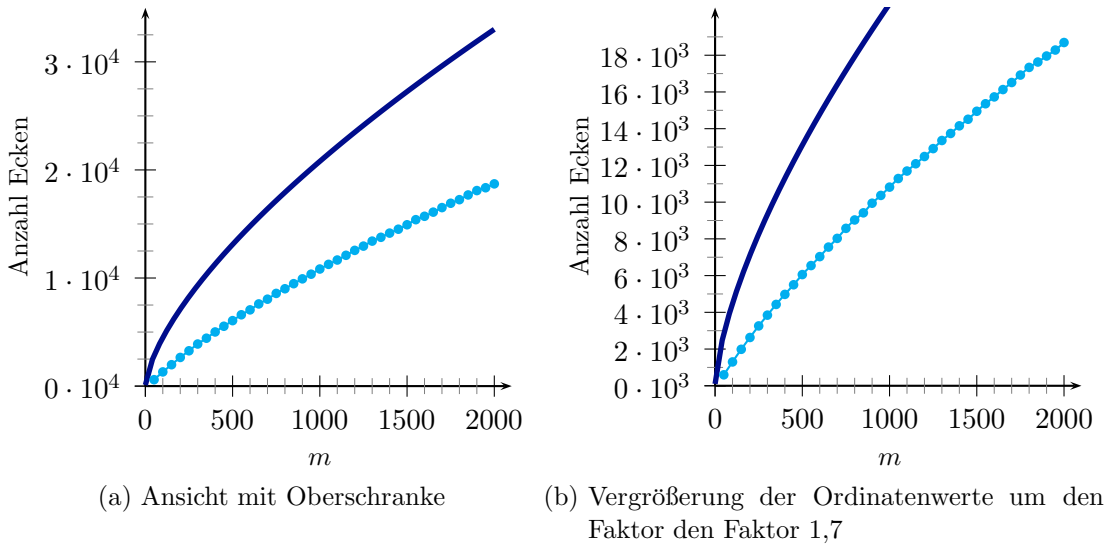


Abbildung 1.13: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 5$  und  $k = 0$  unter Variation des Parameters  $m$

Um auch einen Eindruck von der allgemeineren Oberschranke (1.31) für beliebiges  $k$  unter Variation von  $m$  zu erhalten, sind nachfolgend die Untersuchungen für die beiden Verteilungsparameter  $k = 1$  und  $k = 10$  zu sehen. Setzen wir hier zunächst  $n = 7$  und  $k = 1$  ein, so erhalten wir nachfolgenden Ausdruck für die Oberschranke:

$$\frac{25}{84} \cdot \pi^3 \cdot \sqrt{5040} \cdot 63^{\frac{3}{5}} \cdot 512^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{m}{6} + \frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{5}} \approx 4,223446545 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{m}{6} + \frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{5}}$$

Für  $k = 10$  ergibt sich diesbezüglich die Funktion:

$$\frac{49}{983040} \cdot \pi^3 \cdot \sqrt{5040} \cdot 5.014.575^{\frac{3}{14}} \cdot 67.108.864^{\frac{11}{14}} \cdot \left(\frac{m}{6} + \frac{11}{84}\right)^{\frac{3}{14}} \approx 4,223446545 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{m}{6} + \frac{11}{84}\right)^{\frac{3}{14}}$$

Beide Oberschranken deuten auf einen noch stärkeren sublinearen Effekt hin, der auf die nun erhöhte Wahrscheinlichkeit der Redundanz der erzeugten Restriktionen zurückgeführt werden kann. Dies ist auch in den dazu angefertigten Graphiken wiederzuerkennen. Wie weiter aus den Abbildungen 1.14 und 1.15 ersichtlich ist, klafft hier die Differenz aus Oberschranke und empirischen Werten noch stärker auseinander. In den linken Hälften der Abbildungen (Teil (a)) scheinen die empirischen Ergebnisse fast bei Null zu liegen, was jedoch allein auf der hohen Skalierung beruht, wie sich jeweils im rechten Teil (b) zeigt. Im Umkehrschluss sind rechts die Oberschranken kaum bzw. gar nicht mehr sichtbar.

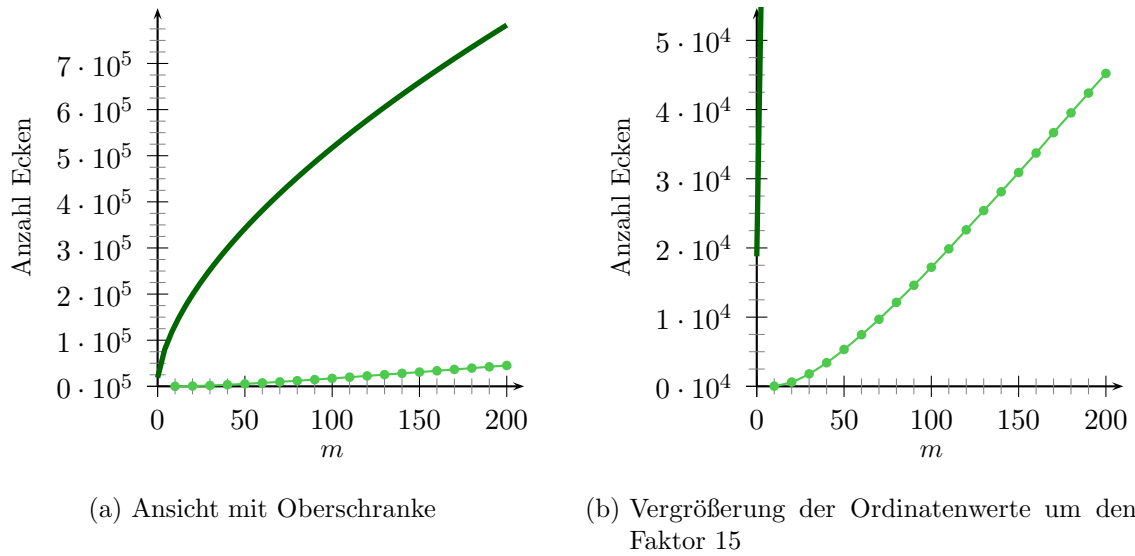


Abbildung 1.14: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 7$  und  $k = 1$  unter Variation des Parameters  $m$

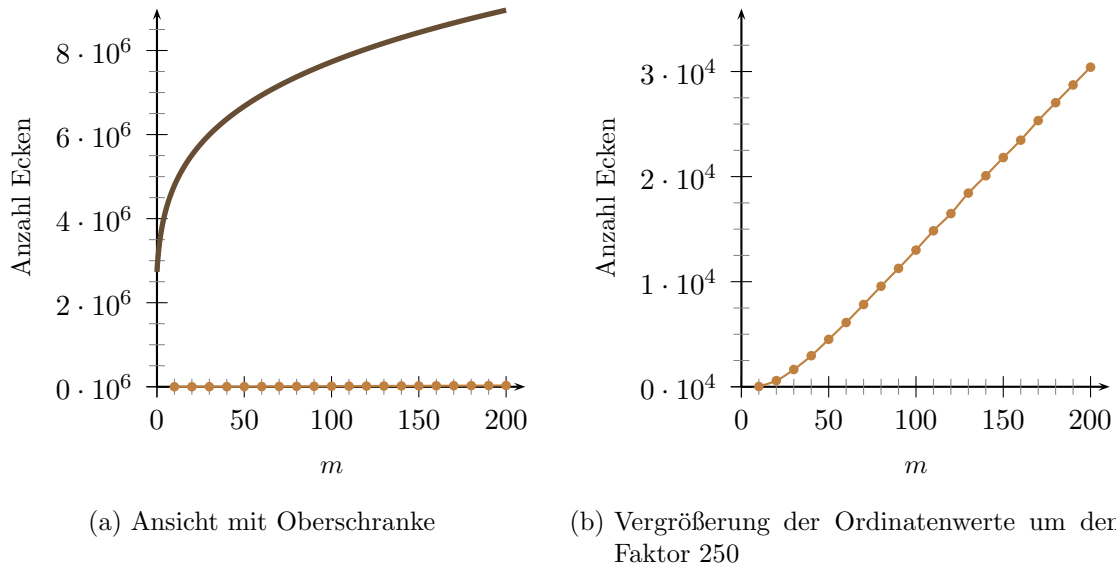


Abbildung 1.15: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 7$  und  $k = 10$  unter Variation des Parameters  $m$

Wiederum müssen wir hier feststellen, dass der Parameter  $m$  zu klein ist, um auch bei den empirischen Kurven Sublinearität zu erhalten. Es scheint ein generelles Phänomen zu sein, dass für kleine  $m$  die durchschnittliche Zahl der Ecken zunächst eher ein überproportionales Wachstum aufweist. Erst mit steigendem  $m$  tritt nach und nach ein gewisser Sättigungseffekt ein, der dazu führt, dass bei weiterer Erhöhung des Parameterwertes auch die empirische Kurve immer mehr dem Verlauf der Oberschranke ähnelt. Aufgrund der erhöhten Redundanzwahrscheinlichkeit für größere  $k$  ist dieser Sättigungseffekt für die Verteilungsparameter  $k = 1$  und  $k = 10$  etwas früher erkennbar, als dies bei Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  auf  $\Omega_n$  oder  $\omega_n$  der Fall gewesen ist.

Die Abbildungen 1.16 und 1.17 zeigen nun die entsprechenden Graphiken zu unserer Alternativfestlegung der Parameter. Hier bestätigen sich weitgehend unsere bisherigen Eindrücke.

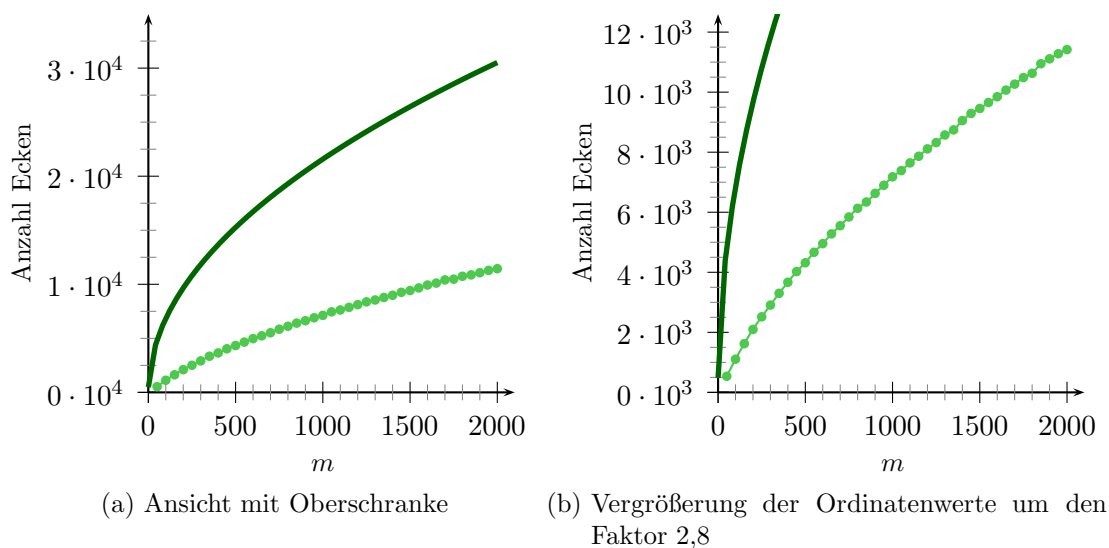


Abbildung 1.16: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 5$  und  $k = 1$  unter Variation des Parameters  $m$

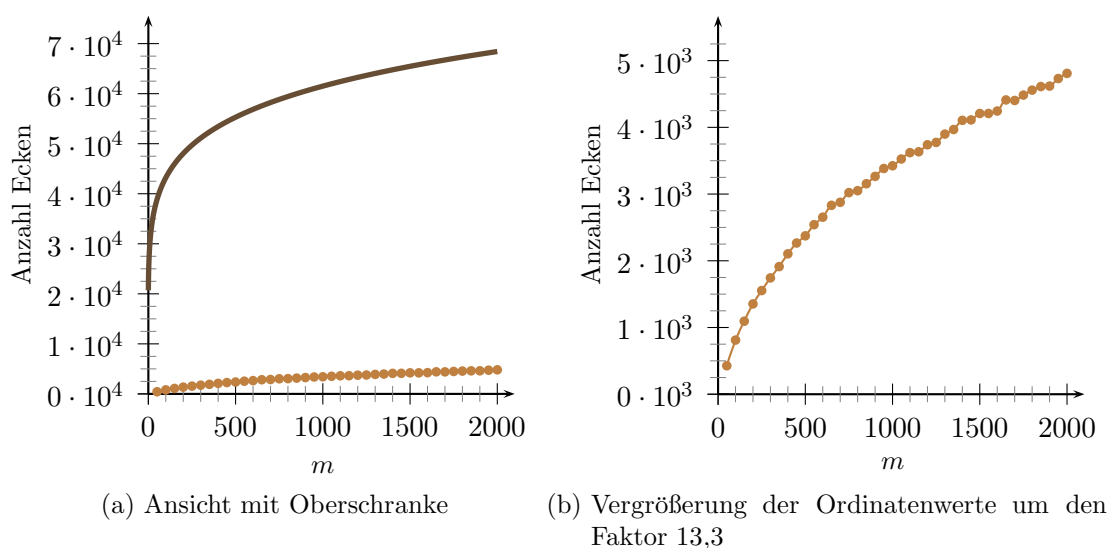


Abbildung 1.17: Durchschnittliche Anzahl der Ecken für  $n = 5$  und  $k = 10$  unter Variation des Parameters  $m$

Bei Betrachtung der Abbildungen 1.16 und 1.17 fällt erstmals ein leicht zackiger Verlauf in den empirischen Kurven auf. Dieser lässt sich einerseits auf die geringere Zahl der Problembeispiele zur Durchschnittsbildung in unserer Alternativfestlegung der Parameter und andererseits auf die höhere Schwankungsbreite in der Eckenzahl bei größerer Redundanzwahrscheinlichkeit zurückführen.

Bei den bisherigen Abbildungen könnte der Eindruck entstanden sein, dass Borgwardts Oberschranken insgesamt nur sehr ungenau den wahren Verlauf der Eckenzahl wiedergeben. Daher betrachten wir nun die Graphiken bei logarithmischer Ordinatenkalierung. Bei unserer Alternativfestlegung der Parameter, die eher das Verhalten für große  $m$  veranschaulicht, erkennen wir, dass Borgwardts Oberschranken für eine hohe Restriktionszahl annähernd parallel zu den empirischen Kurven verlaufen. D.h. hier wird bis auf eine von  $m$  unabhängige Konstante  $C(n, k)$  der wahre Kurvenverlauf sehr gut approximiert. Für eine kleine Restriktionszahl hingegen weisen die Oberschranken deutliche Überschätzungen auf. Daher muss auch bei höherer Redundanzwahrscheinlichkeit, d.h. bei größerem Wert des Verteilungsparameters  $k$ , die Restriktionszahl  $m$  größer gewählt werden, um eine gewisse Approximationsgüte zu erhalten. Dies erklärt, warum in nachfolgender Abbildung bei  $k = 10$  der wahre Verlauf durch die Oberschranke etwas schlechter wiedergegeben wird. Erst bei noch größerer Restriktionszahl würde auch hier kein Zweifel mehr an approximativer Parallelität zwischen den Kurven bestehen.

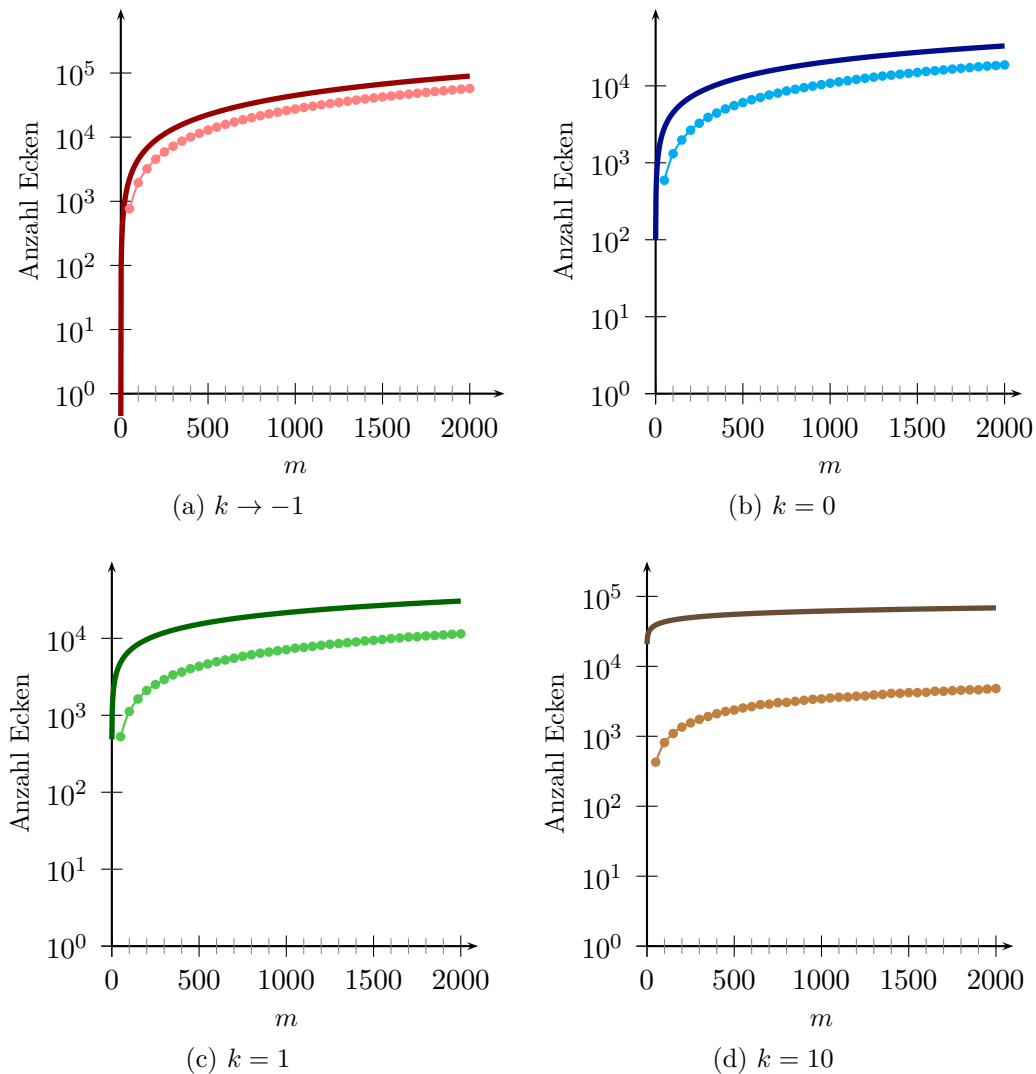


Abbildung 1.18: Darstellung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken für  $n = 5$  unter Variation des Parameters  $m$  durch logarithmische Ordinatenkalierungen

Ähnliche Probleme wie in Abbildung 1.18 beim Verteilungsparameter  $k = 10$  erhalten wir für die entsprechenden Untersuchungen bei unserer Standardfestlegung der Parameter. Aufgrund der zu niedrigen Restriktionszahl schlägt sich hier eine erkennbare Ungenauigkeit in der Approximation des Kurvenverlaufs auch schon bei kleinerem  $k$  durch.

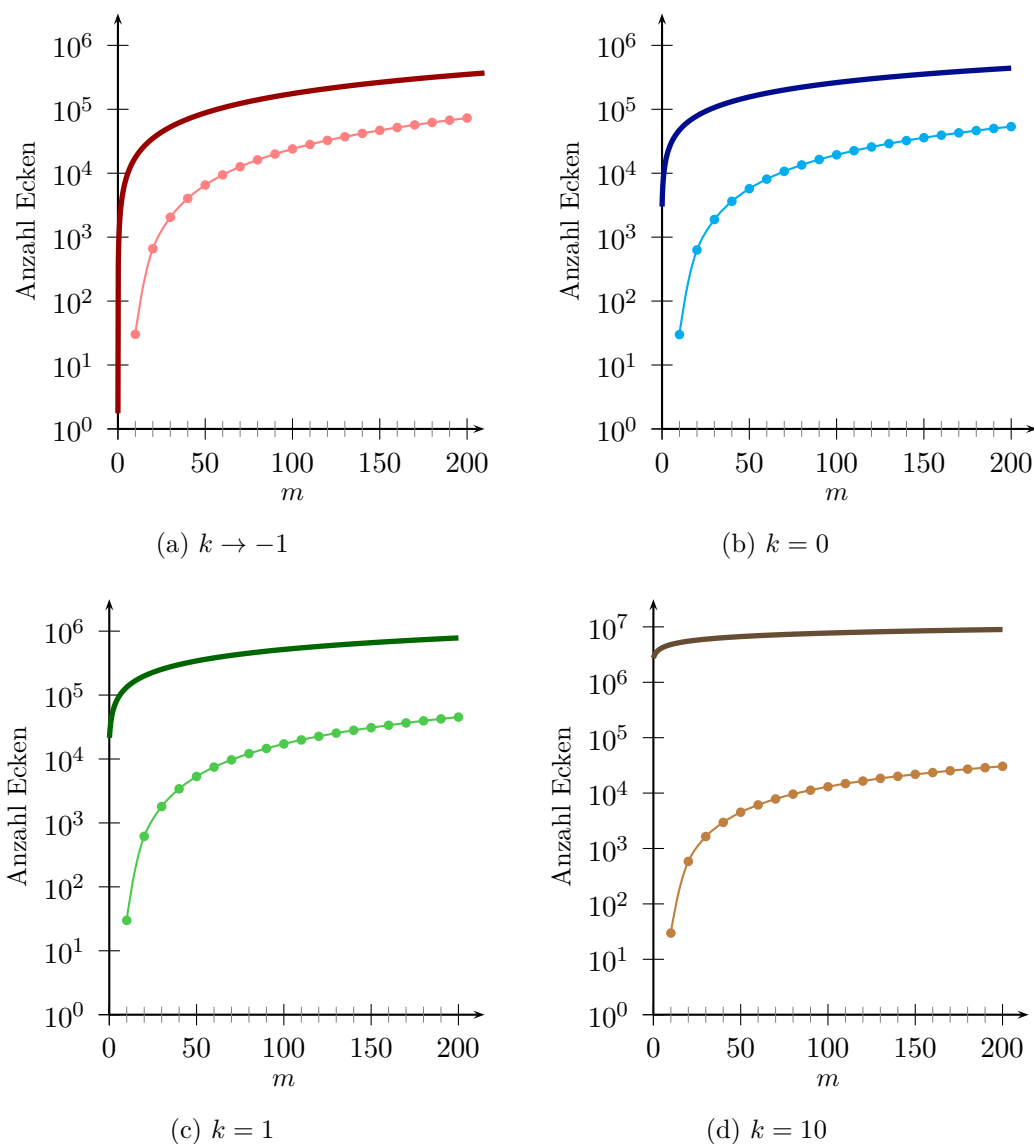


Abbildung 1.19: Darstellung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken für  $n = 7$  unter Variation des Parameters  $m$  durch logarithmische Ordinatenkalierungen

Wir wollen nun auch das Verhalten der Eckenzahl bei Variation der Dimension  $n$  für unsere Standardfestlegung der Parameter betrachten.

Bei der Gleichverteilung der Restriktionsvektoren auf der Oberfläche der Einheitskugel erhalten wird durch Einsetzen von  $m = 50$  als Oberschranke aus der Formel (1.32) den nach-

folgenden Ausdruck:

$$\frac{50\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \cdot (n-1)^{n-2} \cdot \left(\frac{2\pi}{n-2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \quad (1.34)$$

Dieser ist in Abbildung 1.20 erneut in der dunkelroten Farbe wiederzufinden.

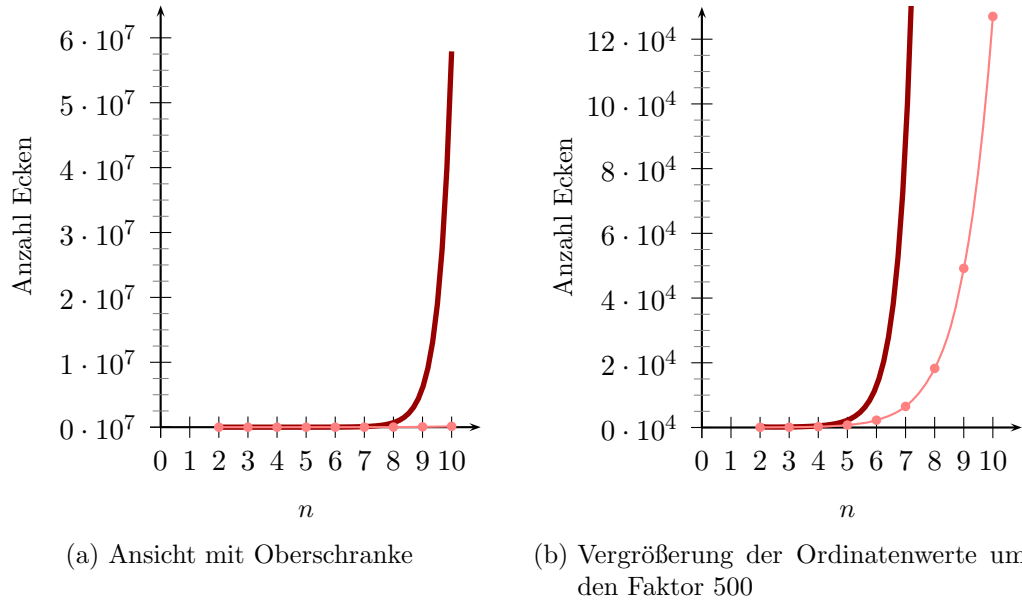


Abbildung 1.20: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Restriktionszahl  $m = 50$  unter Variation der Dimension  $n$

Deutlich zu erkennen ist hier der sehr starke Anstieg beider Kurven. Zumindest bei der Oberschranke konnten wir exponentielles Wachstum bereits durch unsere Formel (1.34) feststellen. Damit wird auch klar, warum wir für unsere Alternativfestlegung der Parameter bei Variation der Dimension  $n$  die Mittelung der Ergebnisse sogar auf 20 Problembeispiele senken mussten, um Resultate in akzeptablen Laufzeiten zu bekommen.

Weiter beachte man, dass hier für eine Erkennbarkeit der empirischen Ergebnisse sogar eine Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 500 (rechts) im Vergleich zur Graphik mit der Komplettansicht der Oberschranke (links) vorgenommen wurde.

Ein ähnliches Bild zeichnet sich bei der Gleichverteilung der Restriktionsvektoren in der Kugel ( $k = 0$ ) ab. Hier erhalten wir aus Formel (1.33) nachfolgende Oberschranke für  $m = 50$ :

$$\frac{\sqrt{2n^2 + 2}}{n\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{50 + \frac{2}{n+1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} (n+1)^{n-2+\frac{2}{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{n}}^{n-1+\frac{2}{n+1}}$$

In Abbildung 1.21 ist ersichtlich, dass hier die empirische Kurve noch weiter weg von der Oberschranke liegt. Der Vergrößerungsfaktor in Teil (b) der Abbildung wurde daher auf 1.000 gesteigert.

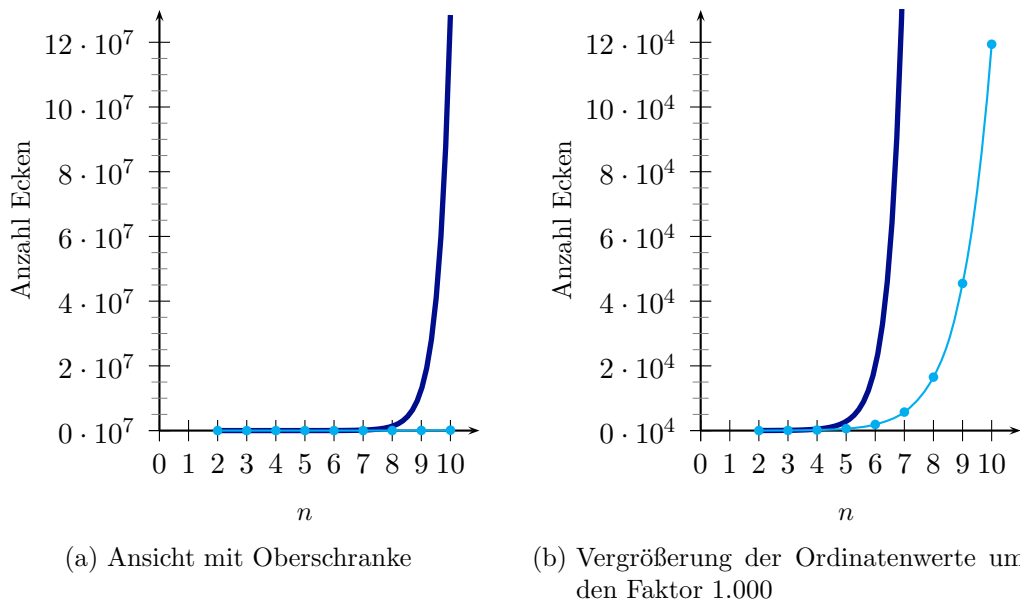


Abbildung 1.21: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Restriktionszahl  $m = 50$  unter Variation der Dimension  $n$

Gehen wir analog für die Verteilungsparameter  $k = 1$  und  $k = 10$  vor, so ergeben sich ähnliche Graphiken. Man beachte jedoch, dass hier für eine Erkennbarkeit der empirischen Ergebnisse die Ordinatenwerte in den rechten Teilen der Abbildungen sogar um den Faktor 3.300 bzw. 180.000 vergrößert wurden. Als Hintergrund für die steigenden Werte der Vergrößerungsfaktoren ist die Beobachtung aufführbar, dass die empirischen Ergebnisse durch die erhöhte Redundanzwahrscheinlichkeit für steigendes  $k$  abnehmen, die Obergrenzen dann allerdings – zumindest in dem hier betrachteten Parameterbereich – zunehmen.

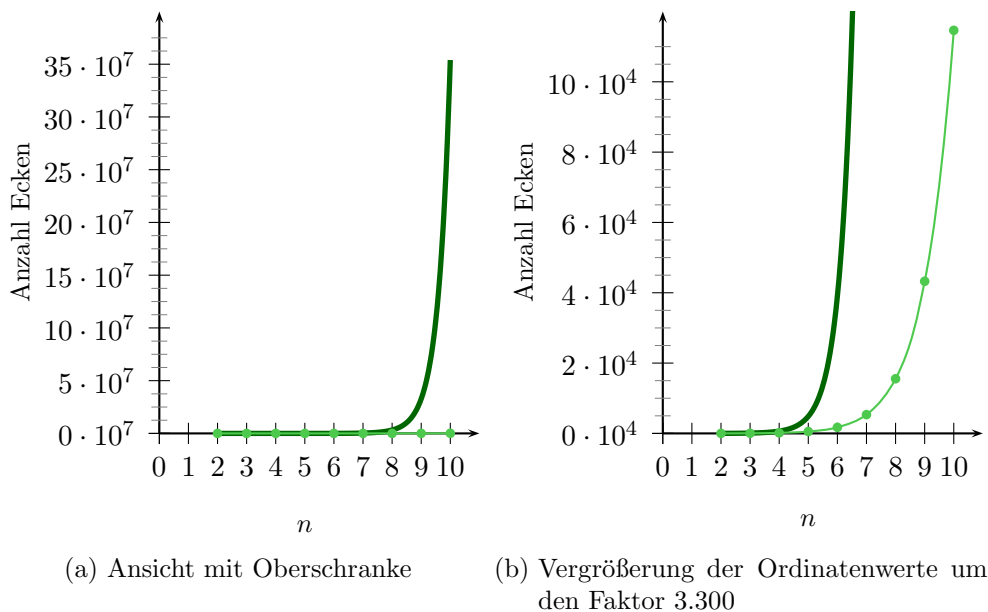
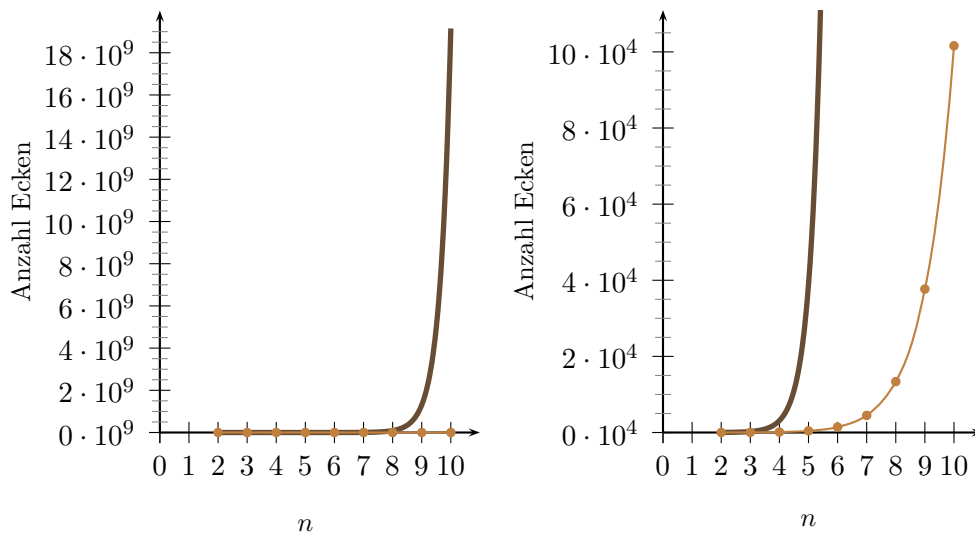


Abbildung 1.22: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Restriktionszahl  $m = 50$  unter Variation der Dimension  $n$





(a) Ansicht mit Obergrenze (b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 180.000

Abbildung 1.23: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Restriktionszahl  $m = 50$  unter Variation der Dimension  $n$

Betrachten wir die entsprechenden Graphiken zu unserer Alternativfestlegung der Parameter, so ergeben sich sehr ähnliche Kurvenverläufe, die uns keine neuen Erkenntnisse liefern. Die entsprechenden Abbildungen wurden daher in den Anhang B.1 ab Seite 183 ausgelagert. Einzig auffällig ist, dass aufgrund der höheren Restriktionszahl wesentlich geringere Vergrößerungsfaktoren zur Darstellung der empirischen Kurvenverläufe in Relation zu den Graphiken mit Komplettsicht der Obergrenzenkurve von Nöten waren. Es deutet sich also auch hier an, dass die Obergrenzen – zumindest relativ betrachtet – bei höherem  $m$  schärfer werden.

*Bemerkung 1.16.* Neben den bereits oben erwähnten Arbeiten von Borgwardt und Buchta, sollte an dieser Stelle noch eine Reihe weiterer Mathematiker erwähnt werden, die sich mit erwarteten Ecken- bzw. Facettenzahlen beschäftigten: Frühe Ergebnisse stammen von Rényi und Sulanke. Sie analysierten ausführlich in [RS63] und [RS64] das asymptotische Verhalten ( $m \rightarrow \infty$ ,  $n$  fest) der erwarteten Facettenzahl für die konvexe Hülle aus  $m$  Punkten im zweidimensionalen Raum. Efron untersuchte in [Efr65] vor allem Problemstellungen im dreidimensionalen Raum. Dabei betrachtete er neben der Gleichverteilung der Punkte in einem Kreis bzw. Kugel auch weitere Verteilungen, wie z.B. die Normalverteilung oder die Gleichverteilung in einer Ellipse bzw. Ellipsoid. Carnal ging in seiner Arbeit [Car70] von rotationssymmetrisch erzeugten Punkten sowohl in der (unbeschränkten) Ebene als auch im Einheitskreis aus. Später wurden auch weitere mehrdimensionale Ergebnisse geliefert: Hier ist die Arbeit von Dwyer [Dwy91] nennenswert, der drei Arten von rotationssymmetrischen Verteilungen betrachtet. Küfer ging in [Küf92] dazu über, sich im asymptotischen Fall mit Varianzen von additiven Größen zu beschäftigen, zu denen auch die Facettenzahl unseres dualen Polytops gehört. Neuere Ergebnisse stammen z.B. von Reitzner [Rei08], der in erster Linie asymptotische Ergebnisse bei Gleichverteilung der Punkte in beliebigen glatten Körpern lieferte, und von Cowan [Cow10], der die Resultate von Buchta [Buc05] und Efron [Efr65] sowie die Integrationstechnik von Rényi und Sulanke aus [RS63] und [RS64] unter einer passenden Modifikation miteinander kombiniert.



## Kapitel 2

# Der Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur

Bereits im Jahre 1970 veröffentlichten Chand und Kapur in ihrer Arbeit „An Algorithm for Convex Polytopes“ (siehe [CK70]) das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der konvexen Hülle einer Punktmenge. Es war eines der ersten Verfahren überhaupt, das sich nicht bei der Bestimmung der konvexen Hülle oder beim verwandten Eckenenumerationsproblem auf den zweidimensionalen Raum beschränkte, sondern beliebige Dimensionen zuließ. Swart analysierte den Algorithmus in seiner Arbeit „Finding the Convex Hull Facet by Facet“ (siehe [Swa85]) im Jahre 1985 und kam zum Ergebnis, dass der Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur bezüglich seiner Worst-Case-Komplexität das bis dahin beste Verfahren darstellte. Mit dem sogenannten Weg-Werf-Prinzip von Akl und Toussaint (siehe [AT78]) sowie später von Devroye (siehe [Dev81]) konnte der Gift-Wrapping-Algorithmus weiter verbessert werden und wird in dieser Arbeit „beschleunigter Gift-Wrapping-Algorithmus“ genannt. In den Veröffentlichungen von Borgwardt (siehe [Bor93] und [Bor97]) wurde der Gift-Wrapping-Algorithmus zusammen mit dem Weg-Werf-Prinzip probabilistisch analysiert.

Zunächst wollen wir in den Abschnitten 2.1 und 2.2 den Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur vorstellen und in die primale Sichtweise übertragen. Abschnitt 2.3 widmet sich einer genaueren Komplexitätsanalyse der primalen Algorithmusversion. In einem Einschub (Abschnitt 2.4) wird anschließend die vorher erwähnte Beschleunigung beider Verfahrensvarianten vorgenommen. Dabei werden die bereits von Borgwardt gewonnenen probabilistischen Ergebnisse der Sichtweise entsprechend wiedergegeben. Des Weiteren wollen wir hier Borgwardts Obergrenzen aus der Average-Case-Analyse mittels empirischer Testläufe bestätigen.

### 2.1 Der einfache Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur

Da Chand und Kapur das Enthaltensein des Nullpunktes in der Punktmenge nicht forderten, wird zunächst von der Problemstellung ( $P3$ ) ausgegangen. Die oben angesprochene Anpassung an ( $P1$ ) erfolgt dann in Abschnitt 2.2.

Zu Beginn führen wir einige Begriffe ein, die in der Terminologie für Polyeder gebräuchlich sind.

**Definition 2.1.** Wir nennen eine Facette ( $(n - 1)$ -dimensionale Seitenfläche) des Polytops  $\bar{Y} := \text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  auch **Randsimplex**. Die  $(n - 2)$ -dimensionalen Seitenflächen heißen auch **Randsimplexseiten**.

*Bemerkung 2.2.* Aufgrund der (fast sicheren) Erfüllung der Nichtentartungsbedingung (siehe Definition 1.6, Seite 28) in unserem stochastischen Modell sind die Facetten von  $\bar{Y}$  Simplexes der Form  $\text{KH}(a_{\Delta_1}, \dots, a_{\Delta^n})$  (daher auch der Name Randsimplex). Weiter enthält jede Facette des Polytops  $\bar{Y}$  genau  $n$  Randsimplexseiten  $\text{KH}(a_{\Delta_1}, \dots, a_{\Delta^{i-1}}, a_{\Delta^{i+1}}, \dots, a_{\Delta^n})$ .

Da bei der Ausführung des Algorithmus die Randsimplexseiten verschiedene Zustände annehmen werden, definieren wir weiter:

**Definition 2.3.** Jede Randsimplexseite besitzt genau zwei **Ergänzungspunkte**  $a_{i_1}$  und  $a_{i_2}$ . Eine Randsimplexseite heißt (im Algorithmusverlauf) **ungesättigt**, wenn nur einer der beiden Punkte bekannt ist. Sie wird **gesättigt** genannt, wenn beide Ergänzungspunkte bereits ermittelt wurden.

Die Idee des Gift-Wrapping-Verfahrens besteht darin, während einer Wanderung über der Oberfläche des Polytops jede Facette der konvexen Hülle zu durchlaufen. Dabei wird der aktuelle Randsimplex über eine seiner  $n$  Seiten verlassen und somit in eine benachbarte Facette eingetreten. Diese Vorgehensweise ähnelt der Technik ein Geschenk mit Papier einzupacken. Zunächst liegt das Papier auf einer Geschenkseite. Dies entspricht dem aktuellen Randsimplex. Anschließend wird das Papier auf der Kante (Randsimplexseite) des Geschenks soweit abgeknickt, bis es an einer anderen Geschenkseite (neuer Randsimplex) anliegt. Auf eine solche Interpretation kann der Name „Gift-Wrapping“ zurückgeführt werden.

Wir wollen nun den einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur, angelehnt an die Formulierung von Borgwardt in [Bor97, S. 88+89], wiedergeben:

**Algorithmus 2.4** (Der einfache Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur).

*Initialisierung:*

1. Bestimme wie folgt eine Startfacette von  $\bar{Y} := \text{KH}(a_1, \dots, a_m)$ :
  - a) Ergänze die Menge  $\{a_1, \dots, a_m\}$  mit  $\{\rho e_1, \dots, \rho e_n\}$ . Dabei sei  $\rho > \|a_i\|_1$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Diese  $n$  Hilfsvektoren ergeben eine Facette  $\text{KH}(\rho e_1, \dots, \rho e_n)$  von  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m, \rho e_1, \dots, \rho e_n)$ .
  - b) Entferne sukzessive alle Vektoren  $\rho e_i$  mittels Pivotschritte aus der Basis. Verwende dabei als Ersatzpunkte nur geeignete Vektoren aus der Originalpunktmenge. Nach  $n$  solchen Austauschschritten sind wir an einer Facette von  $\bar{Y}$  gelangt.
2. Speichere den gefundenen Randsimplex in einer Datei, welche sowohl der Wiedergabe des entstehenden Suchbaumes als auch als Endausgabedatei dient.
3. Speichere alle Randsimplexseiten der Startfacette zusammen mit ihren Ergänzungspunkten in einer speziellen Baumstruktur für ungesättigte Randsimplexseiten. Aus Effizienzgründen werde die Speicherung dabei gemäß eines lexikographisch organisierten Binärbaumes vorgenommen.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Wie ein Baum dieser Art realisiert werden kann, wird u.a. in [Wör06] detailliert beschrieben.

*Typischer Schritt:*

1. Suche eine ungesättigte Randsimplexseite der aktuellen Facette. Falls eine existiert, gehe direkt zu Schritt 4.
2. Führe Rückwärtsschritte bezüglich des Baumes der bereits durchlaufenen Randsimplizes mit Hilfe unserer Facettendatei durch, bis man eine Facette erreicht mit mindestens einer ungesättigten Randsimplexseite. Sobald dies gelingt, gehe direkt zu Schritt 4.
3. Stoppe den Algorithmus, da der Baum für ungesättigte Randsimplexseiten nun leer ist und somit alle Facetten gefunden wurden.
4. Verlasse die aktuelle Facette über eine ungesättigte Randsimplexseite nach Bestimmung des zweiten Ergänzungspunktes. D.h. führe einen Vorwärtsschritt durch zum Eintreten in eine neue Facette. Speichere den neuen Randsimplex in unserer Facettendatei.
5. Bestimme alle Randsimplexseiten der aktuellen Facette. Für jede prüfe, ob diese bereits in unserem Baum für ungesättigte Randsimplexseiten enthalten ist.
  - a) Falls ja, lösche die Randsimplexseite, da sie nun gesättigt ist.
  - b) Andernfalls speichere die Randsimplexseite im Binärbaum.
6. Gehe zurück zu Schritt 1.

Der Korrektheitsbeweis dieser Vorgehensweise zur Bestimmung aller Facetten des Polytops  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  kann in [Bor97, S. 90] nachgelesen werden.

Nach [Bor97, S. 91] beträgt die maximale Gesamtkomplexität des obigen Verfahrens

$$\mathcal{O}((\#F + n)(nm + n^2 \ln m)),$$

wobei  $\#F$  die Zahl der Facetten wiedergibt. Probabilistisch bleibt hier einzig diese Größe zu untersuchen. Addieren wir Borgwardts Oberschranken für die erwartete Anzahl der Facetten 1. und 2. Art bei beliebigem Verteilungsparameter  $k$  (siehe Formel (1.31) bzw. (1.30) aus Abschnitt 1.8), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\#F) &= \mathbb{E}(\#F_1) + \mathbb{E}(\#F_2) \leq \\ &\leq 2\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (n+1+2k)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left( \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+1+\frac{n+1}{2})} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot \\ &\quad \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{m+\frac{2k+2}{n+1+2k}}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} + \binom{m}{n} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{m-\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot \frac{1}{m-\frac{n-1}{n+1+2k}} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Im nachfolgenden Abschnitt werden wir den einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus in unsere primale Sichtweise überführen. Dabei wird sich bezüglich der Gesamtkomplexität das Verfahren verbessern, da wir in dieser Problemstellung nur noch am Analogon zu den Facetten 1. Art, also an den Ecken von  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$ , interessiert sind.

## 2.2 Der einfache Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation

Um den einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus an die von uns vereinbarte Problemstellung, der Enumeration aller Ecken des Polyeders  $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  (siehe Abschnitt 1.4), anzupassen, treffen wir zunächst einige Vorbereitungen zur Neuformulierung des Verfahrens. Wir übertragen die Begriffe Ergänzungspunkte und Gesättigkeit bzw. Ungesättigkeit, welche bisher ausschließlich hinsichtlich Randsimplexseiten verwendet wurden, auf Kanten. Da an den Kanten eines volldimensionalen Polyeders  $n - 1$  Restriktionen mit linear unabhängigen Restriktionsvektoren straff (aktiv) sind und das Straffsetzen (Aktivieren) einer weiteren geeigneten Restriktion zu einer Ecke führt, ist die Übertragung der Begriffe wie folgt möglich:

**Definition 2.5.** Wird eine Kante durch Straffsetzen einer weiteren (geeigneten) Restriktion  $a_i^T x \leq 1$  zu einer Ecke geführt, so nennen wir diese Ungleichung **Ergänzungsrestriktion**. Eine Kante wird **ungesättigt** genannt, wenn nur eine Ergänzungsrestriktion bekannt ist. Sie heiße **gesättigt**, wenn bereits zwei Ergänzungsrestriktionen ermittelt wurden.

Man beachte, dass Kanten nicht unbedingt zwei Ergänzungsrestriktionen besitzen müssen, wie am Beispiel von extremalen freien Richtungen zu sehen ist. Daher erweitern wir hier den Begriff der Gesättigkeit:

**Definition 2.6.** Wir nennen eine Kante auch dann **gesättigt**, wenn ihre Unbeschränktheit festgestellt wurde.

Mit Hilfe dieser Definitionen wollen wir nun den einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus in die primale Sichtweise umformulieren:

**Algorithmus 2.7** (Der einfache Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation).

*Initialisierung:*

1. Bestimme eine Ecke des Polyeders  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq 1 \forall i = 1, \dots, m\}$  mit Hilfe der Phase I des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus. Gehe dazu wie folgt vor:<sup>2</sup>

- a) Stelle das Starttableau des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus zum Ungleichungssystem

$$Ax \leq \mathbf{1}$$

auf. D.h. führe Hilfsvektoren  $-e_1, \dots, -e_n$  ein und bilde mit diesen Vektoren als Basis das Tableau. Auf eine Zielfunktion im Simplextableau kann hier verzichtet werden.

- b) Entferne durch Pivotschritte sukzessive  $-e_1, \dots, -e_n$  aus der Basis. Verwende dabei als Ersatzpunkte mittels Anwendung von Quotiententests geeignete Vektoren aus  $\{a_1, \dots, a_m\}$ . Nach  $n$  solchen Austauschschritten sind wir an einer Ecke von  $X$  angelangt.

---

<sup>2</sup>Genauer gesagt, handelt es beim Vorgehen in Schritt 1. der Initialisierungsphase um eine vereinfachte Form der Phase I(a) des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus. Eine ausführliche Beschreibung dieser Phase in einem allgemeineren Kontext ist im Lehrbuch von Borgwardt [Bor01, S. 94–105] zu finden.

2. Speichere die Basis und die Koordinaten der gefundenen Startecke in einer Datei, welche der Wiedergabe des entstehenden Suchbaumes und als Endausgabedatei dient.
3. Speichere alle Kanten (in ihrer Basisdarstellung) der Startecke zusammen mit ihren Ergänzungsrestriktionen in einer Baumstruktur für ungesättigte Kanten. Aus Effizienzgründen werde die Speicherung dabei gemäß eines lexikographisch organisierten Binärbaumes vorgenommen.

*Typischer Schritt:*

1. Suche eine ungesättigte Kante der aktuellen Ecke. Falls eine existiert, gehe direkt zu Schritt 4.
2. Führe Rückwärtsschritte bezüglich des Baumes der bereits durchlaufenen Ecken durch, bis man eine Ecke mit mindestens einer ungesättigten Kante erreicht. Falls dies gelingt, gehe direkt zu Schritt 4.
3. Stoppe den Algorithmus, da der Baum für ungesättigte Kanten nun leer ist und somit alle Ecken gefunden wurden.
4. Wähle eine ungesättigte Kante der aktuellen Ecke.
  - a) Falls es sich dabei um eine freie Richtung handelt, lösche diese aus dem Binärbaum, da sie nun nach unserer Definition als gesättigt eingestuft wird, und gehe zurück zu Schritt 1.
  - b) Andernfalls verlasse die aktuelle Ecke über eine ungesättigte Kante nach Bestimmung der zweiten Ergänzungsrestriktion. D.h. führe einen Vorwärtsschritt aus zum Betreten einer neuen Ecke. Speichere diese zusammen mit ihrer Basis in unserer Datei für die bereits besuchten Ecken.
5. Bestimme alle Kanten der aktuellen Ecke. Für jede prüfe, ob diese bereits in unserem Baum für ungesättigte Randsimplexseiten enthalten ist.
  - a) Falls dies der Fall ist, lösche die Kante, da sie nun gesättigt ist.
  - b) Sonst speichere die Kante (in Basisdarstellung) im Binärbaum.
6. Gehe zurück zu Schritt 1.

Eine bildliche Darstellung der Vorgehensweise des primalen Gift-Wrapping-Algorithmus findet sich im Anhang C.1 ab Seite 224. Hier wird ein dreidimensionales Polytop, das aus zehn Restriktionshyperebenen hervorgeht, betrachtet und an diesem durch farbliche Markierungen der Verlauf des Verfahrens veranschaulicht.

In Analogie zur dualen Interpretation lässt sich hier eine Worst-Case-Komplexität von

$$\mathcal{O}((\#V + n)(nm + n^2 \ln m)) \quad (2.2)$$

festhalten, wobei nun statt der Facettenzahl mit  $\#V$  die Zahl der Ecken des Polyeders  $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  zu berücksichtigen ist. Borgwardt ging allerdings in seiner Arbeit

[Bor97] zur Bestimmung des maximalen Aufwandes davon aus, dass das Prinzip des revidierten Simplexalgorithmus angewendet wird, d.h. es werden keine vollständigen Simplextableaus berechnet, sondern lediglich bei einem Pivotschritt  $A_{\Delta}^{-1}$  aktualisiert und daraus alle nötigen Daten bestimmt. Für eine einheitliche Behandlung aller Konvexe-Hülle-Algorithmen in dieser Arbeit wollen wir nun im nachfolgenden Abschnitt die Worst-Case-Komplexität der primalen Version des Gift-Wrapping-Verfahrens unter Verwendung vollständiger Tableaus genauer analysieren.

## 2.3 Komplexitätsanalyse der primalen Version des einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus

In der Initialisierungsphase wird die Komplexität von Schritt 1, dem Auffinden einer Ecke, dominiert. Da  $0 \in X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  gilt, reicht es zur Bestimmung einer Ecke des Polyeders  $X$  aus, die Phase I(a) des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus durchzuführen, d.h. es müssen ausgehend vom Tableau zur Basis  $-e_1, \dots, -e_n$  lediglich sukzessive diese  $n$  Hilfsrestriktionsvektoren durch jeweils einen Pivotschritt aus der Basis entfernt werden. Für die Komplexität bedeutet dies

- den Aufwand von  $\mathcal{O}(mn)$  für das Aufstellen des Starttableaus (vernachlässigbar) und
- die Komplexität von  $\mathcal{O}(mn^2)$  für das Durchführen von  $n$  Pivotschritten mit jeweils einem Aufwand von  $\mathcal{O}(mn)$ .

Vor der Ausführung eines Pivotschrittes ist allerdings ein Quotiententest durchzuführen. Dazu ist jeweils die Berechnung von bis zu  $m$  Quotienten erforderlich.<sup>3</sup> Bei  $n$  Pivotschritten ergibt dies eine Gesamtkomplexität von  $\mathcal{O}(mn)$ .

Zuletzt werden im dritten Schritt  $n$  ungesättigte Kanten gespeichert. Da hierzu ein lexikographisch organisierter Binärbaum vorgesehen ist, können die Kanten dort mit jeweils einem Aufwand von  $\mathcal{O}(n \log_2(m))$  eingefügt werden.

Insgesamt erhalten wir somit aus der Initialisierungsphase des einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Version den nachfolgenden Aufwandsterm:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\underbrace{mn}_{\text{Aufstellen des Starttableaus}} + \underbrace{n}_{\text{Anzahl Pivotschritte}} (\underbrace{mn}_{\text{Aufwand eines Pivotschrittes}} + \underbrace{m}_{\text{Quotienten}}) + \underbrace{n^2 \log_2(m)}_{\text{Einfügeaufwand}}) = \\ = \mathcal{O}(mn^2 + 2mn + n^2 \log_2(m)) = \mathcal{O}(mn^2) \quad (2.3) \end{aligned}$$

In der Hauptphase („Typischer Schritt“) werden startend von der Ausgangsecke  $\#V - 1$  Vorwärtsschritte durchgeführt. Dabei ist jeweils die Berechnung eines kompletten Tableaus mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(mn)$  erforderlich. An jeder Ecke sind maximal  $n$  Quotiententests durchzuführen, wobei jeweils bis zu  $m - n$  Quotienten bestimmt werden müssen. Die  $n$  Kanten an jeder Ecke sind jeweils in unserem lexikographisch organisierten Binärbaum zu suchen und

---

<sup>3</sup>Da das Starttableau mit den Hilfsvektoren  $-e_1, \dots, -e_n$  gebildet wird, reicht es in der Initialisierungsphase nicht nur  $m - n$  Quotienten zu bestimmen.



gegebenfalls dort einzufügen oder zu löschen. Aufgrund der Struktur des Speicherbaumes ist dies jeweils mit Aufwand  $\mathcal{O}(n \log_2(m))$  durchführbar.

Da maximal so viele Rückwärtsschritte wie Vorwärtsschritte stattfinden, können diese für die Komplexität in Groß-O-Notation vernachlässigt werden. Insgesamt ergibt sich also folgender Maximalaufwand:

$$\mathcal{O}(\underbrace{mn^2 + 2mn + n^2 \log_2(m)}_{\text{Initialisierung}} + \underbrace{(\#V - 1)(mn + n \cdot (m - n + n \log_2(m))) + n(m - n)}_{\text{Hauptphase}})$$

Hierbei beachte man die Sonderrolle der Startecke: Während das Pivotsieren zu dieser sowie die Speicherung der zugehörigen Kanten bereits in der Initialisierungsphase erledigt werden, finden die Quotiententests zu den Nachbarecken erst in der Hauptphase statt. Dies erklärt den Ursprung des Terms  $n(m - n)$  am Ende obigen Komplexitätsausdrucks.

Nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Zusammensetzung des Worst-Case-Aufwandes:

KOMPLEXITÄT IN $\mathcal{O}$ -NOTATION	ERLÄUTERUNG
$mn^2 + 2mn + n^2 \log_2(m)$	Komplexität der Initialisierungsphase
$(\#V - 1)$	Anzahl Vorwärtsschritte
$mn$	Aufwand eines Pivotschrittes
$n(m - n)$	Anzahl zu berechnender Quotienten pro Ecke
$n^2 \log_2(m)$	Aufwand für Baumoperationen pro Ecke

Tabelle 2.1: Übersicht zur Komplexität des einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation

Die Gesamtkomplexität lässt sich zu nachfolgendem Ausdruck vereinfachen:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(mn^2 + 3mn - n^2 + n^2 \log_2(m) + (\#V - 1)(2mn - n^2 + n^2 \log_2(m))) &= \\ &= \mathcal{O}(mn^2 + \#V(mn + n^2 \log_2(m))) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für die Average-Case-Analyse der Gesamtkomplexität bleibt hier lediglich das Resultat aus Abschnitt 1.8 zur erwarteten Eckenzahl zu erwähnen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V) = \mathbb{E}_{m,n}^k(\#F_1) \leq \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{n!}}{n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left( \frac{\left(m + \frac{2+2k}{n+1+2k}\right) \cdot \Gamma\left(k + 1 + \frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi} \cdot (n-1) \cdot \Gamma\left(k + 1 + \frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot (n+1+2k)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.4 Einschub: Beschleunigung des Gift-Wrapping-Algorithmus

Für den Gift-Wrapping-Algorithmus wurde eine Möglichkeit zur Beschleunigung gefunden, die Borgwardt ebenfalls in seiner Arbeit [Bor07] präsentiert und dort auch probabilistisch analysiert. Das Beschleunigungsprinzip lässt sich allerdings auch auf das Verfahren von Avis und Fukuda sowie auf den Shelling-Algorithmus übertragen. Daher werden wir in diesem Einschub nur der Vollständigkeit halber die beschleunigten Varianten des primalen und des dualen Gift-Wrapping-Verfahrens vorstellen. Anschließend werden hierzu noch empirische Analysen durchgeführt.

### Eine Beschleunigung der Version von Chand und Kapur

Die angekündigte Beschleunigung des Gift-Wrapping-Algorithmus von Chand und Kapur wird erreicht, indem man den Rechenaufwand zum Auffinden eines Ergänzungspunktes reduziert. Wie dies möglich ist, soll nun dargestellt werden.

Für eine einfachere Beschreibbarkeit des Beschleunigungsprinzips werde im Folgenden mit  $h(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  die Höhe einer Facette  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  bezeichnet. D.h. diese Größe gibt den Abstand der Hyperebene  $H(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  zum Ursprung an. Damit lässt sich als Grundlage für das Beschleunigungsverfahren nachfolgendes Lemma formulieren:

#### Lemma 2.8.

- a) Falls für einen Simplex  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^i}, \dots, a_{\Delta^n})$  und für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Beziehung  $\|a_{\Delta^i}\| < \bar{h}$  gilt, so ist

$$h(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n}) < \bar{h}.$$

- b) Alle Simplizes mit  $h(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n}) \geq \bar{h}$  werden nur von Punkten  $a_{\Delta^i}$  erzeugt, für die  $\|a_{\Delta^i}\| \geq \bar{h}$  gilt.

- c) Sei  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  eine Facette 1. Art von  $\text{KH}(a_1, \dots, a_\ell)$  mit  $\ell < m$  und seien  $\|a_{\ell+1}\|, \dots, \|a_m\| < h(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$ . Dann handelt es sich bei  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  auch um einen Randsimplex von  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$ .

- d) Falls das Quotientenkriterium eine neue Facette 1. Art für  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  nach Auswertung der Punkte  $a_1, \dots, a_\ell$  prophezeit und gleichzeitig

$$\|a_{\ell+1}\|, \dots, \|a_m\| < h(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$$

gilt, so ist die Vorhersage korrekt und  $a_{\ell+1}, \dots, a_m$  müssen nicht weiter überprüft werden.

Ein Beweis des Lemmas findet sich in [Bor97, S. 92].

Durch diese Aussagen wird angeregt, die Punkte nach ihrer euklidischen Norm in absteigender Reihenfolge zu sortieren. Anschließend wenden wir zum Auffinden des Ergänzungspunktes das Quotientenkriterium auf die Punkte in unserer sortierten Reihenfolge (absteigend nach

Abstand zum Ursprung) an. Sobald die Norm der Punkte kleiner wird als die Höhe des bestehenden Randsimplex, können wir stoppen, da der Randsimplex nun fixiert ist. Die verbleibenden Quotienten werden somit überflüssig. Da es nicht unbedingt erforderlich ist alle Punkte zu sortieren, können wir (zur weiteren Beschleunigung) einen heap<sup>4</sup> für dynamische Sortierung gemäß der euklidischen Norm implementieren. Damit sortieren wir nur noch so weit wie nötig.

Mit diesen Erkenntnissen können wir nun eine beschleunigte Version des Gift-Wrapping-Algorithmus angeben. Um nicht unnötig in Wiederholungen zu verharren, verweisen wir weitgehend auf den einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus und beschreiben nur die Änderungen in der beschleunigten Variante genauer.

**Algorithmus 2.9** (Der beschleunigte Gift-Wrapping-Algorithmus).

*Initialisierung:*

Implementiere einen heap zur dynamischen Sortierung der Punkte gemäß deren euklidischer Länge in absteigender Reihenfolge und führe die Schritte der Initialisierungsphase des Algorithmus 2.4 aus.

*Typischer Schritt:*

Führe die Hauptphase des Algorithmus 2.4 aus. Ersetze aber den Schritt 4 durch:

4. Verlasse die aktuelle Facette  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^i}, \dots, a_{\Delta^n})$  über eine ungesättigte Randsimplexseite  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{i-1}}, a_{\Delta^{i+1}}, \dots, a_{\Delta^n})$  nach Bestimmung des zweiten Ergänzungspunktes  $a_{i_2}$ . Führe dazu für einen Laufindex  $j$  startend von  $j = 1$  bis maximal  $j = m$  folgende Schritte aus:
  - a) Bestimme den  $j$ . längsten Vektor entweder aus der Liste der zu sortierenden Punkte oder durch Benutzung des heaps. Nenne diesen Vektor für die folgenden Schritte  $a_{\bar{j}}$ . Wiederhole den Schritt a) mit  $j = j+1$ , falls  $a_{\bar{j}}$  einen der Erzeuger der aktuellen Facette darstellt.
  - b) Wende das Quotientenkriterium bezüglich der  $j$  längsten Vektoren an und bestimme den vorläufigen Ergänzungspunkt  $a_{i_2}$ .
    - i. Falls es sich bei  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{i-1}}, a_{i_2}, a_{\Delta^{i+1}}, \dots, a_{\Delta^n})$  um eine Facette 2. Art handelt und  $j < m$  ist, setze  $j = j + 1$  und gehe zurück zu a).
    - ii. Falls  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{i-1}}, a_{i_2}, a_{\Delta^{i+1}}, \dots, a_{\Delta^n})$  eine Facette 1. Art darstellt, dann prüfe, ob
$$h(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^{i-1}}, a_{i_2}, a_{\Delta^{i+1}}, \dots, a_{\Delta^n}) \leq \|a_{\bar{j}}\|$$
gilt. Falls ja und  $j < m$  ist, setze  $j = j + 1$  und gehe zurück zu a).
    - iii. Andernfalls stellt  $a_{i_2}$  den zweiten Ergänzungspunkt dar.

Speichere den neuen Randsimplex in unserer Facettendatei.

---

<sup>4</sup>Bei einem heap handelt es sich um eine abstrakte Datenstruktur, welche der Speicherung von Mengen dient und meist in Form eines Baumes vorzufinden ist. Ihr Einsatz ist besonders dann geeignet, wenn Elemente schnell in Reihenfolge von zugeordneten Prioritäten wiederzugeben sind. Vgl. dazu [Eng88].

Der Gesamtaufwand der beschleunigten Variante des Gift-Wrapping-Algorithmus beträgt (siehe [Bor97, S. 94]):

$$\mathcal{O}\left(n(n^2 + mn + n^2 \ln m) + \sum_{f \in F_1} (n^2 + s(h_f)n + n^2 \ln m) + \sum_{f \in F_2} (n^2 + mn + n^2 \ln m) + m + (\ln m)s(\min^{\geq 0} h_F)\right) \quad (2.6)$$

Dabei bezeichnet  $h_f$  die Höhe der Facette  $f$  und  $s(h_f)$  die Anzahl der Punkte mit mindest so hoher euklidischer Länge, also

$$s(h_f) := \#\{i \in \{1, \dots, m\} \mid \|a_i\| \geq h_f\}.$$

$F_1$  gibt die Menge der Facetten 1. Art und  $F_2$  die Menge der Facetten 2. Art wieder. Des Weiteren wird zur Darstellung der Komplexität der Ausdruck  $\min^{\geq 0} h_F$  verwendet, welcher wie folgt definiert ist:

$$\min^{\geq 0} h_F := \begin{cases} \min_{f \in F_1} h_f, & \text{falls } F_2 = \emptyset \\ 0, & \text{falls } F_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad (2.7)$$

Diese Größe gibt somit für den Fall, dass keine Facetten 2. Art existieren, die kleinste auftretende Höhe der Randsimplizes wieder. Andernfalls wird sie auf null gesetzt.

Neben den in Abschnitt 2.1 dargestellten Ergebnissen bestimmte Borgwardt in seiner probabilistischen Analyse für die beschleunigte Version des Gift-Wrapping-Algorithmus noch folgende Erwartungswerte (siehe [Bor97, S. 102–105]):

$$\mathbb{E}_{m,n}^k \left( \sum_{f \in F_1} s(h_f) \right) \leq \left( \frac{m+1}{n-1} \right)^{1 + \frac{n-3-2k}{n+1+2k}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \sqrt{n!} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{n+1}{2} + k \right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\Gamma(k+2)\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left( \frac{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n+1}{2})}{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})} \right)^{\frac{2k+3-n}{n+1+2k}} \quad (2.8)$$

$$\mathbb{E}_{m,n}^k (s(\min^{\geq 0} h_F)) \leq m \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \ln m}{m-n} (n+1)(n+1+2k) \right)^{\frac{k+1}{\frac{n+1}{2}+k}} \cdot \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\Gamma(k+2)\Gamma(\frac{n}{2})} \quad \text{für } m \gg n \quad (2.9)$$

Wir wollen nun den beschleunigten Gift-Wrapping-Algorithmus auf unsere primale Problemstellung – der Enumeration aller Ecken des Polyeders  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  – anpassen. Dabei werden wir die Herleitung der Worst-Case-Komplexität konkretisieren und auf die hier dargestellten Ergebnisse aus der Erwartungswertuntersuchung zurückkommen.

## Der beschleunigte Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation

Mit Hilfe unserer Vorarbeiten aus dem ersten Teil dieses Einschubes und nachfolgendem Hinweis lässt sich das Beschleunigungsprinzip leicht in die primale Formulierung des Gift-Wrapping-Algorithmus integrieren.

*Hinweis.* Bezeichne im Folgenden  $x_\Delta$  für eine Menge  $\Delta = \{\Delta^1, \dots, \Delta^n\} \subseteq \{1, \dots, m\}$  die Basislösung zu den straffen Restriktionen mit den Indizes aus  $\Delta$ , so entspricht mit dieser Notation die Höhe  $h(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  aus dualer Sicht dem Wert  $\frac{1}{\|x_\Delta\|}$  in primaler Interpretation.

**Algorithmus 2.10** (Der beschleunigte Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Sichtweise).

*Initialisierung:*

Implementiere einen heap zur dynamischen Sortierung der Restriktionsvektoren gemäß deren euklidischer Länge in absteigender Reihenfolge und führe die Schritte der Initialisierungsphase aus Algorithmus 2.7 aus.

*Typischer Schritt:*

Führe die Hauptphase des Algorithmus 2.7 aus. Ersetze den Schritt 4 aber durch:

4. Wähle eine ungesättigte Kante der aktuellen Ecke  $x_\Delta$  mit  $\Delta = \{\Delta^1, \dots, \Delta^i, \dots, \Delta^n\}$ . O.B.d.A. werde entlang dieser Kantenrichtung die Restriktion mit dem Index  $\Delta^i$  gelockert. Zur Bestimmung der eventuell vorhandenen zweiten Ergänzungsrestriktion führe für einen Laufindex  $j$  startend von  $j = 1$  bis maximal  $j = m$  nachfolgende Schritte aus:
  - a) Bestimme den  $j$ . längsten Restriktionsvektor entweder aus der Liste der zu sortierenden Punkte oder durch Benutzung des heaps. Nenne diesen Vektor für die folgenden Schritte  $a_{\tilde{j}}$ . Wiederhole den Schritt a) mit  $j = j + 1$ , falls  $a_{\tilde{j}}$  sich in der Basis zur aktuellen Ecke befindet.
  - b) Wende das Quotientenkriterium bezüglich der  $j$  längsten Restriktionsvektoren an und bestimme damit die vorläufige Ergänzungsrestriktion  $a_{i_2}^T x \leq 1$ .
    - i. Falls dies aufgrund fehlender negativer Einträge in der entsprechenden Tableauzeile nicht möglich ist, prüfe, ob  $j = m$  ist.
      - $\alpha$ ) Falls  $j = m$  zutrifft, so handelt es sich um eine freie Richtung. Die Kante wird somit als gesättigt eingestuft und muss daher aus dem Baum für ungesättigte Kanten gelöscht werden. Gehe nun zurück zu Schritt 1.
      - $\beta$ ) Falls  $j < m$  ist, setze  $j = j + 1$  und gehe zurück zu a).
    - ii. Falls eine vorläufige Ergänzungsrestriktion  $a_{i_2}^T x \leq 1$  bestimmt werden konnte, prüfe, ob
$$\frac{1}{\|x_{\tilde{\Delta}}\|} \leq \|a_{\tilde{j}}\| \quad \text{für} \quad \tilde{\Delta} = \{\Delta^1, \dots, \Delta^{i-1}, i_2, \Delta^{i+1}, \dots, \Delta^n\}$$
ist.
      - $\alpha$ ) Falls dies gilt und dabei  $j < m$  ist, setze  $j = j + 1$  und gehe zurück zu a).
      - $\beta$ ) Andernfalls ist  $a_{i_2}^T x \leq 1$  nach Lemma 2.8 die gesuchte Ergänzungsrestriktion, da dann  $\frac{1}{\|x_{\tilde{\Delta}}\|} > \|a_i\| \forall i$  mit  $\|a_i\| < \|a_{\tilde{j}}\|$  gilt. Verlasse damit die aktuelle Ecke über die ungesättigte Kante mit einem Pivotschritt und speichere die neue Ecke mit ihrer Basis in die Datei für die bereits besuchten Ecken.

In analoger Weise wollen wir auch beim beschleunigten Gift-Wrapping-Algorithmus die Worst-Case-Komplexität – ohne Anwendung des Prinzips des revidierten Simplexalgorithmus – genauer erläutern. Sei dazu im Folgenden

- $\#\tilde{K}$  die Anzahl der extremalen freien Richtungen,
- $V$  die Menge aller Ecken und
- $h_e = \frac{1}{\|e\|}$  für  $e \in V$ .

In Analogie zu (2.7) sei weiter  $\min^{\geq 0} h_V$  wie folgt definiert:

$$\min^{\geq 0} h_V := \begin{cases} \min_{e \in V} h_e, & \text{falls } \#\tilde{K} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Auch in der primalen Version des beschleunigten Gift-Wrapping-Algorithmus wird ein Heap zur dynamischen Sortierung von Punkten verwendet. Dessen Initialisierung ist mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(m)$  möglich. Die Heap-Operationen lassen sich mit Aufwand  $\mathcal{O}(\log_2(m))$  durchführen. Da  $s(\min^{\geq 0} h_V)$  die Zahl der zu sortierenden Punkte angibt, erhalten wir die Komplexität

$$\mathcal{O}(s(\min^{\geq 0} h_V) \cdot \log_2(m))$$

für alle Heap-Aktualisierungen bei der Ausführung des Algorithmus. Weil jede Ecke bis zu  $n$  Nachbarecken aufweisen kann und wir jetzt das Beschleunigungsprinzip anwenden, sind zur Durchführung aller Quotiententests in der Hauptphase des Algorithmus maximal

$$\mathcal{O}\left(\sum_{e \in V} s(h_e) \cdot n + \#\tilde{K} \cdot m\right) \quad (2.10)$$

Rechenoperationen nötig. Man beachte hier, dass durch den Ausdruck

$$\sum_{e \in V} s(h_e)$$

stets die Quotienten aus der Sicht der Ecken  $e$  gezählt werden, die sich als das Resultat des Quotiententests ergeben. Daher ist die vergebliche Suche nach einem negativen Pivotelement bei extremalen freien Richtungen gesondert zu berücksichtigen. Dies wird in (2.10) durch den Term

$$\#\tilde{K} \cdot m$$

wiedergegeben.

Da bei den Baumoperationen weiterhin die Argumentation aus Sicht einer Ausgangsecke bestehen bleiben kann, deckt der Komplexitätsterm für alle Baumoperationen

$$\underbrace{\mathcal{O}(n^2 \log_2(m))}_{\text{Initialisierung}} + \underbrace{(\#V - 1) \cdot n^2 \log_2(m)}_{\text{Hauptphase}} = \mathcal{O}(\#V \cdot n^2 \log_2(m))$$

auch entsprechenden Aufwand für unbeschränkte Kanten ab.

Ingesamt erhalten wir damit folgende Worst-Case-Komplexität:

$$\mathcal{O}\left(mn^2 + 2mn + n^2 \log_2(m) + (\#V - 1) \cdot (mn + n^2 \log_2(m)) + \sum_{e \in V} s(h_e) \cdot n + \#\tilde{K} \cdot m + m + s(\min^{\geq 0} h_V) \log_2(m)\right) \quad (2.11)$$

Nachfolgende Tabelle erläutert nochmals den Aufwandsterm:

KOMPLEXITÄT IN $\mathcal{O}$ -NOTATION	ERLÄUTERUNG
$mn^2 + 2mn + n^2 \log_2(m)$	Komplexität der Initialisierungsphase
$(\#V - 1)$	Anzahl der Vorwärtsschritte
$mn$	Aufwand eines Pivotschrittes
$n^2 \log_2(m)$	Aufwand für die Baumoperationen pro Ecke
$\sum_{e \in V} s(h_e) \cdot n$	Aufwand der beschleunigten Quotiententests für beschränkte Kanten
$\#\tilde{K} \cdot m$	Aufwand der Quotiententests für freie Richtungen
$m$	Initialisierung des Heaps
$s(\min^{\geq 0} h_V) \log_2(m)$	Aufwand aller Aktualisierungen des Heaps

Tabelle 2.2: Übersicht zur Komplexität des beschleunigten Gift-Wrapping-Algorithmus in primaler Interpretation

Da im Hinblick auf die Verwandtschaft der primalen und dualen Sichtweise die Beziehungen

- $\#V = \#F_1$ ,
- $\#\tilde{K} \leq \#F_2$ ,
- $s(h_e) = s(h_f)$  für jedes zusammengehörige Paar  $e \in V$  und  $f \in F_1$  sowie
- $\min^{\geq 0} h_V = \min^{\geq 0} h_F$

gelten, können wir die bereits aufgeführten Obergrenzen für die Erwartungswerte von

$$\#F_1, \#F_2, \sum_{f \in F_1} s(h_f) \text{ und } s(\min^{\geq 0} h_F)$$

(siehe Formel (1.31) bzw. (1.30) auf Seite 39 sowie Formel (2.8) und (2.9) auf Seite 60) für die Average-Case-Analyse der Komplexität des Algorithmus 2.10 übernehmen.

### Empirische Untersuchung des Beschleunigungseffekts

Wir wollen uns nun empirisch mit der Beschleunigung des Gift-Wrapping-Algorithmus auseinandersetzen. Dabei analysieren wir die für die Gesamtkomplexität relevanten Größen

$$\sum_{e \in V} s(h_e) \quad \text{und} \quad s(\min^{\geq 0} h_V).$$

Erstere gibt multipliziert mit  $n$  einen Maximalwert für die erwartete Anzahl der durchzuführenden Quotienten in der Hauptphase des beschleunigten, primalen Gift-Wrapping-Algorithmus an. Eine Obergrenze des Erwartungswertes dieser Zufallsgröße kennen wir bereits aus Formel (2.8). Diese soll nun mit der Simulation des realen Erwartungswertes, welche wir durch Mittelung der empirischen Resultate erhalten, verglichen werden.

Zunächst verwenden wir dazu unsere Standardfestlegung der Parameter bei Variation von  $m$ . Als Oberschranke ergibt sich für die Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  auf der Kugeloberfläche durch Einsetzen von  $n = 7$  und Grenzwertberechnung für  $k \rightarrow -1$  aus Formel (2.8) der Ausdruck:

$$12\sqrt{35}\pi^3 \cdot (m + 1)^2 \quad (2.12)$$

Für diese Verteilung ist eigentlich keine Beschleunigung möglich, da hier jeder Vektor mit Radius eins erzeugt wurde und daher das Kriterium

$$\frac{1}{\|x_{\tilde{\Delta}}\|} \leq \|a_j\| \quad \text{für} \quad \tilde{\Delta} = \{\Delta^1, \dots, \Delta^{i-1}, i_2, \Delta^{i+1}, \dots, \Delta^n\}$$

aus Schritt 4. b) ii. in Algorithmus 2.10 mit Wahrscheinlichkeit eins erfüllt wird. Somit kann der Quotiententest niemals vorzeitig abbrechen. Dennoch sollte auch hierfür die Oberschranke (2.8) Gültigkeit besitzen. In nachfolgender Graphik ist diese Funktion in dunkler Farbe eingezeichnet. Die Mittelung über die empirischen Resultate wird durch die hellrote Kurve wiedergegeben.

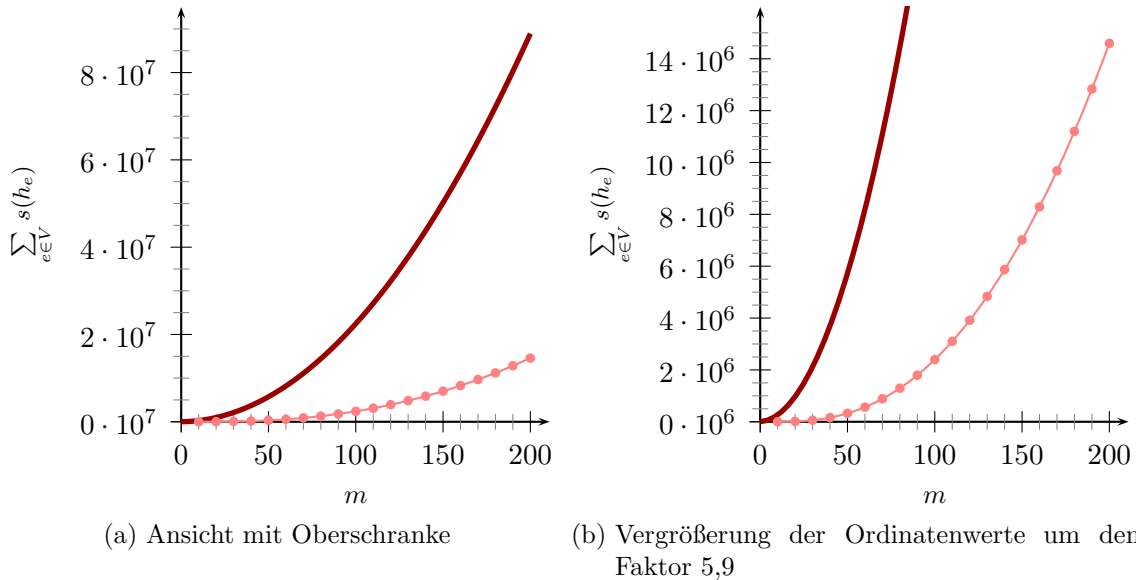


Abbildung 2.1: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und  $n = 7$  unter Variation von  $m$

Der Verlauf der empirischen Kurve ist wenig überraschend. Da aufgrund der Kugeloberflächenverteilung

$$h_e < 1 = \|a_i\| \quad \forall e \in V \quad \text{und} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

gilt, ist die betrachtete Summe über  $s(h_e)$  lediglich ein Vielfaches der Eckenzahl:

$$\sum_{e \in V} s(h_e) = \sum_{e \in V} m = \#V \cdot m$$

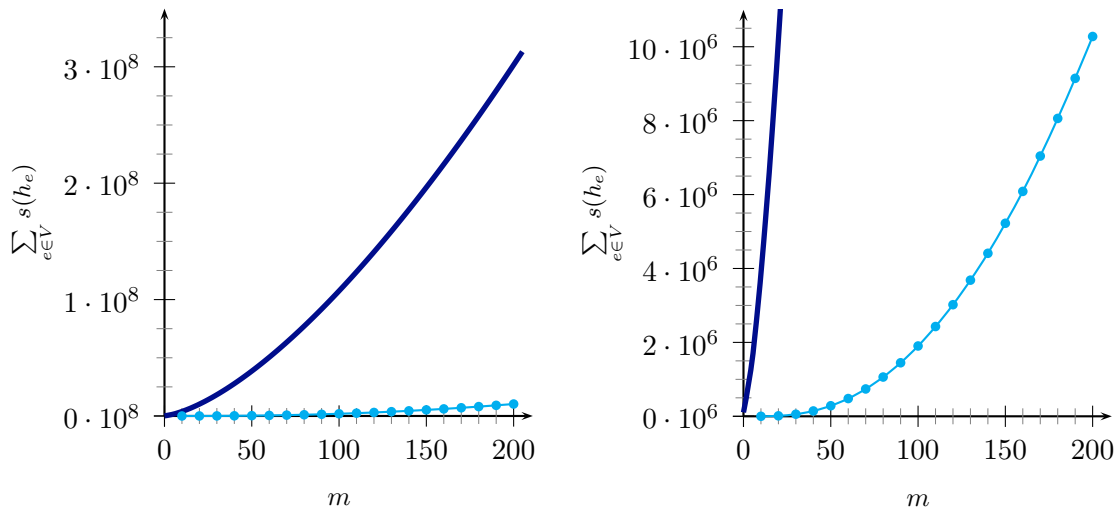
Die Oberschranke liegt hier immer klar über der empirischen Kurve. Sie weist – wie wir in (2.12) sehen – quadratisches Wachstum auf. Da die erwartete Eckenzahl für  $k \rightarrow -1$  langfristig



einen linearen Kurvenverlauf bei Variation der Restriktionszahl annimmt (siehe Abschnitt 1.8) und somit durch die Multiplikation mit  $m$  ebenfalls hier quadratisches Wachstum entsteht, gibt Borgwardts Oberschranke den tatsächlichen Wert für die betrachtete Summe sehr gut wieder (siehe auch Abbildung 2.8 auf Seite 70, in der die Ordinaten logarithmisch skaliert dargestellt werden).

Betrachten wir nun die Gleichverteilung der Restriktionsvektoren in der Kugel, so erhalten wir durch Einsetzen in Formel (2.8) die Oberschranke:

$$\frac{12544}{9} \sqrt{6} \pi^3 \cdot (m+1)^{\frac{3}{2}}$$



(a) Ansicht mit Oberschranke

(b) Vergrößerung um den Faktor 31,8

Abbildung 2.2: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und  $n = 7$  unter Variation von  $m$

Hier beobachten wir eine grundsätzliche Ähnlichkeit mit der Abbildung 2.1. Zwar können wir bei der Oberschranke (dunkle Farbe in der Graphik) keinen quadratischen Anstieg mehr feststellen, dennoch ist hier ein superlinearer Verlauf zu vermerken, der auch bei der empirischen Kurve (helle Farbe) in dem betrachteten Parameterbereich zu erkennen ist. Jedoch scheint die Oberschranke für diese Parameterwahl an Schärfe verloren zu haben. Durch die geringere Eckenzahl und der nun möglichen Einsparung an Quotienten fallen jetzt natürlich im Vergleich zur Oberflächenverteilung ( $k \rightarrow -1$ ) die empirischen Ergebnisse kleiner aus.

Bei den Verteilungsparametern  $k = 1$  und  $k = 10$  folgen die Oberschranken den beiden nachfolgenden Termen:

$$\frac{175}{32} \sqrt{35} \cdot 512^{\frac{4}{5}} \cdot 63^{\frac{1}{5}} \cdot 6^{\frac{4}{5}} \pi^3 (m+1)^{\frac{6}{5}} \approx 1.416.370,229 \cdot (m+1)^{\frac{6}{5}} \text{ bei } k = 1$$

$$\frac{31.213}{19.200} \sqrt{35} \cdot 6^{\frac{4}{7}} \pi^3 \cdot 67.108.864^{\frac{4}{7}} \cdot 5.014.575^{\frac{3}{7}} (m+1)^{\frac{3}{7}} \approx \\ \approx 18.329.488.455,9 \cdot (m+1)^{\frac{3}{7}} \text{ bei } k = 10$$

Die entsprechenden Graphiken sehen wie folgt aus:

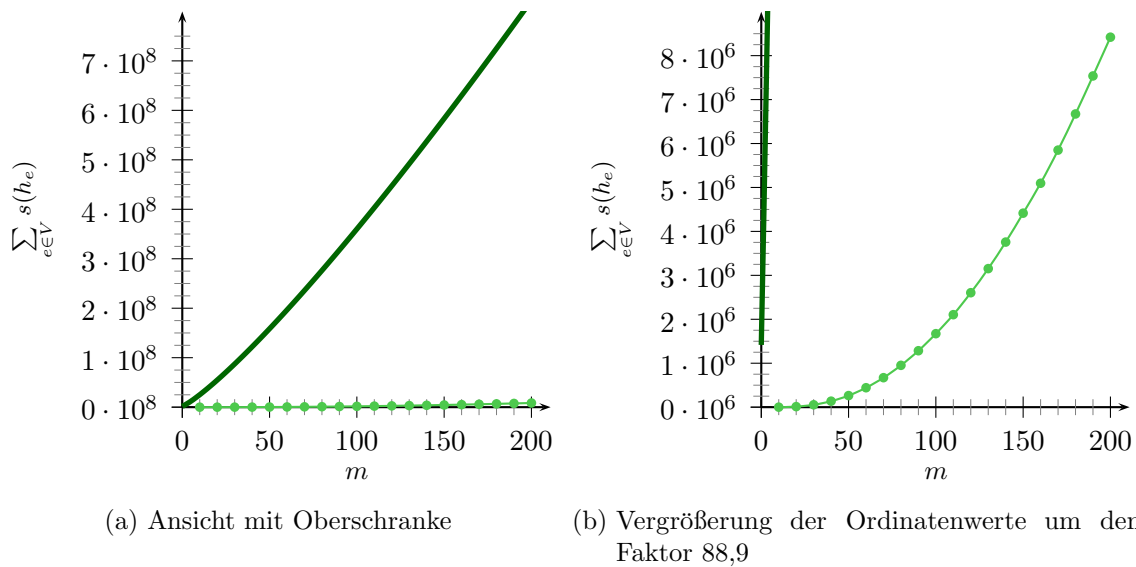


Abbildung 2.3: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und  $n = 7$  unter Variation von  $m$

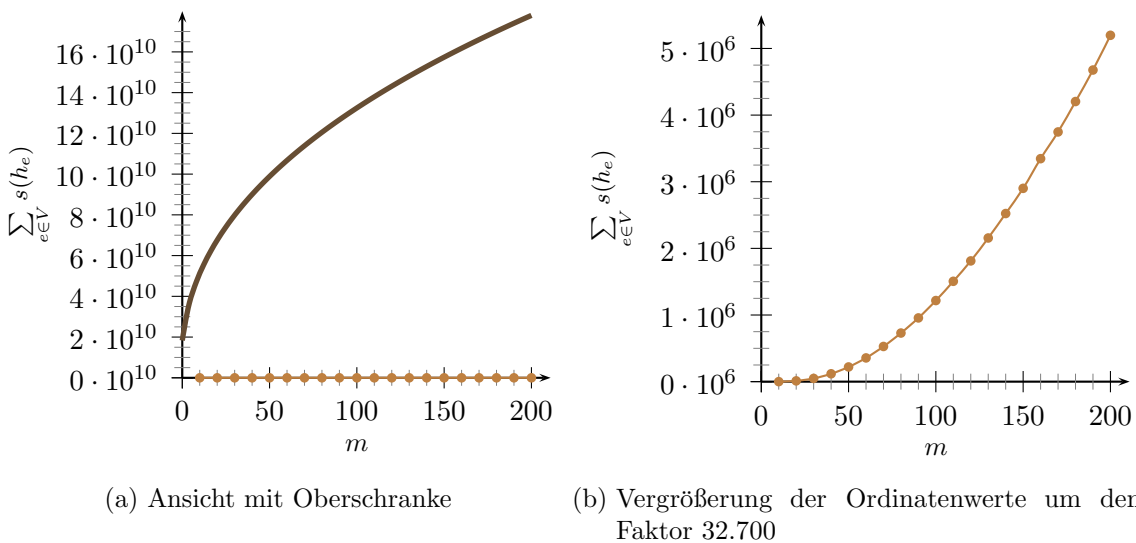


Abbildung 2.4: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und  $n = 7$  unter Variation von  $m$

Aus den Abbildungen geht hervor, dass für den hier vorliegenden Parameterbereich durch eine Erhöhung von  $m$  Borgwardts Obergrenze an absoluter Schärfe verliert. Dass die Obergrenzen dennoch den wahren Kurvenverlauf annähernd wiedergeben, wird sich erst bei Betrachtung der Kurven mit logarithmischer Ordinatenskalierung zeigen (siehe Abbildung 2.8 auf Seite 70). Weiter scheint auch ein höherer Verteilungsparameter  $k$  sich negativ auf die Schärfe der Obergrenze auszuwirken.

Zu Vergleichszwecken sind nachfolgend die verschiedenen Oberschranken und die empirischen Resultate jeweils in einer Graphik vereinigt:

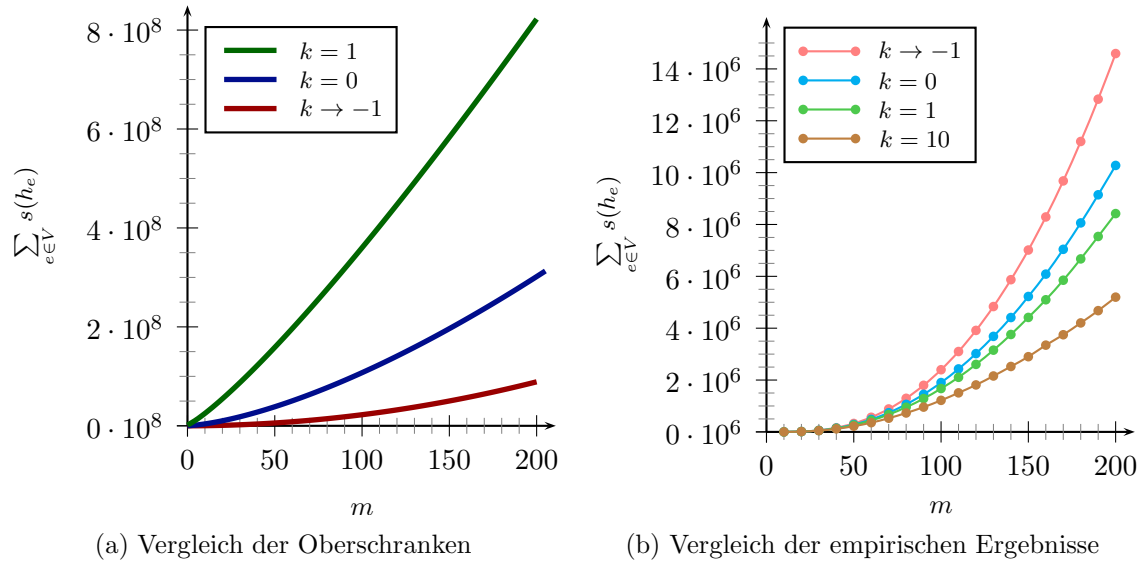


Abbildung 2.5: Vergleich der Oberschranken und empirischen Ergebnisse für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei  $n = 7$  unter Variation von  $m$

Leider musste in obiger Abbildung auf die Oberschranke für den Verteilungsparameter  $k = 10$  verzichtet werden, da hier für eine anschauliche Graphik zu große Werteunterschiede im Vergleich zu den anderen Oberschranken bestehen. Die Graphiken zeigen, dass mit steigendem Verteilungsparameter zwar die empirischen Ergebnisse abnehmen, die Oberschranken jedoch deutlich ansteigen. Wie durch die Betrachtung der Potenzen hervorgeht, ist dies jedoch nur für kleine  $m$  korrekt. Wählen wir  $m$  groß genug, so ordnen sich die Oberschranken gemäß unseren empirischen Erfahrungen an (vgl. dazu Abbildung 2.6).

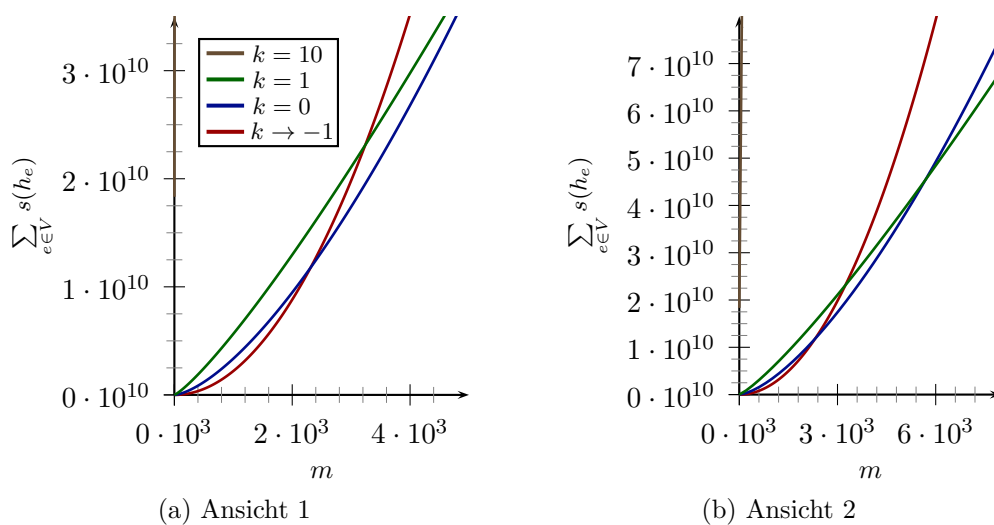


Abbildung 2.6: Vergleich der Oberschranken von  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei  $n = 7$  unter Variation von  $m$  mit verschiedenen Skalierungen in der Abszisse

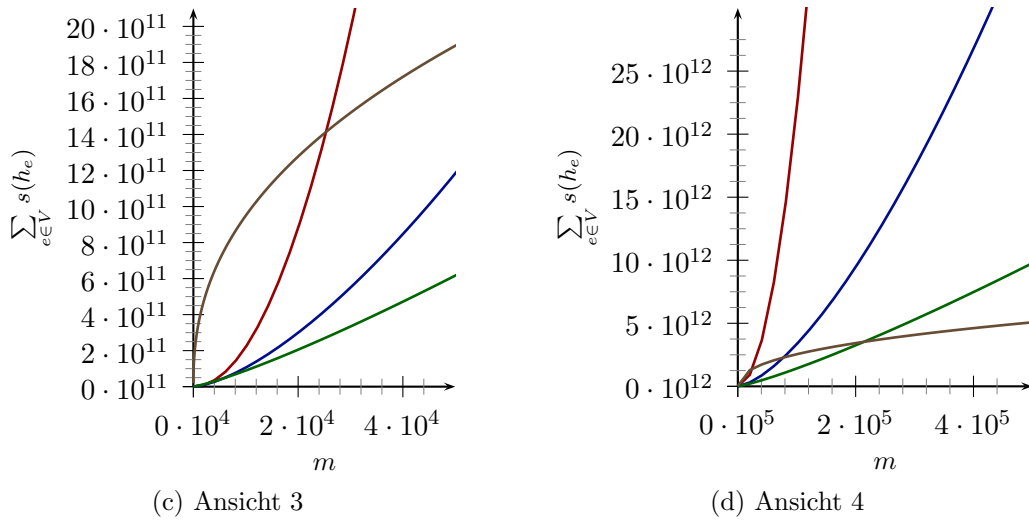


Abbildung 2.6 (Fortsetzung): Vergleich der Oberschranken von  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei  $n = 7$  unter Variation von  $m$  mit verschiedenen Skalierungen in der Abszisse

Betrachten wir diesbezüglich unsere Alternativfestlegung der Parameter, so fallen keine großen Änderungen im Vergleich zu obigen Graphiken auf. Einzig die Tatsache, dass aufgrund der kleineren Dimension wesentlich geringere Vergrößerungsfaktoren zur Darstellung der empirischen Resultate von Nöten sind, ist erwähnenswert. Die entsprechenden Graphiken wurden in den Anhang B.2 (ab Seite 185) ausgelagert.

Wie gut Borgwardts Oberschranken bis auf von  $m$  unabhängige Konstanten den jeweiligen empirischen Verlauf tatsächlich darstellen, wird bei Betrachtung der Graphiken unter Verwendung von logarithmisch skalierten Ordinaten ersichtlich. Zunächst sehen wir uns die Abbildung zu unserer Alternativfestlegung der Parameter an, die sich hier zur Veranschaulichung besser eignet. Es gilt nämlich in Analogie zur entsprechenden Untersuchung der mittleren Eckenzahl (siehe Abbildung 1.18 und 1.19), dass die Oberschranken zur Wiedergabe des wahren Verlaufs mit einer gewissen Approximationsgüte eine genügend große Restriktionszahl  $m$  benötigen.

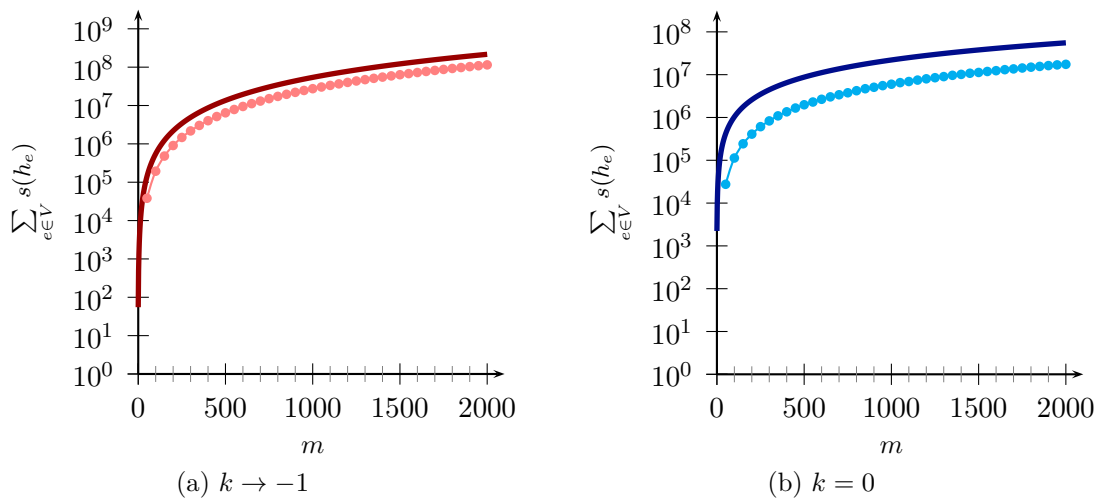


Abbildung 2.7: Darstellung der Mittelwerte von  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  für  $n = 5$  unter Variation von  $m$  durch logarithmische Ordinatenkalierungen

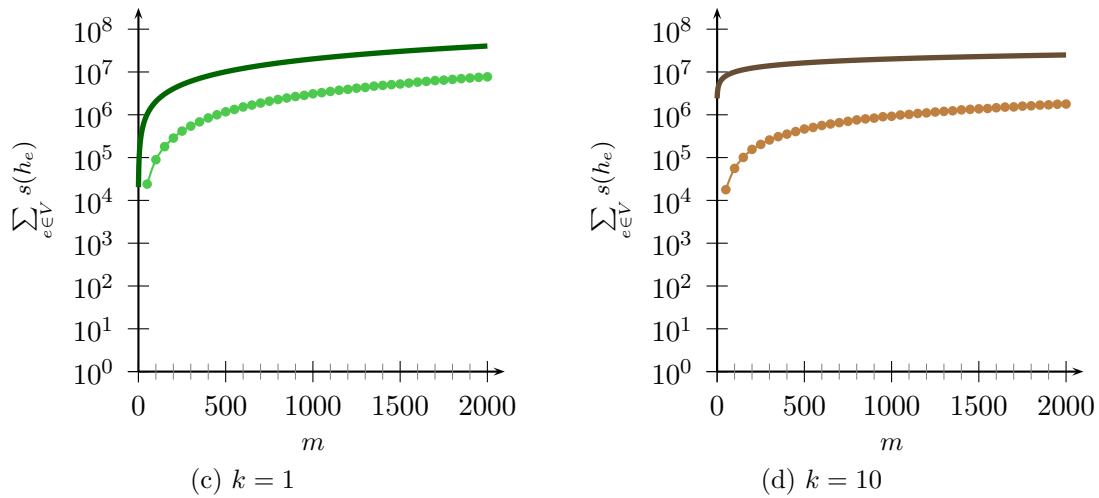


Abbildung 2.7 (Fortsetzung): Darstellung der Mittelwerte von  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  für  $n = 5$  unter Variation von  $m$  durch logarithmische Ordinatenkalierungen

Mit steigendem Verteilungsparameter wird aufgrund der Erhöhung der Redundanzwahrscheinlichkeit für die Erhaltung der Approximationsgüte ein höheres  $m$  erforderlich. Infolgedessen wird auch in der Graphik zum Verteilungsparameter  $k = 10$  aus Abbildung 2.7 ersichtlich, dass die Oberschranke hier noch nicht ganz Parallelität zur empirischen Kurve aufweist. Im Gegensatz dazu scheinen hier vor allem die Oberschranken für die beiden Gleichverteilungen jeweils den wahren Kurvenverlauf sehr gut zu approximieren.

Auch die Graphiken mit logarithmischer Ordinatenkalierung für unsere Standardfestlegung der Parameter bestätigen prinzipiell oben gemachte Feststellungen. Allerdings ist hier die Approximation des Oberschrankenverlaufs an die empirische Kurve aufgrund der niedrigen Restriktionszahl in geringerem Maße gegeben.

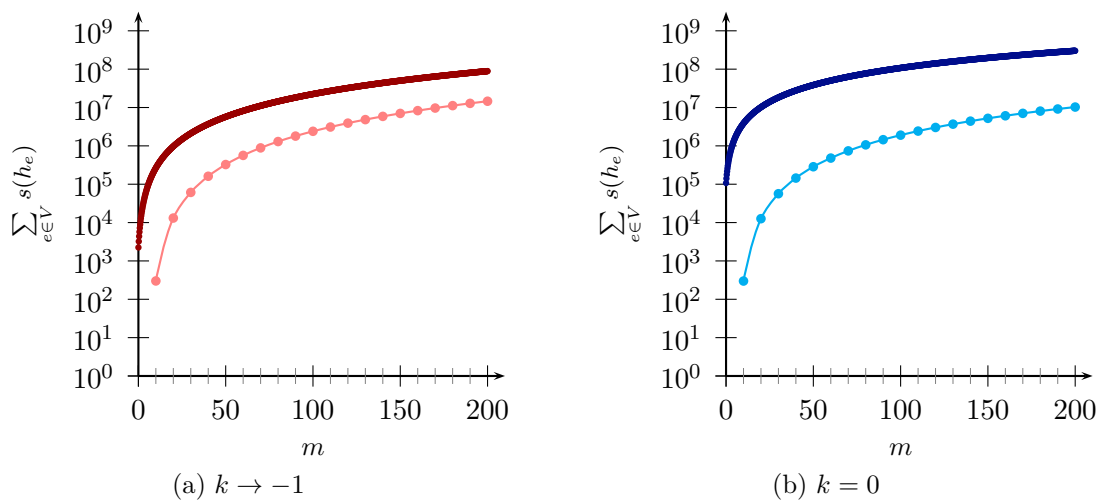


Abbildung 2.8: Darstellung der Mittelwerte von  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  für  $n = 7$  unter Variation von  $m$  durch logarithmische Ordinatenkalierungen

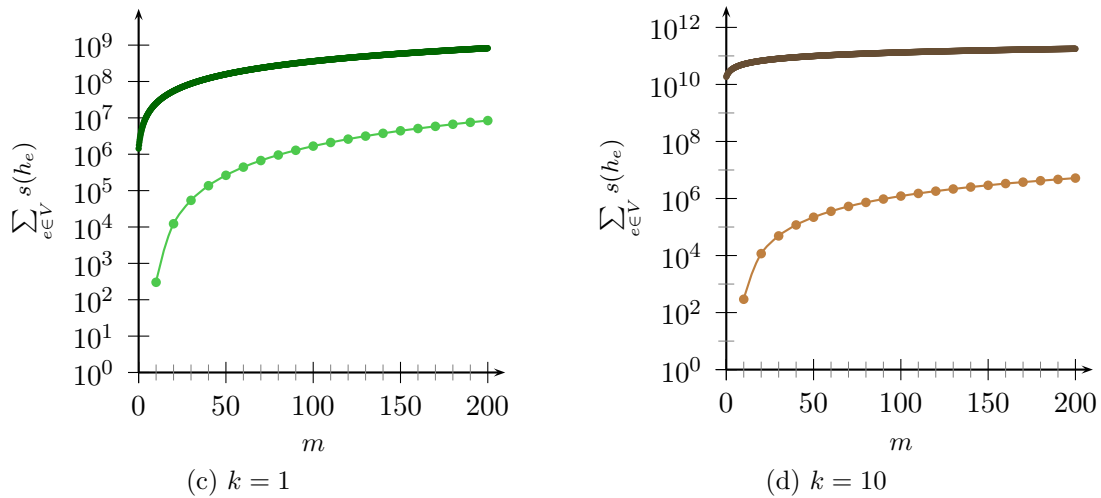


Abbildung 2.8 (Fortsetzung): Darstellung der Mittelwerte von  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  für  $n = 7$  unter Variation von  $m$  durch logarithmische Ordinatenskalierungen

Wir variieren nun die Dimension  $n$  und halten dabei die Restriktionszahl  $m$  bei 50 fest. Wie in den nachfolgenden Graphiken zu erkennen ist, besteht auch hier sehr große Ähnlichkeit zum entsprechenden Kurvenverlauf bei Untersuchung der durchschnittlichen Eckenzahl. Zumindest bei Verteilung auf der Kugeloberfläche ist dies – wie wir bereits bei Variation von  $m$  festgestellt haben – völlig klar. Hier wird die mittlere Eckenzahl lediglich mit dem Faktor  $m = 50$  multipliziert. Aber auch für die anderen Verteilungsparameter zeichnet sich ein sehr ähnlicher Grundverlauf ab. Wie wir bereits bei Untersuchung der erwarteten Eckenzahl festgestellt haben, scheint in unserem Parameterbereich die Eckenzahl bei Erhöhung von  $n$  regelrecht zu explodieren. Damit dominiert diese Zufallsgröße deutlich mögliche Einsparungseffekte, die zwar grundsätzlich die Ordinatenwerte senken, aber auf den Gesamtkurvenverlauf kaum Einfluss nehmen.

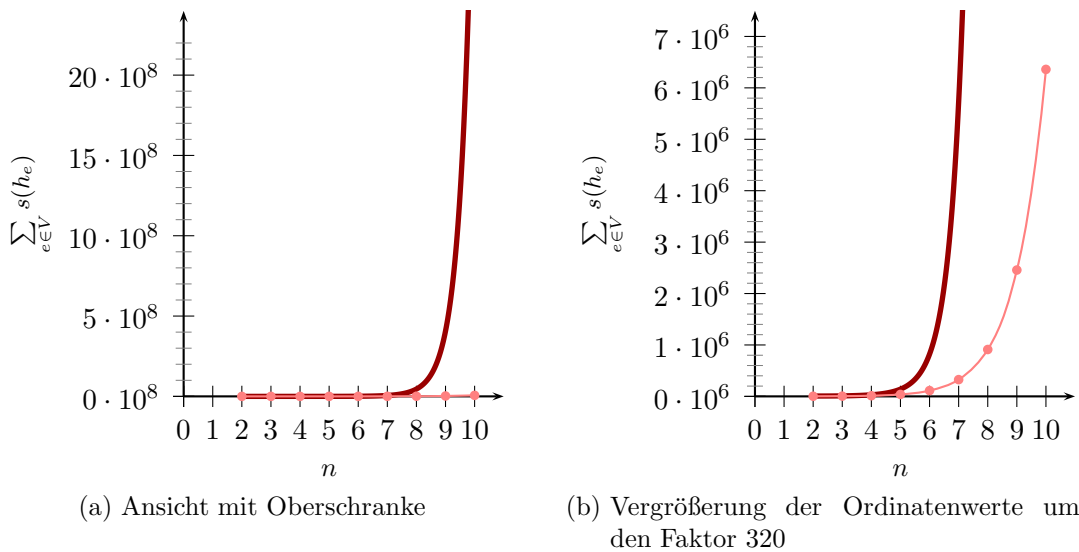


Abbildung 2.9: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und  $m = 50$  unter Variation von  $n$

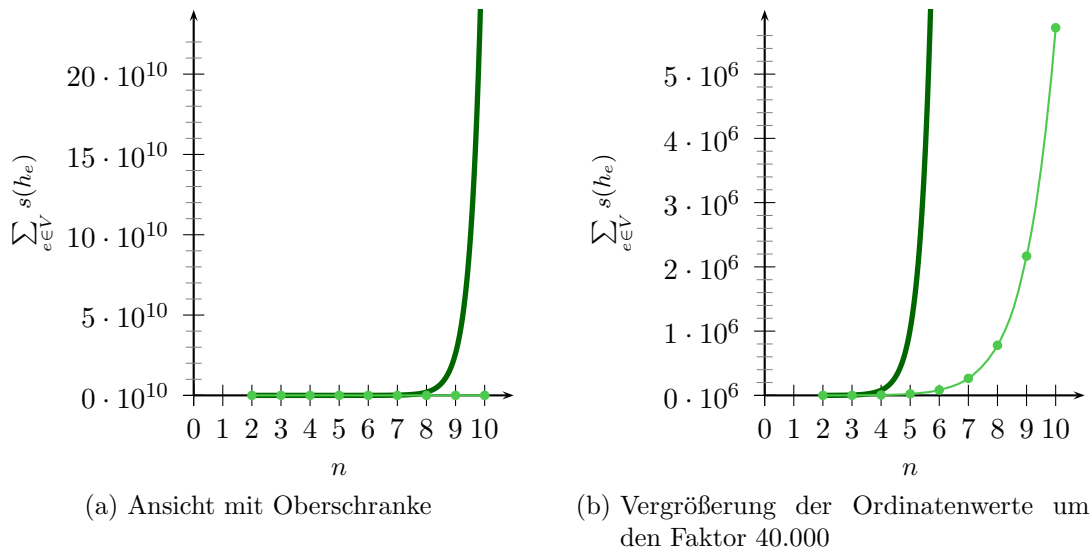


Abbildung 2.10: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und  $m = 50$  unter Variation von  $n$

Man beachte im Vergleich zu den Abbildungen zur Untersuchung der mittleren Eckenzahl (siehe Abschnitt 1.8) die deutlich stärkere Skalierung der Ordinaten. Weiter ist der extreme Anstieg der Vergrößerungsfaktoren zur Darstellung der empirischen Resultate auffällig, wenn ein größerer Verteilungsparameter gewählt wird. Dies spiegelt sich auch in den Abbildungen zu  $k = 0$  und  $k = 10$  wider, die sonst keine neuen Erkenntnisse ergeben und daher in den Anhang B.2 ausgelagert wurden. Auch die Abbildungen für die Alternativfestlegung der Parameter in der Version der Variation von  $n$  sind dort zu finden. Diese Graphiken bestätigen den grundsätzlichen Verlauf der Kurven. Es sei darauf hingewiesen, dass hierfür auf empirische Werte bei  $n = 10$  aufgrund von Speicherüberläufen bei Ausführung des Gift-Wrapping-Algorithmus verzichtet wurde. Bei Gleichverteilung der Restriktionsvektoren auf der Kugeloberfläche waren sogar Resultate für  $n = 9$  mit diesem Verfahren nicht mehr möglich.

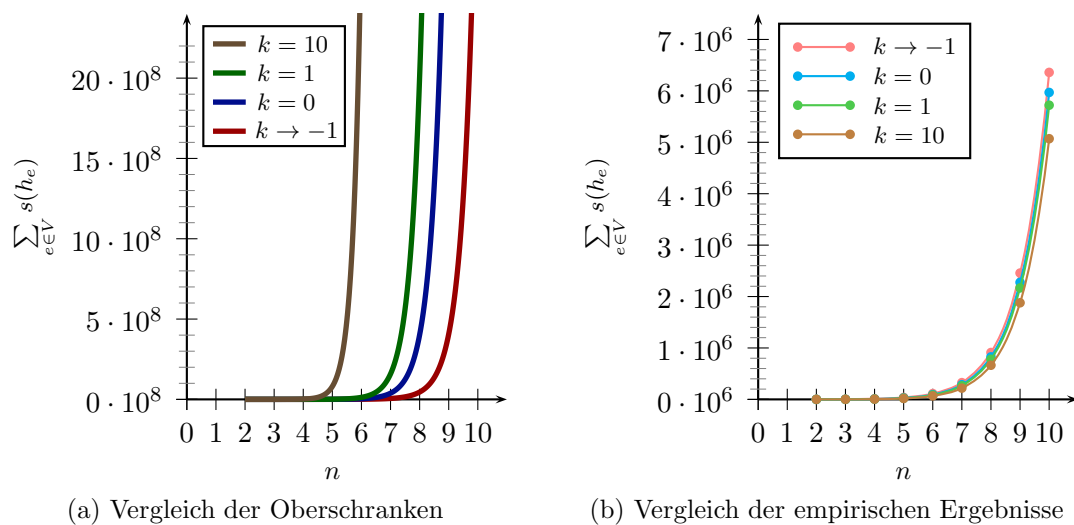


Abbildung 2.11: Vergleich der Obergrenzen und empirischen Resultate für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei  $m = 50$  unter Variation von  $n$

In obiger Abbildung 2.11 werden die Oberschranken und empirischen Resultate jeweils in einer Graphik gezeigt. Hier ist besonders auffällig, wie nahe die empirischen Kurven beieinander liegen, obwohl die Oberschranken sich für verschiedene  $k$  deutlich unterscheiden. Zudem weisen zumindest im betrachteten Bereich die Oberschranken für größere Verteilungsparameter auch höhere Ordinatenwerte auf, während die empirischen Kurven mit  $k$  leicht abnehmen.

Zuletzt beschäftigen wir uns mit der Zufallsvariable  $s(\min^{\geq 0} h_V)$ . Da die Oberschranke von Borgwardt nur für große  $m$  nachgewiesen wurde, entstanden nachfolgende Graphiken gemäß unserer alternativen Parameterfestlegung aus Tabelle 1.3.

Auf die Untersuchung dieser Größe für die Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  auf der Kugeloberfläche kann verzichtet werden, da hier stets

$$s(\min^{\geq 0} h_V) = m$$

gilt. Es sollte an dieser Stelle aber angemerkt werden, dass Borgwardts Oberschranke auch hierfür korrekt bleibt. Lässt man nämlich in Formel (2.7)  $k$  gegen  $-1$  laufen, so ergibt sich genau der Wert  $m$ , also das hier exakte Ergebnis.

Wir betrachten zunächst die Kurven bei Variation des Parameters  $m$ . In den Graphiken aus Abbildung 2.12 bis 2.14 ist jeweils zusätzlich in schwarzer Farbe die triviale Oberschranke  $m$  eingetragen. Die dunkle farbige Kurve gibt jeweils Borgwardts Oberschranke wieder. Die empirischen Ergebnisse sind in den hellen Farben eingezeichnet.

Die Graphiken geben hier einen sublinearen Verlauf der Kurven wieder. Dies stellen wir sowohl bei der Oberschranke als auch bei den empirischen Ergebnissen fest. Daraus schließen wir, dass für steigendes  $m$  die Zahl der zu sortierenden Punkte in Relation zu  $m$  abnimmt. Dieser Effekt lässt sich damit erklären, dass durch die höhere Anzahl an Punkten  $a_i$  das Polytop  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  sich immer mehr der Einheitskugel annähert und somit auch die Facetten im Mittel an Höhe gewinnen. Daher sinkt der Anteil der Punkte, deren Länge die minimale Höhe überschreiten.

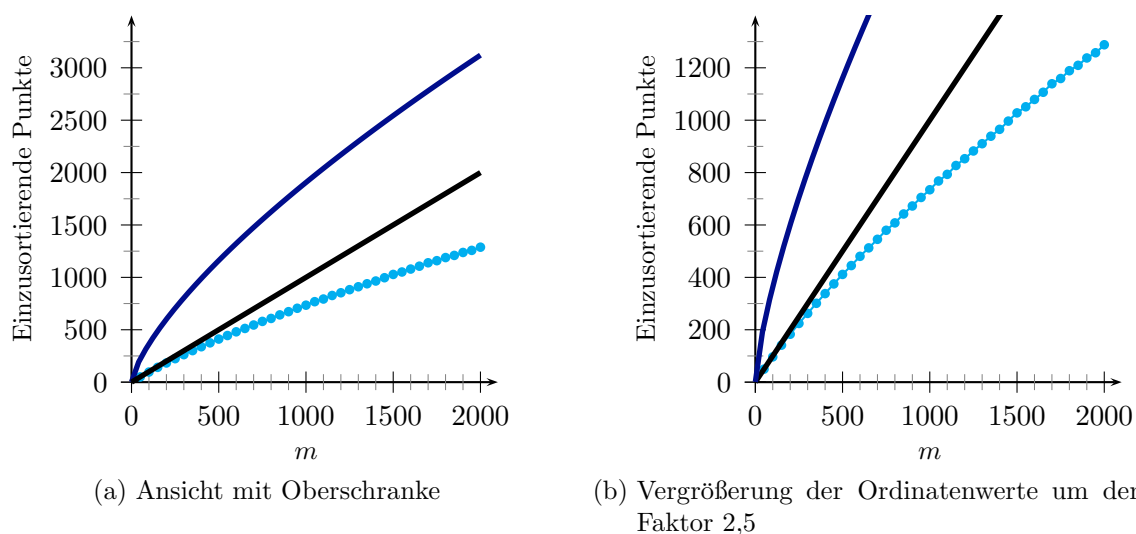
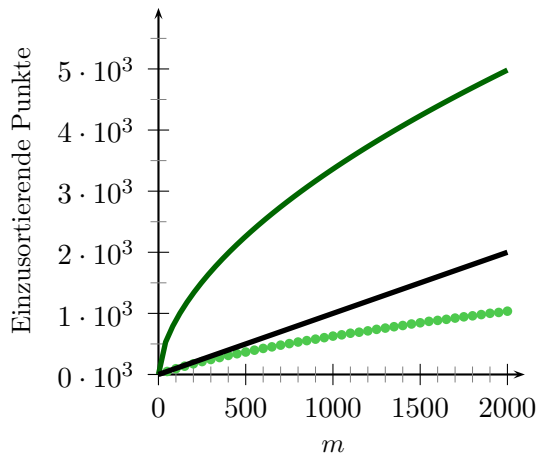
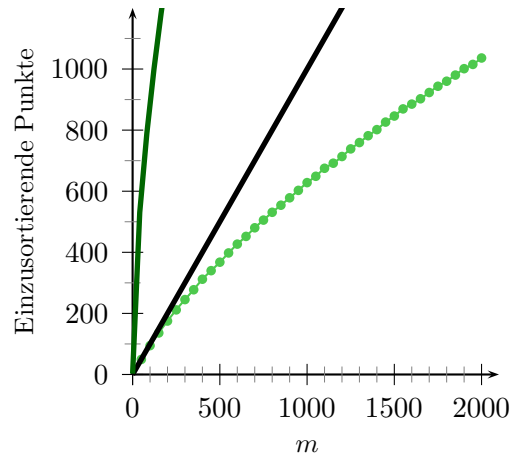


Abbildung 2.12: Durchschnittliche Anzahl an einzusortierenden Punkten bei  $n = 5$  und  $k = 0$



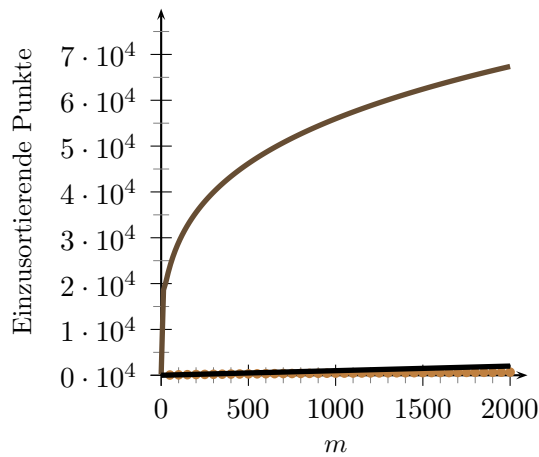


(a) Ansicht mit Obergrenze

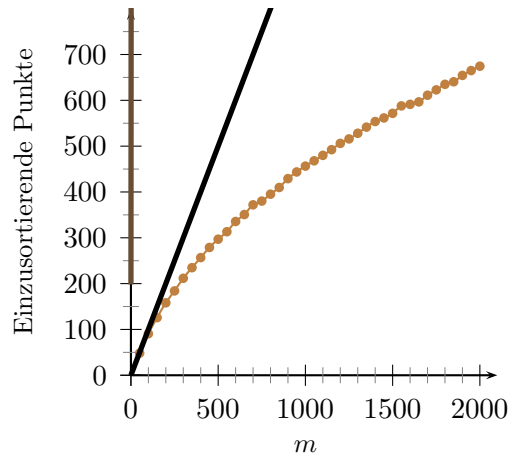


(b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 5

Abbildung 2.13: Durchschnittliche Anzahl an einzusortierenden Punkten bei  $n = 5$  und  $k = 1$



(a) Ansicht mit Obergrenze



(b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 100

Abbildung 2.14: Durchschnittliche Anzahl an einzusortierenden Punkten bei  $n = 5$  und  $k = 10$

Wie sich weiter aus den Abbildungen 2.12 bis 2.14 ergibt, ist unsere Anzahl an erzeugten Restriktionsvektoren im Vergleich zur Dimension immer noch zu klein, um Borgwardts Obergrenze den Wert  $m$  unterschreiten zu lassen. Durch die sublinearen Kurvenverläufe wird dies allerdings für eine genügend große Anzahl an Restriktionen eintreten. Daher betrachten wir nun in Abbildung 2.15 ohne weitere empirische Analyse die Obergrenzenkurven für deutlich höhere  $m$ . Wie sich hier zeigt, bräuchten wir für eine nichttriviale Obergrenze eine Restriktionszahl weit über 5.000. Für den Verteilungsparameter  $k = 10$  müsste  $m$  sogar fast 200.000 übersteigen. Damit sind empirische Resultate mit akzeptabler Laufzeit nicht mehr generierbar.

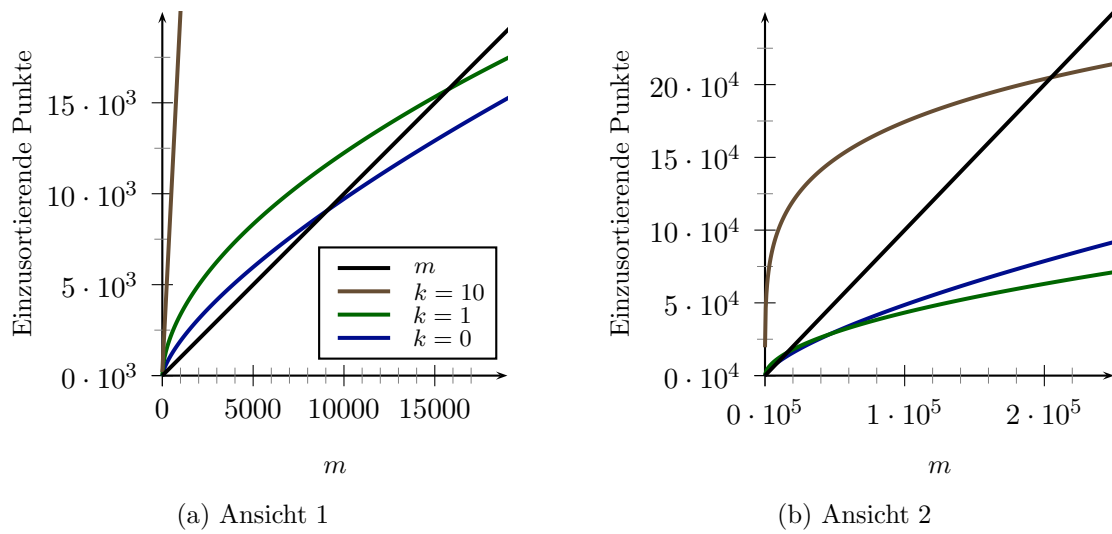


Abbildung 2.15: Vergleich der trivialen Oberschranke mit Borgwardts Oberschranke

Bei Variation der Dimension (siehe Abbildung 2.16 bzw. B.15 im Anhang auf Seite 190) stellen wir fest, dass sich die Zahl der einzusortierenden Punkte mit Erhöhung von  $n$  schnell der trivialen Oberschranke  $m$  annähert. Dies lässt sich damit erklären, dass mit höherer Dimension auch die Höhen der Facetten im Schnitt abnehmen und somit immer mehr Punkte die minimale Höhe überschreiten. Der Effekt einer großen Restriktionszahl wird durch eine höhere Dimension also deutlich reduziert.

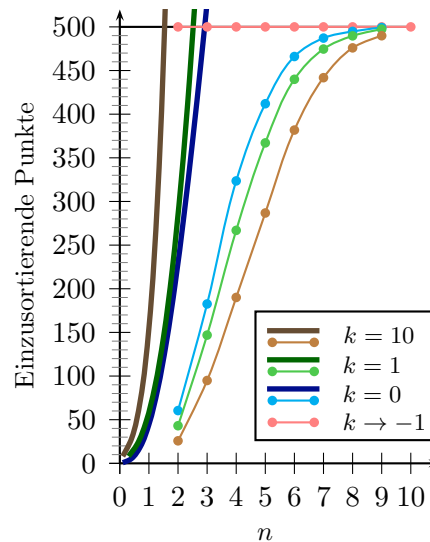


Abbildung 2.16: Durchschnittliche Anzahl einzusortierender Punkte für  $m = 500$  unter Variation des Parameters  $n$

Auffällig in obiger Graphik ist die Tatsache, dass für unsere Parameterfestlegung die empirischen Kurven für höheres  $k$  abnehmen, aber die Oberschranken dann zunehmen. Weiter ist auch interessant, ab welcher Dimension Borgwardts Oberschranke den  $m$  Wert überschreitet.

Mit anderen Worten, ab welchem  $n$  ist die Restriktionszahl  $m = 500$  zu klein für eine aussagekräftige Oberschranke? Während dies bei Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  in der Kugel ab der Dimension  $n = 4$  der Fall ist, führt für  $k = 1$  Borgwardts Oberschranke nur noch bis  $n = 2$  zu einem nichttrivialen Ergebnis. Für  $k = 10$  überschreitet die Schranke sogar schon bei  $n = 2$  die Restriktionszahl  $m = 500$ . Insgesamt müssen wir wiederum feststellen, dass  $m$  für die meisten Fälle noch zu klein gewählt wurde, um durch Borgwardts Oberschranken nichttriviale Überschätzungen zu erhalten. Leider lässt sich hier die Restriktionszahl kaum erhöhen, ohne dass bei großer Dimension sowohl der Speicheraufwand als auch die Laufzeit explodieren. Daher wird diesbezüglich auf weitere Untersuchungen verzichtet.



# Kapitel 3

## Der Algorithmus von Avis und Fukuda

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Algorithmus von Avis und Fukuda, welcher 1992 in [AF92] veröffentlicht wurde. Dieser nutzt die Tatsache aus, dass bei linearen Optimierungsproblemen, sofern sie genau einen Optimalpunkt aufweisen, mit einer eindeutigen Auswahlregel bei der Durchführung des Simplexalgorithmus von jeder beliebigen Ecke aus die Optimalecke erreicht wird. Wendet man ausgehend von diesem Optimum die Auswahlregel nun „rückwärts“ an, d.h. nach Durchführung des entsprechenden Pivotschrittes führt die Auswahlregel – wieder „vorwärts“ angewendet – zurück zur Ausgangsecke, so bildet sich ein Suchbaum, der jede Ecke des Polyeders genau einmal beinhaltet. Eine detaillierte Formulierung dieses Verfahrens soll nun in Abschnitt 3.1 erbracht werden. Eine Komplexitätsanalyse sowohl im Worst-Case- als auch im Average-Case-Sinn wird in Abschnitt 3.2 durchgeführt. Anschließend folgen in den Abschnitten 3.3 bis 3.5 einige empirische Untersuchungen. Abschnitt 3.6 beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeit, dass man unter gewissen Voraussetzungen auf eine Ab- bzw. Aufstiegs-kantenrichtung trifft. Hier werden wir asymptotisch (d.h.  $m \rightarrow \infty$ ,  $n$  fest) zu einem interessanten Resultat kommen. Dieses wird zuletzt in Abschnitt 3.7 durch empirische Testläufe bestätigt.

### 3.1 Formulierung des Algorithmus

Grundlegend für den Algorithmus von Avis und Fukuda ist die aus der linearen Optimierung bekannte Auswahlregel von Bland zur Bestimmung des Pivotelementes bei Ausführung des Simplexverfahrens. Diese ist wie folgt definiert:

**Definition 3.1.** Bei der Auswahlregel von Bland entscheidet man sich bei Nicht-Eindeutigkeit des Pivotelementes für diejenige Zeile im Tableau, die unter den Zeilen mit negativem Eintrag in der Zielfunktionsspalte zum Basisvektor  $a_i$  gehört mit dem kleinsten Index  $i$ . Führt auch der Quotiententest zu keinem eindeutigen Resultat, so wähle man auch hier die Spalte mit dem kleinsten Index, d.h. die am weitesten links stehende Spalte unter den „Siegern“ des Quotiententests.

Als weitere Vorbereitung zur Formulierung des Algorithmus wollen wir kurz auf die im Verfahren verwendete Liste eingehen: Diese wird dazu dienen, ein ständiges Umsortieren der auftretenden Simplextableaus zu vermeiden und dennoch mit minimalem Aufwand die Reihenfolge der Tableauzeilen, sortiert nach den Indizes der Basiselemente, verfügbar zu machen. Um dies zu ermöglichen, bestehen die Elemente dieser Liste aus zwei Bestandteilen, einer-

seits dem Index einer Basisrestriktion und andererseits aus der zugehörigen Tableauzeile. Die Liste wird also zu jeder Zeit die Basis repräsentieren, somit aus  $n$  Elementen (mit jeweils zwei Bestandteilen) bestehen und nach den Basisindizes sortiert sein. Dies wird dadurch realisiert, dass man die Basis an der Startecke des Algorithmus zunächst komplett sortiert und im Verlauf des Algorithmus jeweils ein Aktualisierungsvorgang nach jedem Pivotschritt mit nur noch geringem Aufwand ( $\mathcal{O}(\log_2(n))$ ) durchgeführt wird.

Der Speicheraufwand unserer Liste beträgt lediglich  $\mathcal{O}(n)$  und kann vernachlässigt werden. Daher liegt der eigentliche Aufwand dieser Vorgehensweise im Sortieren der Elemente (siehe dazu Abschnitt 3.2).

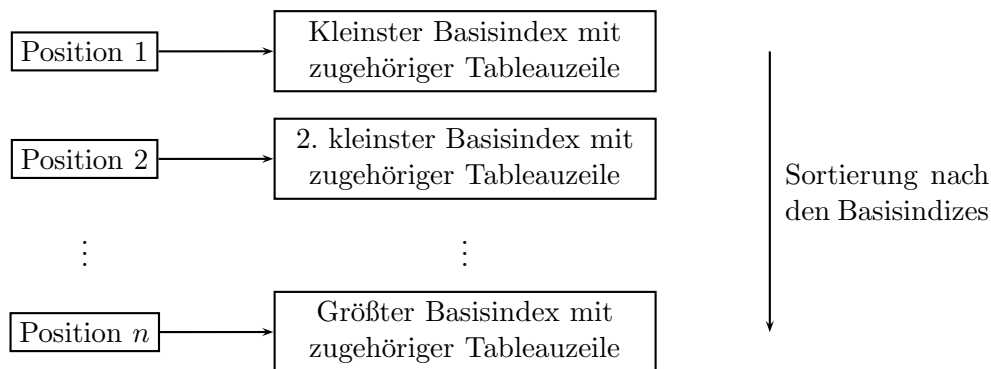


Abbildung 3.1: Veranschaulichung unserer speziellen Liste

Mit Hilfe eben eingeführter Liste wollen wir nun den Algorithmus von Avis und Fukuda formulieren.

**Algorithmus 3.2** (Der Algorithmus von Avis und Fukuda).

*Initialisierung:*

1. Bestimme eine Ecke des Polyeders  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq 1 \ \forall i = 1, \dots, m\}$  mit Hilfe der Phase I des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus. Gehe dazu wie folgt vor:

- a) Stelle das Starttableau des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus zum Ungleichungssystem

$$Ax \leq \mathbf{1}$$

auf. D.h. führe Hilfsvektoren  $-e_1, \dots, -e_n$  ein und bilde mit diesen Vektoren als Basis das Tableau.

- b) Entferne durch Pivotschritte sukzessive  $-e_1, \dots, -e_n$  aus der Basis. Verwende dabei als Ersatzpunkte mittels Anwendung von Quotiententests geeignete Vektoren aus  $\{a_1, \dots, a_m\}$ . Nach  $n$  solchen Austauschschritten sind wir an einer Ecke von  $X$  angekommen.

2. Bestimme eine Zielfunktion, die in dieser Ecke optimal wird (z.B.  $c = a_{\Delta^1} + \dots + a_{\Delta^n}$ , wobei  $\Delta^1, \dots, \Delta^n$  die Basisindizes der aktuellen Ecke darstellen).

3. Speichere die Ecke in einer Datei zur Endausgabe.

4. Speichere die Basisindizes der Optimalbasis zusammen mit den zugehörigen Tableauzeilen in einer Liste. Sortiere diese dabei nach den Basisindizes.
5. Setze eine Hilfsvariable  $i = 1$ .

*Typischer Schritt:*

1. a) Prüfe, ob
  - i)  $a_i$  sich in der derzeitigen Basis befindet,
  - ii) die Deaktivierung (Austausch aus der Basis) von  $a_i$  die Zielfunktion  $c^T x$  verkleinern würde,
  - iii) ein Restriktionsvektor  $a_j$  zum Austausch vorhanden ist (die zugehörige Restriktion  $a_j^T x \leq 1$  wird an der Nachbarcke straff) und aus Sicht der Nachbarcke den kleinst möglichen Index für die Deaktivierung aufweist, bei der  $c^T x$  erhöht wird.

Falls i), ii) und iii) erfüllt sind, gehe direkt zu Schritt 2. Sonst erhöhe  $i$  um eins.

- b) Falls  $i = m + 1$ , gehe direkt zu Schritt 3. Sonst gehe zurück zu Schritt a).
2. Führe den aus Schritt 1 sich ergebenden Pivotschritt aus. Entferne den Index der deaktivierten Restriktion aus der Liste und sortiere den neuen Basisindex ein. Schreibe die Ecke in die Datei. Setze  $i = 1$  und gehe zurück zu Schritt 1.
3. Falls  $c^T x$  optimal ist, so stoppe den Algorithmus. Sonst erhöhe  $c^T x$  unter Verwendung der Auswahlregel von Bland, d.h. führe den Pivotschritt aus und aktualisiere die Basis in unserer Liste wie in Schritt 2 erklärt. Sei  $a_\ell$  die Austauschrestriktion, dann setze  $i = \ell + 1$  und gehe zurück zu Schritt 1.

Im Anhang C.2 ab Seite 234 wird die Vorgehensweise dieses Verfahrens anhand eines dreidimensionalen Polytops veranschaulicht. Hier werden durch farbliche Kantenmarkierungen u.a. Vorwärts- und Rückwärtsschritte sukzessive dargestellt.

*Bemerkung 3.3.* Man beachte, dass durch das Festlegen des Zielfunktionsvektors auf

$$c = a_{\Delta^1} + \cdots + a_{\Delta^n}$$

im zweiten Schritt der Initialisierungsphase Abhängigkeit der Zielfunktion zu den Restriktionsvektoren entsteht. Für die Average-Case-Analyse der Komplexität des Verfahrens wird sich herausstellen, dass lediglich die beliebige Permutierbarkeit der Indizes der Restriktionsvektoren benötigt wird. Diese ist in unserem stochastischen Modell durch die unabhängige und identische Erzeugung der Vektoren gegeben.

Von besonderem Interesse bezüglich der noch durchzuführenden Komplexitätsanalyse ist für uns der Teil a) aus Schritt 1 der Hauptphase. Den hier stattfindenden Test nennen wir **reverse Bland-** oder auch **reverse Pivotüberprüfung**. Der sich daraus ergebende Pivotschritt, welcher in Schritt 2 ausgeführt wird, heiße **reverser Pivotschritt**.

*Bemerkung 3.4.* Man beachte, dass ein direkter Zugriff auf die Basisindizes (ohne über die Listenposition zu gehen) nicht notwendig ist, da die Schritte in 1. a) in sortierter Reihenfolge

stattfinden und auch die Position von  $a_\ell$  in Schritt 3 über die nötige Aktualisierung der Sortierung bekannt wird. Ist dennoch zusätzlich ein direkter Zugriff auf Basisindizes gewünscht, so lässt sich dies über eine modifizierte Form der Hashtable realisieren. Diese muss sowohl über die Position in der sortierten Basis als auch über die Basisindizes selbst Zugriff auf die Zeilen ermöglichen. Dazu verwendet man die Basisindizes als Schlüssel, die zugehörigen Tableauzeilen als Werte und erlaube nach Sortierung der Basis zusätzlichen Zugriff auf die Schlüssel über die Basisposition. Allerdings ist ein direkter Zugriff auf die Basisindizes mit Aufwand verbunden, der aufgrund der vorliegenden Sortierung mit  $\mathcal{O}(\log_2 n)$  realisiert werden kann.

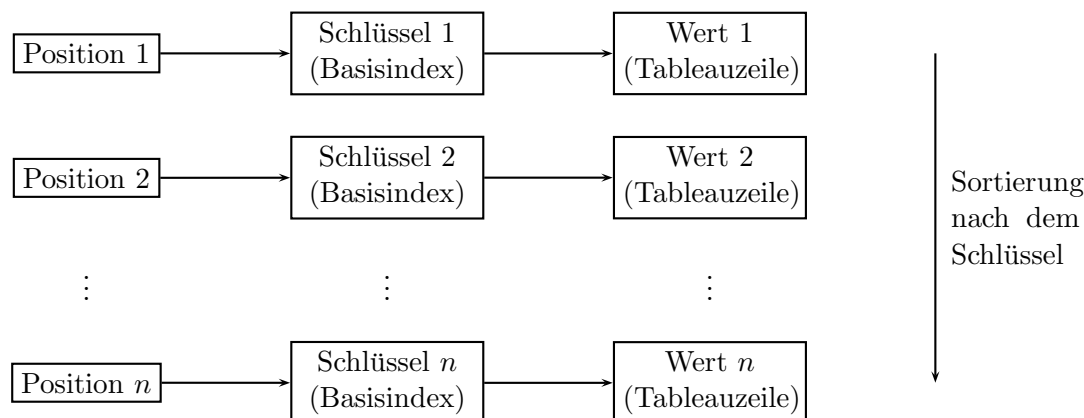


Abbildung 3.2: Veranschaulichung der modifizierten Hashtable

## 3.2 Komplexitätsanalyse

Als besonders vorteilhaft ist beim Algorithmus von Avis und Fukuda hervorzuheben, dass bis auf unsere spezielle Liste und eine Datei zur Auflistung der gefundenen Ecken, kaum weitere Speicherung notwendig ist. Daher können wir uns für die nun folgende Komplexitätsanalyse auf den Rechenaufwand konzentrieren. Zunächst werden einige Notationen eingeführt:

*Notation 3.5.* Mit  $r_\ell$  werde die Zufallsgröße bezeichnet, welche den Aufwand für die Auswertungen der Zielfunktionsspalte aufgrund aller reversen Pivotüberprüfungen an einer beliebigen Ecke mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen wiedergibt. Soll dabei eine feste Ecke  $e$  untersucht werden, so schreiben wir für die entsprechende Zufallsgröße  $r_\ell(e)$ .  $V^\ell$  sei die Menge aller Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen und  $\#V^\ell$  die Anzahl der Elemente in dieser Menge.

Bevor das eigentliche Verfahren starten kann, muss die Initialisierungsphase beendet worden sein. Die Komplexität wird dabei vom Auffinden einer Ecke und der Sortierung der Basis in Schritt 4 dominiert. Ersteres ist mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(mn^2 + 2mn)$  möglich (siehe Formel (2.3) auf Seite 56, Komplexität der Initialisierungsphase des einfachen, primalen Gift-Wrapping-Verfahrens ohne Speicherung der Kanten); Letzteres lässt sich mit Komplexität  $\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$  realisieren<sup>1</sup> und dient der effizienten Ausführung der Auswahlregel von Bland bzw. der reversen Blandüberprüfung in der Hauptphase des Algorithmus: Hier wird an der Optimalecke in unserer speziellen Liste die Basis sortiert, so dass die Reihenfolge der Basisindizes sowie zugehörige Zeilen ohne weiteren Suchaufwand ausgelesen werden können. Um

<sup>1</sup>Dies ist z.B. über die Anwendung des Merge-Sort-Algorithmus möglich.



die Sortierung auch nach einem Pivotschritt aufrecht zu erhalten, wird bei einem Austauschschritt der Index der neuen Restriktion in die Liste einsortiert und die entfernte Restriktion aus dieser gelöscht. Ersteres kostet pro Pivotschritt einen Aufwand von  $\mathcal{O}(\log_2 n)$ . Der Aufwand für Letzteres kann vernachlässigt werden, da die Stelle des zu löschenden Eintrages durch sortiertes Suchen nach Pivotschritten automatisch gefunden wird.

Die reverse Pivotüberprüfung benötigt für eine beliebige Zielecke  $\tilde{e}$ , welche aus der Menge der Nachbarecken unserer Ausgangsecke stammt und somit direkt über eine Kante erreichbar ist, die Evaluation von einigen Einträgen in der Zielfunktionsspalte des Tableaus. Dies wird sich für  $\tilde{e}$  so oft wiederholen, wie diese als Ziel einer absteigenden Richtung auftaucht bzw. wie hoch die Anzahl an aufsteigenden Richtungen an der Ecke  $\tilde{e}$  selbst ist. Somit ergibt sich bei  $\ell$  aufsteigenden Richtungen in  $\tilde{e}$  ein Aufwand von  $r_\ell(\tilde{e})$ . Der Erwartungswert solcher Zufallsgrößen soll auf den nachfolgenden Seiten für  $\ell = 1, \dots, n$  und beliebiger Ecke untersucht werden. Des Weiteren ist erwähnenswert, dass ein Einsortieren der möglichen Austauschrestriktion hier noch nicht nötig ist, da wir für eine vereinfachte Analyse des Erwartungswertes von  $r_\ell(\tilde{e})$  bzw.  $r_\ell$  davon ausgehen, dass wir in sortierter Reihenfolge solange Werte in der Zielfunktionsspalte des Tableaus zu einer in Frage kommenden Zielecke (ohne den Wert in der Pivotzeile) berechnen, bis der erste negative Eintrag gefunden ist.<sup>2</sup> Sobald dies geschieht, ist nur noch ein Vergleich zwischen dem Index der Austauschrestriktion und dem zugehörigen Index des eben gefundenen negativen Eintrages nötig. D.h. neben der Berechnung der Zielfunktionseinträge muss nur noch ein weiterer Vergleich durchgeführt werden, der für die Gesamtkomplexität vernachlässigt werden kann. Erst nach Durchführung eines Pivotschrittes findet die Aktualisierung unserer Liste statt.

Insgesamt werden im Verlauf des Algorithmus  $\#V$  Kanten vorwärts und rückwärts durchlaufen. Somit werden auch  $\#V$  Abwärts- und ebenso viele Aufwärtsschritte vorgenommen, welche im Simplextableau jeweils mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(mn)$  realisierbar sind. Bevor allerdings ein Pivotschritt ausgeführt werden kann, muss nach der Wahl der Kante (Pivotzeile) der Quotiententest (zur Wahl der Pivotspalte) stattgefunden haben. Dabei werden jeweils bis zu  $m - n$  Quotienten berechnet. Die Bestimmung der Aufstiegsanten erfolgt über die Regel von Bland. Die reversen Pivotüberprüfungen liefern die Abstiegsrichtungen. Die Anzahl aller Abstiegsrichtungen im Polyeder beträgt maximal  $n \cdot \#V$ .<sup>3</sup> Für all diese muss als Teil der reversen Blandüberprüfung ebenfalls der Quotiententest durchgeführt werden. Damit werden insbesondere auch die Quotiententests für die tatsächlich realisierten Abwärtsschritte bereits erledigt.

Als Gesamtaufwand des Algorithmus (inklusive Initialisierungsphase) ergibt sich somit:

$$\mathcal{O}\left(mn^2 + 2mn + \#V \cdot ((m - n) + 2 \cdot (mn + \log_2 n) + n \cdot (m - n)) + \sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e) + n \cdot \log_2 n\right) \quad (3.1)$$

<sup>2</sup>Effizienter ist die Vorgehensweise, die Auswertungen in der Zielfunktionsspalte des Tableaus zur Ecke  $\tilde{e}$  schon zu dem Zeitpunkt abzurechnen, wenn bereits feststeht, dass es keinen negativen Eintrag in den Basiszeilen mit kleinerem Index gibt. Allerdings ist diese Methode probabilistisch schwierig zu analysieren.

<sup>3</sup>Im beschränkten Fall beträgt die Zahl der Kanten und somit gleichzeitig die Anzahl an Abstiegsrichtungen genau  $\frac{n}{2} \cdot \#V$ . Da wir dies allerdings nicht durch eine Zusatzbedingung voraussetzen wollen, müssen wir uns hier mit der Obergrenze  $n \cdot \#V$  abfinden.

Nachfolgende Tabelle zeigt die Herkunft der einzelnen Terme:

KOMPLEXITÄT IN $\mathcal{O}$ -NOTATION	BESCHREIBUNG
$mn^2 + 2mn$	Aufwand zum Auffinden der Startecke (Initialisierungsphase)
$n \cdot \log_2 n$	Einmaliger Aufwand für das Sortieren der Basis der Optimalecke (Startecke) in der Initialisierungsphase
$\#V \cdot (m - n)$	Aufwand aller Quotiententests durch die realisierten Aufwärtsschritte
$2 \cdot \#V \cdot mn$	Aufwand aller Pivotschritte
$2 \cdot \#V \cdot \log_2 n$	Aufwand für das Einsortieren der Austauschrestriktionen während des gesamten Algorithmus
$\#V \cdot n(m - n)$	Aufwand zum Durchführen aller nötigen Quotiententests bei den reversen Blandüberprüfungen
$\sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e)$	Aufwand für alle reversen Blandüberprüfungen (ohne die dazu nötigen Quotiententests)

Tabelle 3.1: Übersicht zur Komplexität des Algorithmus von Avis und Fukuda

Unser Komplexitätsterm ist stark von der Zufallsgröße  $\#V$  geprägt. Wie wir bereits in Abschnitt 1.8 festgestellt haben, sind zur Eckenzahl von  $X$  bereits Average-Case-Resultate aus den Arbeiten von Borgwardt bekannt.

Es bleibt der Erwartungswert von  $\sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e)$  zu untersuchen. Da die Berechnung eines Eintrages in der Zielfunktionsspalte des möglichen Nachfolgetableaus nur drei Operationen benötigt, genügt es, sich mit der Anzahl der zu berechnenden Zielfunktionseinträge zu beschäftigen. Da eine Ecke maximal  $n$  Aufstiegsrichtungen aufweisen kann und maximal  $n$  Einträge berechnet werden müssen, gilt sicherlich

$$\sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e) \leq \#V \cdot n^2.$$

Damit ist dieser Wert für die Gesamtkomplexität nicht mehr entscheidend, da er vom Term  $\#V \cdot mn$  dominiert wird. Die Größe bleibt dennoch für uns insofern interessant, dass sie charakteristisch für den Algorithmus von Avis und Fukuda ist.

Zunächst versuchen wir nur  $\mathbb{E}_{m,n}^k(r_\ell)$  zu bestimmen: Dazu betrachten wir nun eine Zielecke mit  $\ell$  auf- und  $n - \ell$  absteigenden Richtungen. Durch das Vorhandensein von  $\ell$  aufsteigenden Richtungen kommt diese auch  $\ell$ -mal als das Ziel eines reversen Pivotschritts in Frage. Nun berechnen wir die mittlere Anzahl der Einträge bis wir auf einen negativen Wert stoßen. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass wir den (sicher) negativen Eintrag in der Zeile zur neuen Basisrestriktion ignorieren, d.h. wir verwenden nun statt  $n$  und  $\ell$  besser die Parameter  $\tilde{n} = n - 1$  und  $\tilde{\ell} = \ell - 1$ .

Aufgrund der beliebigen Permutierbarkeit der Indizes der Restriktionsvektoren in unserem stochastischen Modell können wir davon ausgehen, dass jede Verteilung der  $\tilde{\ell}$  negativen Ein-

träge auf die  $\tilde{n}$  Stellen gleich wahrscheinlich ist. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste negative Eintrag an Platz  $i$  eingenommen wird:

$$\underbrace{\frac{\tilde{n} - \tilde{\ell}}{\tilde{n}}}_{\text{Platz 1}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{n} - \tilde{\ell} - 1}{\tilde{n} - 1}}_{\text{Platz 2}} \cdots \underbrace{\frac{\tilde{n} - \tilde{\ell} - i + 2}{\tilde{n} - i + 2}}_{\text{Platz } i-1} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{\ell}}{\tilde{n} - i + 1}}_{\text{Platz } i} = \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{n} - i + 1} \cdot \prod_{j=0}^{i-2} \frac{\tilde{n} - \tilde{\ell} - j}{\tilde{n} - j}$$

Da es sich hier offensichtlich um ein Laplace-Experiment handelt, kann man sich mit etwas Kombinatorik leicht überlegen, dass dieser Ausdruck identisch mit

$$\frac{1}{\binom{\tilde{n}}{\tilde{\ell}}} \cdot \binom{\tilde{n} - i}{\tilde{\ell} - 1}$$

ist. (Der Nenner entsteht durch die Anzahl aller möglichen Verteilungen der  $\tilde{\ell}$  Minuszeichen auf die  $\tilde{n}$  Stellen. Der Zähler gibt die Anzahl aller Ergebnisse mit erstem Minus an  $i$ -ter Stelle wieder. Für diesen gilt die Überlegung, dass für die ersten  $i - 1$  Stellen schon die Pluszeichen sowie für die  $i$ -te Stelle das Minuszeichen bestimmt sind und nur noch die Anzahl der Möglichkeiten für die Verteilung der verbleibenden  $\tilde{\ell} - 1$  Minuszeichen auf die restlichen  $\tilde{n} - i$  Stellen gezählt werden müssen.)

Der erwartete Platz des ersten negativen Eintrages ergibt sich somit als nachfolgende Reihe:

$$\frac{1}{\binom{\tilde{n}}{\tilde{\ell}}} \sum_{i=1}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} i \cdot \binom{\tilde{n} - i}{\tilde{\ell} - 1}$$

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass für  $\ell = 1$  bzw.  $\tilde{\ell} = 0$  kein negativer Eintrag (außer in der Zeile zur neuen Basisrestriktion) gefunden werden kann und der Binomialkoeffizient  $\binom{\tilde{n}-i}{\tilde{\ell}-1}$  in obiger Reihe wegen  $\tilde{\ell} - 1 < 0$  nicht mehr definiert ist. Daher müssen wir den Fall  $\ell = 1$  gesondert betrachten. Hier werden also die verbleibenden  $n - 1$  Einträge berechnet und mit dem Resultat abgebrochen, dass es sich definitiv um einen reversen Pivotschritt handelt. D.h. hier gilt

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(r_1) = n - 1.$$

Für  $\ell \geq 2$  versuchen wir nun obige Reihe zu berechnen. Dazu machen wir von nachfolgender bekannten Formel (siehe z.B. [BS93]) Gebrauch:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \quad (3.2)$$

Für eine Anwendung der Gleichung (3.2) stört der Faktor  $i$  vor dem Binomialkoeffizienten:

$$\sum_{i=1}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} i \cdot \binom{\tilde{n} - i}{\tilde{\ell} - 1} = \sum_{j=1}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} \sum_{i=j}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} \binom{\tilde{n} - i}{\tilde{\ell} - 1}$$

Nun versuchen wir die Formel (3.2) auf die innere Summe anzuwenden:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=j}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} \binom{\tilde{n}-i}{\tilde{\ell}-1} \stackrel{\lambda:=\tilde{\ell}-1}{=} \sum_{i=j}^{\tilde{n}-\lambda} \binom{\tilde{n}-i}{\lambda} = \\
 & = \binom{\tilde{n}-j}{\lambda} + \binom{\tilde{n}-j-1}{\lambda} + \cdots + \binom{\tilde{n}-\tilde{n}+\lambda}{\lambda} = \\
 & = \binom{\lambda+(\tilde{n}-j-\lambda)}{\lambda} + \binom{\lambda+(\tilde{n}-j-1-\lambda)}{\lambda} + \cdots + \binom{\lambda+1}{\lambda} + \binom{\lambda}{\lambda} = \\
 & = \sum_{i=0}^{\tilde{n}-j-\lambda} \binom{\lambda+i}{\lambda} \stackrel{(3.2)}{=} \binom{\lambda+\tilde{n}-j-\lambda+1}{\lambda+1} = \binom{\tilde{n}-j+1}{\lambda+1} = \binom{\tilde{n}-j+1}{\tilde{\ell}} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis bauen wir nun in unsere Ausgangsreihe ein:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} i \cdot \binom{\tilde{n}-i}{\tilde{\ell}-1} = \sum_{j=1}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} \sum_{i=j}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} \binom{\tilde{n}-i}{\tilde{\ell}-1} \stackrel{(3.3)}{=} \sum_{j=1}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} \binom{\tilde{n}-j+1}{\tilde{\ell}} \stackrel{z:=\tilde{n}+1}{=} \\
 & = \sum_{j=1}^{z-\tilde{\ell}} \binom{z-j}{\tilde{\ell}} = \binom{z-1}{\tilde{\ell}} + \binom{z-2}{\tilde{\ell}} + \cdots + \binom{z-z+\tilde{\ell}+1}{\tilde{\ell}} + \binom{z-z+\tilde{\ell}}{\tilde{\ell}} = \\
 & = \binom{\tilde{\ell}}{\tilde{\ell}} + \binom{\tilde{\ell}+1}{\tilde{\ell}} + \cdots + \binom{\tilde{\ell}+(z-2-\tilde{\ell})}{\tilde{\ell}} + \binom{\tilde{\ell}+(z-1-\tilde{\ell})}{\tilde{\ell}} = \\
 & = \sum_{i=0}^{z-1-\tilde{\ell}} \binom{\tilde{\ell}+i}{\tilde{\ell}} \stackrel{(3.2)}{=} \binom{\tilde{\ell}+z-1-\tilde{\ell}+1}{\tilde{\ell}+1} \stackrel{z:=\tilde{n}+1}{=} \binom{\tilde{n}+1}{\tilde{\ell}+1}
 \end{aligned}$$

Somit beträgt der erwartete Platz:

$$\frac{1}{\binom{\tilde{n}}{\tilde{\ell}}} \sum_{i=1}^{\tilde{n}-\tilde{\ell}+1} i \cdot \binom{\tilde{n}-i}{\tilde{\ell}-1} = \frac{\binom{\tilde{n}+1}{\tilde{\ell}+1}}{\binom{\tilde{n}}{\tilde{\ell}}} = \frac{\tilde{n}+1}{\tilde{\ell}+1} = \frac{n}{\ell}$$

Wenn wir nun noch berücksichtigen, dass an der betrachteten Ecke  $\ell$ -mal der erste negative Eintrag in der Zielfunktionsspalte im Laufe des Algorithmus gesucht wird, so erhalten wir einen erwarteten Aufwand von

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(r_\ell) = \begin{cases} n-1 & \text{für } \ell = 1 \\ \ell \cdot \frac{n}{\ell} = n & \text{für } \ell = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.4)$$

*Bemerkung 3.6.* Im Fall  $\ell = 1$  werden die Anfragen nach dem Vorzeichen eines Eintrages in der Zielfunktionsspalte stets mit „Plus“ beantwortet und daher für die Suche nach einem (weiteren) negativen Eintrag im obigen Erwartungswert (3.4) nur die „Misserfolge“ gezählt. Das Auffinden einer (neben der gerade betrachteten Kante) weiteren Aufstiegsrichtung ist an einer Ecke mit nur einer Aufstiegsrichtung nicht mehr möglich und die Suchanfragen enden erfolglos, sobald die letzte Basiszeile im Tableau erreicht wird. Anders verhält es sich in den Fällen  $\ell = 2, \dots, n$ : Dort fließt neben den vergeblichen Anfragen (d.h. mit „Plus“-Antwort) auch der Erfolgsfall („Minus“-Antwort) mit in den Erwartungswert ein. Dies ist der Hintergrund für die unterschiedlichen Erwartungswerte in den beiden angesprochenen Fällen.

Um nun unseren erwarteten Aufwand

$$\mathbb{E}_{m,n}^k \left( \sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e) \right)$$

zu bestimmen, beachte man, dass aufgrund der beliebigen Permutierbarkeit der Indizes nicht weiter zwischen verschiedenen Ecken aus  $V^\ell$  bei der Erwartungswertbildung unterschieden werden muss. Weiter ist klar, dass für alle Ecken  $e \in V^\ell$  und für alle  $\ell$  die Zufallsgröße  $r_\ell(e)$  nur von den Anordnungen der  $\ell$  negativen Einträge in der Zielfunktionsspalte abhängt. Insbesondere spielt es also keine Rolle, wie viele Ecken es mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen gibt. Daher besteht stochastische Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen  $r_\ell(e)$  und  $\#V^\ell$  für jede beliebige Ecke  $e \in V^\ell$  und für alle  $\ell \in \{1, \dots, n\}$  und somit auch von  $r_\ell$  und  $\#V^\ell$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m,n}^k \left( \sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e) \right) &= \mathbb{E}_{m,n}^k \left( \sum_{\ell=1}^n (\#V^\ell) \cdot r_\ell \right) = \\ &= \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V^\ell) \cdot \mathbb{E}_{m,n}^k (r_\ell) = \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V^1) \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{m,n}^k (r_1)}_{=n-1} + \sum_{\ell=2}^n \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V^\ell) \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{m,n}^k (r_\ell)}_{=n} = \\ &= n \cdot \mathbb{E}_{m,n}^k \left( \sum_{\ell=1}^n \#V^\ell \right) - \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V^1) = n \cdot \left( \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V) - 1 \right) - \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V^1) \leq n \cdot \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses erhalten wir aus Formel (3.1) die erwartete Gesamtkomplexität:

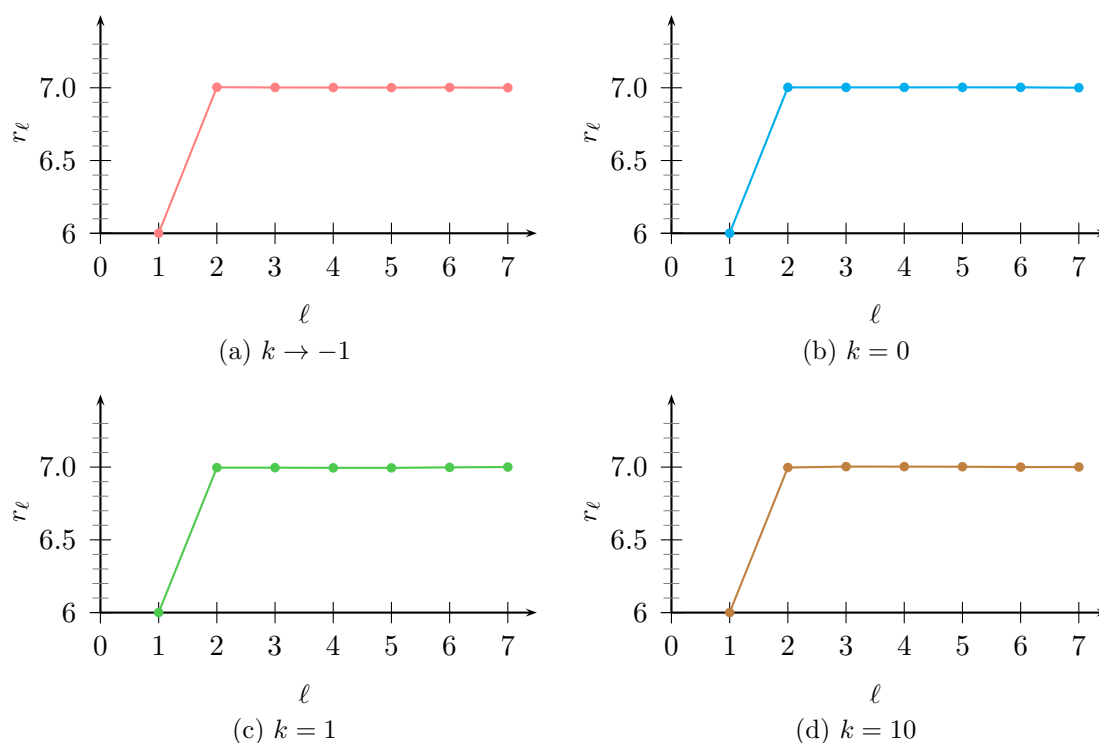
$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(mn^2 + 2mn + \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V) \cdot ((m-n) + 2(mn + \log_2(n)) + n(m-n)) + \\ &\quad + n \cdot \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V) - n - \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V^1) + n \log_2(n)) = \\ &= \mathcal{O}(mn^2 + 2mn - n - \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V^1) + n \log_2(n) + \\ &\quad + \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V) \cdot (3mn + 2 \log_2(n) - n^2 + m)) = \mathcal{O} \left( \mathbb{E}_{m,n}^k (\#V) \cdot mn \right) \end{aligned}$$

### 3.3 Eine empirische Bestätigung unseres Average-Case-Ergebnisses

Als kleine Kontrolle unserer Average-Case-Untersuchung können wir empirisch überprüfen, ob das in Abschnitt 3.2 gewonnene Resultat

$$\mathbb{E}_{m,n}^k (r_\ell) = \begin{cases} n-1 & \text{für } \ell = 1 \\ n & \text{für } \ell = 2, \dots, n. \end{cases}$$

wirklich den Tatsachen entspricht. Dazu zeigen die nachfolgenden Abbildungen den empirischen Mittelwert der Anzahl zu berechnender Einträge in einer Zielfunktionsspalte bei einer Dimension von  $n = 7$  und der Restriktionszahl  $m = 50$ . Auf den Abszissen wird dabei jeweils die Zahl der Aufstiegsrichtungen  $\ell$  variiert.


 Abbildung 3.3: Empirischer Mittelwert für  $r_\ell$  unter  $n = 7$  und  $m = 50$ 

Da die empirischen Ergebnisse kaum von unserem Erwartungswert abweichen, erhalten wir ein starkes Indiz für die Korrektheit unseres Average-Case-Resultats.

*Bemerkung 3.7.* Die Mittelung der empirischen Resultate in Abbildung 3.3 erfolgte in doppelter Weise: Einerseits wurden wie üblich 1.000 Problembeispiele erzeugt und somit bereits Durchschnittswerte gewonnen. Andererseits entstanden die empirischen Werte für  $r_\ell$ , indem bei jeder reversen Pivotüberprüfung die Zahl der zu berechnenden Einträge in der Zielfunktionsspalte gezählt und je nach Zahl der Aufstiegsrichtung an der potentiellen Zielecke eine entsprechende Zählvariable um diesen Wert erhöht wurde. Diese Summen wurden letztlich durch die entsprechende Größe  $\ell \cdot \#V^\ell$  dividiert. Weiter ist es offensichtlich, dass in obigen Graphiken Ergänzungen zu differenzierbaren Kurven uninteressant sind. Daher sind die gewonnenen Einzelwerte lediglich mit geraden Linien verbunden.

*Bemerkung 3.8.* In den Problembeispielen zur Erzeugung der empirischen Daten zu Abbildung 3.3 wurde stets der Zielfunktionsvektor gemäß der Algorithmusformulierung in Abschnitt 3.1 durch die Initialisierungsphase bestimmt ( $c = a_{\Delta^1} + \dots + a_{\Delta^n}$ ). Dies werden wir auch für die nun folgenden empirischen Analysen der Abschnitte 3.4 und 3.5 beibehalten.

### 3.4 Empirische Untersuchung der Auswertungen in der Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung

Bei der Ausführung des Verfahrens von Avis und Fukuda wird man bei jeder Abstiegsrichtung gezwungen, einmal die reverse Blandüberprüfung durchzuführen. Daher ist es nahelie-

gend, sich zumindest empirisch mit der Fragestellung zu beschäftigen, wie viele Einträge in einer Zielfunktionsspalte durchschnittlich pro Abstiegsrichtung auszuwerten sind. Dies soll im Folgenden vorgenommen werden.

Wie wir in Abschnitt 3.2 festgestellt haben, beträgt die Gesamtzahl der für die reversen Pivotüberprüfungen zu berechnenden Einträge in den Zielfunktionsspalten

$$\mathbb{E}_{m,n}^k \left( \sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e) \right) = n \cdot (\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V) - 1) - \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V^1) \leq n \cdot \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V).$$

Betrachtet man ausschließlich beschränkte Polyeder bei Vorliegen von Nichtentartung, so liegt die Zahl der Kanten exakt bei  $\frac{n}{2} \cdot \#V$ . Da jede dieser Kanten für genau eine Ecke auch eine Abstiegsrichtung darstellen muss, d.h. für all diese wird einmal die reverse Pivotüberprüfung stattgefunden haben, bedeutet das, dass pro Abstiegsrichtung weniger als

$$\frac{n \cdot \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V)}{\frac{n}{2} \cdot \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V)} = 2 \quad (3.5)$$

Einträge in einer Zielfunktionsspalte für die reverse Pivotüberprüfung zu berechnen sind. D.h. wenn wir  $m$  groß genug wählen und somit unbeschränkte Polyeder weitgehend ausschließen, so wird der Mittelwert für die Anzahl der Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung knapp unter zwei liegen. Nachfolgende Graphiken zeigen dazu die empirischen Resultate für unsere Parameterfestlegung bei Dimension  $n = 5$  unter Variation von  $m$ .

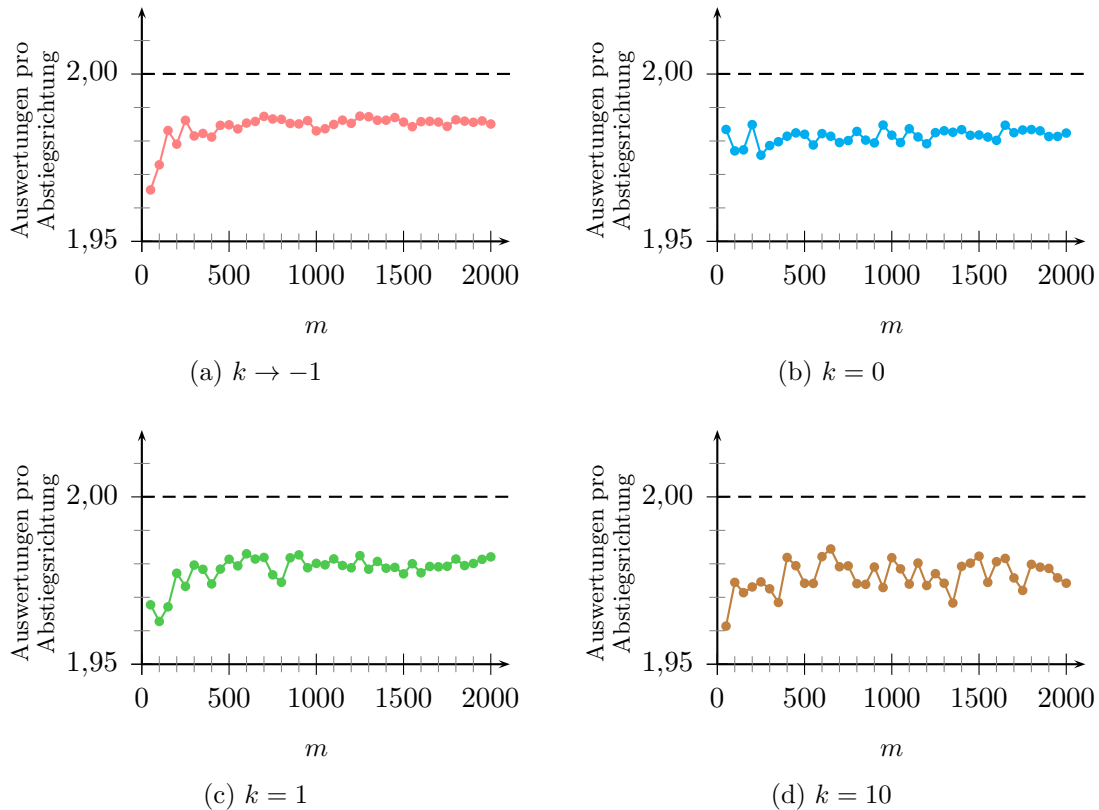


Abbildung 3.4: Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung bei Variation des Parameters  $m$  unter der Dimension  $n = 5$

Wie hier zu sehen ist, liegen unsere empirischen Resultate deutlich unter der Obergrenze bei zwei. Der sehr zackige Verlauf lässt sich auf den engen Ordinatenbereich und die eingeschränkte Mittelung der Ergebnisse zurückführen. Daher wurde in diesen Graphiken die Verbindung der empirischen Einzelwerte zu differenzierbaren Kurven als nicht sinnvoll erachtet.

Einen etwas konstanteren Verlauf der empirischen Ergebnisse werden wir erhalten, wenn die Zahl der Problembeispiele zur Mittelung erhöht wird. Dazu betrachten wir nun unsere Standardfestlegung der Parameter bei Dimension  $n = 7$ . Hierbei werden pro Parameterkombination 1.000 Problembeispiele erzeugt.

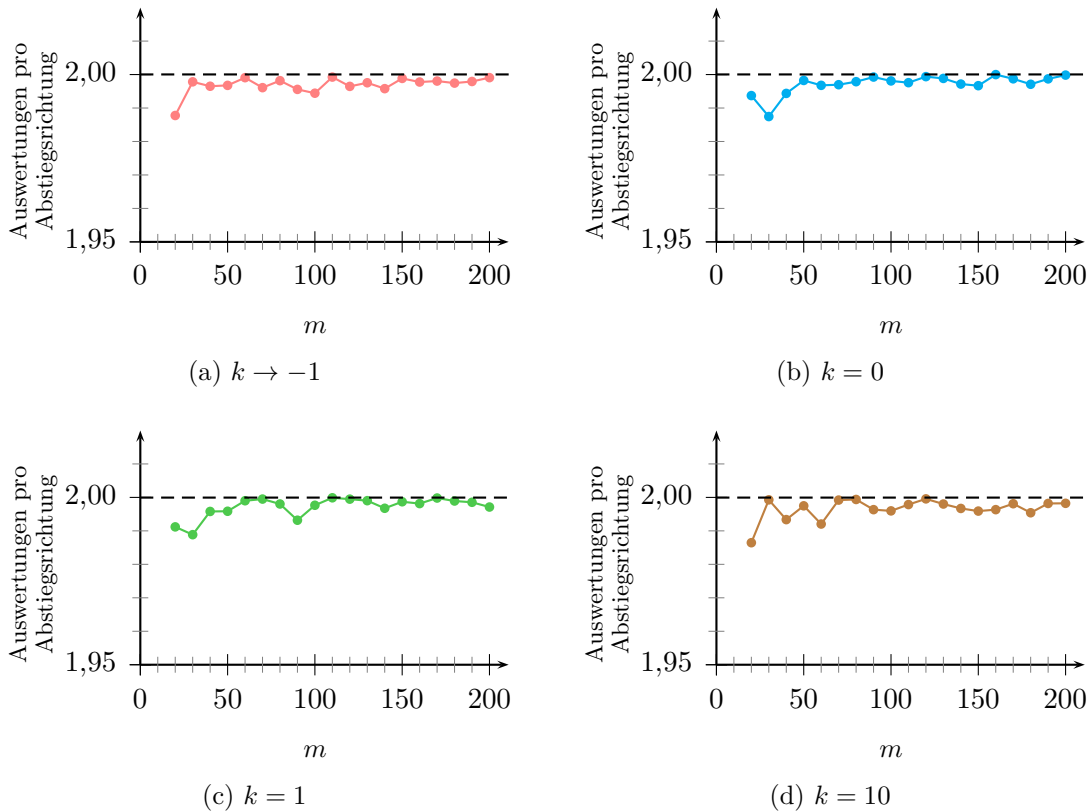


Abbildung 3.5: Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abstiegsrichtung bei Variation des Parameters  $m$  unter der Dimension  $n = 7$

Wie sich hier zeigt, liegt für  $m$  groß genug unsere Untersuchungsgröße schon sehr nahe bei zwei, jedoch meist leicht darunter. Für die empirischen Resultate spielt eine wichtige Rolle, dass in dieser Parameterfestlegung  $\mathbb{E}(\#V^1)$  nur noch einen sehr geringen Anteil bzgl. der Gesamteckenanzahl einnimmt (vgl. Abschnitt 3.5). Somit ist eine Reduzierung des Quotientenwertes diesbezüglich kaum noch vorhanden und die empirischen Werte liegen nur sehr geringfügig unterhalb des Obergrenzenwertes bei zwei. Weiter beachte man, dass wir im Quotienten (3.5) vereinfachend unbeschränkte Probleme ausgeschlossen haben und somit der Obergrenzenwert insgesamt etwas kritisch betrachtet werden muss. Leider bleiben trotz der erhöhten Zahl an Problembeispielen die empirischen Ergebnisse für eine Darstellung als differenzierbare Kurven ungeeignet.



In Analogie hierzu folgen die Graphiken für variierendes  $n$  bei festem  $m = 50$ . Es ist zu erkennen, dass für kleine  $n$  der Anteil von  $\mathbb{E}(\#V^1)$  zur erwarteten Gesamteckenzahl relativ hoch zu sein scheint und daher in diesem Bereich der empirische Quotient noch deutlich unter unserer Oberschranke bei zwei liegt. Für höheres  $n$  befinden sich die empirischen Ergebnisse jedoch schon sehr nahe am Oberschrankenwert. Eine weitere Ungenauigkeit ergibt sich in diesen Fällen durch die erhöhte Wahrscheinlichkeit des Auftretens unbeschränkter Kanten.

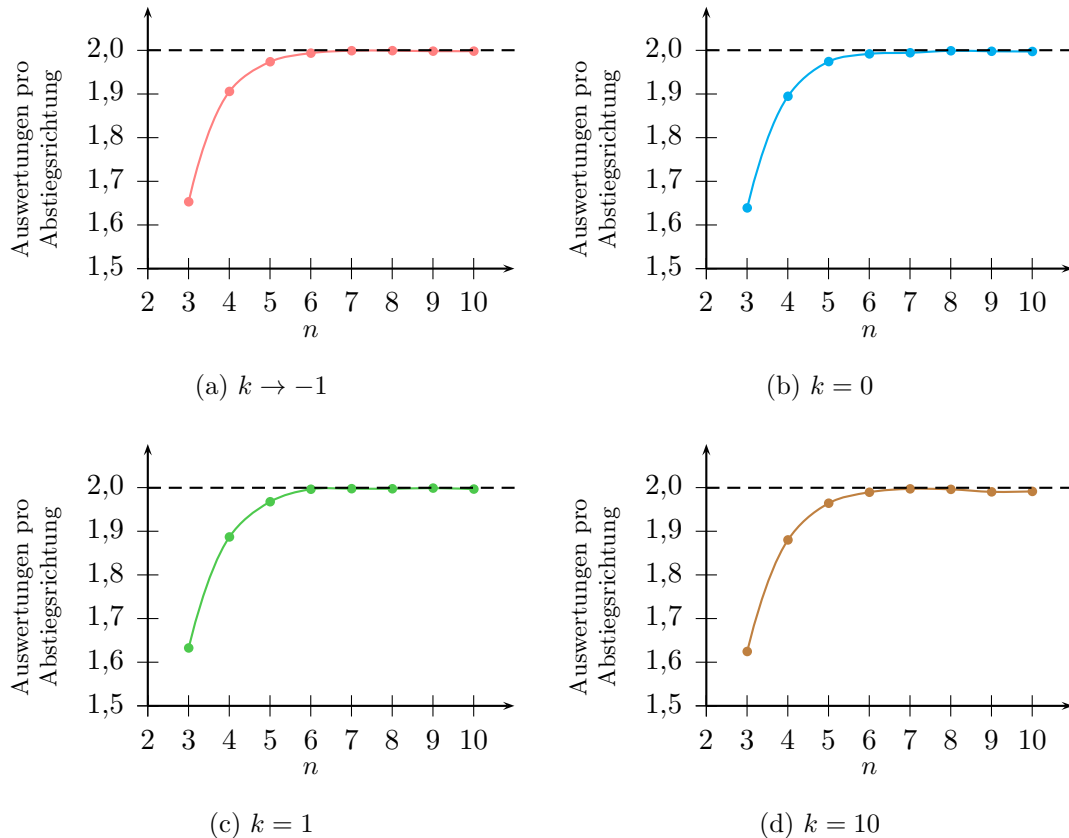


Abbildung 3.6: Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Absteigsrichtung bei Variation der Dimension  $n$  unter  $m = 50$

Die entsprechenden Graphiken zur Untersuchung dieser Zufallsgröße in unserer Alternativfestlegung der Parameter bei variierender Dimension liefern keine weiteren Erkenntnisse und sind im Anhang auf Seite 191 zu finden.

### 3.5 Empirische Untersuchung der Anzahl an Ecken mit einer bestimmten Anzahl aufsteigender Richtungen

In diesem Abschnitt wollen wir der interessanten Frage nachgehen, wie groß die Anzahl der Ecken mit einer bestimmten Zahl an aufsteigenden Richtungen ist. Insbesondere die Anzahl der Ecken mit nur einer Aufsteigsrichtung wird durch unsere Average-Case-Analyse in Abschnitt 3.2 relevant und daher nun etwas in den Vordergrund gerückt.

Zunächst sehen wir uns an, wie viele Ecken mit einer bestimmten Anzahl an aufsteigenden Richtungen im Mittel bei fester Dimension und Restriktionszahl entstehen. Dazu zeigen die Balkendiagramme in Abbildung 3.7 jeweils die durchschnittliche Anzahl der Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen für  $\ell = 0, 1, \dots, 7$  bei Problemen mit 50 Restriktionen im sieben-dimensionalen Raum. D.h. in den nachfolgenden Graphiken werden weder  $m$  noch  $n$  variiert, sondern in Abhängigkeit von  $\ell$  geplottet.

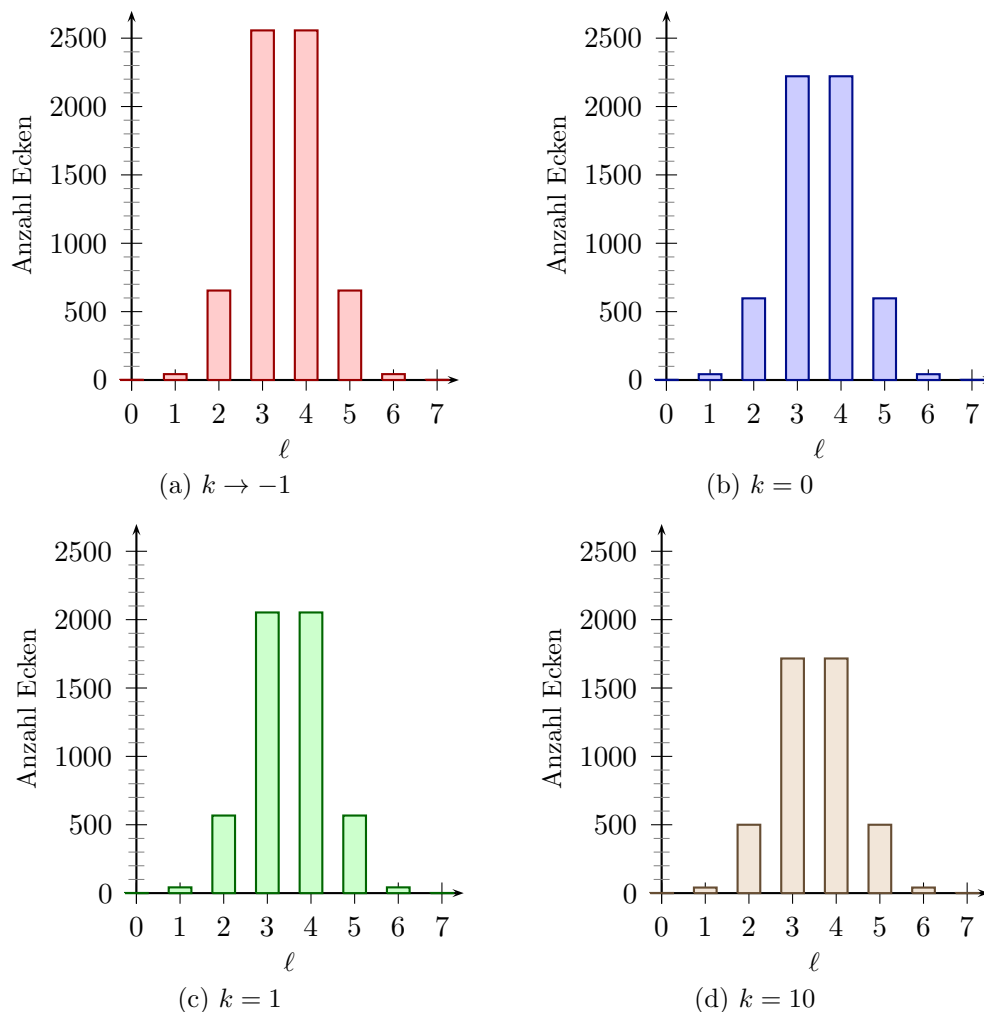


Abbildung 3.7: Verteilung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken hinsichtlich der Anzahl an Aufstiegsrichtungen  $\ell$  bei  $n = 7$  und  $m = 50$

Um sich nicht auf eine ungerade Dimension zu beschränken, entstand die Abbildung 3.8 aus analogen empirischen Untersuchungen mit der Dimension  $n = 8$ .

Wie aus den Säulendiagrammen deutlich zu erkennen ist, besteht die Symmetrie

$$\begin{aligned} &\text{„Durchschnittliche Anzahl der Ecken mit } \ell \text{ Aufstiegsrichtungen“} \\ &= \\ &\text{„Durchschnittliche Anzahl der Ecken mit } n - \ell \text{ Aufstiegsrichtungen“,} \end{aligned}$$

welche sich mit der rotationssymmetrischen Erzeugung der Problembeispiele erklären lässt.

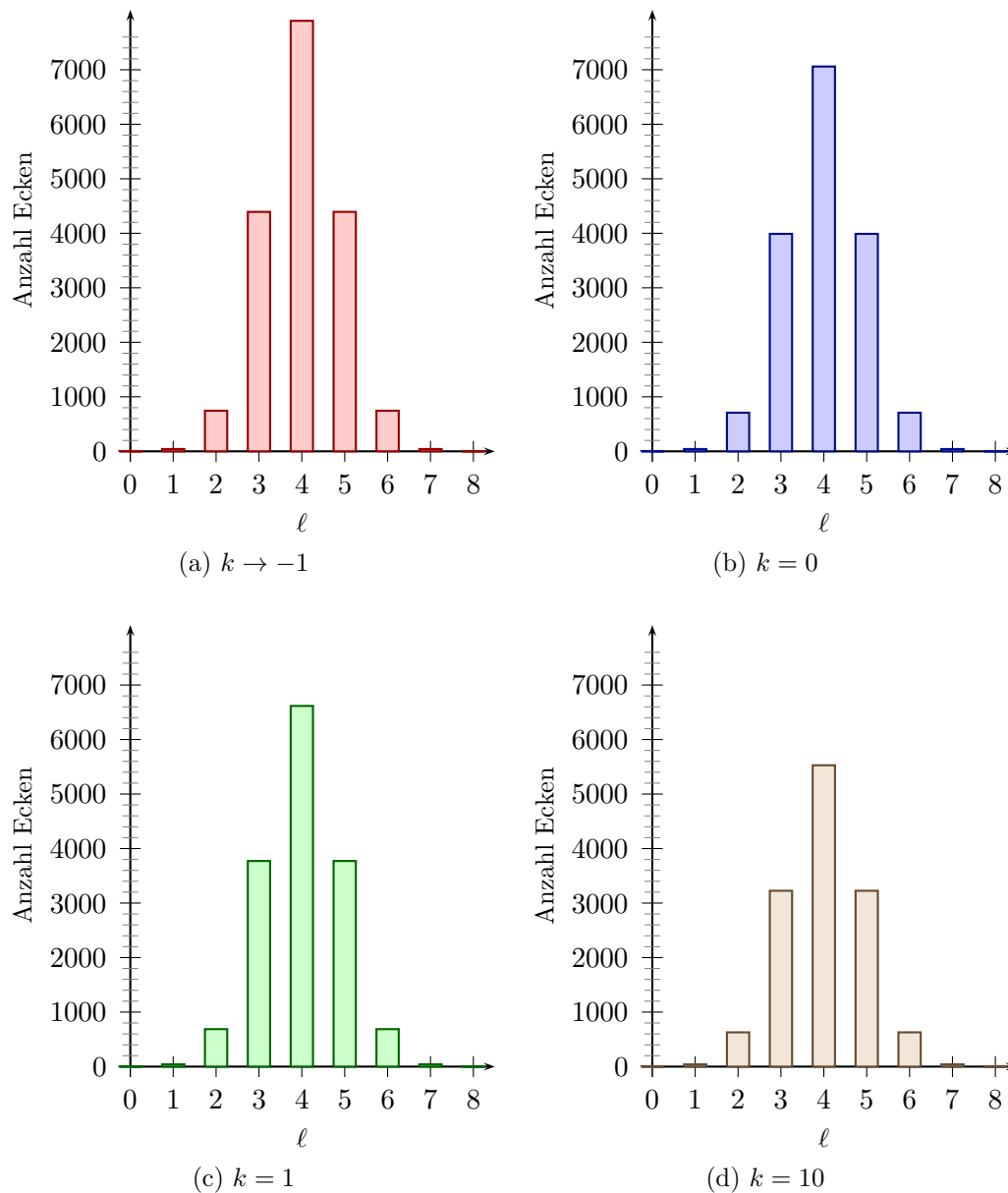


Abbildung 3.8: Verteilung der durchschnittlichen Anzahl an Ecken hinsichtlich der Anzahl an Aufstiegsrichtungen  $\ell$  bei  $n = 8$  und  $m = 50$

Um einen besseren Vergleich zwischen den verschiedenen Verteilungsparametern zu ermöglichen, sind jeweils die vier Untersuchungen in der Abbildung 3.9 vereinigt. Hier zeigt sich, dass kleine Werte des Parameters  $k$  nicht nur insgesamt zu tendenziell mehr Ecken führen (vgl. dazu Abschnitt 1.8), sondern sich auch die Zahl der Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen für jedes  $\ell \in \{2, \dots, n-2\}$  erhöht. Besonders auffällig ist, wie deutlich die Zahl der Ecken mit  $\frac{n}{2}$  bzw.  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  und  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  Aufstiegsrichtungen überwiegt. Je mehr man sich von der „Mitte“ entfernt, um so geringer fällt die entsprechende Eckenzahl aus. Dementsprechend verringern sich auch die absoluten Differenzen der Eckenzahlen bei verschiedenen Verteilungsparametern je weiter  $\ell$ , die Zahl an Aufstiegsrichtungen, von  $\frac{n}{2}$  entfernt liegt.

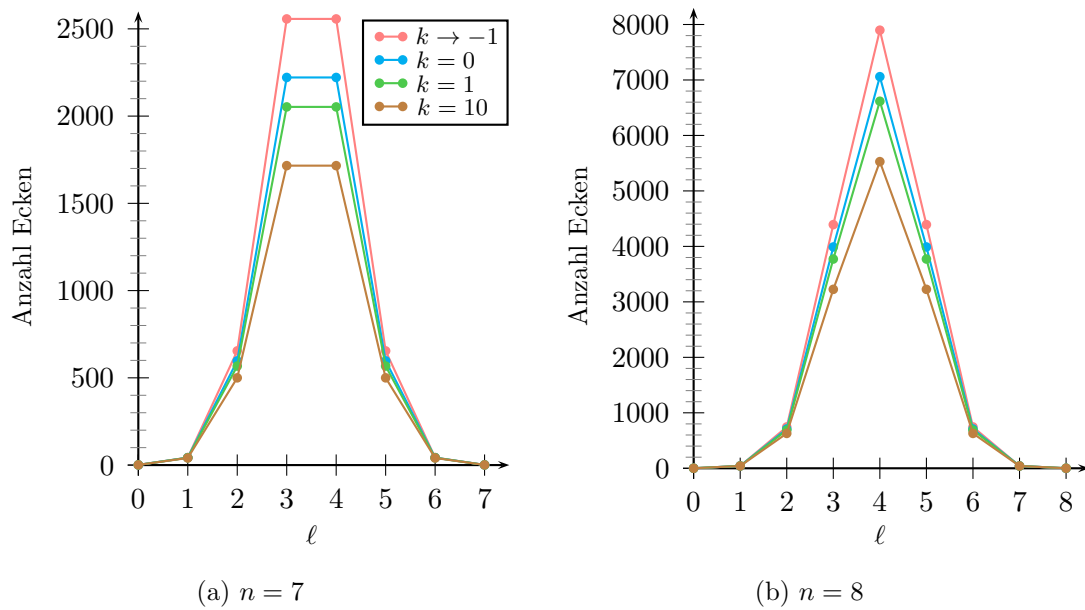


Abbildung 3.9: Alle Plots der Abbildungen 3.7 bzw. 3.8 in einer Graphik

Interessant ist auch der Anteil der Ecken mit einer bestimmten Anzahl an aufsteigenden Richtungen im Verhältnis zur Gesamtzahl an Ecken. Dies wird in Abbildung 3.10 wiedergegeben. Die Graphiken legen hier nahe, dass der Einfluss des Parameters  $k$  diesbezüglich als äußerst gering eingestuft werden kann. Das bedeutet, dass der Verteilungsparameter an der grundsätzlichen Aufteilung der Eckenzahlen nach ihrer Anzahl an Aufstiegs-kanten kaum mitwirkt.

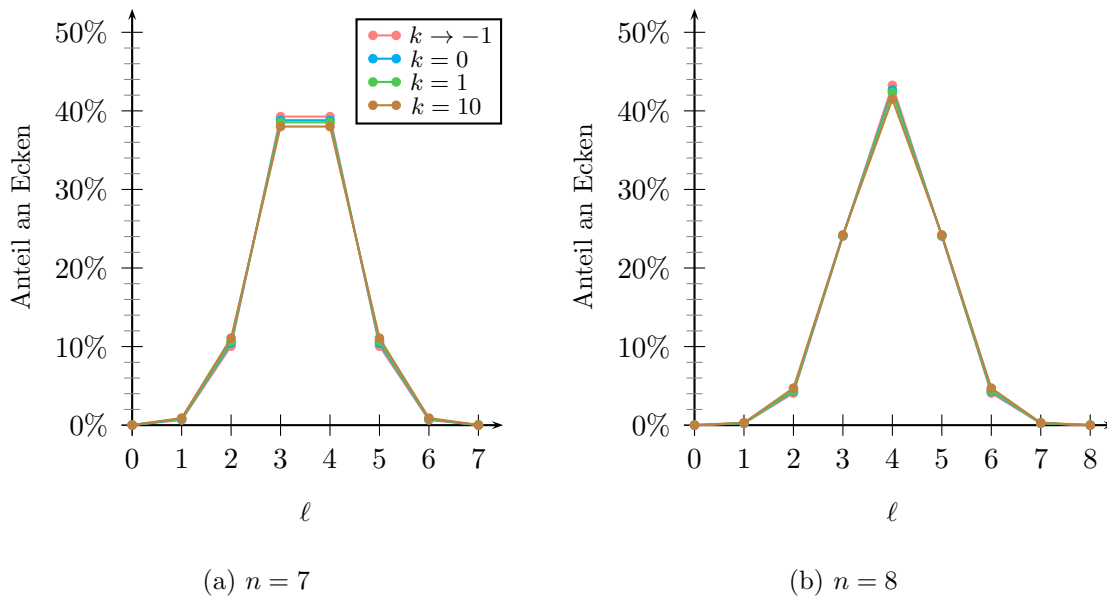


Abbildung 3.10: Durchschnittlicher Anteil der Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen im Verhältnis zur Gesamtzahl der Ecken

Von besonderem Interesse ist für die Aufwandsanalyse der Wert  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V^1)$ . Wie man in obigen Graphiken sieht, ist der empirische Anteil dieser Ecken im Verhältnis zur Gesamteckenanzahl fast bei 0%. Die realen Werte lagen bei beiden obigen Parameterkombinationen jeweils klar unter 1%.

Wir wollen nun die Anzahl der Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen für variierende Parameter  $m$  und  $n$  untersuchen. Zunächst betrachten wir bei Gleichverteilung der Restriktionsvektoren auf der Kugeloberfläche und fester Dimension  $n = 7$  den Einfluss der Änderung des Parameters  $m$ .

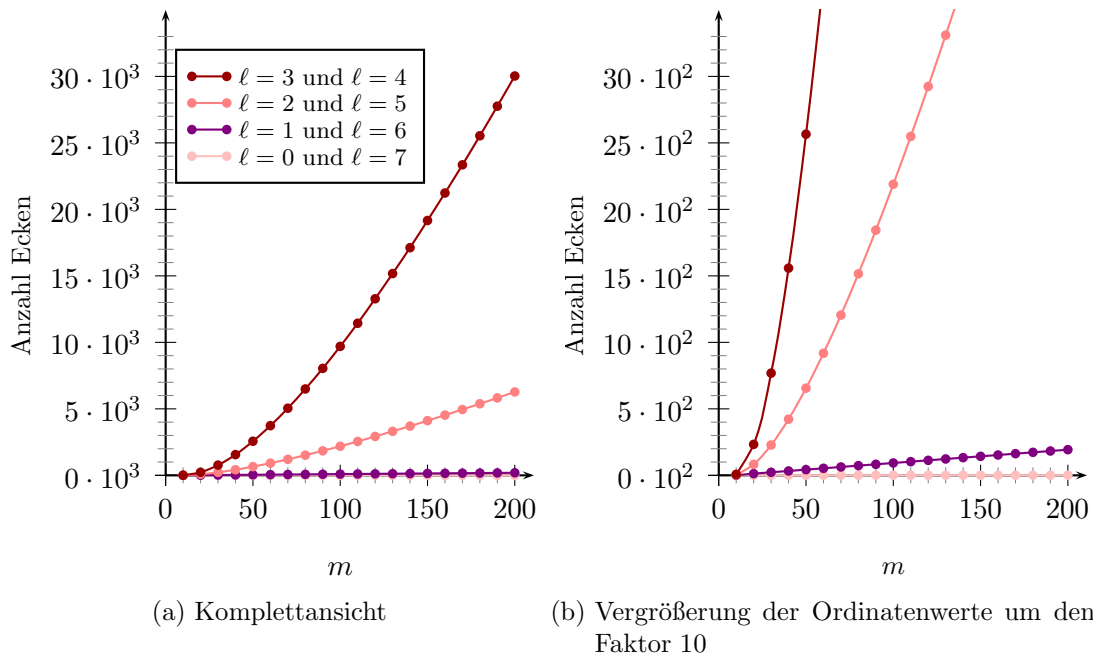


Abbildung 3.11: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Dimension  $n = 7$  und Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  unter Variation der Restriktionszahl  $m$

In diesen Graphiken bestätigen sich erneut obige Eindrücke. Insbesondere scheinen sich die jeweiligen Eckenzahlen immer mehr voneinander zu entfernen. Weiter fällt die Ähnlichkeit des Verlaufs der beiden Kurven mit den höheren Ordinatenwerten ( $\ell = 2, 3, 4, 5$ ) mit der empirischen Kurve aus Abbildung 1.10 (siehe Seite 40) auf, in der die durchschnittliche Gesamteckenanzahl für diese Parameterkombination dargestellt wurde.

Die entsprechenden Abbildungen zu den Verteilungsparametern  $k = 0$ ,  $k = 1$  und  $k = 10$  weisen große Ähnlichkeit zur Abbildung 3.11 auf und wurden daher in den Anhang (ab Seite 192) verschoben. Hier ist lediglich zu erwähnen, dass mit Erhöhung von  $k$  die Kurvenverläufe geringfügig flacher anzusteigen scheinen.

Nachfolgende Abbildung 3.12 beschäftigt sich mit der Variation der Dimension bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$ . Hier wurden der Übersichtlichkeit halber die Verläufe der Kurven für verschiedene  $\ell$  in zwei Graphiken aufgeteilt.

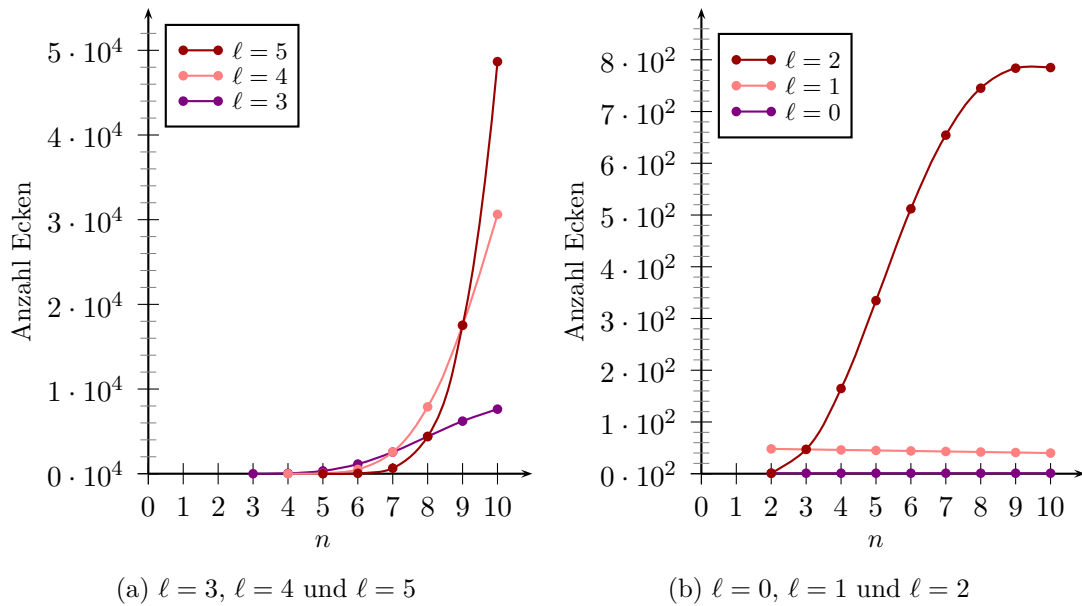


Abbildung 3.12: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl  $m = 50$  und Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  unter Variation der Dimension  $n$

Bis auf die Fälle  $\ell = 0$  und  $\ell = 1$  steigt jeweils die durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei Erhöhung der Dimension für unsere Parameterfestlegung. Man beachte zur Erläuterung der Kurvenverläufe, dass mit Erhöhung der Dimension auch die Zahl der Möglichkeiten für den Parameter  $\ell$  zunimmt. Nähert sich ein festes  $\ell$  durch ein höheres  $n$  mehr dem Wert  $\frac{n}{2}$  an, so ist eine deutliche Steigerung der Eckenzahl festzustellen. Dieser Effekt wird dabei noch durch die Tatsache verstärkt, dass auch die Zahl der Ecken bei Erhöhung von  $n$  in unserem Parameterbereich deutlich zunimmt (vgl. dazu Abschnitt 1.8).

Während sich aus unserem Modell leicht  $\mathbb{E}(\#V^0) = 1$  folgern lässt, ist der fallende Verlauf der Kurve für  $\ell = 1$  schwieriger zu erklären. Da wir die empirische Analyse sinnvollerweise erst bei  $n = 2$  starten, also gerade dort, wo  $\frac{n}{2} = 1$  ist, hat hier die Kurve ihren Höhepunkt. Eine Erhöhung der Dimension bewirkt zwar für unsere Parameterfestlegung eine größere Gesamteckenzahl (siehe Abschnitt 1.8), diese scheint sich aber für  $\ell = 1$  aufgrund der nun weiteren Möglichkeiten für Werte des Parameters  $\ell$  und dem Entfernen von  $\ell = 1$  von der „Mitte“ negativ auf  $\#V^1$  auszuwirken. Ähnliches scheint sich auch mit etwas Verzögerung für  $\ell = 2$  anzudeuten. Hier ist beim Übergang von  $n = 9$  auf  $n = 10$  eine Steigerung kaum noch feststellbar.

Erneut wurden die entsprechenden Abbildungen für  $k = 0$ ,  $k = 1$  und  $k = 10$  in den Anhang (ab Seite 193) ausgelagert.

Betrachten wir nun unsere alternative Festlegung der Parameter, so stellen wir bei Variation der Restriktionszahl  $m$  für die Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  auf der Kugeloberfläche fest, dass für alle  $\ell$  der Verlauf der Eckenzahl linear zu sein scheint. Dies führt erneut zu der Erkenntnis, dass auch die Gesamteckenzahl annähernd linear ansteigt, wie bereits in Abschnitt 1.8 (siehe Abbildung 1.11, Seite 41) bemerkt wurde.

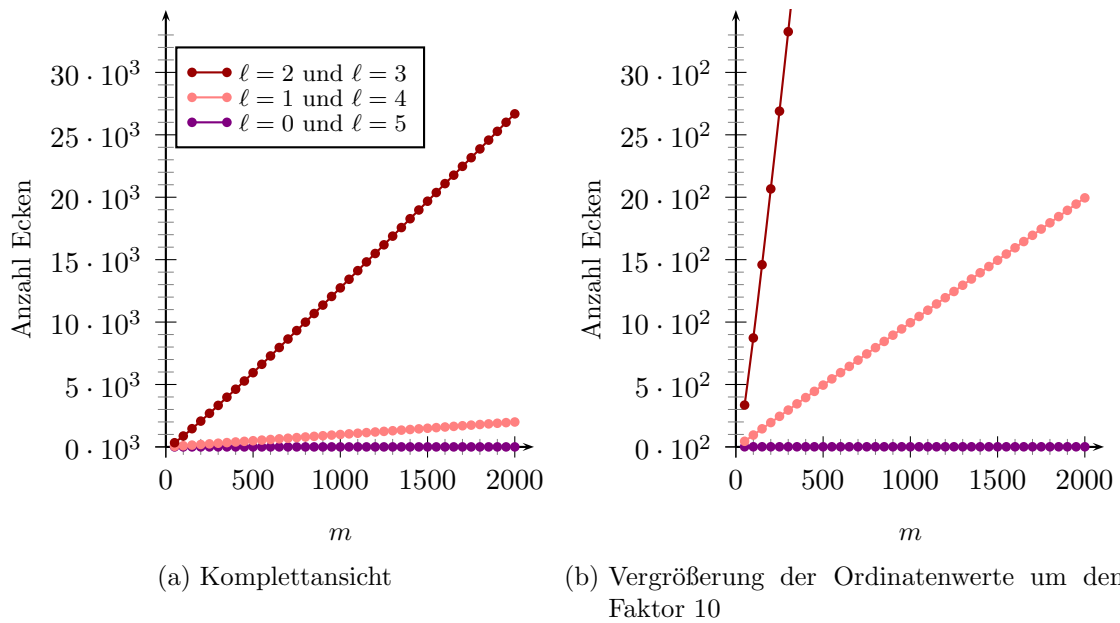


Abbildung 3.13: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $n = 5$  und  $k \rightarrow -1$  unter Variation des Parameters  $m$

Für die Verteilungsparameter  $k = 0$ ,  $k = 1$  und  $k = 10$  können wir – wie bei der Gesamteckenanzahl (siehe Abschnitt 1.8) – stets einen sublinearen Verlauf der Eckenzahlen feststellen. Lediglich die Kurve für  $\ell = 0$  und  $\ell = 5$  bleibt konstant bei eins, was sich unmittelbar aus der Eindeutigkeit des Optimalpunktes ergibt. Stellvertretend wird daher im Folgenden nur die Graphik zu  $k = 1$  angegeben. Die Abbildungen zu  $k = 0$  und  $k = 10$  sind im Anhang ab Seite 195 zu finden.

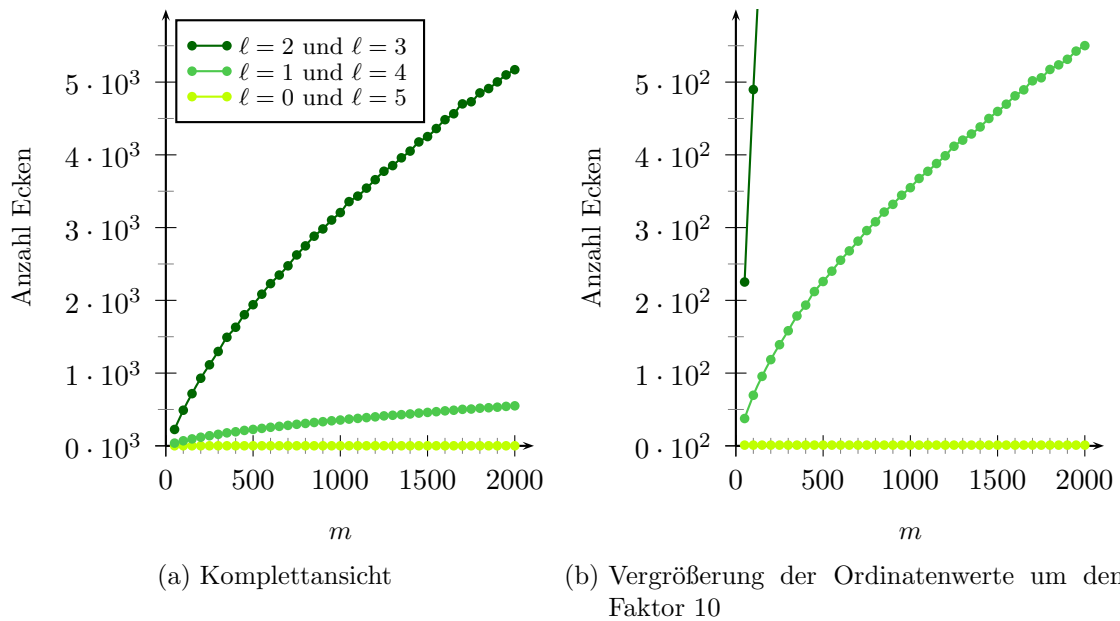


Abbildung 3.14: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $n = 5$  und  $k = 1$  unter Variation des Parameters  $m$

Betrachten wir nun die Alternativfestlegung der Parameter bei Variation von  $n$ , so erkennen wir erneut einen extrem starken Anstieg der Eckenzahlen, der sich vor allem für  $\ell$  nahe bei  $\frac{n}{2}$  widerspiegelt. Wiederum fällt einzig die Kurve für  $\#V^1$ , was jedoch aufgrund der Skalierung nicht mehr in der Graphik zu erkennen ist. Aufgrund der großen Ähnlichkeit der zugehörigen Graphiken für verschiedene Verteilungsparameter ist nachfolgend nur die Abbildung für die Gleichverteilung der Restriktionsvektoren auf der Kugeloberfläche aufgeführt. Die entsprechenden Bilder für die anderen Verteilungsparameter sind im Anhang ab Seite 196 zu finden. Hier bestätigt Abbildung 3.15 weitgehend bisherige Eindrücke.

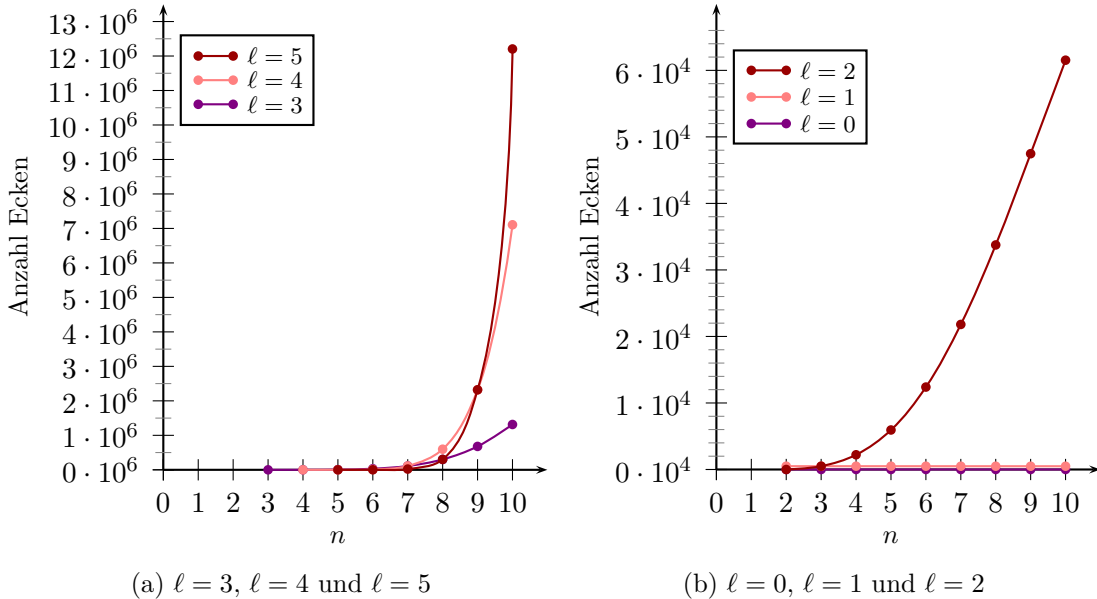


Abbildung 3.15: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $m = 500$  und  $k \rightarrow -1$  unter Variation des Parameters  $n$

### 3.6 Untersuchung der Auf- und Abstiegs wahrscheinlichkeit

Der Algorithmus von Avis und Fukuda tangiert unmittelbar die interessante Problemstellung, mit welcher Wahrscheinlichkeit man bei einer Ecke auf eine Ab- oder Aufstiegs kantenrichtung trifft. Auch wenn dies die Average-Case-Analyse der Komplexität nicht nennenswert prägt (vgl. Abschnitt 3.2), handelt es sich hierbei um eine reizvolle Fragestellung, der wir nun nachgehen wollen.

Es werde im Folgenden davon ausgegangen, dass der Zielfunktionsvektor nicht aus der Initialisierungsphase des Verfahrens von Avis und Fukuda resultiert, sondern ebenfalls rotations-symmetrisch (und unabhängig von den Restriktionsvektoren) generiert wird. Es sei also ein in unserem stochastischen Modell erzeugtes Optimierungsproblem

$$\max z^T x \quad \text{unter} \quad x \in X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1\}$$

zu lösen. O.B.d.A. untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Ecke  $x_\Delta$  von  $X$  mit

$$\sphericalangle(x_\Delta, z) = \varphi \in (0, \pi)$$



eine beliebige, von  $x_\Delta$  ausgehende Kante die Zielfunktion verbessert, also eine aufsteigende Kante darstellt. Dabei bezeichne  $\Delta$  die ( $n$ -elementige) Menge der Basisindizes bei  $x_\Delta$ . O.B.d.A. nehmen wir an, dass  $\Delta = \{1, \dots, n\}$  ist. Weiter sei  $z \in \omega_n$ . Da alleine die Richtung des Zielfunktionsvektors ausschlaggebend für das Aufstiegskriterium einer Kante ist, können wir ohne Einschränkung von der Länge eins für  $z$  ausgehen. Der Wert von  $\varphi$  symbolisiert grob eine bereits erreichte Qualität der Annäherung an das Maximum (je kleiner  $\varphi$  ist, desto näher ist man tendenziell an der Optimalstelle). Da in unserem stochastischen Modell der Vektor  $z$  rotationssymmetrisch und unabhängig von  $a_1, \dots, a_m$  erzeugt wird, ist durch die Bedingung  $\varphi = \sphericalangle(x_\Delta, z)$  die Lage von  $z$  bei weitem noch nicht festgelegt, sondern  $z$  kann sich gleichverteilt auf der Oberfläche einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Kugel befinden. Um dadurch keine stochastische Nullmenge zu betrachten, ändern wir diese Bedingung mit Hilfe einer beliebig kleinen, aber festen Konstante  $\varepsilon > 0$  zu

$$\sphericalangle(x_\Delta, z) \in [\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon]$$

ab. Wir interessieren uns nun in Abhängigkeit von  $\varphi$  und  $\varepsilon$  für die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Kante bei  $x_\Delta$  ein positives Skalarprodukt mit  $z$  bildet, also eine Aufstiegsrichtung darstellt. O.B.d.A. betrachten wir die Kantenrichtung  $d_{\Delta,n}$ , die die Restriktionen mit den Indizes  $i \in \Delta \setminus \{n\}$  straff hält und  $a_n^T x \leq 1$  lockert, also

$$d_{\Delta,n} \in \{d \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T d = 0, \dots, a_{n-1}^T d = 0, a_n^T d < 0\}.$$

Die Abbildungen 3.16 und 3.17 stellen die Ausgangslage unserer Problemstellung für einen Winkel  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  bzw.  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  bildlich dar. Da die Kantenlänge an sich unbekannt ist, wurde hier jeweils die Richtung  $d_{\Delta,n}$  o.B.d.A. mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  eingezeichnet. Diese Verkürzung wird ausschließlich der Übersichtlichkeit späterer Abbildungen dienen, die unser Vorgehen zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit angewandt auf das bildliche Beispiel wiedergeben.

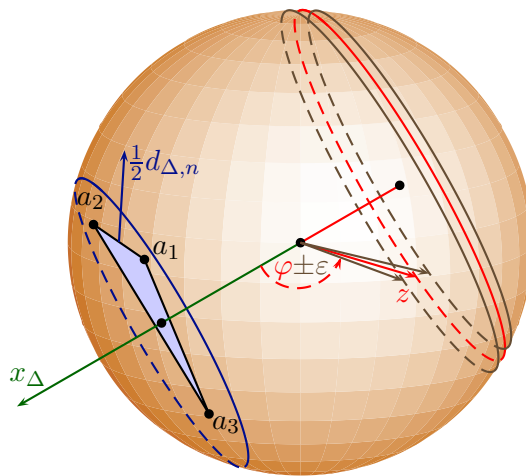


Abbildung 3.16: Veranschaulichung der Ausgangslage unserer Problemstellung bei einem Winkel  $\varphi > \frac{\pi}{2}$

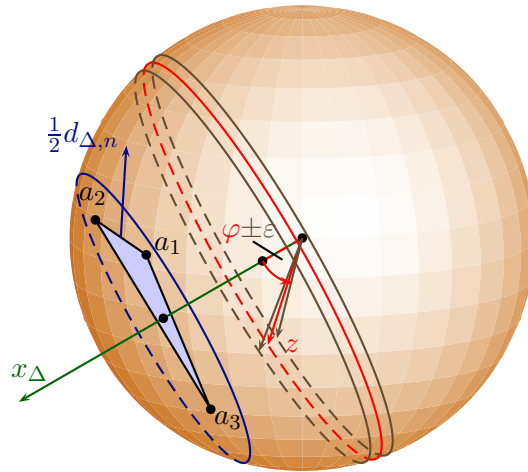


Abbildung 3.17: Veranschaulichung der Ausgangslage unserer Problemstellung bei einem Winkel  $\varphi < \frac{\pi}{2}$

Sei  $E_1$  das Ereignis, dass es sich bei  $x_\Delta$  um eine zulässige Basislösung (also eine Ecke) des Polyeders  $X$  handelt. Mit  $E_2$  werde das Ereignis bezeichnet, dass der Zielfunktionsvektor  $z$  mit  $x_\Delta$  einen Winkel im Bereich  $[\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon]$  einschließt.  $E_3$  gebe das Ereignis an, dass der Vektor  $d_{\Delta,n}$  – wie oben gewählt – ein positives Skalarprodukt mit  $z$  bildet. Ereignis  $E_4$  trete ein, wenn  $d_{\Delta,n}$  eine Kantenrichtung in  $X$  darstellt. Mit anderen Worten,  $E_3$  und  $E_4$  sorgen dafür, dass  $d_{\Delta,n}$  eine Aufstiegskantenrichtung im Polyeder  $X$  bzgl.  $z$  bildet. Unsere gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit  $\mathbb{P}(E_3 \wedge E_4 \mid E_1 \wedge E_2)$ .

Tritt das Ereignis  $E_1$  ein, so ist allerdings schon sichergestellt, dass es sich bei  $d_{\Delta,n}$  um eine Kantenrichtung in  $X$  handelt. Daher kann auf das Ereignis  $E_4$  verzichtet werden und es bleibt nur noch der Wert des Skalarproduktes fraglich. Somit gilt:

$$\mathbb{P}(E_3 \wedge E_4 \mid E_1 \wedge E_2) = \mathbb{P}(E_3 \mid E_1 \wedge E_2)$$

BEZEICHNUNG	EREIGNIS
$E_1$	$x_\Delta$ Ecke von $X$
$E_2$	$\angle(x_\Delta, z) \in [\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon]$
$E_3$	$z^T d_{\Delta,n} > 0$
$E_4$	$d_{\Delta,n}$ Kantenrichtung in $X$

Tabelle 3.2: Übersicht der verwendeten Ereignisse

Auf den folgenden Seiten beschäftigen wir uns nun für festes  $\varphi$ ,  $m$  und  $n$  mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(E_3 \mid E_1 \wedge E_2)$ . Hierzu werden wir zumindest asymptotisch zu einer Auswertung kommen. Der Begriff „asymptotisch“ wird dabei von uns im Sinne von

$$m \rightarrow \infty, n \text{ fest (bzw. } m \gg n) \text{ und } \varphi \text{ konstant}$$

verwendet. Hier gelingt uns der Nachweis des nachfolgenden Resultates:

**Satz 3.9.** Für festes  $n$  und  $\varphi$  gilt bei  $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(E_3 | E_1 \wedge E_2) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Zumindest der erste Teil unserer Ausführungen im nachfolgenden Beweis ist auch für moderates  $m$  gültig. Es wird explizit darauf hingewiesen werden, wenn wir in die asymptotische Betrachtungsweise übergehen.

*Beweis.* Aus der Stochastik ist bekannt, dass

$$\mathbb{P}(E_3 | E_1 \wedge E_2) = \frac{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)}{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2)}$$

gilt. Wir wollen zunächst das Integral für den Zähler aufstellen. Dazu sei im Folgenden

$$\hat{f}^{k \rightarrow -1}(x) = \hat{f}^{k \rightarrow -1}(x^1, \dots, x^n)$$

die Dichtefunktion für die Gleichverteilung eines Punktes auf der Oberfläche der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel. Diese wird speziell für den Zielfunktionsvektor  $z$  benötigt. Somit gilt:

$$\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{E_1\}} \cdot \mathbf{1}_{\{E_2\}} \cdot \mathbf{1}_{\{E_3\}} \hat{f}(a_1) \dots \hat{f}(a_m) \hat{f}^{k \rightarrow -1}(z) da_1 \dots da_m dz$$

Halten wir  $a_1, \dots, a_n$  fest, so stellen wir fest, dass das Ereignis  $E_1$  nur noch von  $a_{n+1}, \dots, a_m$  abhängt. Die Ereignisse  $E_2$  und  $E_3$  sind dann nur noch von  $z$  abhängig. Es folgt also:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} G(h(a_1, \dots, a_n))^{m-n} \mathbf{1}_{\{E_2\}} \mathbf{1}_{\{E_3\}} \hat{f}(a_1) \dots \hat{f}(a_n) \hat{f}^{k \rightarrow -1}(z) da_1 \dots da_n dz \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Situation, nachdem zwei Koordinatentransformationen vorgenommen wurden (vgl. [Bor87, S. 134–137, 143–146]):

$$a_1, \dots, a_n \xrightarrow{1. \text{ Transf.}} b_1, \dots, b_n \xrightarrow{2. \text{ Transf.}} c_1, \dots, c_n$$

Dabei weisen die Vektoren  $b_1, \dots, b_n$  und  $c_1, \dots, c_n$  folgende Gestalt auf:

$$b_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^{n-1} \\ h \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad h \geq 0$$

$$c_i = \begin{pmatrix} c_i^1 \\ \vdots \\ c_i^{n-2} \\ \vartheta \\ h \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad c_n = \begin{pmatrix} c_n^1 \\ \vdots \\ c_n^{n-1} \\ h \end{pmatrix}, \quad h \geq 0, \quad \vartheta \geq 0$$

Zur einfacheren Notation sei weiter:

$$\bar{c}_i = \begin{pmatrix} c_i^1 \\ \vdots \\ c_i^{n-2} \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \bar{c}_i = \begin{pmatrix} c_i^1 \\ \vdots \\ c_i^{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

Die zwei Transformationen haben natürlich auch Auswirkungen auf die Vektoren  $x_\Delta$  und  $z$ . Ersterer ändert sich bereits nach der ersten Transformation zu

$$\xi_\Delta = \left( 0, \dots, 0, \frac{1}{h} \right)^T.$$

Da die zweite Transformation eine beliebige Drehung um die  $x^n$ -Achse darstellt, beeinflusst diese  $\xi_\Delta$  nicht weiter.

Bezüglich  $z$  sind konkrete Aussagen über den neuen Vektor  $\zeta$  nach den beiden Transformationen schwieriger zu treffen. Jedoch bleibt festzuhalten, dass trotz beider Drehungen die relative Lage zwischen den betrachteten Vektoren bestehen bleibt. D.h. es gilt

$$\sphericalangle(x_\Delta, z) = \sphericalangle(\xi_\Delta, \zeta).$$

Wir erinnern daran, dass uns vorwiegend solche  $\zeta$  interessieren, bei denen

$$\sphericalangle(\xi_\Delta, \zeta) \in [\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon]$$

ist. Da nach unserer Annahme  $\|\zeta\| = 1$  ist, gilt für  $h > 0$  und einen Winkel  $\psi \in [\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon]$  zwischen  $x_\Delta$  und  $z$  bzw.  $\xi_\Delta$  und  $\zeta$ :

$$\cos(\psi) = \frac{\xi_\Delta^T \zeta}{\|\xi_\Delta\| \cdot \|\zeta\|} = \frac{\frac{1}{h} \cdot \zeta^n}{\frac{1}{h} \cdot 1} = \zeta^n \Rightarrow \zeta^n \in [\cos(\varphi + \varepsilon), \cos(\varphi - \varepsilon)] \quad (3.6)$$

Der Fall  $h = 0$  bildet eine Nullmenge und kann daher vernachlässigt werden. Weiter beachte man, dass die Kosinusfunktion im Bereich  $[0, \pi]$  streng monoton fallend ist, weswegen für beliebiges  $\varepsilon > 0$  und  $\varphi \in (0, \pi)$

$$\cos(\varphi - \varepsilon) > \cos(\varphi + \varepsilon)$$

gilt.

Der Sachverhalt zu (3.6) war bereits nach der ersten Transformation ersichtlich. Bei dieser wird  $z$  auf die Höhe  $\cos(\psi)$  gedreht. Da es sich bei der zweiten Transformation um eine beliebige Drehung um die  $x^n$ -Achse handelt, liegt  $\bar{\zeta} = (\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1})^T$  gleichverteilt auf der Oberfläche der  $(n-1)$ -dimensionalen Kugel mit Radius

$$\sqrt{1 - \cos^2(\psi)} = |\sin(\psi)|$$

bei Höhe

$$\zeta^n = \cos(\psi).$$

Die beiden nachfolgenden Graphiken zeigen jeweils die Gesamtsituation für das Beispiel aus Abbildung 3.16 bzw. 3.17 nach Durchführung der zwei Koordinatentransformationen.

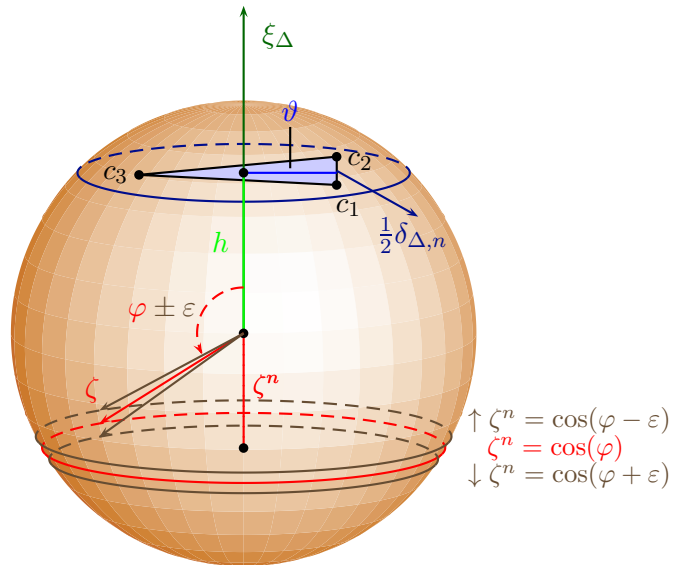


Abbildung 3.18: Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für  $\varphi > \frac{\pi}{2}$

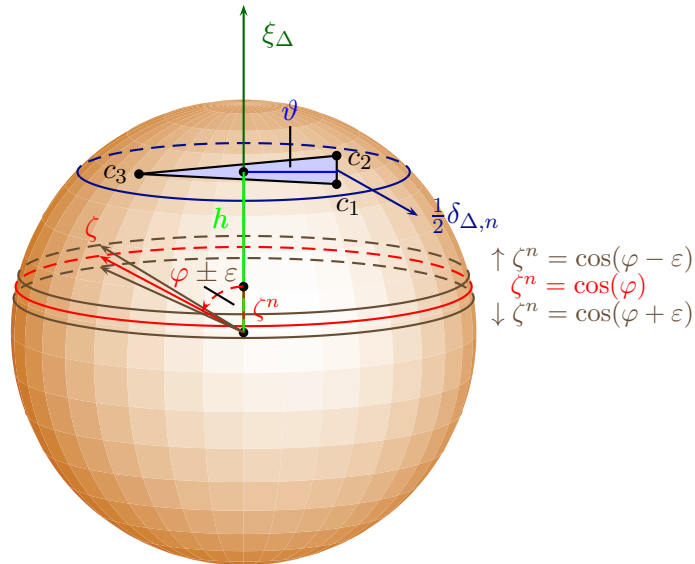


Abbildung 3.19: Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für  $\varphi < \frac{\pi}{2}$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde nun ein Zielfunktionsvektor  $z$  erzeugt, der überhaupt in unserem Winkelbereich liegt? Dies können wir in unserem Integral über  $\zeta$  mittels der Erkenntnis aus (3.6) berücksichtigen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) &= ((n-2)!)^2 \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n) \\ &\int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\ &\int_{\cos(\varphi+\varepsilon)}^{\cos(\varphi-\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \zeta^n) \cdot \mathbb{1}_{\{\tilde{E}_3\}} d\bar{\zeta} d\zeta^n \\ &\hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n d\vartheta dh \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\tilde{E}_3$  das Ereignis  $E_3$  angepasst auf die Koordinatentransformationen. Wir müssen uns nun noch um die Wahrscheinlichkeit kümmern, dass Zielfunktionsvektor und Kantenrichtung ein positives Skalarprodukt bilden für den Fall, dass  $\zeta^n$  im relevanten Bereich  $[\cos(\varphi + \varepsilon), \cos(\varphi - \varepsilon)]$  liegt.

Wie sieht nach den Transformationen die neue Kantenrichtung  $\delta_{\Delta,n}$  aus? Senkrecht auf allen Vektoren  $c_1, \dots, c_{n-1}$  stehen die Vektoren

$$\nu_1 = (0, \dots, 0, h, -\vartheta)^T \quad \text{und} \quad \nu_2 = (0, \dots, 0, -h, \vartheta)^T.$$

Welcher von beiden hat nun ein negatives Skalarprodukt mit  $c_n$  und ist somit die gesuchte Kantenrichtung?

- Zunächst betrachten wir  $\nu_1$ :

$$\nu_1^T c_n = hc_n^{n-1} - \vartheta h = h(c_n^{n-1} - \vartheta)$$

Dies ist negativ für  $c_n^{n-1} < \vartheta$ .

- Für  $\nu_2$  ergibt sich:

$$\nu_2^T c_n = -hc_n^{n-1} + \vartheta h = h(\vartheta - c_n^{n-1})$$

Also ist  $\nu_2$  die gesuchte Kantenrichtung, falls  $c_n^{n-1} > \vartheta$  gilt.

Der Fall  $c_n^{n-1} = \vartheta$  kann ausgeschlossen werden, da dann  $c_1, \dots, c_n$  affin abhängig wären. Dies ist durch die fast sichere Erfüllung der Nichtentartungsbedingung in unserem stochastischen Modell nur mit Wahrscheinlichkeit null möglich.

Wann ist nun  $\nu_i^T \zeta > 0$  für  $i = 1$ , falls  $c_n^{n-1} < \vartheta$ , und für  $i = 2$ , falls  $c_n^{n-1} > \vartheta$ ?

1. Fall:  $c_n^{n-1} < \vartheta$

$$\nu_1^T \zeta = h\zeta^{n-1} - \vartheta\zeta^n \stackrel{!}{>} 0 \quad \stackrel{h>0}{\iff} \quad \zeta^{n-1} > \frac{\vartheta\zeta^n}{h}$$

2. Fall:  $c_n^{n-1} > \vartheta$

$$\nu_2^T \zeta = -h\zeta^{n-1} + \vartheta\zeta^n \stackrel{!}{>} 0 \quad \stackrel{h>0}{\iff} \quad \zeta^{n-1} < \frac{\vartheta\zeta^n}{h}$$

In den vorherigen Graphiken dieses Abschnittes trifft jeweils der Fall 1 mit  $c_n^{n-1} < \vartheta$  zu. Der Bereich der Zielfunktionen, die mit der betrachteten Kantenrichtung  $\nu_1$  ein positives Skalarprodukt bilden, wird von der Hyperebene  $\text{AH}(0, c_1, c_2)$  begrenzt und liegt auf der Seite

von  $\nu_1$ . Aufgrund der Oberflächenverteilung unserer Zielfunktion ergibt sich daher der in Abbildung 3.20 mit „Aufstieg“ markierte Streifen rechts von der eingezeichneten Hyperebene zwischen Höhe  $\cos(\varphi + \varepsilon)$  und  $\cos(\varphi - \varepsilon)$ . Der Fall 2 mit  $c_n^{n-1} > \vartheta$  wird in Abbildung 3.21 wiedergegeben. Hier ist als Kantenrichtung  $\nu_2$  anzusehen. Der Bereich der aufsteigenden Zielfunktionen liegt auf der linken Seite von der Hyperebene  $AH(0, c_1, c_2)$ .

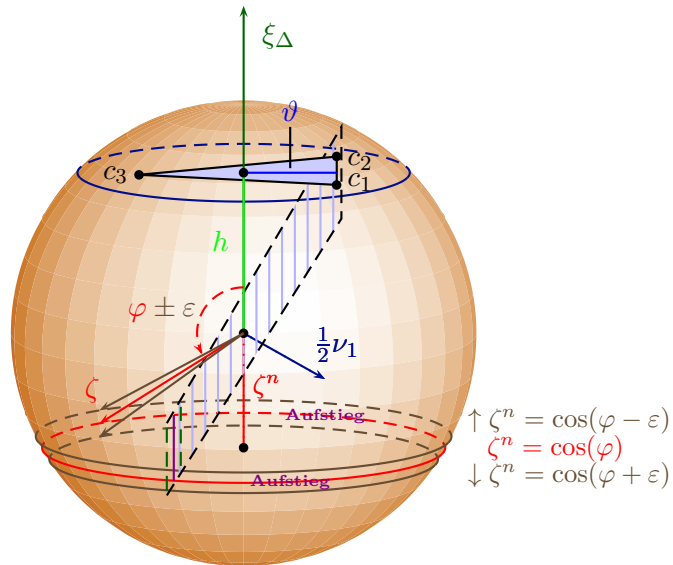


Abbildung 3.20: Weitere Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für den Fall 1 mit  $c_n^{n-1} < \vartheta$

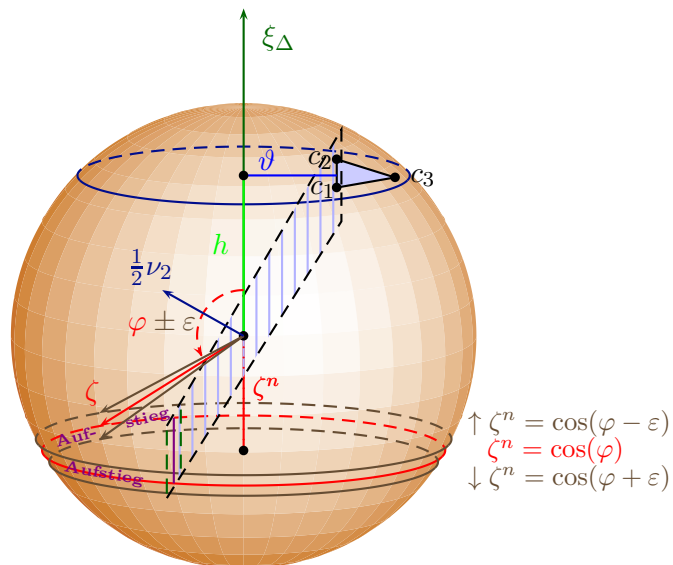


Abbildung 3.21: Weitere Veranschaulichung der Problemstellung nach Durchführung beider Koordinatentransformationen für den Fall 2 mit  $c_n^{n-1} > \vartheta$

Aufgrund der besseren Übersichtlichkeit ist nun nur noch jeweils die Graphik für einen Winkel  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  dargestellt.

Obige Fallunterscheidung kann in unserem Integral wie folgt berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) &= ((n-2)!)^2 \lambda_{n-1}(\omega_n) \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \\
 &\quad \left[ \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\vartheta} (\vartheta - c_n^{n-1}) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\
 &\quad \int_{\cos(\varphi+\varepsilon)}^{\cos(\varphi-\varepsilon)} \int_{\frac{\vartheta \cdot \zeta^n}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^n) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\zeta^n \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n + \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{\vartheta}^{\infty} (c_n^{n-1} - \vartheta) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\
 &\quad \left. \int_{\cos(\varphi+\varepsilon)}^{\cos(\varphi-\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \zeta^n}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^n) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\zeta^n \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n \right] \\
 &\hspace{15em} d\vartheta dh
 \end{aligned}$$

Als Vorbereitung für die spätere Rechnung nehmen wir an dieser Stelle eine Substitution vor:

$$\begin{aligned}
 \tilde{z} &:= \arccos(\zeta^n) - \varphi \text{ bzw. } \zeta^n = \cos(\tilde{z} + \varphi) \\
 \frac{d\tilde{z}}{d\zeta^n} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\zeta^n)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos(\tilde{z} + \varphi))^2}} = -\frac{1}{|\sin(\tilde{z} + \varphi)|} \\
 &\Rightarrow d\zeta^n = -|\sin(\tilde{z} + \varphi)| d\tilde{z}
 \end{aligned}$$

Da  $\varphi \in (0, \pi)$  und  $\tilde{z}$  im Bereich von  $+\varepsilon$  und  $-\varepsilon$  integriert wird, ist für  $\varepsilon$  klein genug

$$\sin(\tilde{z} + \varphi) > 0.$$

Beschränkt auf die von der Substitution betroffenen inneren Integrale ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\cos(\varphi+\varepsilon)}^{\cos(\varphi-\varepsilon)} \int_{\frac{\vartheta \cdot \zeta^n}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^n) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\zeta^n = \\
 &= - \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z} + \varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\tilde{z} = \\
 &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z} + \varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\tilde{z}
 \end{aligned}$$

bzw.



$$\begin{aligned}
 & \int_{\cos(\varphi+\varepsilon)}^{\cos(\varphi-\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \zeta^n}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^n) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\zeta^n = \\
 & = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z}+\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\tilde{z}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt für das Zählerintegral:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) &= ((n-2)!)^2 \lambda_{n-1}(\omega_n) \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \\
 & \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \left[ \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\vartheta} (\vartheta - c_n^{n-1}) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\
 & \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z}+\varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\tilde{z} \\
 & \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n + \\
 & \left. + \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{\vartheta}^{\infty} (c_n^{n-1} - \vartheta) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\
 & \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z}+\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\tilde{z} \\
 & \left. \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n \right] d\vartheta dh
 \end{aligned}$$

Wir stellen nun das zu berechnende Integral für den Nenner auf:

$$\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{E_1\}} \cdot \mathbb{1}_{\{E_2\}} \hat{f}(a_1) \dots \hat{f}(a_m) \hat{f}^{k \rightarrow -1}(z) da_1 \dots da_m dz$$

Es wird wiederum die Situation betrachtet, nachdem beide Koordinatentransformationen durchgeführt wurden. Bekannt ist bereits wie für feste  $a_1, \dots, a_n$  bzw. nach der Transformation  $c_1, \dots, c_n$  mit den Ereignissen  $E_1$  und  $E_2$  umzugehen ist. Es gilt daher in Analogie zu unserer Zählerrechnung:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(E_1 \wedge E_2) &= ((n-2)!)^2 \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n) \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \\
 & \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \int_{\cos(\varphi+\varepsilon)}^{\cos(\varphi-\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \zeta^n) d\bar{\zeta} d\zeta^n \\
 & \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n d\vartheta dh.
 \end{aligned}$$

Mit derselben Substitution wie im Zähler ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \wedge E_2) &= ((n-2)!)^2 \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n) \\ &\int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\ &\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\tilde{z} \\ &\hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n d\vartheta dh. \end{aligned}$$

Mit unseren Ergebnissen zu Zähler und Nenner erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)}{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2)} &= \left( \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \right. \\ &\left[ \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\vartheta} (\vartheta - c_n^{n-1}) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\ &\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z} + \varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\tilde{z} \\ &\hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{\vartheta}^{\infty} (c_n^{n-1} - \vartheta) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\ &\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z} + \varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} d\tilde{z} \\ &\left. \left. \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n \right] d\vartheta dh \right) / \\ &/ \left( \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\ &\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\tilde{z} \\ &\left. \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n d\vartheta dh \right). \end{aligned}$$

Um nun im Zähler und Nenner jeweils das von uns vorsorglich eingeführte  $\varepsilon$  wegzubekommen, verwenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe z.B. [Tim06, S. 260]):

**Satz 3.10** (Mittelwertsatz der Integralrechnung).

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b - a).$$

Nachfolgend werden wir den Mittelwertsatz sowohl im Nenner als auch im Zähler anwenden und dabei die Grenzwertbetrachtung  $\varepsilon \rightarrow 0$  für unsere künstliche Konstante  $\varepsilon$  miteinfließen lassen. Dieses Vorgehen entspricht im Grunde der Regel von l'Hospital. Für die Korrektheit ist hier wichtig, dass keiner der Integranden von  $\varepsilon$  abhängt und der Integrand des Nenners im Grenzwert nicht den Wert null annimmt.

Zunächst werde der Mittelwertsatz im Nenner auf die Funktion

$$N(x) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(x + \varphi)) \sin(x + \varphi) d\bar{\zeta}$$

eingeschränkt auf das Intervall  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  angewendet. Da  $N(x)$  stetig ist<sup>4</sup>, folgt nach dem Mittelwertsatz, dass ein  $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  existiert, so dass

$$N(\xi) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} N(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

gilt. Lassen wir nun  $\varepsilon$  gegen null gehen, so wird  $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \{0\}$  und daher  $\xi = 0$ . Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\zeta} d\tilde{z} &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

Für den Zähler gehen wir analog vor. Hier folgt mit den Funktionen

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(x+\varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(x + \varphi)) \sin(x + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \\ Z_2(x) &= \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(x+\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(x + \varphi)) \sin(x + \varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \end{aligned}$$

aus dem Mittelwertsatz und gleichzeitiger Grenzwertbetrachtung  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

<sup>4</sup>Dies geht unmittelbar aus der Interpretation dieser Funktion hervor. Alternativ lässt sich die Stetigkeit auch mit unserer späteren Rechnung (3.11) begründen. Hier wird sich zeigen, dass  $N(x)$  lediglich das Vielfache der Potenz einer Sinusfunktion wiedergibt.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z} + \varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\bar{\zeta}} d\zeta^{n-1} d\tilde{z} = \\ = \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\bar{\zeta}} d\zeta^{n-1} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(\tilde{z} + \varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\tilde{z} + \varphi)) \sin(\tilde{z} + \varphi) d\bar{\bar{\zeta}} d\zeta^{n-1} d\tilde{z} = \\ \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\bar{\zeta}} d\zeta^{n-1} \end{aligned}$$

Somit sind sämtliche betrachteten Integranden, insbesondere der des Nenners, im Grenzwert ungleich null und die Korrektheit unserer Vorgehensweise sichergestellt.

Als Fazit können wir also festhalten: Wenn wir Zähler und Nenner jeweils mit  $\frac{1}{2\varepsilon}$  multiplizieren, was zusammengenommen einer Multiplikation mit eins entspricht, so können wir bei der Grenzwertberechnung von  $\varepsilon \rightarrow 0$  jeweils das Integral über  $\tilde{z}$  ersatzlos streichen.

Ohne die künstliche Konstante  $\varepsilon$  vereinfacht sich auch unsere bildliche Vorstellung der Problemstellung, wie für die Fälle  $c_n^{n-1} < \vartheta$  und  $c_n^{n-1} > \vartheta$  in Abbildung 3.22 bzw. 3.23 zu sehen ist.

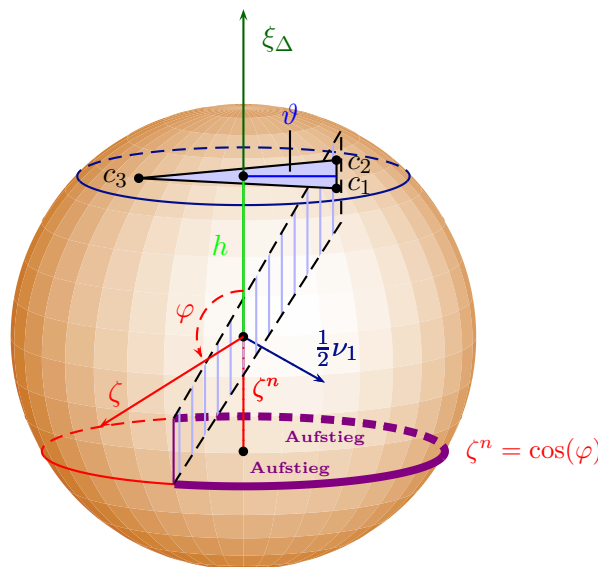


Abbildung 3.22: Veranschaulichung der Problemstellung nach Entfernen der künstlichen Konstante  $\varepsilon$  für den Fall 1 mit  $c_n^{n-1} < \vartheta$

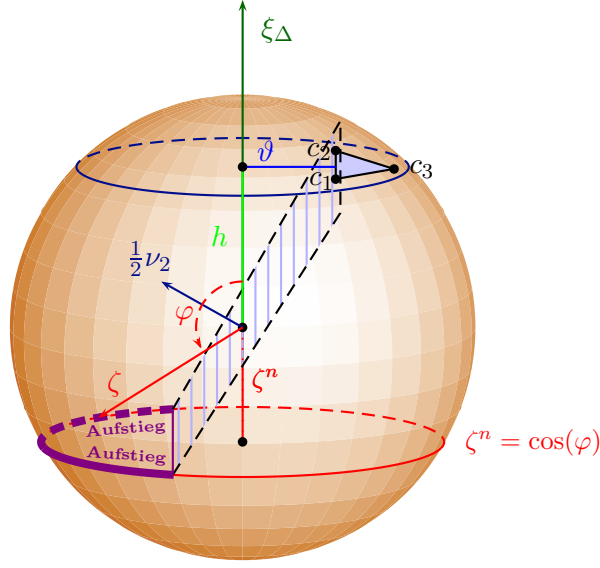


Abbildung 3.23: Veranschaulichung der Problemstellung nach Entfernen der künstlichen Konstante  $\varepsilon$  für den Fall 2 mit  $c_n^{n-1} > \vartheta$

Es ergibt sich damit für unseren Bruch:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)}{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2)} &= \left( \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \right. \\
 &\quad \left[ \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\vartheta} (\vartheta - c_n^{n-1}) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\
 &\quad \left. \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{\vartheta}^{\infty} (c_n^{n-1} - \vartheta) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\
 &\quad \left. \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n \right] d\vartheta dh \Big) / \\
 & \Big/ \left( \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\
 &\quad \left. \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} \right. \\
 &\quad \left. \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n d\vartheta dh \right) \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Wir beobachten, dass sich die Struktur des Nenner- und Zählerintegrals gleichen, so dass man die Unterschiede durch Parameterausdrücke beschreiben kann. Daher führen wir nachfolgende Notation ein:

*Notation 3.11.* Das Nennerintegral

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\
 & \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} \\
 & \quad \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n d\vartheta dh = \\
 & = \int_0^1 G(h)^{m-n} \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\
 & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \\
 & \quad \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n dc_n^{n-1} d\vartheta dh
 \end{aligned}$$

bezeichnen wir mit  $I_N$ . Aus Zweckmäßigkeitsgründen gehen wir zu der Parameterdarstellung

$$I_N \left( c_n^{n-1} \in (-\infty, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty) \right)$$

über. Angepasst auf die entsprechenden Integrationsgrenzen wird der Zähler damit folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{aligned}
 & I_N \left( c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in \left[ \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}, \infty \right) \right) + \\
 & \quad + I_N \left( c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in \left( -\infty, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Weitere Abweichungen von den Integrationsgrenzen oder Hervorhebungen dieser halten wir durch geeignete Ausdrücke in analoger Weise fest.

An späterer Stelle wird es vorteilhaft sein eine Kurzschreibweise für Zähler und Nenner bereit zu haben ohne die Integrale über  $\zeta$ . Um dies darzustellen, schreiben wir zusammen mit obiger Vereinbarung  $\bar{I}_N(\dots)$ .

Um den Nenner wie den Zähler zu strukturieren, können wir diesen auch wie folgt ausdrücken:

$$I_N (c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) + I_N (c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty))$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)}{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2)} = \\ & = \frac{I_N \left( c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in \left[ \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}, \infty \right) \right) + I_N \left( c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in \left( -\infty, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right)}{I_N \left( c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty) \right) + I_N \left( c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty) \right)} \end{aligned}$$

Die bisherige Berechnung ist auch für moderate Fälle korrekt. Wir wollen nun zumindest asymptotisch zu einer Auswertung kommen. Dazu zerlegen wir jeweils im Nenner und Zähler unser Integral über  $h$  additiv in zwei Teile. Sei nun  $q \in (0, 1)$  beliebig und

$$\begin{aligned} I_N^1 & := I_N(h \in [0, q]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) = \\ & = I_N(h \in [0, q]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) + \\ & \quad + I_N(h \in [0, q]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_N^2 & := I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) = \\ & = I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) + \\ & \quad + I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Z^1 & := I_N \left( h \in [0, q]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in \left[ \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}, \infty \right) \right) + \\ & \quad + I_N \left( h \in [0, q]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in \left( -\infty, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Z^2 & := I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in \left[ \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}, \infty \right) \right) + \\ & \quad + I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in \left( -\infty, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right). \end{aligned}$$

Somit ist der Nenner von (3.7)

$$I_N^1 + I_N^2$$

und analog ergibt sich der Zähler von (3.7) durch

$$I_Z^1 + I_Z^2.$$

Man beachte, dass in den Integralen des Ausdrucks (3.7) der Parameter  $m$  lediglich als Potenz bei  $G(h)$  auftaucht. Da  $G(q) < 1$  für  $q < 1$ , folgt im Fall  $h < q$ :

$$G(h)^{m-n} \leq G(q)^{m-n} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Daher werden asymptotisch die Summanden  $I_Z^1$  und  $I_N^1$  verschwinden und unbedeutend für die relative Analyse werden. Um dies detaillierter auszuführen, sei

$$\begin{aligned}
 A(h) := & \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \left[ \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\vartheta} (\vartheta - c_n^{n-1}) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \right. \\
 & \int_{\frac{\vartheta \cdot \cos(\varphi)}{h}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \\
 & \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n + \\
 & + \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{\vartheta}^{c_n^{n-1}} (c_n^{n-1} - \vartheta) \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\
 & \int_{-\infty}^{\frac{\vartheta \cdot \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \\
 & \left. \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n \right] d\vartheta
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 B(h) := & \int_0^{\sqrt{1-h^2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\vartheta - c_n^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |\lambda_{n-2}(\text{KH}(c_1, \dots, c_{n-1}))|^2 \\
 & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} \\
 & \hat{f}(c_1) \dots \hat{f}(c_{n-1}) d\bar{c}_1 \dots d\bar{c}_{n-1} \hat{f}(c_n) d\bar{c}_n d\vartheta.
 \end{aligned}$$

$A(h)$  gebe also den Integrand des Zählerintegrals über  $h$  ohne den Faktor  $G(h)^{m-n}$  an und  $B(h)$  entsprechendes für das Nennerintegral. Da  $A(h)$  und  $B(h)$  unabhängig von  $m$  sind sowie  $A(h) \neq 0$ ,  $B(h) \neq 0$  für  $h \in (0, 1)$  gilt, erhält man im Integral aus Formel (3.7):

$$\frac{\int_0^1 G(h)^{m-n} A(h) dh}{\int_0^1 G(h)^{m-n} B(h) dh} = \frac{\int_0^q G(h)^{m-n} A(h) dh + \int_q^1 G(h)^{m-n} A(h) dh}{\int_0^q G(h)^{m-n} B(h) dh + \int_q^1 G(h)^{m-n} B(h) dh} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{\int_0^q G(h)^{m-n} A(h) dh}{\int_0^q G(h)^{m-n} B(h) dh}$$

Daher genügt es sich im Folgenden auf den Bruch  $\frac{I_Z^2}{I_N^2}$  zu beschränken (vgl. auch [Bor87, Kapitel 4]).

Asymptotisch kann  $q$  beliebig nahe bei eins gewählt werden. Daher gelte nun

$$q \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$$



und aus  $h \geq q$  folgt somit

$$0 \leq \vartheta \leq \sqrt{1-h^2} \leq \sqrt{1-q^2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Für die Integrationsgrenzen der  $\zeta$ -Integrale im Zähler bedeutet dies:

1. Für  $\cos(\varphi) > 0$ :

$$0 \leq \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \leq \frac{\sqrt{1-h^2} \cos(\varphi)}{q} \leq \frac{\sqrt{1-q^2} \cos(\varphi)}{q} =: \tilde{h}(q) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0^+ \quad (3.8)$$

2. Für  $\cos(\varphi) \leq 0$ :

$$0 \geq \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \geq \frac{\sqrt{1-h^2} \cos(\varphi)}{q} \geq \frac{\sqrt{1-q^2} \cos(\varphi)}{q} =: \tilde{h}(q) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0^- \quad (3.9)$$

Mit anderen Worten: Für festes  $n$  und  $\varphi$  rücken bei  $m \rightarrow \infty$  die endlichen Integrationsgrenzen beliebig nahe an null heran. Um dies formal sauber auszunutzen, zerlegen wir unsere  $\zeta$ -Integrale im Zähler folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} = \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} + \int_0^{\frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} + \int_0^{\frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} = \\ &= \int_0^{\frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} - \int_0^{\frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} - \int_0^{\frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) d\bar{\zeta} d\zeta^{n-1} \end{aligned}$$

Somit lässt sich unser gesuchter Bruch wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{I_Z^2}{I_N^2} = & \left( \frac{1}{2} I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) + \right. \\ & + \frac{1}{2} I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) - \\ & - I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in \left[ 0, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right) + \\ & + I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in \left[ 0, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right) \Big/ \\ & \Big/ \left( I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) + \right. \\ & \left. + I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) \right) \end{aligned}$$

Nach Kürzen ergibt sich hieraus

$$\frac{I_Z^2}{I_N^2} = \frac{1}{2} + R(m, n, \varphi, q),$$

wobei

$$\begin{aligned} R(m, n, \varphi, q) = & \left( - I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in \left[ 0, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right) + \right. \\ & + I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in \left[ 0, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right) \Big/ \\ & \Big/ \left( I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) \right) \end{aligned}$$

ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass  $\frac{I_Z^2}{I_N^2}$  asymptotisch  $\frac{1}{2}$  wird. Also bleibt der Nachweis, dass

$$R(m, n, \varphi, q) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (3.10)$$

gilt.

Die Argumentation hierzu vereinfacht sich etwas, wenn wir nachfolgendes Resultat aus der Arbeit von Borgwardt ([Bor77, S. 64]) ausnutzen:

$$g_n^{k \rightarrow -1}(\mathfrak{h}) := \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \mathfrak{h}) d\zeta^1 \dots d\zeta^{n-1} = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} (1 - \mathfrak{h}^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

Damit gilt für das  $\zeta$ -Integral im Nenner:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} (1 - \cos^2(\varphi))^{\frac{n-3}{2}} \sin(\varphi) = \\ & = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} (\sin^2(\varphi))^{\frac{n-3}{2}} \sin(\varphi) = \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \sin^{n-2}(\varphi) > 0, \text{ da } \varphi \in (0, \pi) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$I_N^2$  kann daher folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} I_N^2 &= I_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \infty); \zeta^{n-1} \in (-\infty, \infty)) = \\ &= \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \sin^{n-2}(\varphi) \cdot \bar{I}_N(h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \infty)) \end{aligned}$$

Integrieren wir in der Definition von  $g_n^{k \rightarrow -1}(\mathfrak{h})$  nur in  $\zeta^1, \dots, \zeta^{n-2}$ , so ergibt sich für  $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \mathfrak{h}) d\zeta^1 \dots d\zeta^{n-1} = \\ &= \frac{\lambda_{n-3}(\omega_{n-2})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \int_{-\sqrt{1-\mathfrak{h}^2}}^{\sqrt{1-\mathfrak{h}^2}} (1 - \mathfrak{h}^2 - (\zeta^{n-1})^2)^{\frac{n-4}{2}} d\zeta^{n-1} = \frac{n-2}{2\pi} \int_{-\sqrt{1-\mathfrak{h}^2}}^{\sqrt{1-\mathfrak{h}^2}} (1 - \mathfrak{h}^2 - (\zeta^{n-1})^2)^{\frac{n-4}{2}} d\zeta^{n-1} \end{aligned}$$

Speziell für  $\mathfrak{h} = \cos(\varphi)$  und  $\varphi \in (0, \pi)$  folgt somit:

$$\begin{aligned} g_n^{k \rightarrow -1}(\cos(\varphi)) &= \frac{n-2}{2\pi} \int_{-\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}^{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}} (1 - \cos^2(\varphi) - (\zeta^{n-1})^2)^{\frac{n-4}{2}} d\zeta^{n-1} = \\ &= \frac{n-2}{2\pi} \int_{-\sin(\varphi)}^{\sin(\varphi)} (\sin^2(\varphi) - (\zeta^{n-1})^2)^{\frac{n-4}{2}} d\zeta^{n-1} \end{aligned}$$

Es gilt also für  $\mathfrak{t} \in [-\sin(\varphi), \sin(\varphi)]$ :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-2}, \mathfrak{t}, \cos(\varphi)) d\zeta^1 \dots d\zeta^{n-2} = \\ &= \frac{n-2}{2\pi} (1 - \cos^2(\varphi) - \mathfrak{t}^2)^{\frac{n-4}{2}} = \frac{n-2}{2\pi} (\sin^2(\varphi) - \mathfrak{t}^2)^{\frac{n-4}{2}} \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für das  $\zeta$ -Integral im Zähler von  $R(m, n, \varphi, q)$ :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \hat{f}^{k \rightarrow -1}(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}, \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\bar{\zeta} = \frac{n-2}{2\pi} (1 - \cos^2(\varphi) - (\zeta^{n-1})^2)^{\frac{n-3}{2}} \sin(\varphi) = \\ &= \frac{n-2}{2\pi} (\sin^2(\varphi) - (\zeta^{n-1})^2)^{\frac{n-3}{2}} \sin(\varphi) \leq \frac{n-2}{2\pi} \sin^{n-2}(\varphi). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Dabei beachte man für die Ungleichung am Ende obiger Rechnung, dass

$$\zeta^{n-1} \in [-\sin(\varphi), \sin(\varphi)] \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) > 0$$

gilt. Somit wird das Maximum der Funktion

$$\frac{n-2}{2\pi} (\sin^2(\varphi) - (\zeta^{n-1})^2)^{\frac{n-3}{2}} \sin(\varphi)$$

gerade bei  $\zeta^{n-1} = 0$  angenommen.

Mit den Ergebnissen (3.12) und (3.8) bzw. (3.9) folgt somit

$$\begin{aligned} & \left| I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]; \zeta^{n-1} \in \left[ 0, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right) \right| \leq \\ & \leq \left| \tilde{h}(q) \cdot \frac{n-2}{2\pi} \sin^{n-2}(\varphi) \cdot \bar{I}_N (h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]) \right| = \\ & = \left| \tilde{h}(q) \right| \cdot \frac{n-2}{2\pi} \sin^{n-2}(\varphi) \cdot \bar{I}_N (h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]) \end{aligned}$$

und analog dazu

$$\begin{aligned} & \left| I_N \left( h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty); \zeta^{n-1} \in \left[ 0, \frac{\vartheta \cos(\varphi)}{h} \right] \right) \right| \leq \\ & \leq \left| \tilde{h}(q) \right| \cdot \frac{n-2}{2\pi} \sin^{n-2}(\varphi) \cdot \bar{I}_N (h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty)). \end{aligned}$$

Somit hat  $R(m, n, \varphi, q)$  folgende Oberschranke:

$$\begin{aligned} & \frac{\left| \tilde{h}(q) \right| \cdot \frac{n-2}{2\pi} \sin^{n-2}(\varphi) (\bar{I}_N (h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]) + \bar{I}_N (h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty)))}{\frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \sin^{n-2}(\varphi) (\bar{I}_N (h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in (-\infty, \vartheta]) + \bar{I}_N (h \in [q, 1]; c_n^{n-1} \in [\vartheta, \infty)))} = \\ & = \left| \tilde{h}(q) \right| \cdot \frac{(n-2) \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n)}{2\pi \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Analog erhalten wird die Unterschranke

$$- \left| \tilde{h}(q) \right| \cdot \frac{(n-2) \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n)}{2\pi \cdot \lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Insgesamt ergibt sich damit unser gewünschtes Resultat:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)}{\mathbb{P}(E_1 \wedge E_2)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

□

Hervorzuheben an unserem Ergebnis ist die (etwas überraschende) Unabhängigkeit von dem vorgegebenen Winkel  $\varphi$  bei  $m \rightarrow \infty$  und fester Dimension  $n$ . Man beachte dabei aber, dass dieser Sachverhalt lediglich asymptotisch korrekt ist, obwohl die Restriktionszahl bei naiver Betrachtung unbedeutend für die Aufstiegswahrscheinlichkeit an einer Ecke zu sein scheint. Der Einfluss von  $m$  kommt von der Auswirkung der Restriktionszahl auf die Kantenlängen. Großes  $m$  bewirkt sehr kurze Kanten und damit äußerst kleine Schrittweiten, so dass man stets mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  nach oben schreitet, wenn man sich nicht speziell an der besten oder schlechtesten Ecke befindet. Zur Veranschaulichung kann man z.B. den Erdball betrachten und Norden als Aufstiegsrichtung ansehen. Eine Ameise wird nun, wenn sie sich nicht extrem nahe am Nordpol befindet, durch die nördliche Laufrichtung nach einem Schritt tatsächlich auf der Gesamtkugel näher zum Nordpol bewegt haben. Ein Riese hingegen kann durch seine

große Schrittweite mit einem Schritt ausgehend von einem Standort nahe am Nordpol diesen leicht überschreiten und insgesamt sogar letztendlich weiter südlich auf dem Erdball angekommen sein. Die Ameise wird also, wenn sie eine nördliche bzw. südliche Laufrichtung jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  wählt, sich fast immer zu 50% zum Nordpol hin- bzw. wegbewegen. Die kleine Schrittweite der Ameise soll hier ein großes  $m$  veranschaulichen. Der Riese hingegen stellt die Problematik für ein moderates  $m$  dar. Ist dieser etwa sehr nahe am Nordpol, wird er nach einem Schritt mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit sich südlicher befinden. Es entscheidet also nicht allein die intendierte Richtung über einen zukünftigen nördlicheren Standort, sondern auch die Schrittweite hat darauf einen erheblichen Einfluss.

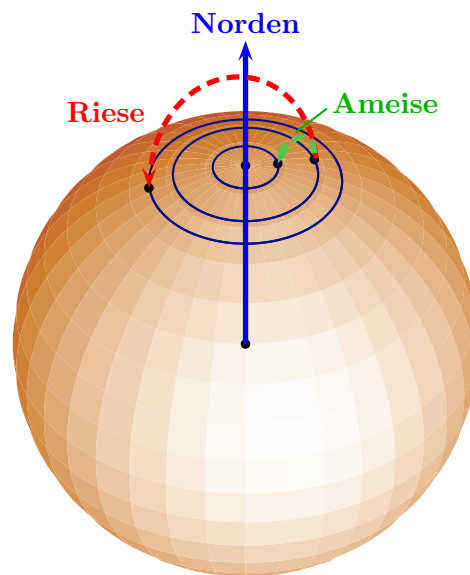


Abbildung 3.24: Veranschaulichung der Auswirkungen kleiner und großer Schrittweiten nahe am Nordpol

*Bemerkung 3.12.* Die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(E_3 \mid E_1 \wedge E_2)$$

im moderaten Fall erweist sich als deutlich schwieriger. Eine Hilfe dazu liefert Lemma A.2, das im Anhang ab Seite 181 inklusive Beweis zu finden ist. Allerdings kann dieses hier in unserer Problemstellung nur für gerade Dimensionen verwendet werden.

### 3.7 Empirische Analyse der Aufstiegswahrscheinlichkeiten

Zu Beginn des letzten Abschnittes war – ohne noch an Asymptotik zu denken – bezüglich der Verteilung der Aufstiegswahrscheinlichkeiten eine deutliche Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$  naheliegend. Eine Graphik, bei der die Abszisse den Wert von  $\varphi$  anzeigt und die Ordinate die zugehörige Aufstiegswahrscheinlichkeit wiedergibt, hätte sich etwa wie folgt vermuten lassen:

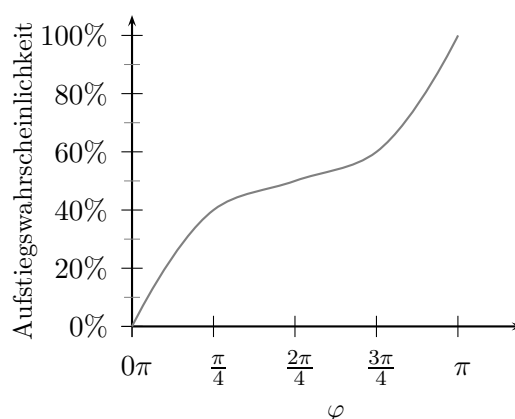


Abbildung 3.25: Vermutete Verteilung der Aufstiegswahrscheinlichkeiten

Stattdessen erhalten wir für sehr großes  $m$  eine weitgehend von  $\varphi$  unabhängige Kurve. Sie wird wohl folgendem Kurvenverlauf gleichen:

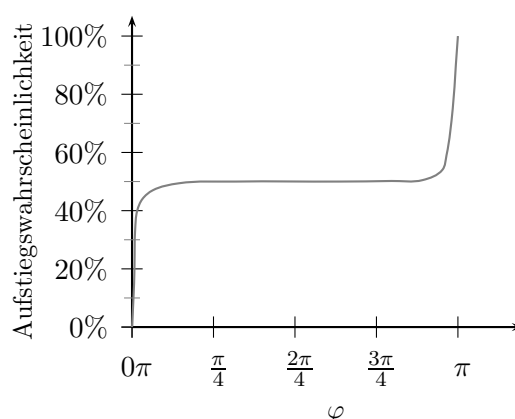


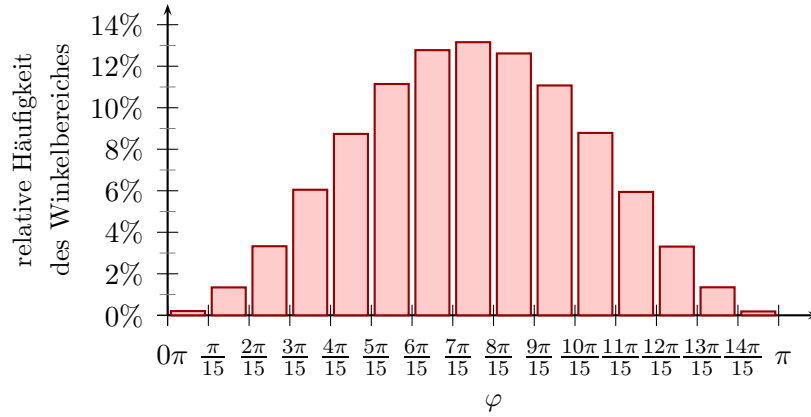
Abbildung 3.26: Verteilung der Aufstiegswahrscheinlichkeiten nach unserem Resultat für eine große Restriktionszahl  $m$

Dies wollen wir nun empirisch überprüfen. Dabei wurden für aussagekräftige und anschauliche Graphiken die Winkel in die Bereiche

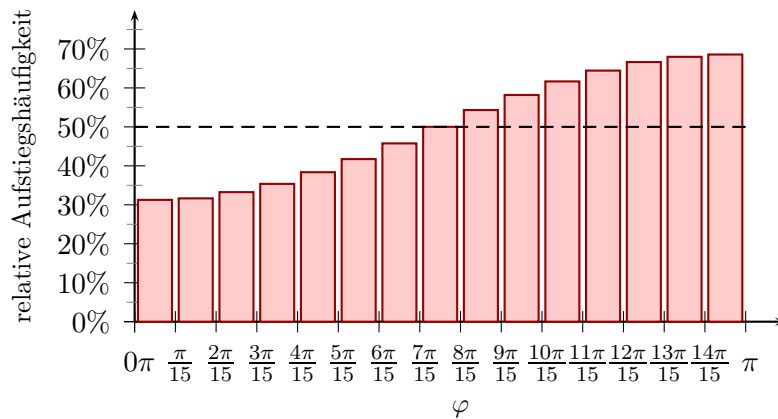
$$\left[ i \cdot \frac{\pi}{15}, (i + 1) \cdot \frac{\pi}{15} \right] \text{ für } i = 0, \dots, 14$$

gegliedert, und jeweils innerhalb dieser die Durchschnittswerte berechnet. Man beachte aber, dass in den einzelnen Winkelbereichen eine unterschiedliche Zahl an Ecken vorliegt und daher die Mittelung der einzelnen Ordinatenwerte nicht gleichmäßig stark vorgenommen wird. Allerdings wurden – wie bei sämtlichen empirischen Testläufen in dieser Arbeit – mehrere Problembeispiele erzeugt und auch über diese Durchschnittswerte gebildet, was obiger Problematik entgegenwirkt. Nichtsdestotrotz wollen wir uns auch kurz ansehen, wie hoch der Anteil an Ecken in einem Winkelbereich durchschnittlich ist. In den nachfolgenden Abbildungen wird deshalb jeweils zuerst in Teil (a) der Anteil der Ecken im jeweiligen Winkelbereich wiedergegeben. In Teil (b) zeigen die Ordinaten die relative Aufstiegshäufigkeit für

ein  $\varphi \in [i \cdot \frac{\pi}{15}, (i+1) \cdot \frac{\pi}{15}]$  an. Dabei sind in diesem Abschnitt sämtliche Ordinatenwerte das Ergebnis einer Durchschnittsberechnung über 1.000 Problembispiele. Weiter wurde zur Gewinnung der empirischen Resultate stets auch der Zielfunktionsvektor  $z$  gemäß unserer Voraussetzung aus Abschnitt 3.6 rotationssymmetrisch und unabhängig von den Restriktionsvektoren erzeugt.



(a) relative Häufigkeit der Ecken im Winkelbereich

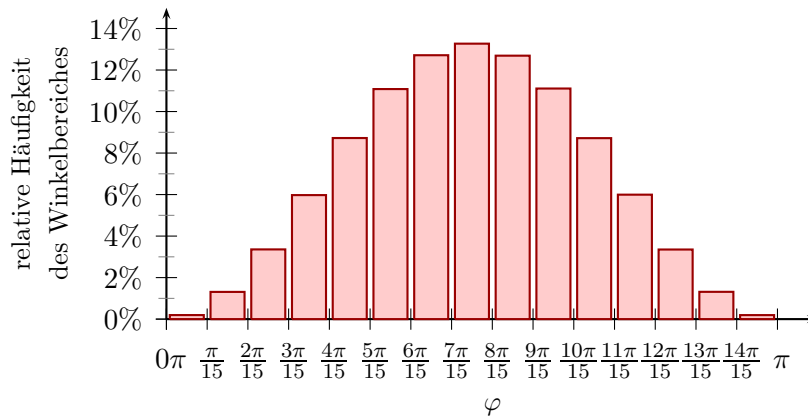


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

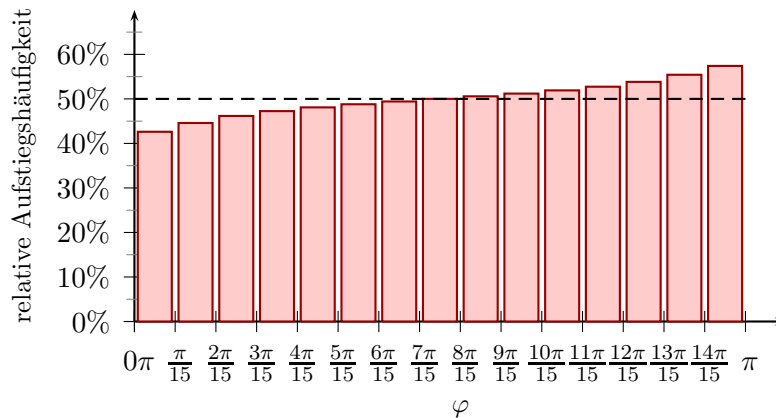
Abbildung 3.27: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für  $m = 15$ ,  $n = 5$  und  $k \rightarrow -1$

In Abbildung 3.27 wird der moderate Fall mit  $m = 15$  bei Dimension  $n = 5$  und Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  und  $z$  auf der Kugeloberfläche betrachtet. Wie zu erwarten war, verteilen sich hier die Winkel symmetrisch um  $\frac{\pi}{2}$ . Je näher der Winkelbereich bei  $\frac{\pi}{2}$  liegt, desto größer ist auch der zugehörige Anteil an Ecken. Die relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen wächst mit steigendem  $\varphi$  und scheint nur nahe bei  $\frac{\pi}{2}$  ungefähr bei 50% zu liegen.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich obige Graphiken verändern, wenn wir Asymptotik simulieren. Dazu folgen nun die empirischen Ergebnisse für die Restriktionsanzahl  $m = 2000$ :



(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich



(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

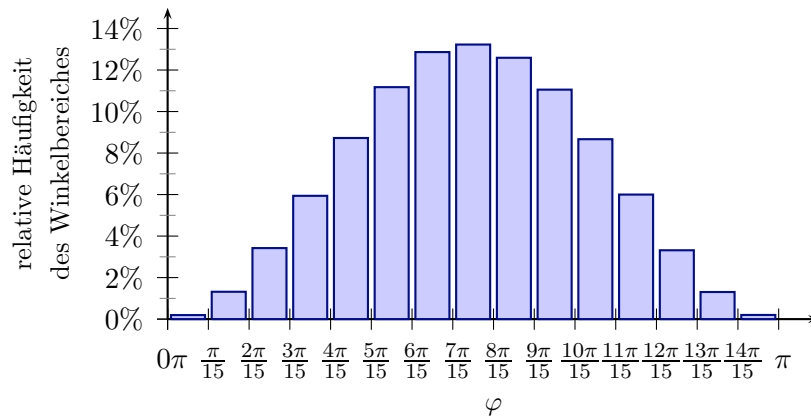
Abbildung 3.28: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegs-kanten pro Ecke für  $m = 2000$ ,  $n = 5$  und  $k \rightarrow -1$

Wie sich hier zeigt, hat sich die Graphik zur Eckenverteilung zwar kaum verändert, aber die Verteilung der relativen Aufstiegshäufigkeiten ist deutlich abgeflacht. Selbst die äußeren Winkelbereiche  $[0, \frac{\pi}{15}]$  und  $[14 \cdot \frac{\pi}{15}, \pi]$  sind nur noch geringfügig von der 50%-Marke entfernt. Dies bestätigt damit weitgehend unser Resultat aus Satz 3.9.

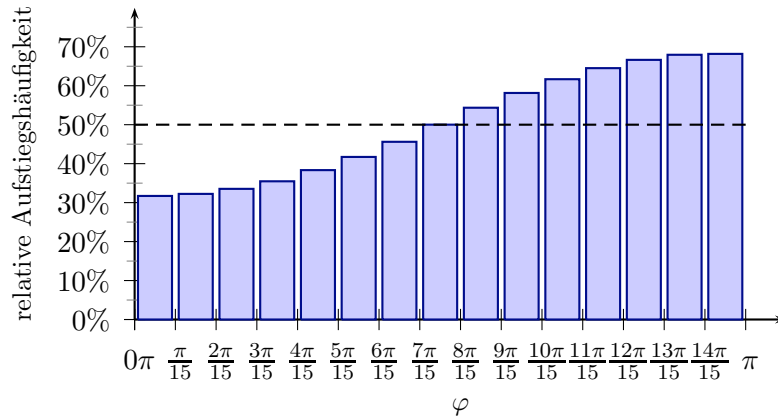
Die Abbildungen für andere Verteilungsparameter ähneln obigen Graphiken. Lediglich der Effekt durch die Simulation der Asymptotik wird durch die vorhandene Redundanzwahrscheinlichkeit etwas abgemildert. Daher werden nachfolgend nur die Graphiken zur Gleichverteilung der Vektoren auf  $\Omega_n$  gezeigt. Die Abbildungen zu den Verteilungsparametern  $k = 1$  und  $k = 10$  sind im Anhang ab Seite 198 zu finden.

Des Weiteren wurden auch entsprechende Balkendiagramme für die Restriktionszahl  $m = 30$  erstellt. Sie gleichen stark dem hier dargestellten moderaten Fall mit  $m = 15$  bis auf die leicht geringere Steigung bezüglich der relativen Aufstiegshäufigkeiten. Die Bilder wurden daher ebenfalls in den Anhang (ab Seite 202) ausgelagert.



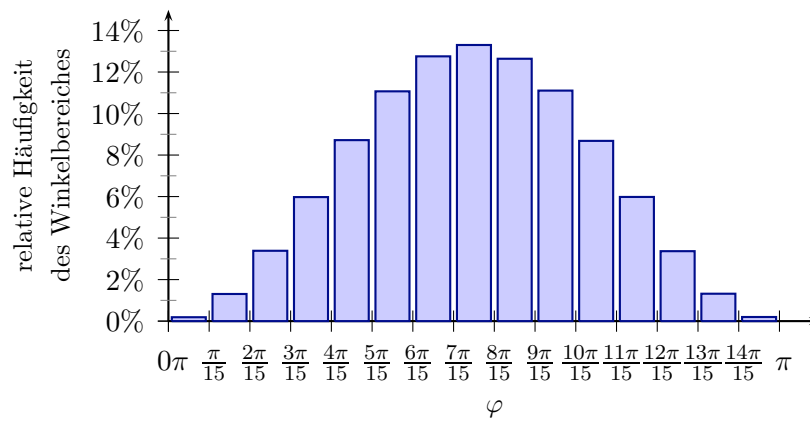


(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich

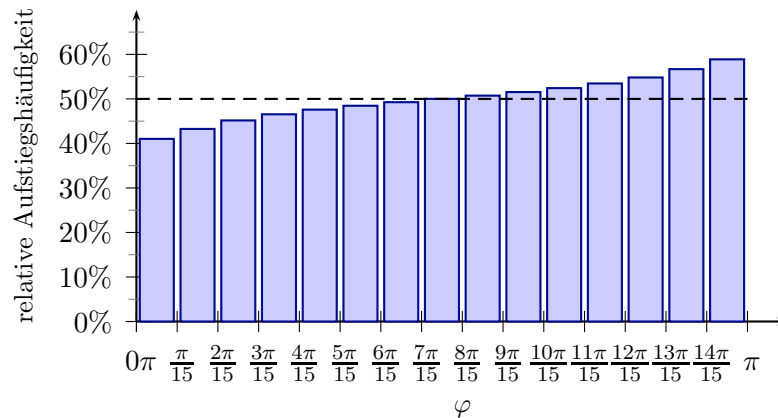


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung 3.29: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für  $m = 15$ ,  $n = 5$  und  $k = 0$



(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich



(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung 3.30: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegs-kanten pro Ecke für  $m = 2000$ ,  $n = 5$  und  $k = 0$

# Kapitel 4

## Der Shelling-Algorithmus

Ein relativ neues Berechnungsverfahren aus dem Bereich der Konvexe-Hülle-Bestimmung stellt der Shelling-Algorithmus dar, der 1986 von Seidel in seiner Arbeit [Sei86] veröffentlicht wurde. Dabei wird das Verfahren einzig für das Facettenenumerationsproblem formuliert unter der Zusatzbedingung, dass der Nullpunkt im Inneren von  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  enthalten ist. Eine direkte Übersetzung in unsere primale Problemstellung ( $P1$ ) erweist sich als alles andere als offensichtlich. Daher werden wir in Abschnitt 4.2 eine etwas fundamentalere Überführung des Shelling-Algorithmus in die primale Sichtweise vornehmen. Zunächst aber wird zur besseren Verständlichkeit eine an Seidel (siehe [Sei86]) und Dwyer (siehe [Dwy88, S. 22–25]) angelehnte Einführung in das Verfahren in seiner ursprünglichen Form gegeben. In den Abschnitten 4.3 und 4.4 werden wir einen speziellen Teilalgorithmus aus unserer primalen Version des Shelling-Algorithmus, das sogenannte Crashing-Verfahren, präzisieren. Anschließend wird in Abschnitt 4.5 zur Worst-Case-Komplexität der primalen Algorithmusvariante übergegangen. In den Abschnitten 4.6 und 4.7 folgen empirische Auswertungen zum Crashing-Verfahren sowie zum Such- und Einfügeaufwand beim Shelling-Algorithmus.

### 4.1 Der Shelling-Algorithmus in seiner Originalvariante

Für eine verständliche Einführung in den Algorithmus von Seidel sind nachfolgende Definitionen nützlich:

**Definition 4.1.** Ein **Shelling** eines Polytops ist eine Aufzählung seiner Facetten  $f_1, \dots, f_k$ , so dass für  $1 \leq i < k$  die Vereinigung der ersten  $i$  Facetten

$$\bigcup_{j \leq i} f_j$$

homöomorph<sup>1</sup> zur  $(n - 1)$ -dimensionalen Einheitskugel ist.

Mit anderen Worten, zur Aufzählung der Facetten in der Shelling-Reihenfolge, kann genau dann eine neue Facette hinzugefügt werden, wenn sie mit den bereits aufgezählten Facetten zusammenhängend ist und ihre Aufnahme zu keinem „Loch“ in der Oberfläche aus den bisher gefundenen Facetten führt.

---

<sup>1</sup>Zwei Objekte werden in der Topologie als homöomorph bezeichnet, wenn sie über eine stetige und bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist, ineinander übergeführt werden können.

**Definition 4.2.** Der  $i$ -te **Horizont** eines Shellings ist als

$$\bigcup_{\substack{j,k \\ j \leq i < k}} (f_j \cap f_k)$$

definiert.

**Definition 4.3.** Als **Ridges** werden  $(n-2)$ -dimensionale Seitenflächen und als **Peaks**  $(n-3)$ -dimensionale Seitenflächen bezeichnet. Ridges und Peaks am Horizont nennen wir **Horizont-Ridges** bzw. **Horizont-Peaks**.

*Bemerkung 4.4.* Der Horizont ist die Vereinigung aller Ridges zwischen aufgezählten und noch nicht aufgezählten Facetten. Jeder Horizont-Peak ist genau in zwei Horizont-Ridges enthalten.

*Bemerkung 4.5.* Zusammen mit der Definition 2.1 aus Kapitel 2 haben wir somit für unser duales Polytop bei Erfüllung der Nichtentartungsbedingung folgende äquivalente Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} (n-1)\text{-dimensionale Seitenfläche} &\Leftrightarrow \text{Facette} &&\Leftrightarrow \text{Randsimplex} \\ (n-2)\text{-dimensionale Seitenfläche} &\Leftrightarrow \text{Randsimplexseite} &&\Leftrightarrow \text{Ridge} \\ (n-3)\text{-dimensionale Seitenfläche} &\Leftrightarrow \text{Peak} && \end{aligned}$$

In Anlehnung an Seidel werden in diesem Abschnitt die Begriffe aus Definition 4.3 bevorzugt.

Der Algorithmus von Seidel konstruiert ein sogenanntes **Straight-Line-Shelling**. Dieses lässt sich bildlich anhand eines „travelling observers“ (vgl. dazu [Sei86, S. 407]) beschreiben: Ein Wanderer beginnt seine Reise im Inneren des Polyeders und schreitet auf einer Linie nach außen. Da unser Polytop den Ursprung enthält, starte dort die Reise. Als Richtung verwenden wir beispielsweise die  $x^n$ -Achse. Sobald der Reisende außerhalb des Polyeders durch eine Facette gelangt, nehmen wir diese in der Aufzählung (durch Führen einer Liste) als erste Facette  $f_1$  auf. Schreitet man weiter auf der Linie fort, gelangen immer mehr Facetten ins Blickfeld. Auch diese werden in sich daraus ergebender Reihenfolge in der Liste aufgenommen. Wir fahren so fort, bis keine neue Facette mehr gesehen werden kann. Nun springen wir nach  $-\infty$  auf der  $x^n$ -Achse und wandern wieder auf das Polytop zu. Dabei fügen wir der Liste die Facetten in der Reihenfolge hinzu, in der sie aus dem Blickfeld verschwinden, bis wir beim Polytop angekommen sind.

Dieses Vorgehen kann sehr leicht am zweidimensionalen Beispiel aus Abbildung 4.1 nachvollzogen werden. Die Nummern an den Facetten (Kanten) geben dabei die Reihenfolge wieder, in der die Randsimplizes dem Shelling hinzugefügt werden.

Die Reise kann folgendermaßen parametrisiert werden:

Zeit $t$	von $-\infty$ bis $+\infty$
Position $x(t)$	$x(t) = (0, \dots, 0, -\frac{1}{t})^T$

Um oben beschriebene Vorgehensweise durchzuführen, durchläuft der Shelling-Algorithmus zwei Phasen:

- *Phase I:*  
Die Phase I produziert eine Teilmenge der Facetten inklusive der ersten sichtbaren Facette  $f_1$ . Für  $a_1, \dots, a_m$  wird der jeweilige Zeitpunkt der Sichtbarkeit bestimmt sowie die Facette, mit der die Sichtbarkeit erkannt wurde. In dieser Phase werden damit nur Vorbereitungen für die eigentliche Reise getroffen.
- *Phase II:*  
Zur Ausführung der Phase II werden drei Datenstrukturen benötigt:
  - Eine Prioritätsliste der Facettenkandidaten mit dem Zeitpunkt der Sichtbarkeit als Sortierschlüssel: Hier werden bereits vor Ausführung der Phase II die Facettenkandidaten aus Phase I gespeichert.
  - Der Horizont-Graph als Repräsentation des aktuellen Horizonts mit Peaks und Ridges: Dabei bietet sich die Realisierung an, in der die Knoten des Horizont-Graphen die Ridges darstellen und die Kanten die Peaks.
  - Eine weitere Liste zur Zwischenspeicherung von Ridges.

Diese Phase errichtet und aktualisiert eine Repräsentation des Horizont-Graphen. Die nächste Facette wird entweder aus den von Phase I bestimmten Facetten genommen oder aus dem Horizont-Graphen gebildet. Hier werden nun die Facetten im Sinne oben beschriebener Reise gefunden.

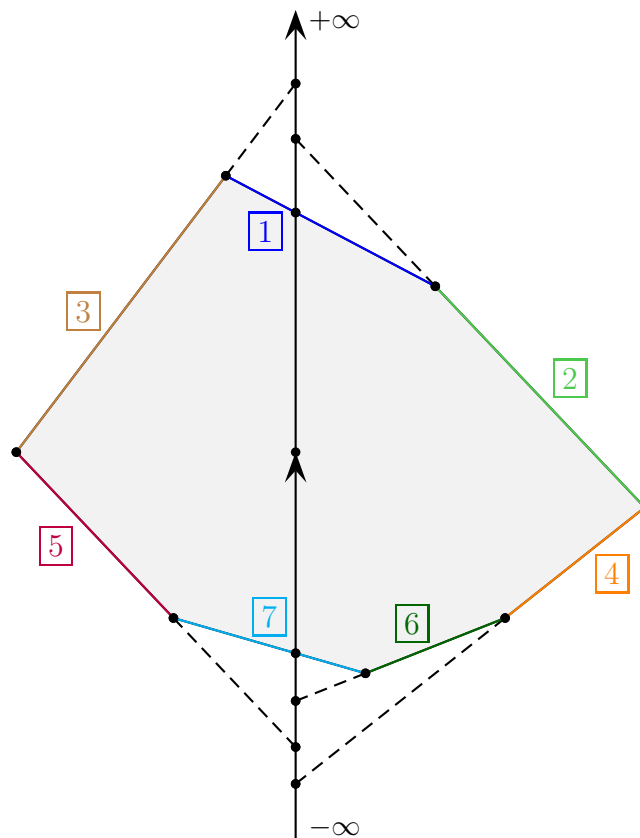


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Vorgehensweise des Shelling-Algorithmus von Seidel

Nachfolgend wird eine an Dwyer (siehe [Dwy88, S. 24]) angelehnte Formulierung des Shelling-Algorithmus von Seidel wiedergegeben.

**Algorithmus 4.6** (Der Shelling-Algorithmus von Seidel).

*Initialisierung:*

Initialisiere

- eine Liste zur Speicherung von Ridges,
- eine weitere Liste, welche die Facettenkandidaten sortiert nach deren Sichtbarkeit wiedergibt, und
- eine Datenstruktur zur Darstellung des Horizont-Graphen.

*Phase I:*

Für jeden Punkt  $a_1, \dots, a_m$  bestimme den frühesten Zeitpunkt der Sichtbarkeit und füge die zugehörige Facette in die Prioritätsliste ein.

*Phase II:*

1. Entferne den Facettenkandidaten mit der frühesten Sichtbarkeit aus der Prioritätsliste. Dieser ist die erste Facette im Shelling.
2. Füge die Ridges in die Ridge-Liste ein.
3. Konstruiere den Horizont-Graphen zur Darstellung der Ridges und Peaks.
4. Solange die Prioritätsliste nicht leer ist, führe folgende Schritte aus:
  - a) Entferne den Facettenkandidaten mit der frühesten Sichtbarkeit aus der Prioritätsliste. Dieser stellt die nächste Facette im Shelling dar.
  - b) Wenn die neue Facette eine neue Ecke enthält,
    - i. identifiziere den verschwindenden Horizont-Ridge im Horizont-Graphen mit Hilfe der Ridge-Liste und lösche ihn aus den beiden Datenstrukturen,
    - ii. entferne auch die zum gelöschten Ridge adjazenten Peaks aus dem Horizont-Graphen,
    - iii. entferne aus der Prioritätsliste die Facettenkandidaten mit den Peaks, die eben gelöscht wurden,
    - iv. füge die neuen Ridges und neuen Peaks in den Horizont-Graphen ein,
    - v. füge das neue Ridge in die Ridge-Liste ein,
    - vi. für jeden neuen Peak füge einen neuen Facettenkandidaten in die Prioritätsliste ein.
  - c) Wenn die neue Facette zu einem Horizont-Peak gehört, aktualisiere den Horizont-Graphen, die Ridge-Liste und die Prioritätsliste.

*Bemerkung 4.7.* Eine neue Facette führt entweder eine neue Ecke ein oder lässt sich allein aus Ecken am Horizont formen. Im ersten Fall wurde die Facette durch die Phase I in die Prioritätsliste eingefügt. Im zweiten Fall wurde die Facette aus der Vereinigung der Ecken von zwei Horizont-Ridges mit gemeinsamem Peak konstruiert. Daher bestimmt jeder Horizont-Peak einen Facetten-Kandidaten.

Auf eine genauere Beschreibung der einzelnen Schritte der Originalversion des Shelling-Algorithmus wollen wir hier verzichten, da wir in erster Linie an der primalen Sichtweise – der Bestimmung der Ecken des Polyeders  $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  – interessiert sind.

## 4.2 Überführung des Shelling-Algorithmus in die primale Problemstellung

In diesem Abschnitt wollen wir eine Übersetzung des Shelling-Algorithmus von Seidel in die primale Problemstellung (P1) vornehmen. Um zunächst eine unnötige Verkomplizierung des Algorithmus zu vermeiden, übernehmen wir vorerst die Zusatzbedingung von Seidel und gehen davon aus, dass

$$0 \in \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))$$

gilt. Somit ist es stets ohne Komplikationen möglich, die Beobachtergerade am Ursprung anzusetzen.

*Bemerkung 4.8.* Wendel wies in seiner Arbeit [Wen62] nach, dass unter noch allgemeineren Verteilungsvoraussetzungen der Punkte als dies im Rotationssymmetriemodell der Fall ist, die Zusatzbedingung mit folgender Wahrscheinlichkeit erfüllt ist:

$$\mathbb{P}(0 \in \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))) = 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m-1}{i}$$

*Bemerkung 4.9.* Der Beweis von Wendel ist nicht einfach nachvollziehbar. Wesentlich intuitiver ist die folgende Argumentation zur Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Allerdings liefert diese nur eine Unterschranke. Hierzu führe man die Wahrscheinlichkeit, dass  $0 \in \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))$  ist, auf die Frage zurück, ob vom Ursprung aus gesehen alle Punkte in einem Halbraum liegen können. Dazu nehmen wir  $n - 1$  Punkte zusammen mit dem Nullpunkt und erzeugen damit eine Hyperebene durch den Ursprung. Nun untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit, dass die verbleibenden  $m - n + 1$  Punkte bezüglich dieser Hyperebene in einem Halbraum liegen. Dabei bestimmt der erste Punkt einen von beiden Halbräumen. Die restlichen Punkte sind nun mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  im selben Halbraum. Man beachte aber, dass im Positivfall nicht unbedingt genau eine geeignete Hyperebene durch  $n - 1$  Punkte und dem Ursprung existieren muss. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \in \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))) &= 1 - \mathbb{P}(0 \notin \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(„Alle Punkte liegen im selben Halbraum“) \geq 1 - \frac{1}{2^{m-n}} \cdot \binom{m}{n-1} \end{aligned}$$

Unter obiger Zusatzvoraussetzung können wir zeigen, dass die Ermittlung der Ecken in der primalen Problemstellung nach der Reihenfolge, die sich aus der Sortierung der Werte einer

festen Zielfunktion ergibt (zuerst die beste Ecke, dann die zweitbeste usw.), der Originalversion des Shelling-Algorithmus von Seidel entspricht. Dazu werden nun beide Sichtweisen kurz analysiert.

**Die Sichtweise von Seidel**

Sei  $\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^n)$  mit paarweise verschiedenen  $\Delta^i \in \{1, \dots, m\}$  ein  $n$ -Tupel von Basisindizes, durch das eine Facette  $\text{KH}(a_{\Delta^1}, \dots, a_{\Delta^n})$  von  $\bar{Y} := \text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  gegeben ist. So erhält man die Variable  $\lambda \neq 0$  zur Bestimmung der Position  $\lambda \cdot e_n$  für die frühest mögliche Sichtbarkeit dieser Facette durch Lösen des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{\Delta^i} \mu^i = \lambda e_n & \Leftrightarrow A_{\Delta}^T \mu = \lambda e_n & \Leftrightarrow \mu = A_{\Delta}^{-T} \lambda e_n & \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \mu = A_{\Delta}^{-T} e_n & (4.1) \\ \sum_{i=1}^n \mu^i = 1 & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \mu^i = 1 & \Leftrightarrow \mathbb{1}^T \mu = 1 & \Leftrightarrow \mathbb{1}^T \mu = 1 & (4.2) \end{aligned}$$

Im Algorithmus 4.12 werden zuerst die Facetten mit positivem  $\lambda$ -Wert aufsteigend nach Größe – zuerst das kleinste, dann das zweitkleinste, bis zum größten  $\lambda$  – dem Shelling hinzugefügt. Anschließend findet der Algorithmus die Facetten mit negativem  $\lambda$ -Wert beginnend mit dem betragsmäßig größten (negativen)  $\lambda$  bis zum Wert am nächsten bei der Null.

**Das primale Problem**

Mit Hilfe folgender (primaler) Problemstellung kann eine Beziehung zur Originalversion des Shelling-Algorithmus hergestellt werden:

$$\max e_n^T x \text{ unter } Ax \leq \mathbb{1} \tag{4.3}$$

Der Zielfunktionswert an einer Ecke  $x_{\Delta}$  mit dem Basisindextupel  $\Delta$  steht mit der Sichtbarkeitsvariable  $\lambda$  aus der dualen Problemstellung wie folgt in Verbindung:

$$e_n^T x_{\Delta} = e_n^T A_{\Delta}^{-1} \mathbb{1} = \mathbb{1}^T A_{\Delta}^{-T} e_n \stackrel{(4.1)}{=} \mathbb{1}^T \frac{1}{\lambda} \mu = \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}^T \mu \stackrel{(4.2)}{=} \frac{1}{\lambda}$$

D.h. bei der Bestimmung der Ecken in der Reihenfolge ihrer Zielfunktionswerte (vom größten bis zum kleinsten Zielfunktionswert) wird die Sichtbarkeitsvariable  $\lambda$  beginnend vom kleinsten positiven Wert bis zum größten positiven Wert ermittelt und dann mit dem betragsmäßig größten negativen  $\lambda$  bis zum betragsmäßig kleinsten negativen Wert fortgefahren. Das ist genau die Reihenfolge, die auch in der dualen Version realisiert wird (vgl. dazu Abbildung 4.2).

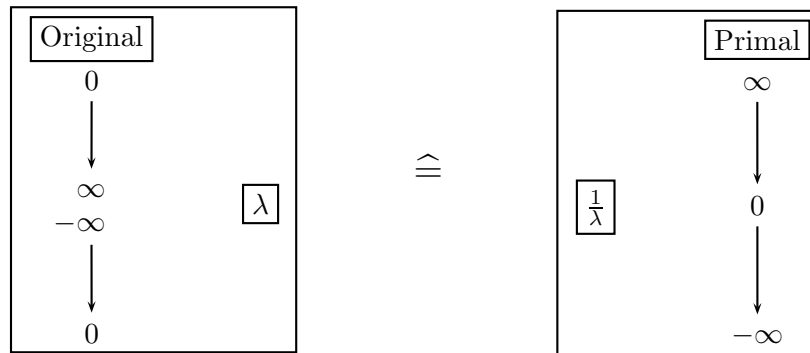


Abbildung 4.2: Veranschaulichung beider Versionen des Shelling-Algorithmus



Diese Erkenntnis wollen wir mit nachfolgendem Lemma nochmal festhalten:

**Lemma 4.10.** *Es gelte  $0 \in \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))$ . Dann entspricht die Reihenfolge der Facetten von  $\bar{Y} = \text{KH}(a_1, \dots, a_m)$ , die sich aus der Konstruktion eines Straight-Line-Shellings entlang der Richtung  $e_n$  ergibt, genau der Auflistung aller Ecken (Basen) des Polyeders  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1\}$  in der absteigenden Sortierung nach ihren Skalarprodukten mit  $e_n$ .*

Damit können wir nun eine primale Version des Shelling-Algorithmus formulieren. Dabei verwenden wir von nun an statt  $e_n$  einen beliebigen Vektor  $c$  für die Zielfunktion.  $c$  ergibt sich entweder, wie in nachfolgender Formulierung beschrieben, aus der Initialisierungsphase oder werde rotationssymmetrisch gemäß unserem stochastischen Modell erzeugt oder beliebig, aber fest, vor der Ausführung des Algorithmus festgelegt. Für welche der Varianten man sich entscheiden soll, wird sich erst in einer erfolgreichen probabilistischen Analyse herausstellen. Die Korrektheit unserer primalen Version des Shelling-Algorithmus wird durch die Wahl von  $c$  nicht beeinflusst, solange gewährleistet ist, dass die Hauptphase an der Optimalecke bezüglich der Zielfunktion startet.

*Bemerkung 4.11.* In nachfolgender Algorithmusformulierung wird ausgenutzt, dass in unserem stochastischen Modell zwei verschiedene Ecken nur mit Wahrscheinlichkeit null denselben Zielfunktionswert aufweisen können. Daher es ist möglich, Ecken bzw. deren Basen eindeutig über ihren Zielfunktionswert zu identifizieren.

**Algorithmus 4.12** (Der Shelling-Algorithmus in primaler Beschreibung).

*Initialisierung:*

1. Bestimme eine Ecke des Polyeders  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  mit der Phase I des Simplexalgorithmus. Führe dazu nachfolgende Schritte aus:

- a) Stelle das Starttableau des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus zum Ungleichungssystem

$$Ax \leq \mathbf{1}$$

auf. D.h. führe Hilfsvektoren  $-e_1, \dots, -e_n$  ein und bilde mit diesen Vektoren als Basis das Tableau.

- b) Entferne durch Pivotschritte sukzessive  $-e_1, \dots, -e_n$  aus der Basis. Verwende dabei als Ersatzpunkte mittels Anwendung von Quotiententests geeignete Vektoren aus  $\{a_1, \dots, a_m\}$ . Nach  $n$  solchen Austauschschritten sind wir an einer Ecke von  $X$  angelangt.

2. Bestimme eine Zielfunktion, die in dieser Ecke optimal wird (z.B.  $c = a_{\Delta^1} + \dots + a_{\Delta^n}$ ).
3. Speichere die gefundene Ecke in einer Datei zur Endausgabe.
4. Initialisiere eine Liste zur Zwischenspeicherung einzelner Basen mit zugehörigen Zielfunktionswerten.

*Typischer Schritt:*

1. Für jede Zeile des Simplextableaus mit einem negativen Eintrag in der Zielfunktionspalte führe folgende Schritte aus:

- a) Bestimme mittels Quotiententest die Nachbarbasis und den zugehörigen Zielfunktionswert.
  - b) Füge die Basis zusammen mit ihrem Zielfunktionswert (falls noch nicht vorhanden) in die Liste ein. Aus Effizienzgründen werde die Liste sortiert nach den Zielfunktionswerten aufgebaut und die Einfügung an entsprechender Stelle vorgenommen.
2. Wende den Crashing-Algorithmus (siehe Abschnitt 4.3) an, um zur Zielbasis mit dem größten Zielfunktionswert aus der Liste zu pivotisieren.
  3. Speichere die Ecke in der Ausgabedatei und lösche die Basis aus der Liste (je nach Sortierung erster oder letzter Eintrag).
  4. Falls die Liste nun leer ist, so stoppe. Sonst gehe zurück zu Schritt 1.

Eine bildliche Veranschaulichung der Vorgehensweise dieser Version des Shelling-Algorithmus ist im Anhang C.3 ab Seite 251 zu finden. Hier wird Schritt für Schritt das Auffinden der Ecken eines dreidimensionalen Polytops durch farbliche Knotenmarkierungen dargestellt. Eine Nummerierung der Knoten gibt dabei die Reihenfolge der Ecken gemäß Shelling-Verfahren wieder. Pivotisierungen durch das Crashing-Verfahren werden mit gestrichelten Pfeilen angedeutet.

*Bemerkung 4.13.* Während der Algorithmus von Avis und Fukuda sowie das Gift-Wrapping-Verfahren einen Suchbaum im Sinne einer Tiefensuche aufbauen, ähnelt die Vorgehensweise des Shelling-Algorithmus einer Breitensuche. Das Abarbeiten der Ecken in der Reihenfolge ihrer Zielfunktionswerte führt dazu, dass stets zu den Blättern des entstehenden Suchbaumes gesprungen werden muss.

Verzichten wir auf die Zusatzvoraussetzung  $0 \in \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))$ , so kann das Polyeder  $X$  unbeschränkt sein. Lassen wir uns nun vor der Ausführung des Shelling-Algorithmus eine Zielfunktion rotationssymmetrisch nach unserem stochastischen Modell erzeugen, dann ist diese in  $X$  unter Umständen beliebig verbesserbar. In diesem Fall existiert natürlich keine Optimalecke und somit ist es nicht möglich, an einer solchen die Hauptphase des Shelling-Algorithmus starten zu lassen. Um dennoch die Idee unseres Verfahrens zu realisieren, sollten wir die Ecke mit dem höchsten Zielfunktionswert aufsuchen. Dabei handelt es sich allerdings in dem nun betrachteten Fall mit einer beliebig verbesserbaren Zielfunktion um keine leichte Aufgabe. Selbst wenn dies gelingt, kann es beim Vorhaben, von der  $i$ . besten Ecke zur  $(i + 1)$ . besten Ecke zu gelangen, zu weiteren Problemen kommen. Diese Schwierigkeiten werden nachfolgend am Beispiel aus Abbildung 4.3 erläutert. Dort wird bei Anwendung des Simplexalgorithmus zum Erreichen der besten Ecke, ein Abbruch nach Auffinden einer der beiden verbessernden freien Richtungen erfolgen. Es ist allerdings ungewiss, welche der beiden Richtungen entdeckt wird. Daher stoppt der Simplexalgorithmus in diesem Beispiel entweder an der besten oder an der zweitbesten Ecke. Selbst wenn die beste Ecke erreicht wird, ergibt sich hier das Problem zur zweitbesten Ecke zu gelangen (roter Pfeil im Beispiel). Diese ist nämlich kein Nachbar der besten Ecke und somit nicht in unserer Hilfsliste. Der Shelling-Algorithmus würde daher fälschlicherweise die drittbeste Ecke als nächstes ansteuern. Das Starten von der zweitbesten Ecke würde nicht nur dazu führen, dass die beste Ecke unentdeckt bleibt, sondern auch auf dieselbe Problematik bezüglich des Auffindens der nächst besten Ecke treffen (blauer Pfeil).

Sobald die Ecken mit verbessernden freien Richtungen abgearbeitet sind, ist das korrekte Vorgehen des Shelling-Algorithmus wieder gewährleistet (grüne Pfeile).

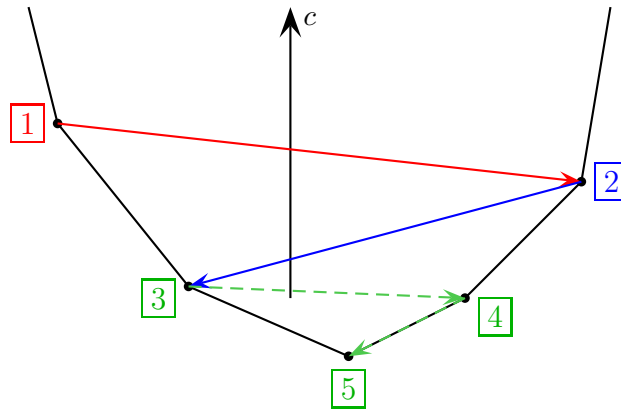


Abbildung 4.3: Unbeschränktes Polyeder mit beliebig verbesserbarer Zielfunktion

Legt man allerdings – wie in obiger Algorithmusformulierung – die Zielfunktion so fest, dass der nach Schritt 1 in der Initialisierungsphase gefundene Eckpunkt optimal ist, so gelingt es stets die nächst beste Ecke aufzufinden. Dies lässt sich mit der Tatsache begründen, dass es immer möglich ist, von jeder Ecke über einen Simplexpfad zur Optimalecke zu gelangen. Dabei wird der Zielfunktionswert bei jedem Pivotschritt echt verbessert. D.h. wenn die  $(i + 1)$ . beste Ecke als nächstes besucht werden soll, so ist diese bereits in unserer Hilfsliste enthalten, da sie mindestens eine Nachbarecke mit echt besserem Zielfunktionswert haben muss. Ansonsten müsste es sich bei der  $(i + 1)$ . besten Ecke bereits um die Optimalecke (Startecke) selbst handeln. Die zugehörige Nachbarecke muss bereits abgearbeitet worden sind, sonst kann die  $(i + 1)$ . beste Ecke noch nicht an der Reihe sein als nächstes besucht zu werden.

Wir können also ohne Weiteres die Zusatzvoraussetzung  $0 \in \text{Int}(\text{KH}(a_1, \dots, a_m))$  für eine bessere Vergleichbarkeit der Konvexe-Hülle-Algorithmen weglassen und haben mit dem Algorithmus 4.12 ein korrektes Verfahren zur Enumeration aller Ecken des Polyeders  $X$ . Die stochastische Abhängigkeit des Zielfunktionsvektors von den Restriktionsvektoren durch den Schritt 2. in der Initialisierungsphase könnte sich zwar problematisch in Bezug auf eine probabilistische Analyse auswirken, diese stellte sich aber auch unter Vernachlässigung eventueller stochastischer Abhängigkeit als extrem schwierig heraus, so dass in diesem Kapitel nur empirische Untersuchungen vorgenommen werden.

Damit für den Besuch der Ecken in der Reihenfolge, die durch die Zielfunktionswerte vorgegeben ist, möglichst wenige Pivotschritte durchgeführt werden müssen, verwenden wir das Prinzip des Crashings, das in den nachfolgenden Abschnitten vorgestellt wird<sup>2</sup>.

### 4.3 Das Crashing-Verfahren bei Nichtentartungsbedingung

Die Idee, die hinter dem Crashing-Verfahren steckt, ist Folgende: Wenn wir die Ausgangsbasis und die Zielbasis kennen, so pivotisieren wir ohne Rücksicht auf Zulässigkeit mit der

<sup>2</sup>Die Inhalte der Abschnitte 4.3 und 4.4 lehnen sich teilweise an das Buch von Steuer [Ste86] an.

minimalen Anzahl an Pivotschritten zur Zielbasis. Aufgrund der Nichtentartungsbedingung (siehe Definition 1.6, Seite 28), die in unserem stochastischen Modell mit Wahrscheinlichkeit eins erfüllt ist, bilden  $n$  Restriktionsvektoren immer eine Basis. Damit kann jeder Eintrag der aktuellen Basis, der nicht in der Zielbasis steckt, sofort gegen ein noch fehlendes Element ausgetauscht werden, welches zum Erreichen der Zielbasis notwendig ist.

Zur Formulierung des Algorithmus werde nachfolgende Notation eingeführt:

*Notation 4.14.* Die Ausgangsbasis sei  $B_1$  und als Ziel streben wir die Basis  $B_2$  an. Die Menge der Indizes der Basisrestriktionen bezeichnen wir mit

$$I_{B_1} := \{i \mid a_i \in B_1\} \quad \text{bzw.} \quad I_{B_2} := \{i \mid a_i \in B_2\}.$$

Des Weiteren definieren wir noch die Mengen

$$I_u := \{i \in I_{B_1} \mid i \notin I_{B_2}\} \quad \text{und} \quad I_f := \{i \in I_{B_2} \mid i \notin I_{B_1}\}.$$

$I_u$  enthält also alle Indizes der Restriktionen, die die Ausgangsbasis verlassen müssen (der Index  $u$  stehe hier für **unnötige** Indizes).  $I_f$  hingegen enthält alle Indizes der Restriktionen, die zum Erreichen der Zielbasis noch in die Basis gebracht werden müssen (der Index  $f$  stehe hier für **fehlende** Indizes).

Damit können wir nun den Algorithmus für den Fall der Erfüllung der Nichtentartungsbedingung formulieren:

**Algorithmus 4.15** (Der Crashing-Algorithmus unter der Nichtentartungsbedingung).

*Input:* Ziel- und Ausgangsbasis sowie das Tableau zur Ausgangsbasis.

*Schritte:*

1. Ermittle  $I_f$  die Menge der fehlenden Basiselemente und  $I_u$  die Menge der unnötigen Indizes in der Basis.
2. Falls  $I_f = \emptyset$ , so stoppe.  
Ansonsten wähle ein Element  $j$  aus  $I_f$  und ein  $i$  aus  $I_u$ .
3. Entferne  $i$  aus  $I_u$  und  $j$  aus  $I_f$ .
4. Führe den Basisaustauschschritt mit dem Pivotelement zur Zeile mit Basisindex  $i$  und Spalte  $j$  durch. Aktualisiere die Basis.
5. Gehe zurück zu Schritt 2.

*Bemerkung 4.16.* Aufgrund der Nichtentartungsbedingung kann obiger Algorithmus ausgeführt werden, ohne auf ein Pivotelement mit Wert Null zu treffen.

Der Hauptaufwand des Algorithmus besteht in der Durchführung der Pivotschritte. Bekanntlich verursacht ein solcher  $\mathcal{O}(mn)$  Rechenoperationen. Im Worst-Case-Fall unterscheiden sich die beiden Basen in jedem Element, so dass bis zu  $n$  Pivotschritte durchzuführen sind.

Für die Bestimmung von  $I_f$  und  $I_u$  sortiert man die beiden Basen (dies ist jeweils mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$  möglich) und bestimmt die Elemente der beiden Mengen mit jeweils einem (parallelen) Durchlauf beider sortierter Basen. Dabei sind bis zu  $2n$  Vergleiche nötig.

Um die Tableauzeilen zu einzelnen Basiseinträgen effizienter zu finden, empfiehlt es sich in der Ausgangsbasis noch vor der Durchführung der Sortierung den Basiseinträgen auch zusätzlich die zugehörigen Tablauzeilen zuzuweisen und somit diese ebenfalls in der Menge  $I_u$  verfügbar zu machen. Der zusätzliche Aufwand für die Speicherung und für den Zuweisungsprozess beträgt  $\mathcal{O}(n)$ .

Als maximaler Gesamtaufwand ergibt sich somit:

$$\mathcal{O}(n^2m + 2n \log_2 n + 2n + n) = \mathcal{O}(n^2m)$$

Nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Zusammensetzung der Komplexität des Crashing-Verfahrens.

KOMPLEXITÄT IN $\mathcal{O}$ -NOTATION	BESCHREIBUNG
$n$	maximale Anzahl durchzuführender Pivotschritte
$mn$	Aufwand eines Pivotschrittes
$2n \log_2(n)$	Aufwand zur Sortierung der Ausgangs- und Zielbasis
$2n$	maximale Anzahl an Vergleichen zur Bestimmung von $I_f$ und $I_u$ nach Sortierung der Ausgangs- und Zielbasis
$n$	Zuweisung der Tableauzeilen zu den Elementen von $I_u$

Tabelle 4.1: Übersicht zur Komplexität des Crashing-Algorithmus

## 4.4 Das Crashing-Verfahren für den allgemeinen Fall

Wenn auf die Erfüllung der Nichtentartungsbedingung verzichtet wird, also nicht unbedingt jede Kombination aus  $n$  Restriktionsvektoren eine Basis bilden muss, ist eine genauere Betrachtung der Durchführbarkeit des Crashing-Algorithmus notwendig. Für diesen Fall, auch wenn er in unserem stochastischen Modell nur mit Wahrscheinlichkeit null auftritt, sind nachfolgende Ausführungen von Bedeutung.

*Notation 4.17.* Es gelten weiterhin die Vereinbarungen aus Notation 4.14. Zudem bezeichne  $Z(i)$  die Zeile im Tableau zum Basiseintrag mit Index  $i$ .

Damit lässt sich der verallgemeinerte Algorithmus folgendermaßen formulieren:

**Algorithmus 4.18** (Das allgemeine Crashing-Verfahren).

*Input:* Ziel- und Ausgangsbasis sowie das Tableau zur Ausgangsbasis.

*Schritte:*

1. Ermittle  $I_f$  die Menge der fehlenden Basiselemente und  $I_u$  die Menge der unnötigen Indizes in der Basis.
2. Falls  $I_f = \emptyset$ , so stoppe. Ansonsten wähle  $j \in I_f$ .
3. Suche ein  $i \in I_u$  mit  $\alpha_j^{Z(i)} \neq 0$ .

4. Entferne  $i$  aus  $I_u$  und  $j$  aus  $I_f$ .
5. Pivotisiere mit  $\alpha_j^{Z(i)}$  als Pivotelement und aktualisiere die Basis.
6. Gehe zurück zu Schritt 2.

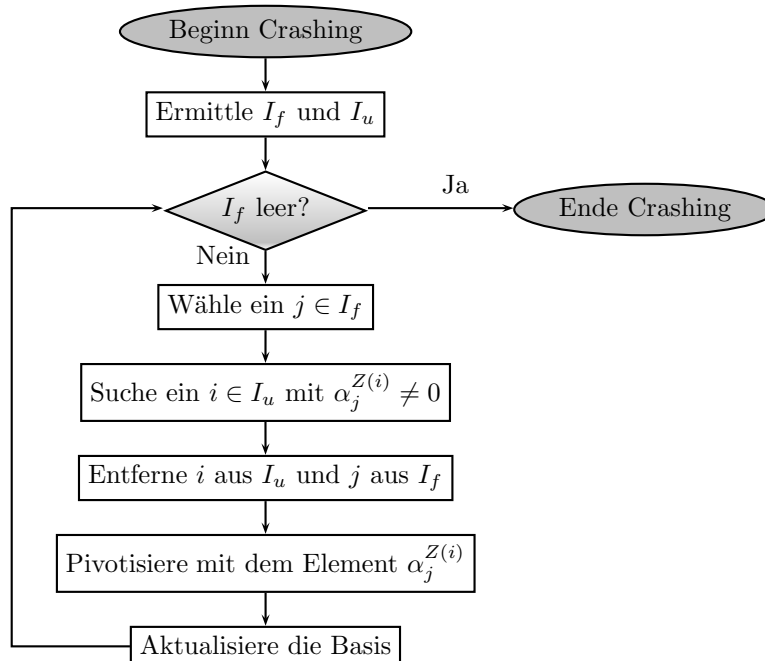


Abbildung 4.4: Flowchart zum allgemeinen Crashing-Algorithmus

Problematisch an diesem Algorithmus ist der Schritt 3, falls eben nicht wie im Rotationssymmetriemodell jede Kombination aus  $n$  Restriktionsvektoren fast sicher eine Basis bildet. Dann müssen wir nämlich in Erwägung ziehen, dass es in der ausgewählten Spalte  $j$  eventuell gar kein Pivotelement mit  $\alpha_j^{Z(i)} \neq 0$  für  $i \in I_u$  gibt. Mit Hilfe des nachfolgenden Lemmas wollen wir nun aber zeigen, dass der Schritt 3 immer gelingt.

**Lemma 4.19.** Sei  $B = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_n}\}$  eine Basis im  $\mathbb{R}^n$  und  $I_B := \{j_1, \dots, j_n\}$  die zugehörige Menge der Indizes. Sei weiter  $a_e \notin B$  und  $J := \{i \in I_B \mid \alpha_e^{Z(i)} = 0\}$ . Dann ist  $a_e$  linear abhängig zur Menge  $\{a_i \mid i \in I_B \setminus J\}$ .

**Beweis:** Da  $B$  eine Basis ist, gilt

$$\sum_{i \in I_B} \alpha_e^{Z(i)} \cdot a_i = a_e.$$

Weil weiter  $\alpha_e^{Z(i)} = 0 \forall i \in J$  gilt, folgt

$$\sum_{i \in I_B \setminus J} \alpha_e^{Z(i)} \cdot a_i = a_e.$$

Somit ist  $a_e$  linear abhängig zu  $\{a_i \mid i \in I_B \setminus J\}$ . □

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun die Durchführbarkeit des Schrittes 3 beweisen:

**Satz 4.20.** *Seien  $B_1$  und  $B_2$  zwei Basen und  $I_{B_1}, I_{B_2}, I_u$  sowie  $I_f$  wie oben definiert. Weiter sei  $e \in I_f$ . Dann gibt es stets ein  $i \in I_u$ , so dass  $\alpha_e^{Z(i)} \neq 0$ .*

**Beweis:** Nehmen wir an,  $\alpha_e^{Z(i)} = 0 \forall i \in I_u$ . Nach obigem Lemma folgt somit, dass  $a_e$  linear abhängig zu  $\{a_i \mid i \in I_{B_1} \setminus I_u\}$  ist. Weil  $\{a_e\} \cup \{a_i \mid i \in I_{B_1} \setminus I_u\}$  eine Teilmenge von  $B_2$  ist, ist  $a_e$  linear unabhängig zu  $\{a_i \mid i \in I_{B_1} \setminus I_u\}$  aufgrund der Basiseigenschaft von  $B_2$ . Da dies einen Widerspruch darstellt, muss es ein  $i \in I_u$  geben mit  $\alpha_e^{Z(i)} \neq 0$ .  $\square$

Dies beweist die Durchführbarkeit des obigen Algorithmus.

Aufgrund der Irrelevanz des Verfahrens bei Verwendung unseres stochastischen Modells, wird hier auf eine Komplexitätsanalyse des allgemeinen Crashing-Verfahrens verzichtet.

## 4.5 Die Worst-Case-Komplexität des Shelling-Algorithmus

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Worst-Case-Komplexität des Shelling-Algorithmus in der von uns formulierten primalen Version. Anschließend werden zu einzelnen Größen des Aufwandterms empirische Untersuchungen vorgenommen.

Die Komplexität der Initialisierungsphase wird erneut von der Berechnung einer Ecke des Polyeders  $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$  mit Hilfe des Simplexalgorithmus bestimmt. Da dies bereits in der Analyse des Gift-Wrapping-Algorithmus und des Verfahrens von Avis und Fukuda – als ein Teil der dortigen Initialisierungsphase – ausgeführt wurde (siehe Abschnitt 2.3 bzw. 3.2), beschränken wir uns nun auf die Hauptphase („Typischer Schritt“) des Shelling-Algorithmus und halten zur Erinnerung nur kurz die Komplexität

$$\mathcal{O}(mn^2 + 2mn)$$

für die Initialisierungsphase des Shelling-Algorithmus fest.

Global über das gesamte Polyeder betrachtet, gibt es bis zu  $n \cdot \#V$  Kanten, auf welche man jeweils einmal in absteigender Richtung trifft. Für jede Abstiegsrichtung wird der Quotiententest durchgeführt und der Zielfunktionswert ermittelt<sup>3</sup>, der sich an der entsprechenden Nachbarecke ergibt (ohne allerdings den Pivotschritt im Tableau tatsächlich durchzuführen). Die gefundene Basis wird über den Zielfunktionswert in der Liste gesucht und, falls noch nicht vorhanden, eingefügt. Durch die Sortierung der Liste nach Zielfunktionswerten wird der Such- und Einfügeaufwand minimiert.

Die maximale Komplexität eben beschriebener Schritte beträgt:

$$\mathcal{O}\left( \underbrace{n \cdot \#V}_{\text{max. Anzahl abst. Kanten}} \cdot \left( \underbrace{(m-n)}_{\text{Quotienten}} + \underbrace{\log_2 \#V}_{\text{Suchaufwand}} \right) \right)$$

<sup>3</sup>Nach der Bestimmung des Pivotelementes mit dem Quotiententest werden mit diesem Ergebnis zur Berechnung des Zielfunktionswertes nur noch zwei weitere Operationen benötigt. Daher ist dies für die Gesamtkomplexität vernachlässigbar.

Die Abschätzung des Suchaufwandes ist hier sehr grob vorgenommen und wird später nochmal aufgegriffen.

In jeder Iteration wird eine Ecke in die Ausgabedatei geschrieben und die Basen der Nachbar-ecken, die einen schlechteren Zielfunktionswert aufweisen, ermittelt. Anschließend wird zur Ecke mit dem nächst besten Zielfunktionswert pivotisiert. Somit ergeben sich insgesamt  $\#V$  Iterationen.

Der Crashing-Algorithmus findet einen kürzesten Pivotisierungspfad von der Ausgangsbasis zur Zielbasis. Dabei sind bis zu  $n$  Pivotschritte mit jeweils Aufwand  $\mathcal{O}(mn)$  durchzuführen.

Insgesamt ergibt sich somit folgender Worst-Case-Aufwand:

$$\mathcal{O}(mn^2 + 2mn + (\#V - 1) \cdot mn^2 + n \cdot \#V \cdot ((m - n) + \log_2 \#V)) \quad (4.4)$$

Nachfolgende Tabelle gibt Auskunft über die Zusammensetzung der maximalen Gesamtkomplexität:

KOMPLEXITÄT IN $\mathcal{O}$ -NOTATION	BESCHREIBUNG
$mn^2 + 2mn$	Initialisierungsphase
$(\#V - 1) \cdot n$	maximale Anzahl an Pivotschritten durch das Crashing
$mn$	Aufwand eines Pivotschritts
$n \cdot \#V$	maximale Anzahl absteigender Kanten
$m - n$	Anzahl zu berechnender Quotienten pro Abstiegsrichtung
$\log_2 \#V$	Suchaufwand pro Abstiegs-kante

Tabelle 4.2: Übersicht zur Komplexität des Shelling-Algorithmus

Vernachlässigt man die Terme niedrigerer Ordnung und berücksichtigt dabei, dass

$$\log_2 \#V \leq \log_2 \binom{m}{n} \leq \log_2 m^n = n \cdot \log_2 m \leq nm$$

gilt, so vereinfacht sich obiger Komplexitätsausdruck zu

$$\mathcal{O}(\#V \cdot mn^2).$$

Die erwartete Anzahl an Pivotschritten beim Crashing-Verfahren und der durchschnittliche Suchaufwand sind in einer probabilistischen Komplexitätsanalyse des Shelling-Algorithmus von Interesse. Aufgrund der hohen Schwierigkeit bleibt die Untersuchung dieser Größen in den nachfolgenden Abschnitten auf empirische Auswertungen beschränkt. Es ist plausibel, dass für eine große Restriktionszahl wohl meistens beim typischen Crashing-Vorgang fast alle Restriktionen auszutauschen sind. Dies wird sich auch bei der nun folgenden empirischen Untersuchung zeigen.



## 4.6 Empirische Analyse der durchschnittlichen Schrittzahl durch das Crashing

Die vermutlich interessanteste Zufallsgröße im Zusammenhang mit dem Shelling-Algorithmus bildet die mittlere Pivotschrittzahl bei der Ausführung des Crashing-Algorithmus, also die durchschnittliche Anzahl an unterschiedlichen Basiselementen zwischen der  $i$ . besten und  $(i + 1)$ . besten Ecke im Polyeder  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq \mathbf{1}\}$ . Hierzu untersuchen wir zunächst den Einfluss des Parameters  $m$  auf die mittlere Anzahl an Pivotschritten bei den Crashing-Vorgängen. Abbildung 4.5 zeigt dazu für unsere Standardfestlegung der Parameter den entsprechenden Kurvenverlauf.

*Bemerkung 4.21.* Um mögliche Verzerrungen aufgrund stochastischer Abhängigkeit des Zielfunktionsvektors  $c$  mit den Restriktionsvektoren zu vermeiden, wurde zur Generierung der empirischen Daten in diesem und dem nachfolgenden Abschnitt  $c$  ebenfalls nach unserem stochastischen Modell erzeugt. Dabei kam zum Auffinden der Optimalecke der restriktionsorientierte Simplexalgorithmus zum Einsatz. Wenn sich  $c^T x$  im erzeugten Optimierungsproblem unbeschränkt verbessern ließ, so wurde das Beispiel verworfen.

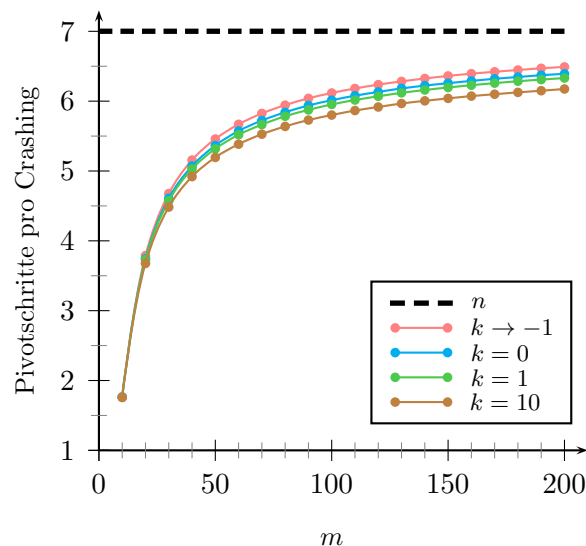


Abbildung 4.5: Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters  $m$  unter der Dimension  $n = 7$

Wie sich in Abbildung 4.5 (siehe auch Abbildung B.36 auf Seite 206) zeigt, nähert sich die durchschnittliche Schrittzahl bei steigendem  $m$  immer mehr der Obergrenze  $n$  (hier  $n = 7$ , in Abbildung 4.5 gestrichelt eingezeichnet) an. Dies wird besonders bei Gleichverteilung der Vektoren auf der Kugeloberfläche ersichtlich, welche offenbar die Verteilung mit den größten Beobachtungswerten darstellt.

Betrachten wir unsere alternative Parameterfestlegung und lassen damit  $m$  sehr viel höher steigen, so scheint die Zufallsgröße sich noch stärker an  $n$  anzunähern. Die Graphik legt nahe, dass zumindest asymptotisch (d.h.  $m \rightarrow \infty$ ,  $n$  fest) die Obergrenze erreicht wird. Trotz der hohen Plausibilität dieser Vermutung steht ein formaler Beweis hierzu noch aus.

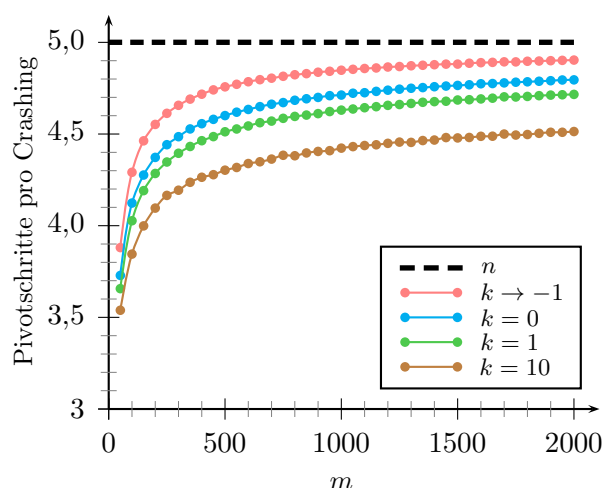


Abbildung 4.6: Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters  $m$  unter der Dimension  $n = 5$

Grob erklären lassen sich die Kurven aus den Abbildungen 4.5 und 4.6 durch Betrachtung der erwarteten Eckenzahl. Je mehr Ecken ein Polyeder aufweist umso mehr Kandidaten kommen als Nachfolgeecken der  $i$ . besten Ecke in Frage. Dadurch werden seltener verwandte Ecken, d.h. Ecken mit mindestens einem übereinstimmenden Basiselement, oder sogar benachbarte Ecken in der nächsten Iteration angesteuert. Folglich müssen bei einer großen Eckenzahl sehr oft alle Basisvektoren zum Erreichen der nächst besten Ecke ausgetauscht werden. Ein Crashing-Vorgang zu einer verwandten oder sogar benachbarten Ecke findet in diesem Fall nur noch selten statt. Mit anderen Worten, durch eine höhere Anzahl an Ecken verringert sich die Wahrscheinlichkeit des Vermeidens eines vollen Basisaustausches.

Analog zu obigen Testergebnissen folgen in Abbildung 4.7 (siehe auch B.38 auf Seite 208) die empirischen Beobachtungen bei fester Restriktionszahl  $m = 50$  unter Variation der Dimension.

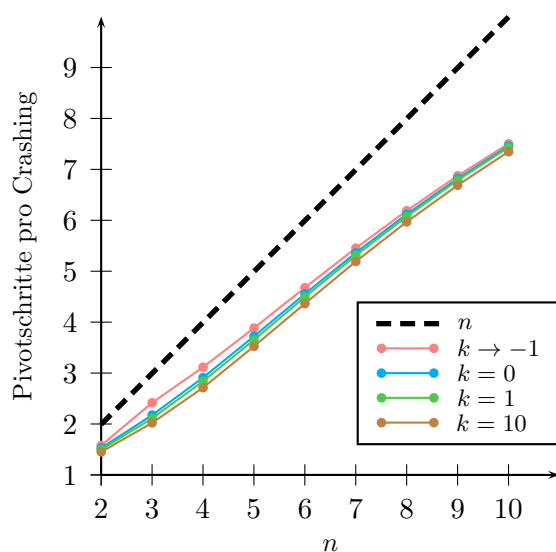


Abbildung 4.7: Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters  $n$  unter  $m = 50$

Man erkennt hier, dass bei alleiniger Erhöhung der Dimension zwar die Zahl der Pivotschritte pro Crashing-Vorgang zunimmt, man sich aber immer mehr von der Schrittzahl  $n$  entfernt. D.h. die Erhöhung der Dimension wirkt stärker als die Steigung der durchschnittlichen Schrittzahl. Um diese Beobachtung zu erklären, beachte man, dass mit hohem  $m$  eine Annäherung an die Obergrenze  $n$  erfolgt. Wie groß  $m$  sein muss, um eine gewisse Nähe der empirischen Resultate zu  $n$  zu erhalten, hängt stark von der Größe der Dimension ab. Eine Erhöhung von  $n$  müsste zur Wahrung der Distanz des empirischen Wertes zur Obergrenze auch gleichzeitig eine gewisse Erhöhung von  $m$  nach sich ziehen.

Bei unserer Alternativfestlegung der Parameter (siehe Abbildung 4.8) stellen wir fest, dass aufgrund des höheren  $m$  die empirischen Ergebnisse deutlich näher an der Obergrenze  $n$  liegen. Wiederum scheint die Verteilung auf der Kugeloberfläche hier die größten Beobachtungswerte aufzuweisen. Dies ist erneut auf die höhere Zahl an Ecken zurückzuführen.

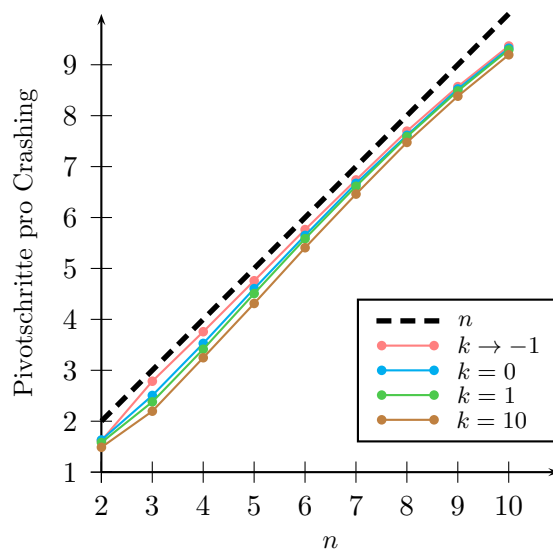


Abbildung 4.8: Durchschnittliche Schrittzahl bei Ausführung des Crashing-Algorithmus bei Variation des Parameters  $n$  unter  $m = 500$

## 4.7 Empirische Untersuchung des Such- und Einfügeaufwandes

Aufgrund der hohen Schwierigkeit einer Average-Case-Analyse des Such- und Einfügeaufwandes im Shelling-Algorithmus beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit einer empirischen Untersuchung. Von Interesse ist, wie hoch der Aufwand im Algorithmus für das Suchen bzw. Einfügen der Basen in unserer sortierten Liste im Durchschnitt wird. Die empirischen Resultate diesbezüglich sind nachfolgenden Graphiken zu entnehmen. Hierbei wurden zur Berechnung des Suchaufwandes für jede Such- und Einfügeaktion der Logarithmus über die aktuelle Länge der Hilfsliste gebildet und diese Werte zusammenaddiert.

Der grundsätzliche Verlauf der Kurven in Abbildung 4.9 entspricht den Erwartungen: Je geringer die Redundanzwahrscheinlichkeit desto höher wird der Gesamtsuchaufwand im Algorithmus, da hier einerseits mehr Basen in die Liste eingefügt werden, d.h. es werden mehr Such- und Einfügeaktionen stattfinden, andererseits dadurch auch die Listengröße zunimmt,

was den generellen Aufwand für eine Suchaktion erhöht. Auch der monotone Anstieg der Kurven bei steigendem  $m$  lässt sich mit diesen Argumenten begründen.

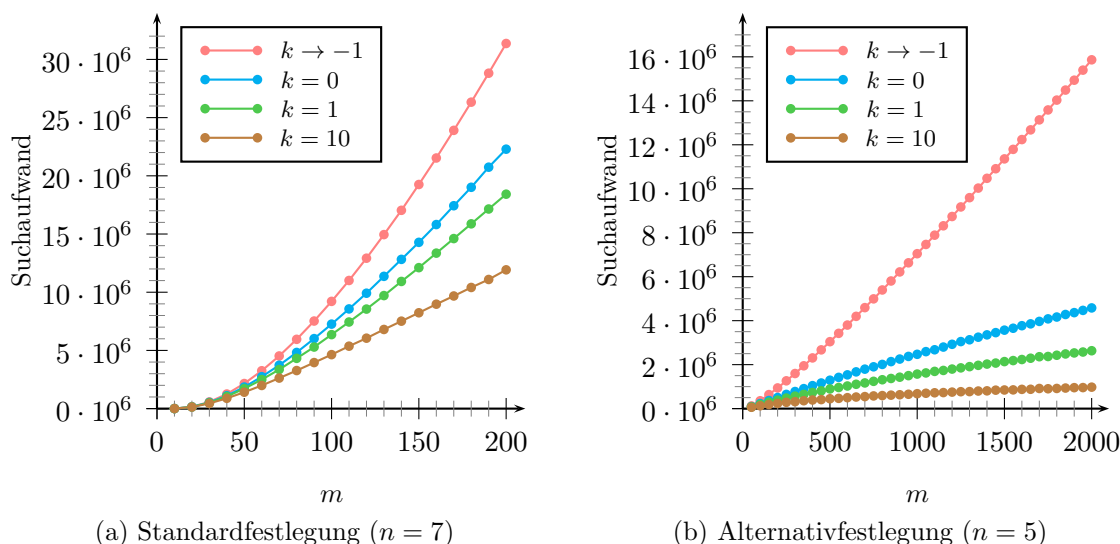


Abbildung 4.9: Suchaufwand unter Variation des Parameters  $m$

Vor allem die Kurven zu unserer Alternativfestlegung der Parameter ähneln der durchschnittlichen Eckenzahl im Polyeder. So scheint auch hier der Suchaufwand für  $k \rightarrow -1$  einer linearen Kurve zu entsprechen und für die sonstigen  $k$  eher sublinear zu verlaufen.

Betrachten wir die Variation der Dimension  $n$  (siehe Abbildung 4.10), so stellen wir fest, dass hier der Einfluss des Verteilungsparameters etwas geringer ausfällt. Insgesamt ist der Verlauf wieder einmal stark von der Eckenzahl geprägt.

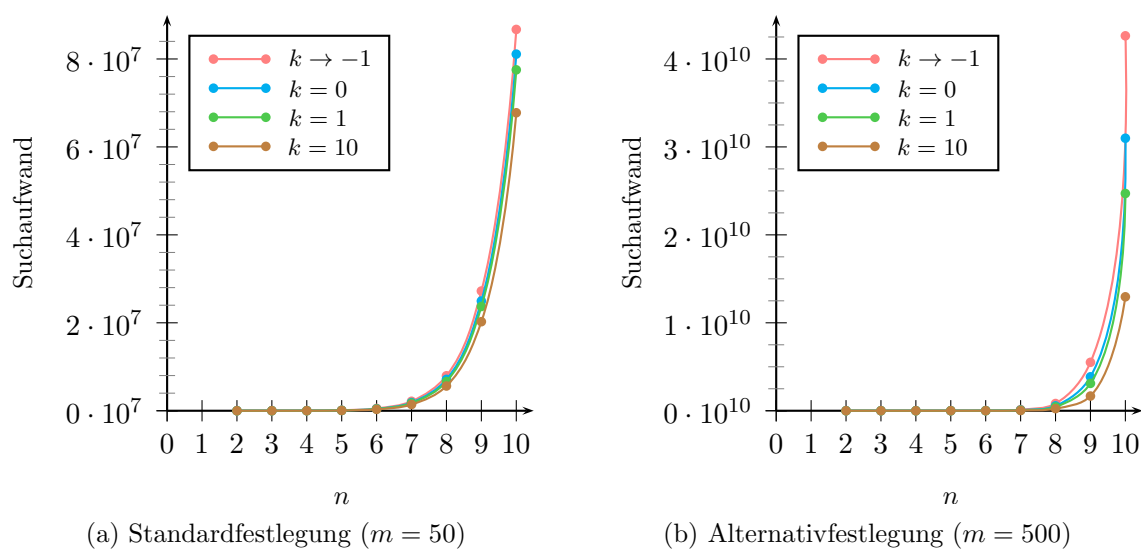


Abbildung 4.10: Suchaufwand unter Variation des Parameters  $n$

Neben dem Suchaufwand wäre an dieser Stelle auch eine Average-Case-Analyse über die durchschnittliche Listengröße interessant, auf die der Shelling-Algorithmus bei seiner Ausführung trifft. Dies ist die nächste Größe, die hier empirisch untersucht werden soll. Etwas einfacher und damit realistischer für den Erfolg einer probabilistischen Untersuchung ist jedoch die Zufallsgröße, die angibt, wie groß die Hilfsliste während einer Ausführung des Verfahrens maximal wird. Beide Zufallsgrößen werden in den nachfolgenden Graphiken dargestellt. Letztere ist jeweils in den dunkleren Farben eingezeichnet.

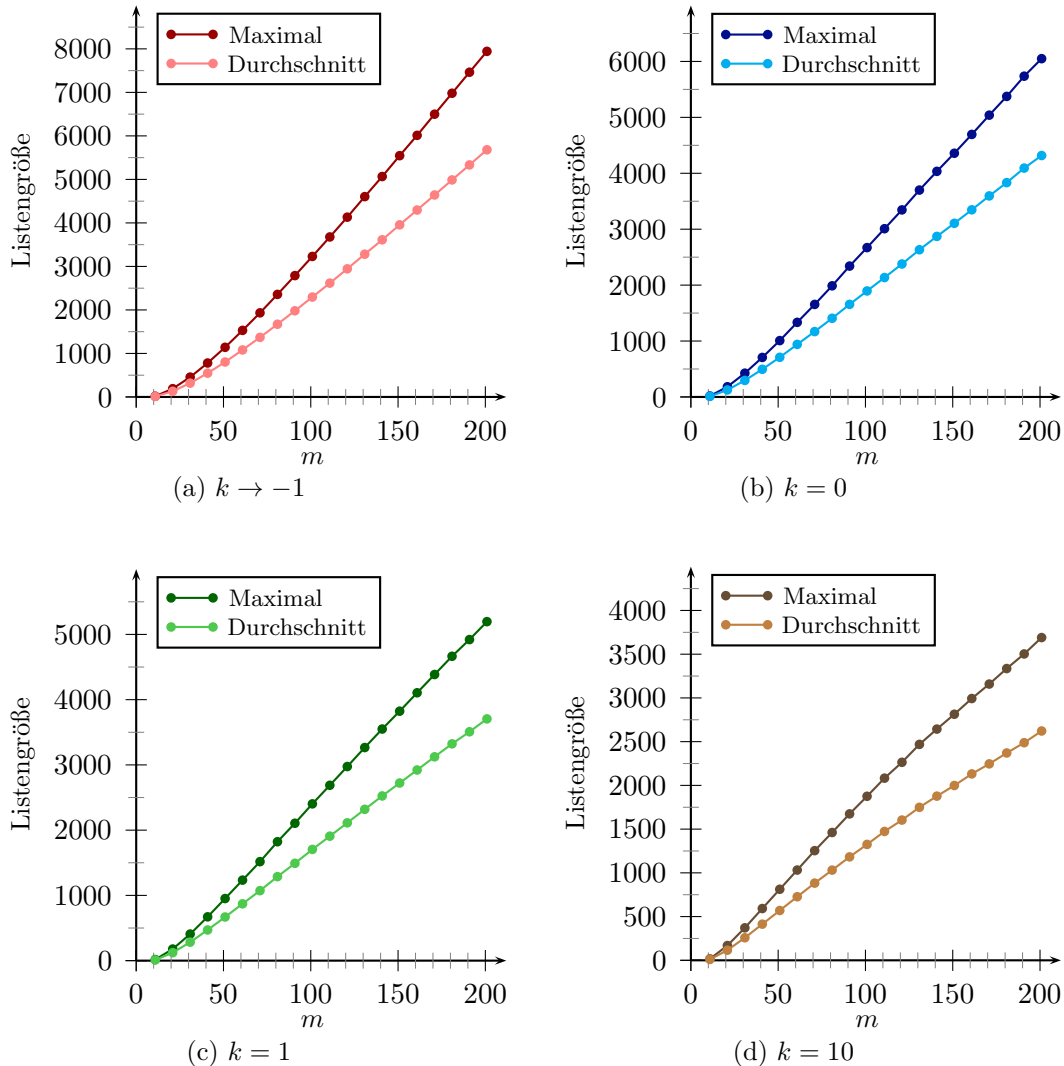


Abbildung 4.11: Maximale und durchschnittliche Listengröße bei  $n = 7$  unter Variation des Parameters  $m$

Die Abbildung hier gibt das Verhalten der Zufallsgrößen wieder, wenn bei Dimension  $n = 7$  die Restriktionszahl variiert wird. Deutlich sichtbar wird wieder der Einfluss des Verteilungsparameters  $k$ . Die Tatsache, dass die betrachteten Größen bei Erhöhung von  $k$  fallen, lässt sich erneut auf das dadurch schon des Öfteren bemerkte Abfallen der Eckenzahl zurückführen.

Die Kurven für den Verteilungsparameter  $k = 10$  scheinen jeweils einen sublinearen Verlauf anzunehmen. Dass dies langfristig auch für die anderen Verteilungen der Fall ist, wird deutlich, wenn wir die entsprechenden Graphiken für unsere Alternativfestlegung der Parameter betrachten. Weiter fällt auf, dass absolut gesehen die Differenz aus maximaler und durchschnittlicher Listengröße für steigendes  $m$  zunimmt.

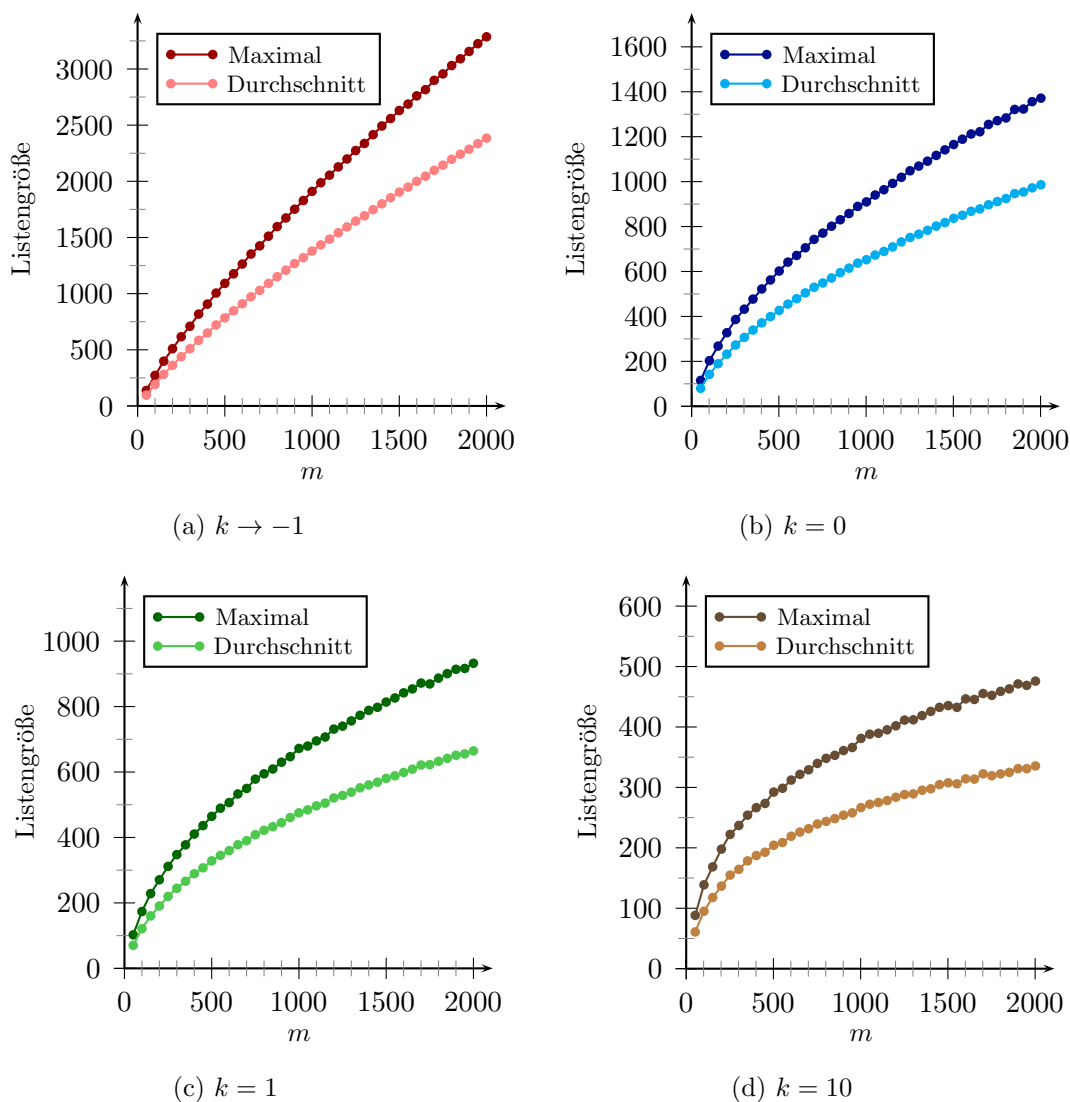


Abbildung 4.12: Maximale und durchschnittliche Listengröße bei  $n = 5$  unter Variation des Parameters  $m$

Variieren wir nun die Dimension, so deuten die Graphiken an, dass der grundsätzliche Verlauf der Kurven zur durchschnittlichen und maximalen Listengröße hauptsächlich von der Eckenzahl bestimmt wird. Wie in Abbildung 4.13 zu sehen ist, scheint der Effekt des Verteilungsparameters diesbezüglich geringer auszufallen als bei Variation von  $m$ .

Betrachten wir dazu unsere alternative Festlegung der Parameter (Tabelle 1.3), so ergeben sich daraus keine neuen Erkenntnisse. Die Graphiken wurden daher in den Anhang auf Seite 210 ausgelagert.

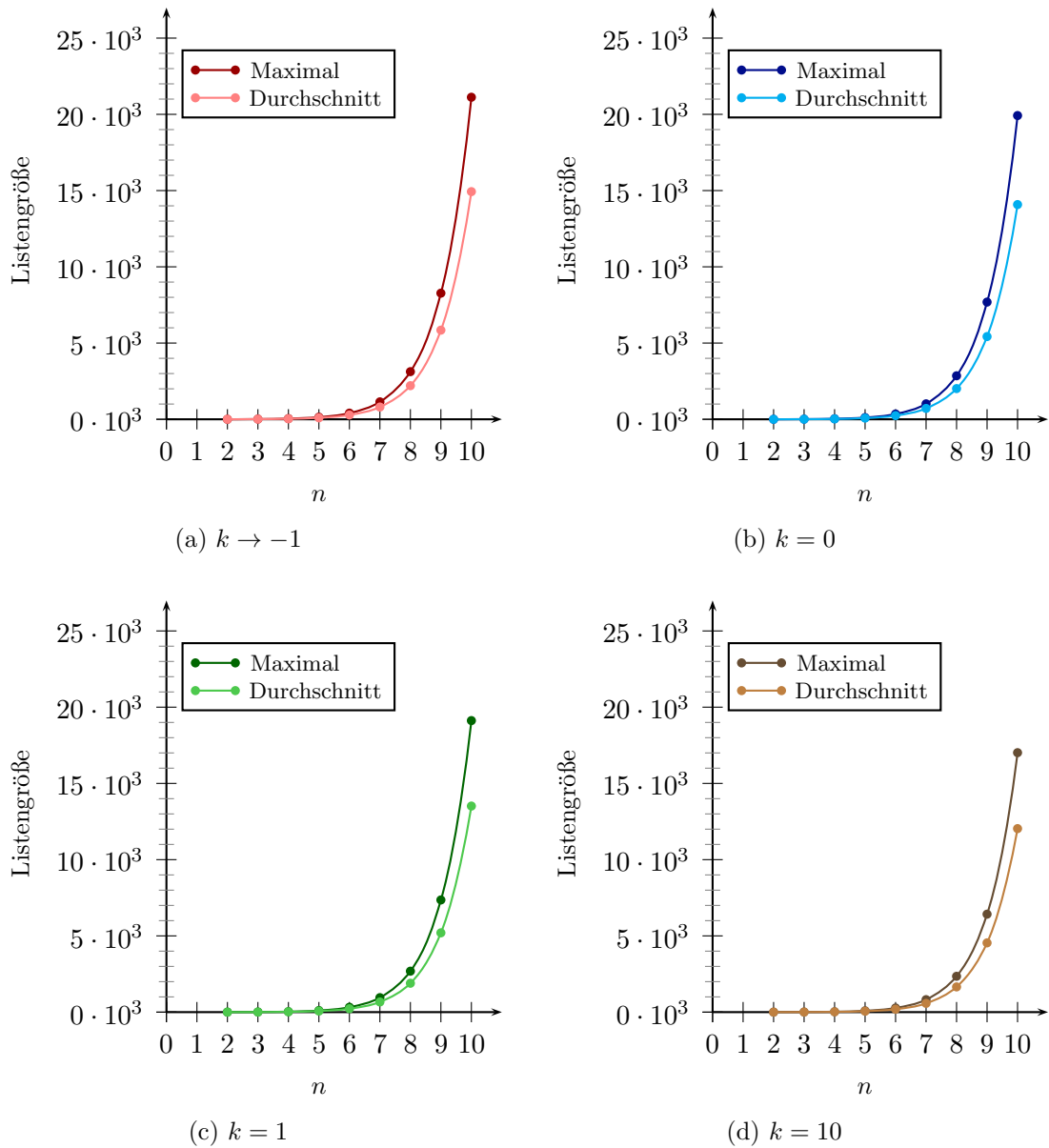


Abbildung 4.13: Maximale und durchschnittliche Listengröße bei  $m = 50$

Wie wir bei allen Abbildungen zur durchschnittlichen und maximalen Listengröße beobachten können, scheinen die beiden betrachteten Zufallsgrößen zu sehr ähnlichen Kurvenverläufen zu führen. Weiter fällt der Abstand beider Kurven zueinander auffallend gering aus. Um dies zu erläutern, führen wir uns die Situation vor Augen, in der das Zielfunktionsniveau im Shelling-Algorithmus nahe bei null liegt. Wir können davon sprechen, dass wir uns momentan in der Nähe des Äquators befinden. Hier hat das Polyeder die meiste Struktur und daher die meisten Ecken. Folglich sind in der Umgebung des Äquators in der Regel sowohl die meisten Suchanfragen zu beantworten als auch gleichzeitig die Listen maximal lang, so dass hier der Großteil des Suchaufwandes entsteht. Auch die durchschnittliche Größe unserer Liste erhält aus diesen Gründen in der Nähe des Äquators ihren Haupteinfluss.





# Kapitel 5

## Die Double-Description-Methode

Ein weiteres Verfahren zur Enumeration aller Ecken eines Polyeders stellt die sogenannte Double-Description-Methode dar, die bereits 1953 von Motzkin et al. (siehe dazu [MRTT53]) eingeführt wurde. Etwas besser bekannt ist das Verfahren unter dem Namen „Beneath-Beyond-Algorithmus“, wobei in der Literatur dieser Begriff meist nur für die Problemstellungen (P2) und (P3) – der Bestimmung aller Facetten von  $\text{KH}(0, a_1, \dots, a_m)$  bzw.  $\text{KH}(a_1, \dots, a_m)$  – verwendet wird. Die Double-Description-Methode wurde bereits von Borgwardt in [Bor07] probabilistisch untersucht. Wir wollen daher zunächst eine Einführung in das Verfahren geben und Borgwardts Ergebnisse zitieren. Anschließend werden wir uns in den Abschnitten 5.2 und 5.3 mit einem möglichen Preprocessing zur Reduzierung der Komplexität der Double-Description-Methode beschäftigen. Zuletzt werden in Abschnitt 5.4 einige empirische Untersuchungen vorgenommen.

### 5.1 Einführung in die Double-Description-Methode

Während die bisher analysierten Algorithmen zu den sogenannten sequentiellen Verfahren gehören, ist die Double-Description-Methode bzw. der Beneath-Beyond-Algorithmus ein Vertreter der inkrementellen Verfahren. Zu ersterer Kategorie zählen Algorithmen, die das Polyeder bzw. Polytop „von außen“ betrachten und von vornherein alle Restriktionen bzw. Punkte berücksichtigen. Man bestimmt nacheinander (sequentiell) alle Ecken bzw. Facetten. Bei inkrementellen Verfahren hingegen werden schrittweise weitere Ungleichungen bzw. Punkte in Betracht gezogen. Dabei nutzt man die bereits bekannten Ergebnisse, welche vor der letzten Erweiterung der Restriktions- bzw. Punktmenge erzielt wurden. Dieses Prinzip wiederholt man solange, bis schließlich alle Restriktionen bzw. Punkte beachtet wurden.

Um die Vorgehensweise der Double-Description-Methode detaillierter beschreiben zu können, nehmen wir an, dass bereits sämtliche Ecken des Hilfspolyeders

$$X_\ell := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_\ell^T x \leq 1\} \text{ für } n \leq \ell \leq m$$

berechnet wurden. Auf Grundlage dieser Information versuchen wir nun die Auflistung sämtlicher Ecken von

$$X_{\ell+1} = X_\ell \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{\ell+1}^T x \leq 1\}$$

vorzunehmen. Dazu ist ein Update-Schritt notwendig, der sich in zwei Phasen unterteilen lässt:

1. Zuerst prüft man, welche Ecken von  $X_\ell$  die zusätzliche Ungleichung  $a_{\ell+1}^T x \leq 1$  erfüllen. Dies lässt sich geometrisch so interpretieren, dass für jede Ecke getestet wird, ob sie unterhalb („beneath“) oder oberhalb („beyond“) der Hyperebene  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{\ell+1}^T x = 1\}$  liegt.
2. Anschließend löscht man diejenigen Ecken, die die zusätzliche Ungleichung verletzen und damit oberhalb („beyond“) der Hyperebene  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{\ell+1}^T x = 1\}$  liegen, identifiziert die neuen Ecken auf der Hyperebene und fügt diese der Eckenliste hinzu.

In analoger Weise verfährt der Beneath-Beyond-Algorithmus in unserer dualen Interpretation zur Bestimmung aller Facetten von  $\text{KH}(0, a_1, \dots, a_m)$ . Hier wird in der ersten Phase überprüft, bezüglich welcher Facetten der zusätzliche Punkt  $a_{\ell+1}$  „beneath“ (d.h. auf der Seite mit dem Ursprung) bzw. „beyond“ (d.h. auf der Gegenseite) der entsprechenden Facetenhyperebene liegt. In der anschließenden Phase 2 werden die „beyond“-Facetten gelöscht, die „beneath“-Facetten beibehalten und die neuen Facetten, welche mit Hilfe von  $a_{\ell+1}$  erzeugt werden können, konstruiert.

Wir wollen nun die Double-Description-Methode, angelehnt an die Formulierung von Borgwardt in [Bor07, S. 185+186], wiedergeben. Wie hier zu sehen ist, werden für eine effizientere Durchführung des Informationsupdates nicht nur die Ecken aufgelistet, sondern auch zugehörige Kanten mitberechnet und gespeichert.

**Algorithmus 5.1** (Die Double-Description-Methode).

*Initialisierung:*

1. Initialisiere eine Datei zur Auflistung von Tripeln [Ecke, Kante, Ecke] bzw. bei unbeschränkten Kanten [Ecke, Kante,  $\infty$ ]. Diese dient der Wiedergabe sämtlicher Ecken und Kanten des aktuellen Polyeders.
2. Berechne die einzige Ecke und die  $n$  Kanten (freie Richtungen) von
 
$$X_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_n^T x \leq 1\}.$$
3. Speichere die Ergebnisse aus Schritt 2 der Initialisierung in die Datei zur Auflistung der Ecken und Kanten.
4. Setze eine Hilfsvariable  $\ell = n$ .

*Typischer Schritt:*

1. Überprüfe jede Kante hinsichtlich eines Schnittpunktes mit der Restriktionshyperebene  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{\ell+1}^T x = 1\}$ . Falls solche Punkte existieren, so nennen wir diese in den nun folgenden Schritten für jede Kante jeweils  $x_0$ .
2. Aktualisiere unsere Liste. Führe dazu nachfolgende Schritte aus:
  - a) Behalte alle Kanten bei, die vollständig zum Halbraum  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{\ell+1}^T x \leq 1\}$  gehören.
  - b) Lösche alle Kanten, die komplett im offenen Halbraum  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{\ell+1}^T x > 1\}$  liegen. Reduziere den Grad der inzidenten Ecken jedes mal um eins und lösche die Ecke, sobald ihr Grad auf null gefallen ist.

c) Für Kanten, die die Hyperebene durchqueren, gehe wie folgt vor:

- i. Wenn die Kante zu zwei Ecken  $x_1$  mit  $a_{\ell+1}^T x_1 \leq 1$  und  $x_2$  mit  $a_{\ell+1}^T x_2 > 1$  inzident ist, dann ersetze die Kante  $[x_1, x_2]$  durch  $[x_1, x_0]$ , d.h. entferne das Kantenstück  $(x_0, x_2]$ .
- ii. Wenn die Kante nur zu einer Ecke  $x_2$  (mit  $a_{\ell+1}^T x_2 > 1$ ) inzident ist, dann kürze die Kante (freie Richtung) durch Entfernen des Intervalls  $(x_0, x_2]$ . Reduziere den Grad von  $x_2$  um eins und lösche  $x_2$ , sobald dessen Grad auf null gesunken ist.
- iii. Wenn die Kante nur mit einer Ecke  $x_1$  (mit  $a_{\ell+1}^T x_1 \leq 1$ ) inzidiert, so ersetze die Kante durch  $[x_1, x_0]$  und lösche den Rest der Kante.
- iv. Berechne für die neue Ecke  $x_0$  alle ausgehenden Kanten, welche die Restriktion  $a_{\ell+1}^T x \leq 1$  straff halten. Aufgrund unserer Nichtentartungsbedingung sind  $n-1$  solche Kanten auffindbar. Die Richtungen der  $n$  Kanten sind durch

$$A_{\Delta}^{-1}(-e_i) \quad \text{mit } i = 1, \dots, n$$

gegeben. Bestimme die Ecke am anderen Ende der Kante oder halte die Tatsache fest, dass es sich um eine freie Richtung handelt.

3. Falls  $\ell < m - 1$ , erhöhe  $\ell$  um 1 und gehe zurück zu Schritt 1. Sonst stoppe den Algorithmus.

Auch zur Double-Description-Methode ist im Anhang C.4 ab Seite 258 ein Beispiel mit zehn Restriktionen im dreidimensionalen Raum zu finden, das Schritt für Schritt die Vorgehensweise des Verfahrens graphisch veranschaulicht.

Borgwardt ermittelte bereits den Worst-Case-Aufwand dieser Version der Double-Description-Methode und leitete daraus eine Oberschranke für die erwartete Komplexität ab. Wie in [Bor07, S. 187] nachzulesen ist, beträgt der deterministische Gesamtaufwand maximal

$$\mathcal{O} \left( n^3 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \#V_{\ell} \cdot n^2 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \# \left( V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1}) \right) \cdot (n^3 + n^2(\ell + 1 - n) + n^2 \ln(\ell + 1)) \right). \quad (5.1)$$

Hierbei bezeichnet

- $\#V_{\ell}$  die Anzahl der Ecken des Polyeders  $X_{\ell} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_{\ell}^T x \leq 1\}$  und
- $\#(V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1}))$  die Anzahl der Ecken von  $X_{\ell+1}$ , bei denen die Restriktion  $a_{\ell+1}^T x \leq 1$  straff ist.

Die erste Größe haben wir bereits in Abschnitt 1.8 untersucht. Hier ist lediglich der Parameter für die Restriktionszahl zu ersetzen. Aus der erwarteten Eckenzahl kann man aber auch leicht  $\mathbb{E}(\#(V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1})))$  erhalten, wie wir gleich sehen werden. Die Average-Case-Ergebnisse bezüglich der beiden Zufallgrößen lauten (siehe [Bor07, S. 191–193, 197]):

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_\ell) \leq \frac{1}{n} \left( \frac{\ell + \frac{2+2k}{n+1+2k}}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot (n+1+2k)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left( \frac{\Gamma\left(k+1+\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(k+1+\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \quad (5.2)$$

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1}))) = \frac{n}{\ell+1} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_{\ell+1}) \quad (5.3)$$

Für Letzteres nutze man aus, dass in unserem stochastischen Modell an jeder Ecke (fast sicher) genau  $n$  Restriktionen straff sind, also pro Ecke  $n$  Aktivitätsereignisse ( $A.E.$ ) eintreten und somit in der Iteration mit  $\ell+1$  berücksichtigten Restriktionen

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#(A.E.)) = n \mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1}))$$

gilt. Zusammen mit der Tatsache, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_1))) &= \mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_2))) = \dots = \mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1}))) = \\ &= \frac{1}{\ell+1} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#(A.E.)) \end{aligned}$$

ist, folgt somit die Gleichung (5.3). Eine genauere Ausführung des Beweises findet sich in [Bor07, S. 197].

Mit den Ergebnissen (5.2) und (5.3) lässt sich nachfolgende Oberschranke für die erwartete Gesamtkomplexität herleiten (siehe [Bor07, S. 198+199]):

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \left( n^3 + 2\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{(n!)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot (n+1+2k)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left( \frac{\Gamma\left(k+1+\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(k+1+\frac{n-1}{2}\right)} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \right. \\ \left. \left\{ n^{\frac{2+2k}{n+1+2k}} \left( m + \frac{2+2k}{n+1+2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}+1} \cdot \frac{n+1+2k}{2n+2k} + \right. \right. \\ \left. + n^{2+\frac{2+2k}{n+1+2k}} \left( m + \frac{2+2k}{n+1+2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot \frac{n+1+2k}{n-1} + \right. \\ \left. + n^{1+\frac{2+2k}{n+1+2k}} \left( m + \frac{2+2k}{n+1+2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}+1} \cdot \frac{n+1+2k}{2n+2k} + \right. \\ \left. + n^{1+\frac{2+2k}{n+1+2k}} \left( m + \frac{2+2k}{n+1+2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot \frac{n+1+2k}{n-1} (\ln(m) - 1) \right\} \quad (5.4) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirling-Formel können obige Ergebnisse zu etwas einfacheren Termen approximiert werden (vgl. dazu [Bor07, S. 193]). Wie wir bereits in Abschnitt 1.8 in den Formeln (1.32) und (1.33) festgehalten haben, gelang es Borgwardt zudem für die Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche ( $k \rightarrow -1$ ) und für die Gleichverteilung in der Kugel ( $k = 0$ ) schärfere Abschätzungen für die erwartete Eckenzahl zu berechnen. Damit lässt sich auch die Abschätzung für die erwartete Gesamtkomplexität für diese beiden Fälle verbessern. Die entsprechenden Oberschranken lauten wie folgt (siehe [Bor07, S. 199+200]):

$$\mathcal{O}\left(n^3 + \frac{2}{n}(n-1)^{n-3} \left(\frac{2\pi}{n-2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{n^2-2n+1}{2\pi}} \left(n^2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} + mn^4 + n^3 \cdot \frac{m(m-1)}{2} + n^3 m \cdot (\ln(m) - 1)\right)\right) \text{ für } k \rightarrow -1$$

und

$$\mathcal{O}\left(n^3 + \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n^2+1}{2}} (n+1)^{n-2+\frac{2}{n+1}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}} (n-1)^{-\frac{n-1}{n+1}} \left(n^2 \left(m + \frac{2}{n+1}\right)^{1+\frac{n-1}{n+1}} \frac{2n}{n+1} + n^4 \left(m + \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \frac{n+1}{n-1} + n^3 \left(m + \frac{2}{n+1}\right)^{1+\frac{n-1}{n+1}} \frac{2n}{n+1} + n^3 \left(m + \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \frac{n+1}{n-1} \cdot \left(\ln(m) - \frac{n+1}{n-1}\right)\right)\right) \text{ für } k = 0$$

Ganz besonders bei der hier vorgestellten Double-Description-Methode drängt sich die Frage auf, ob nicht vor der Ausführung des Verfahrens ein Aussortieren redundanter Restriktionen durch ein Preprocessing lohnenswert wäre. Mit dieser Problematik beschäftigen sich nachfolgende Abschnitte: Zuerst wird in Abschnitt 5.2 nach einem System zum Auffinden redundanter Restriktionen gesucht und anschließend werden in Abschnitt 5.3 einige Abschätzungen zur erwarteten Anzahl der verbleibenden (nichtredundanten) Restriktionen durchgeführt.

## 5.2 System zum Auffinden redundanter Restriktionen

Bevor wir mit einer Average-Case-Analyse zum Aufwand für das Aussortieren redundanter Restriktionen starten können, müssen wir uns überlegen, wie das Preprocessing überhaupt auszuführen ist. Nachfolgender Satz liefert uns eine effiziente Möglichkeit, die Redundanz bzw. Nichtredundanz einzelner Restriktionen nachzuweisen:

**Satz 5.2.** *Seien  $a_1, \dots, a_m$  stochastisch unabhängig, identisch und rotationssymmetrisch verteilt (vgl. unsere Modellfestlegung aus Abschnitt 1.6, Seite 27), so gilt nachfolgende Äquivalenz:*

*Eine Restriktion  $a_i^T x \leq 1$  ist im Ungleichungssystem  $a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1$  nicht redundant*

*fast sicher*  
 $\iff$

*Es gibt einen Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , der das folgende System erfüllt:*

$$\begin{aligned} a_j^T x &\leq 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, m \text{ und } j \neq i \\ a_i^T x &= 1 \end{aligned} \tag{5.5}$$

*Letzteres bedeutet, dass sich ein zulässiger Punkt finden lässt, der die betrachtete Restriktion straff setzt.*

*Beweis.* Eine äquivalente Umformung obiger Aussage lautet folgendermaßen:

$$a_i^T x \leq 1 \text{ ist redundant in } X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1\}$$

$$\stackrel{\text{fast sicher}}{\iff}$$

$$\nexists \bar{x} \in X \text{ mit } a_i^T \bar{x} = 1$$

Mit anderen Worten, die Redundanz der Restriktion  $a_i^T x \leq 1$  steht mit Wahrscheinlichkeit eins genau dann fest, wenn  $a_i^T \bar{x} < 1$  für jeden zulässigen Punkt  $\bar{x}$  gilt. Dies entspricht exakt der Definition von strikter Redundanz. D.h. wir haben nachzuweisen, dass in unserem Modell fast sicher (gewöhnliche) Redundanz mit strikter Redundanz übereinstimmt. Damit ist die Aussage des Satzes äquivalent mit der Behauptung:

$$\text{„Redundanz“} \stackrel{\text{fast sicher}}{\iff} \text{ strikte Redundanz“}$$

„ $\Leftarrow$ “ Trivial, da strikte Redundanz eine stärkere Form der Redundanz darstellt.

„ $\Rightarrow$ “ Aufgrund der fast sicheren linearen Unabhängigkeit der Restriktionsvektoren (vgl. dazu die Nichtentartungsbedingung, siehe Definition 1.6 auf Seite 28) sind an jeder  $\ell$ -dimensionalen Seitenfläche ( $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$ ) mit Wahrscheinlichkeit eins genau  $n-\ell$  Restriktionen straff. D.h. jede nichttriviale Seitenfläche wird von genau so vielen straffen Restriktionen erzeugt, wie mindestens dazu nötig sind. Sei nun  $a_i^T x \leq 1$  eine redundante Restriktion. Da sich aufgrund der Redundanz das Polyeder beim Entfernen der Restriktion  $a_i^T x \leq 1$  allerdings nicht ändern kann, muss die Restriktion strikt redundant gewesen sein.  $\square$

Der erwartete Aufwand zum Lösen des Systems (5.5) ist schwer bestimmbar. Um das Problem in eine für den restriktionsorientierten Simplexalgorithmus zugeschnittene Form zu bringen, formen wir die Gleichung in zwei Ungleichungen um:

$$\begin{array}{l} a_j^T x \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, m \text{ und } j \neq i \\ a_i^T x \leq 1 \\ -a_i^T x \leq -1 \end{array} \quad \iff \quad \begin{array}{l} a_j^T x \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, m \\ -a_i^T x \leq -1 \end{array} \quad (5.6)$$

Problematisch ist die jeweils zuletzt genannte Restriktion. Durch diese fällt es schwer, die Anzahl an Pivotschritten in der Phase I(a) des restriktionsorientierten Simplexalgorithmus zu ermitteln, bis man auf eine zulässige Ecke stößt. Allerdings ist das Auffinden einer Lösung vom System (5.6) äquivalent zum Lösen von

$$\begin{array}{l} \max a_i^T x \\ \text{unter } a_j^T x \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, m. \end{array} \quad (5.7)$$

Wenn der Optimalpunkt  $x_{\text{opt}}$  die  $a_i$ -Restriktion straff erfüllt (d.h.  $a_i^T x_{\text{opt}} = 1$ ), so ist diese nicht redundant. Falls  $a_i^T x_{\text{opt}} < 1$  gilt, so steht die Redundanz der Restriktion fest. Der Fall  $a_i^T x_{\text{opt}} > 1$  ist wegen der Bedingung  $a_i^T x \leq 1$  ohnehin ausgeschlossen.

Allerdings haben wir nun durch den Zielfunktionsvektor  $c = a_i$  und dem Restriktionsvektor  $a_i$  stochastische Abhängigkeit im Modell erzeugt, da die Vektoren übereinstimmen. Aber auch das lässt sich vermeiden mittels Übergang zum Problem

$$\begin{aligned} & \max a_i^T x \\ & \text{unter } a_j^T x \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, m \text{ und } j \neq i. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Um zu klären, dass diese Problemstellung noch unsere Zwecke erfüllt, beachte man nachfolgende Fallunterscheidung:

1. Falls  $a_i^T x_{\text{opt}} < 1$  ist, so ist  $x_{\text{opt}}$  auch im System (5.7) optimal und damit die  $a_i$ -Restriktion redundant.
2. Falls  $a_i^T x_{\text{opt}} = 1$ , so überträgt sich die Optimalität wiederum auf (5.7) und daher wissen wir, dass auf die Bedingung  $a_i^T x \leq 1$  in  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1\}$  nicht verzichtet werden darf.
3. Falls  $a_i^T x_{\text{opt}} = K > 1$ . So können wir durch Wahl von  $\bar{x} = \frac{1}{K}x_{\text{opt}}$  erneut eine Optimallösung für das System (5.7) ausfindig machen, denn dann gilt:

$$\begin{aligned} a_i^T \bar{x} &= \frac{1}{K} a_i^T x_{\text{opt}} = \frac{1}{K} \cdot K = 1 \\ a_j^T \bar{x} &= \underbrace{\frac{1}{K}}_{<1} \underbrace{a_j^T x_{\text{opt}}}_{\leq 1} < 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Somit löst  $\bar{x}$  das System (5.7) und wir stellen wie in Fall 2 die Nichtredundanz der betrachteten Restriktion fest. Dieser Fall wird in Abbildung 5.1 dargestellt.

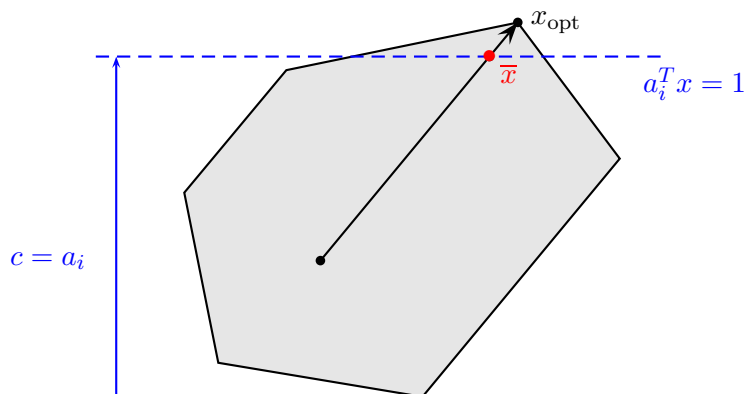


Abbildung 5.1: Veranschaulichung von Fall 3

4. Falls  $a_i^T x$  unbeschränkt wird, wähle einen Punkt  $x'$  mit  $a_i^T x' > 1$  und gehe damit wie in Fall 3 vor. Hier ergibt sich also erneut die Nichtredundanz der  $a_i$ -Restriktion. Dies wird in Abbildung 5.2 veranschaulicht.

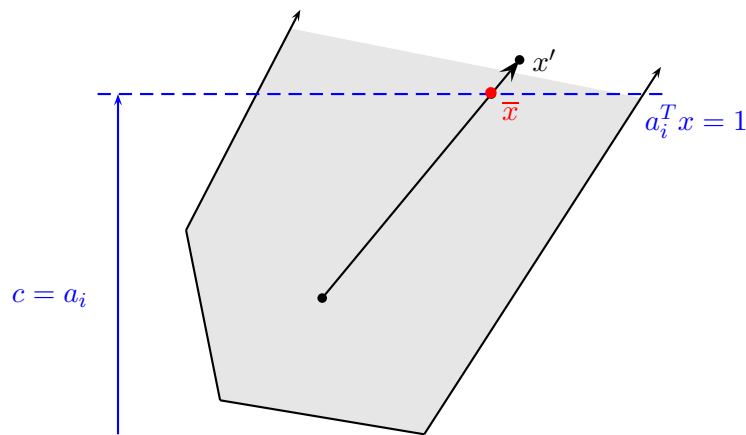


Abbildung 5.2: Veranschaulichung von Fall 4

Somit handelt sich bei der Problemstellung (5.8) um ein kanonisches Optimierungsproblem mit  $m - 1$  Restriktionen und  $n$  Variablen, das gemäß unserem stochastischen Modell erzeugt wird. Borgwardt konnte nachweisen, dass dieses im Erwartungswert mit maximal

$$(m - 1)^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^3 \cdot Const.$$

Pivotschritten lösbar ist (siehe [Bor99, Theorem 2]).

Das Preprocessing kann also in der Weise durchgeführt werden, dass für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  das Optimierungsproblem (5.8) gelöst wird. Gemäß oben angegebener Fallunterscheidung ist so die Redundanz jeder einzelnen Restriktion feststellbar. Insgesamt ergibt sich also als Obergrenze für die erwartete Komplexität zur Durchführung des Preprocessings:

$$\mathcal{O} \left( m \cdot \left( (m - 1)^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^3 \right) \cdot mn \right) = \mathcal{O} \left( m^{2+\frac{1}{n-1}} \cdot n^4 \right).$$

Nachfolgende Tabelle gibt den Ursprung der einzelnen Aufwandsterme wieder:

TERM	HERKUNFT
$m$	Anzahl der zu lösenden Probleme
$(m - 1)^{\frac{1}{n-1}} \cdot n^3$	Obergrenze für die durchschnittliche Anzahl an Pivotschritten
$mn$	Aufwand eines Pivotschrittes

Tabelle 5.1: Übersicht zur Komplexität des Preprocessings

### 5.3 Die erwartete Anzahl an nichtredundanten Restriktionen

Im vorherigen Abschnitt haben wir uns mit der algorithmischen Umsetzung des Auffindens redundanter Restriktionen im Ungleichungssystem

$$a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1$$

beschäftigt und mit Hilfe von Borgwardts Ergebnis eine Obergrenze für die erwartete Komplexität zur Durchführung des Preprocessings angegeben. Das angestrebte Ziel ist nun über



eine probabilistische Analyse zu klären, welche Einsparung an Rechenaufwand in der eigentlichen Double-Description-Methode daraus gewonnen werden kann. Dazu werden wir versuchen mehr über die erwartete Anzahl redundanter bzw. nichtredundanter Restriktionen zu erfahren. Weil sich eine Erwartungswertuntersuchung meist in der dualen Sichtweise vereinfacht, stellen wir zunächst im nachfolgenden Satz einige Äquivalenzen klar:

**Satz 5.3.** *Für stochastisch unabhängige, identisch und rotationssymmetrisch verteilte Punkte  $a_1, \dots, a_m$  gilt:*

$$a_m^T x \leq 1 \text{ ist redundant im Ungleichungssystem } a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1.$$

$$\iff$$

$$a_m \text{ ist redundant in } Y := \text{KH}(0, a_1, \dots, a_m), \text{ d.h. } \text{KH}(0, a_1, \dots, a_{m-1}) = \text{KH}(0, a_1, \dots, a_m).$$

$$\stackrel{\text{fast sicher}}{\iff}$$

*Es gibt genau eine Facette  $\text{KH}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$  von  $Y := \text{KH}(0, a_1, \dots, a_m)$  mit  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m-1\}$ , so dass  $a_m \in \text{KH}(0, a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$  gilt.*

*Beweis.* Die erste Äquivalenz ergibt sich direkt aus der bekannten 1-zu-1-Korrespondenz zwischen  $\ell$ -dimensionalen Seitenflächen in  $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1\}$  und  $(n - \ell)$ -dimensionalen Seitenflächen in  $Y$  (vgl. Abschnitt 1.4 und [Bor87, S. 69+70]).

Zum Beweis der zweiten Äquivalenz sei  $F$  die Menge der Facetten von  $Y$ . Da es sich bei  $Y$  um ein Polytop handelt, ist klar, dass

$$\bigcup_{f \in F} \text{KH}(f \cup \{0\}) = Y$$

ergibt. Allerdings ist für  $f_1, f_2 \in F, f_1 \neq f_2$  nicht sicher

$$\text{KH}(f_1 \cup \{0\}) \cap \text{KH}(f_2 \cup \{0\}) = \{0\}$$

erfüllt, da eventuell  $f_1 \cap f_2 \neq \emptyset$  ist. Aufgrund der Facetteneigenschaft von  $f_1$  und  $f_2$  ist aber garantiert, dass

$$\dim(\text{KH}(f_1 \cup \{0\}) \cap \text{KH}(f_2 \cup \{0\})) \leq n - 1$$

ist. D.h. das Mengensystem

$$\{\text{KH}(f \cup \{0\}) \mid f \text{ eine Facette von } Y\}$$

bildet eine „Quasi-Partition“ von  $Y$ , für die

$$\bigcup_{f \in F} (\text{KH}(f \cup \{0\})) = Y \text{ und } \dim(\text{KH}(f_1 \cup \{0\}) \cap \text{KH}(f_2 \cup \{0\})) \leq n - 1$$

gilt. Somit lässt sich für jeden redundanten Punkt  $a_j$  mindestens eine Facette

$$f = \text{KH}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \text{ mit } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$$

finden, so dass

$$a_j \in \text{KH}(f \cup \{0\})$$

ist, und in unserem stochastischen Modell sogar mit Wahrscheinlichkeit eins genau ein solches  $f$ , da hier die unterdimensionalen Schnitte nur eine stochastische Nullmenge bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes bilden.

Wurde umgekehrt ein

$$f = \text{KH}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \text{ mit } i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$$

gefunden, so dass der zu untersuchende Punkt  $a_j$  in  $\text{KH}(0, a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$  liegt, so ergibt sich die Verzichtbarkeit von  $a_j$  unmittelbar aus der Konvexität.

Setzen wir speziell  $j = m$ , so ergibt sich insgesamt die Aussage des Satzes 5.3.  $\square$

*Bemerkung 5.4.* Man beachte, dass für die Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  auf der Kugeloberfläche (also  $k \rightarrow -1$ ) fast sicher keine Redundanz festzustellen ist. In diesem Fall ist keine Einsparmöglichkeit vorhanden und das Suchen nach redundanten Punkten bzw. Restriktionen nutzlos.

Sei  $\bar{m}$  die Zufallsgröße, die die Anzahl nichtredundanter Restriktionen in unserem Polyeder wiedergibt. Wir wollen nun versuchen Ergebnisse zum Erwartungswert von  $\bar{m}$  zu erhalten. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{m}) &= m \cdot \mathbb{P}(\text{Die Restriktion } a_m^T x \leq 1 \text{ ist nicht redundant}) = \\ &= m \cdot (1 - \mathbb{P}(\text{Die Restriktion } a_m^T x \leq 1 \text{ ist redundant})) \end{aligned}$$

Um den gesuchten Erwartungswert zu bestimmen, reicht es also sich mit der Redundanzwahrscheinlichkeit einer Restriktion zu beschäftigen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Die Restriktion } a_m^T x \leq 1 \text{ ist redundant}) &= \mathbb{P}(\exists i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m-1\} \mid \\ &\quad \text{KH}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \text{ bildet eine Facette von } Y \text{ und } a_m \in \text{KH}(0, a_{i_1}, \dots, a_{i_n})) \\ &\stackrel{\text{identische, unabhängige}}{\underset{\text{Verteilung}}{=}} \binom{m-1}{n} \mathbb{P}(a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n) \wedge \text{KH}(a_1, \dots, a_n) \text{ ist eine Facette}) \end{aligned}$$

Seien  $a_1, \dots, a_n$  fest (der Nullpunkt ist ohnehin fest), so wird klar, dass die erste Bedingung nur von  $a_m$  abhängt und die zweite von  $a_{n+1}, \dots, a_m$ . Somit besteht stochastische Abhängigkeit beider Ereignisse im Zufallsvektor  $a_m$ .

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n) \wedge \text{KH}(a_1, \dots, a_n) \text{ ist eine Facette}) = \\ &= \mathbb{P}(a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)) \cdot \mathbb{P}(\text{KH}(a_1, \dots, a_n) \text{ ist eine Facette} \mid a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)) \end{aligned}$$

Aufgrund der Bedingung  $a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)$  ist klar, dass  $a_m$  unterhalb der Hyperebene durch die festen Punkte  $a_1, \dots, a_n$  liegen muss. Daher gilt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\text{KH}(a_1, \dots, a_n) \text{ ist eine Facette} \mid a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)) = \\ &= \mathbb{P}(a_{n+1}, \dots, a_{m-1} \text{ liegen unterhalb der Hyperebene durch } a_1, \dots, a_n) = \\ &= G_k(h(a_1, \dots, a_n))^{m-n-1} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Betrachten wir zunächst nur die Gleichverteilung der Punkte  $a_1, \dots, a_m$  in der Einheitskugel ( $k = 0$ ), so lässt sich der erste Wahrscheinlichkeitsausdruck direkt aus dem Verhältnis des Volumens von  $\text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)$  und der Einheitskugel bestimmen, also gilt:

$$\mathbb{P}(a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)) \stackrel{k=0}{=} \frac{\lambda_n(\text{KH}(0, a_1, \dots, a_n))}{\lambda_n(\Omega_n)} =: S(a_1, \dots, a_n)$$

Da für einen Parameter  $k > 0$  kleinere Radii wahrscheinlicher werden und analog ein Parameter  $k < 0$  für tendenziell größere Radii sorgt, folgt für feste Punkte  $a_1, \dots, a_n$ :

$$\mathbb{P}(a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)) \begin{cases} \geq S(a_1, \dots, a_n) & \text{für } k > 0 \\ = S(a_1, \dots, a_n) & \text{für } k = 0 \\ \leq S(a_1, \dots, a_n) & \text{für } k \in (-1, 0) \end{cases} \quad (5.10)$$

Aus den Formeln (1.6) (siehe Seite 28) und (A.8) (siehe Seite 179) ergibt sich:

$$S(a_1, \dots, a_n) = \frac{\lambda_n(\text{KH}(0, a_1, \dots, a_n))}{\lambda_n(\Omega_n)} = \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \right|}_{=\lambda_n(\text{KH}(0, a_1, \dots, a_n))} \cdot \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}}_{=\lambda_n(\Omega_n)^{-1}} \quad (5.11)$$

Wir versuchen nun Abschätzungen für  $\mathbb{E}(\overline{m})$  vorzunehmen. Mit (5.10) können wir für  $k \geq 0$  eine Obergrenze berechnen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m,n}^k(\overline{m}) &= m - m \cdot \binom{m-1}{n} \mathbb{P}(a_m \in \text{KH}(0, a_1, \dots, a_n) \wedge \text{KH}(a_1, \dots, a_n) \text{ ist eine Facette}) \\ &\stackrel{k \geq 0}{\leq} m - m \cdot \binom{m-1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} G_k(h(a_1, \dots, a_n))^{m-n-1} \cdot S(a_1, \dots, a_n) \\ &\quad \hat{f}(a_1) \dots \hat{f}(a_n) da_1 \dots da_n \\ &\stackrel{(5.11)}{=} m - m \cdot \binom{m-1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} G_k(h(a_1, \dots, a_n))^{m-n-1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \right| \cdot \\ &\quad \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \hat{f}(a_1) \dots \hat{f}(a_n) da_1 \dots da_n \end{aligned}$$

Wir führen nun eine Koordinatentransformation (vgl. [Bor87, S. 134–137]) durch. Sei dazu

$$B := \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_n^1 & \dots & b_n^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie}$$

$$b_i := \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^{n-1} \\ h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{b}_i := \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Dann folgt:

$$\mathbb{E}_{m,n}^{k \geq 0}(\overline{m}) \leq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h \cdot G_k(h)^{m-n-1} (\det B)^2 \hat{f}(b_1) \dots \hat{f}(b_n) d\bar{b}_1 \dots d\bar{b}_n dh$$

Da

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \lambda_{n-1}(\omega_n) \stackrel{(1.5)}{=} \frac{1}{n!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{n! \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!},$$

$$\Lambda_{1,k}(h) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\det B)^2 \hat{f}(b_1) \dots \hat{f}(b_n) d\bar{b}_1 \dots d\bar{b}_n = n! \cdot g_{2,k}(h)^{n-1} \cdot g_{0,k}(h) \quad (\text{siehe (1.22) auf Seite 34})$$

und

$$g_{2,k}(h) := \frac{\Gamma\left(k+1+\frac{n}{2}\right)}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(k+1+\frac{n+1}{2}\right)} \cdot (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \quad (\text{siehe (1.21) auf Seite 33})$$

gelten, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m,n}^{k \geq 0}(\overline{m}) &\leq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h \cdot G_k(h)^{m-n-1} (\det B)^2 \hat{f}(b_1) \dots \hat{f}(b_n) d\bar{b}_1 \dots d\bar{b}_n dh = \\ &\stackrel{(1.22)}{=} m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 h \cdot G_k(h)^{m-n-1} \cdot n! \cdot g_{2,k}(h)^{n-1} \cdot g_{0,k}(h) dh = \\ &\stackrel{(1.21)}{=} m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \cdot \left( \frac{\Gamma\left(k+1+\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(k+1+\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{n-1} \int_0^1 h \cdot G_k(h)^{m-n-1} g_{0,k}(h) \cdot \left( (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \right)^{n-1} dh \end{aligned}$$

Um  $\mathbb{E}_{m,n}^{k \geq 0}(\overline{m})$  weiter nach oben abzuschätzen, verwenden wir nachfolgende Ungleichung, welche allerdings nur für  $\frac{n-1}{2} + k \geq 0$ , also für  $n \geq 1 - 2k$ , korrekt ist. Da  $n \in \mathbb{N}$  gilt und wir den Fall  $k \geq 0$  betrachten, ist dies aber immer erfüllt.

$$\begin{aligned} \int_h^1 (1-\zeta^2)^{\frac{n-1}{2}+k} d\zeta &\leq \int_h^1 (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}+k} d\zeta = (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}+k} \int_h^1 1 d\zeta = \\ &= (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}+k} \cdot (1-h) \leq (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}+k} \cdot (1-h^2) = (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \\ &\quad \text{für } h \in [0, 1] \text{ und } n \geq 1 - 2k \quad (5.12) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 1 - G_k(h) &= \int_h^1 g_{0,k}(\zeta) d\zeta \stackrel{(1.19)}{=} \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})} \int_h^1 (1-\zeta^2)^{\frac{n-1}{2}+k} d\zeta \stackrel{(5.12)}{\leq} \\
 &\leq \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})} \cdot (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k}
 \end{aligned}$$

Also ist:

$$\left( (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \right)^{n-1} \geq \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})} \right)^{n-1} \cdot (1-G_k(h))^{n-1}$$

Mit dieser Ungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{m,n}^{k \geq 0}(\overline{m}) &\leq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \cdot \left( \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+1+\frac{n+1}{2})} \right)^{n-1} \\
 &\quad \int_0^1 h \cdot G_k(h)^{m-n-1} g_{0,k}(h) \cdot \left( (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \right)^{n-1} dh \leq \\
 &\leq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \cdot \left( \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+1+\frac{n+1}{2})} \right)^{n-1} \cdot \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})} \right)^{n-1} \\
 &\quad \cdot \int_0^1 h \cdot G_k(h)^{m-n-1} g_{0,k}(h) \cdot (1-G_k(h))^{n-1} dh
 \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(k+1+\frac{n+1}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})} &= \frac{\Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})}{2 \cdot (k+1+\frac{n-1}{2}) \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})} = \\
 &= \frac{1}{2k+n+1}
 \end{aligned}$$

gilt, folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{m,n}^{k \geq 0}(\overline{m}) &\leq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{(2k+n+1)^{n-1}} \\
 &\quad \int_0^1 h \cdot G_k(h)^{m-n-1} g_{0,k}(h) \cdot (1-G_k(h))^{n-1} dh
 \end{aligned}$$

Eine exakte Auswertung dieses Ausdruckes oder eine Abschätzung, die zu keinem trivialen Ergebnis führt, erweist sich an dieser Stelle leider als äußerst schwierig und konnte noch nicht erfolgreich durchgeführt werden.

Wir bestimmen nun eine Unterschranke von  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\overline{m})$  für  $k \in (-1, 0]$ . In Analogie zur obigen Rechnung ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{m,n}^k(\overline{m}) &\stackrel{k \in (-1,0]}{\geq} m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \int_0^1 h \cdot G_k(h)^{m-n-1} g_{2,k}(h)^{n-1} g_{0,k}(h) dh \\
 &\stackrel{h \leq 1}{\geq} m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \int_0^1 G_k(h)^{m-n-1} g_{2,k}(h)^{n-1} g_{0,k}(h) dh \\
 &= m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \cdot \left( \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n+1}{2})} \right)^{n-1} \\
 &\quad \cdot \int_0^1 G_k(h)^{m-n-1} g_{0,k}(h) \left( (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \right)^{n-1} dh
 \end{aligned}$$

Nachfolgendes Ergebnis ermöglicht uns eine Substitution:

$$\begin{aligned}
 1 - G_k(h) &= \int_h^1 g_{0,k}(\zeta) d\zeta \stackrel{(1.19)}{=} \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2})} \int_h^1 (1-\zeta^2)^{\frac{n-1}{2}+k} d\zeta \geq \\
 &\geq \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2})} \int_h^1 (1-\zeta^2)^{\frac{n-1}{2}+k} \zeta d\zeta \stackrel{u:=\zeta^2}{=} \\
 &= \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2})} \cdot \frac{1}{2} \int_{h^2}^1 (1-u)^{\frac{n-1}{2}+k} du = \\
 &= \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2})} \left[ -\frac{1}{\frac{n+1}{2}+k} (1-u)^{\frac{n+1}{2}+k} \right]_{h^2}^1 \\
 &= \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2}) \cdot (n+1+2k)} \cdot (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k}
 \end{aligned}$$

Und daher gilt:

$$\begin{aligned}
 (1 - G_k(h))^{n-1} &\geq \left( \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2}) \cdot (n+1+2k)} \right)^{n-1} \cdot \left( (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \right)^{n-1} \\
 \text{bzw. } \left( (1-h^2)^{\frac{n+1}{2}+k} \right)^{n-1} &\leq \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2}) \cdot (n+1+2k)}{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})} \right)^{n-1} \cdot (1 - G_k(h))^{n-1}
 \end{aligned}$$

Damit können wir unser Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{m,n}^{k \in (-1,0]}(\overline{m}) &\geq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \cdot \left( \frac{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n+1}{2})} \right)^{n-1} \\
 &\quad \cdot \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1 + \frac{n-1}{2}) \cdot (n+1+2k)}{\Gamma(k+1 + \frac{n}{2})} \right)^{n-1} \int_0^1 G_k(h)^{m-n-1} \cdot g_{0,k}(h) \cdot (1 - G_k(h))^{n-1} dh
 \end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n+1}{2})} \right)^{n-1} \cdot \left( \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2}) \cdot (n+1+2k)}{\Gamma(k+1+\frac{n}{2})} \right)^{n-1} = \\ & = \left( \frac{\Gamma(k+1+\frac{n-1}{2}) \cdot (n+1+2k)}{2 \cdot (k+1+\frac{n-1}{2}) \cdot \Gamma(k+1+\frac{n-1}{2})} \right)^{n-1} = \left( \frac{n+1+2k}{n+1+2k} \right)^{n-1} = 1 \end{aligned}$$

ist, folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m,n}^{k \in (-1,0]}(\overline{m}) & \geq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \int_0^1 G_k(h)^{m-n-1} g_{0,k}(h) (1-G_k(h))^{n-1} dh = \\ & \stackrel{G:=G_k(h)}{=} m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \int_{\frac{1}{2}}^1 G^{m-n-1} (1-G)^{n-1} dG \end{aligned}$$

Aus unserer Formel (1.26) (siehe Seite 35) mit

$$L = m - n - 1 \ (\in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad M = n - 1 \ (\geq 0)$$

ergibt sich somit:

$$\mathbb{E}_{m,n}^{k \in (-1,0]}(\overline{m}) \geq m - m \cdot \binom{m-1}{n} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \sum_{i=1}^{m-n} \frac{1}{\prod_{j=1}^i (n-1+j)} \cdot \frac{(m-n-1)!}{(m-n-i)!} \quad (5.13)$$

Damit haben wir für den Fall  $k \in (-1, 0]$  eine Unterschranke erhalten, welche durch unsere Abschätzung sogar unabhängig vom Verteilungsparameter  $k$  wurde.

Weitere Ergebnisse erweisen sich als äußerst schwierig und bleiben als Aufgabe für zukünftige Forschungen erhalten. Eine Entscheidung über den Einsatz des Preprocessing können wir daher mangels Ergebnisse nicht treffen.

## 5.4 Empirische Untersuchung der Anzahl an redundanten Restriktionen

In diesem Abschnitt wollen wir empirisch überprüfen, wie hoch die Zahl an redundanten Restriktionen bei rotationssymmetrischer Erzeugung der Problembeispiele im Durchschnitt tatsächlich wird. In den nachfolgenden Graphiken ist für Vergleichszwecke jeweils in schwarzer Farbe die Oberschranke eingezeichnet, welche sich direkt aus unserer in Abschnitt 5.3 gewonnenen Unterschranke für die erwartete Anzahl an nichtredundanten Restriktionen ergibt. Man beachte aber, dass diese in Wahrheit nur für einen Verteilungsparameter  $k \in (-1, 0]$  hergeleitet wurde.

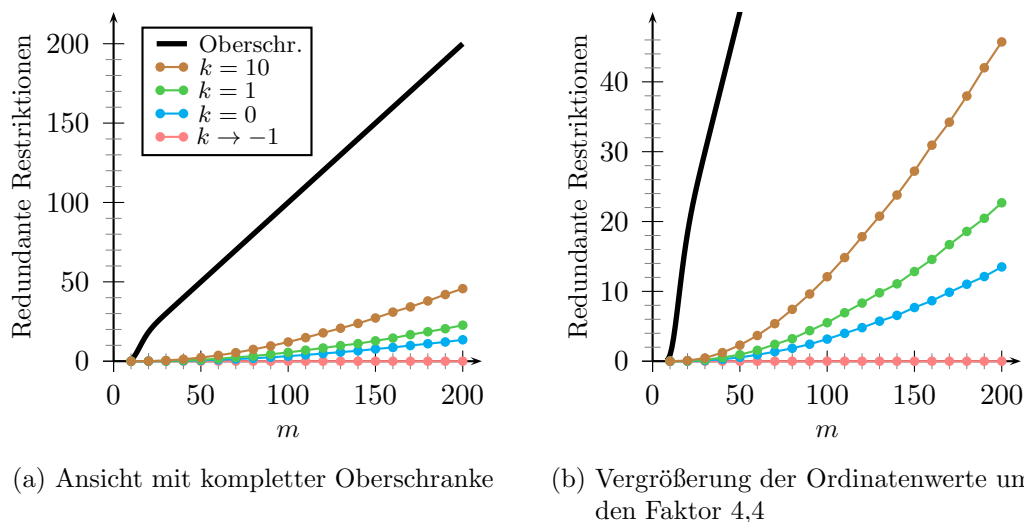


Abbildung 5.3: Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei  $n = 7$

Auf eine Untersuchung bei Gleichverteilung der Restriktionsvektoren auf der Kugeloberfläche hätte hier verzichtet werden können, da in diesem Fall offensichtlich keine Restriktionen redundant sein können. Unsere Oberschranke überschreitet deutlich die empirischen Resultate. Allerdings lässt vor allem der Kurvenverlauf für den Verteilungsparameter  $k = 10$  etwas Zweifel aufkommen, ob diese Oberschranke auch für beliebig positive  $k$  und höheres  $m$  Bestand haben kann.

Die empirischen Ergebnisse führen zu monoton steigenden Kurven. Dabei scheint es sich für kleine  $m$  eher um ein superlineares Wachstum zu handeln. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass zunächst bei geringer Restriktionszahl kaum Redundanz bei Erhöhung von  $m$  festzustellen ist. Jedoch wächst mit größerem  $m$  auch die Wahrscheinlichkeit der Redundanz einer Restriktion. Betrachten wir in Abbildung 5.4 unsere Alternativfestlegung der Parameter, so stellen wir fest, dass bei hohem  $m$  die empirischen Kurven insgesamt eher einen linearen Verlauf annehmen. Langfristig gesehen, wird eine Erhöhung von  $m$  mit fast konstanter Wahrscheinlichkeit zu weiterer Redundanz führen.

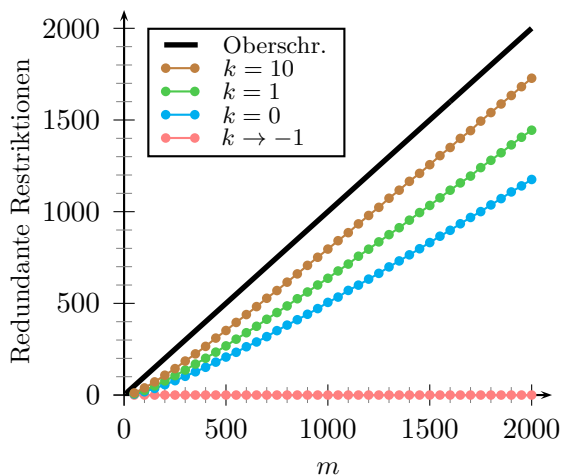


Abbildung 5.4: Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei  $n = 5$



Es folgt nun eine Abbildung zur Untersuchung der Variation des Parameters  $n$ :

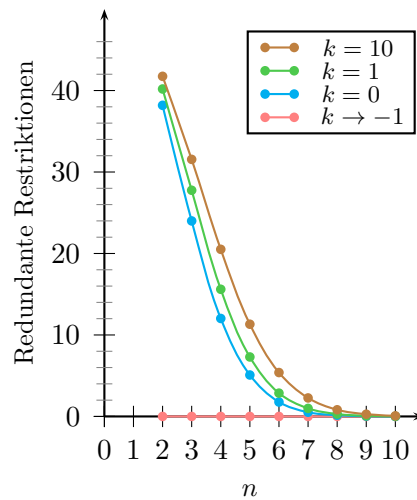


Abbildung 5.5: Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei  $m = 50$

Die empirischen Kurven nähern sich sehr schnell mit Erhöhung der Dimension dem Wert null an. Je größer  $n$  wird umso mehr sinkt die Redundanzwahrscheinlichkeit einer Restriktion bei festem  $m$ .

Die (fehlende) Obergrenze in obiger Graphik bewegt sich sehr nahe bei  $m = 50$  und wurde daher weggelassen. Mehr Aussagekraft bekommt die Obergrenze erst für eine deutlich höhere Dimension, wie in Abbildung 5.6 zu sehen ist. In diesem Bereich bewegen sich die empirischen Resultate allerdings schon sehr nahe an der Nullgrenze.

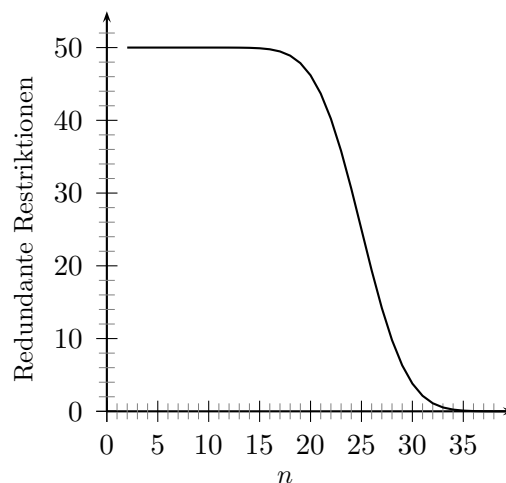


Abbildung 5.6: Die Obergrenze für die erwartete Anzahl an redundanten Restriktionen für  $m = 50$  unter Variation der Dimension  $n$

Hier wird klar, dass die von uns gefundene Schranke vor allem für sehr moderate  $m$  im Verhältnis zur Dimension  $n$  aussagekräftig wird.

Die Kurven für unsere Alternativfestlegung der Parameter bei Variation der Dimension wurden in den Anhang B.5 ab Seite 212 ausgelagert. Hier bestätigen sich lediglich die eben festgestellten Eindrücke.

# Kapitel 6

## Fazit und Ausblick

In den ersten drei Abschnitten des letzten Kapitels wollen wir versuchen durch verschiedene Vergleiche ein Fazit zur Anwendung der vier untersuchten Algorithmen zu ziehen. Anschließend werden wir einen Ausblick geben, in dem auf besonders interessante noch zu lösende Problemstellungen bezüglich dieser Thematik eingegangen wird.

### 6.1 Subjektiver Vergleich der Algorithmen auf Basis der Implementierungserfahrungen

Zur Erzeugung der empirischen Ergebnisse wurden die vier in dieser Arbeit untersuchten Algorithmen (in ihrer primalen Version) implementiert. Auch wenn keine „perfekte“ Programmierung garantiert werden kann, sollen nun kurz die dabei gemachten Erfahrungen zum Vergleich der Verfahren geschildert werden.

Als sehr schnell zur Berechnung zufällig erzeugter Problembeispiele erwies sich das Verfahren von Avis und Fukuda. Allerdings zeigte sich bei diesem für große  $m$  eine deutliche Anfälligkeit für numerische Instabilität. Dabei spielt für den Algorithmus zwar eine leichte Koordinatenänderung von Ecken keine entscheidende Rolle, aber eine durch numerische Instabilität hervorgerufene Abweichung der zugrunde liegenden Basis einer Ecke im Verlauf des Verfahrens kann verheerende Folgen nach sich ziehen. Durch die daraus resultierende Veränderung von Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Basen werden unter Umständen mehrere Pivotisierungspfade nicht mehr ausgeführt und damit wird ein Teil der Ecken unentdeckt bleiben. Weiter ist es möglich, dass falsche Vorwärtsschritte vollzogen werden oder ganze Pfade doppelt durchlaufen werden, so dass einige Ecken auch mehrfach in unserer Ausgabeliste erscheinen können.

Das Gift-Wrapping-Verfahren von Chand und Kapur läuft wesentlich stabiler, d.h. Auswirkungen von Rechenfehlern aufgrund numerischer Probleme halten sich in diesem Algorithmus deutlich stärker in Grenzen. Jedoch können in hohen Dimensionen  $n$  und gleichzeitig großer Zahl an Restriktionen  $m$  relativ schnell Speicherüberläufe entstehen. Der große Speicheraufwand führt automatisch auch dazu, dass das Suchen in der Liste für ungesättigte Kanten bzw. Randsimplexseiten deutlich Rechenlaufzeit erfordert. Dieser Nachteil gleicht sich jedoch – zumindest bei einer hohen Restriktionszahl im Vergleich zur Dimension – weitgehend durch eine Einsparung an Rückwärtsschritten (nach Landen in einer Sackgasse) wieder aus. Näheres hierzu wird in Abschnitt 6.3 erläutert, wenn wir empirische Untersuchungen zur Laufzeit vor-

nehmen. Dabei werden wir feststellen, dass für  $m$  groß genug der Gift-Wrapping-Algorithmus sogar die kürzeste Laufzeit unter den betrachteten Algorithmen aufweisen kann.

Der Shelling-Algorithmus verhält sich in Bezug auf numerische Stabilität fast genauso gut wie das Gift-Wrapping-Verfahren. Die von uns eingeführte Identifikation und Sortierung der Basen nach ihren Zielfunktionswerten beschleunigt zwar deutlich den Algorithmus, führt allerdings bei hohen Parameterwerten aufgrund der großen Zahl an Ecken und der damit verbundenen Problematik, dass die Zielfunktionswerte dieser Ecken oft sehr nahe beieinander liegen, zu einem leicht verfälschten Ergebnis. Hier ist implementierungstechnisch eine Vergleichskonstante einzuführen, um zu unterscheiden, ob zwei Zielfunktionswerte nur aufgrund numerischer Probleme nicht identisch sind und in Wirklichkeit zu ein und derselben Ecke gehören, oder ob es sich um zwei unterschiedliche Ecken mit nur ähnlichem Zielfunktionswert handelt. Eine „gute“ Wahl dieser Konstante ist nicht einfach zu treffen. In der hier verwendeten Implementierung wurde sie mit Hilfe von Vergleichen mit den anderen Verfahren festgelegt. Weiter ist für den Shelling-Algorithmus anzumerken, dass durch das ständige Springen zwischen  $i$ . bester und  $(i + 1)$ . bester Ecke oft viele Pivotschritte nötig sind und das Verfahren daher deutliche Einbußen in der Laufgeschwindigkeit vorzuweisen hat.

Beschränkt man sich bei der Implementierung der Double-Description-Methode auf die Speicherung der Ecken und Kanten in Koordinaten, so wiederholen sich die Probleme mit einer passenden Vergleichskonstante, wie eben beim Shelling-Algorithmus beschrieben wurde. Da hier keine spezielle Sortierung der Elemente in unserer Liste vorgenommen wird, ist es empfehlenswert zusätzlich die Basisdarstellungen zu speichern und diese für die Unterscheidung der Ecken und Kanten heranzuziehen. Des Weiteren ist bei der Double-Description-Methode der Speicheraufwand besonders hoch, da die Kanten (und zugehörige Ecken) bis zur letzten Iteration schnell verfügbar bleiben müssen. Vor allem das komplette Abarbeiten der verwendeten Liste in jeder Iteration lässt die Double-Description-Methode in Bezug auf die Laufzeit sehr schlecht aussehen. Eine detailliertere Erklärung für die besonders langen Laufzeiten im inkrementellen Verfahren wird in Abschnitt 6.2 gegeben.

Nachfolgende Tabelle gibt eine subjektive Sortierung der Algorithmen in den Kategorien Laufgeschwindigkeit, numerische Stabilität und Speicheraufwand an. Dabei bedeutet eine niedrige Platzierung, dass das Verfahren in dieser Kategorie nach den im Rahmen dieser Arbeit gesammelten Erfahrungen als besser angesehen wird als ein Verfahren mit einem hohen Platz.

LAUFGESCHWINDIGKEIT	NUMERISCHE STABILITÄT	SPEICHERAUFWAND
1. Avis und Fukuda	1. Gift-Wrapping	1. Avis und Fukuda
Gift-Wrapping	2. Shelling	2. Shelling
3. Shelling	3. Double-Description	3. Gift-Wrapping
4. Double-Description	4. Avis und Fukuda	4. Double-Description

Tabelle 6.1: Subjektive Einschätzung der implementierten Algorithmen

Zumindest zur Laufzeitgeschwindigkeit werden in Abschnitt 6.3 empirische Untersuchungen vorgenommen, die obige Einschätzung bestätigen. Hier wird insbesondere der gemeinsame erste Platz für das Verfahren von Avis und Fukuda und den Gift-Wrapping-Algorithmus in dieser Kategorie genauer erläutert.

## 6.2 Vergleich der Komplexitäten

Wir wollen nun versuchen anhand der theoretischen Ergebnisse aus den Komplexitätsanalysen die einzelnen Algorithmen zu vergleichen. Dieses Unterfangen kann lediglich sehr ungenau vorgenommen werden, da die Aufwandsterme teilweise völlig verschiedene Zufallsgrößen beinhalten und dazu auf unterschiedliche Oberschranken basieren. Um dennoch halbwegs ein Fazit zu ziehen, werden wir stets vom Worst-Case-Aufwand ausgehen und durch Übergänge in die Average-Case-Werte einiger Zufallsgrößen eine grobe Einstufung des Verfahrens angeben.

Beim beschleunigten Gift-Wrapping-Algorithmus haben wir nachfolgenden Worst-Case-Komplexitätsterm erhalten (siehe Formel (2.11), Seite 62):

$$\mathcal{O}\left(n(n^2 + mn + n^2 \ln m) + \sum_{e \in V} (n^2 + s(h_e)n + n^2 \ln m) + \#\tilde{K} \cdot m + m + (\ln m)s(\min^{\geq 0} h_V)\right)$$

Da sich das Beschleunigungsprinzip auch ohne Weiteres im Shelling-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda anwenden lässt, ist es für einen fairen Vergleich besser, wenn wir hier die deterministische Maximalkomplexität der einfachen Version des primalen Gift-Wrapping-Algorithmus aus Formel (2.4) (Seite 57) heranziehen:

$$\mathcal{O}(mn^2 + \#V(mn + n^2 \log_2(m)))$$

Da in realen Problemen meist  $m$  sehr viel größer als  $n$  ist, ist es sinnvoll davon auszugehen, dass  $\#V > n$  und  $m > n \cdot \log_2(m)$  gelten. Daher können wir grob sagen, dass für diese „realistischen Fälle“ die Komplexität des Gift-Wrapping-Verfahrens

$$\mathcal{O}(\#V \cdot mn)$$

bzw. im Average-Case

$$\mathcal{O}(\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V) \cdot mn)$$

beträgt.

Beim Verfahren von Avis und Fukuda sind wir auf nachfolgenden Worst-Case-Aufwand gestoßen (siehe Formel (3.1), Seite 81):

$$\mathcal{O}\left(mn^2 + 2mn + \#V \cdot ((m - n) + 2 \cdot (mn + \log_2 n) + n \cdot (m - n)) + \sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e) + n \cdot \log_2 n\right) \quad (6.1)$$

Wie wir bereits in Abschnitt 3.2 festgestellt haben, ist

$$\sum_{\ell=1}^n \sum_{e \in V^\ell} r_\ell(e) \leq \#V \cdot n^2$$

und somit wird dieser Ausdruck im Komplexitätsterm (6.1) von  $\#V \cdot mn$  dominiert. Daher gilt auch hier für „realistische“ Parameterwerte der Aufwand

$$\mathcal{O}(\#V \cdot mn) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{O}(\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V) \cdot mn).$$

Beim Shelling-Algorithmus haben wir in Formel (4.4) (Seite 136) nachfolgende Maximalkomplexität festgehalten:

$$\mathcal{O}(mn^2 + 2mn + (\#V - 1) \cdot mn^2 + n \cdot \#V \cdot ((m - n) + \log_2 \#V))$$

Hierbei wurde vereinfachend die Zahl der Pivotschritte beim Crashing mit  $n$  und die Listengröße mit  $\#V$  nach oben abgeschätzt. Da unsere Vermutung, dass die erwartete Zahl der Pivotschritte beim Crashing für große  $m$  nahe bei  $n$  liegt, äußerst plausibel ist, gehen wir hier von deren Korrektheit aus. Damit wird wegen

$$\log_2 \#V \leq n \log_2(m) \leq nm$$

der Suchaufwand auch im Average-Case für die Groß-O-Notation vernachlässigbar. Es ergibt sich insgesamt nachfolgende erwartete Komplexität:

$$\mathcal{O}(\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V) \cdot mn^2)$$

In erster Linie wird hier also der Gesamtaufwand von den Pivotschritten aus den Crashing-Vorgängen bestimmt. Der Shelling-Algorithmus erweist sich damit im asymptotischen Fall durchschnittlich um den Faktor  $n$  schlechter als die beiden vorher behandelten Verfahren.

Besonders schwierig ist der Komplexitätsausdruck der Double-Description-Methode einzustufen. In Formel (5.1) auf Seite 147 haben wir nachfolgenden Maximalaufwand festgehalten:

$$\begin{aligned} & \mathcal{O} \left( n^3 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \#V_{\ell} \cdot n^2 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \# \left( V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1}) \right) \cdot (n^3 + n^2(\ell + 1 - n) + n^2 \ln(\ell + 1)) \right) = \\ & = \mathcal{O} \left( n^3 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \#V_{\ell} \cdot n^2 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \# \left( V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1}) \right) \cdot (n^2(\ell + 1) + n^2 \ln(\ell + 1)) \right) \end{aligned}$$

Mittels Übergang zur Average-Case-Analyse können wir ausnutzen, dass das Resultat (5.3)

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1}^{\text{akt}}(a_{\ell+1}))) = \frac{n}{\ell + 1} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_{\ell+1})$$

bereits aus [Bor07, S. 197] bekannt ist (siehe auch Abschnitt 5.1, Seite 148). Somit ergibt sich nachfolgende Oberschranke für den erwarteten Aufwand:

$$\mathcal{O} \left( n^3 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_{\ell}) \cdot n^2 + \sum_{\ell=n}^{m-1} \frac{n}{\ell + 1} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1})) \cdot (n^2(\ell + 1) + n^2 \ln(\ell + 1)) \right) \quad (6.2)$$

Borgwardt beschäftigte sich in seiner Arbeit [Bor07, S. 201–203] auch mit einem Vergleich zwischen der durchschnittlichen Komplexität der Double-Description-Methode und der des einfachen Gift-Wrapping-Algorithmus. Hier wird aufgezeigt, warum das inkrementelle Verfahren einen großen Nachteil gegenüber unseren sequentiellen Algorithmen hat. Im Folgenden wird daher im Wesentlichen Borgwardts Argumentation wiedergegeben.

Betrachten wir den Average-Case-Aufwand der Double-Description-Methode aus Formel (6.2), so ist zu erkennen, dass für den angestrebten Vergleich das Verhalten von  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_\ell)$  in  $\ell$  und das Aufsummieren bis zur Stufe  $\ell = m - 1$  von zentraler Bedeutung ist. Für alle Verteilungen aus unserer speziellen Klasse wurden bereits Oberschranken für die erwartete Eckenzahl festgehalten (siehe Formel (1.31), Seite 39). Hier wird das Verhalten in Abhängigkeit von  $\ell$  in der Form

$$\left( \ell + \frac{2 + 2k}{n + 1 + 2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}}$$

wiedergegeben. Somit erhält man für alle  $k \in (-1, \infty)$  einen sublinearen Verlauf, dessen Grad an Sublinearität mit steigendem  $k$  zunimmt. Lediglich für die Verteilung auf  $\omega_n$  (d.h.  $k \rightarrow -1$ ) ergibt sich hier ein lineares Verhalten:

$$\ell \cdot C_{n,-1}$$

Wie Borgwardt in [Bor07] erklärt, kann im asymptotischen Fall ( $\ell \rightarrow \infty$ ,  $n$  und  $k$  fest) auch die Existenz von Unterschranken für  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_\ell)$  mit derselben Größenordnung bzgl. des Verlaufs in  $\ell$  nachgewiesen werden. Daher werden wir uns im Folgenden auf unsere Oberschranken beschränken und diese als das „wahre“ Verhalten interpretieren.

Für die Oberflächenverteilung ( $k \rightarrow -1$ ) erhalten wir durch Aufsummieren einen in  $m$  quadratischen Ausdruck:

$$\sum_{\ell=n}^{m-1} \ell \cdot C_{n,-1} \approx \frac{m(m-1)}{2} \cdot C_{n,-1}$$

Dies wird in der ersten Summe des Komplexitätsterms (6.2) mit dem Faktor  $n^2$  multipliziert. Es ergibt sich also aus der ersten Summe im Prinzip der Aufwand:

$$m^2 n^2 \cdot C_{n,-1}$$

In der zweiten Summe erhalten wir durch Beschränkung auf die wesentlichen Terme:

$$\sum_{\ell=n}^{m-1} \frac{n}{\ell+1} \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_{\ell+1}) \cdot n^2(\ell+1) \approx \sum_{\ell=n}^{m-1} n^3(\ell+1) C_{n,-1} \approx m^2 n^3 \cdot C_{n,-1}$$

Insgesamt also nochmal einen Faktor  $n$  mehr als in der zuerst betrachteten Summe.

Im Vergleich dazu können wir auch für den Average-Case-Aufwand des Gift-Wrapping-Algorithmus (oder des Verfahrens von Avis und Fukuda) das Verhalten der erwarteten Eckenzahl für die Oberflächenverteilung linear ausdrücken:

$$\mathbb{E}(\#V_m) \cdot mn \approx m \cdot C_{n,-1} \cdot mn = m^2 n \cdot C_{n,-1}$$

Insgesamt erhalten wir also bei der Double-Description-Methode einen Faktor  $n^2$  mehr als bei unseren ersten beiden sequentiellen Verfahren. Wie wir gleich feststellen werden, ist dabei die betrachtete Oberflächenverteilung die Verteilung, bei der sich die Schwäche des inkrementellen Verfahrens noch am geringfügigsten bemerkbar macht. Hier werden wir sehen, dass in einer Iteration der Double-Description-Methode  $n$ -mal so viele Ecken berechnet werden als letztendlich für das Resultat nach der Iteration übrig bleiben. Berücksichtigt man, dass für all

diese jeweils  $n$  Quotiententests zum Auffinden adjazenter Ecken durchzuführen sind, erklärt sich damit eben festgestellter Mehraufwand vom Faktor  $n^2$ .

Am Beispiel der Oberflächenverteilung lässt sich gut erklären, warum die Idee des inkrementellen Verfahrens von großem Nachteil ist. Wie wir festgestellt haben, wird das wahre Verhalten der erwarteten Eckenzahl von unten durch eine lineare Funktion wiedergegeben, welche für steigendes  $m$  an Genauigkeit zunimmt. Daher gelten weiterhin alle folgenden Ausdrücke nur näherungsweise.

In jeder Iterationsstufe, nehmen wir etwa die Stufe mit  $\ell + 1$  zu berücksichtigenden Restriktionen, steigt die erwartete Eckenzahl von  $\ell \cdot C_{n,-1}$  auf  $(\ell + 1) \cdot C_{n,-1}$ . D.h. nach dieser Iteration haben wir  $C_{n,-1}$  Ecken mehr als vorher. Dies sollten wir etwas detaillierter betrachten. Denn in Wahrheit sind unter den  $(\ell + 1) \cdot C_{n,-1}$  jetzt verfügbaren Ecken

$$(\ell + 1) \cdot C_{n,-1} \cdot \frac{n}{\ell + 1} = n \cdot C_{n,-1}$$

komplett neue Ecken, d.h. bei diesen ist die neu hinzugekommene Restriktion  $a_{\ell+1}^T x \leq 1$  straff. Da sich allerdings in der Stufe mit  $\ell + 1$  Restriktionen die Zahl der Ecken insgesamt nur um  $C_{n,-1}$  erhöht, müssen in dieser Iteration also auch  $(n - 1) \cdot C_{n,-1}$  Ecken gelöscht werden. Somit erweist sich nun die Arbeit für diese  $(n - 1) \cdot C_{n,-1}$  Ecken im Prinzip als nutzlos. Summieren wir noch über  $m - n$  Stufen, so ergibt sich die Anzahl der letztlich umsonst berechneten Ecken:

$$(m - n) \cdot (n - 1) \cdot C_{n,-1}$$

Wir berechnen nun den sogenannten „Überproduktionsquotienten“ für die Gleichverteilung auf  $\omega_n$ , der seinem Namen entsprechend die Überproduktion von Ecken pro Iteration quantifiziert:

$$\frac{\mathbb{E}(\text{„Zahl der neu produzierten Ecken“})}{\mathbb{E}(\text{„Nettozuwachs in der Eckenzahl“})} \equiv \frac{\mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1} \setminus V_{\ell}))}{\mathbb{E}_{m,n}^k(\#(V_{\ell+1})) - \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V_{\ell})} = n$$

Betrachten wir diesen Quotienten für allgemeine  $k$ -Verteilungen, so wird ersichtlich, warum sich der Nachteil des inkrementellen Verfahrens bei Erhöhung des Verteilungsparameter  $k$  noch weiter verstärkt.

In der Stufe  $\ell + 1$  sind hier im Erwartungswert

$$\frac{n}{\ell + 1} \cdot \left( \ell + 1 + \frac{2 + 2k}{n + 1 + 2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot C_{n,k}$$

Ecken neu. Die erwartete Gesamteckenzahl hat sich aber lediglich

$$\text{von } \left( \ell + \frac{2 + 2k}{n + 1 + 2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot C_{n,k} \quad \text{auf} \quad \left( \ell + 1 + \frac{2 + 2k}{n + 1 + 2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot C_{n,k}$$

erhöht. Somit ergibt sich nachfolgender Überproduktionsquotient:

$$\frac{\frac{n}{\ell+1} \cdot \left( \ell + 1 + \frac{2+2k}{n+1+2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot C_{n,k}}{\left( \ell + 1 + \frac{2+2k}{n+1+2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot C_{n,k} - \left( \ell + \frac{2+2k}{n+1+2k} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}} \cdot C_{n,k}} = \frac{\frac{n}{\ell+1}}{1 - \left( 1 - \frac{1}{\ell+1 + \frac{2+2k}{n+1+2k}} \right)^{\frac{n-1}{n+1+2k}}}$$



Der Nenner ist von der Form

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\ell + 1 + \kappa(k)}\right)^{1 - \kappa(k)} \quad \text{mit} \quad \kappa(k) := \frac{2 + 2k}{n + 1 + 2k}.$$

Man beachte, dass durch eine Erhöhung von  $k$  die Funktion  $\kappa(k)$  wächst und daher auch der Term in Klammern steigt. Gleichzeitig fällt der Exponent, während der Klammerwert zwischen null und eins liegt. Dies führt insgesamt zu einer Erhöhung des Klammersausdruckes inklusive Exponent und somit zu einem Fallen des gesamten Nenners. Durch die Erhöhung von  $k$  also wird unser Überproduktionsquotient größer. Dieser wird somit nur für  $k \rightarrow -1$  genau  $n$  sein und für steigendes  $k$  an Wert zunehmen.

Daher unterliegt bzgl. ihrer Komplexität die Double-Description-Methode den sequentiellen Verfahren im Average-Case-Vergleich bei Anwendung des Rotationssymmetriemodells. Lassen wir jedoch entartete Probleme zu, so könnte sich eventuell ein Einsatz der Double-Description-Methode wieder als vorteilhaft erweisen. Denn dann kommen vor allem sequentielle Verfahren in die Gefahr eine Überzahl an nutzlosen Pivotschritten durchzuführen, wenn an Ecken eine Vielzahl von Basen zugrunde liegt.

Als Fazit dieses Abschnittes können wir also festhalten, dass der Gift-Wrapping-Algorithmus und das Verfahren von Avis und Fukuda bezüglich unserer theoretischen Analyse der Average-Case-Komplexität als Sieger hervorgehen. Die Double-Description-Methode erweist sich hier als das schwächste Verfahren. Dies entspricht genau unserer subjektiven Einschätzung der Laufzeit aus Tabelle 6.1. Eine weitere Bestätigung dieser Feststellungen werden wir im nachfolgenden Abschnitt erhalten, in dem bezüglich der Laufzeit noch empirische Analysen durchgeführt werden.

### 6.3 Empirische Untersuchung der Laufzeiten

Ein empirischer Laufzeitvergleich der Algorithmen weist aufgrund implementierungstechnischer Probleme, wie z.B. die Wahl geeigneter Vergleichskonstanten, sowie der nicht möglichen Garantie, dass alle Algorithmen in gleichem Maße effizient programmiert wurden, nur beschränkte Aussagekraft auf. Da uns dieser dennoch einen guten Eindruck über die Rechengeschwindigkeit bei Einsatz der betrachteten Algorithmen vermittelt, wollen wir nun hierzu einige empirische Untersuchungen vornehmen.

*Bemerkung 6.1.* Um gewisse Effekte deutlicher sichtbar zu machen, wurde im Folgenden bei Variation der Dimension etwas von unserer gewöhnlichen Parameterfestlegung abgewichen und die Restriktionszahl auf  $m = 150$  gesetzt. Zudem haben in den Graphiken dieses Abschnittes die gewählten Farben für die empirischen Kurven keine Bedeutung in Bezug auf die Verteilung, sondern dienen lediglich der Unterscheidung der einzelnen Algorithmen (siehe Legende in der jeweiligen Graphik). Die gewählte Verteilung ist der Bildunterschrift zu entnehmen.

*Bemerkung 6.2.* Des Weiteren werde darauf hingewiesen, dass bei der Generierung der empirischen Daten jeweils die Zielfunktion für das Verfahren von Avis und Fukuda sowie für den Shelling-Algorithmus gemäß ihren Formulierungen (siehe Algorithmus 3.2 bzw. 4.12) in der Initialisierungsphase bestimmt wurde.

Nachfolgende Abbildung gibt für die Dimension  $n = 7$  bei Gleichverteilung der Restriktionsvektoren auf der Kugeloberfläche die Laufzeit der Verfahren in Millisekunden an.

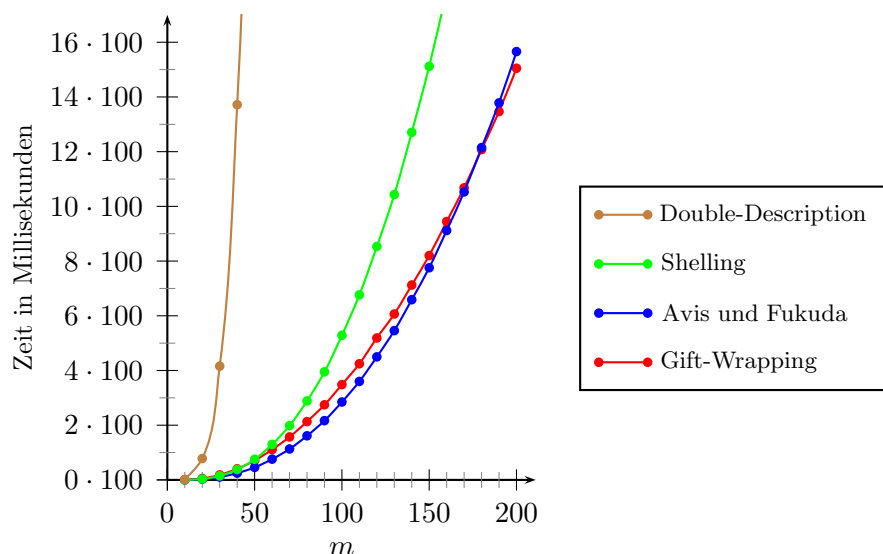


Abbildung 6.1: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Dimension  $n = 7$

Wenig verwunderlich ist die lange Laufzeit der Double-Description-Methode. Wie bereits in Abschnitt 6.2 bemerkt wurde, werden hier etwa  $n$ -mal so viele Ecken berechnet als letztendlich im Resultat übrig bleiben. Auch wenn diese Aussage lediglich für den asymptotischen Fall hergeleitet wurde, scheint auch moderat die Double-Description-Methode deutlich mehr Laufzeit zu beanspruchen. Die drei sequentiellen Verfahren laufen hingegen wesentlich schneller. Hier zeigt sich der Shelling-Algorithmus als das langsamste Verfahren. Durch das ständige Springen von  $i$ . bester zu  $(i + 1)$ . bester Ecke werden bei diesem deutlich mehr Pivotschritte stattfinden als beim Verfahren von Avis und Fukuda oder beim Gift-Wrapping-Verfahren, so dass deren Laufzeiten klar überschritten werden.

Insgesamt stellen wir hier fest, dass ein zeitlicher Unterschied zwischen dem Gift-Wrapping-Algorithmus und dem Verfahren von Avis und Fukuda in dem oben gewählten Parameterbereich nur geringfügig vorhanden ist. Zunächst erweist sich bei einer kleinen Restriktionszahl das Verfahren von Avis und Fukuda als schneller. Mit Erhöhung von  $m$  holt jedoch der Gift-Wrapping-Algorithmus auf und übertrumpft jenen sogar. Um diese Beobachtung zu erklären, betrachten wir die Zahl an Pivotschritten bei den sogenannten „Backtracking“-Aktionen, also die Summe der Rückwärtsschritte nach Landungen in Sackgassen. Wie in Abbildung 6.2 zu erkennen ist, nimmt diese bei Erhöhung von  $m$  im Verfahren von Avis und Fukuda etwas stärker zu als im Gift-Wrapping-Algorithmus. Letzterer nutzt nämlich jede Möglichkeit für einen Vorwärtsschritt und vermeidet so gut wie möglich das Backtracking. Dabei werden oft ungesättigte Kanten abgearbeitet, die zu einem früheren Zeitpunkt in unserer Liste aufgenommen wurden, ohne dass eine Rückwärtswanderung nötig gewesen ist. Des Weiteren bricht der Gift-Wrapping-Algorithmus bereits ab, wenn die Liste mit den ungesättigten Kanten leer ist. Hier ist im Gegensatz zum Verfahren von Avis und Fukuda keine Rückwärtswanderung zur Wurzel notwendig, um die Terminierung des Verfahrens festzustellen. Jedoch treten bei wenig übrig gebliebenen ungesättigten Kanten oft lange Pfade beim Backtracking auf, so dass

der Unterschied in der Anzahl der Pivotschritte im Vergleich zum Verfahren von Avis und Fukuda doch geringer ausfällt als sich zunächst mit obigen Argumenten vermuten ließe.

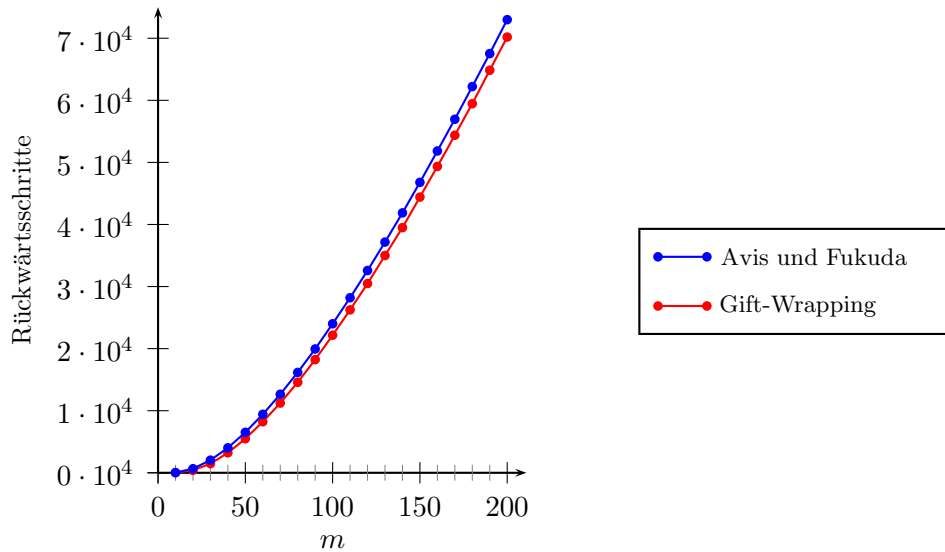


Abbildung 6.2: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Dimension  $n = 7$

Besonders zu Gute kommt dem Verfahren von Avis und Fukuda neben dem kaum vorhandenen Speicheraufwand das Vermeiden von Suchaktionen in Listen. Allerdings erweist sich hier das Backtracking als weniger effizient. Durch die reverse Pivotüberprüfung werden viele potentielle Vorwärtsschritte verboten und die Zahl der Rückwärtsschritte nimmt daher etwas zu. Berücksichtigt man etwa, dass dieses Verfahren zum Feststellen der Terminierung nochmals Rückwärtsschritte bis zur Wurzel erfordert, werden zwangsläufig  $n$  Backtracking-Aktionen bis zur Wurzel stattfinden. Dies gilt rekursiv, abgesehen von den Blättern, auch für alle anderen Knoten des entstehenden Suchbaumes. Zu diesen wird je nach Zahl der Abstiegsrichtungen bis zu  $(n - 1)$ -mal zurückgelaufen. Allerdings bleiben hier in der Regel die Pfade bei der Rückwärtswanderung relativ kurz, so dass sich dieser Nachteil in Grenzen hält. Des Weiteren beachte man, dass zum Auffinden des Rückwärtspfades im Verfahren von Avis und Fukuda die Regel von Bland anzuwenden ist, was zusätzlich zu einem Zeitverlust führt. Zudem sind hier auch Quotiententests erforderlich, die gerade bei einer großen Restriktionszahl stark ins Gewicht fallen. Währenddessen fällt der Aufwand für das Rückwärtsschreiten im Gift-Wrapping-Algorithmus minimal aus, da hier der Pfad abgespeichert wird und bei effizienter Programmierung ohne Suchaufwand ausgelesen werden kann. Insbesondere sind bei diesem keine Quotiententests durchzuführen und es bleibt lediglich der Aufwand für den Pivotschritt zu berücksichtigen. Da weiter die Tableaugröße durch die Erhöhung von  $m$  zunimmt, können insgesamt wenige zusätzliche Rückwärtsschritte den oben sichtbaren Zeitgewinn des Gift-Wrapping-Algorithmus bewirken.

Schwieriger einzustufen sind die Auswirkungen durch die Änderung der Polyederstruktur bei Erhöhung von  $m$ . Durch eine große Restriktionszahl nähert sich das Polyeder tendenziell der Kugel an; man kann hier von „stärkerer Feinmaschigkeit“ des Polyeders sprechen. Auch dies

kann zur obigen Ablösung des Algorithmus von Avis und Fukuda als schnellstes Verfahren beitragen.

Betrachten wir für unsere alternative Parameterfestlegung entsprechende Graphiken, so bestätigen sich weitgehend obige Erkenntnisse. Stellvertretend werden im Folgenden die Abbildungen für den Verteilungsparameter  $k = 1$  gezeigt. Wie man hier sieht, ist der Gift-Wrapping-Algorithmus bei sehr großem  $m$  (im Vergleich zur Dimension) bereits deutlich schneller als das Verfahren von Avis und Fukuda. Dass Letzterer für eine kleine Restriktionszahl das schnellste Verfahren darstellt, ist aufgrund der hohen Skalierung allerdings nicht mehr zu erkennen.

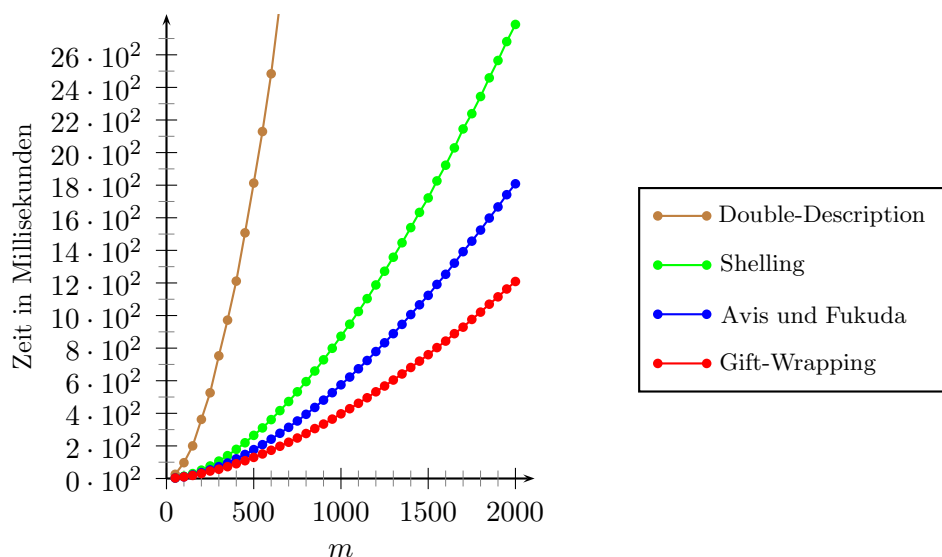


Abbildung 6.3: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Dimension  $n = 5$

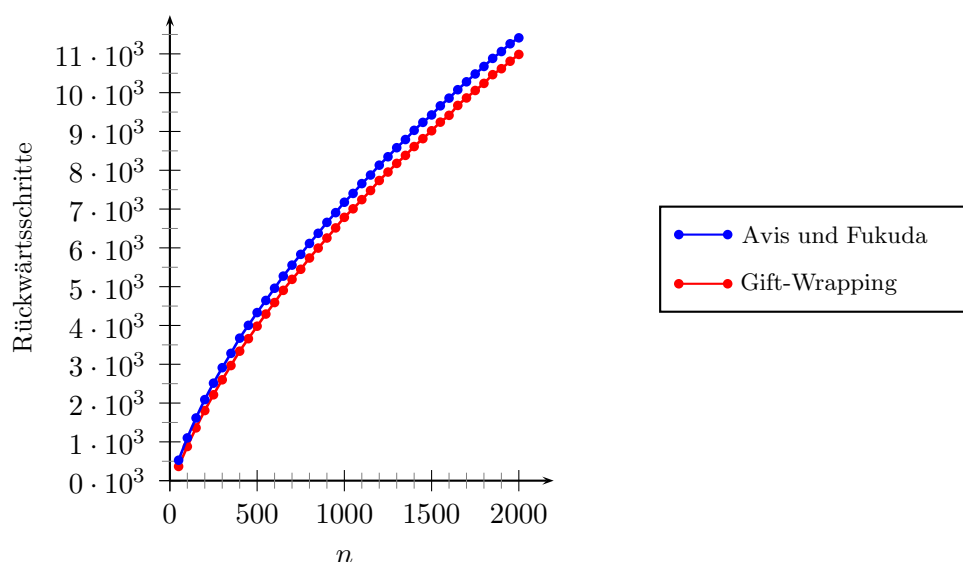


Abbildung 6.4: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Dimension  $n = 5$

Betrachten wir die Variation der Dimension  $n$ , so erkennen wir, dass durch die Dimensionssteigerung der Gift-Wrapping-Algorithmus deutlich langsamer wird als das Verfahren von Avis und Fukuda. Durch den extremen Anstieg der Eckenzahl bei Erhöhung der Dimension (vgl. Abschnitt 1.8) wird hier die Liste für ungesättigte Kanten im Gift-Wrapping-Algorithmus sehr lang und damit beanspruchen Suchaktionen in dieser viel Rechenzeit. Eine Einsparung an Rückwärtsschritten kann diesen Nachteil hier nicht mehr ausgleichen. Wir sehen, dass eine hohe Restriktionszahl entscheidend ist, um den Gift-Wrapping-Algorithmus als „Sieger“ zu deklarieren. Diese müsste bei höherer Dimension entsprechend zunehmen.

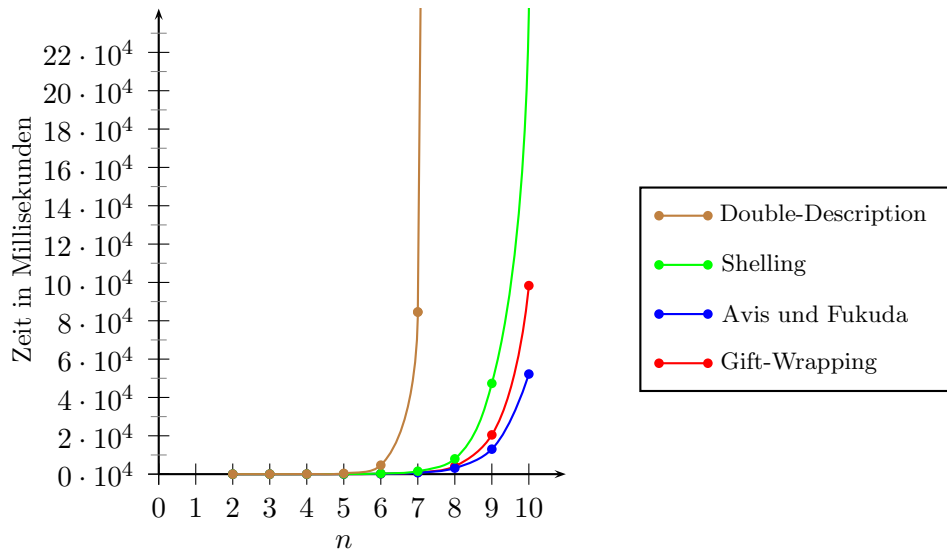


Abbildung 6.5: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Restriktionszahl  $m = 150$

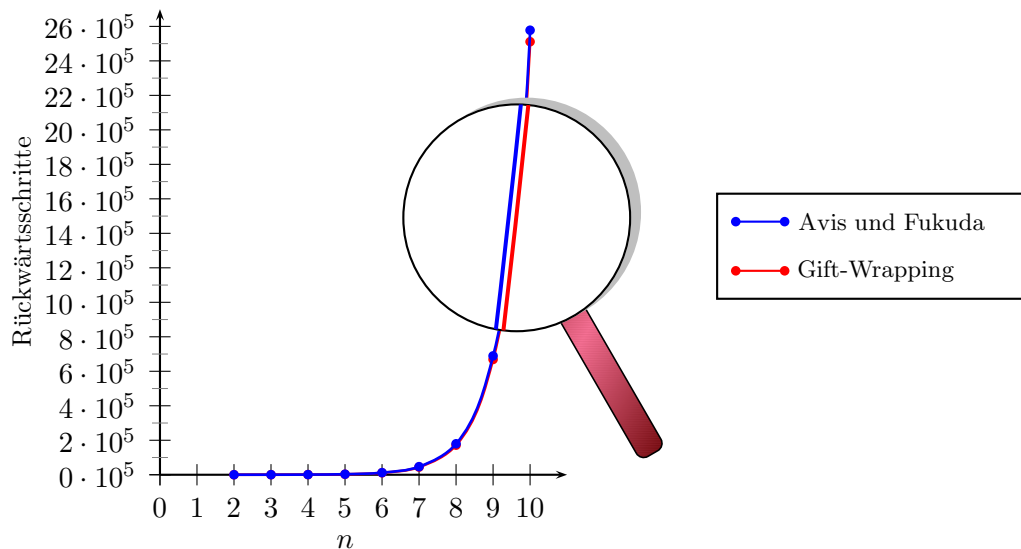


Abbildung 6.6: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Restriktionszahl  $m = 150$

In Abbildung 6.6 wird die Zahl der Pivotschritte beim Backtracking für den Gift-Wrapping-Algorithmus und für das Verfahren von Avis und Fukuda bei Variation der Dimension dargestellt. Aufgrund der hohen Skalierung ist hier ein Unterschied zwischen den beiden Kurven nicht mehr zu erkennen. Durch die in der Graphik verwendete Lupe mit Vergrößerungsfaktor zehn und gleichzeitiger Reduzierung der Liniendicke im vergrößerten Bereich wird eine Unterscheidung der beiden Kurven möglich. Auch wenn in absoluten Zahlen das Backtracking beim Verfahren von Avis und Fukuda mehr Schritte erfordert als beim Gift-Wrapping-Algorithmus und die Differenz sogar noch bei Erhöhung von  $n$  etwas zunimmt, handelt es sich bezüglich der Gesamtschrittzahl und bezüglich der Listengröße um einen zu geringen Anteil als, dass dadurch Effekte festzustellen sind.

Zu den Untersuchungen dieses Abschnittes wurden noch weitere Graphiken für andere Verteilungsparameter erstellt, die keine neuen Erkenntnisse liefern. Diese finden sich im Anhang ab Seite 213.

## 6.4 Ausblick

In dieser Arbeit wurden schon an einigen Stellen Möglichkeiten für weitere Forschungsbeschäftigungen aufgezeigt. Betrachtet man unser Ergebnis zur erwarteten Gesamtkomplexität beim Verfahren von Avis und Fukuda, so stößt man hier auf die Größe  $\#V^1$ , welche die Anzahl an Ecken mit genau einer Aufstiegsrichtung wiedergibt. Dies wirft unmittelbar die naheliegende Frage auf, wie groß denn  $\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V^\ell)$  für  $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$  ist. Natürlich ist in unserem Modell

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V^0) = \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V^n) = 1$$

und

$$\mathbb{E}_{m,n}^k(\#V^\ell) = \mathbb{E}_{m,n}^k(\#V^{n-\ell}) \text{ für alle } \ell \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Wie jedoch lauten die sonstigen Erwartungswerte oder in welchem Verhältnis stehen diese Größen zueinander? Empirische Analysen hierzu haben wir bereits in Abschnitt 3.5 vorgenommen. Ähnliches wurde auch in Abschnitt 3.6 untersucht, als wir uns mit der Problemstellung beschäftigten, mit welcher Wahrscheinlichkeit man auf eine Auf- bzw. Abstiegsante bei vorgegebenem Winkel  $\varphi = \sphericalangle(x_\Delta, z)$  für eine Ecke  $x_\Delta$  und Zielfunktionsvektor  $z$  trifft.

Besonders erstrebenswert wäre es in dieser Arbeit gewesen, die erwartete Anzahl an Pivotschritten beim Crashing-Verfahren im Shelling-Algorithmus analytisch zu berechnen. Es ist sehr naheliegend, dass asymptotisch dieser Wert gegen  $n$  laufen wird. Auch wenn grob klar ist, wie diese Vermutung bewiesen werden kann, hakt es leider an einigen Stellen, bei denen bislang nur Plausibilitätsüberlegungen weiterhelfen. Somit konnte hierzu noch kein sauberer Beweis geführt werden. Dieses Problem ist auf jeden Fall weiterhin von großem Interesse.

Auch die Average-Case-Analyse des Suchaufwands und der Listengröße, auf die man im Shelling-Algorithmus durchschnittlich trifft, stellt sich als sehr schwierig heraus. Empirische Ergebnisse finden sich hierzu in Abschnitt 4.7. Bei Letzterem hat man zu untersuchen, wie viele Ecken bereits gesehen, aber noch nicht abgearbeitet wurden. Eng verwandt hiermit ist die Fragestellung, wie viele Ecke es in einem bestimmten Zielfunktionswertebereich gibt.

Zudem wären zur Redundanzwahrscheinlichkeit, mit der wir uns im vorherigen Kapitel beschäftigt haben, weitere bzw. bessere Resultate wünschenswert. Die berechnete Schranke für die Verteilungsparameter  $k \in (-1, 0)$  ist zwar nicht trivial, aber sicherlich deutlich verbesserbar, wie unsere empirischen Ergebnisse nahelegen. Andere Schranken scheitern bislang aus technischen Gründen bzw. werden durch zu grobe Abschätzungen trivial. Erst wenn hierzu konkrete Ergebnisse vorliegen, könnte man sich mit der Frage beschäftigen, ob sich ein vorheriges Aussortieren redundanter Punkte bzw. Restriktionen lohnt. Die Anwendung dieses Preprocessings müsste dabei nicht auf die Double-Description-Methode allein beschränkt bleiben.

Wie man an diesen exemplarischen Fragestellungen sieht, gibt es also im Bereich der Konvexe-Hülle-Algorithmen trotz zahlreicher bisheriger Forschungen noch einiges zu tun.





# Anhang A

## Nützliche Formeln

Im ersten Teil des Anhangs sollen einige Formeln, Definitionen und Eigenschaften von Funktionen aufgelistet werden, die sich für Forschungen auf dem Gebiet der hier vorliegenden Arbeit als nützlich erweisen können.<sup>1</sup>

### A.1 Die Gamma- und Betafunktion

Die Gammafunktion  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{A.1})$$

definiert. Sie weist nachfolgende Eigenschaften auf:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$
- $\Gamma(n + 1) = n!$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \cdot \sqrt{\pi}}{n! \cdot 2^{2n}}$
- $\Gamma(x)$  ist eine konvexe Funktion.
- $\ln \Gamma(x)$  ist auch eine konvexe Funktion.
- Für  $x \geq 1$  und  $0 < \alpha < 1$  gilt:

$$(x + \alpha - 1)^\alpha \leq \frac{\Gamma(x + \alpha)}{\Gamma(x)} \leq x^\alpha \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>Der Großteil der in den Abschnitten A.1 und A.2 aufgeführten Formeln stammt aus dem Buch von Borgwardt [Bor87, S. 245–255].

Die Betafunktion  $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist wie folgt definiert:

$$B(k, \ell) = \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{\ell-1} dx = \frac{\Gamma(k) \cdot \Gamma(\ell)}{\Gamma(k+\ell)} \quad (\text{A.3})$$

Zur Gamma- und Betafunktion lassen sich noch nachfolgende Gleichungen aufführen:

- Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\binom{m}{n} \int_0^1 x^{m-n} (1-x)^{n-1} dx = \binom{m}{n} \frac{\Gamma(m-n+1) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+1)} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} \quad (\text{A.4})$$

- Für  $\delta > 0$  und  $k \geq \ell \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\binom{k}{\ell} \int_0^1 (1-x)^{k-\ell} x^{\ell-1-\delta} dx = \frac{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\ell-\delta)}{\Gamma(k+1-\delta) \cdot \Gamma(\ell+1)} \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Das Lebesgue-Maß

Das Lebesgue-Maß der Einheitskugel und ihrer Oberfläche beträgt:

$$\lambda_n(\Omega_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad (\text{A.6})$$

$$\lambda_{n-1}(\omega_n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (\text{A.7})$$

In diesem Zusammenhang sind folgende Beziehungen bekannt:

- $n \cdot \lambda_n(\Omega_n) = \lambda_{n-1}(\omega_n)$

$$\bullet \lambda_{n-1}(\omega_n) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} \sin \Psi_2 \cdot (\sin \Psi_3)^2 \dots (\sin \Psi_{n-1})^{n-2} d\Psi_{n-1} \dots d\Psi_2 d\Psi_1$$

$$\bullet \lambda_n(\Omega_n) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} r^{n-1} \sin \Psi_2 \cdot (\sin \Psi_3)^2 \dots (\sin \Psi_{n-1})^{n-2} d\Psi_{n-1} \dots d\Psi_2 d\Psi_1 dr$$

$$\bullet \lambda_{n-1}(\omega_n) = \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \Psi_{n-1})^{n-2} d\Psi_{n-1} = \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) \int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{n-3}{2}} dh$$

$$\bullet \lambda_n(\Omega_n) = \lambda_{n-1}(\Omega_{n-1}) \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \Psi_{n-1})^n d\Psi_{n-1} = \lambda_{n-1}(\Omega_{n-1}) \int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} dh$$

- $\frac{\lambda_{n-1}(\omega_n)}{\lambda_{n-3}(\omega_{n-2})} = \frac{2\pi}{n-2}$  für  $n \geq 3$
- $\frac{\lambda_n(\Omega_n)}{\lambda_{n-2}(\Omega_{n-2})} = \frac{2\pi}{n}$  für  $n \geq 3$
- $\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq \frac{\lambda_n(\Omega_n)}{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$  für  $n \geq 2$
- $\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \leq \frac{\lambda_{n-1}(\Omega_{n-1})}{\lambda_n(\Omega_n)} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2\pi}}$  für  $n \geq 2$
- $\sqrt{\frac{2\pi}{n-1}} \leq \frac{\lambda_{n-1}(\omega_n)}{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n-2}}$
- $\sqrt{\frac{n-2}{2\pi}} \leq \frac{\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})}{\lambda_{n-1}(\omega_n)} \leq \sqrt{\frac{n-1}{2\pi}}$
- $\int_{\omega_{n-1}} d\omega(x) = \lambda_{n-2}(\omega_{n-1})$  für  $n \geq 2$
- $\int_{\omega_{n-1}} x^{n-1} d\omega(x) = 0$  für  $n \geq 2$
- $\int_{\omega_{n-1}} |x^{n-1}| d\omega(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda_{n-3}(\omega_{n-2})}{(n-2)\lambda_{n-2}(\omega_{n-1})} \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) & \text{für } n \geq 3 \\ \lambda_0(\omega_1) = 2 & \text{für } n = 2 \end{cases}$
- $\int_{\omega_{n-1}} (x^{n-1})^2 d\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) & \text{für } n \geq 3 \\ \lambda_{n-2}(\omega_{n-1}) = 2 & \text{für } n = 2 \end{cases}$

Des Weiteren kann sich nachfolgende Formel zum Lebesgue-Maß als nützlich erweisen:

$$\lambda_n(\text{KH}(0, a_1, \dots, a_n)) = \frac{1}{n!} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \right| \quad (\text{siehe [Bok07, S. 10]}) \quad (\text{A.8})$$

Eine ähnliche Formel wird in [Bor87, S. 137] wiedergegeben: Sei  $B$  von der Form

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_n^1 & \dots & b_n^{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$|\det B| = \lambda_{n-1}(\text{KH}(b_1, \dots, b_n)) \cdot (n-1)! \quad (\text{A.9})$$

### A.3 Weitere Formeln

Nachfolgende Formeln und Eigenschaften von Binomialkoeffizienten finden gelegentlich Anwendung:

- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$
- $\binom{m}{n} \leq m^n$
- Vandermondesche Identität:

$$\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k} \quad (\text{A.10})$$

- Binomischer Satz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \quad (\text{A.11})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \quad (\text{A.12})$$

- Wichtige Reihenformel:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \quad (\text{siehe z.B. [BS93]}) \quad (\text{A.13})$$

Weiter können sich die Jensensche Ungleichung und die Ungleichung von Bernoulli des Öfteren als nützlich erweisen. Die Erstere wird in nachfolgendem Satz formuliert:

**Satz A.1** (Jensensche Ungleichung). *Sei  $f$  eine konvexe Funktion. Dann gilt:*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad \text{für } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ und } \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{A.14})$$

Die Jensensche Ungleichung kann auf Erwartungswerte angewendet werden. D.h. für eine konvexe Funktion  $f$  und eine integrierbare Zufallsvariable  $X$  gilt:

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)) \quad (\text{A.15})$$

Die Ungleichung von Bernoulli lautet wie folgt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für } -1 < x, n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.16})$$

## A.4 Zusatz zu Abschnitt 3.6

In Abschnitt 3.6 wurde die Aufstiegswahrscheinlichkeit an einer Ecke unter gewissen Voraussetzungen untersucht und zumindest asymptotisch ein Ergebnis gewonnen. Die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im moderaten Fall erweist sich als deutlich schwieriger. Eine Hilfe hierzu liefert nachfolgendes Lemma, das in unserer speziellen Problemstellung aus Abschnitt 3.6 allerdings nur für gerade Dimensionen verwendet werden kann.

**Lemma A.2.** Für  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$  und eine Konstante  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int (a^2 - z^2)^{\tilde{n}} dz = \sum_{i=0}^{\tilde{n}-1} 2^i \frac{(\tilde{n}-1)!}{(\tilde{n}-i-1)!} \cdot \frac{z^{2i+1}}{\prod_{k=0}^i (2k+1)} \left( a^2 - \frac{z^2}{2i+3} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-i-1}$$

Speziell für  $a = \sin(\varphi)$  und  $\tilde{n} := \frac{n-4}{2}$  bei geradem  $n \geq 6$  folgt damit:

$$\begin{aligned} & \int (\sin(\varphi)^2 - z^2)^{\frac{n-4}{2}} dz = \\ & = \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{2}-1} 2^i \frac{(\frac{n-4}{2}-1)!}{(\frac{n-4}{2}-i-1)!} \cdot \frac{z^{2i+1}}{\prod_{k=0}^i (2k+1)} \left( \sin^2(\varphi) - \frac{z^2}{2i+3} \right) (\sin^2(\varphi) - z^2)^{\frac{n-4}{2}-i-1} \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir wenden mehrfach die Formel der partiellen Integration an:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Mit

$$\begin{aligned} f(z) &= (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-1} & f'(z) &= -2(\tilde{n}-1)z(a^2 - z^2)^{\tilde{n}-2} \\ g'(z) &= a^2 - z^2 & g(z) &= a^2z - \frac{z^3}{3} = z \left( a^2 - \frac{z^2}{3} \right) \end{aligned}$$

folgt zunächst:

$$\int (a^2 - z^2)^{\tilde{n}} = z \left( a^2 - \frac{z^2}{3} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-1} + 2(\tilde{n}-1) \int z^2 (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-2} \left( a^2 - \frac{z^2}{3} \right) dz$$

Führen wir bezüglich des letzten Integrals nochmals eine partielle Integration aus, so ergibt sich mit

$$\begin{aligned} f(z) &= (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-2} & f'(z) &= -2(\tilde{n}-2)z(a^2 - z^2)^{\tilde{n}-3} \\ g'(z) &= z^2 \left( a^2 - \frac{z^2}{3} \right) & g(z) &= a^2 \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{15} = \frac{z^3}{3} \left( a^2 - \frac{z^2}{5} \right) \end{aligned}$$

folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \int z^2 (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-2} \left( a^2 - \frac{z^2}{3} \right) dz &= \frac{z^3}{3} \left( a^2 - \frac{z^2}{5} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-2} + \\ &+ 2(\tilde{n}-2) \int \frac{z^4}{3} \left( a^2 - \frac{z^2}{5} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-3} dz \end{aligned}$$

Wird wiederum die Formel der partiellen Integration auf das letzte Integral angewendet, so erhalten wir mit

$$\begin{aligned} f(z) &= (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-3} & f'(z) &= -2(\tilde{n} - 3)z(a^2 - z^2)^{\tilde{n}-4} \\ g'(z) &= \frac{z^4}{3} \left( a^2 - \frac{z^2}{5} \right) & g(z) &= a^2 \frac{z^5}{15} - \frac{z^7}{105} = \frac{z^5}{15} \left( a^2 - \frac{z^2}{7} \right) \end{aligned}$$

folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \int \frac{z^4}{3} (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-3} \left( a^2 - \frac{z^2}{5} \right) dz &= \frac{z^5}{15} \left( a^2 - \frac{z^2}{7} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-3} + \\ &+ 2(\tilde{n} - 3) \int \frac{z^6}{15} \left( a^2 - \frac{z^2}{7} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-4} dz \end{aligned}$$

Fahren wir in dieser Weise fort, ergibt sich als Gesamtergebnis:

$$\begin{aligned} \int (a^2 - z^2)^{\tilde{n}} dz &= \frac{z}{1} \left( a^2 - \frac{z^2}{3} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-1} + 2(\tilde{n} - 1) \cdot \\ &\left\{ \frac{z^3}{1 \cdot 3} \left( a^2 - \frac{z^2}{5} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-2} + 2(\tilde{n} - 2) \cdot \right. \\ &\left. \left\{ \frac{z^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \left( a^2 - \frac{z^2}{7} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-3} + 2(\tilde{n} - 3) \cdot \right. \right. \\ &\left. \left. \left\{ \frac{z^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \left( a^2 - \frac{z^2}{9} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-4} + 2(\tilde{n} - 4) \cdot \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \dots \right\} \dots \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^{\tilde{n}-1} 2^i \frac{(\tilde{n} - 1)!}{(\tilde{n} - i - 1)!} \cdot \frac{z^{2i+1}}{\prod_{k=0}^i (2k + 1)} \left( a^2 - \frac{z^2}{2i + 3} \right) (a^2 - z^2)^{\tilde{n}-i-1} \end{aligned}$$

□

*Bemerkung A.3.* Da

$$\begin{aligned} \int (a^2 - z^2)^{-1} dz &= -\frac{1}{2a} (\ln(z + a) - \ln(z - a)) \quad \text{und} \\ \int (a^2 - z^2)^0 dz &= \int 1 dz = z \end{aligned}$$

sind, ergeben sich für unser Integral in den Spezialfällen  $n = 2$  und  $n = 4$  folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \int (\sin^2(\varphi) - z^2)^{\frac{n-4}{2}} dz \stackrel{n=2}{=} \int (\sin^2(\varphi) - z^2)^{-1} dz &= -\frac{1}{2 \sin(\varphi)} (\ln(z + \sin(\varphi)) - \ln(z - \sin(\varphi))) \\ \int (\sin^2(\varphi) - z^2)^{\frac{n-4}{2}} dz \stackrel{n=4}{=} \int (\sin^2(\varphi) - z^2)^0 dz &= \int 1 dz = z \end{aligned}$$

Für ungerade  $n$  kann man nun wieder mit partieller Integration arbeiten. Allerdings werden hier sehr schnell die Ausdrücke extrem lang und unüberschaubar.

# Anhang B

## Ergänzende Graphiken

In diesem Kapitel sind Graphiken aufgeführt, die der Vollständigkeit halber generiert wurden, jedoch kaum neue Erkenntnisse liefern. Um den Text nicht unnötig oft durch Graphiken dieser Art zu unterbrechen, wurden die Abbildungen hier in den Anhang ausgelagert.

### B.1 Ergänzungen zu Kapitel 1

Nachfolgende Abbildungen wurden ergänzend zu Abschnitt 1.8 über die empirische Analyse der erwarteten Eckenzahl erstellt.

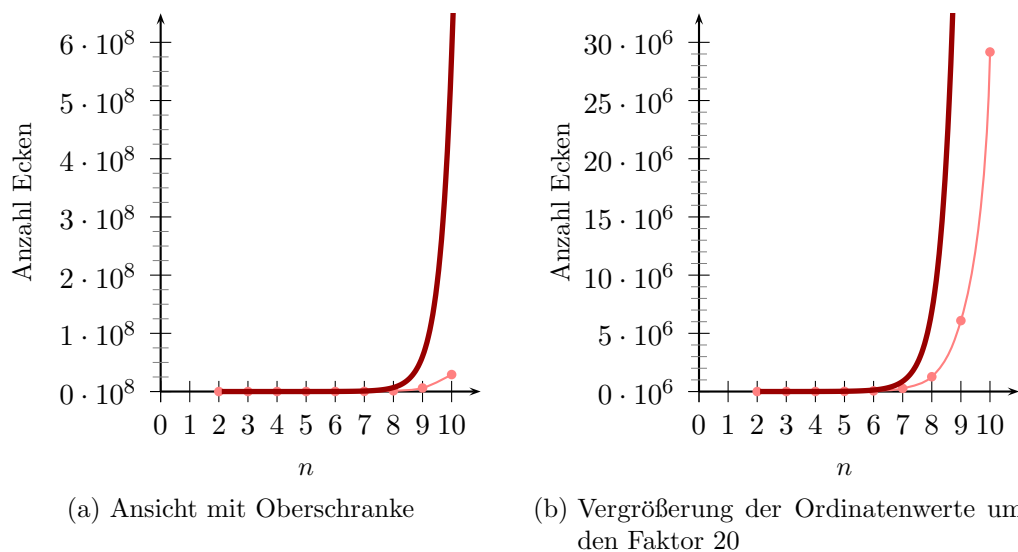
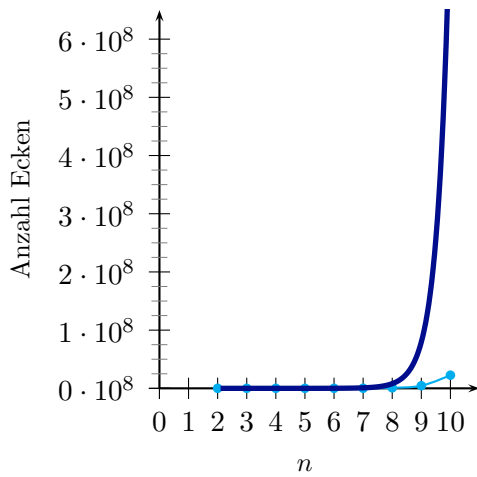
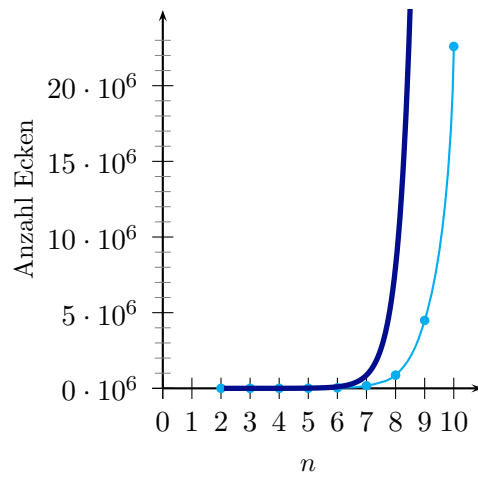


Abbildung B.1: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Restriktionszahl  $m = 500$  unter Variation der Dimension  $n$

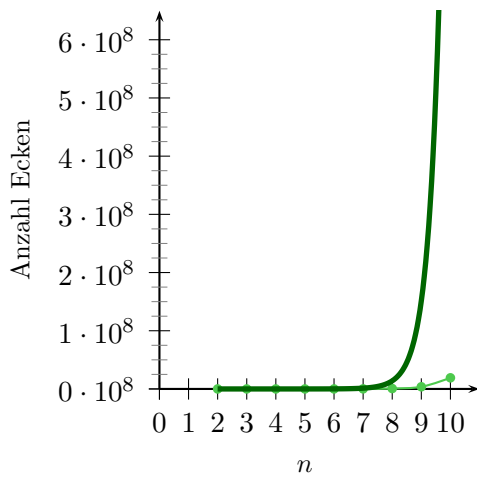


(a) Ansicht mit Obergrenze

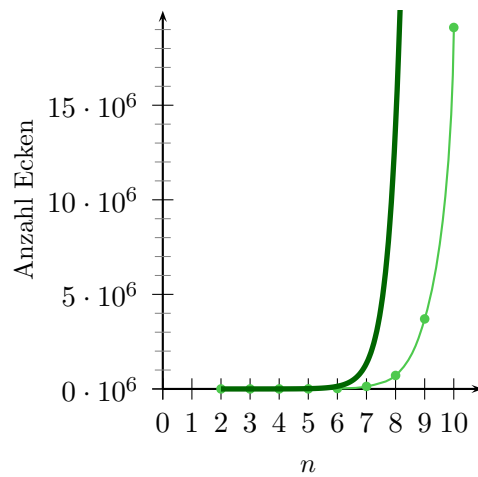


(b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 26

Abbildung B.2: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Restriktionszahl  $m = 500$  unter Variation der Dimension  $n$



(a) Ansicht mit Obergrenze



(b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 32,5

Abbildung B.3: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Restriktionszahl  $m = 500$  unter Variation der Dimension  $n$



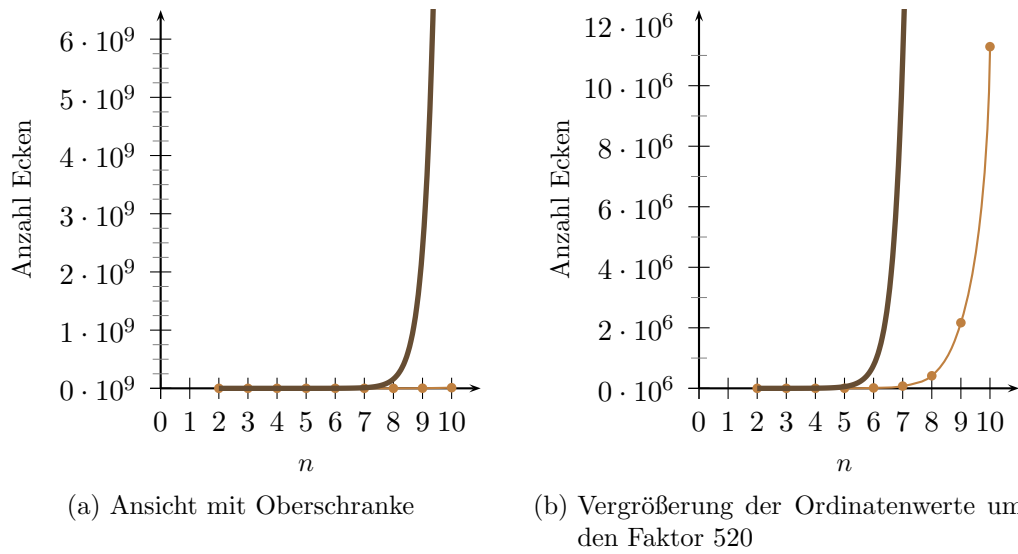


Abbildung B.4: Durchschnittliche Anzahl der Ecken bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Restriktionszahl  $m = 500$  unter Variation der Dimension  $n$

## B.2 Ergänzungen zu Kapitel 2

In diesem Abschnitt finden sich weitere Graphiken zur empirischen Untersuchung des Beschleunigungseffekts im Gift-Wrapping-Algorithmus.

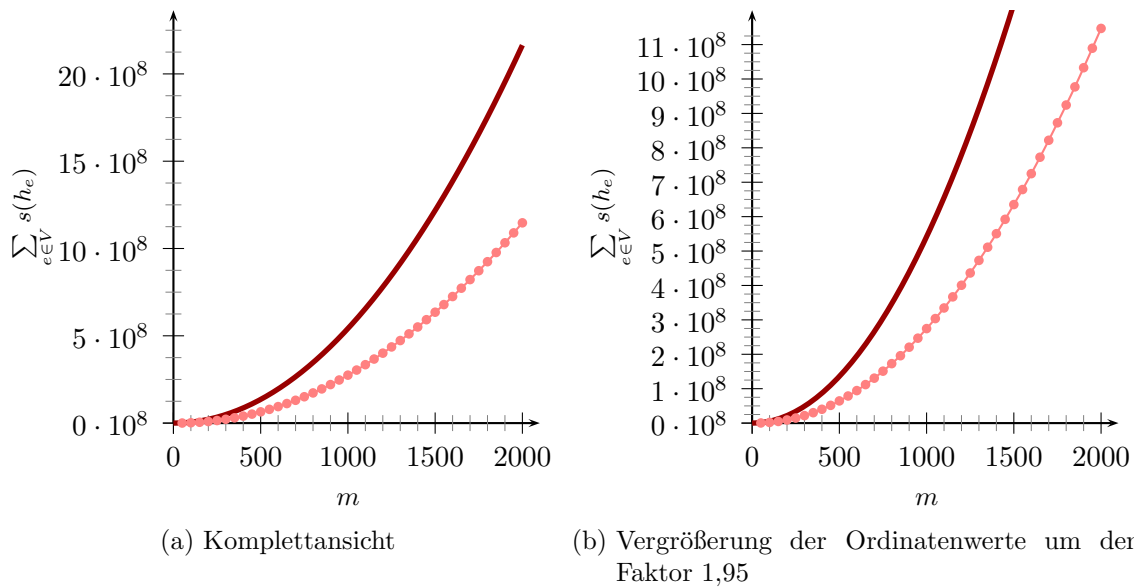


Abbildung B.5: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und  $n = 5$  unter Variation von  $m$

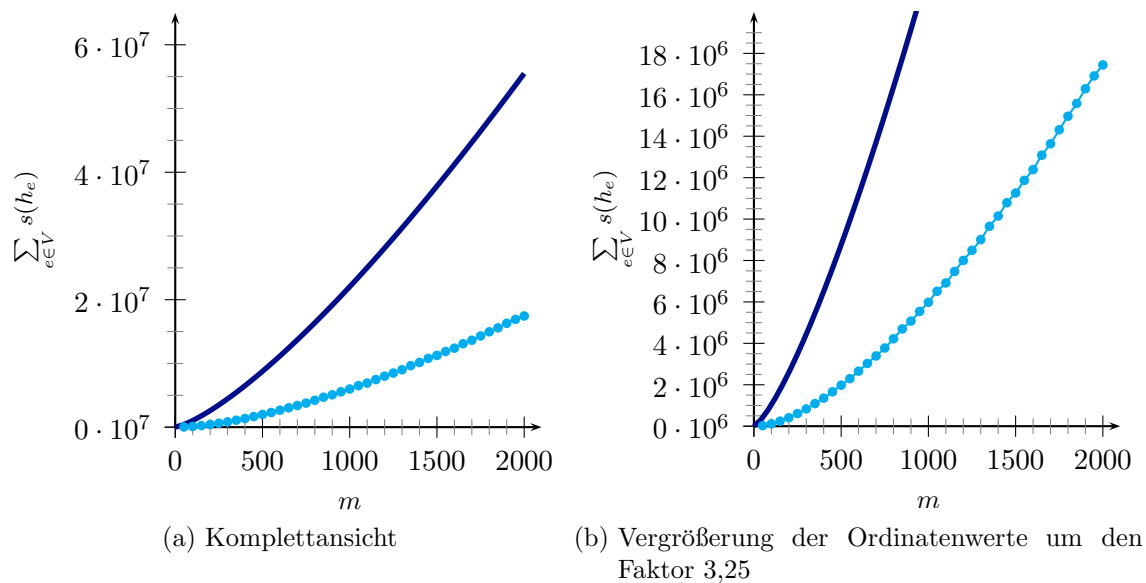


Abbildung B.6: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und  $n = 5$  unter Variation von  $m$

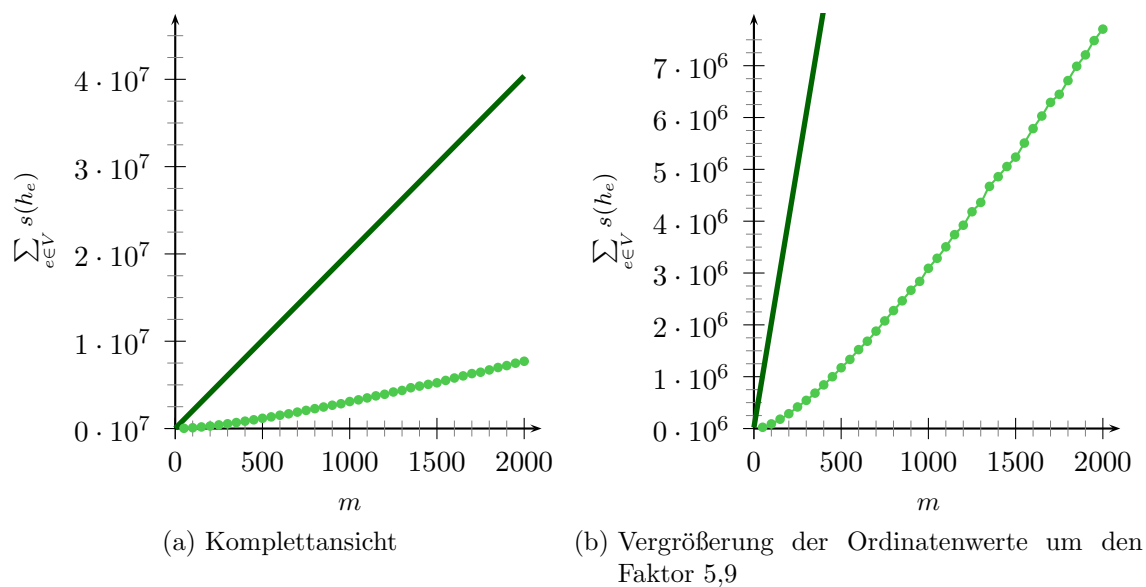
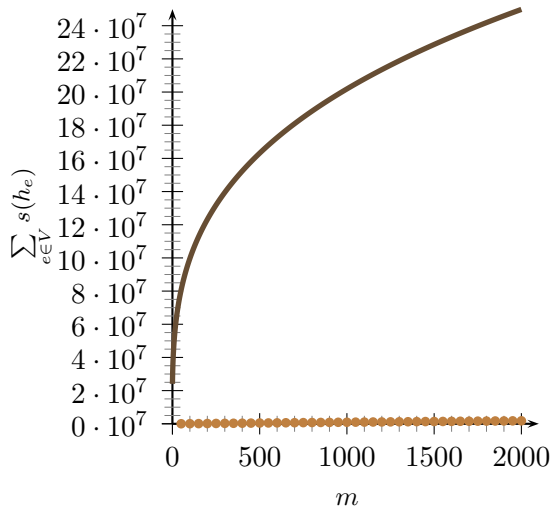
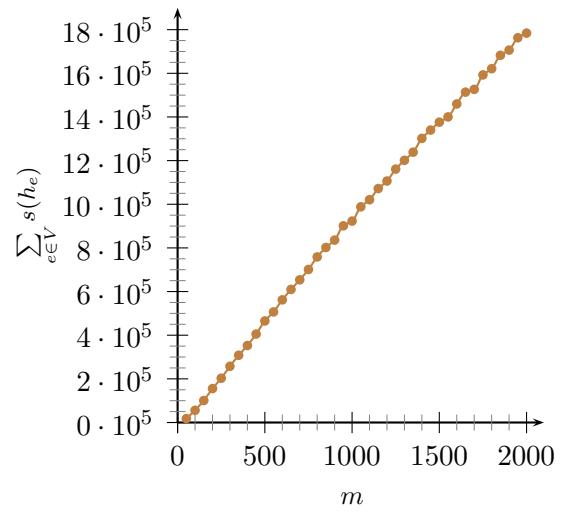


Abbildung B.7: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und  $n = 5$  unter Variation von  $m$

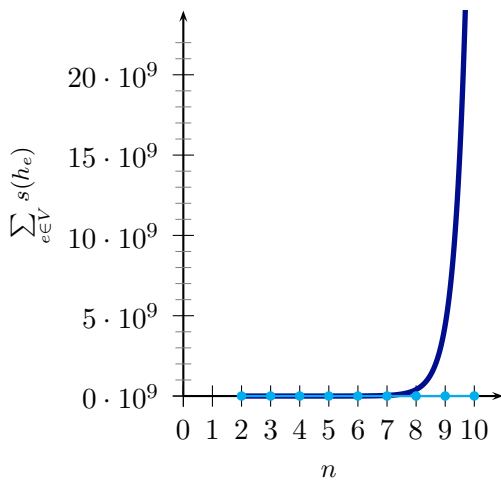


(a) Ansicht mit Obergrenze

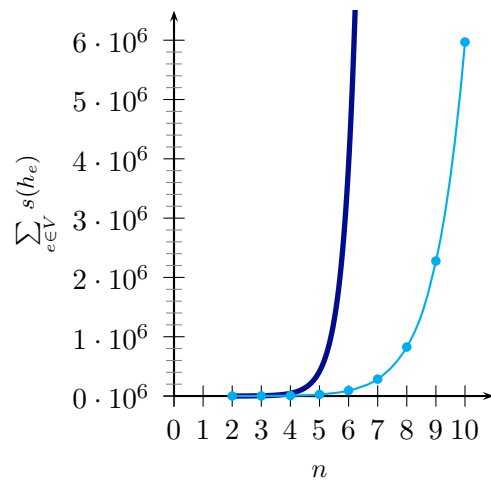


(b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 131,6

Abbildung B.8: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und  $n = 5$  unter Variation von  $m$

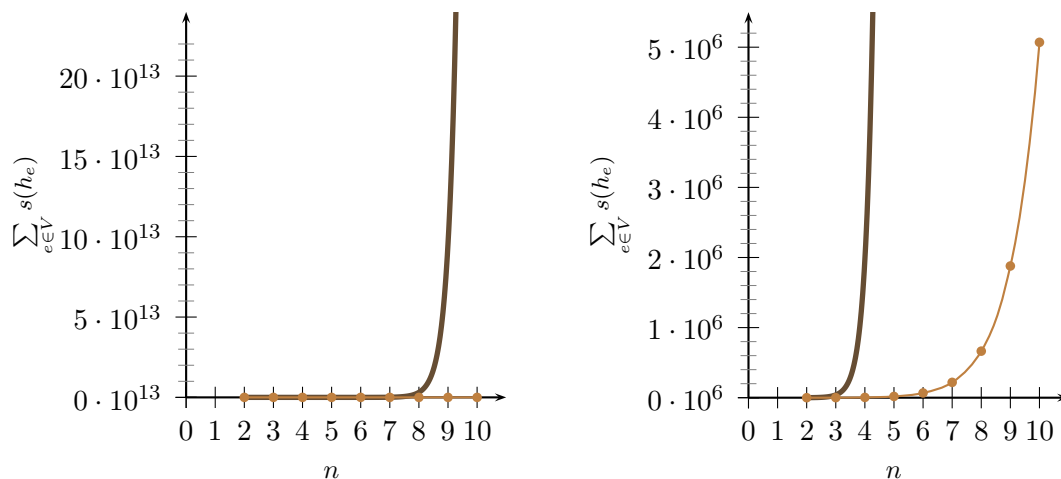


(a) Ansicht mit Obergrenze



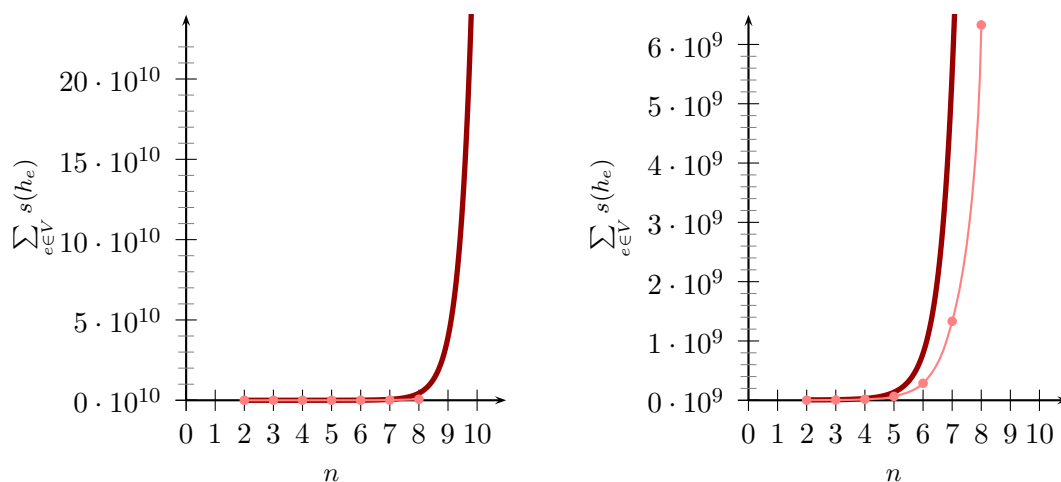
(b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 3.690

Abbildung B.9: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  unter Verteilungsparameter  $k = 0$  und  $m = 50$  unter Variation von  $n$



(a) Ansicht mit Obergrenze (b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 43.666.000

Abbildung B.10: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  unter Verteilungsparameter  $k = 10$  und  $m = 50$  unter Variation von  $n$



(a) Ansicht mit Obergrenze (b) Vergrößerung der Ordinatenwerte um den Faktor 36,9

Abbildung B.11: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und  $m = 500$  unter Variation von  $n$

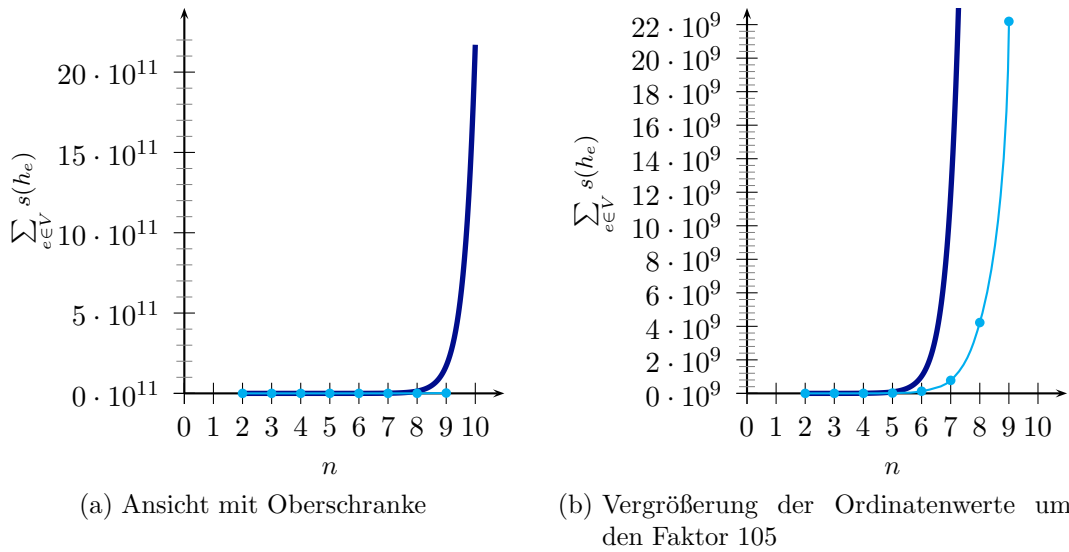


Abbildung B.12: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und  $m = 500$  unter Variation von  $n$

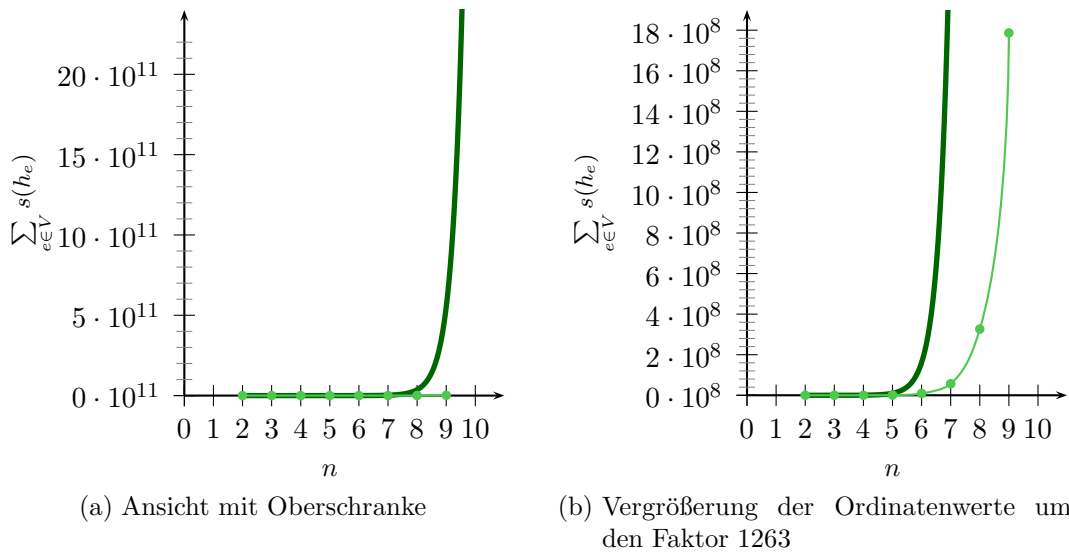


Abbildung B.13: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und  $m = 500$  unter Variation von  $n$

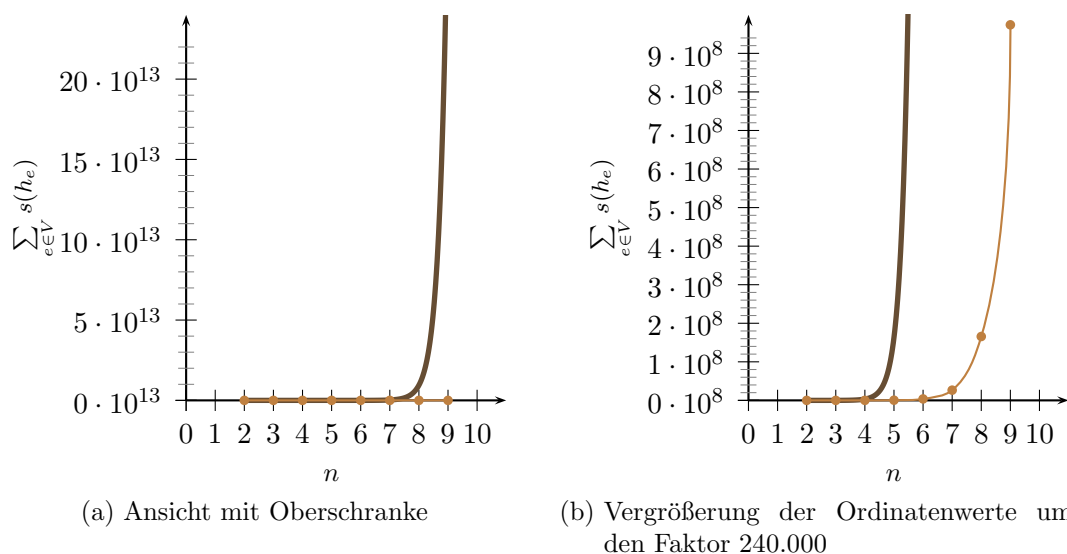


Abbildung B.14: Mittelwert für  $\sum_{e \in V} s(h_e)$  unter Verteilungsparameter  $k = 10$  und  $m = 500$  unter Variation von  $n$

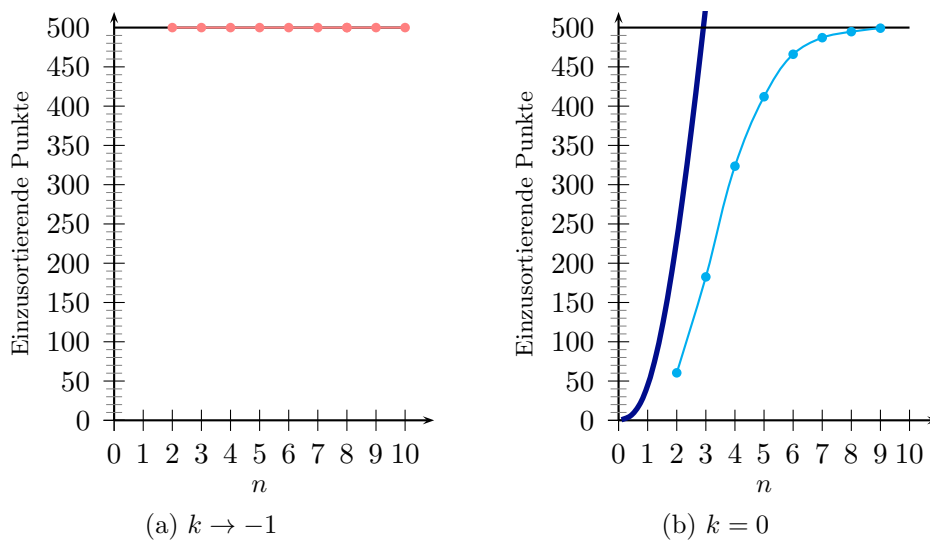
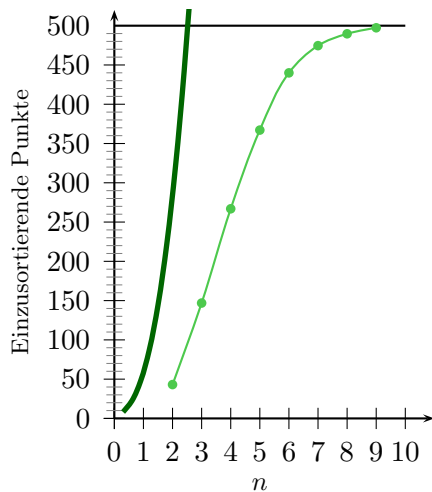
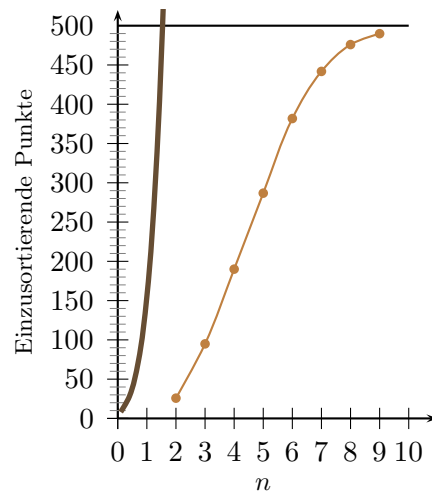


Abbildung B.15: Durchschnittliche Anzahl einzusortierender Punkte für  $m = 500$  unter Variation des Parameters  $n$



(c)  $k = 1$

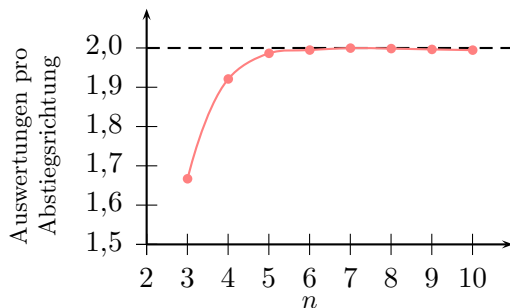


(d)  $k = 10$

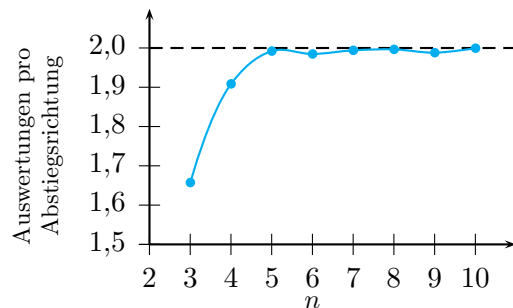
Abbildung B.15 (Fortsetzung): Durchschnittliche Anzahl einzusortierender Punkte für  $m = 500$  unter Variation des Parameters  $n$

### B.3 Ergänzungen zu Kapitel 3

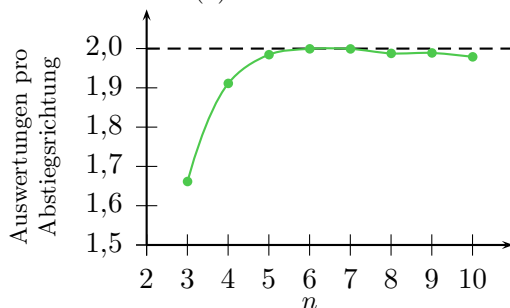
Es folgen weitere Graphiken zur empirischen Analyse des Verfahrens von Avis und Fukuda.



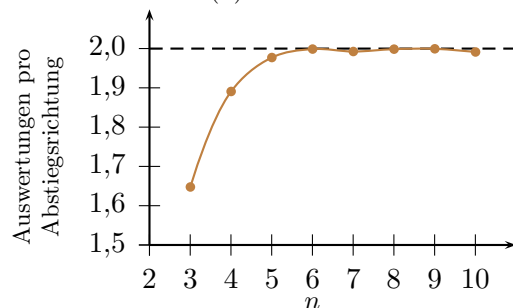
(a)  $k \rightarrow -1$



(b)  $k = 0$



(c)  $k = 1$



(d)  $k = 10$

Abbildung B.16: Mittelwert der Zahl an Auswertungen in einer Zielfunktionsspalte pro Abtriegsrichtung bei Variation der Dimension  $n$  unter  $m = 500$

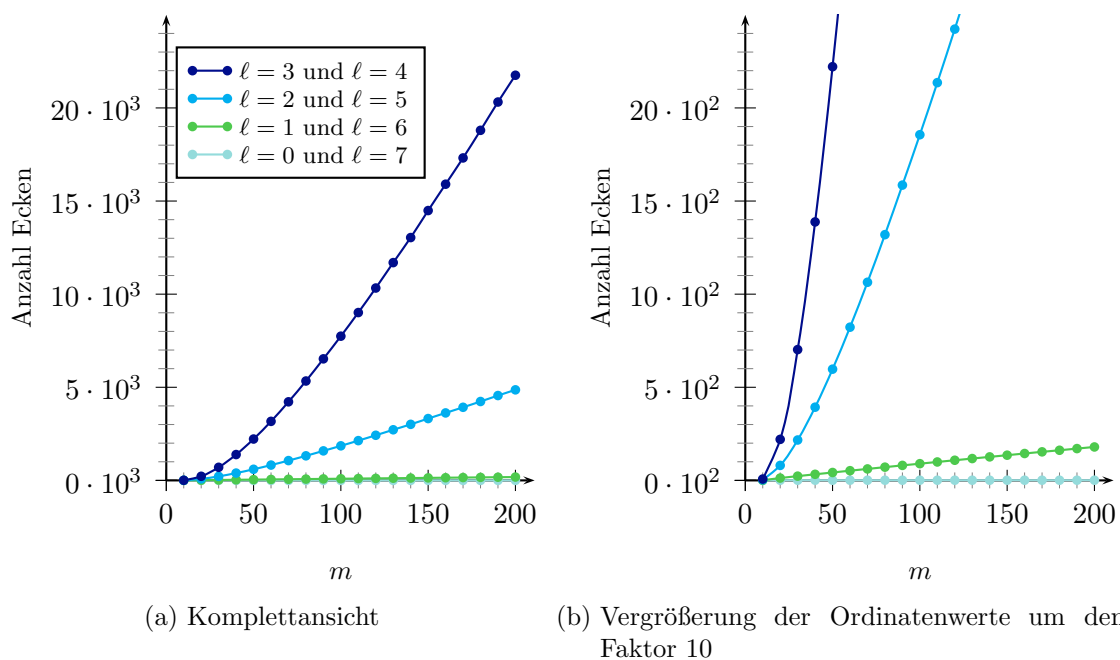


Abbildung B.17: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Dimension  $n = 7$  und Verteilungsparameter  $k = 0$  unter Variation der Restriktionszahl  $m$

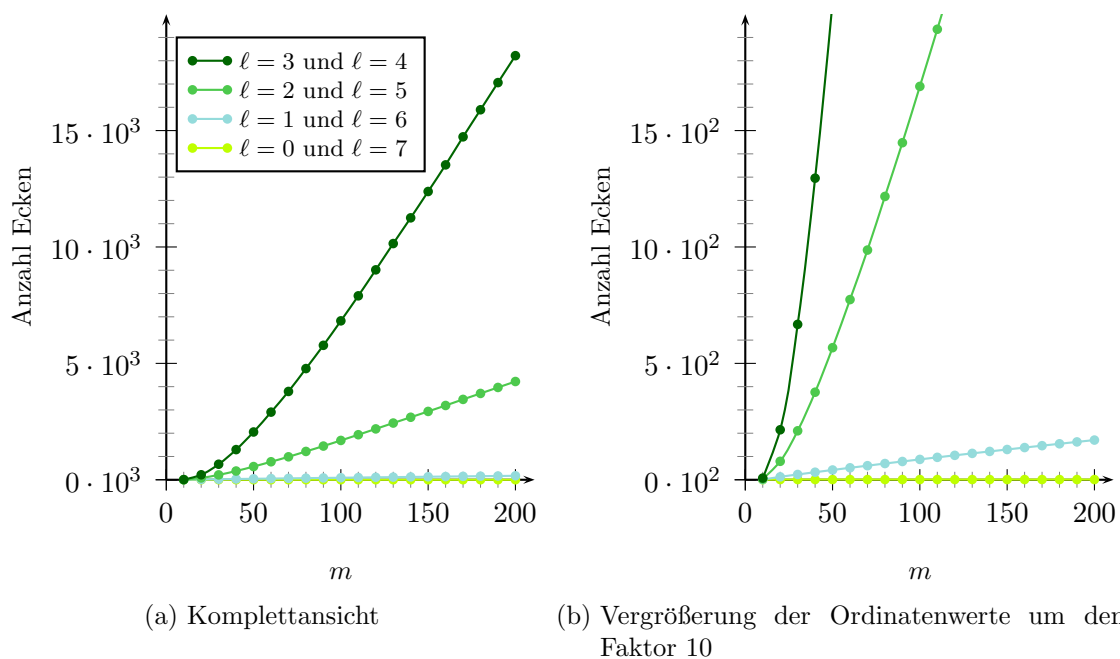


Abbildung B.18: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Dimension  $n = 7$  und Verteilungsparameter  $k = 1$  unter Variation der Restriktionszahl  $m$



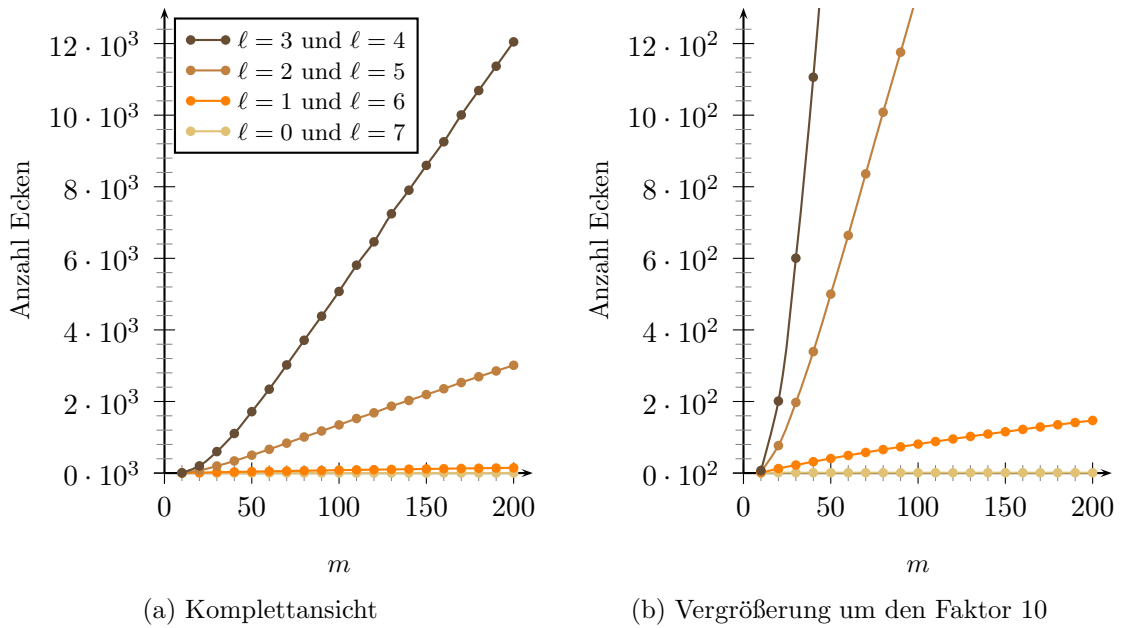


Abbildung B.19: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Dimension  $n = 7$  und Verteilungsparameter  $k = 10$  unter Variation der Restriktionszahl  $m$

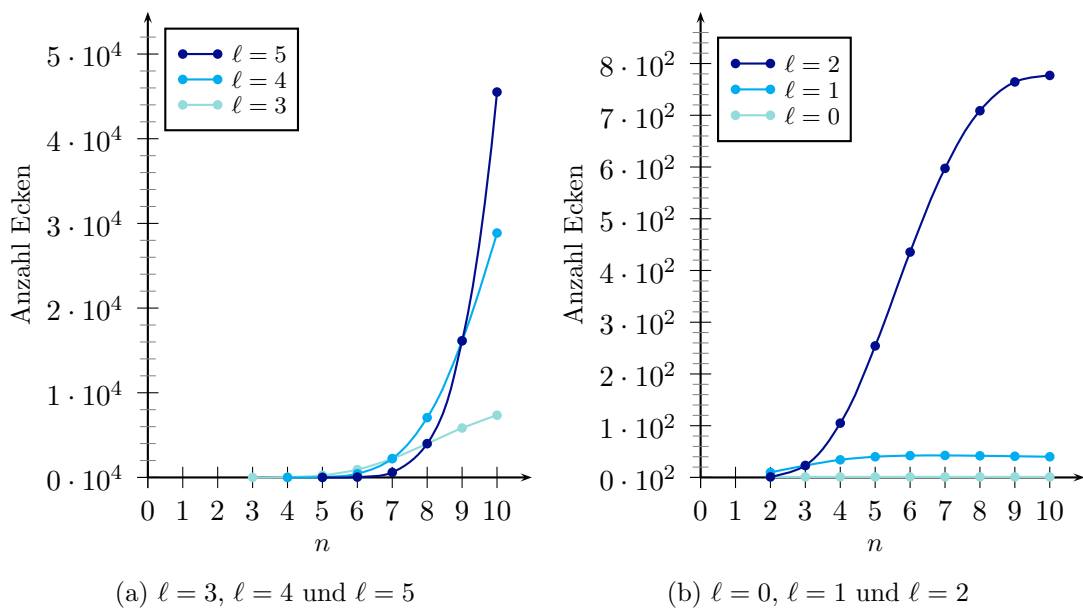


Abbildung B.20: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl  $m = 50$  und Verteilungsparameter  $k = 0$  unter Variation der Dimension  $n$

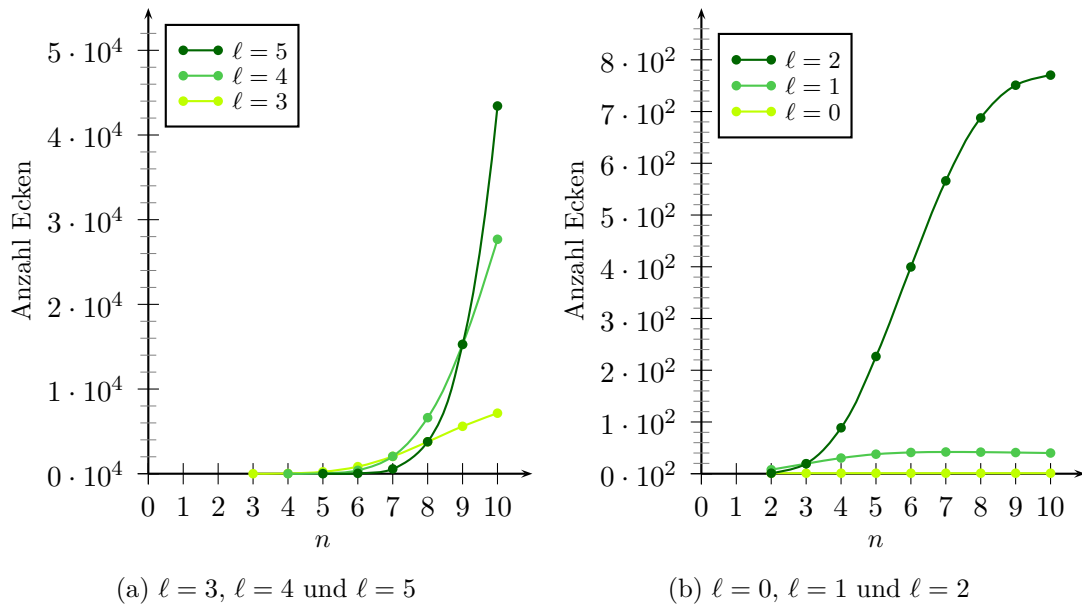


Abbildung B.21: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl  $m = 50$  und Verteilungsparameter  $k = 1$  unter Variation der Dimension  $n$

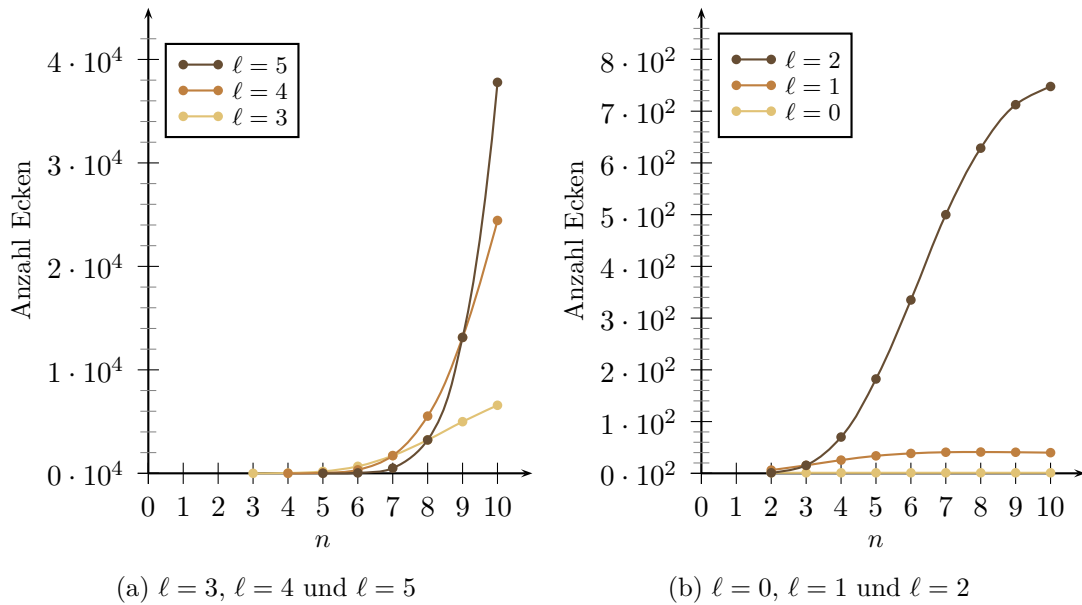


Abbildung B.22: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  aufsteigenden Richtungen bei Restriktionszahl  $m = 50$  und Verteilungsparameter  $k = 10$  unter Variation der Dimension  $n$

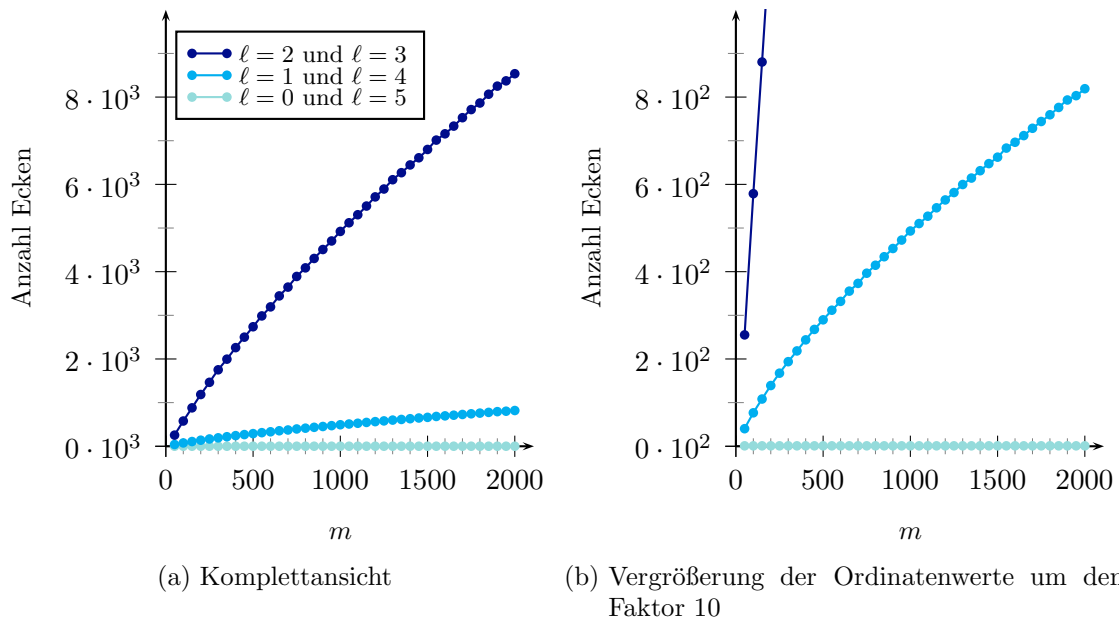


Abbildung B.23: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $n = 5$  und  $k = 0$  unter Variation des Parameters  $m$

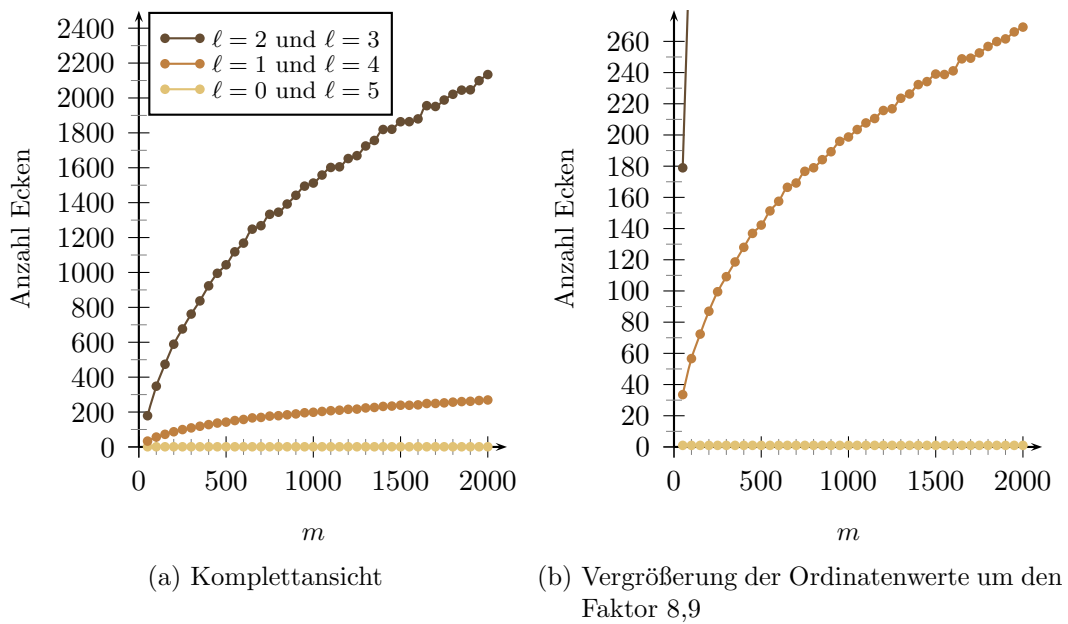


Abbildung B.24: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $n = 5$  und  $k = 10$  unter Variation des Parameters  $m$

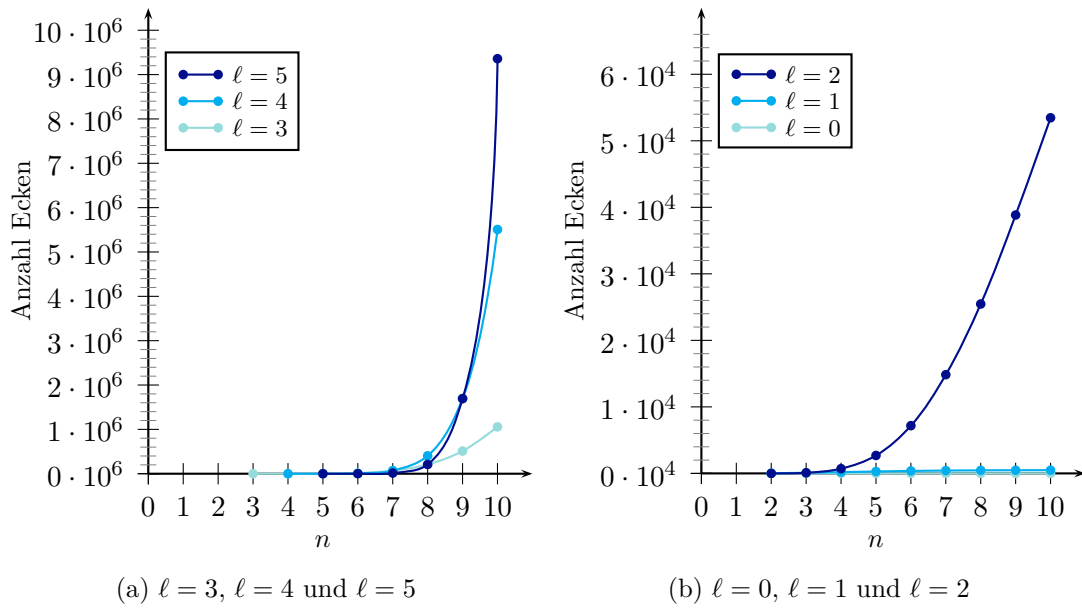


Abbildung B.25: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $m = 500$  und  $k = 0$  unter Variation des Parameters  $n$

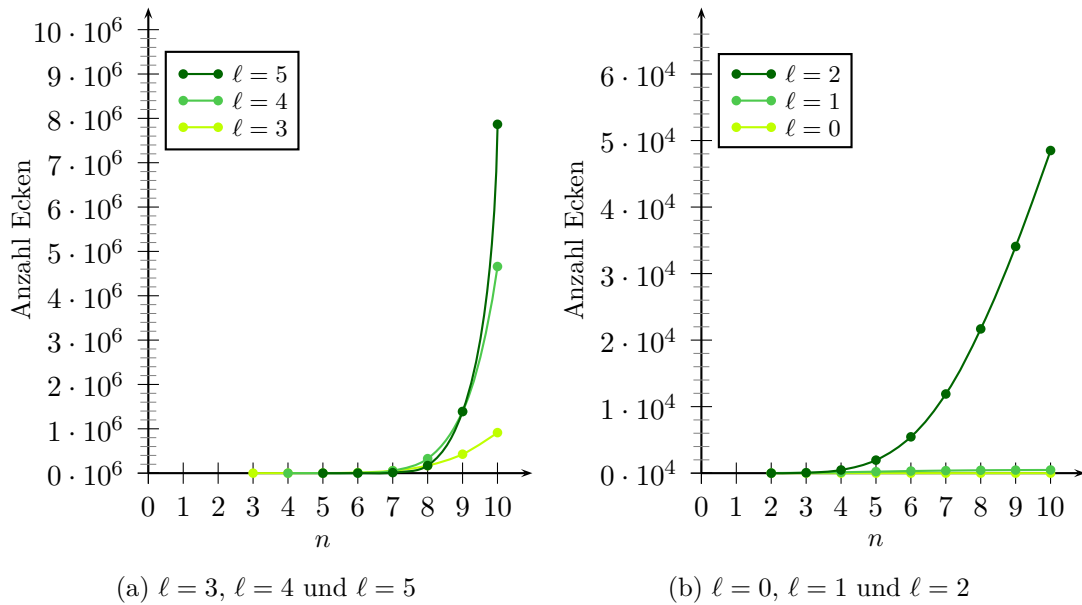


Abbildung B.26: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $m = 500$  und  $k = 1$  unter Variation des Parameters  $n$

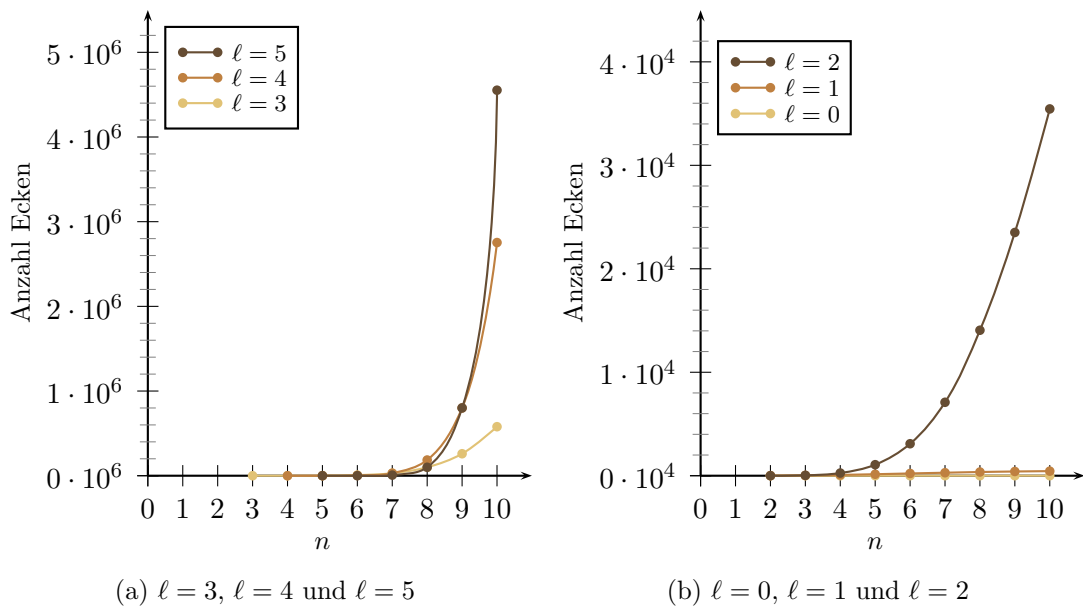
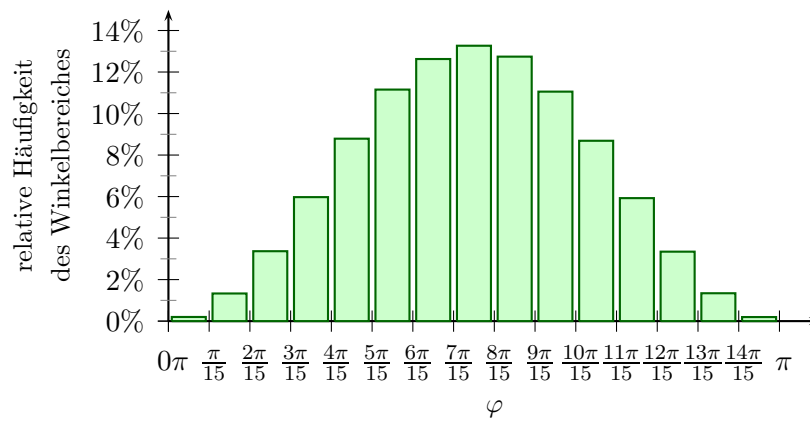
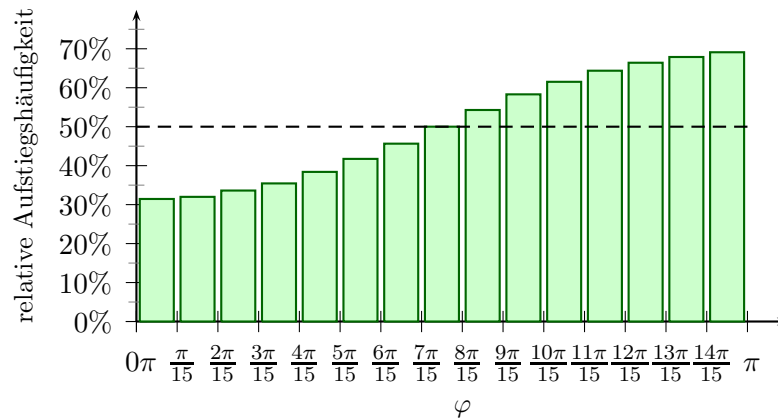


Abbildung B.27: Durchschnittliche Anzahl an Ecken mit  $\ell$  Aufstiegsrichtungen bei  $m = 500$  und  $k = 10$  unter Variation des Parameters  $n$

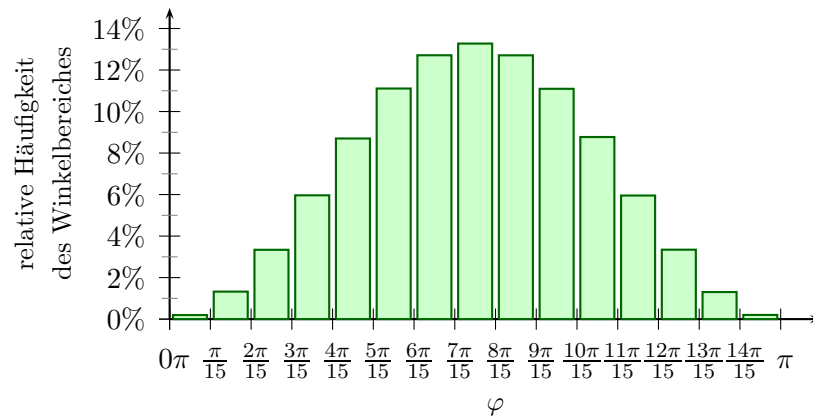


(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich

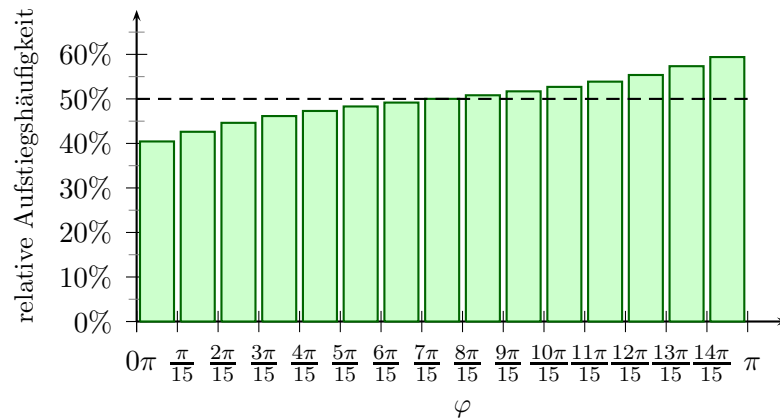


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.28: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegsanten pro Ecke für  $m = 15$ ,  $n = 5$  und  $k = 1$

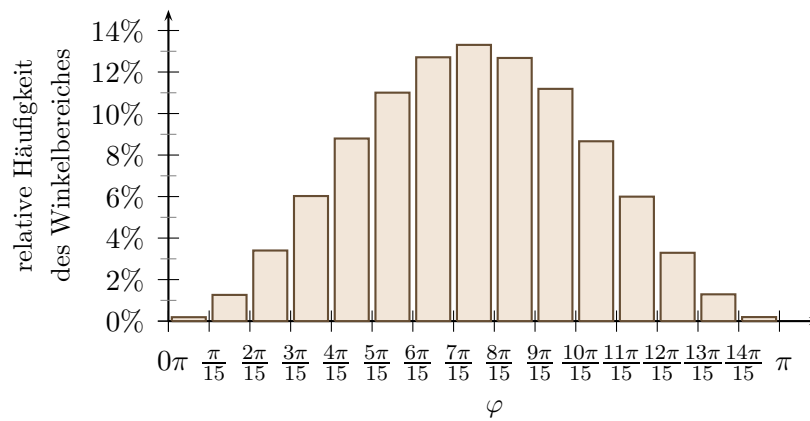


(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich

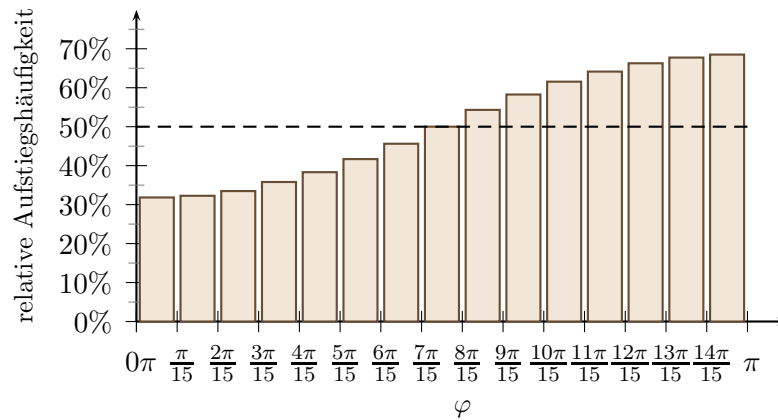


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.29: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegs-kanten pro Ecke für  $m = 2000$ ,  $n = 5$  und  $k = 1$



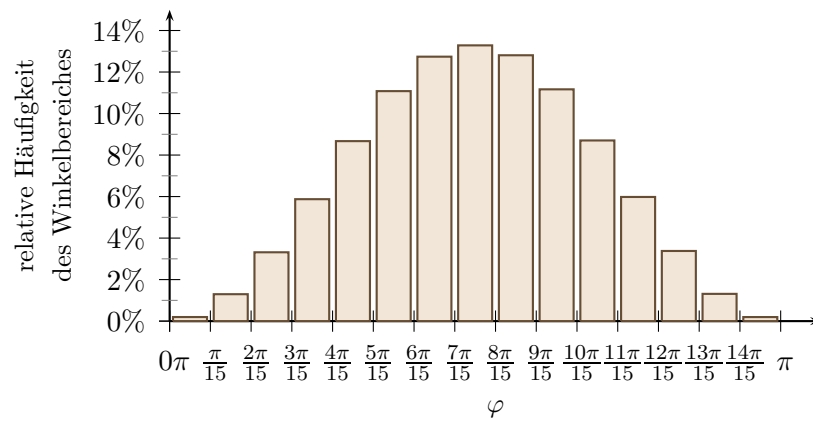
(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich



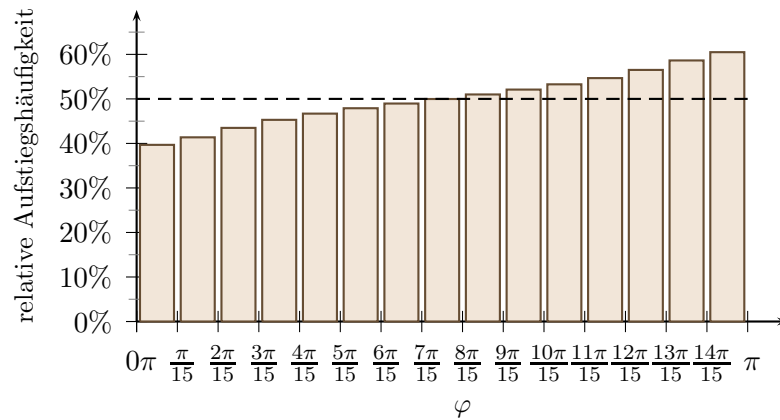
(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.30: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegsanten pro Ecke für  $m = 15$ ,  $n = 5$  und  $k = 10$



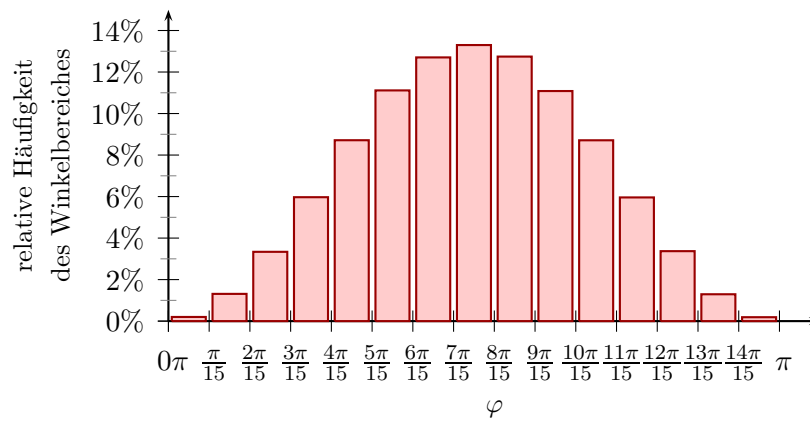


(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich

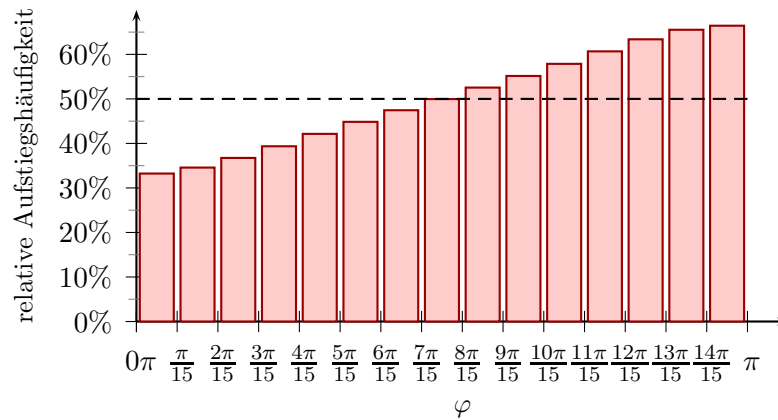


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.31: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für  $m = 2000$ ,  $n = 5$  und  $k = 10$

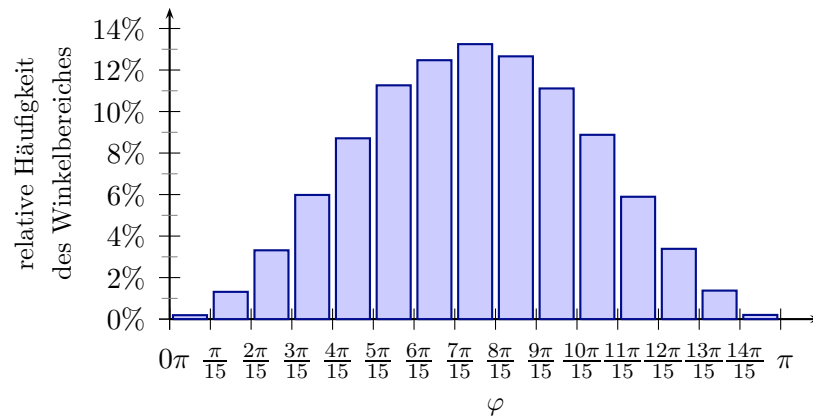


(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich

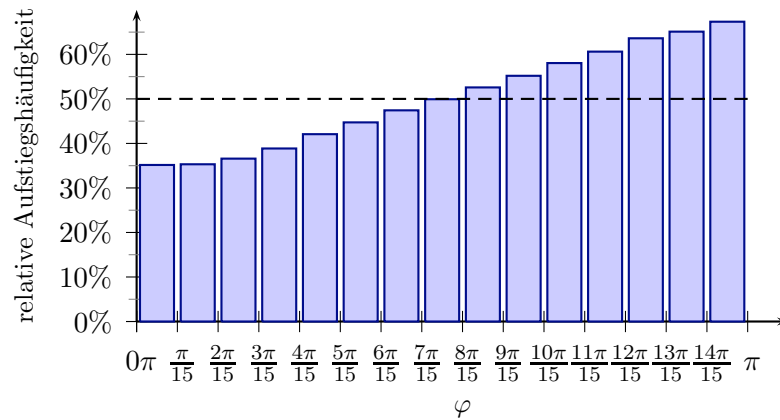


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.32: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für  $m = 30$ ,  $n = 5$  und  $k \rightarrow -1$

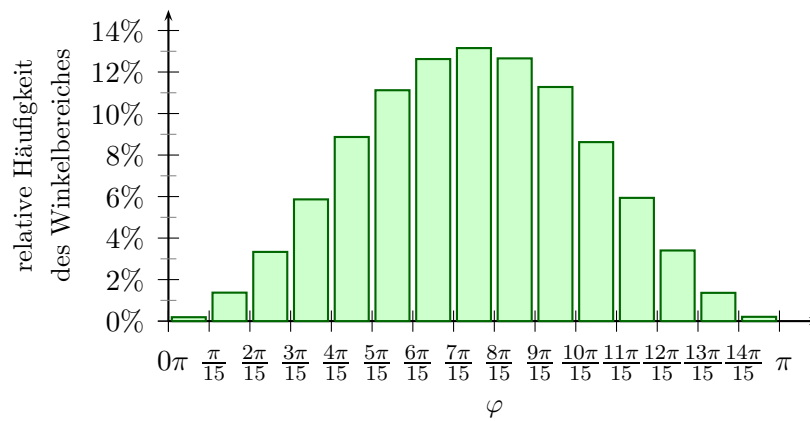


(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich

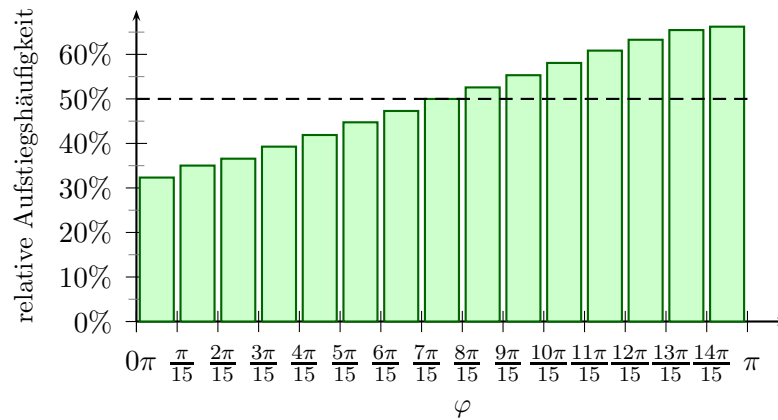


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.33: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegs-kanten pro Ecke für  $m = 30$ ,  $n = 5$  und  $k = 0$

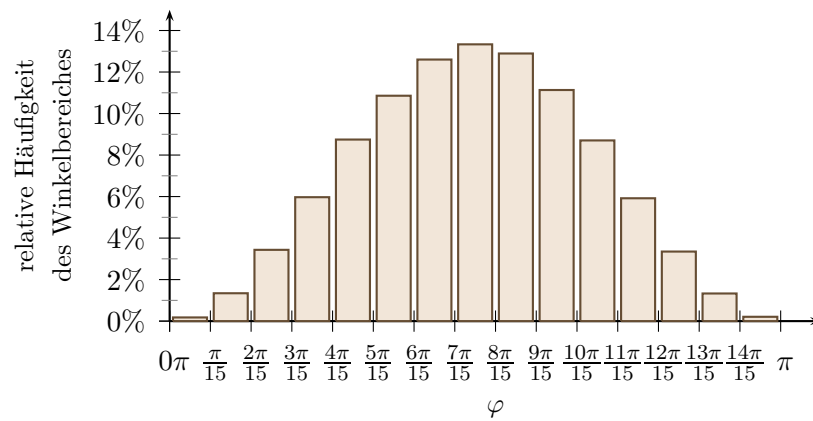


(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich

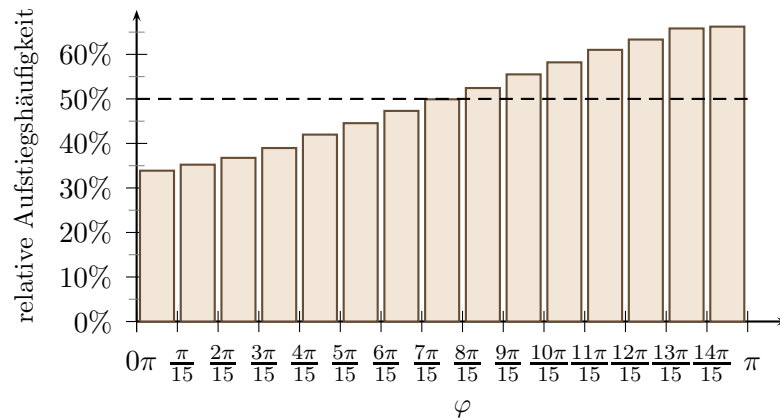


(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.34: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegskanten pro Ecke für  $m = 30$ ,  $n = 5$  und  $k = 1$



(a) relative Häufigkeit der Eckenzahl im Winkelbereich



(b) Relative Häufigkeit der Aufstiegsrichtungen an einer Ecke in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$

Abbildung B.35: Nach Winkelbereichen sortierte Verteilung der Ecken und der relativen Häufigkeit von Aufstiegs-kanten pro Ecke für  $m = 30$ ,  $n = 5$  und  $k = 10$

## B.4 Ergänzungen zu Kapitel 4

In diesen Abschnitt wurden Abbildungen zur empirischen Analyse des Shelling-Algorithmus ausgelagert.

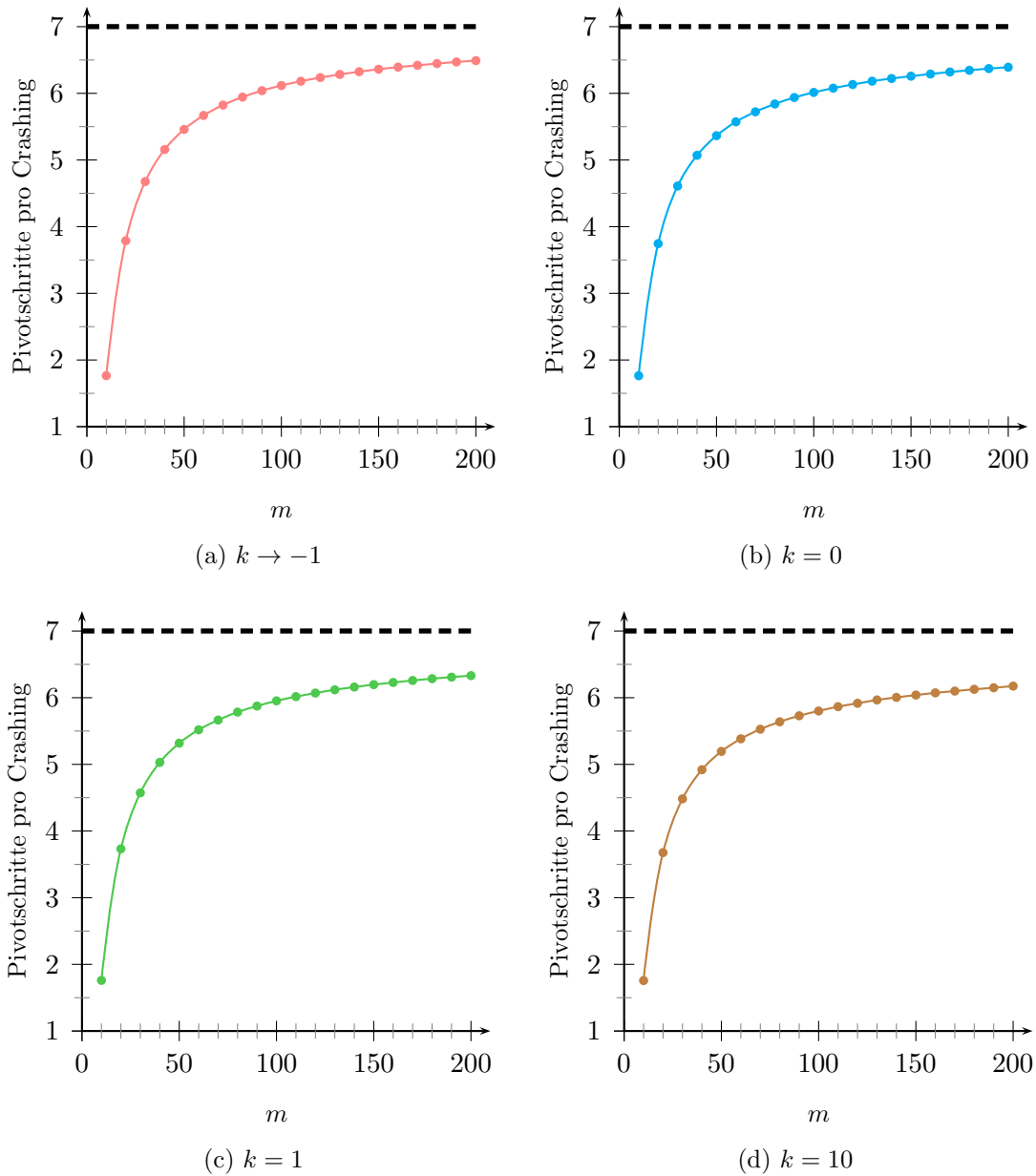


Abbildung B.36: Einfluss der Anzahl an Restriktionen auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang unter der Dimension  $n = 7$

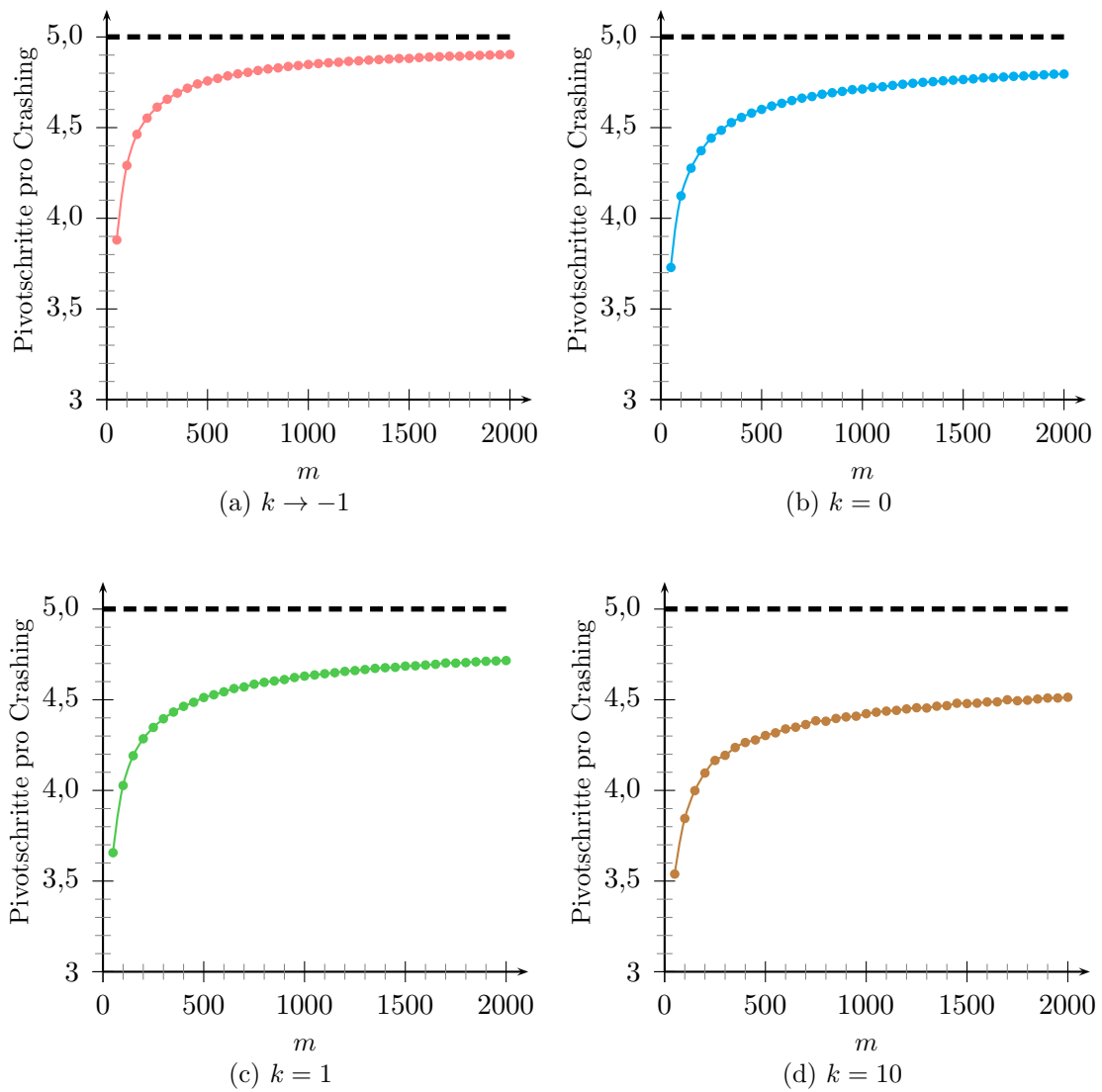
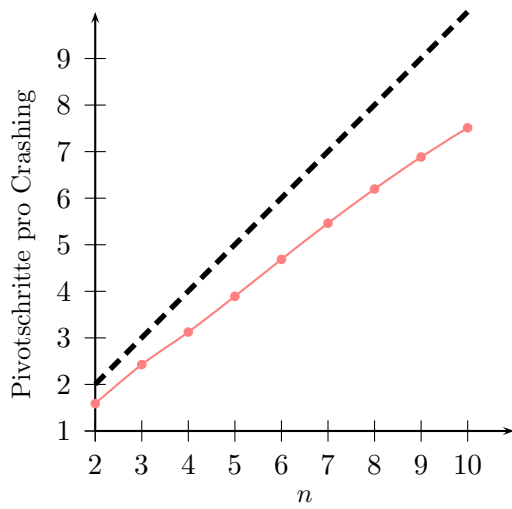
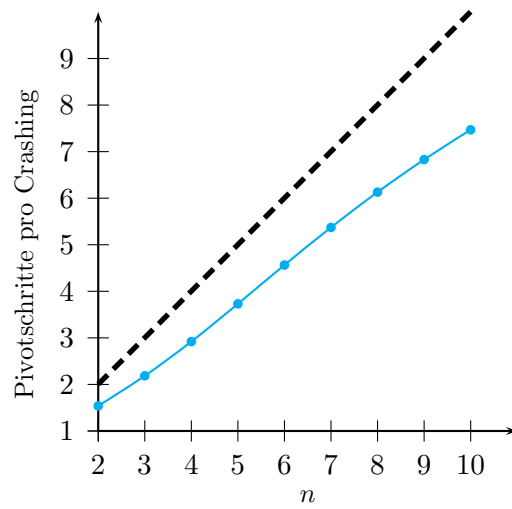


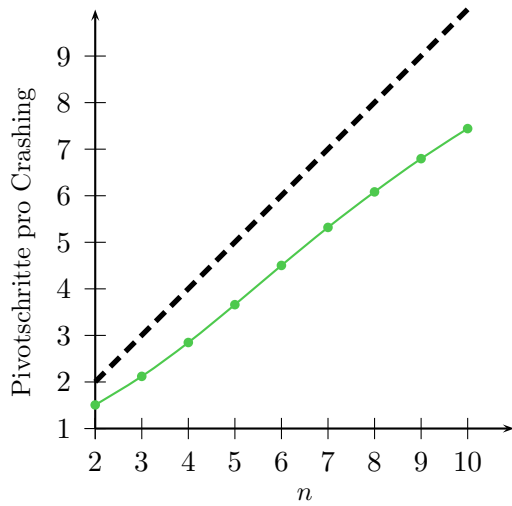
Abbildung B.37: Einfluss der Anzahl an Restriktionen auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang unter der Dimension  $n = 5$



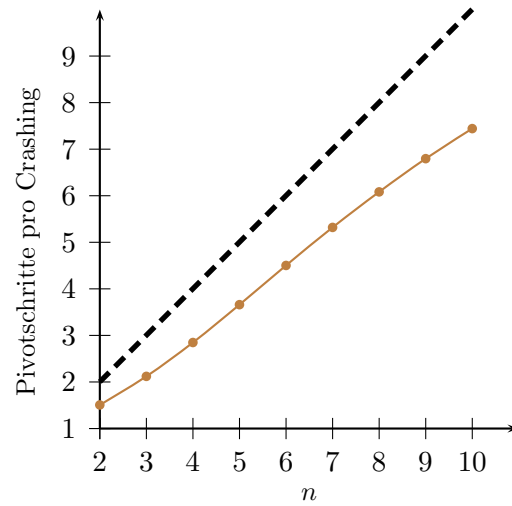
(a)  $k \rightarrow -1$



(b)  $k = 0$



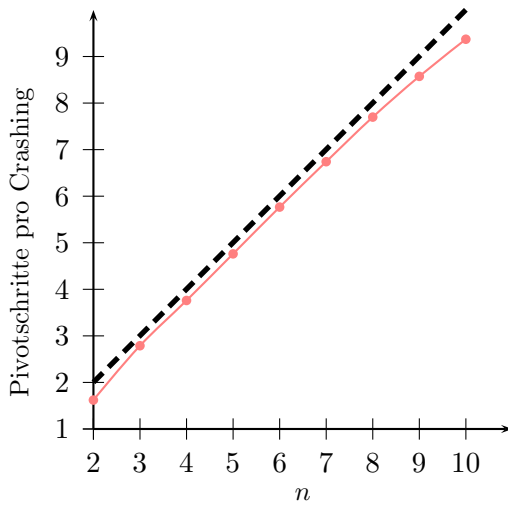
(c)  $k = 1$



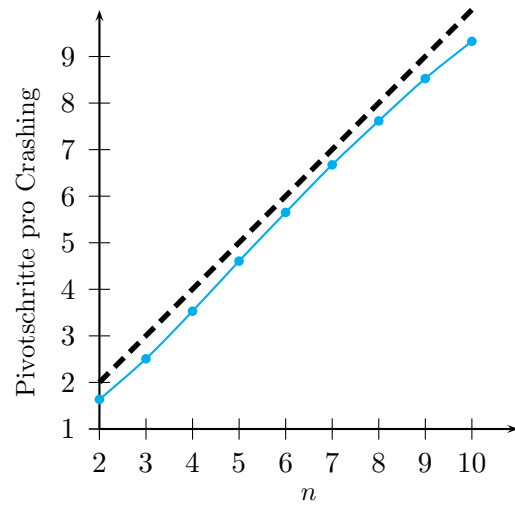
(d)  $k = 10$

Abbildung B.38: Einfluss der Dimension auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang bei  $m = 50$

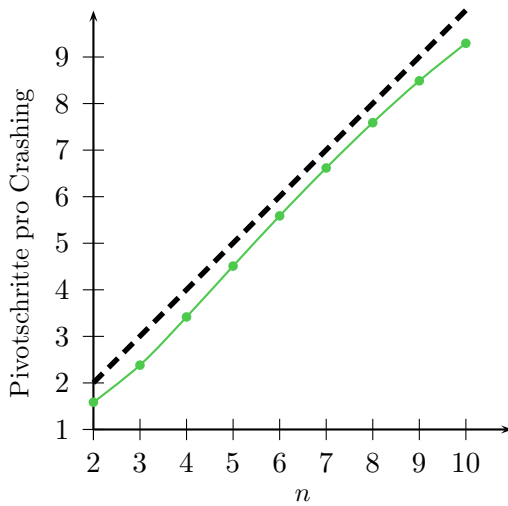




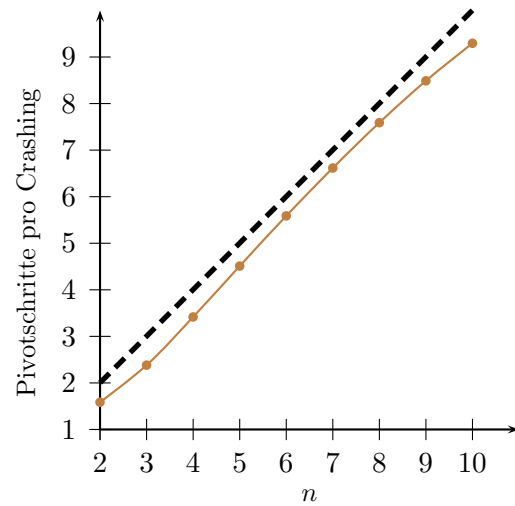
(a)  $k \rightarrow -1$



(b)  $k = 0$

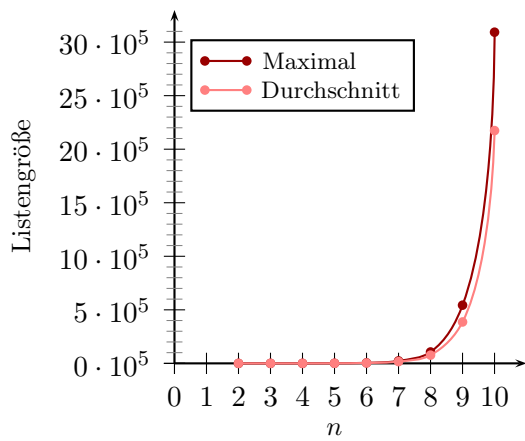


(c)  $k = 1$

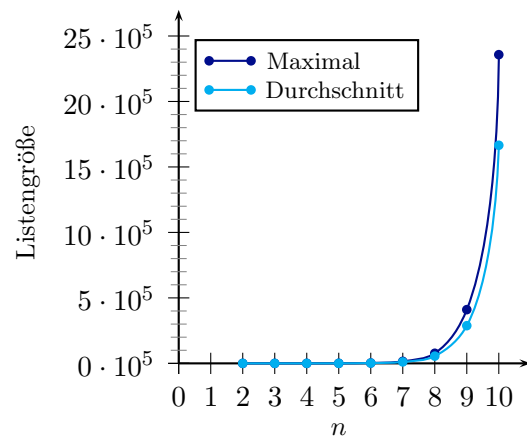


(d)  $k = 10$

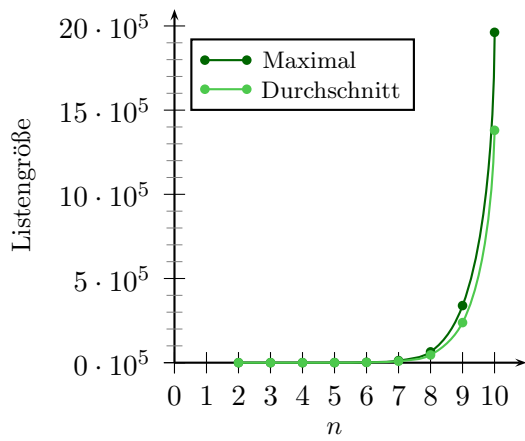
Abbildung B.39: Einfluss der Dimension auf die durchschnittliche Schrittzahl pro Crashing-Vorgang bei  $m = 500$



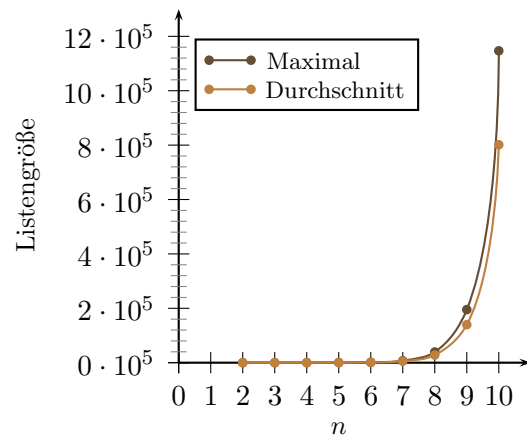
(a)  $k \rightarrow -1$



(b)  $k = 0$



(c)  $k = 1$



(d)  $k = 10$

Abbildung B.40: Maximale und durchschnittliche Listengröße bei  $m = 500$

## B.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

Es folgen weitere Graphiken zur empirischen Untersuchung der Anzahl redundanter Restriktionen.

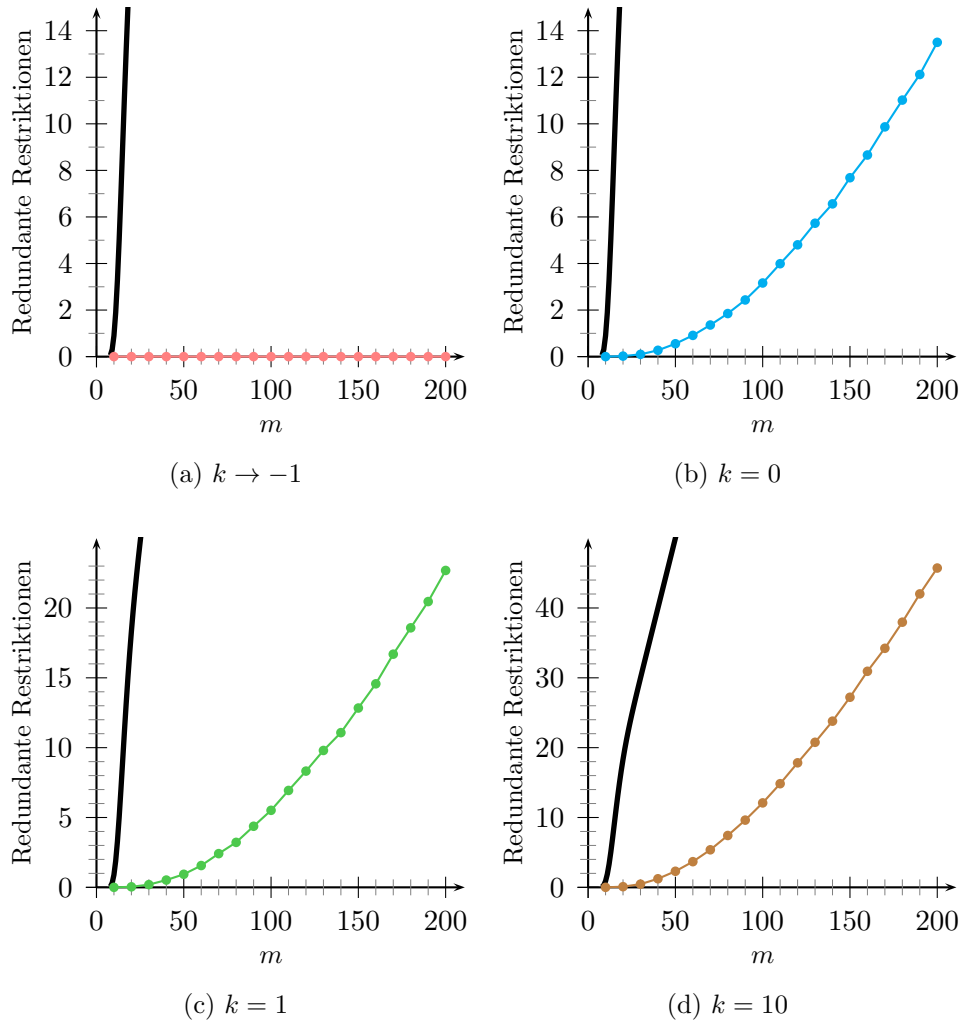


Abbildung B.41: Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei  $n = 7$  unter Variation von  $m$

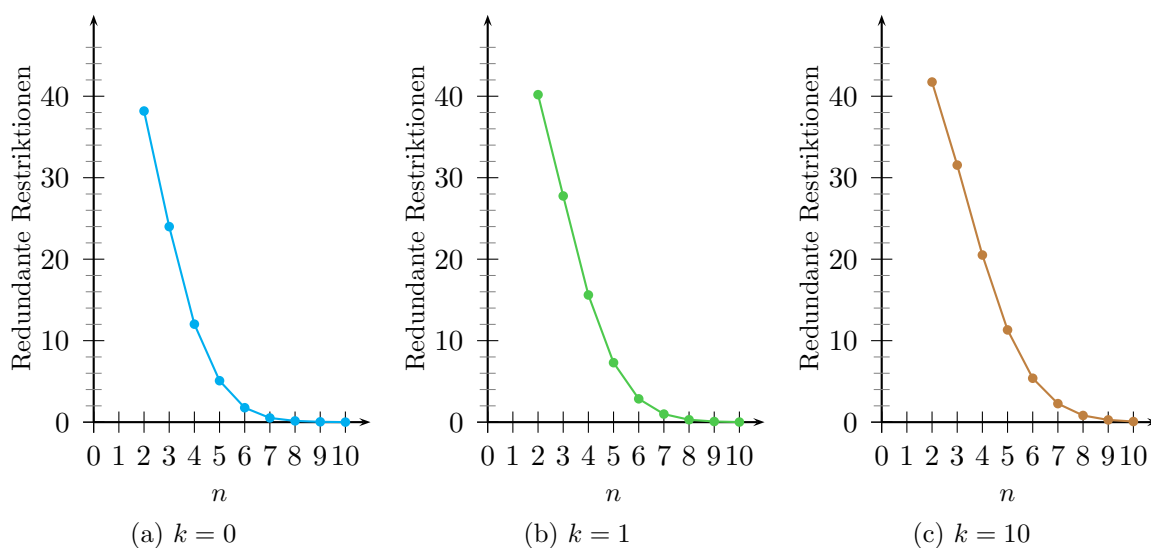


Abbildung B.42: Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei  $m = 50$  unter Variation der Dimension  $n$

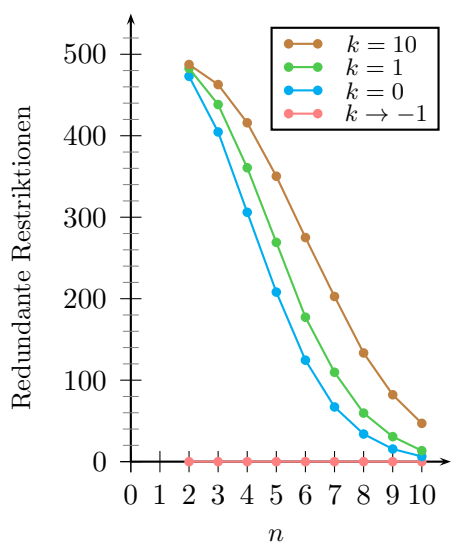


Abbildung B.43: Mittlere Anzahl redundanter Restriktionen bei  $m = 500$

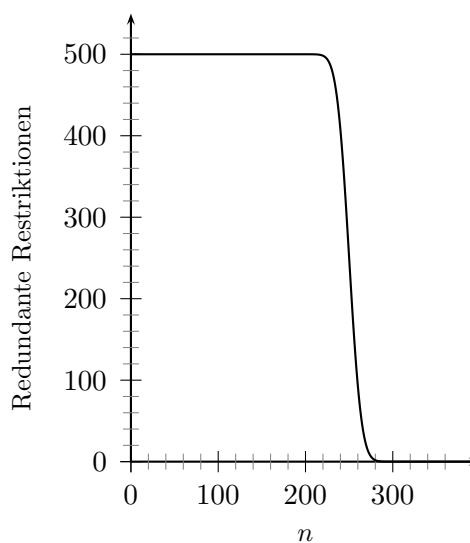


Abbildung B.44: Obergrenze für die Anzahl redundanter Restriktionen bei  $m = 500$

## B.6 Ergänzungen zu Kapitel 6

Im Folgenden erscheinen ergänzende Graphiken zur empirischen Untersuchung der Laufzeit und der Zahl an Backtracking-Schritten.

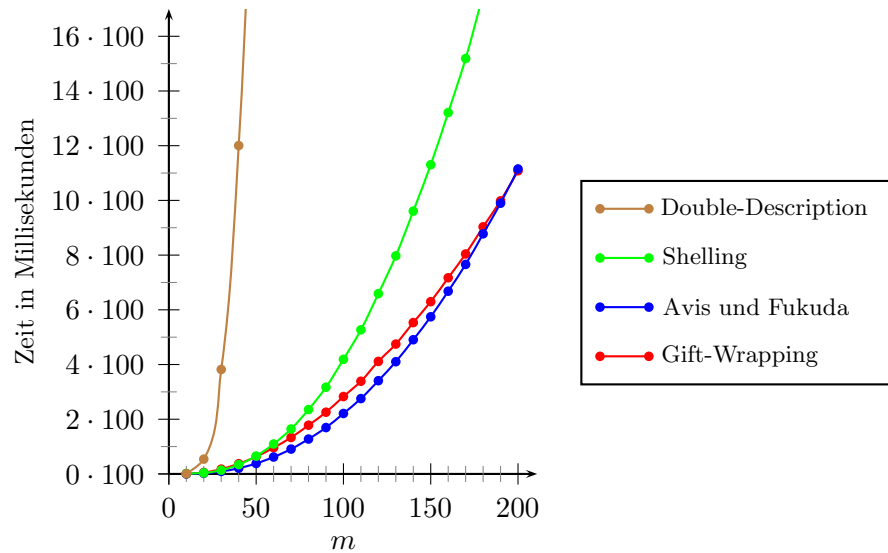


Abbildung B.45: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Dimension  $n = 7$

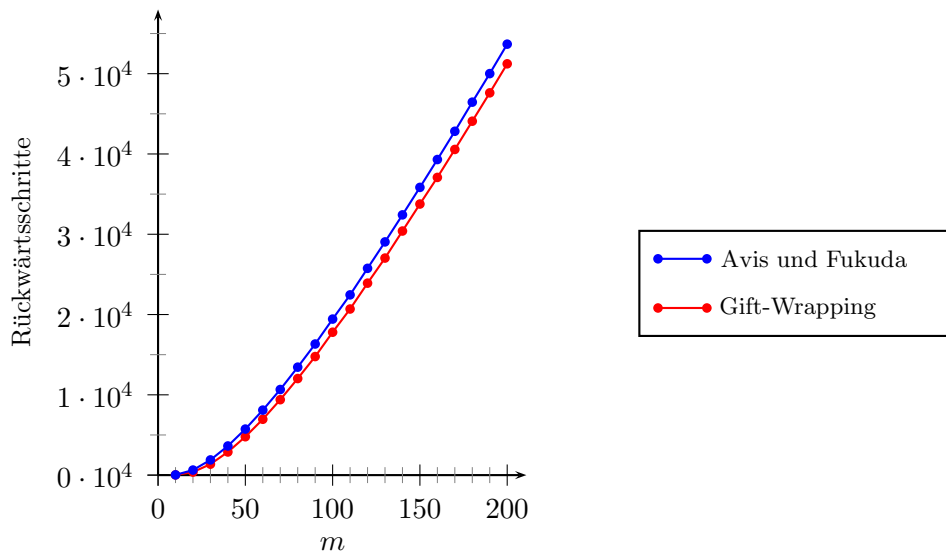


Abbildung B.46: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Dimension  $n = 7$

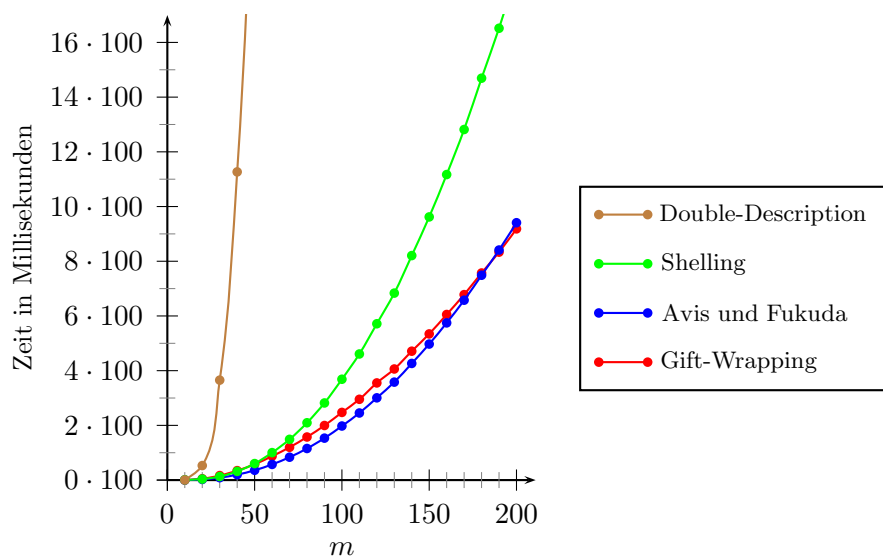


Abbildung B.47: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Dimension  $n = 7$

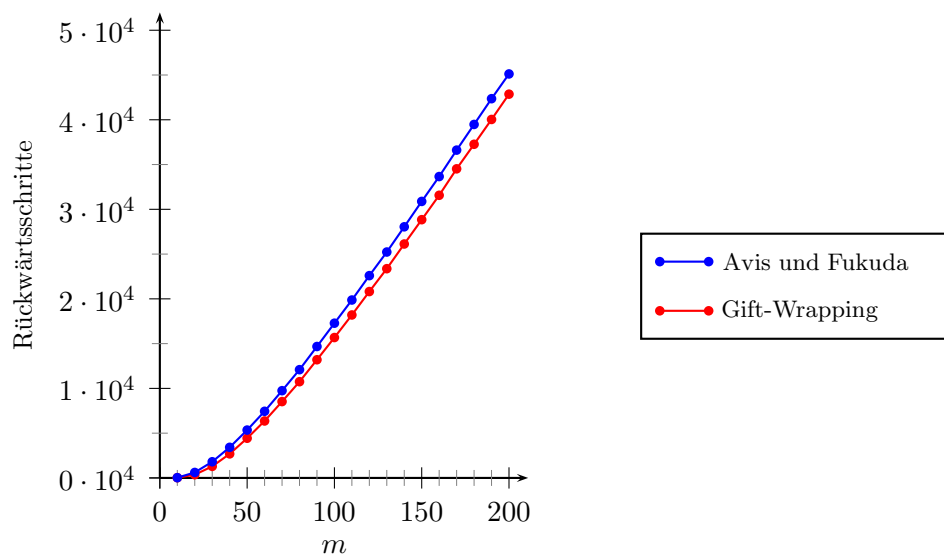


Abbildung B.48: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Dimension  $n = 7$

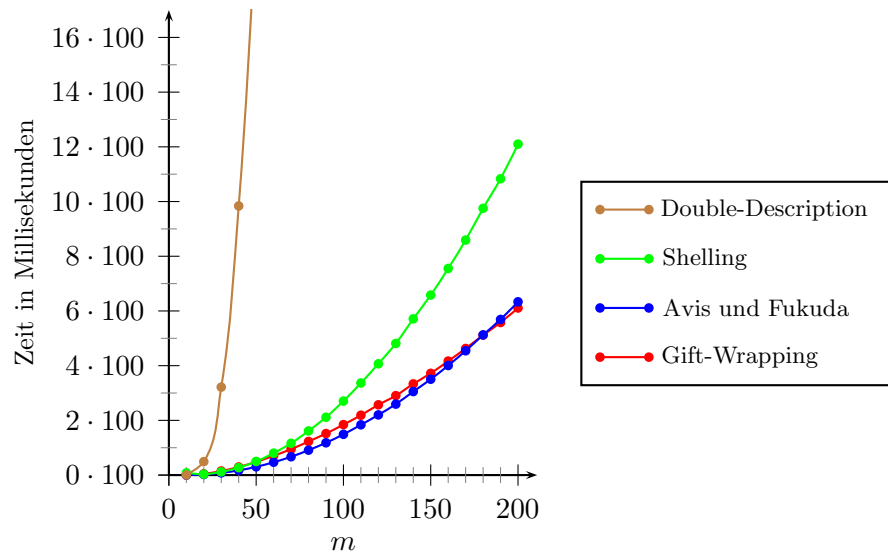


Abbildung B.49: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Dimension  $n = 7$

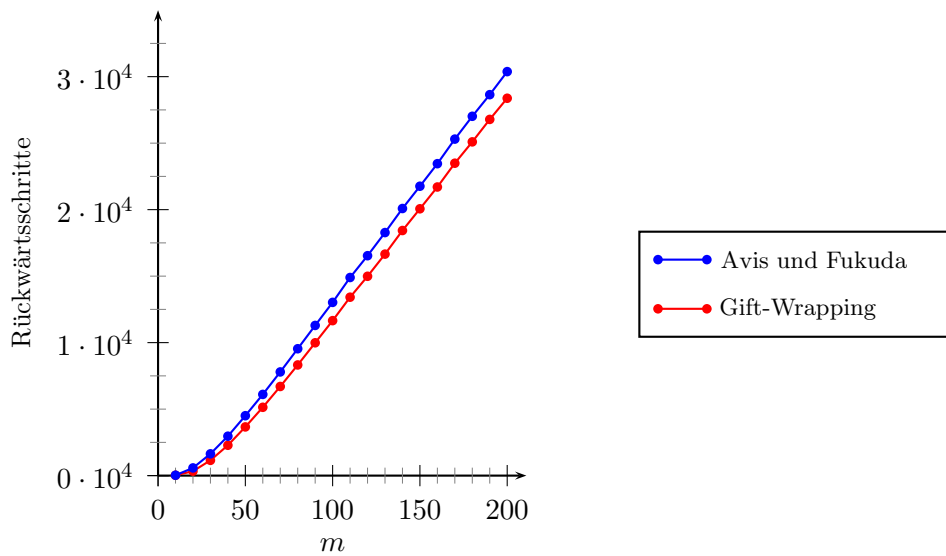


Abbildung B.50: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Dimension  $n = 7$

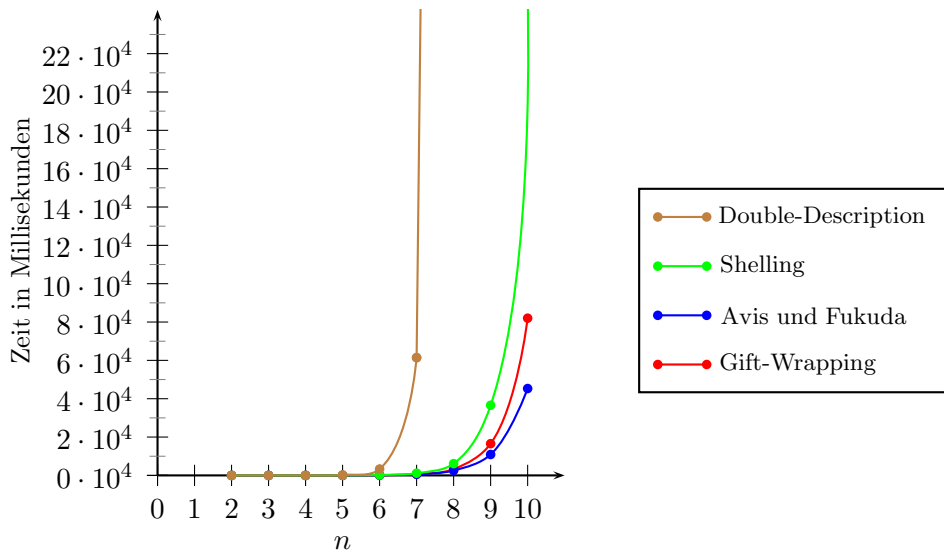


Abbildung B.51: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Restriktionszahl  $m = 150$

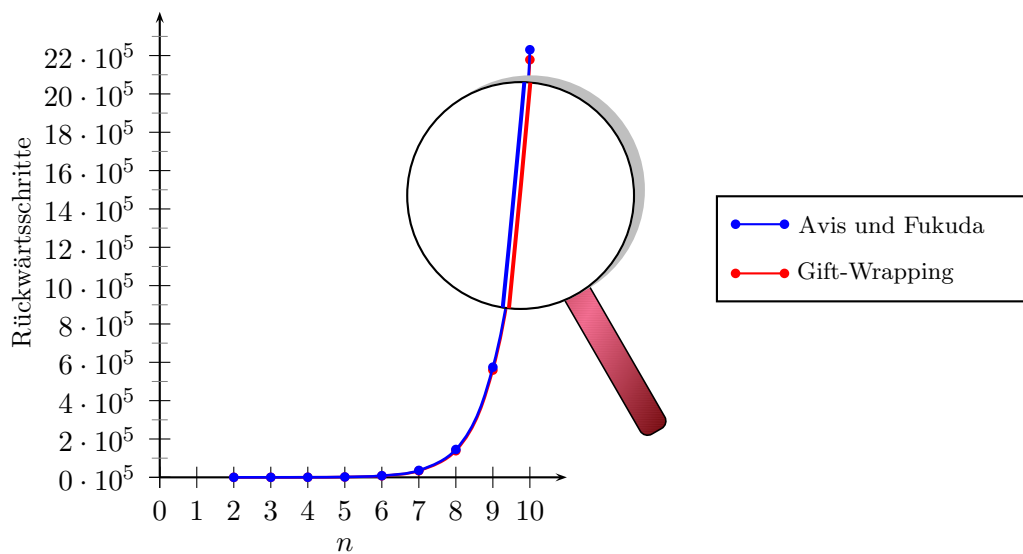


Abbildung B.52: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Restriktionszahl  $m = 150$



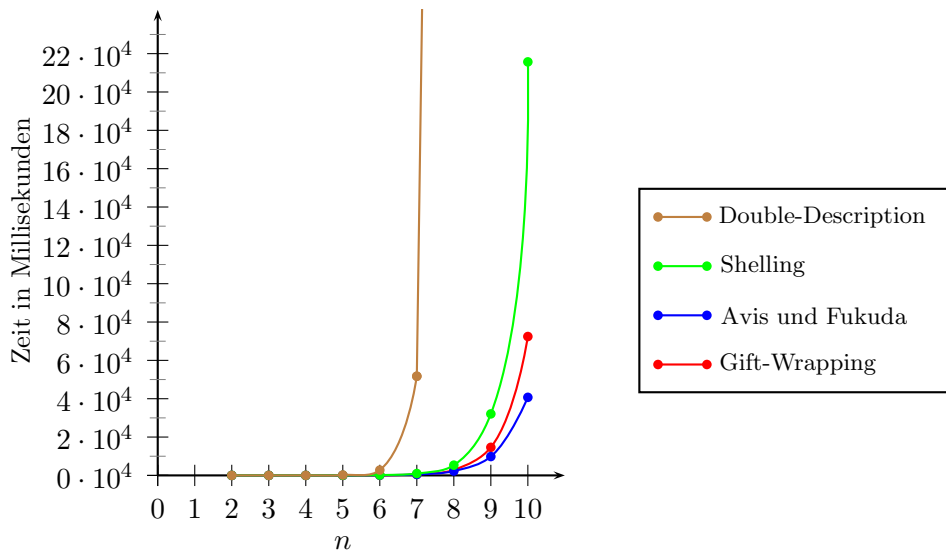


Abbildung B.53: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Restriktionszahl  $m = 150$

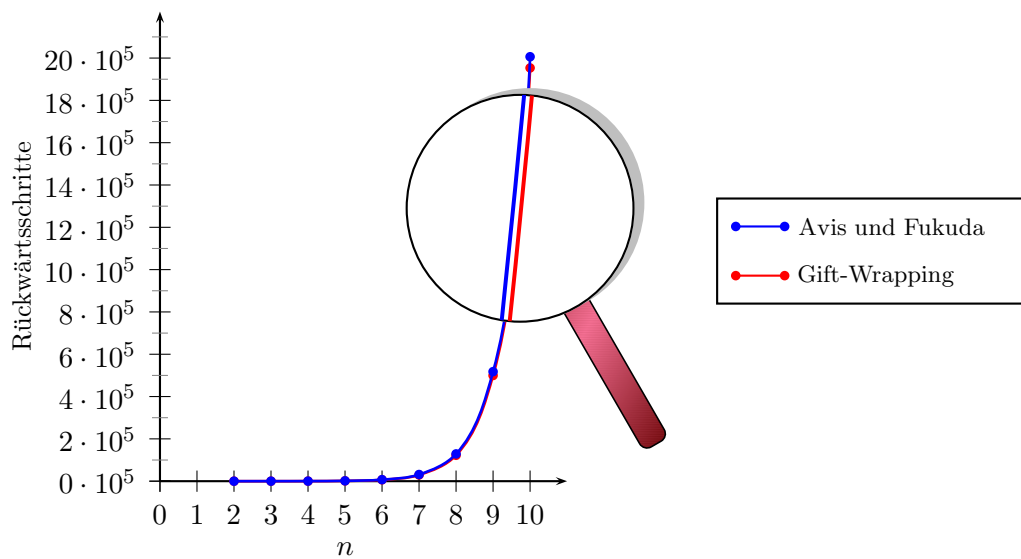


Abbildung B.54: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 1$  und Restriktionszahl  $m = 150$

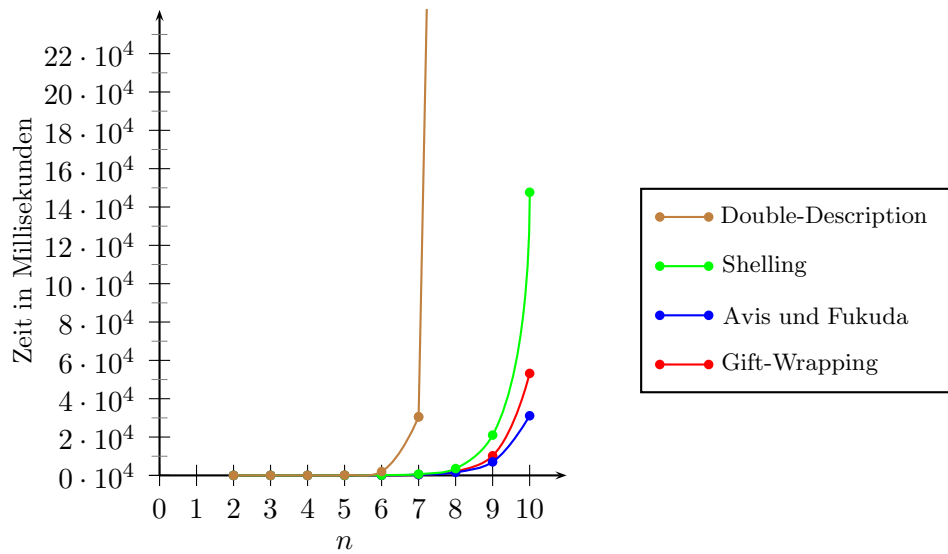


Abbildung B.55: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Restriktionszahl  $m = 150$

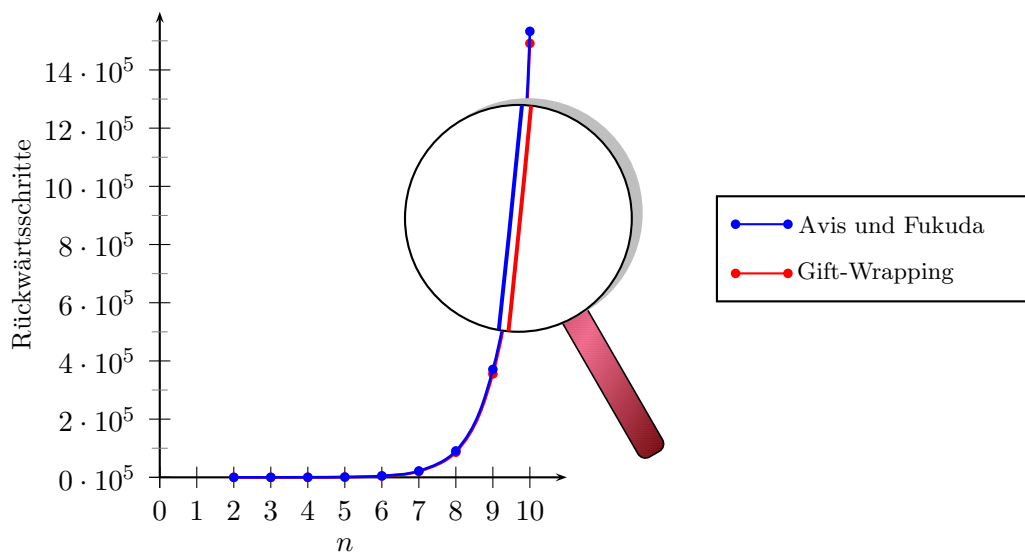


Abbildung B.56: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Restriktionszahl  $m = 150$

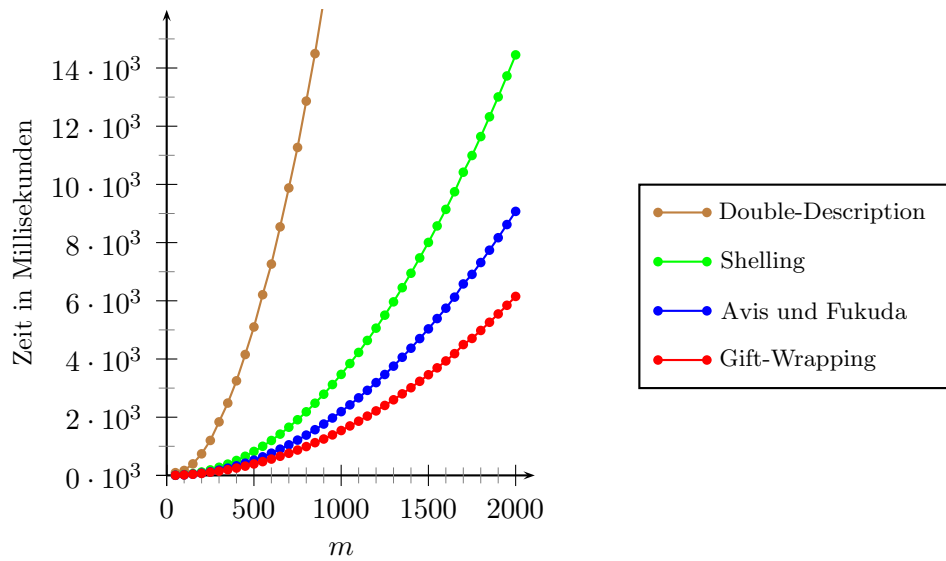


Abbildung B.57: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Dimension  $n = 5$

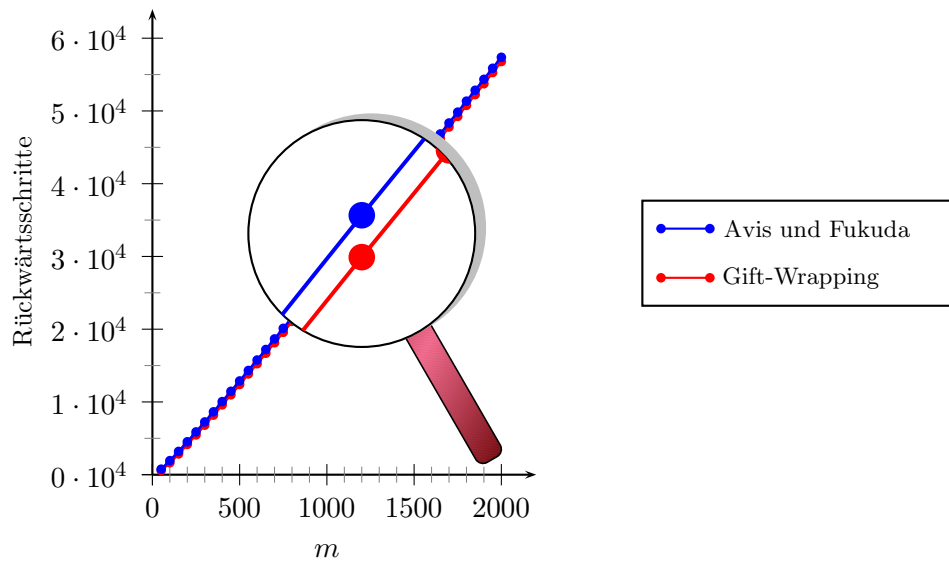


Abbildung B.58: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k \rightarrow -1$  und Dimension  $n = 5$

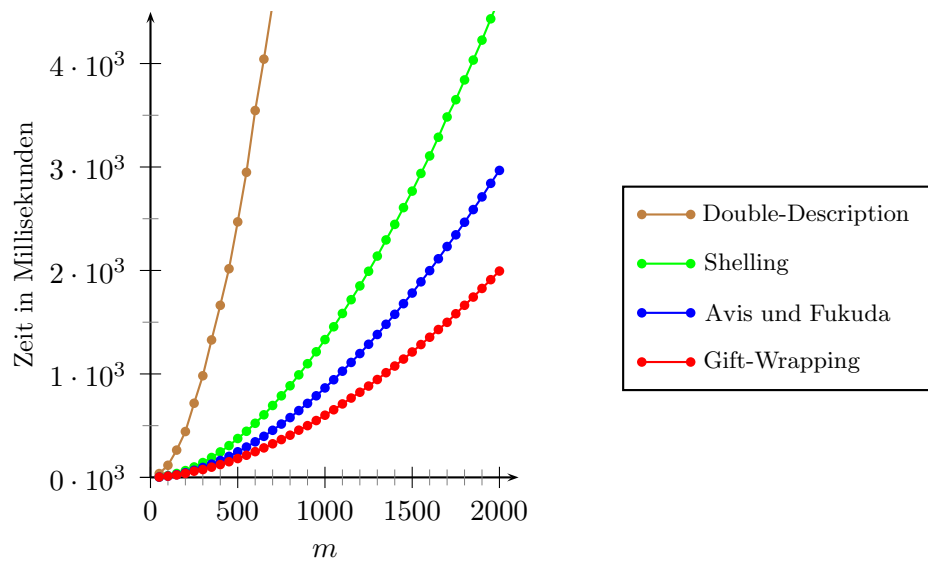


Abbildung B.59: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Dimension  $n = 5$

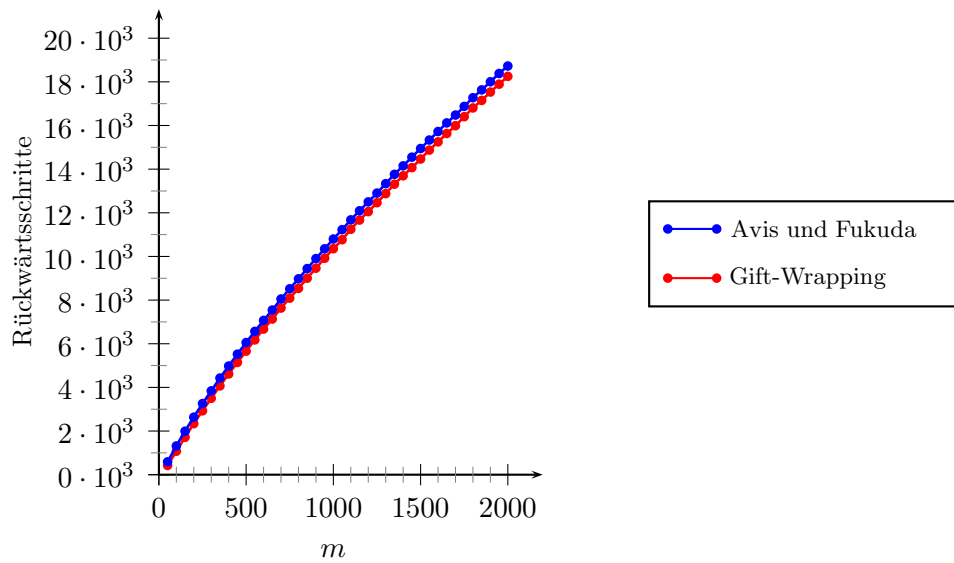


Abbildung B.60: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 0$  und Dimension  $n = 5$

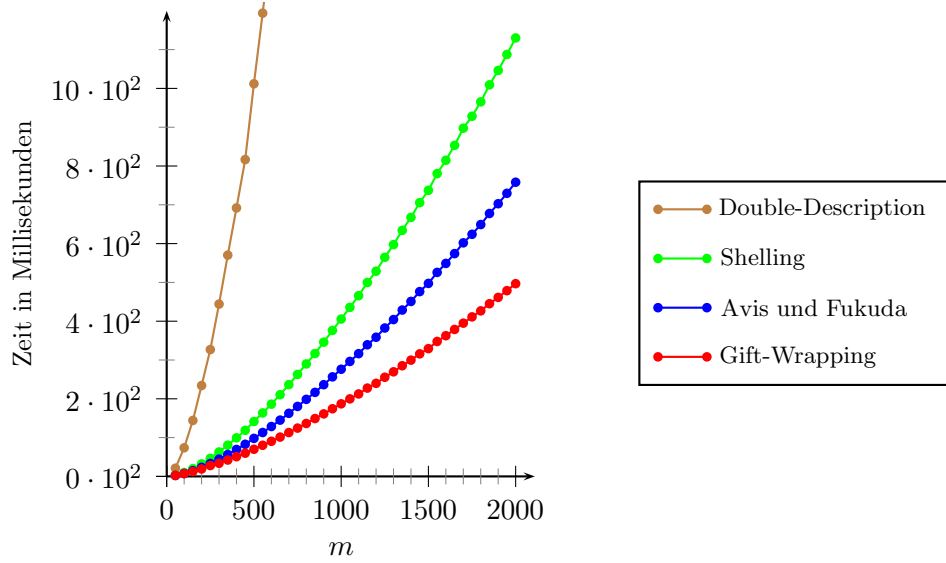


Abbildung B.61: Laufzeiten der Konvexe-Hülle-Algorithmen in Millisekunden bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Dimension  $n = 5$

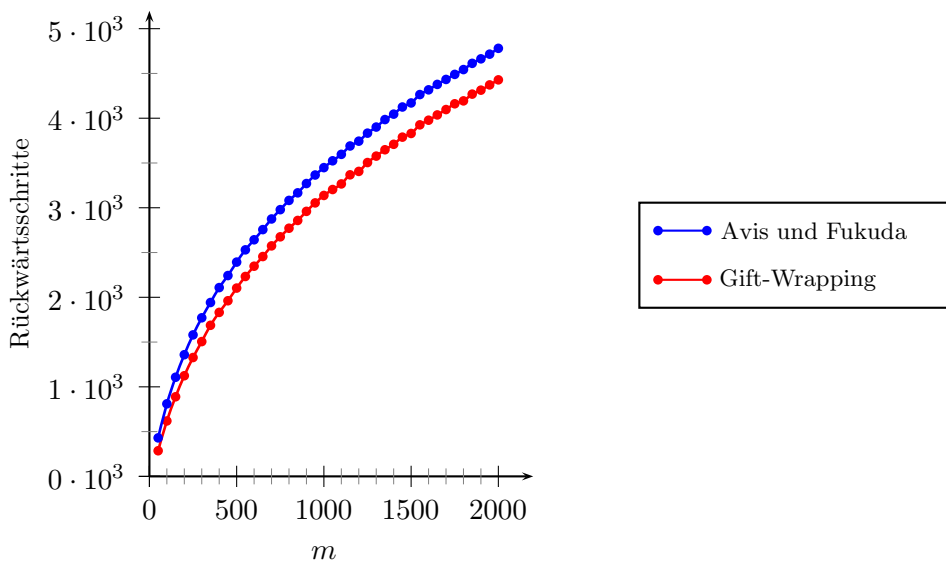


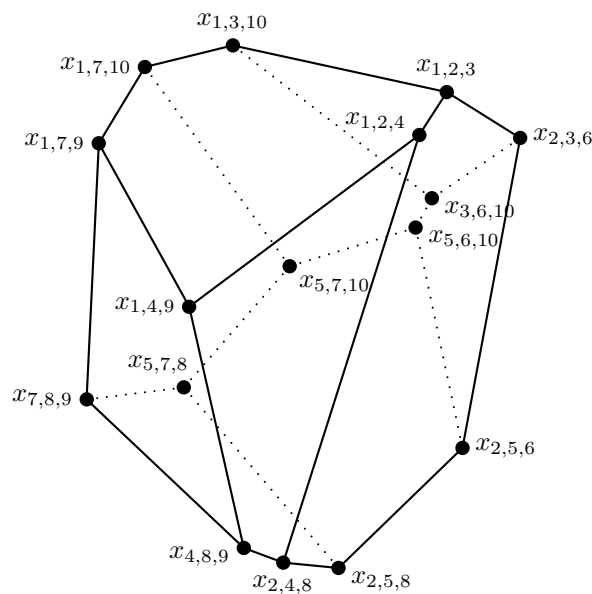
Abbildung B.62: Durchschnittliche Anzahl der Rückwärtsschritte im Gift-Wrapping-Algorithmus und im Verfahren von Avis und Fukuda bei Verteilungsparameter  $k = 10$  und Dimension  $n = 5$



# Anhang C

## Beispiele

In diesem Teil des Anhangs sollen die Vorgehensweisen der vier analysierten Konvexe-Hülle-Algorithmus bildlich veranschaulicht werden.<sup>1</sup> Hierzu betrachten wir das nachfolgende Polytop und beobachten, wie unsere Verfahren ablaufen, um dessen Ecken zu bestimmen.

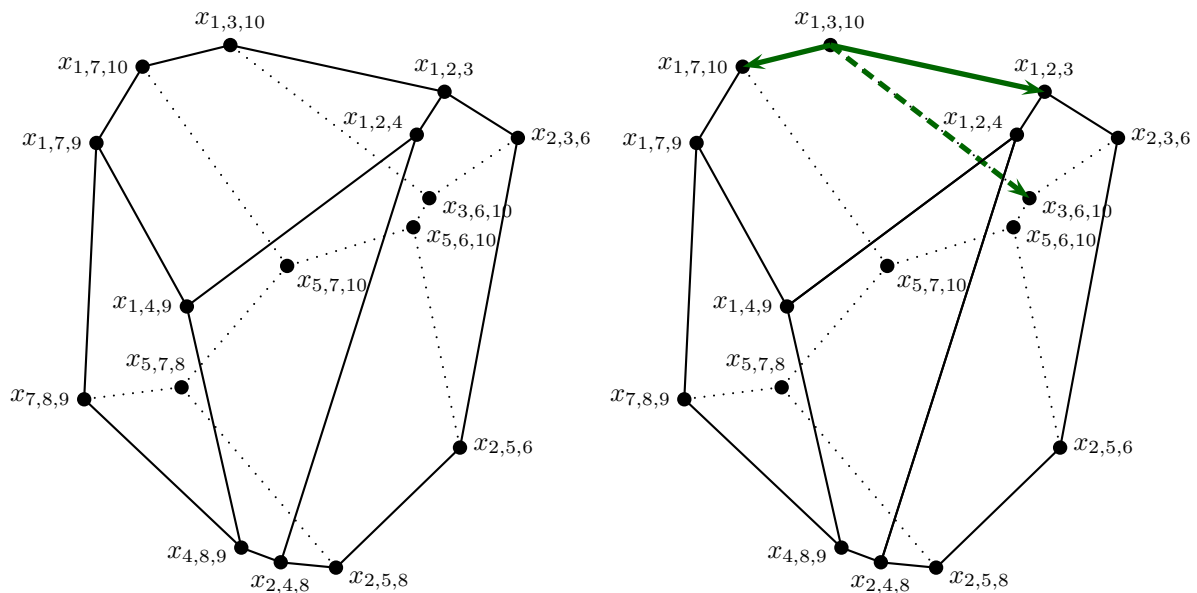


Man beachte bei den folgenden Graphiken, dass zu Beginn eines jeden Algorithmus das Polyeder natürlich noch völlig unbekannt ist. Dennoch wird – abgesehen von der Veranschaulichung der Double-Description-Methode – für einen besseren Überblick das Polytop von vornherein komplett vorgezeichnet und lediglich bestimmte Charakteristika der Algorithmen, wie z.B. das Durchlaufen einer Kante, farblich markiert. Hier erfolgt für jedes Verfahren eine eigene Beschreibung. Lediglich bei der Double-Description-Methode wird die Visualisierung des Verfahrens anderweitig durchgeführt. Hier werden wir iterativ weitere Restriktionen berücksichtigen und damit stets Teile des Polyeders abschneiden. Sowohl die durch den Schnitt neu entstandene Facette als auch der unzulässig werdende Teil des Polyeders wird hier jeweils farblich hervorgehoben.

<sup>1</sup>Die nachfolgenden Graphiken entstanden in Zusammenarbeit mit Prof. Borgwardt anlässlich seines Beitrages zur Vortragsreihe „Faszination Mathematik und Physik“ am 9. Dezember 2010 mit dem Titel „Wie muss man einen Diamanten schleifen, damit seine Ecken an den gewünschten Stellen liegen?“.

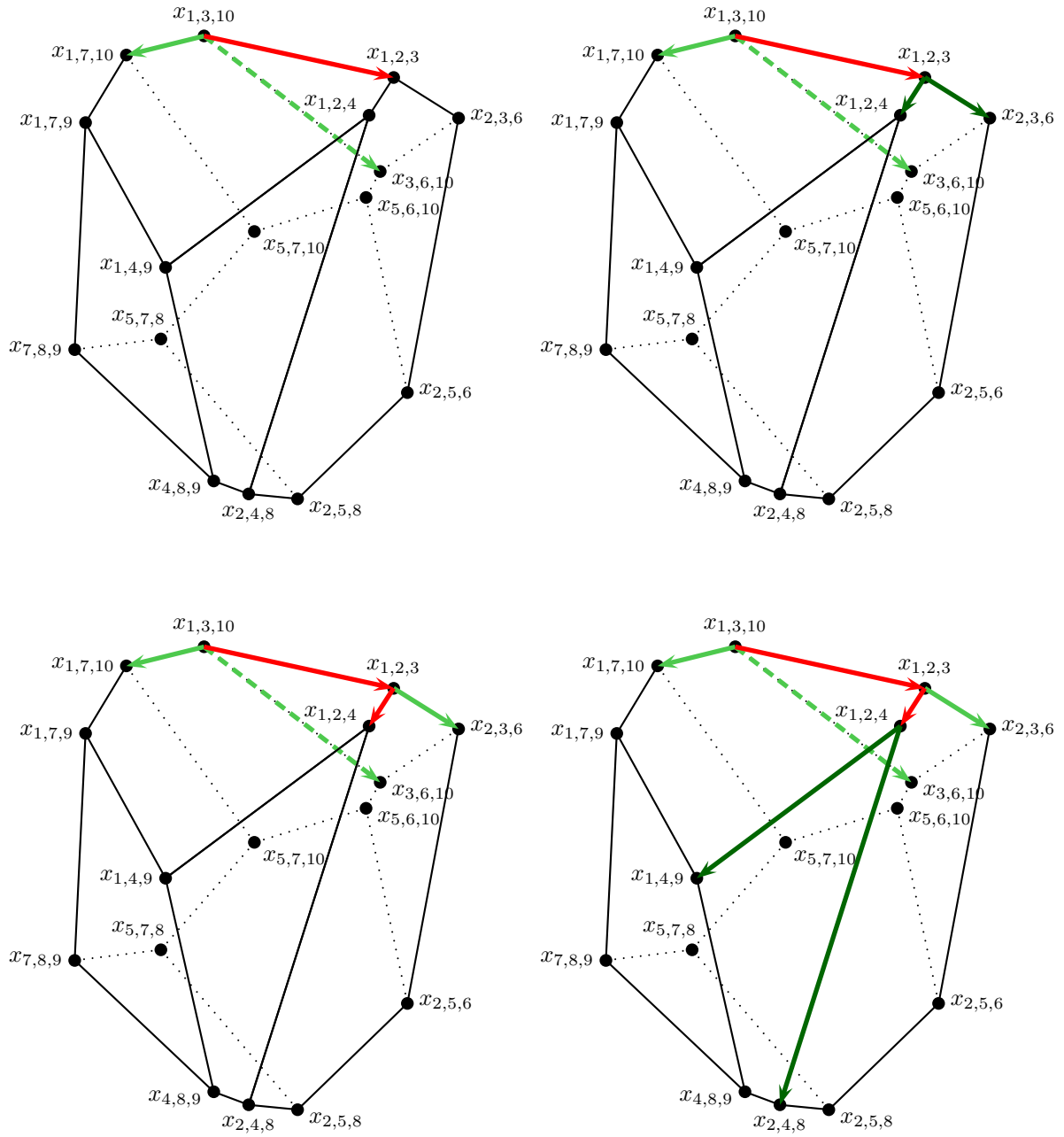
## C.1 Der Gift-Wrapping-Algorithmus

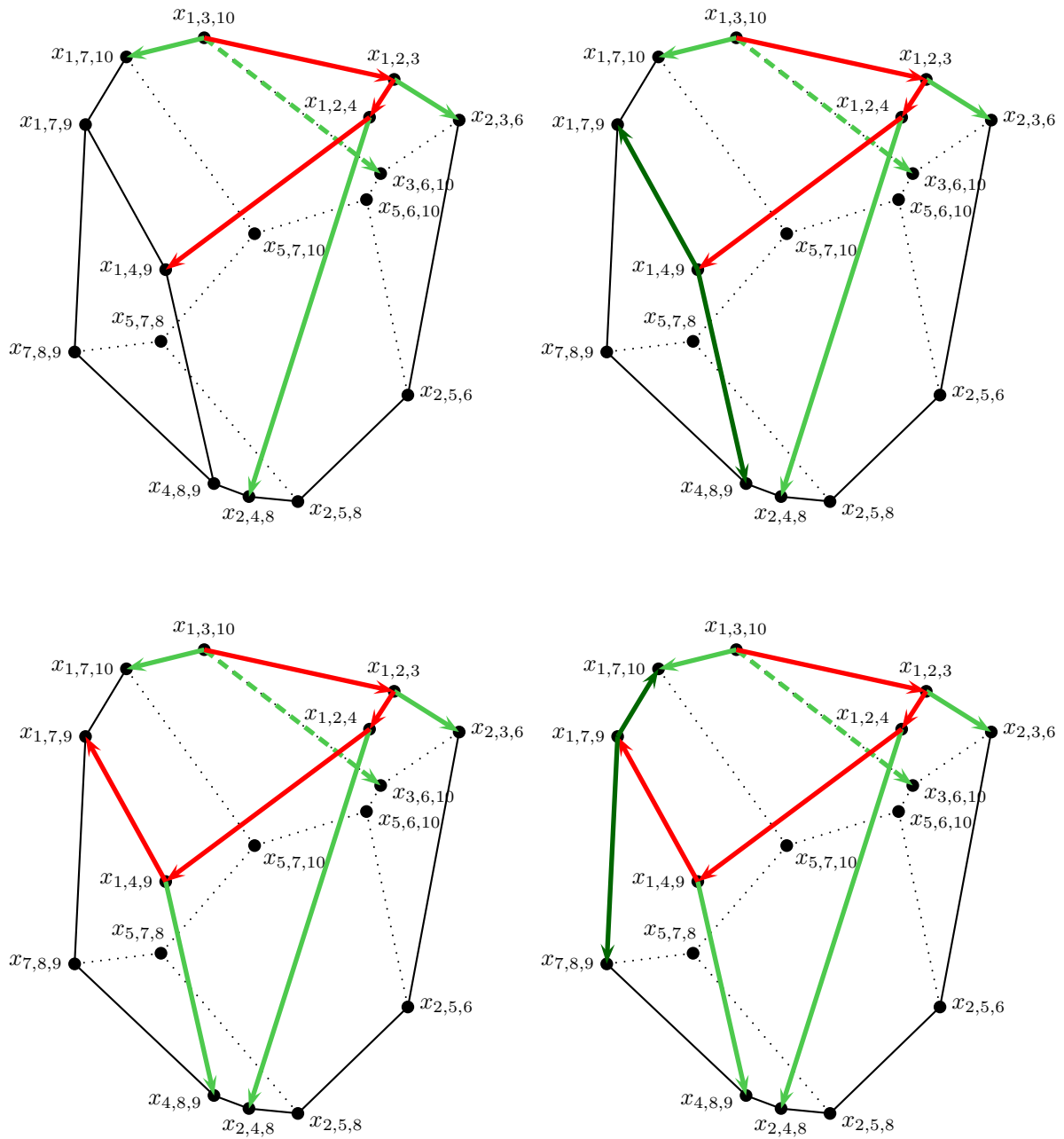
In den Graphiken zum Gift-Wrapping-Algorithmus kennzeichnen rote Pfeile ein Vorwärtslaufen auf der jeweiligen Kante in die durch die Pfeilspitze gekennzeichnete Richtung. Dunkelgrüne Pfeile verdeutlichen Kanten, die vom derzeitigen Standpunkt aus sichtbar sind und nun untersucht werden müssen. Hellgrüne Pfeile geben die Elemente der Liste für ungesättigte Kanten wieder. Diese werden dabei so gerichtet, dass von der stumpfen Seite des Pfeiles die Kante entdeckt wurde. Blaue Pfeile visualisieren ein Rückwärtsschreiten auf einer bereits durchlaufenen Kante nach Landen in einer sogenannten Sackgasse. Diese ist daran erkennbar, dass hier kein Vorwärtsschritt zu einer noch nicht besuchten Ecke möglich ist. Graue Doppelpfeile verdeutlichen Kanten, die zwar nicht durchschritten wurden, deren beide Ecken aber dennoch bereits abgearbeitet sind. Diese Kanten waren zwar Elemente der Liste für ungesättigte Kanten, konnten allerdings, ohne dass auf diesen ein Vorwärtsschritt notwendig gewesen ist, aus der Liste gelöscht werden.

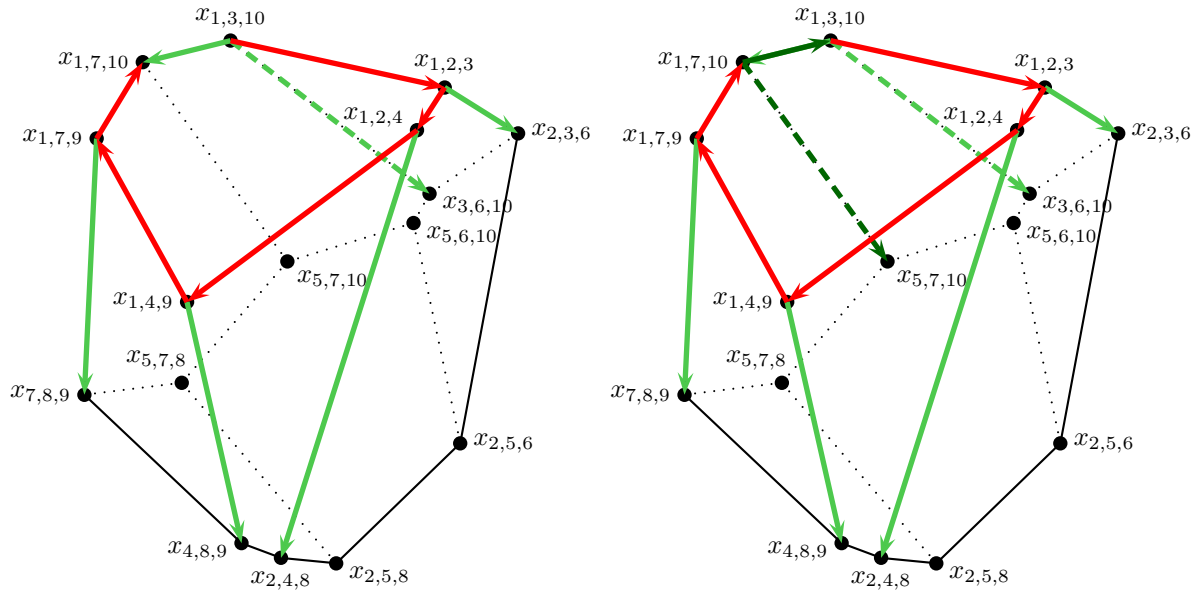


O.B.d.A. startet der Algorithmus an der am weitesten oben liegenden Ecke. Von dort sind drei Laufrichtungen auffindbar (dunkelgrüne Pfeile). Eine davon wird im nächsten Schritt als Vorwärtskante gewählt. Die anderen verbleiben in der Liste für ungesättigte Kanten und werden daher im nächsten Bild hellgrün gefärbt. Dieses Prinzip wiederholt sich zunächst einige Male ohne besondere Vorkommnisse.

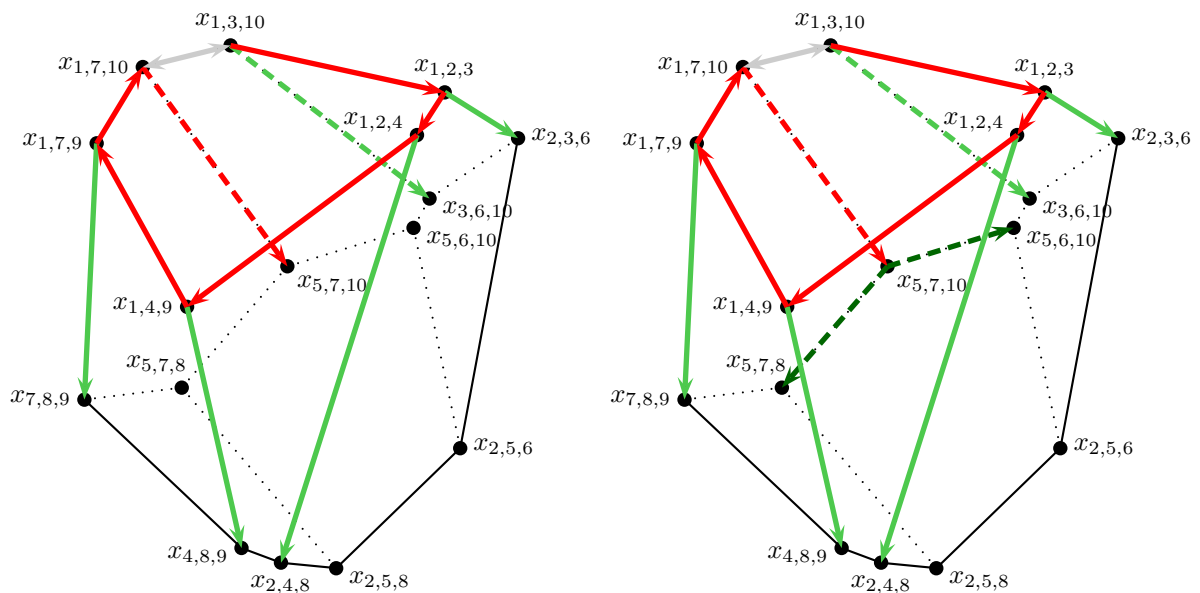


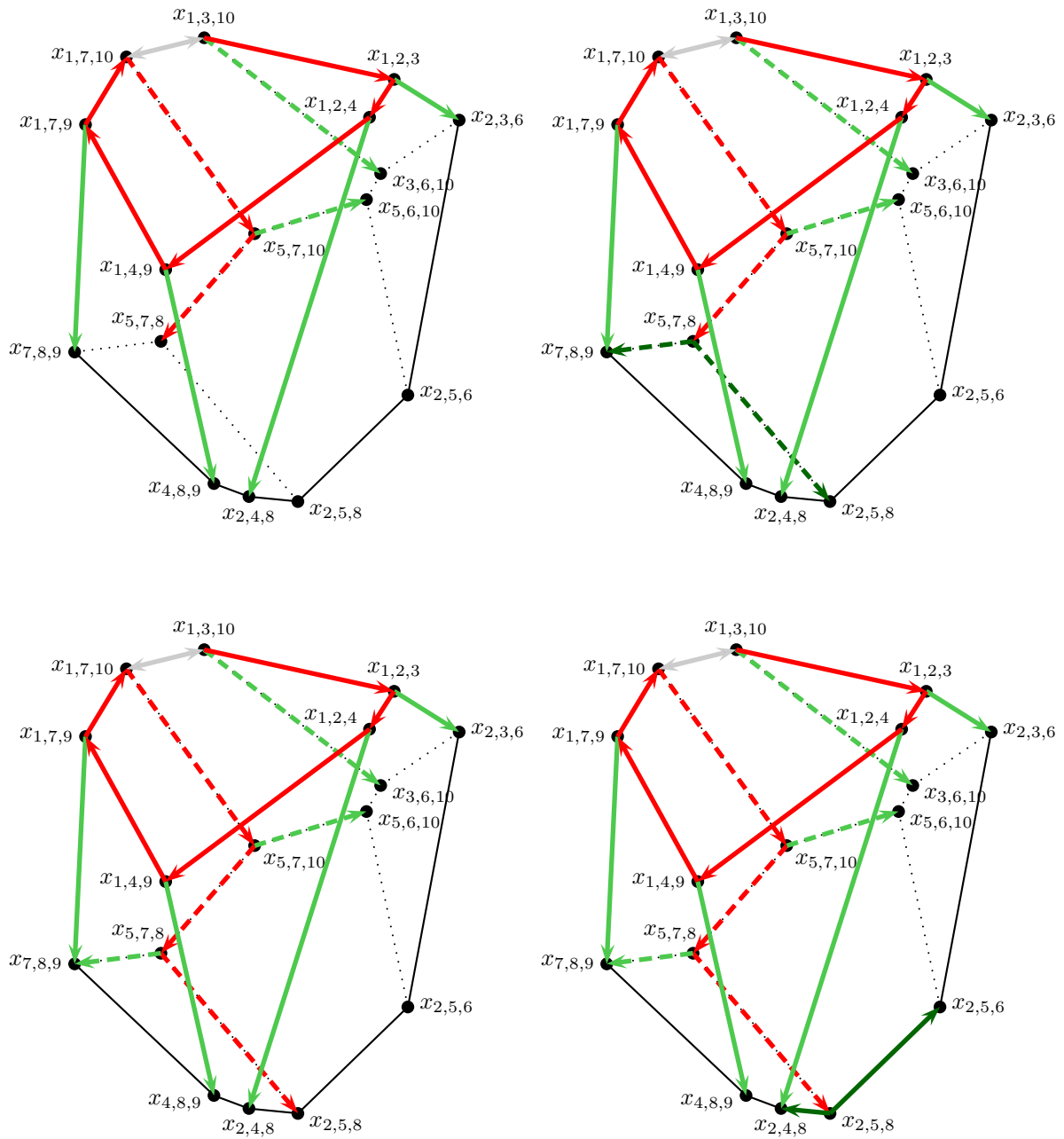


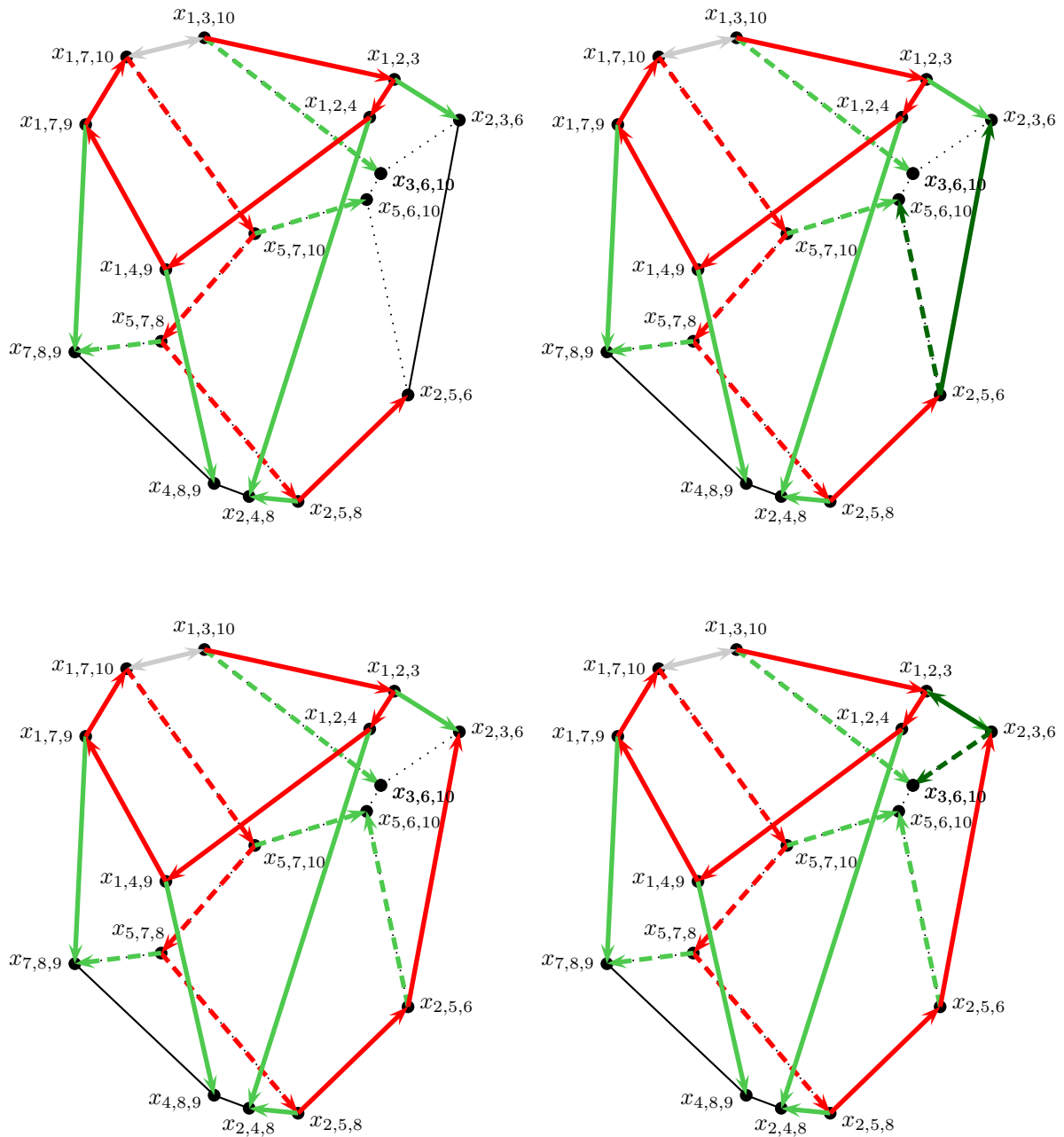




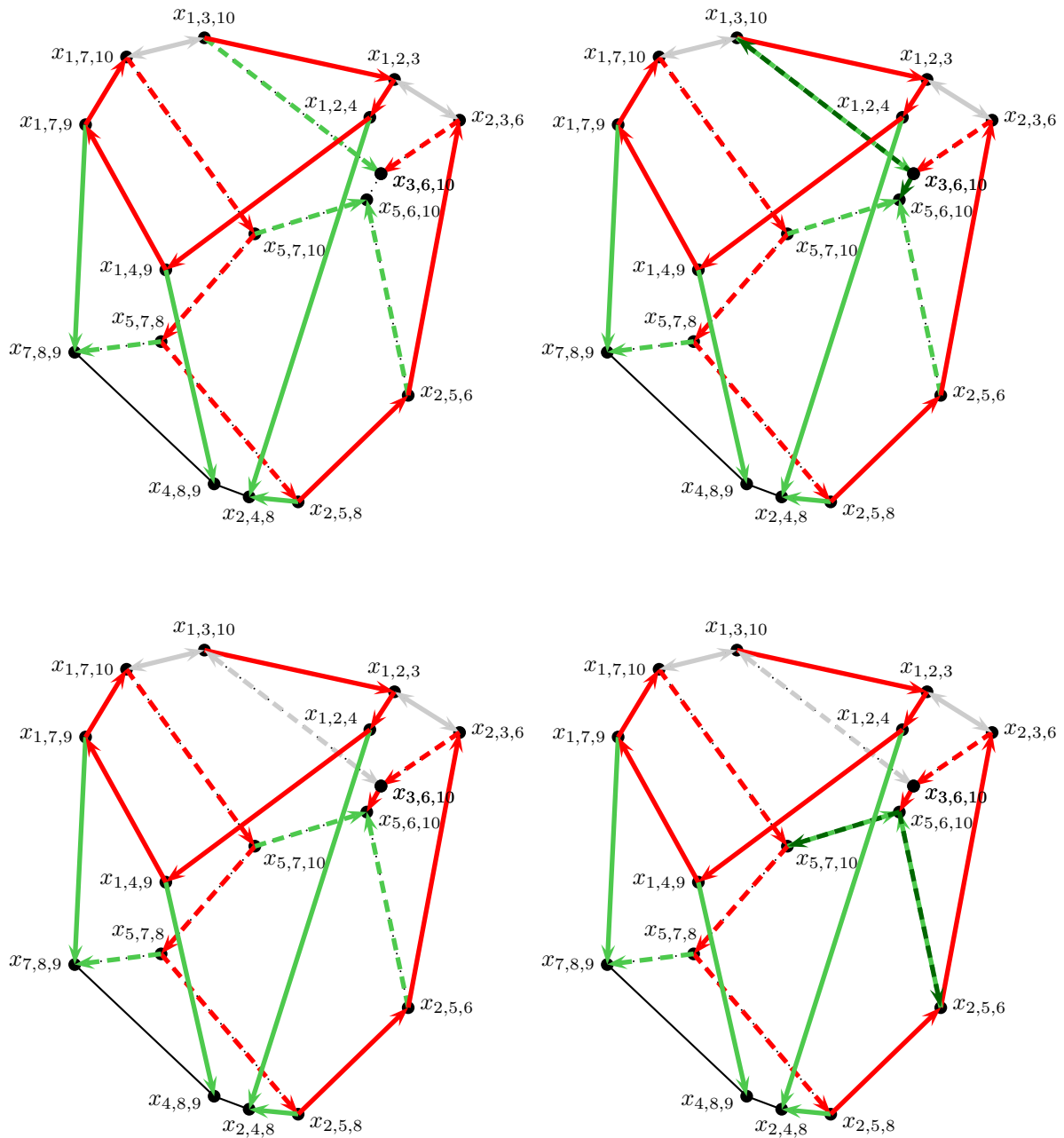
Von der Ecke  $x_{1,7,10}$  gerät nun eine Kante ins Blickfeld, die sich bereits in der Liste für ungesättigte Kanten befindet. Das bedeutet, dass anschließend beide Ecken dieser Kante abgearbeitet sind und daher die Kante als gesättigt eingestuft werden kann. Deswegen färben wir die Verbindung  $[x_{1,7,10}, x_{1,3,10}]$  im Folgenden grau. Sie wird im weiteren Verlauf des Verfahrens keine Rolle mehr spielen. Als Vorwärtsschritt verbleibt die Möglichkeit zur Ecke  $x_{5,7,10}$ .



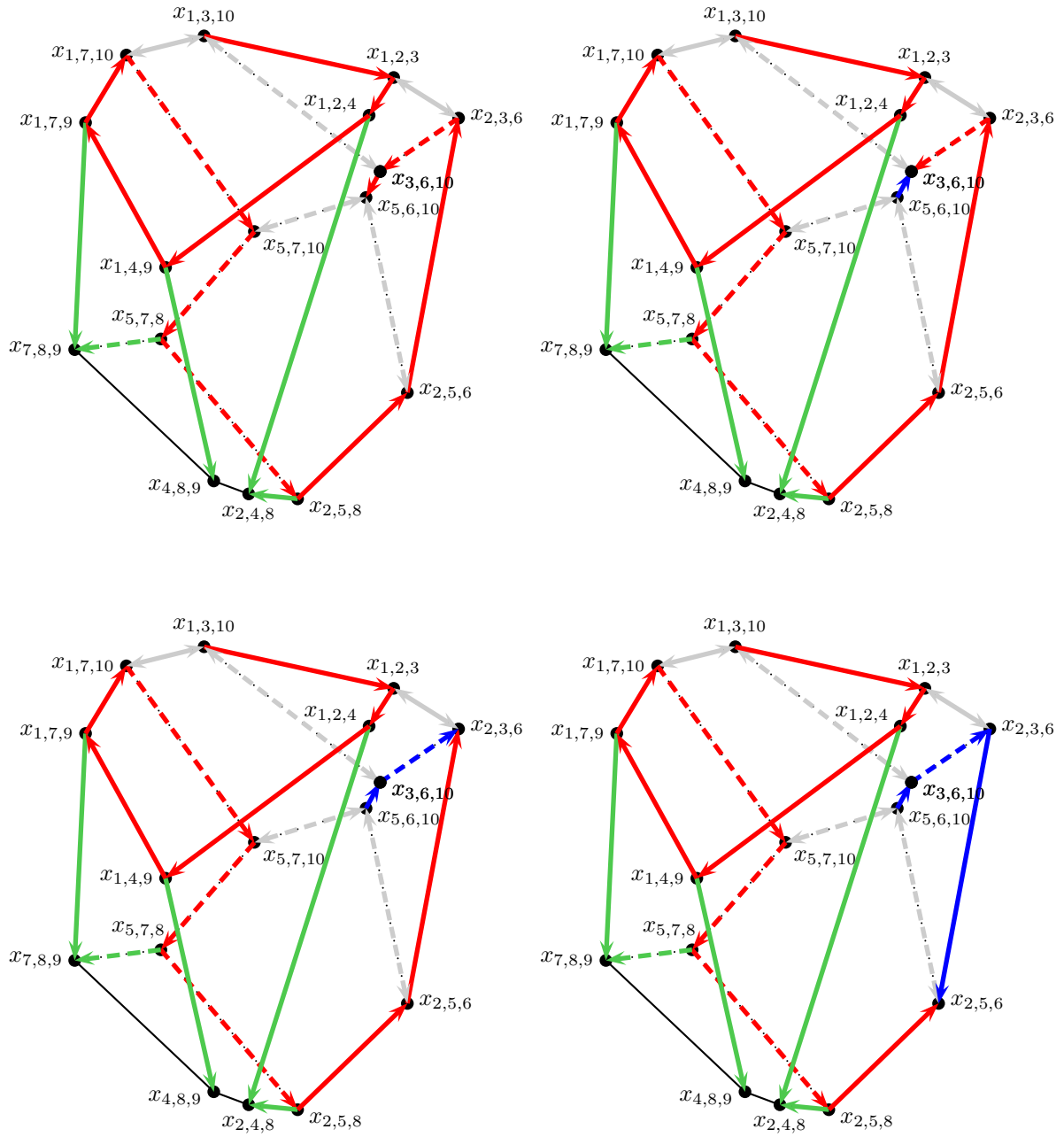


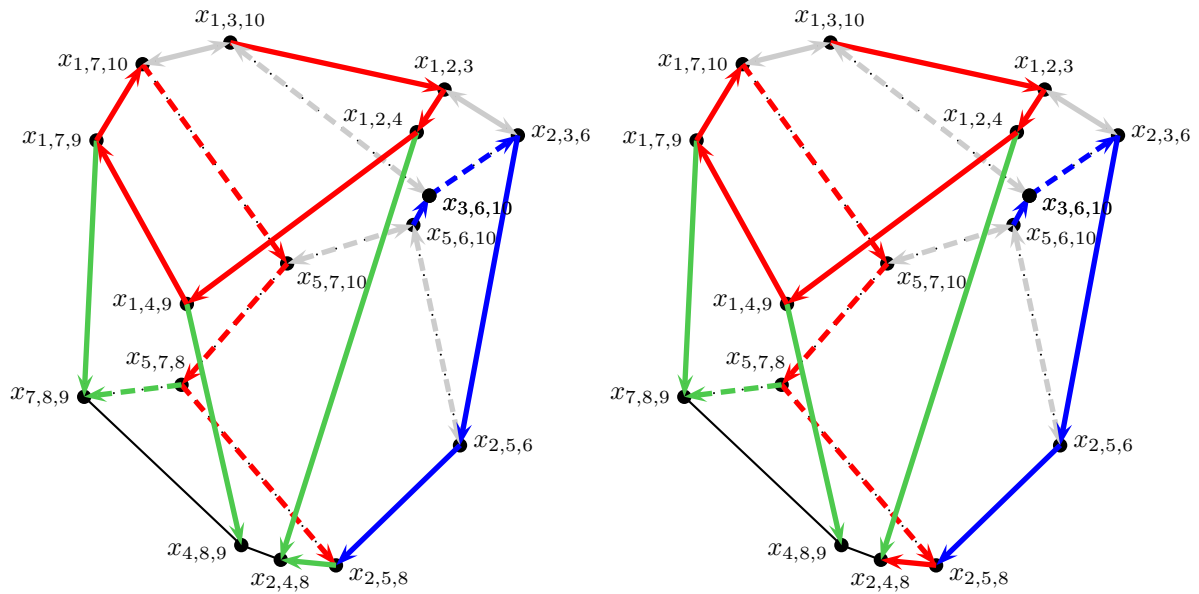


Wir entdecken nun erneut eine Kante, die bereits in der Liste für ungesättigte Kanten enthalten ist. Die Entfernung dieser aus der Liste markieren wir wieder mit einem grauen Doppelpfeil. Als Vorwärtsschritt bleibt damit nur die Kante zur Ecke  $x_{3,6,10}$ . Analoges wird sich auch im nächsten Schritt abspielen.

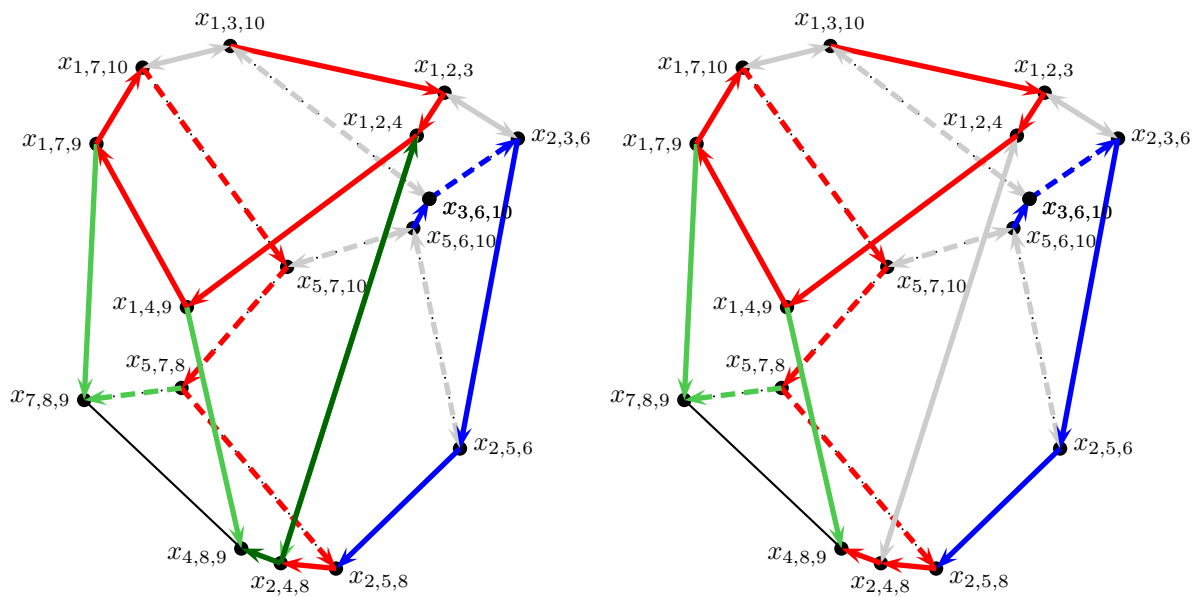


An der Ecke  $x_{5,6,10}$  angekommen, stoßen wir auf zwei Kanten, die bereits als ungesättigt eingestuft wurden. Wir löschen daher beide aus unserer Liste und markieren diese in unserer Graphik grau. Damit ergibt sich hier nun keine Möglichkeit mehr für einen Vorwärtsschritt. Um aus dieser Sackgasse zu kommen, werden nun solange Rückwärtsschritte (blaue Pfeile) vorgenommen, bis wir auf eine Ecke stoßen mit einer ungesättigten Kante (hellgrün). Diese wird dann für eine Vorwärtswanderung genutzt.

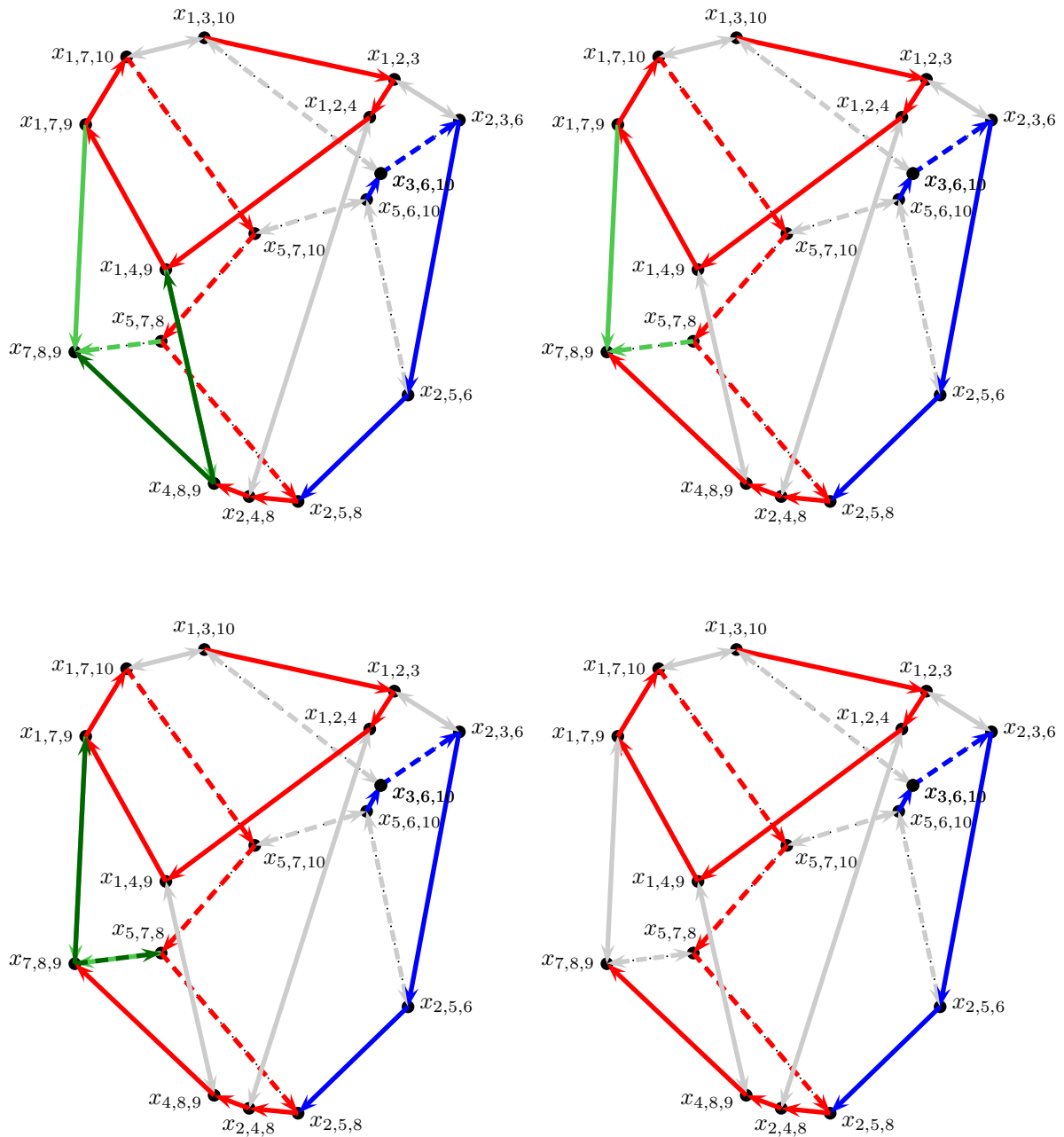




Erst nach vier Rückwärtsschritten entdecken wir eine ungesättigte Kante und verwenden diese zum Erreichen einer noch nicht besuchten Ecke.







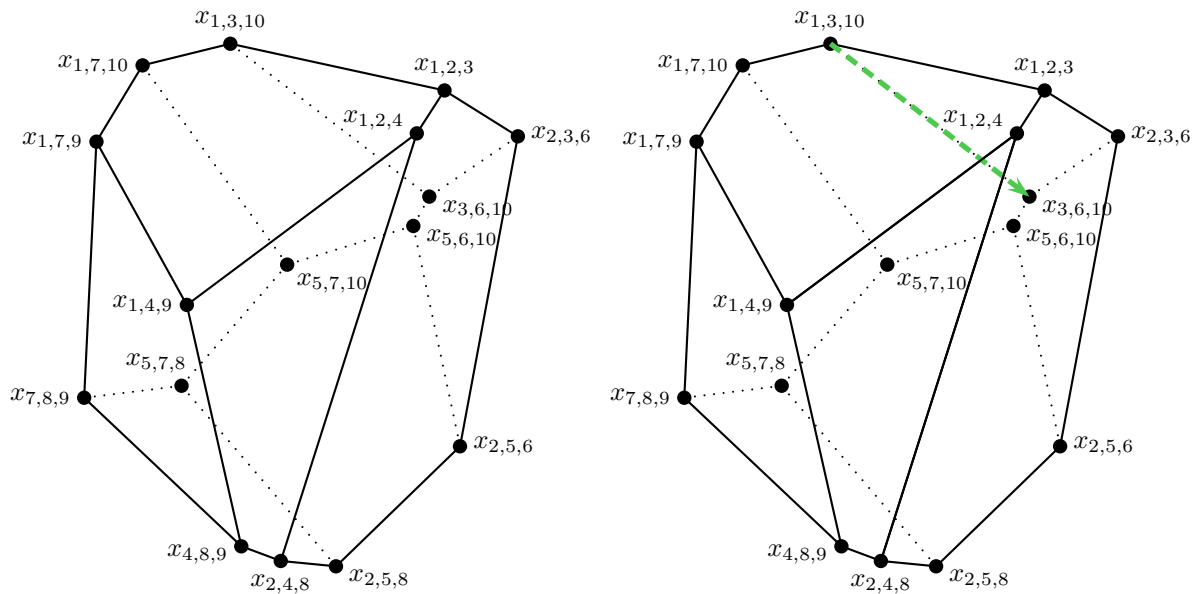
Mit Erreichen der Ecke  $x_{7,8,9}$  sind wir bei der letzten abzuarbeitenden Ecke angekommen. Hier sind auch die beiden übrig gebliebenen Kanten aus unserer Liste sichtbar. Diese erhalten damit die Bezeichnung gesättigt und werden grau markiert. An der Tatsache, dass nun die Liste mit den ungesättigten Kanten leer ist, erkennt der Gift-Wrapping-Algorithmus die vollständige Untersuchung des Polyeders und terminiert.

## C.2 Das Verfahren von Avis und Fukuda

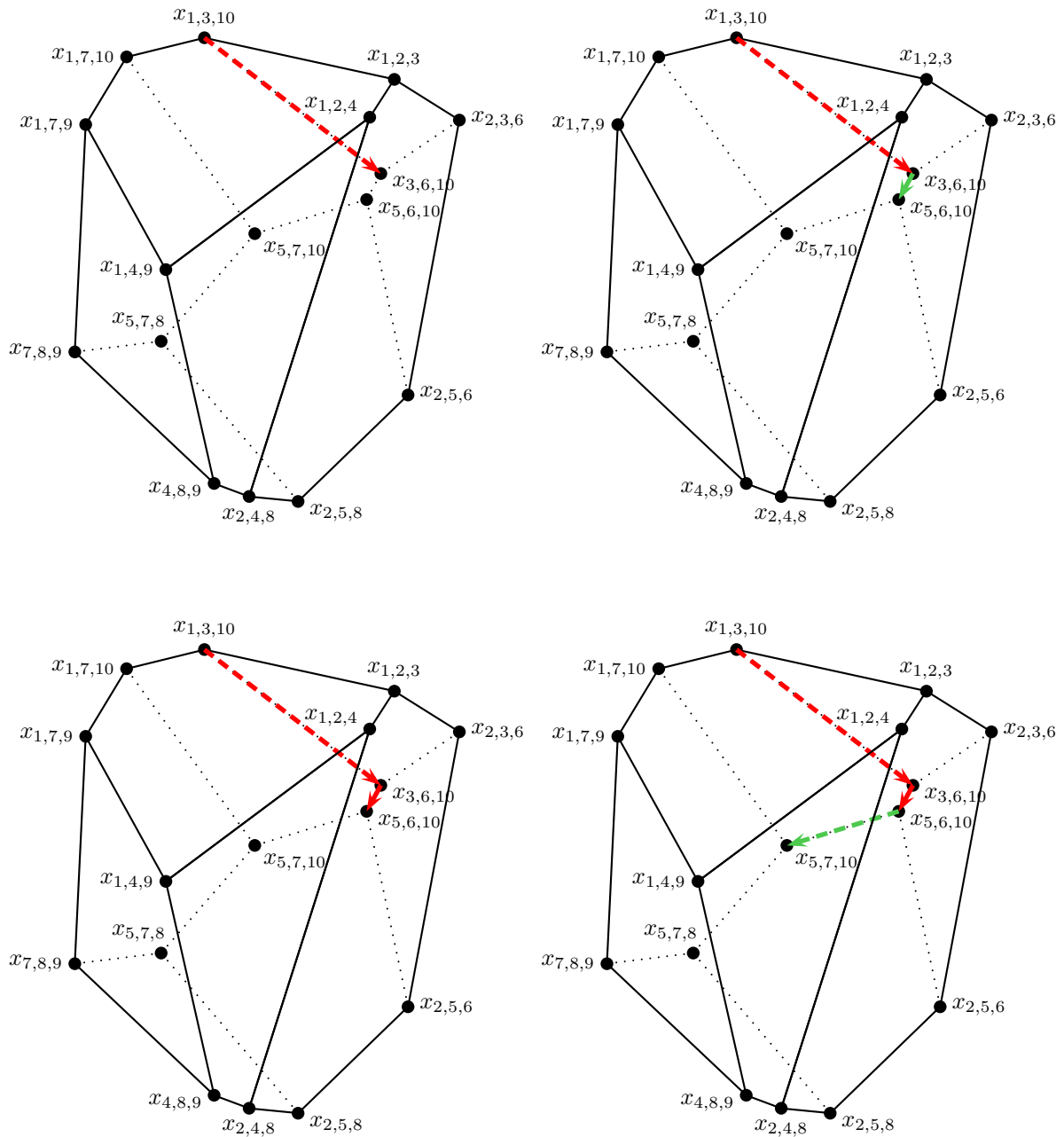
Nachfolgend wird visualisiert, wie der Algorithmus von Avis und Fukuda vorgeht, um sämtliche Ecken des betrachteten Polyeders zu bestimmen. Dabei wird als Zielfunktion

$$\max e_3^T x$$

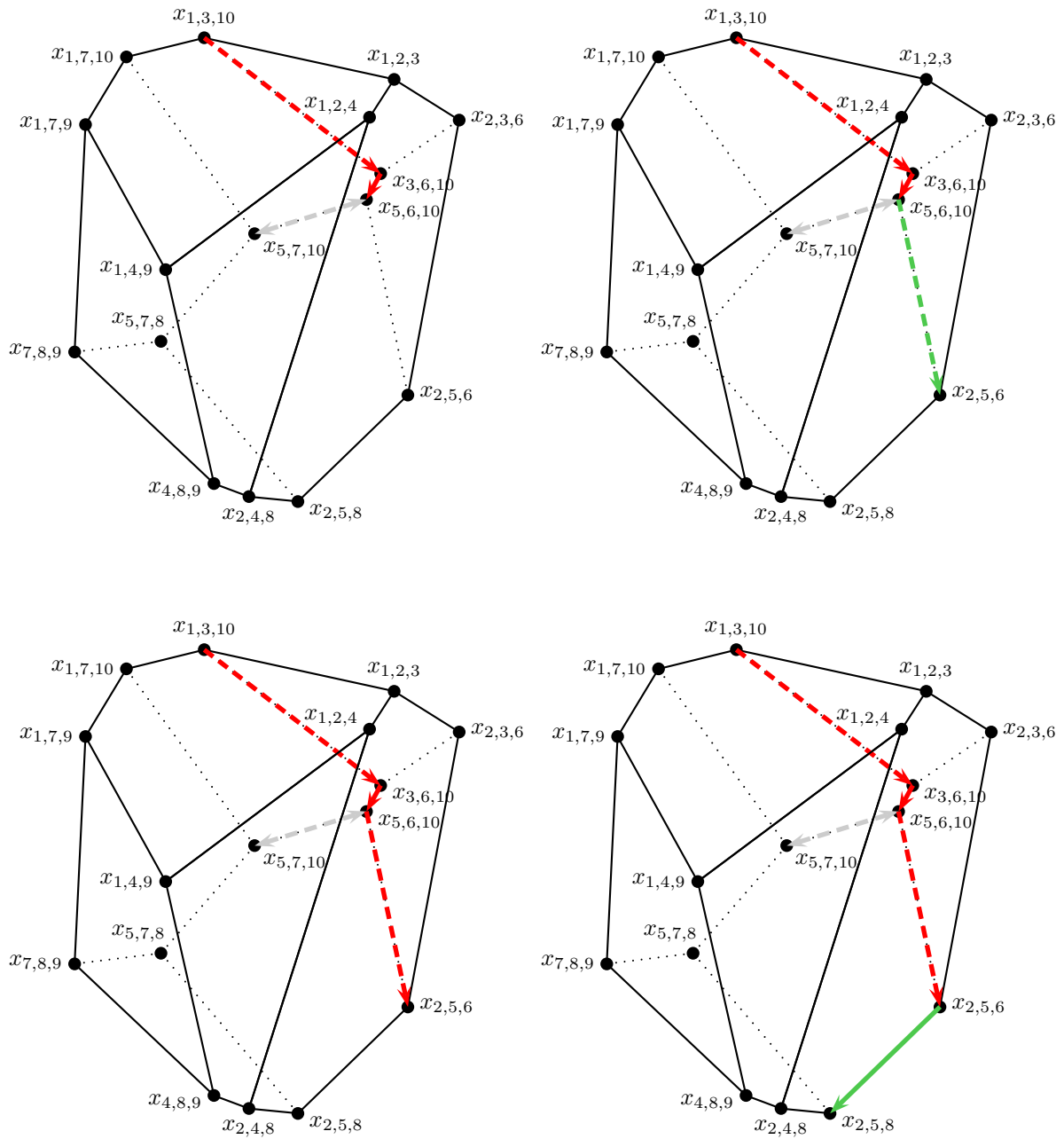
verwendet. Wird eine Kante mit einem grünen Pfeil gekennzeichnet, so bedeutet das, dass wir uns derzeit an der Ecke mit dem stumpfen Ende des Pfeiles befinden und bezüglich dieser Kante die reverse Blandüberprüfung vornehmen. Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns bei dieser Markierung auf Abstiegsrichtungen, d.h. es werden lediglich diejenigen Kanten grün hervorgehoben, bei denen der Test die Überprüfung der Bedingungen aus Schritt 1 a) iii) im Algorithmus 3.2 erfordert. Endet ein solcher mit einem positiven Ergebnis, so wird der reverse Pivotschritt ausgeführt. Wie bereits beim Gift-Wrapping-Algorithmus wird dieser Vorwärtsschritt mit einem roten Pfeil gekennzeichnet. Andernfalls markieren wir die Kante grau. Landen wir nach mehreren Vorwärtsschritten in einer Sackgasse, d.h. hier ist kein reverser Pivotschritt möglich, so werden die nötigen Rückwärtsschritte mit blauen Pfeilen hervorgehoben.

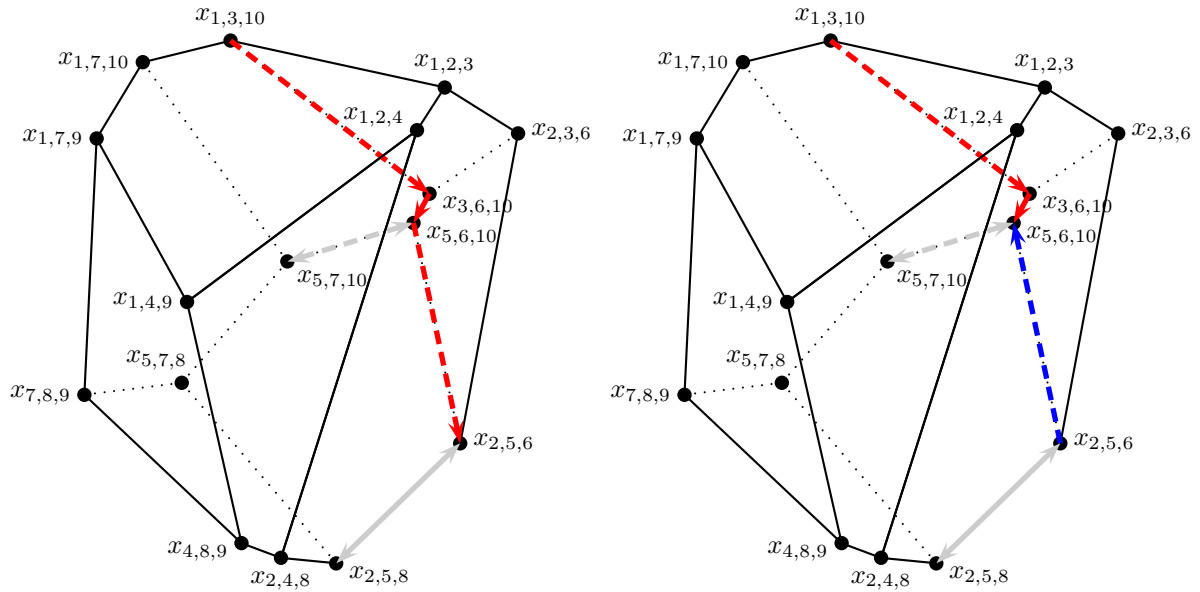


Zunächst führen hier die reversen Pivotüberprüfungen an den Abstiegskanten stets zu positiven Ergebnissen.

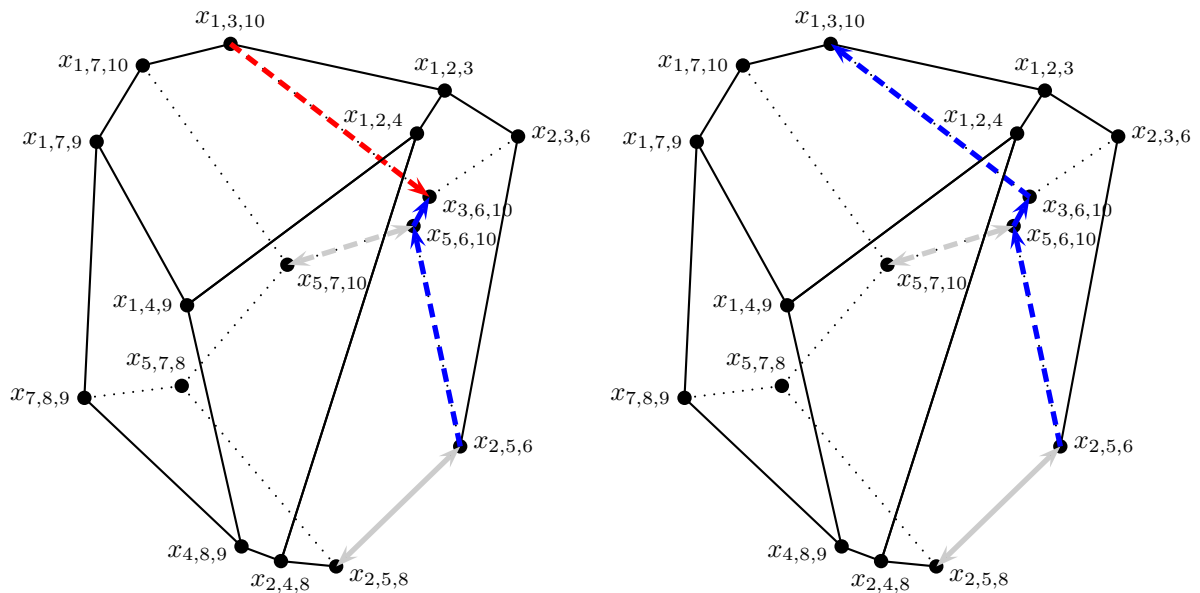


Nun wird an einer Abstiegsrichtung eine reverse Pivotüberprüfung mit negativem Ergebnis durchgeführt. Die Kante muss daher grau markiert werden. Allerdings ist es uns an dieser Ecke dennoch möglich, eine alternative Vorwärtskante (mit positivem Testergebnis) ausfindig zu machen.

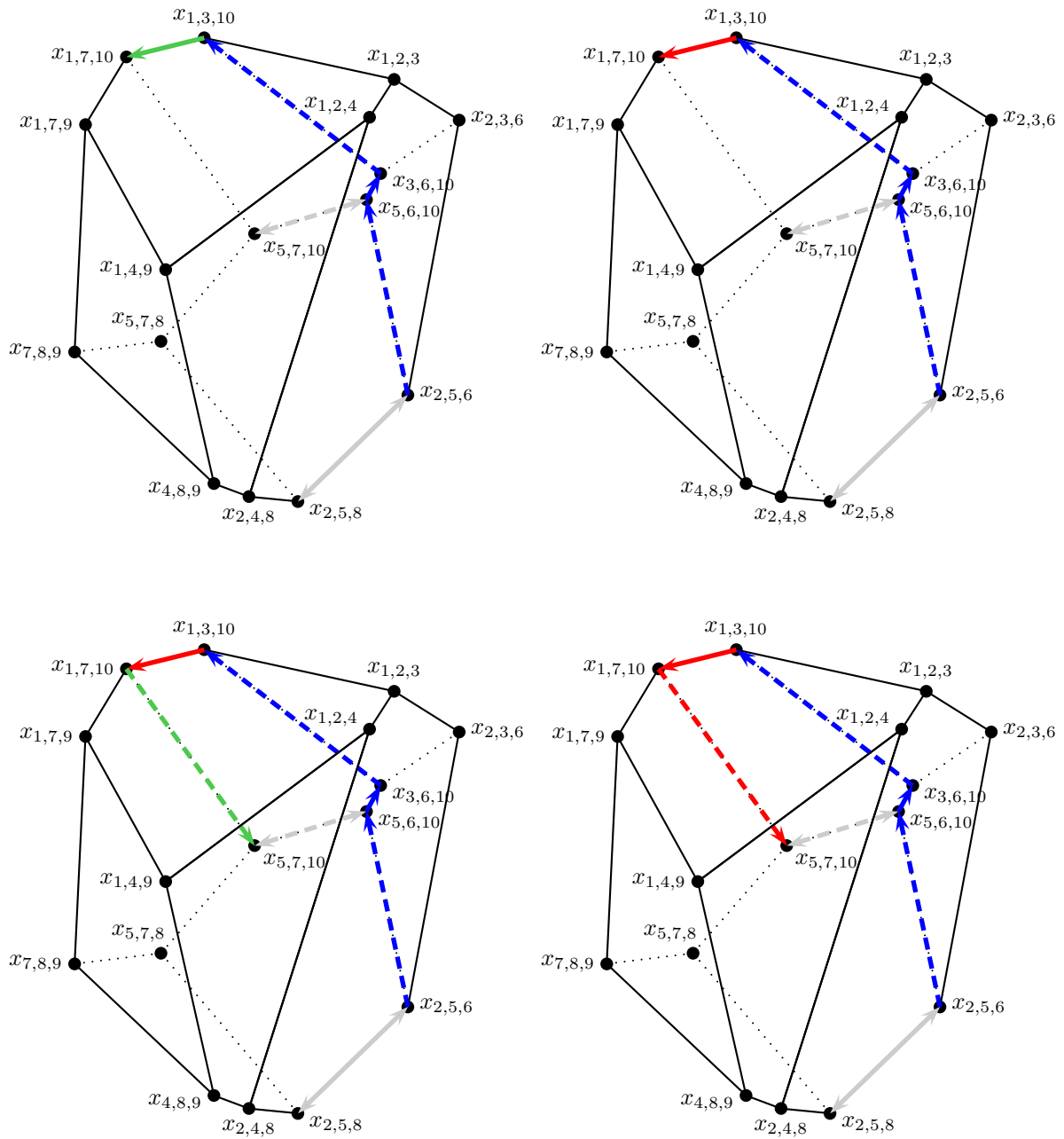


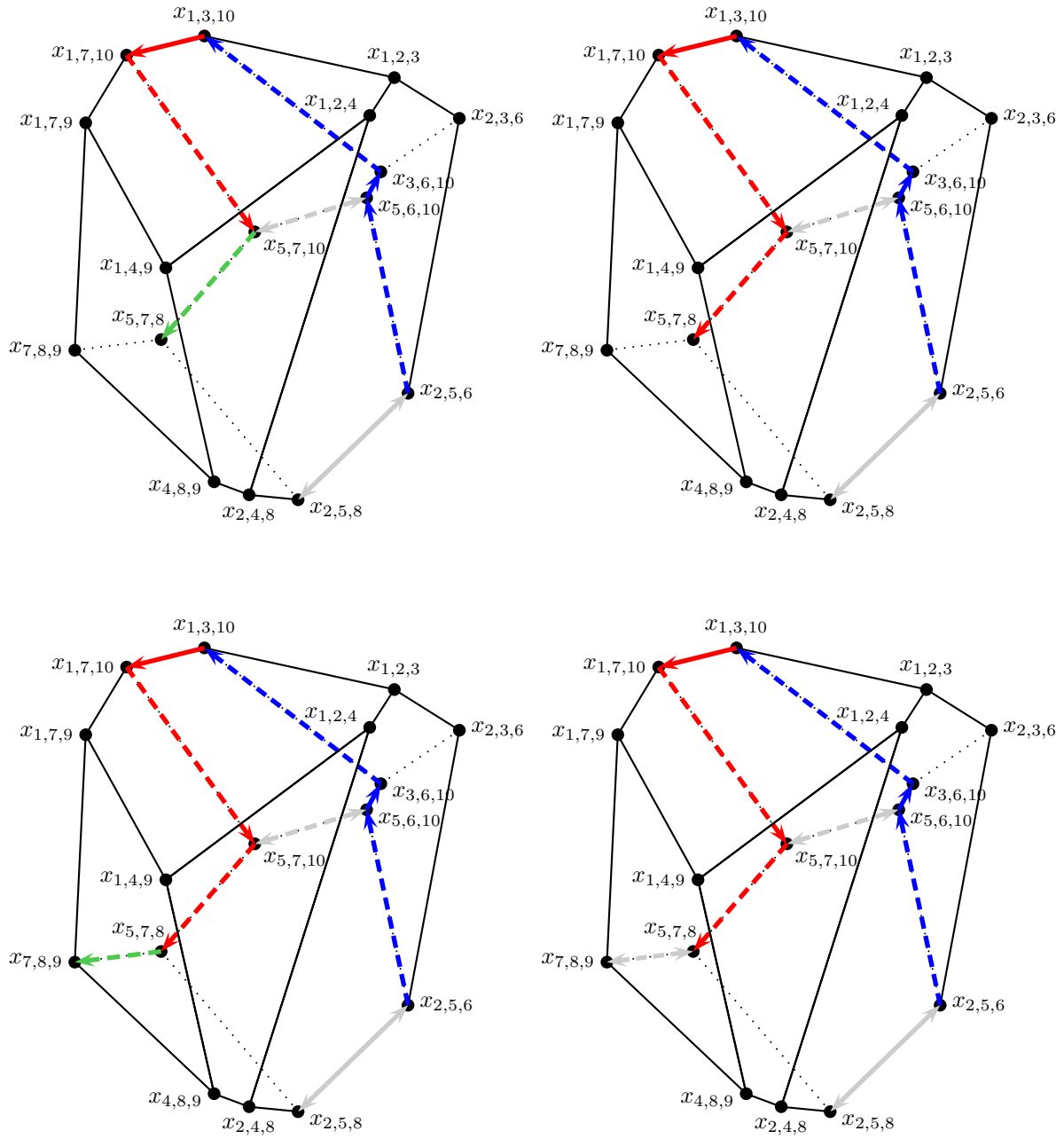


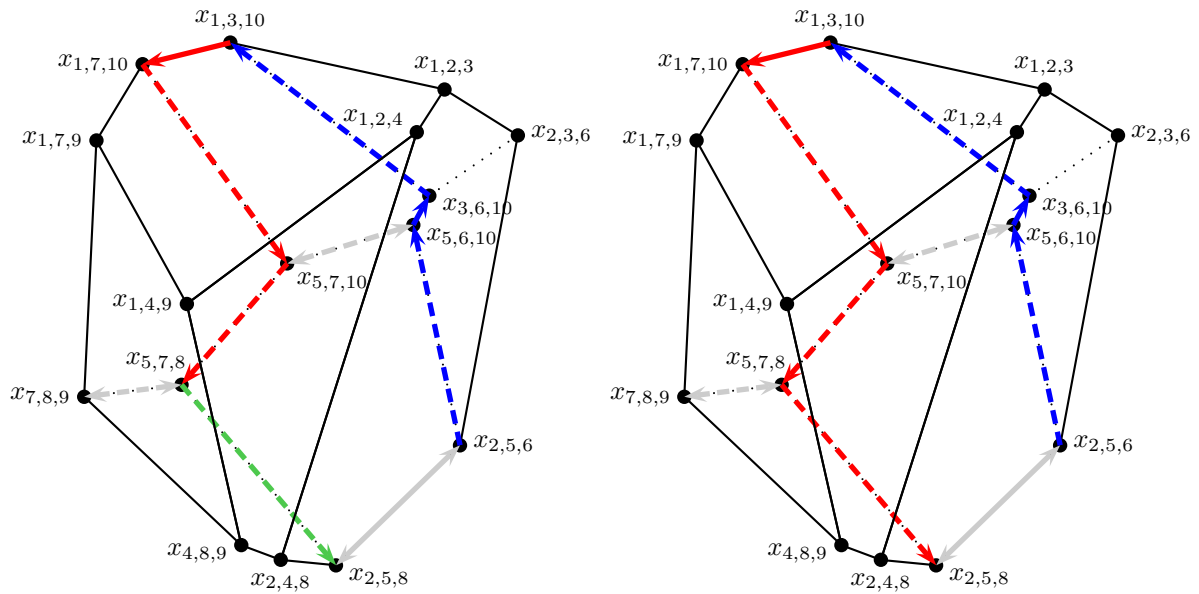
An der Ecke  $x_{2,5,6}$  werden bei der einzigen Abstiegs-kante die Bedingungen für einen reversen Pivotschritt nicht erfüllt („Index 8 > Index 2“). Daher erfolgen nun mit Hilfe der Auswahlregel von Bland einige Rückwärtsschritte.



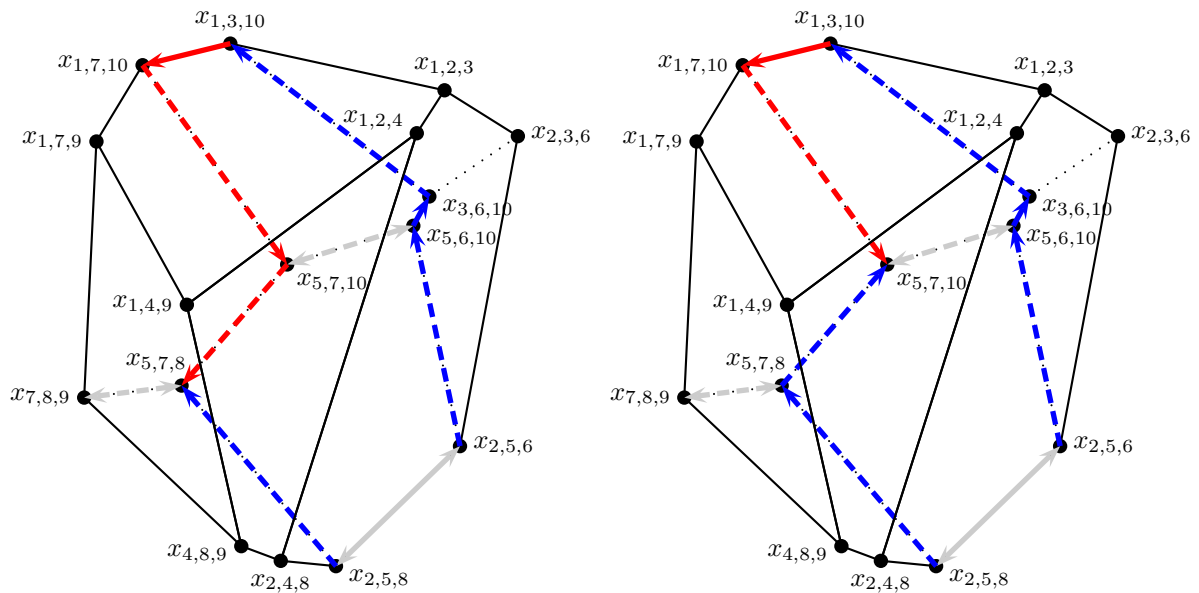
Erst wenn wir bis zur Startecke zurückgelaufen sind, finden wir eine neue Abstiegs-kante zum Durchführen der reversen Pivotüberprüfung.



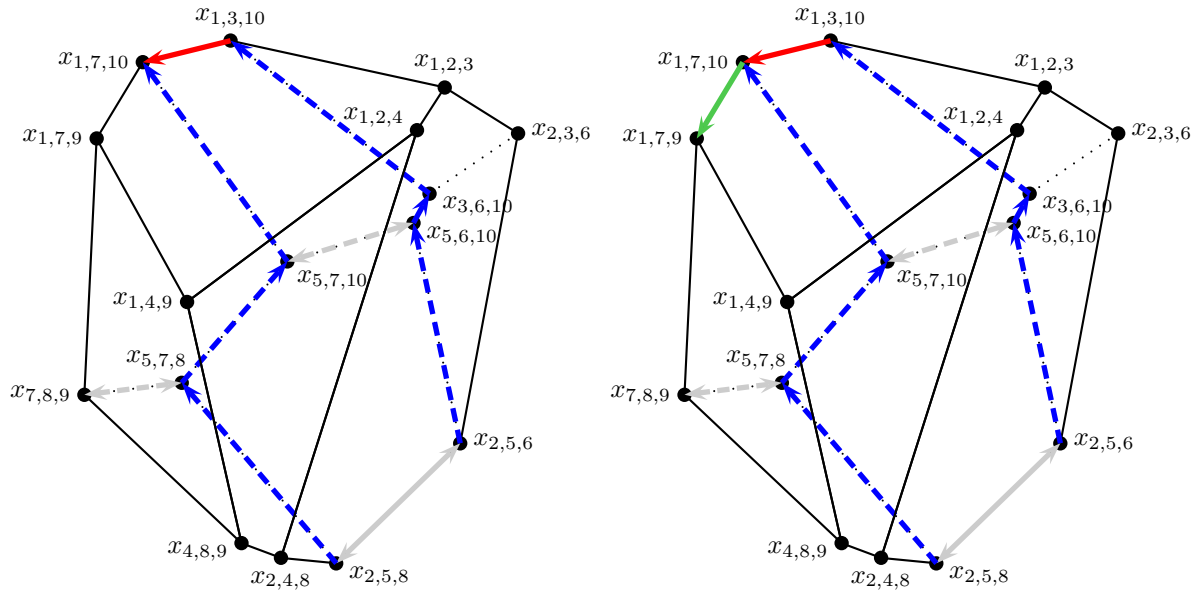




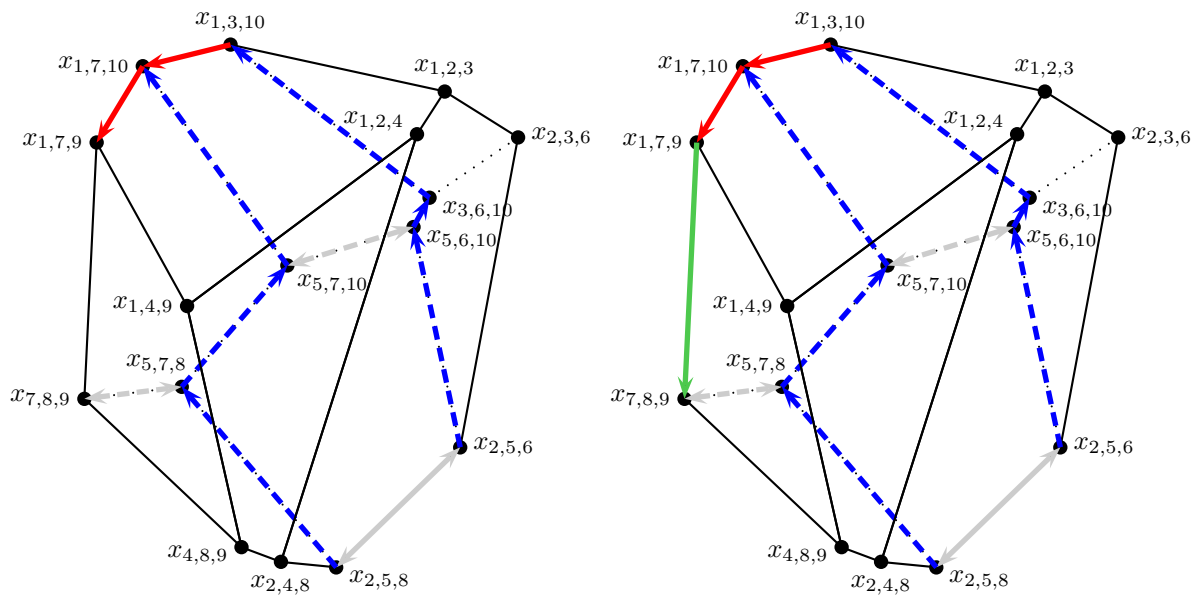
Nun sind wir an der schlechtesten Ecke bezüglich unserer Zielfunktion  $\max x^3$  angekommen. Hier können natürlich keine weiteren Abstiegsrichtungen aufgefunden werden. Daher sind erneut Rückwärtsschritte erforderlich.

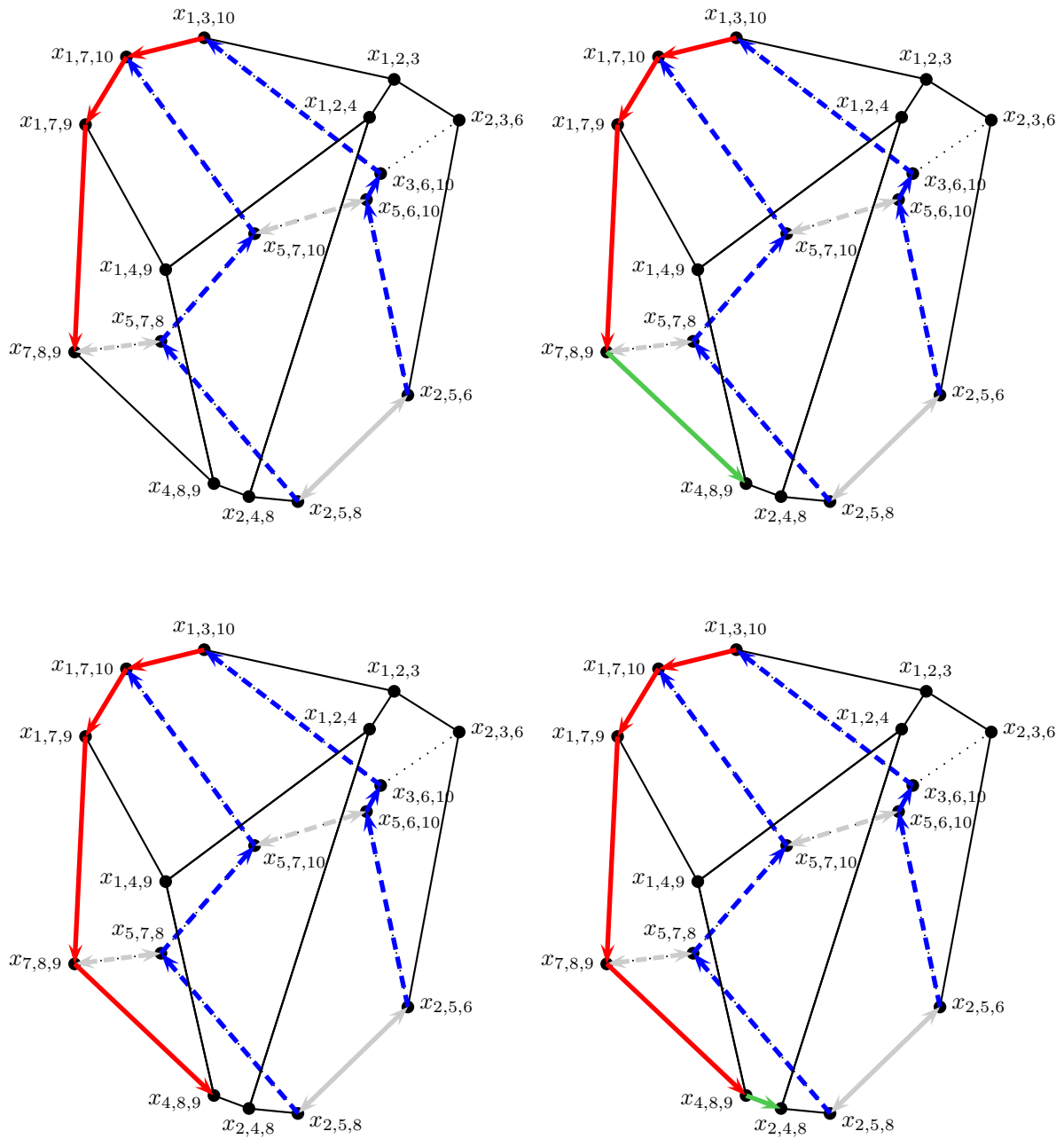


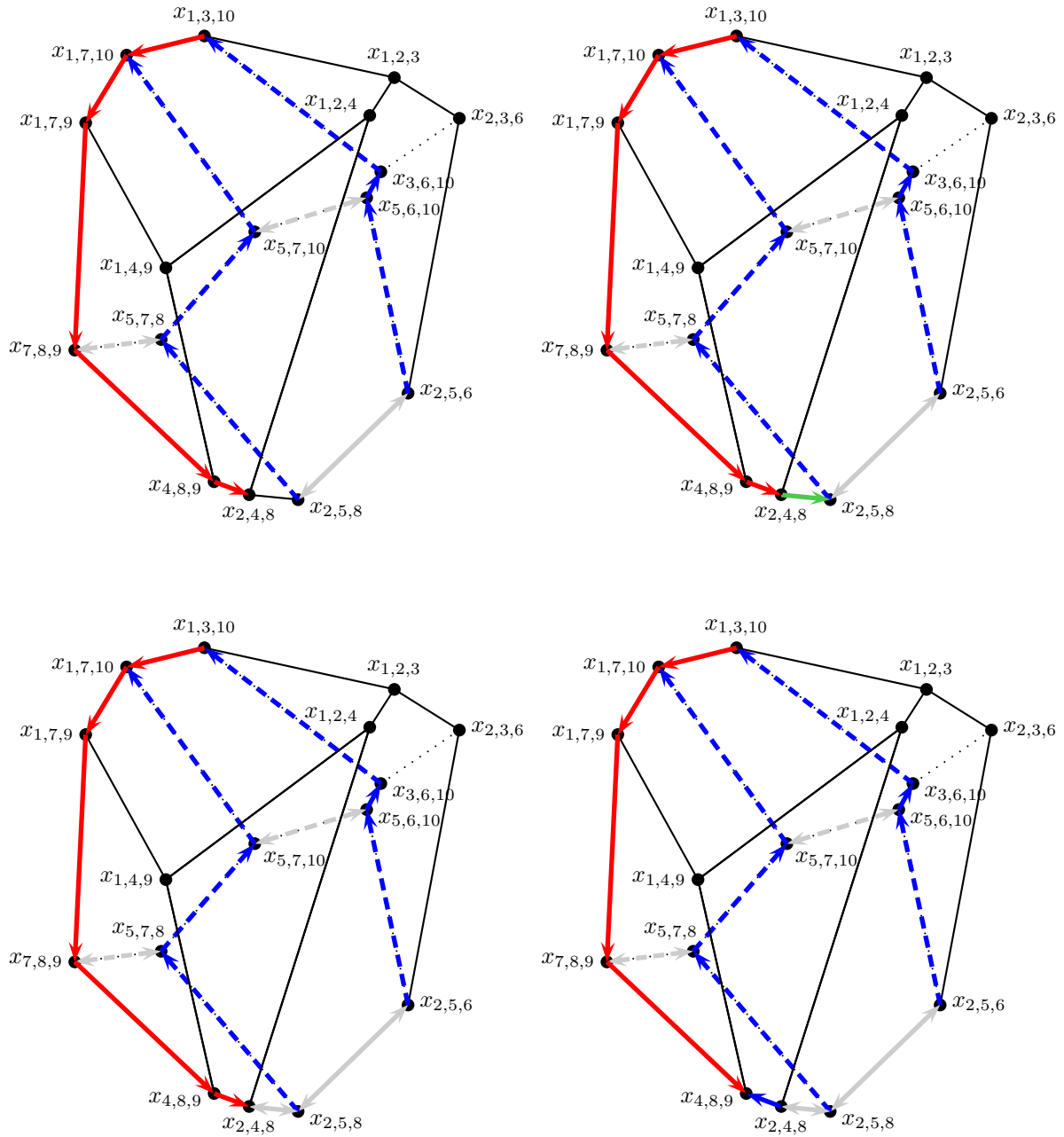




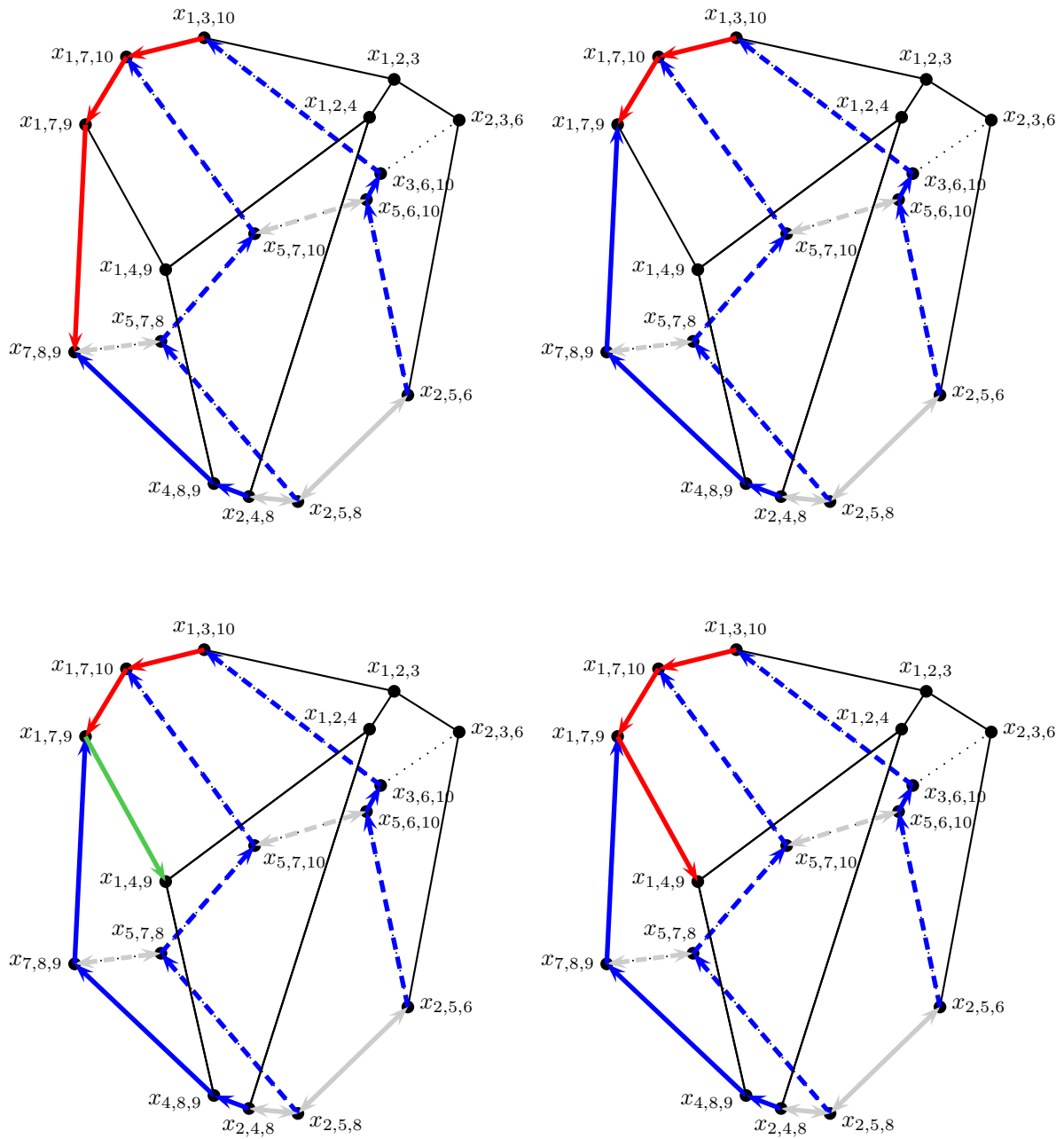
An der Ecke  $x_{1,7,10}$  ist wieder eine Abstiegsrichtung für die reverse Blandüberprüfung vorhanden. Der Test fällt hier positiv aus.



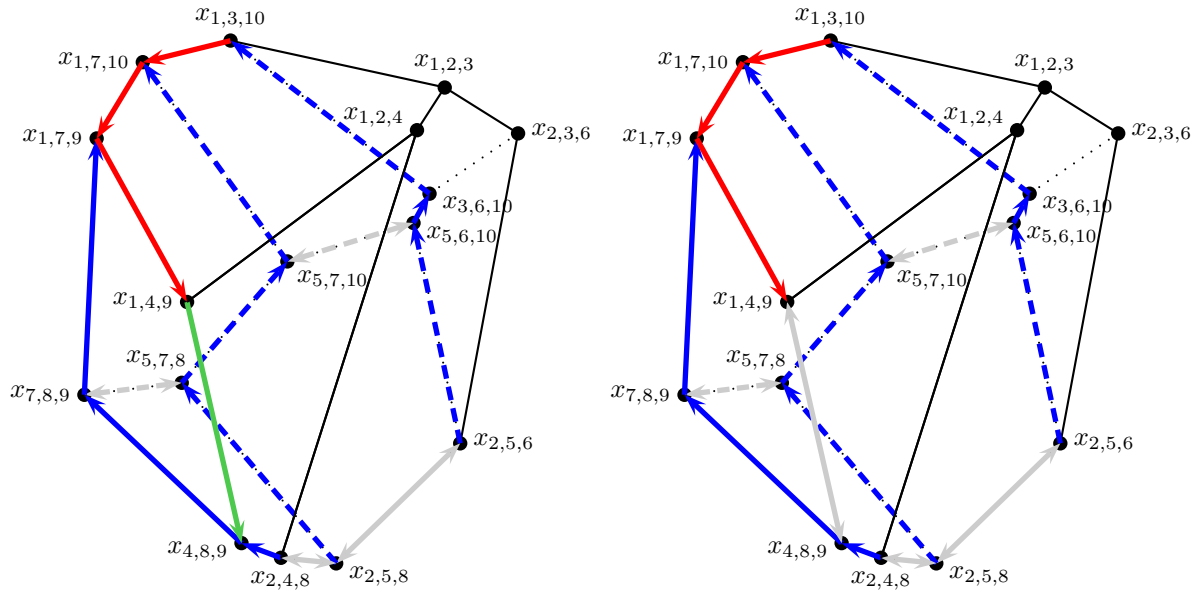




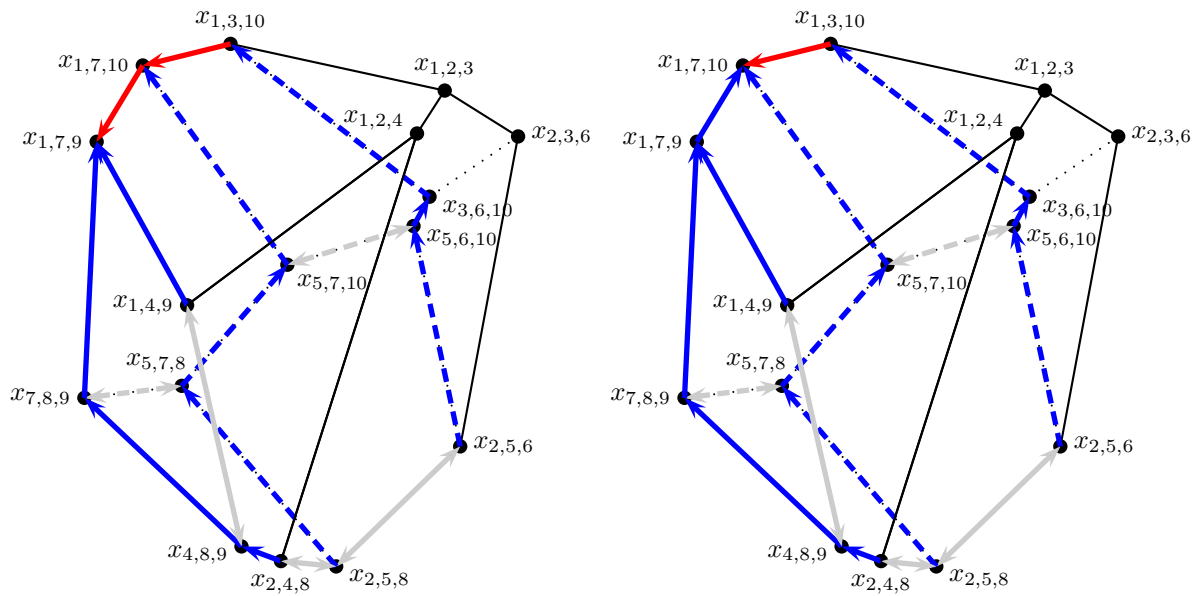
Wir sind erneut in einer Sackgasse gelandet. Erst wenn wir bis zur Ecke  $x_{1,7,9}$  zurückgelaufen sind, finden wir eine neue Abstiegsrichtung.

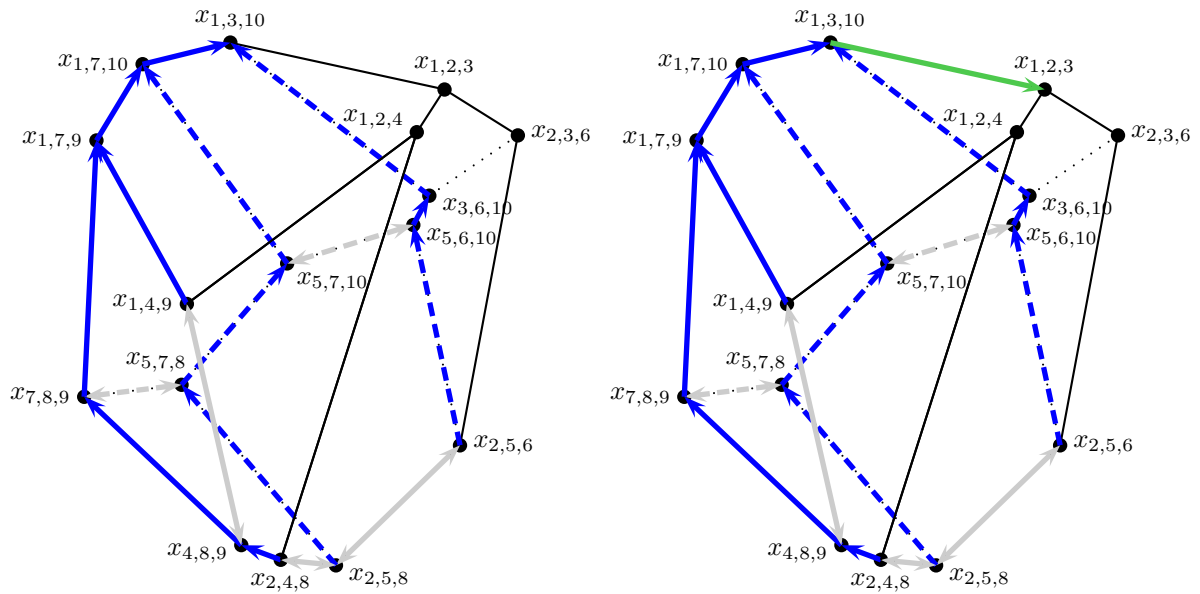


Bei der Ecke  $x_{1,7,9}$  erlaubt uns die reverse Pivotüberprüfung einen Vorwärtsschritt zur Zielecke  $x_{1,4,9}$ .

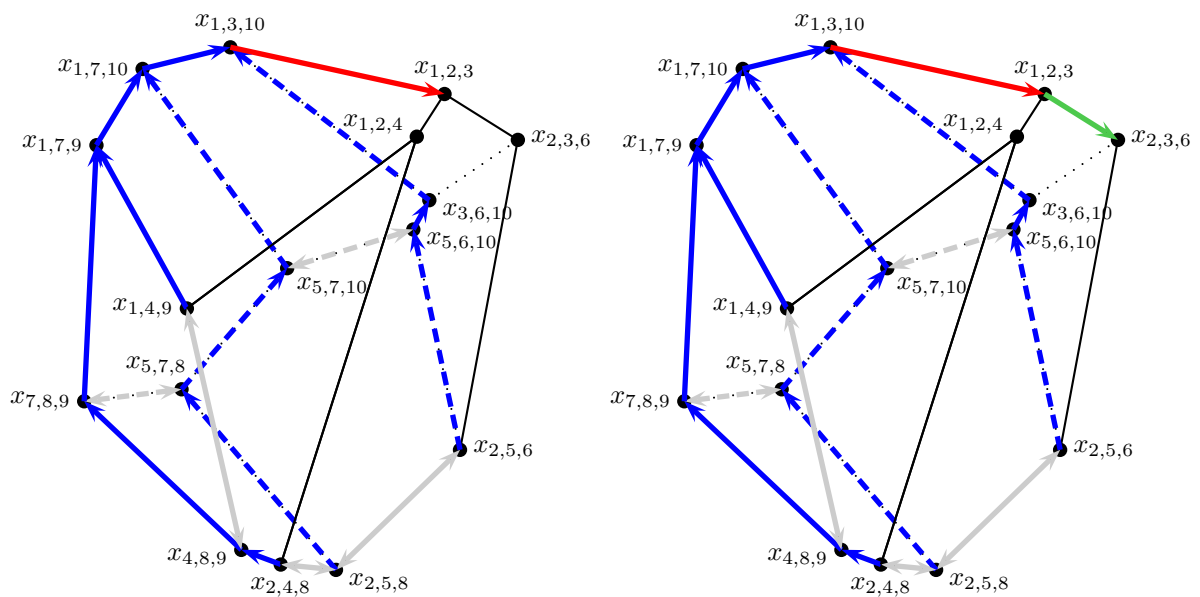


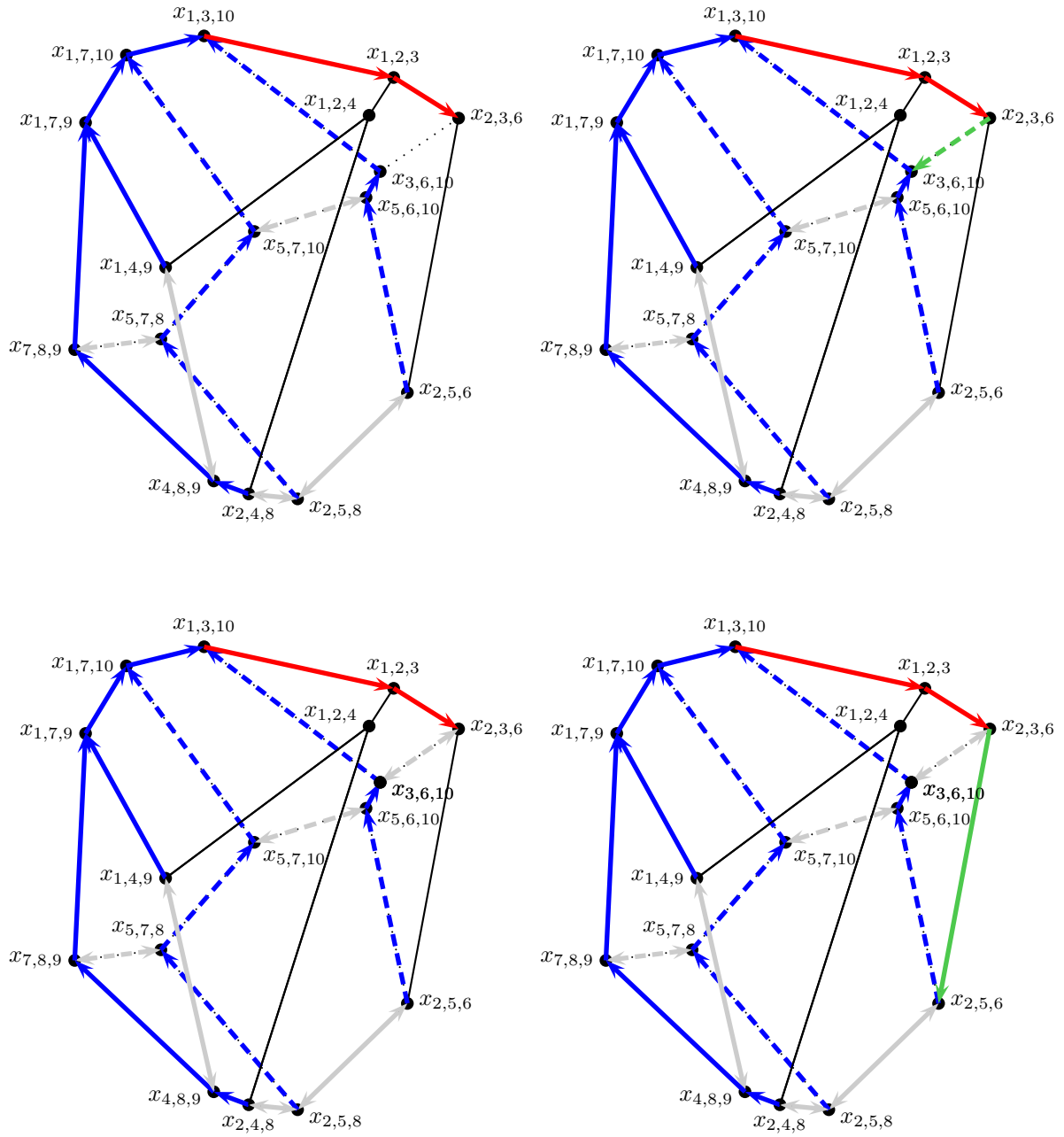
Die Bedingungen für einen reversen Pivotschritt zur Ecke  $x_{4,8,9}$  werden hier nicht erfüllt („Index 4 < Index 8“). Daher erfolgt erneut eine Rückwärtswanderung, welche erst wieder bei der Startecke stoppt.

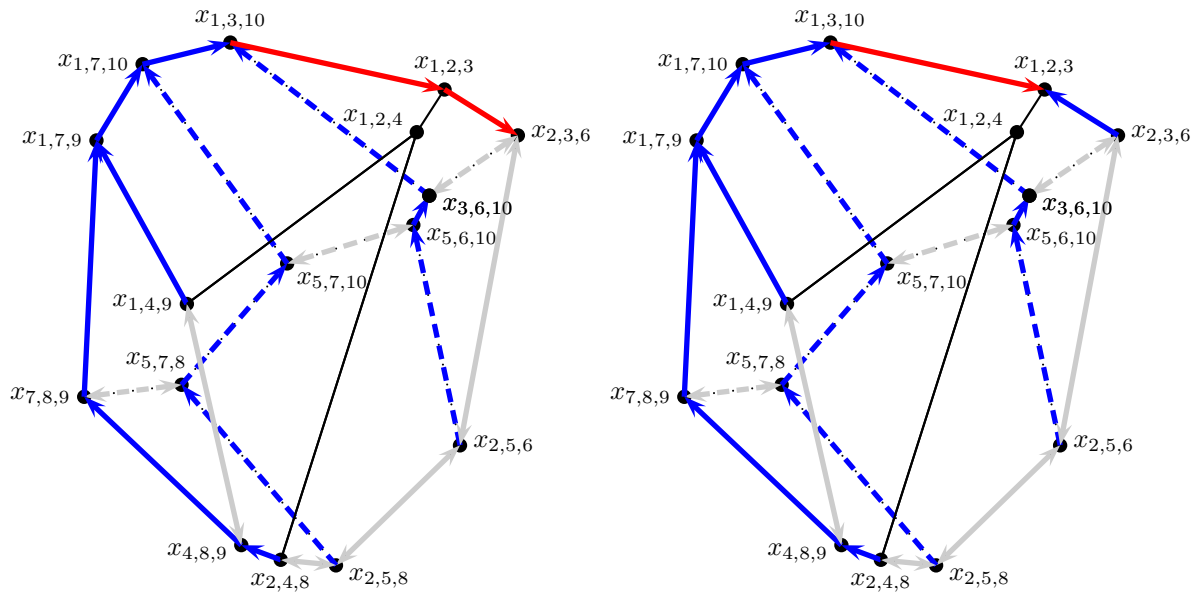




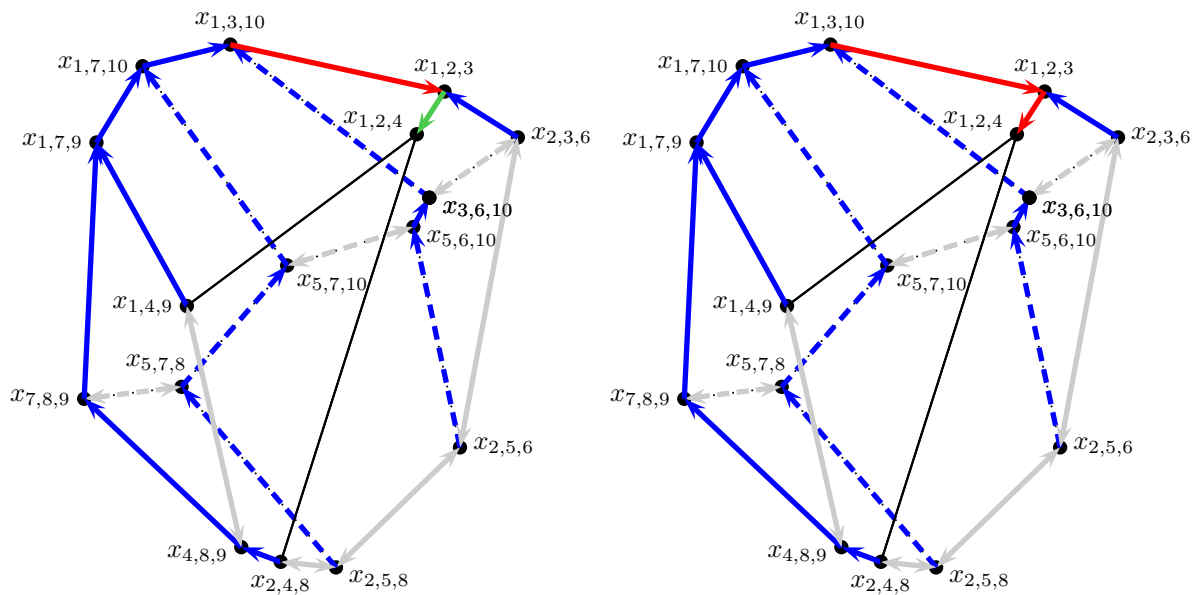
An der Startecke verbleibt nur noch eine Abwärtskante. Die Benutzung dieser ist der Beginn für die nächsten Vorwärtsschritte.



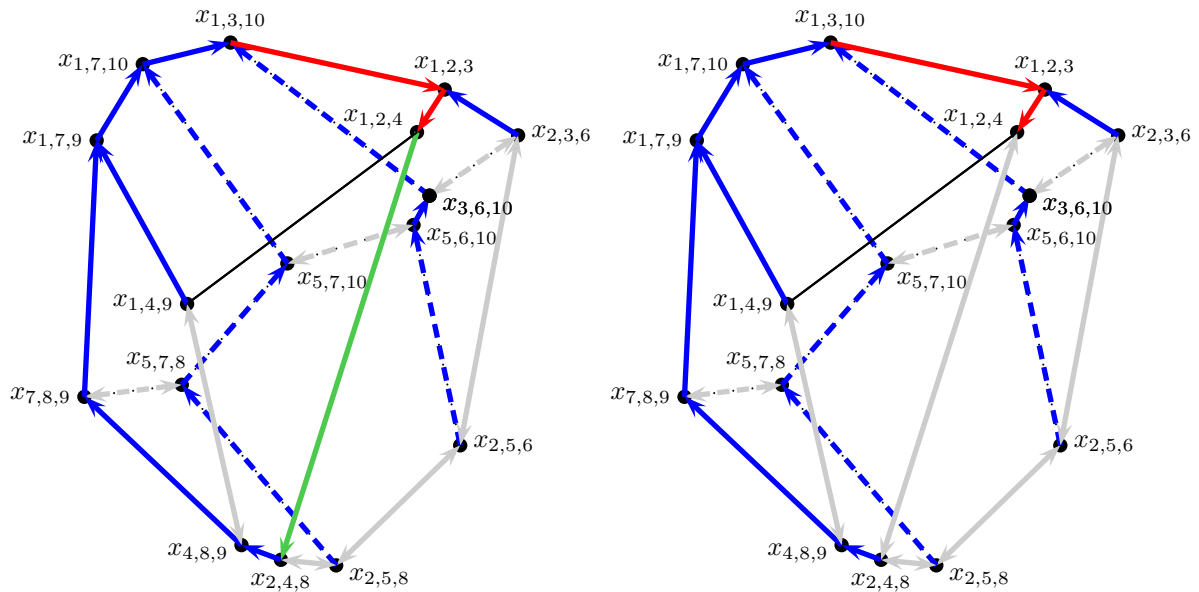




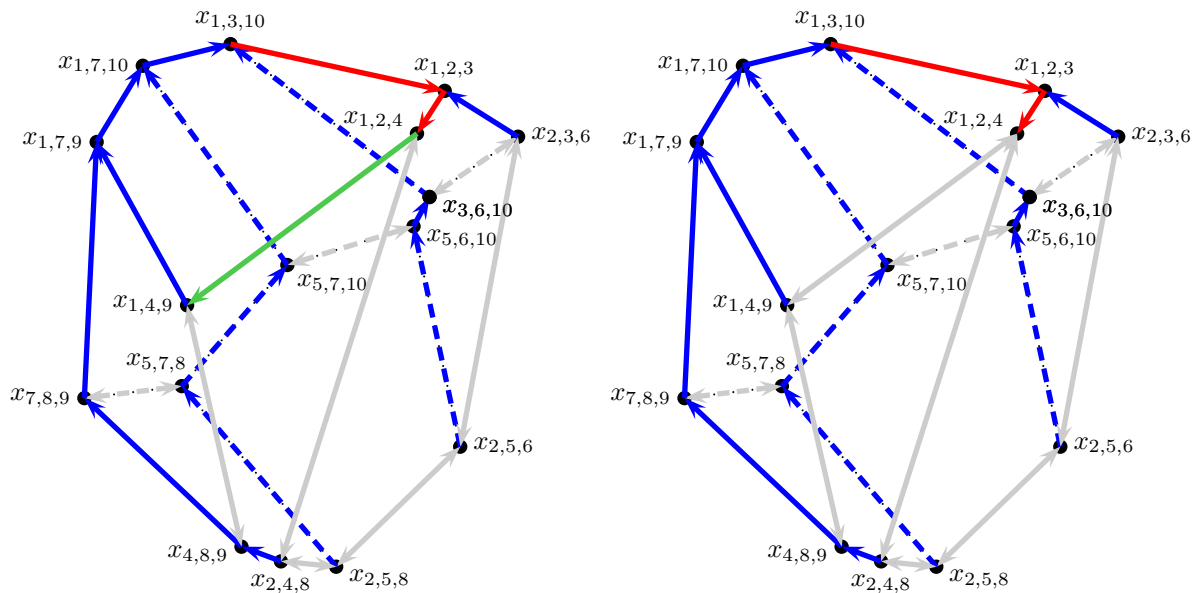
Wir sind erneut in einer Sackgasse gelandet. Nach einem Rückwärtsschritt jedoch finden wir bereits wieder eine noch zu untersuchende Abstiegsrichtung.



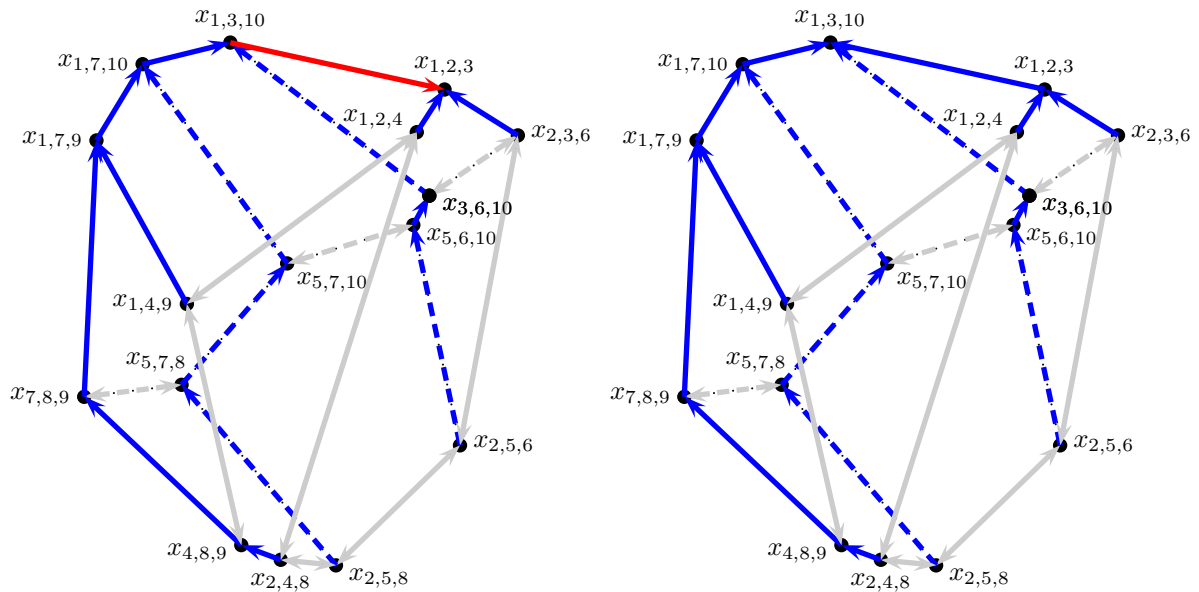




Nun erfolgt jeweils die reverse Blandüberprüfung zu den beiden noch übrig gebliebenen Kanten. Da diese jeweils zu bereits besuchten Ecken führen, ist klar, dass hieraus keine Vorwärtsschritte resultieren können. Dementsprechend fallen auch die Tests für die reversen Pivotschritte negativ aus.

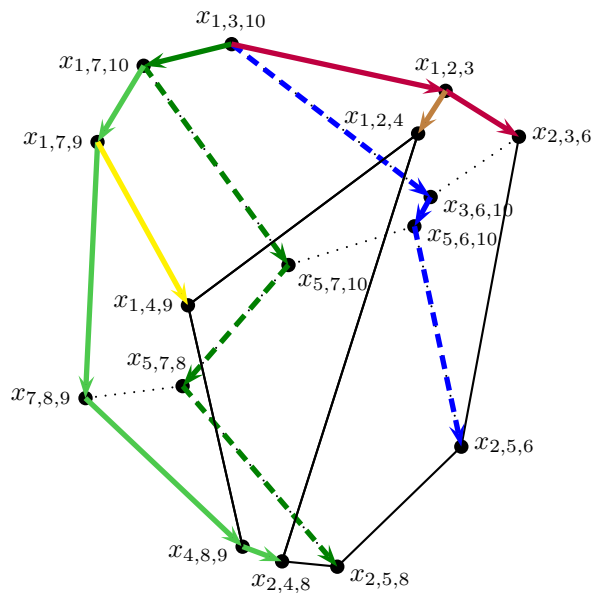


Auch wenn nun alle Kanten überprüft und schon längst sämtliche Ecken besucht wurden, ist dies dem Algorithmus noch nicht bekannt. Er wird nun mittels Rückwärtsschritten versuchen, noch unbekannte Abstiegs-kanten aufzufinden.



An der Startecke angekommen, findet der Algorithmus keine weiteren Abstiegsrichtungen und erkennt daran, dass die Ecken des Polyeder bereits vollständig aufgefunden wurden.

Das letzte Bild visualisiert in verschiedenen Farben die Pfade (aus Vorwärtsschritten) im Algorithmus, die zum Auffinden aller Ecken im Polyeder geführt haben.



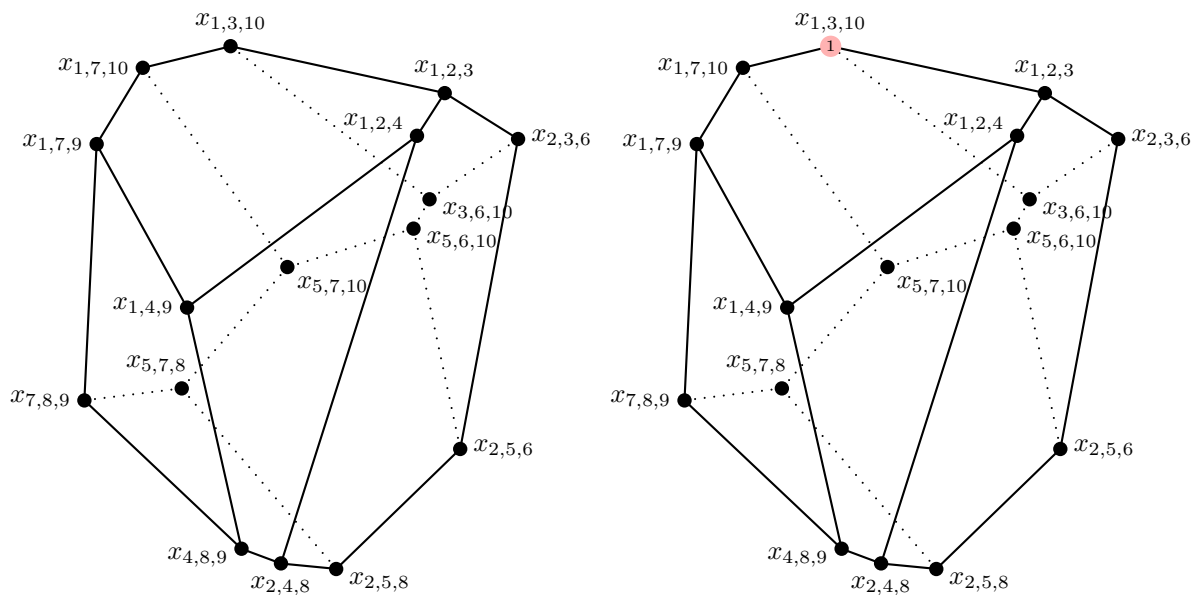
## C.3 Der Shelling-Algorithmus

Nun folgt eine bildliche Veranschaulichung der Vorgehensweise des Shelling-Algorithmus. Wie beim Verfahren von Avis und Fukuda wurde dazu als Zielfunktion

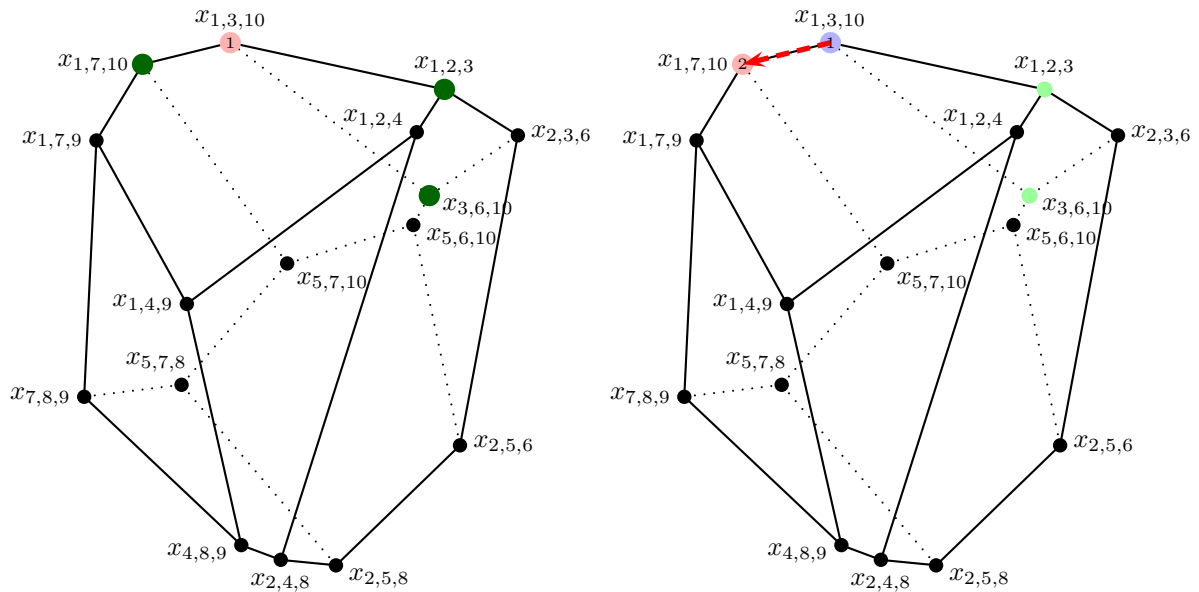
$$\max e_3^T x$$

gewählt. Hier werden die Ecken in der Reihenfolge ihrer Zielfunktionswerte – also sortiert nach ihren  $x^3$ -Werten – aufgesucht.

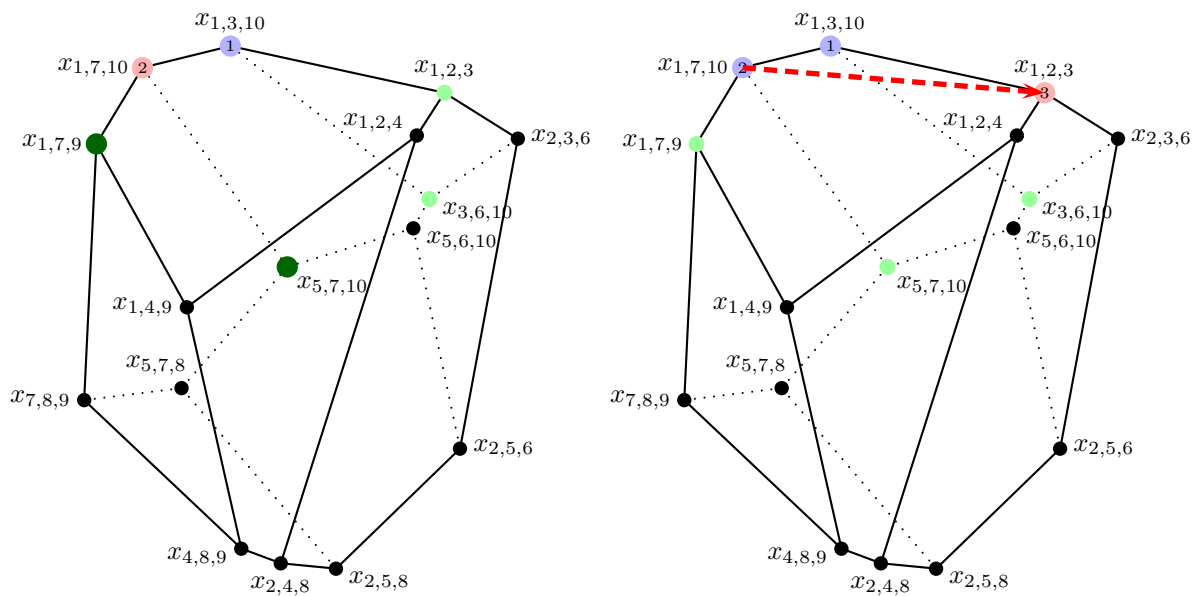
Bereits abgearbeitete Ecken werden jeweils mit einer Nummer versehen, die uns die Reihenfolge wiedergibt. Die derzeitige Ecke, an der wir uns befinden, wird rot gefärbt. Schon verlassene Ecken werden blau markiert. In grün werden diejenigen Ecken hervorgehoben, die zwar als Nachbarn bereits abgearbeiteter Ecken entdeckt, allerdings aufgrund ihres Zielfunktionswertes ( $x^3$ -Wertes) noch nicht besucht wurden. Dabei bedeutet die dunkelgrüne Farbe, dass diese Ecken gerade erst der Hilfsliste hinzugefügt wurden. Hellgrüne Ecken sind schon länger in der Hilfsliste. Die Crashing-Schritte werden stets mit einem gestrichelten roten Pfeil gekennzeichnet, welche die Ausgangs- und Zielecke direkt miteinander verbindet. Es werden also nicht alle Einzelpivotschritte beim Crashing-Verfahren dargestellt.



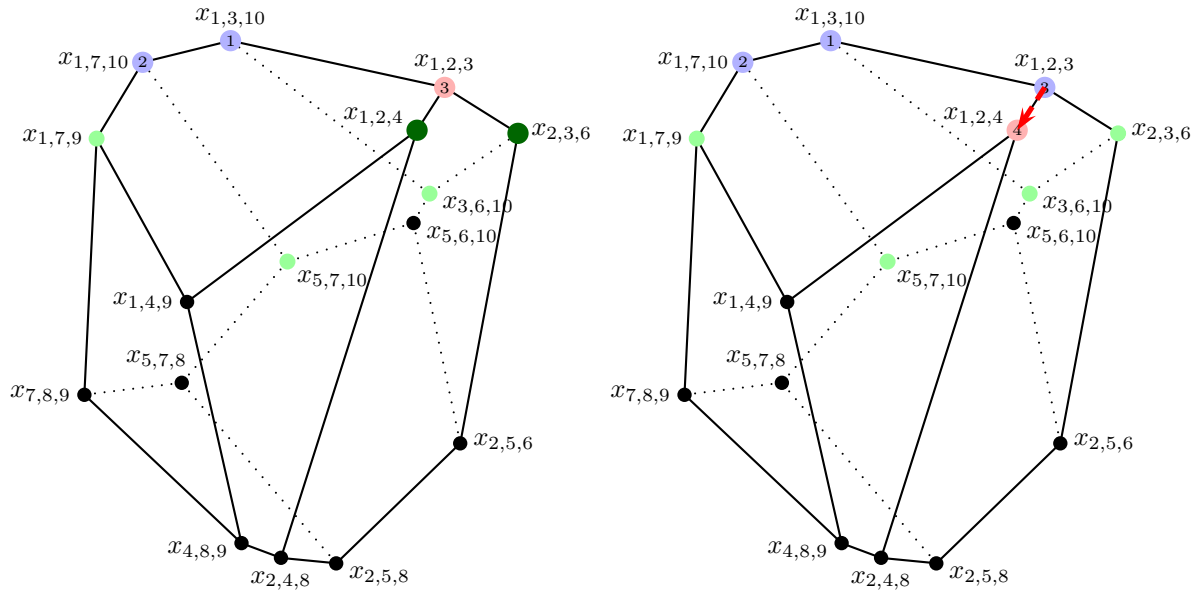
Wir beginnen bei der Ecke  $x_{1,3,10}$ . Sie weist den höchsten  $x^3$ -Wert auf und stellt somit unseren Ausgangspunkt dar. Von dort sind drei Nachbarecken auffindbar.



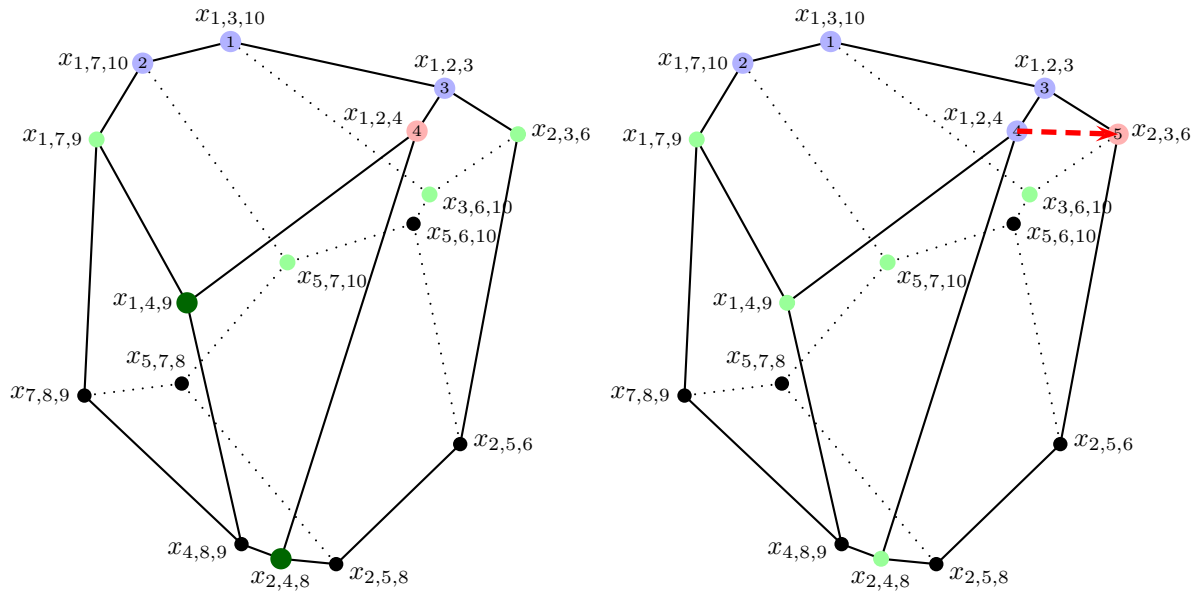
Den höchsten  $x^3$ -Wert unter den grün markierten Ecken weist  $x_{1,7,10}$  auf. Daher wird nun zu dieser pivotisiert. Da es sich hier noch um einen direkten Nachbarn der Ausgangsecke handelt, erfordert der Crashing-Algorithmus nur einen Pivotschritt.

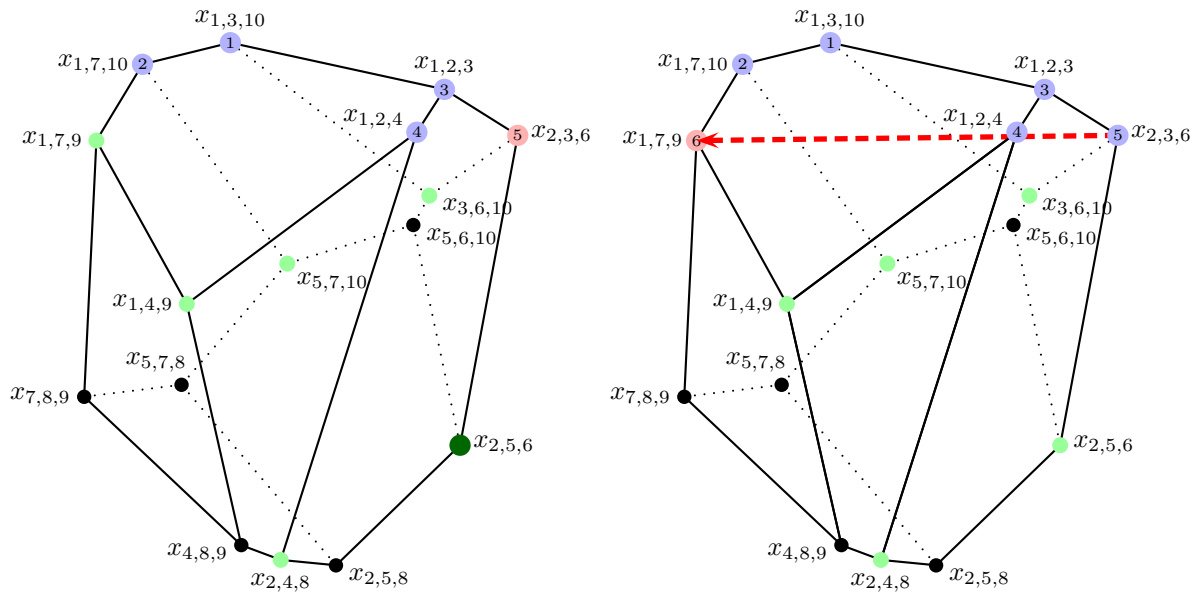


Nun sind zwei weitere (noch nicht gefundene) Nachbarecken zu sehen, die der Hilfsliste hinzugefügt werden. Anschließend wird der Crashing-Algorithmus zum Erreichen der Ecke  $x_{1,2,3}$  ausgeführt, der nach zwei Pivotschritten zum Ziel gelangt.

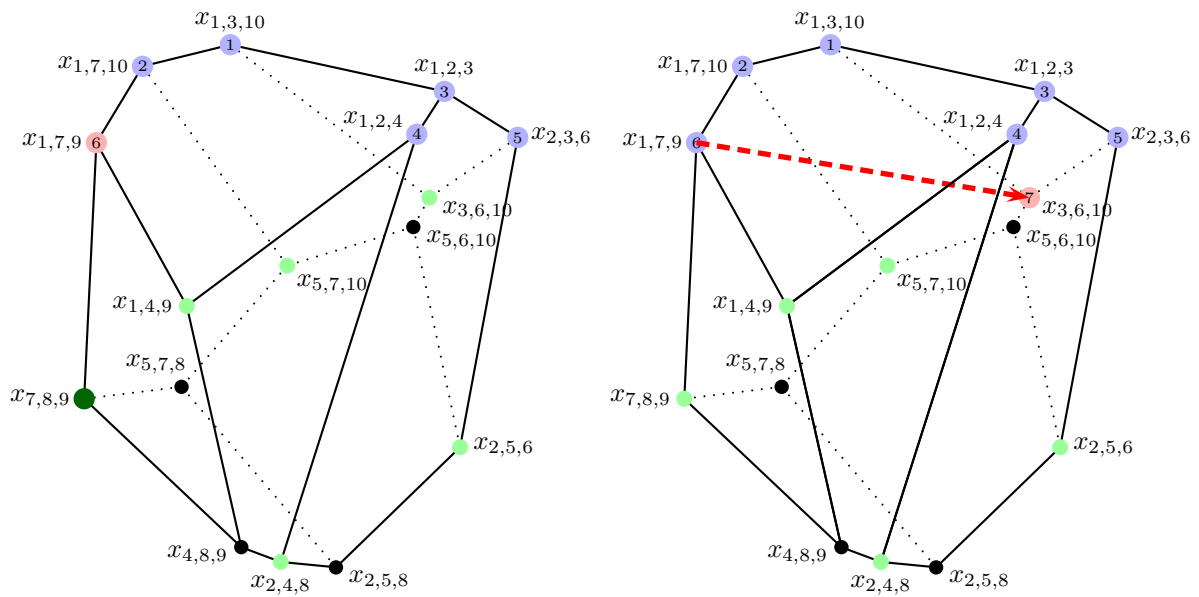


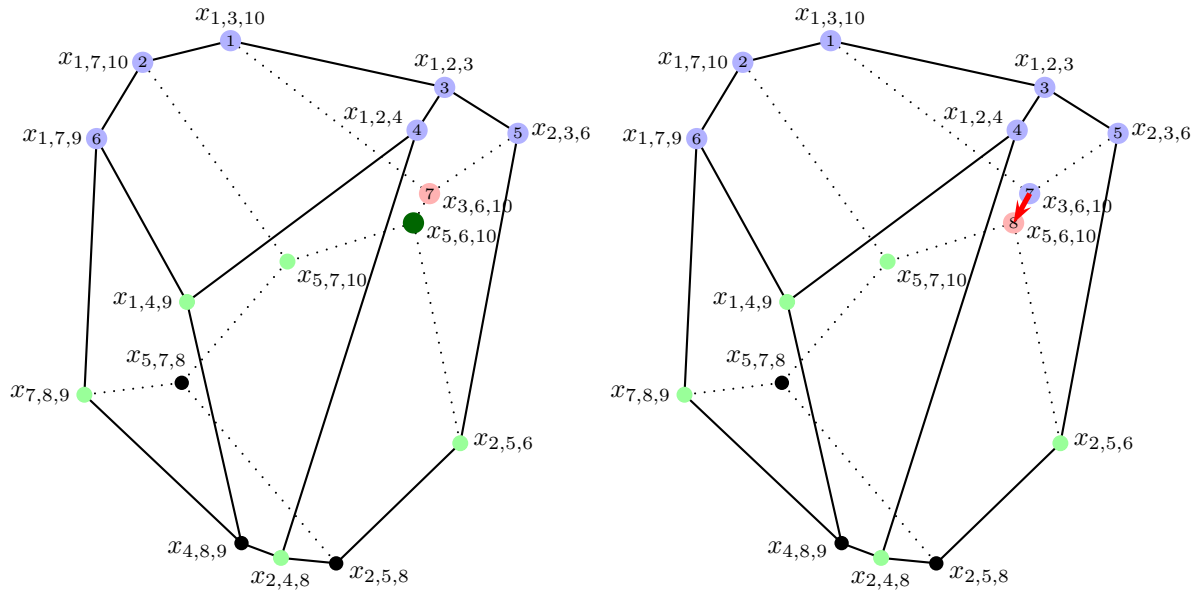
Die nachfolgenden Schritte laufen nun grundsätzlich analog ab.



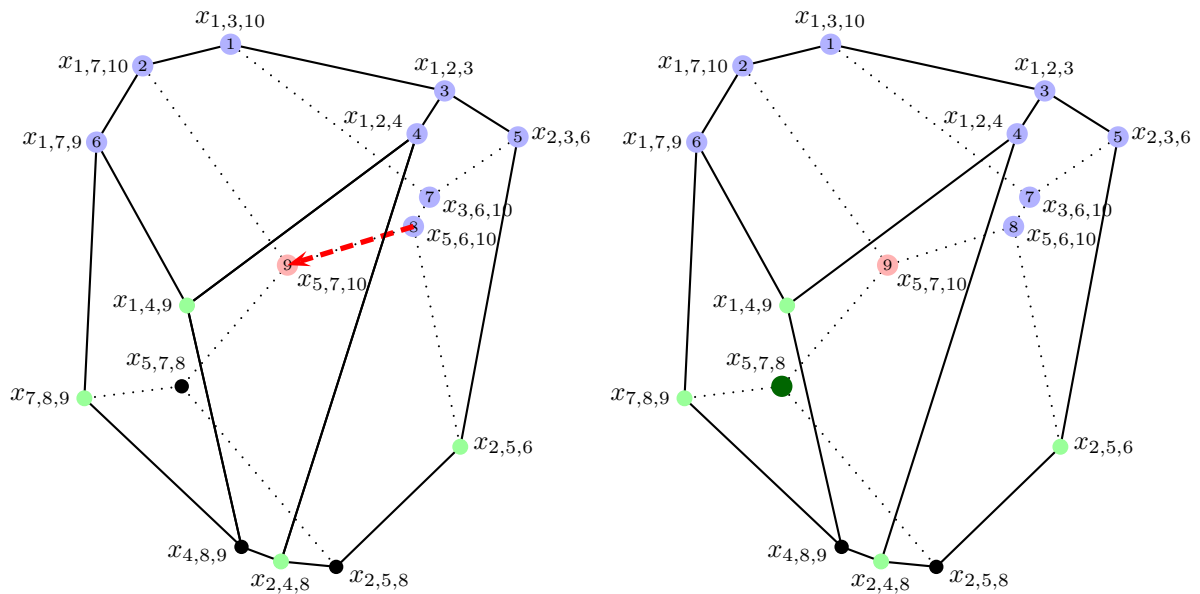


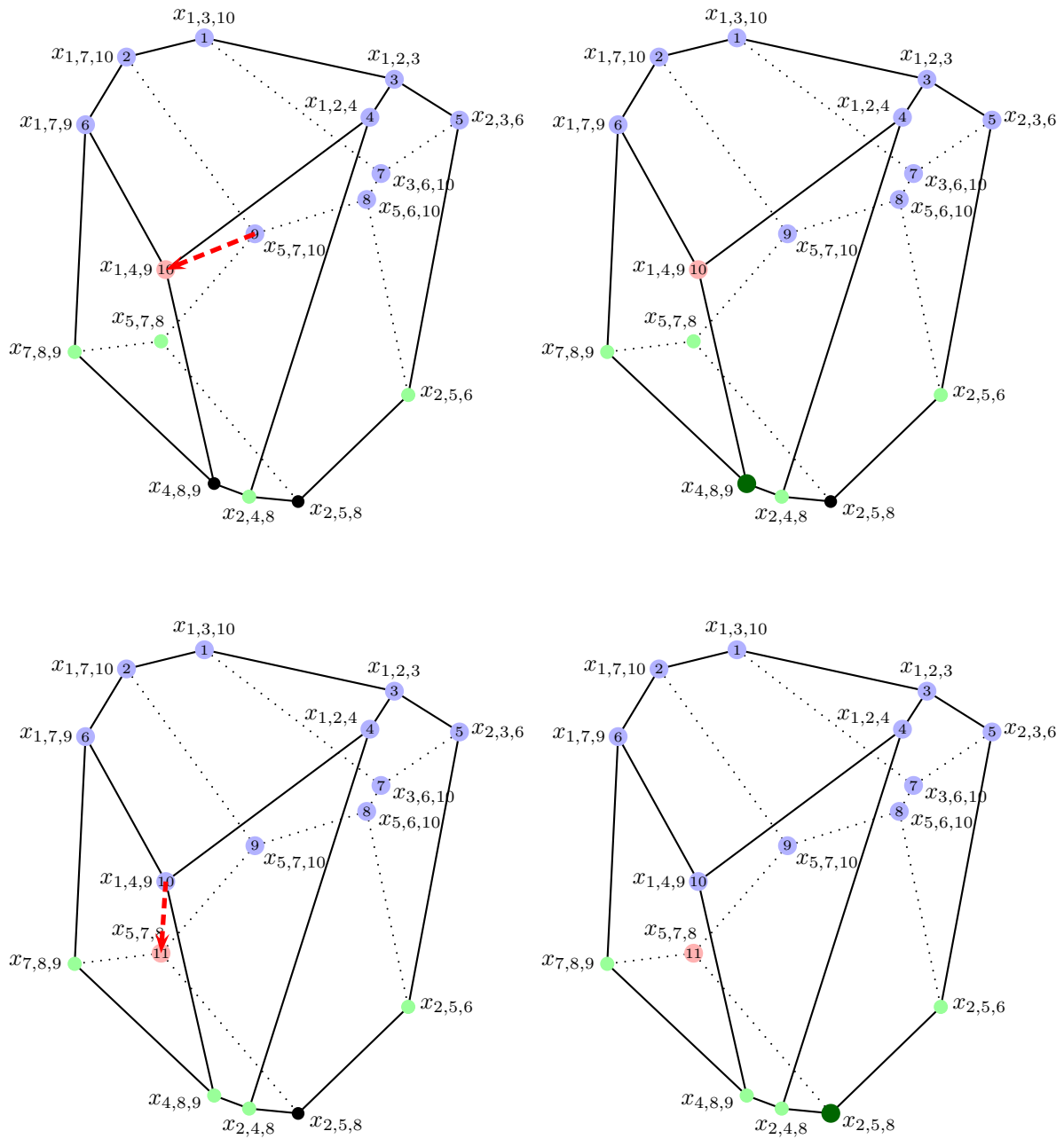
An unserer fünften Ecke  $x_{2,3,6}$  finden wir einen Nachbarn, der bereits in der Hilfsliste gespeichert ist. Dieser wird natürlich nicht noch einmal eingefügt.





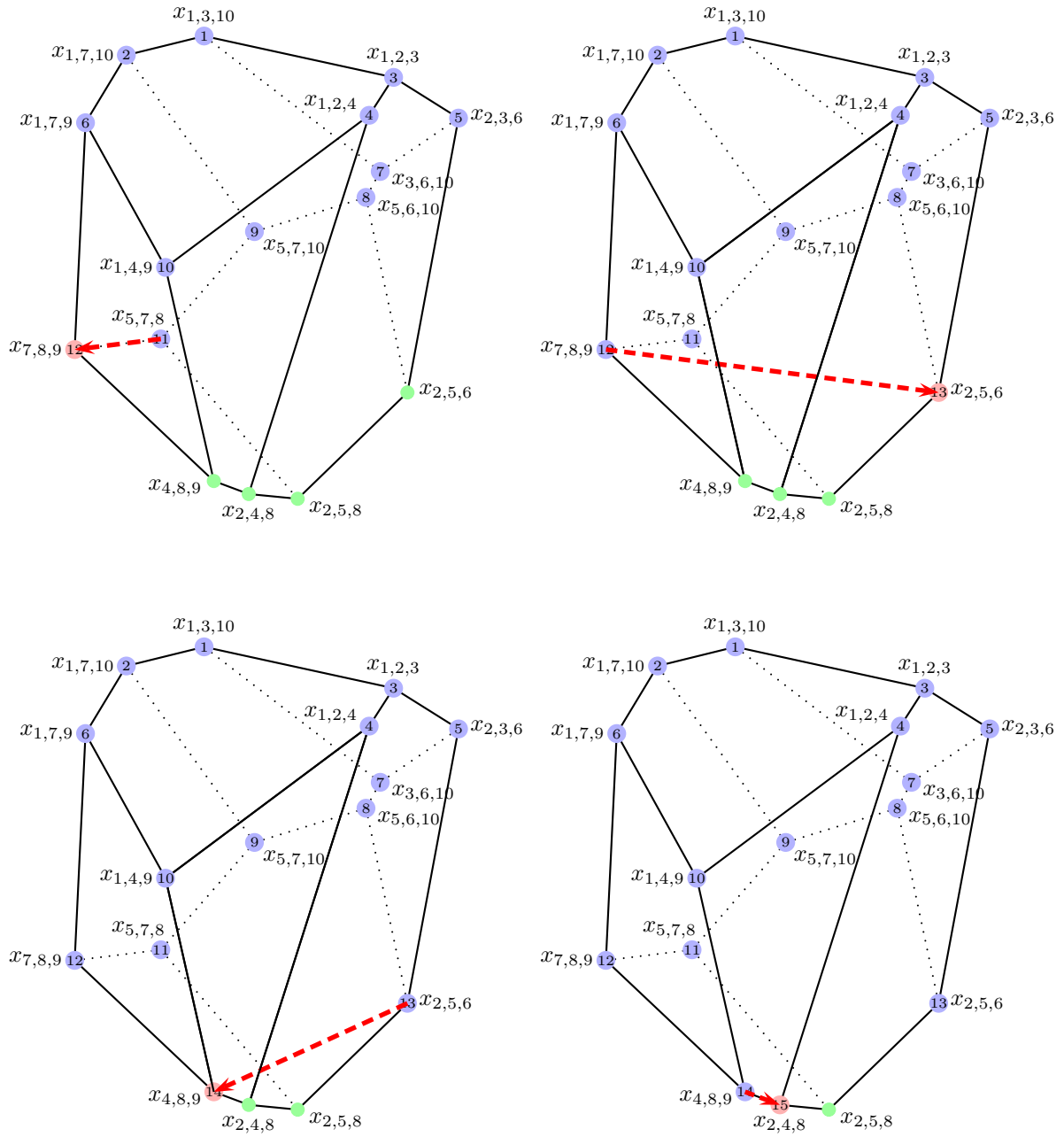
An der achten Ecke  $x_{5,6,10}$  sind gar keine neuen Nachbarn auffindbar. Wir können also gleich die nächste Ecke ansteuern.

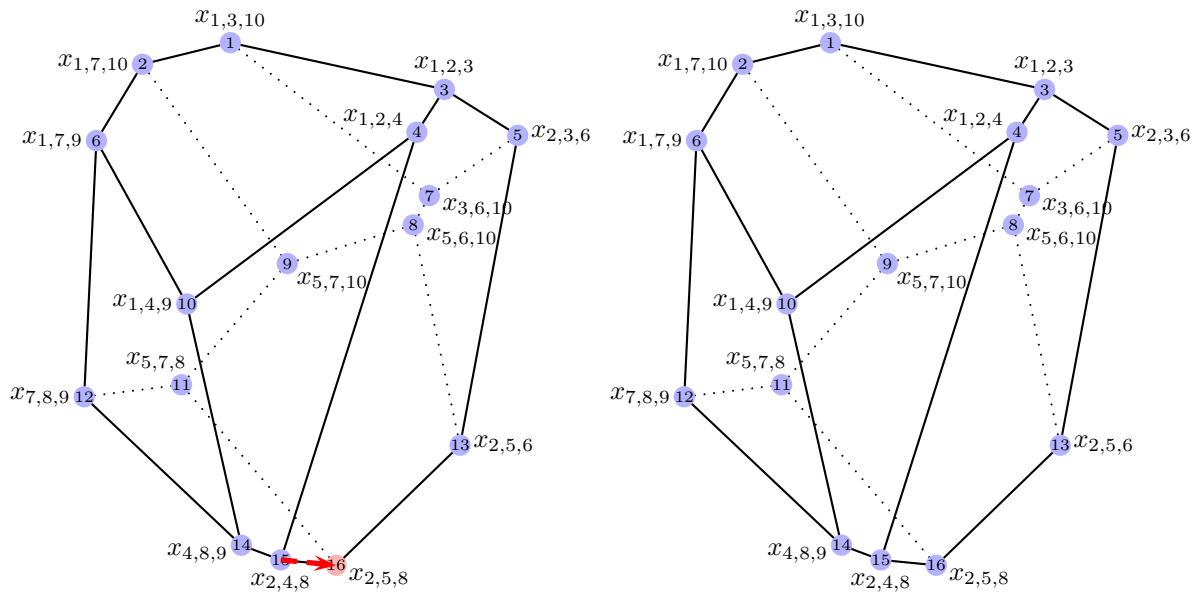




An der elften Ecke wird nun die letzte Ecke erkannt und zumindest in die Hilfsliste aufgenommen. Der Algorithmus kann dies hier allerdings noch nicht erkennen. Es werden daher nun stets Vorwärtsschritte mittels Crashing-Algorithmus erfolgen, bis die Hilfsliste abgearbeitet ist.





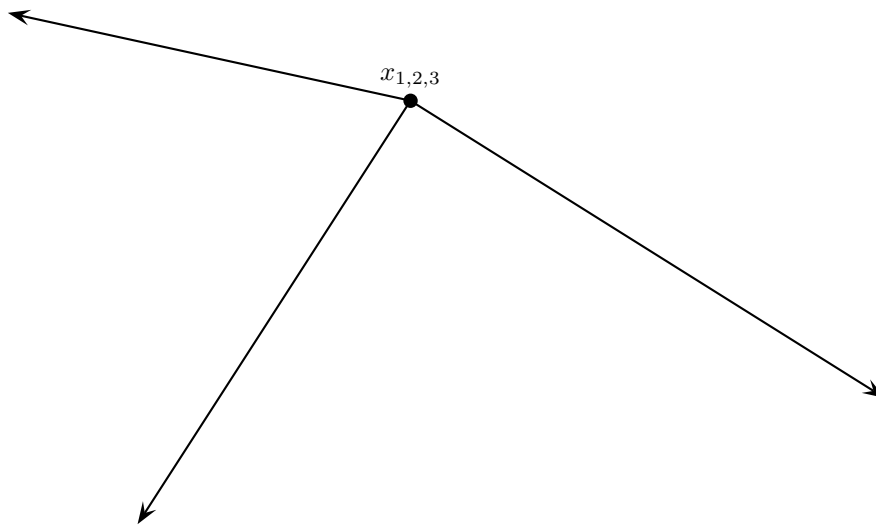


Nun an der letzten Ecke angekommen ist die Hilfsliste leer und der Algorithmus terminiert.

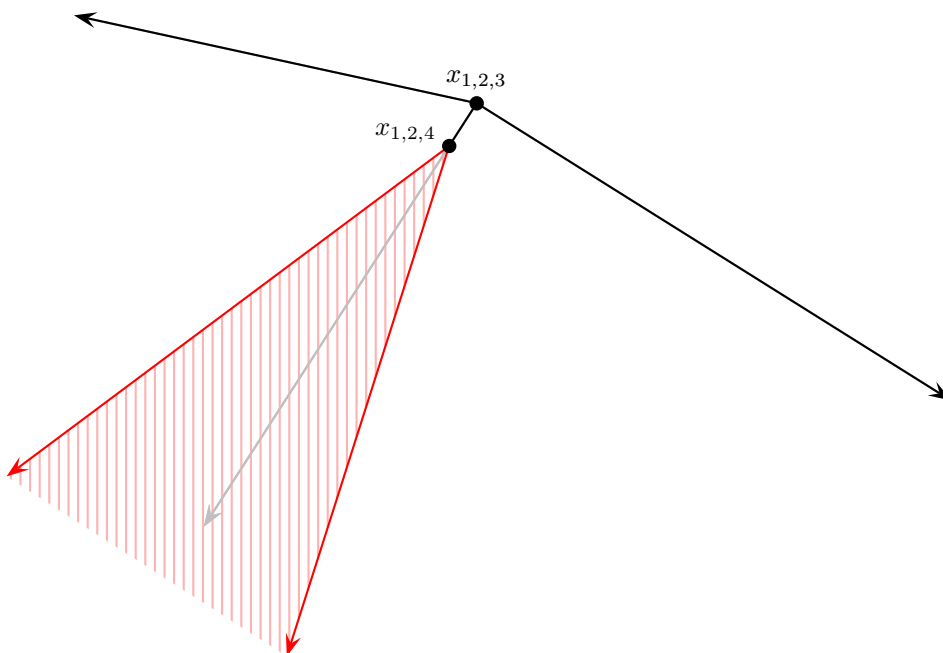
## C.4 Die Double-Description-Methode

Nachfolgend wird die Vorgehensweise der Double-Description-Methode dargestellt. Dabei deuten Pfeile auf freie Richtungen hin. Rot markierte Facetten veranschaulichen den Schnitt durch das Polyeder bei Hinzunahme einer weiteren Restriktion. Unzulässig werdende Ecken und Kanteanteile werden wir grau färben. Für einen besseren Eindruck über die Entstehung des Polyeders wird vorrangig die gleiche Skalierung verwendet wie bei den vorherigen Verfahren. Da das Polyeder allerdings zu Beginn des Verfahrens noch eine weitaus größere Punktmenge umfasst, werden wir jedoch an einigen Stellen gezwungen sein, bei dieser Skalierung zu lange Kanten abzuschneiden. In diesen Fällen wird in einem zusätzlichen Bild eine höhere Skalierung gewählt, um auch das gesamte Polyeder zu zeigen.

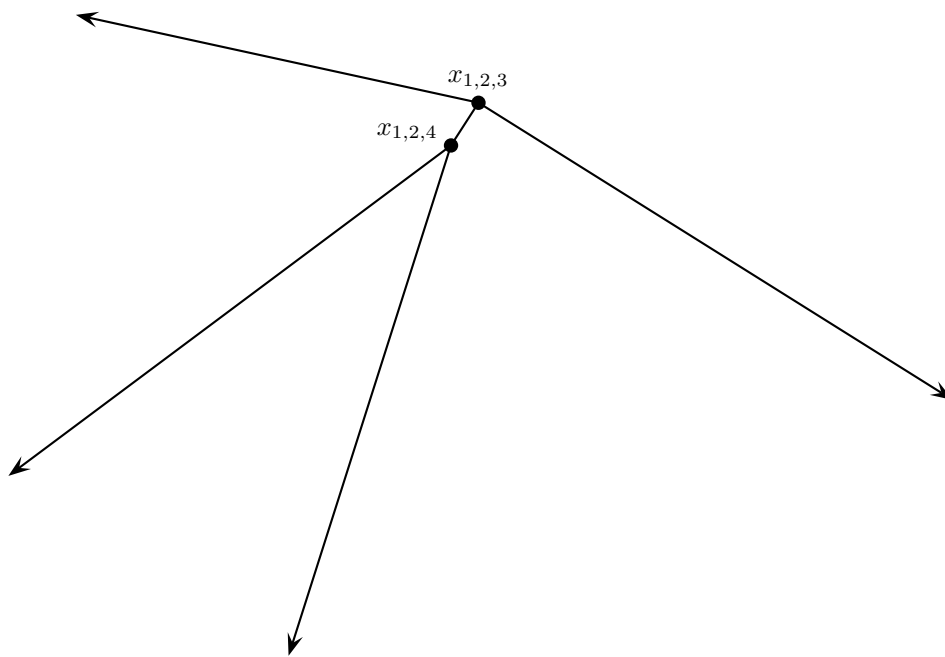
Zunächst beginnt der Algorithmus mit den ersten drei Restriktionen. Hier entsteht die Ecke  $x_{1,2,3}$  mit drei freien Richtungen. Das Resultat wird nachfolgend abgebildet.



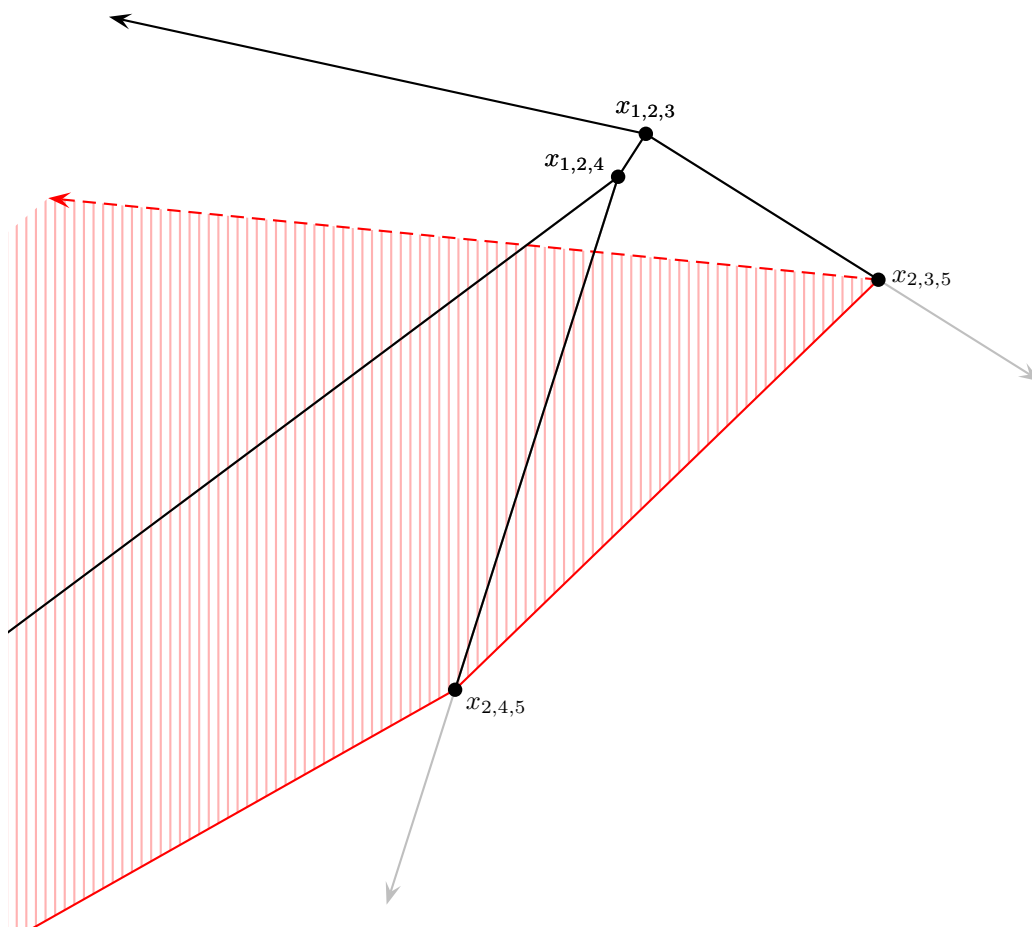
Nun wird die vierte Restriktion ins Spiel gebracht. Dabei ergibt sich eine zweite Ecke  $x_{1,2,4}$ .



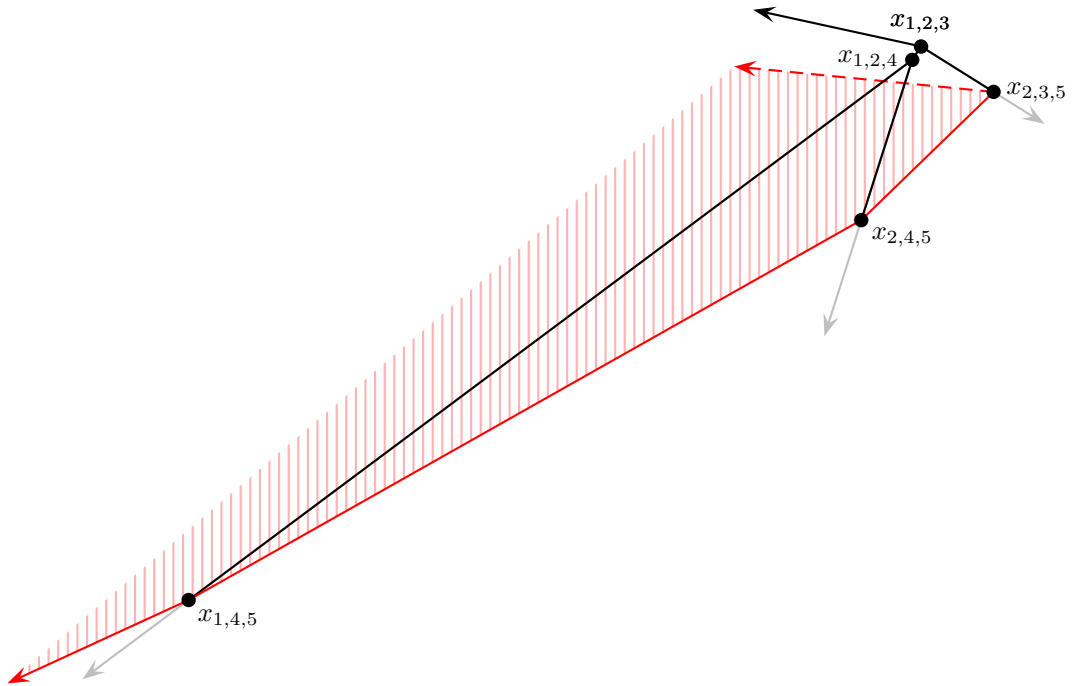
In obigem Bild ist zu sehen, dass durch die zusätzliche Hyperebene eine der freien Richtungen abgeschnitten wird. Der unzulässig werdende Teil dieser Kante ist grau markiert. Die roten Pfeile stellen die durch den Schnitt neu entstandenen freien Richtungen dar. Nachfolgende Graphik zeigt nochmal das resultierende Polyeder allerdings ohne farbliche Markierung des Schnittes und unzulässig werdende Teile des Vorgängerpolyeders.



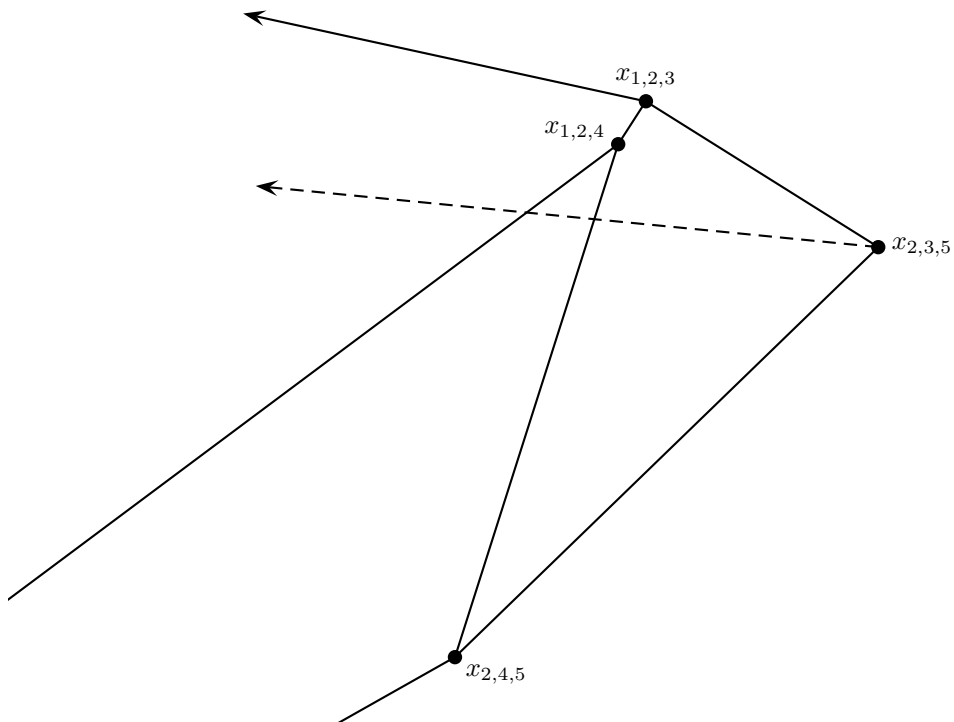
Nun wird die fünfte Restriktion mitberücksichtigt.

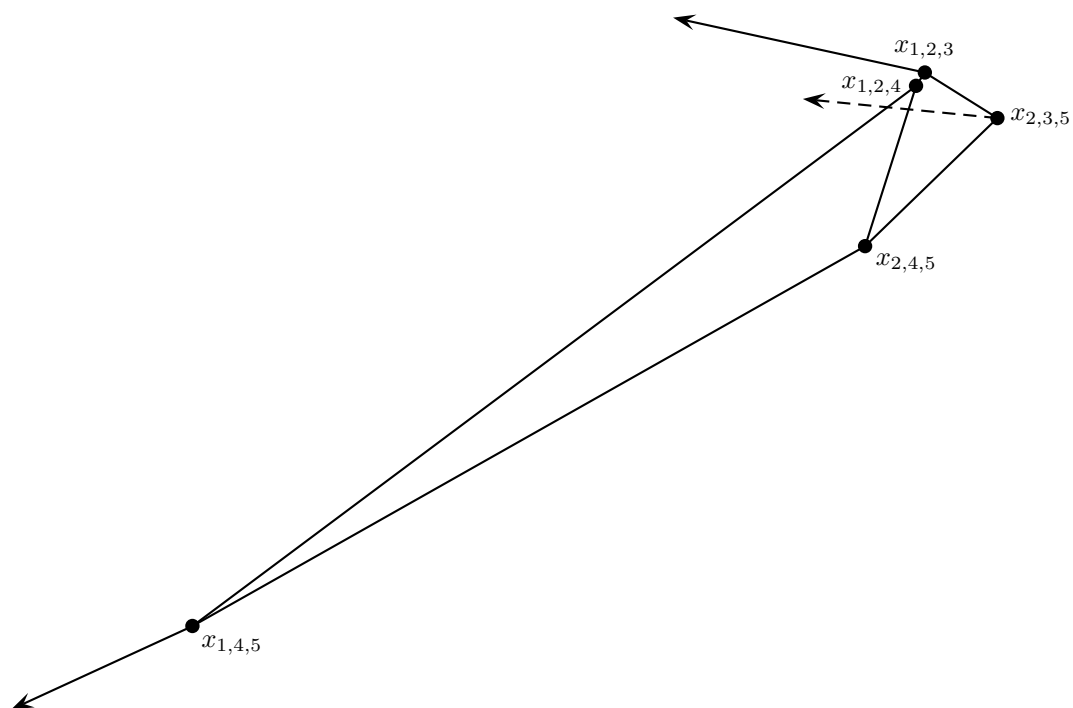


Da hier ein Schnittpunkt sehr weit weg von den anderen Ecken entsteht, ist es mit der bisher verwendeten Skalierung nicht mehr möglich, das Gesamtpolyeder darzustellen. Daher betrachten wir obiges Bild noch einmal bei höherer Skalierung:

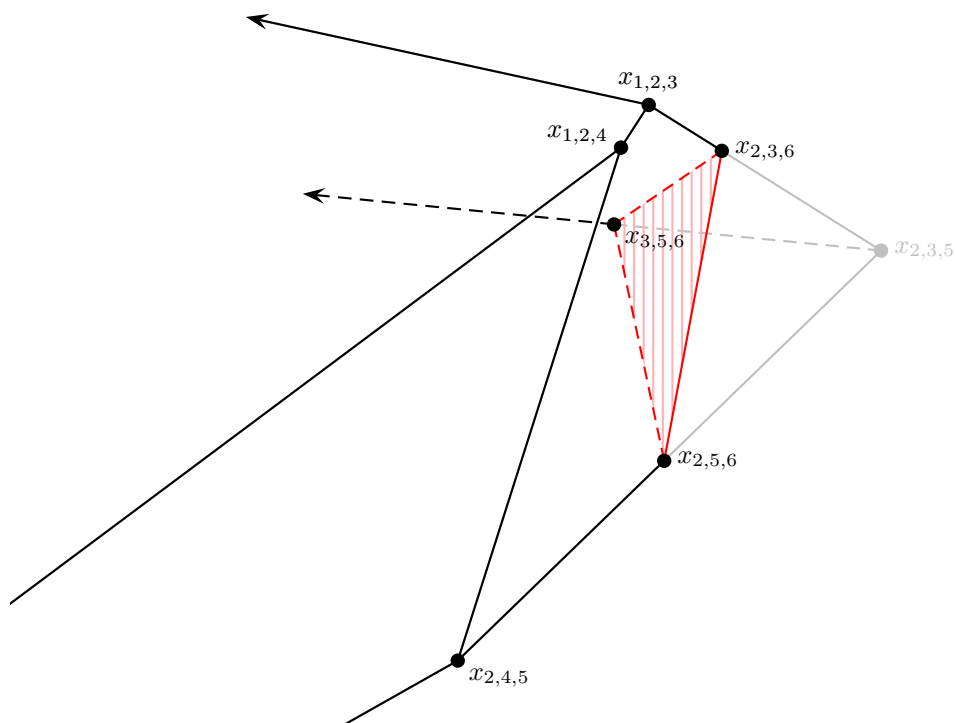


Die beiden nachfolgenden Graphiken zeigen das resultierende Polyeder in den verwendeten Skalierungen ohne zusätzliche farbliche Markierungen.

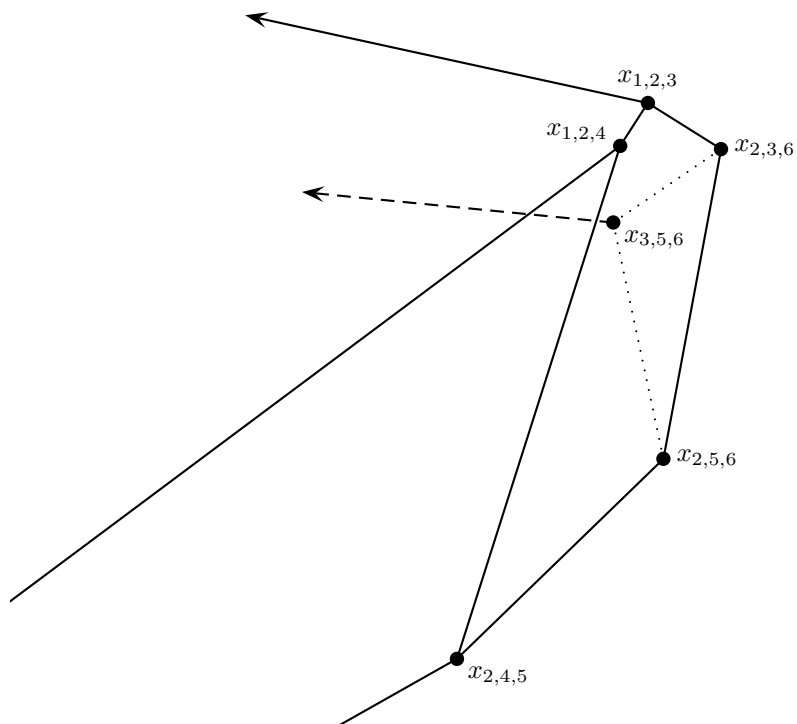




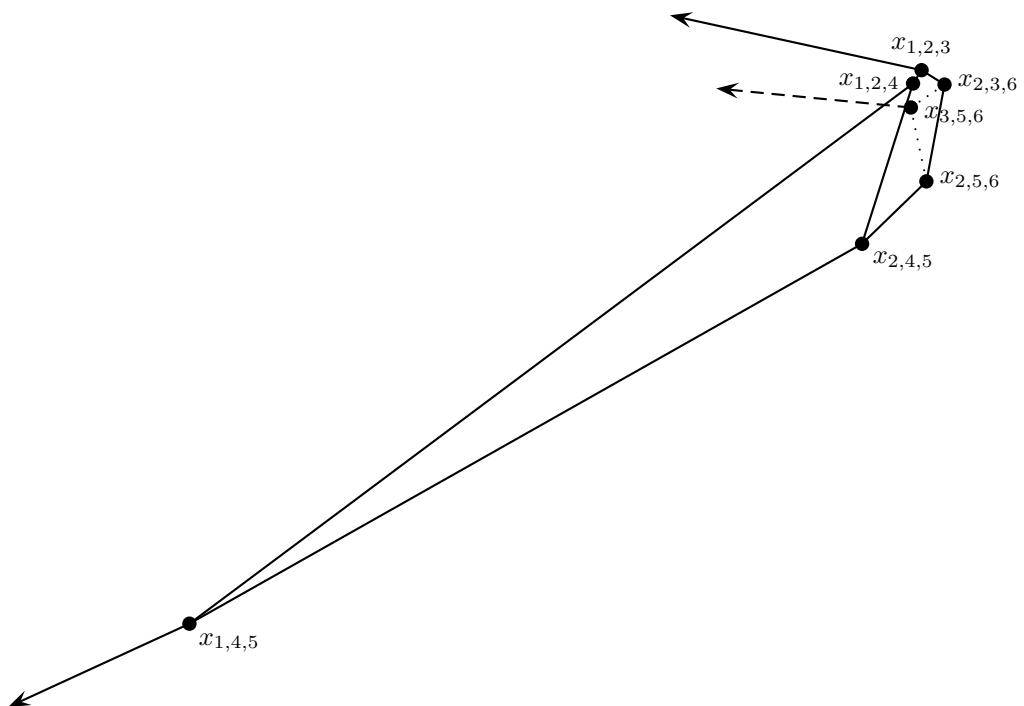
Die sechste Restriktion führt leider noch nicht zur Beschränktheit des Polyeders. Hier erfolgt der Schnitt lediglich im rechten Teil und trifft somit nur beschränkte Kanten.



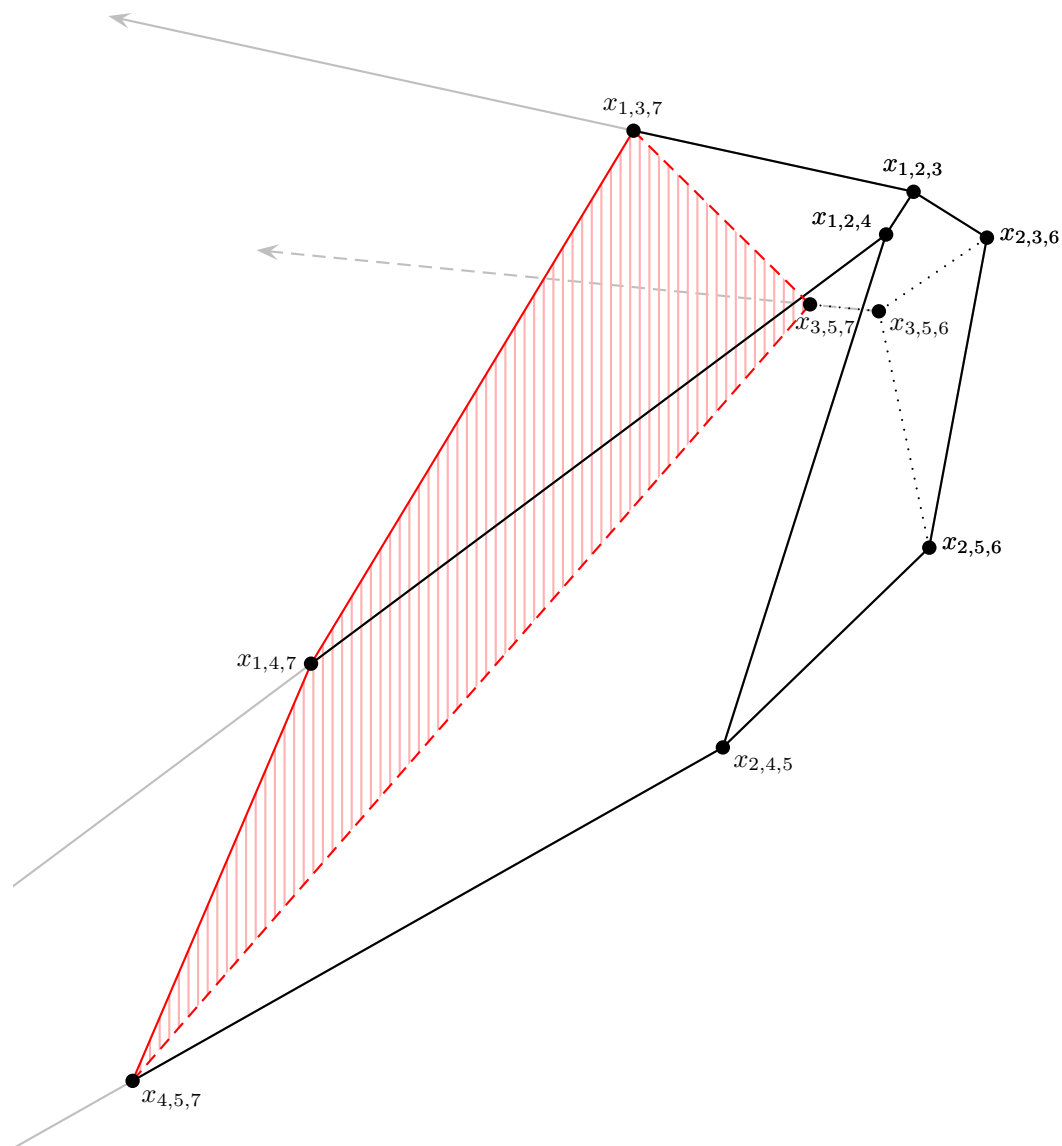
Dementsprechend sieht das Resultat nach Berücksichtigung der sechsten Restriktion wie folgt aus:



In der Komplettansicht ergibt sich damit:

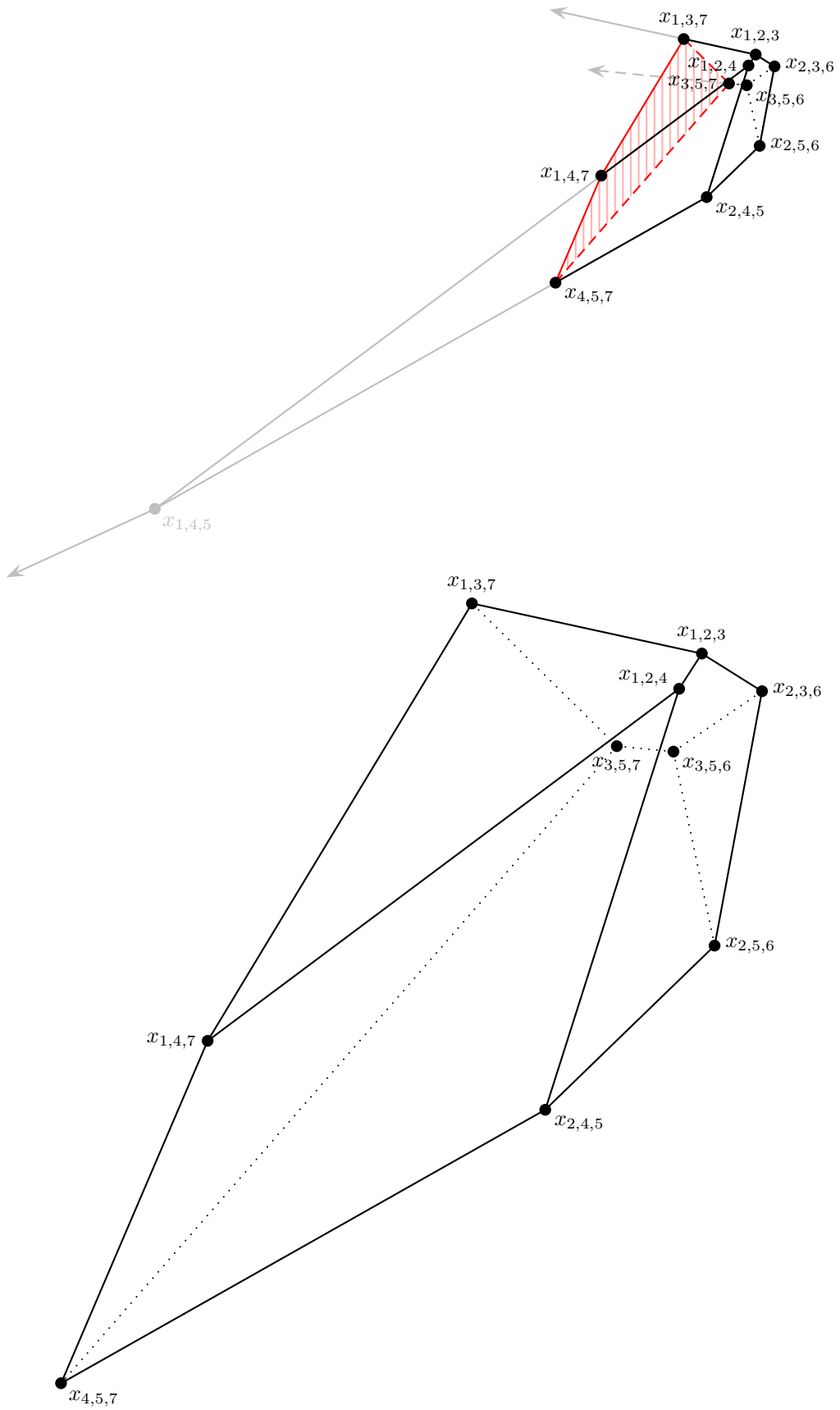


Durch die Hinzunahme der siebten Restriktion wird unser Polyeder endlich beschränkt.

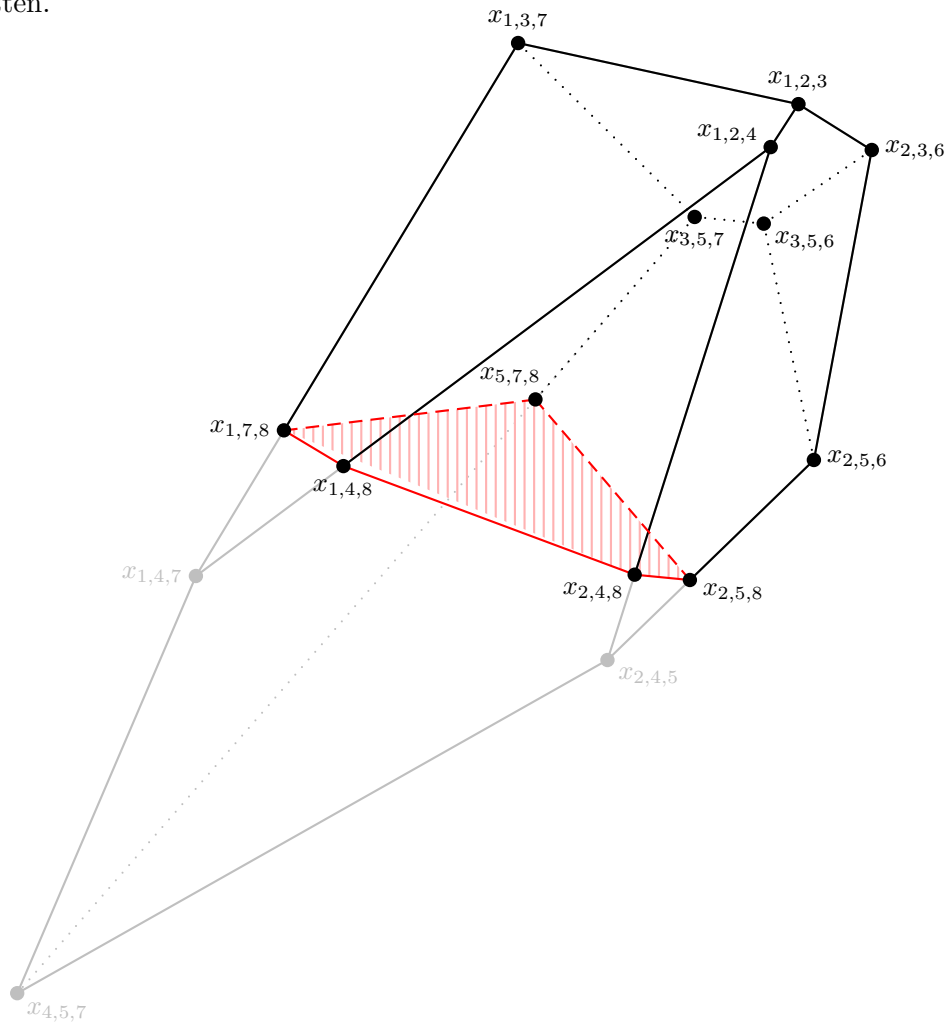


In der Ansicht des Gesamtpolyeders zeigt sich der Schnitt mit der siebten Restriktionshyperebene wie in erster Graphik der nachfolgenden Seite zu sehen ist. Das Resultat der Berücksichtigung dieser Restriktion und somit gleichzeitig der Ausgangspunkt für die nächste Iteration wird in der zweiten Graphik dargestellt.

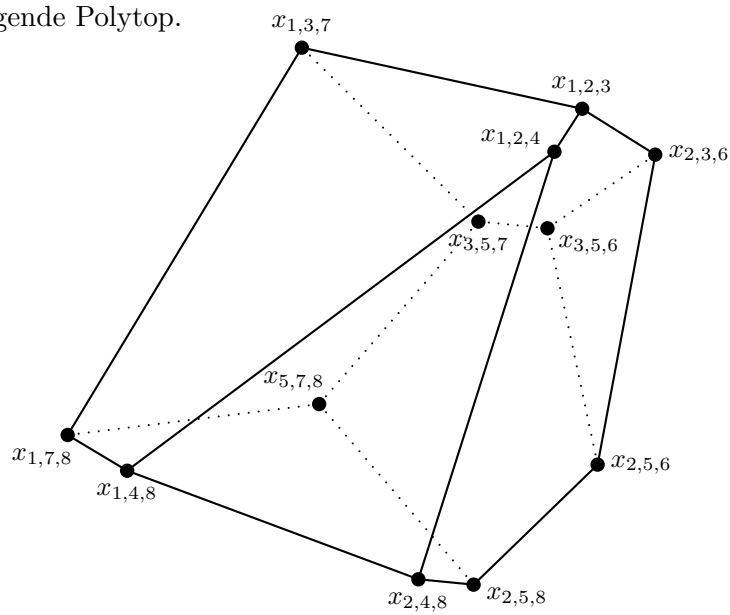




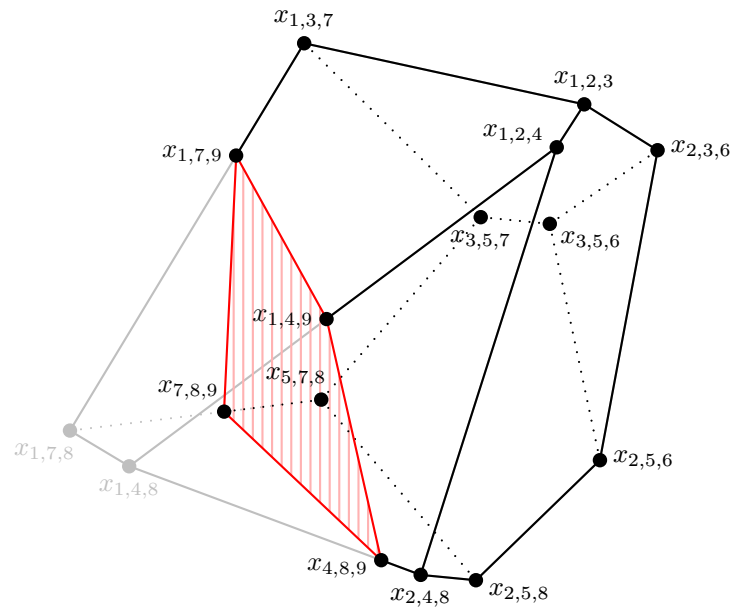
Nun wird die achte Restriktion ins Spiel gebracht. Hier wird der untere Teil des Polytops abgeschnitten.



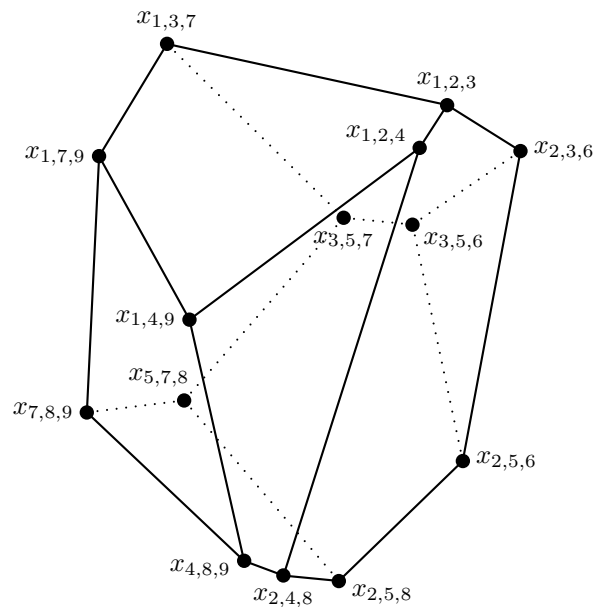
Es resultiert das nachfolgende Polytop.



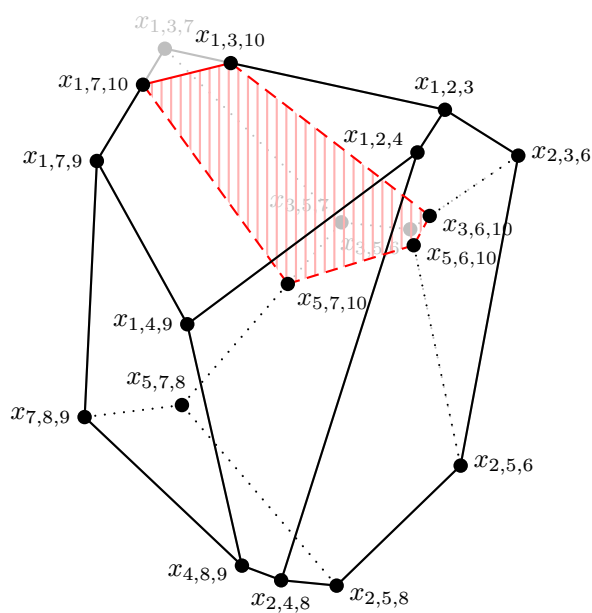
Nun erfolgt der Schnitt durch die neunte und vorletzte Restriktion.



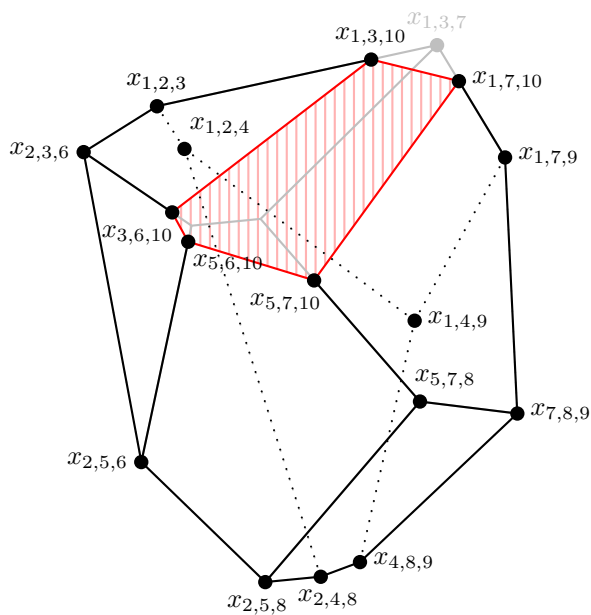
Ohne zusätzliche farbliche Markierungen sieht das Ausgangspolytop für die letzte Iteration folgendermaßen aus:



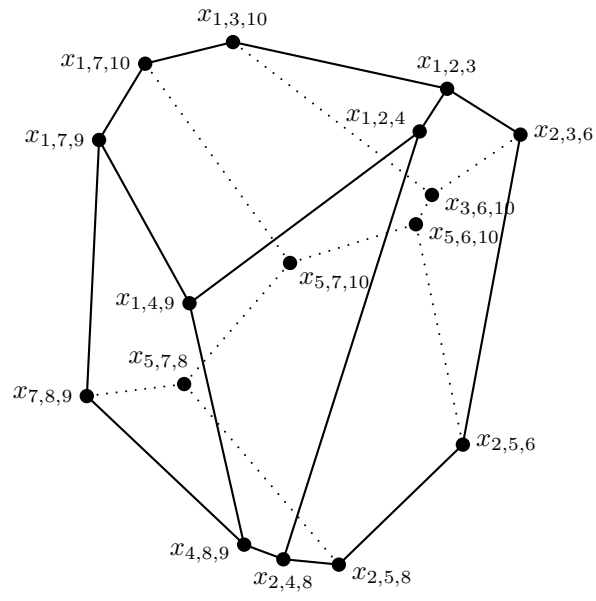
Mit Berücksichtigung der letzten Restriktion resultiert schließlich unser Gesamtpolyeder.



Da dieser Schnitt auf der Rückseite des Polytops stattfindet, betrachten wir den Sachverhalt nochmal bei  $180^\circ$ -Drehung um die  $x^3$ -Achse.



Letztendlich erhalten wir das Polyeder wie in den anderen Konvexe-Hülle-Algorithmen. Dieses ist nachfolgend nochmal aus unserem gewohnten Blickwinkel dargestellt.





# Index

- A**
- affine Hülle ..... 22  
Algorithmische Geometrie ..... 17  
Auswahlregel von Bland ..... 77  
Avis ..... 77  
Avis und Fukuda, Algorithmus von 77–122
- B**
- Backtracking ..... 170  
Beneath-Beyond-Methode ..... *siehe*  
    Double-Description-Methode  
Bernoulli, Ungleichung von ..... 180  
Betafunktion ..... 177f.  
binomischer Satz ..... 180  
Bland ..... 77
- C**
- CAD-Programme ..... 17  
Computational Geometry ..... 17  
Crashing ..... 131–135
- D**
- Double-Description-Methode .... 145–162  
dual ..... 24
- E**
- Einheitskugel ..... 27f.  
Einheitsmatrix ..... 21  
Einheitssphäre ..... 28  
Einheitsvektor ..... 21  
Einsvektor ..... 21  
Ergänzungspunkte ..... 52  
Ergänzungsrestriktion ..... 54
- F**
- Facette ..... 23  
    Facette 1. Art ..... 23  
    Facette 2. Art ..... 23f.  
    Nullfacette ..... 24  
Fukuda ..... 77
- G**
- Gammafunktion ..... 177  
ganzzahlige Optimierung ..... 17  
Geodatenbank ..... 17  
Geoinformationssysteme ..... 17  
gesättigt ..... 52, 54  
Gift-Wrapping-Algorithmus ..... 51–75  
    beschleunigt, dual ..... 59  
    beschleunigt, primal ..... 61  
    einfach, dual ..... 52  
    einfach, primal ..... 54
- H**
- Hülle  
    affine ..... 22  
    konische ..... 22  
    konvexe ..... 22  
    lineare ..... 22  
Hashtable ..... 80  
heap ..... 59  
Horizont ..... 124  
Horizont-Graph ..... 125  
Horizont-Peaks ..... 124  
Horizont-Ridges ..... 124
- I**
- Integration  
    partiell ..... 34
- K**
- Kante  
    gesättigt ..... 54

ungesättigt .....	54	ungesättigt .....	52
konisch .....	22	Randverteilung .....	32
konische Hülle .....	22	restriktionsorientiert	
konvexe Hülle .....	22	Pivotelement .....	26
konvexer Kegel .....	22	Pivotschritt .....	26
		Pivotspalte .....	26
		Pivotzeile .....	26
		Quotiententest .....	27
		Schlüpfe .....	25
		Simplextableau .....	24–27
		reverse Blandüberprüfung .....	79f.
		reverse Pivotüberprüfung .....	79
		reverser Pivotschritt .....	79
		Ridges .....	124
		Robotik .....	17
		Rotationssymmetriemodell .....	27–36
		<b>S</b>	
		Schlüpfen .....	25
		sequentiell .....	145
		Shelling .....	123
		Horizont .....	124
		Horizont-Graph .....	125
		Horizont-Peaks .....	124
		Horizont-Ridges .....	124
		Shelling-Algorithmus .....	123–143
		Simplextableau .....	24–27
		Straight-Line-Shelling .....	124
		<b>T</b>	
		Tableau .....	24–27
		travelling observer .....	124
		<b>U</b>	
		Überproduktionsquotient .....	168
		ungesättigt .....	52, 54
		Untermatrix .....	21
		<b>V</b>	
		Vandermondesche Identität .....	180
ungesättigt .....	54		
konisch .....	22		
konische Hülle .....	22		
konvexe Hülle .....	22		
konvexer Kegel .....	22		
<b>L</b>			
Laplace-Experiment .....	83		
Lebesgue-Maß .....	28, 178		
lineare Hülle .....	22		
<b>M</b>			
Marginaldichtefunktion .....	32		
Marginalverteilung .....	32		
Mehrzieloptimierung .....	17		
Merge-Sort-Algorithmus .....	80		
Mittelwertsatz der Integralrechnung .	107		
<b>N</b>			
Nichtentartungsbedingung .....	28		
Null-Facette .....	24		
Nullvektor .....	21		
<b>P</b>			
paretooptimal .....	17		
partielle Integration .....	34		
Peaks .....	124		
Pivotelement .....	26		
Pivotschritt .....	26		
Pivotspalte .....	26		
Pivotzeile .....	26		
Preprocessing .....	149		
primal .....	24		
Problemstellungen .....	23		
<b>Q</b>			
Quotiententest .....	27		
<b>R</b>			
Radialdichtefunktion .....	32		
Radialdichten .....	29		
Radialverteilungsfunktion .....	27f.		
Randsimplex .....	52		
Randsimplexseite .....	52		
gesättigt .....	52		



## Literaturverzeichnis

- [AF92] AVIS, David; FUKUDA, Komei: A Pivoting Algorithm for Convex Hulls and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra. In: *Discrete & Computational Geometry* 8 (1992), S. 295–313 (Zitiert auf den Seiten 23 und 77.)
- [AT78] AKL, Selim G.; TOUSSAINT, Godfried T.: A fast convex hull algorithm. In: *Information Processing Letters* 7 (1978), Nr. 5, S. 219–222 (Zitiert auf der Seite 51.)
- [BH99] BORGWARDT, Karl Heinz; HUHN, Petra: A lower bound on the average number of Pivot-steps for solving linear programs – Valid for all variants of the Simplex-Algorithm. In: *Mathematical Methods of Operations Research* 49 (1999), S. 175–210 (Zitiert auf der Seite 20.)
- [BM84] BUCHTA, Christian; MÜLLER, Josef: Random Polytopes in a Ball. In: *Journal of Applied Probability* 21 (1984), Nr. 4, S. 753–762 (Zitiert auf der Seite 38.)
- [BMT85] BUCHTA, Christian; MÜLLER, Josef; TICHY, Robert F.: Stochastic Approximation of Convex Bodies. In: *Mathematische Annalen* 271 (1985), S. 225–235 (Zitiert auf der Seite 38.)
- [Bok07] BOKOWSKI, Jürgen. *Lineare Algebra I - Die Determinante*. Vorlesungsskript aus dem WS 2006/2007, TU Darmstadt. 2007 (Zitiert auf der Seite 179.)
- [Bor77] BORGWARDT, Karl Heinz: *Untersuchungen zur Asymptotik der mittleren Schrittzahl von Simplexverfahren in der linearen Optimierung*, Universität Kaiserslautern, Dissertation, 1977 (Zitiert auf der Seite 114.)
- [Bor87] BORGWARDT, Karl Heinz: *The Simplex Method, A Probabilistic Analysis*. Heidelberg: Springer-Verlag, 1987 (Zitiert auf den Seiten 20, 24, 27, 33, 34, 99, 112, 153, 155, 177 und 179.)
- [Bor93] BORGWARDT, Karl Heinz: Average Complexity of a Gift-Wrapping Algorithm for Determining the Convex Hull of Randomly Given Points. Universität Augsburg, 1993. – Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 478 (Zitiert auf den Seiten 20 und 51.)
- [Bor97] BORGWARDT, Karl Heinz: Average Complexity of a Gift-Wrapping Algorithm for Determining the Convex Hull of Randomly Given Points. In: *Discrete & Computational Geometry* 17 (1997), S. 79–109 (Zitiert auf den Seiten 20, 21, 25, 27, 34, 38, 39, 51, 52, 53, 56, 58 und 60.)

- [Bor99] BORGWARDT, Karl Heinz: A Sharp Upper Bound for the Expected Number of Shadow Vertices in LP-Polyhedra Under Orthogonal Projection on Two-Dimensional Planes. In: *Mathematics of Operations Research* 24 (1999), Nr. 4, S. 925–984 (Zitiert auf der Seite 152.)
- [Bor01] BORGWARDT, Karl Heinz: *Optimierung, Operations Research, Spieltheorie. Mathematische Grundlagen*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2001 (Zitiert auf den Seiten 21, 25 und 54.)
- [Bor07] BORGWARDT, Karl Heinz: Average-Case Analysis of the Double Description Method and the Beneath-Beyond Algorithm. In: *Discrete & Computational Geometry* 37 (2007), S. 175–204 (Zitiert auf den Seiten 20, 21, 27, 32, 34, 38, 39, 58, 145, 146, 147, 148, 166 und 167.)
- [BS93] BRONSTEIN, Ilja N.; SEMENDJAJEW, Konstantin A.: *Taschenbuch der Mathematik 1993*. Frankfurt: Verlag Harri Deutsch, 1993 (Zitiert auf den Seiten 83 und 180.)
- [Buc85] BUCHTA, Christian: Zufällige Polyeder – eine Übersicht. In: HLAWKA, E. (Hrsg.): *Zahlentheoretische Analysis* Bd. 1114. Berlin: Springer-Verlag, 1985, S. 1–13 (Zitiert auf der Seite 38.)
- [Buc05] BUCHTA, Christian: An Identity Relating Moments of Functionals of Convex Hulls. In: *Discrete & Computational Geometry* 33 (2005), S. 125–142 (Zitiert auf der Seite 49.)
- [Car70] CARNAL, Henri: Die konvexe Hülle von  $n$  rotationssymmetrisch verteilten Punkten. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 15 (1970), S. 168–176 (Zitiert auf der Seite 49.)
- [CK70] CHAND, Donald R.; KAPUR, Sham S.: An Algorithm for Convex Polytopes. In: *Journal of the Association for Computing Machinery* 17 (1970), Nr. 1, S. 78–86 (Zitiert auf den Seiten 23 und 51.)
- [Cow10] COWAN, Richard: Recurrence Relationships for the Mean Number of Faces and Vertices for Random Convex Hulls. In: *Discrete & Computational Geometry* 43 (2010), S. 209–220 (Zitiert auf der Seite 49.)
- [Dev81] DEVROYE, Luc P.: How to reduce the average complexity of convex hull finding algorithms. In: *Computers and Mathematics with Applications* 7 (1981), S. 299–308 (Zitiert auf der Seite 51.)
- [Dwy88] DWYER, Rex A.: *Average-Case Analysis of Algorithms For Convex Hulls and Voronoi Diagrams*, CMU-CS-88-132, Computer Science Department, Carnegie-Mellon University, Dissertation, 1988 (Zitiert auf den Seiten 123 und 126.)
- [Dwy91] DWYER, Rex A.: Convex hulls of simplex from spherically symmetric distributions. In: *Discrete Applied Mathematics* 31 (1991) (Zitiert auf der Seite 49.)

- 
- [Efr65] EFRON, Bradley: The convex hull of a random set of points. In: *Biometrika* 52 (1965), Nr. 3 und 4, S. 331–343 (Zitiert auf der Seite 49.)
- [Eng88] ENGESSER, Hermann (Hrsg.): *Duden Informatik: Ein Sachlexikon für Studium und Praxis*. Mannheim, Wien, Zürich: Dudenverlag, 1988 (Zitiert auf der Seite 59.)
- [Höf95] HÖFNER, Gabriele: *Lineare Optimierung mit dem Schatteneckenalgorithmus: Untersuchungen zum mittleren Rechenaufwand und Entartungsverhalten*. Augsburg: Wißner Verlag, Augsburger Mathematisch-Naturwissenschaftliche Schriften, Bd. 5, 1995 (Zitiert auf der Seite 20.)
- [Huh97] HUH, Petra: *Schranken für die durchschnittliche Laufzeit des Simplexverfahrens und von Innere-Punkte-Verfahren*. Augsburg: Wißner Verlag, Augsburger Mathematisch-Naturwissenschaftliche Schriften, Bd. 16, 1997 (Zitiert auf der Seite 20.)
- [Küf92] KÜFER, Karlheinz: *Asymptotische Varianzanalysen in der stochastischen Polyedertheorie*, Universität Kaiserslautern, Dissertation, 1992 (Zitiert auf den Seiten 20 und 49.)
- [MRTT53] MOTZKIN, Theodore S.; RAIFFA, Howard; THOMSON, Gerald L.; THRALL, Robert M.: The Double Description Method. In: KUHN, H.W. (Hrsg.); TUCKER, A.W. (Hrsg.): *Contributions to the Theory of Games II*. Princeton, NJ: Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1953, S. 51–73 (Zitiert auf den Seiten 23 und 145.)
- [Rei08] REITZNER, Matthias. *Recent Results on Random Polytopes*. Online verfügbar unter der URL: <http://www.math.univ-toulouse.fr/Archive-LSP/Etats-Recherche/REITZNERnotes.pdf>. 2008 (Zitiert auf der Seite 49.)
- [RS63] RÉNYI, Alfréd; SULANKE, Rolf: Über die konvexe Hülle von  $n$  zufällig gewählten Punkten. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 2 (1963), S. 75–84 (Zitiert auf der Seite 49.)
- [RS64] RÉNYI, Alfréd; SULANKE, Rolf: Über die konvexe Hülle von  $n$  zufällig gewählten Punkten. II. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 3 (1964), S. 138–147 (Zitiert auf der Seite 49.)
- [Sei86] SEIDEL, Raimund: Constructing Higher-Dimensional Convex Hulls at Logarithmic Cost per Face. In: *Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM Press, 1986, S. 404–413 (Zitiert auf den Seiten 23, 123 und 124.)
- [Ste86] STEUER, Ralph E.: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics – Applied, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1986 (Zitiert auf der Seite 131.)
- [Swa85] SWART, Garret: Finding the Convex Hull Facet by Facet. In: *Journal of Algorithms* 6 (1985), S. 17–48 (Zitiert auf der Seite 51.)

- [Tim06] TIMMANN, Steffen: *Repetitorium der Analysis Teil 1*. 3. Auflage, Springer: Binomi Verlag, 2006 (Zitiert auf der Seite 106.)
- [Wen62] WENDEL, James G.: A problem in geometric probability. In: *Mathematica Scandinavica* 11 (1962), S. 109–111 (Zitiert auf der Seite 127.)
- [Wör06] WÖRLE, Thomas: *Entwicklung, Implementierung und Analyse eines Algorithmus zur Berechnung Pareto-optimaler Ecken und Kanten in einem Polyeder*, Universität Augsburg, Diplomarbeit, 2006 (Zitiert auf den Seiten 17 und 52.)

## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Vorname:	Thomas
Nachname:	Wörle
Geburtsdatum:	11.09.1982
Geburtsort:	Augsburg
Familienstand:	ledig
Staatsangehörigkeit:	deutsch

### Ausbildung und beruflicher Werdegang

1989 – 1993	Grundschule in Todtenweis
1993 – 2002	Humanistisches Gymnasium bei St. Stephan in Augsburg
Juni 2002	Allgemeine Hochschulreife
2002 – 2006	Studium der Wirtschaftsmathematik (Diplom) an der Universität Augsburg
August 2004	Vordiplom an der Universität Augsburg
Dezember 2006	Diplom an der Universität Augsburg
Seit Dezember 2006	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl „Diskrete Mathematik, Optimierung und Operations Research“ des Instituts für Mathematik der Universität Augsburg