

72 | DA 9572 - 31,7

Die

WURZEL

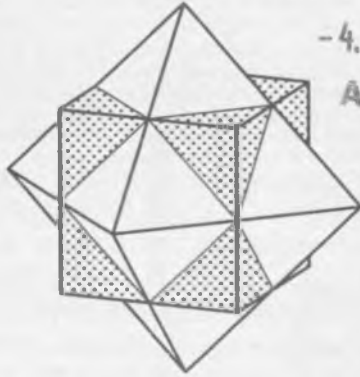
Zeitschrift für Mathematik

1,00 DM

Universitätsbibliothek

- 4. Juli 1997

Augsburg



Heft 7/97

31. Jahrgang

Orientierte Matroide — Ein anderer Blick auf die Platonischen Körper

Die Platonischen Körper und ihre Verallgemeinerungen sind seit der Antike Gegenstand intensiver (teilweise mythischer) Untersuchungen. Die Regularität und die Vielzahl von Symmetrien macht sie zu interessanten und schönen Forschungsobjekten. Wir wollen anhand der Platonischen Körper Konzepte der *diskreten Mathematik* erläutern, speziell die sog. *orientierten Matroide*. Orientierte Matroide werden auch als *kombinatorische Geometrien* bezeichnet, d.h. sie betrachten nicht die Koordinaten von Objekten, sondern deren relative Lage zueinander — qualitative Informationen. Nach einigen einführenden Definitionen wollen wir Beispiele erläutern und Querverweise zu anderen wissenschaftlichen Disziplinen angeben. Die zum Verständnis nötige Mathematik bleibt meist auf Schulniveau.

Definitionen

Wir betrachten zunächst Punktfigurationen in der Ebene, um die Konzepte dann in den drei- und später in den d -dimensionalen Raum zu übertragen. Seien $\vec{p}_i \in E^2$ z.B. die Eckpunkte eines regelmäßigen m -Ecks in der Ebene E^2 , die wir als Ebene $z = 1$ parallel zur xy -Koordinatenebene im \mathbb{R}^3 betrachten, vgl. Abb. 1.

Zu je zwei Punkten $\vec{p}_i \neq \vec{p}_j$ können wir eine (orientierte) Gerade g_{ij}^2 ($i < j$) definieren und die verbleibenden Punkte danach einteilen, auf welcher Seite der Geraden sie liegen, vgl. auch [4]. Anders als dort, fassen wir die Punkte in der Ebene E^2 als Endpunkte von Vektoren $\vec{p}_i := (\vec{p}_i, 1)$ im \mathbb{R}^3 auf, für die wir das *Spatprodukt* zu jedem Tripel berechnen können. Ist die Determinante von drei Vektoren $\det(\vec{p}_i, \vec{p}_j, \vec{p}_k)$ ($i < j < k$) positiv/negativ (die Fläche in [4]), definieren also die drei Vektoren ein rechts-/linkshändiges Koordinatensystem, dann vermerken wir ein $+/-$ für das geordnete Tripel ijk . Ist $\det(\vec{p}_i, \vec{p}_j, \vec{p}_k) = 0$, dann liegen die drei Punkte auf einer Geraden. Somit können wir die gesamte Information der Lagebeziehungen in einer Liste von $N := \binom{n}{3}$ Vorzeichen $\chi(ijk)$ codieren, dem sog. *Chirotop* des realisierbaren orientierten Matroids im Rang drei. Das orientierte Matroid bezeichnet also eine Abbildung $(\mathbb{R}^2, 1)^n \rightarrow \{-1, 0, +1\}^N$, deren Bilder die Chirotope sind. Die Bezeichnung Chirotop stammt von dem Begriff der *Chiralität* (Händigkeit) aus der Chemie ab, wo die Struktur der orientierten Matroide zur qualitativen Charakterisierung der Lage von Atomen in Molekülen eingesetzt wird. Jeden Vektor $\vec{p}_i \in \mathbb{R}^3$ können wir als Normalenvektor einer orientierten Ebene E_i^2 durch den Ursprung im \mathbb{R}^3 interpretieren. Den Halbraum

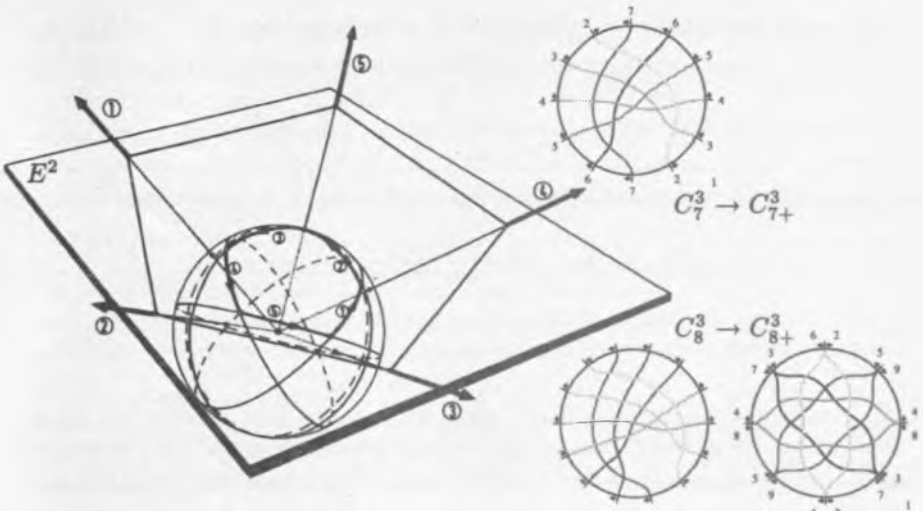


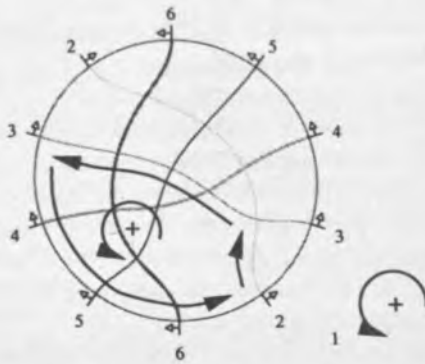
Abbildung 1: (Links) Von Punktkonfigurationen in der Ebene E^2 zu orientierten Großkreis- und Geradenarrangements, (Mitte) die zyklischen orientierten Matroide mit sieben bzw. acht Elementen im Rang drei und (rechts) mit Ergänzung zur Hervorhebung der Symmetrie.

(des \mathbb{R}^3), in den der Normalenvektor zeigt, bezeichnen wir als *positiv*, den anderen als *negativ*. Die orientierten Ebenen schneiden die Einheitskugel $S^2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| = 1\}$ im \mathbb{R}^3 in orientierten Großkreisen und die Ebene E^2 in orientierten Geraden g_i^2 . Die Orientierung der Großkreise beispielsweise ergibt sich mit der auch aus der Physik bekannten „Rechte-Hand-Regel“ für die Richtung des Magnetfeldes, welches durch einen elektrischen Strom erzeugt wird. Die Begriffe positiv und negativ übertragen sich entsprechend auf Halbsphären und Halbräume in E^2 . Das induzierte Großkreisarrangement ist punktsymmetrisch zum Ursprung, daher reicht es aus, z.B. die obere Hälfte der S^2 (d.h. die positive Halbsphäre) zu betrachten und in eine Kreisscheibe zu projizieren. Für das Weglassen der negativen Halbsphäre vereinbaren wir, daß gegenüberliegende Punkte auf dem Rand miteinander zu identifizieren sind (somit ist die Kreisscheibe mit ihren Verheftungen ein Modell der reellen projektiven Ebene \mathbb{P}^2). In diesem Fall projizieren wir also die S^2 in Richtung des zusätzlichen Vektors $(0, 0, 1)$, dies hebt vorhandene Symmetrien hervor; ebenso gut können wir die S^2 auch in Richtung eines der Vektoren \vec{p}_i projizieren und dann die negative Halbsphäre weglassen. In jedem Fall ist die gesamte qualitative Lageinformation der ursprünglichen Punktconfiguration in dem so erzeugten sog. *Pseudogeradenarrangement* (einer Menge glatter Kurven, die sich ‘in der Art von Geraden’ schneiden

— je zwei Kurven besitzen genau einen Schnittpunkt, kurz PGA) enthalten. Der Durchschnitt der positiven Halbräume aller Punkte definiert das sog. *polare Polygon* (später Polyeder), in Abb. 1 fallen das Ausgangsfünfeck und das dazu polare Fünfeck wegen der Symmetrie zusammen. Die beiden Darstellungen sind ineinander überführbar, und es ist gleichgültig, ob wir über Punkt- oder Geradenkonfigurationen in der Ebene E^2 nachdenken.

p_3 -maximale Pseudogeradenarrangements

Oftmals ist es gar nicht entscheidend, ob Punkte in einer gewissen geometrischen Beziehung stehen, sondern z.B., ob ein Punkt in der konvexen Hülle anderer Punkte liegt. Genau diese Information ist nun in unserem PGA codiert: Definieren m Punkte ein konvexes m -Eck, so existiert auch im PGA ein (konvexes) Pseudo- m -Eck, das von den zugehörigen Pseudogeraden berandet wird und durchgängig mit der vorgegebenen Orientierung durchlaufen werden kann; liegt ein anderer Punkt innerhalb dieses m -Ecks, schneidet dessen Pseudogerade das Pseudo- m -Eck nicht! In Abb. 2 wird angedeutet, wie man aus dem PGA die Vorzeichen der Tupel ijk abliest (Aufgabe 1: Woran erkennt man im PGA, wenn $\chi(ijk) = 0$ gilt?).



ijk	χ	ijk	χ
! (1,2,3)	+	(2,3,4)	+
(1,2,4)	+	(2,3,5)	+
(1,2,5)	+	(2,3,6)	+
(1,2,6)	+	(2,4,5)	+
(1,3,4)	+	(2,4,6)	+
(1,3,5)	+	(2,5,6)	+
(1,3,6)	+	(3,4,5)	+
(1,4,5)	+	(3,4,6)	+
(1,4,6)	+	(3,5,6)	+
(1,5,6)	+	(4,5,6)	+

Abbildung 2: Ablesen der Vorzeicheninformation am Beispiel des zyklichen orientierten Matroids C_6^3 mit sechs Elementen im Rang drei.

Eine interessante Frage beim Studium von Geradenkonfigurationen ist die, wie viele Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw. erzeugt werden, wenn man n Geraden (zufällig) in der projektiven Ebene verteilt. Alternativ kann man auch nach den (doppelt so großen) Anzahlen der sphärischen m -Ecke in einer Zerlegung der S^2 durch Großkreise fragen. Würde man an diese Aufgabe geometrisch herangehen, dann müßte man zunächst alle bezüglich des Abzählkriteriums doppelten (kombinatorisch äquivalenten) Konfigurationen

aus der Betrachtung löschen. So dürfen z.B. Konfigurationen, die durch Drehen, Verschieben etc. ineinander überführt werden können, nur einmal gezählt werden, da sie natürlich die gleichen Anzahlen von m -Ecken erzeugen. Man bildet sog. *Äquivalenzklassen*, die genau den oben definierten realisierbaren orientierten Matroiden entsprechen. Hier nun gibt es Algorithmen, die die Aufzählung aller orientierten Matroide bei fester Anzahl von Elementen ermöglichen (ein entsprechender Algorithmus, der alle *wesentlich verschiedenen* Geradenkonfigurationen erzeugt, ist uns nicht bekannt). Das Problem dieser Aufzählung ist, daß sie zunächst nur PGAs erzeugt, von denen nicht klar ist, ob es zugehörige Geradenarrangements gibt. Das orientierte Matroid ist also möglicherweise nicht realisierbar. Dies ist etwa mit der Betrachtung von Polynomen in der komplexen Zahlenebene zu vergleichen: Man erhält zwar alle Nullstellen, aber einige haben evtl. keine *reelle* Deutung mehr. Die Beschreibung der (computergestützten) Entscheidung der *Streckbarkeit* eines PGAs sprengt aber den Rahmen diesen Artikels, vgl. [1].

Nun kann man z.B. nach den unteren und oberen Schranken für die Anzahlen der m -Ecke in einer Anordnung von n Pseudogeraden fragen. Wir greifen hier eine interessante Klasse heraus, die sog. p_3 -maximalen PGAs, die unter allen möglichen die größte Anzahl von Dreiecken p_3 besitzen. Wir beschränken uns auf *einfache* PGAs, in denen sich in jedem Schnittpunkt genau zwei Pseudogeraden schneiden. Hier kann man mit einfachen Abzählargumenten nachweisen (Aufgabe 2: Welche?), daß außer für den Sonderfall $n = 3$ mit vier Dreiecken nur für gewisse Zahlen $n \in \{4, 6, 10, 12, \dots\}$ Lösungen existieren können, die die theoretische Obergrenze $p_{3,max} := n(n-1)/3$ für $n > 3$ tatsächlich annehmen. Die Frage nach p_3 -maximalen PGAs zu den möglichen Elementzahlen konnte computerunterstützt gelöst werden, und Abb. 3 zeigt die vollständige Aufzählung aller p_3 -maximalen PGAs mit bis zu 18 Elementen, vgl. [2].

Die Platonischen Körper

Die Klasse der p_3 -maximalen PGAs ist nun nicht nur aus ästhetischen Gründen interessant, sondern auch wegen ihrer weitreichenden Beziehungen zu Strukturen aus der Mathematik und anderen Naturwissenschaften. Wir wollen zunächst auf einen mathematischen Zusammenhang zwischen p_3 -maximalen PGAs und den Platonischen Körpern hinweisen. Dazu erweitern wir die oben eingeführte Betrachtung auf Punkte \vec{p}_i^g , die in einer Hyperebene E^3 im \mathbb{R}^4 liegen (die Konzepte werden konsequent um eine Dimension erweitert). Wir fassen die Punkte wieder als Endpunkte von Vektoren $\vec{p}_i := (\vec{p}_i^g, 1) \in \mathbb{R}^4$ auf, die wiederum Normalenvektoren orientierter Hyperebenen E_i^3 durch den Ursprung im \mathbb{R}^4 sind. Die orientierten

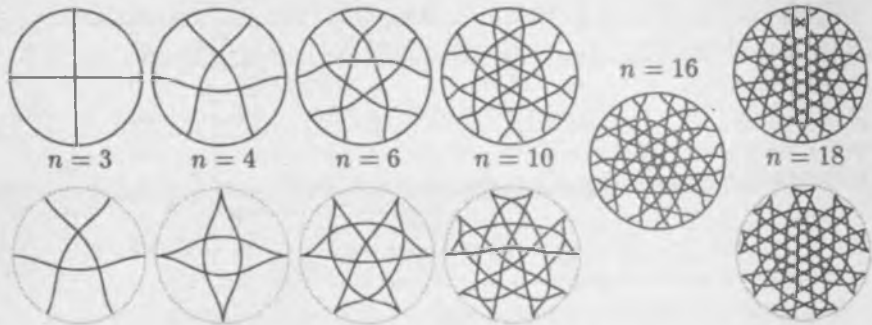


Abbildung 3: Die ersten p_3 -maximalen PGAs mit bis zu 18 Elementen, wobei unten (bis auf $n = 16$) jeweils ein zusätzliches Element eingefügt ist. Bereits für $n = 18$ gibt es verschiedene p_3 -maximale PGAs.

Hyper Ebenen schneiden die Einheitssphäre $S^3 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : |\vec{x}| = 1\}$ in einer Menge orientierter Sphären, die wir zusammen mit der oberen Hälfte der S^3 in eine Vollkugel projizieren. Pseudogeraden werden zu Pseudoebenen, die wir uns als *Membranen aus gummiartigem Material* innerhalb der Vollkugel vorstellen können. Der Anschaulichkeit halber ist es oft vorteilhaft, statt des eigentlichen 3-dimensionalen Pseudoebenenarrangements (kurz PEA) alle Membranen zu zeichnen, die ihrerseits wiederum PGA's sind: Die dort auftretenden Pseudogeraden sind der Schnitt von (mindestens) zwei Pseudoebenen. Die Abb. 4 und 5 illustrieren dies für die Platonischen Körper. Um die Symmetrien hervorzuheben, ist analog zum 2-dimensionalen Fall ein Punkt $(0,0,0,1)$ hinzugefügt worden. Abb. 4 stellt für Tetraeder und Würfel das jeweilige PEA und die einzelnen PGA's gegenüber; für Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder sind nur noch die PGA's gezeichnet.

Betrachtet man z.B. das orientierte Matroid für den Würfel, dann enthält dieses einerseits alle Lageinformationen über die *Punkte* des Würfels, andererseits aber auch — polar betrachtet — die Schnittinformationen für alle *Ebenen*, die durch die Flächen des polaren Polyeders, des Oktaeders, definiert werden. Die Seitenflächen des polaren Polyeders sind die zentralen 3-Ecke im Zentrum der Einzelbilder. In den Bildern kann man z.B. auch ablesen, welche Punkte in einer Ebene liegen (Aufgabe 3: Wie?).

Schluß

Das schöne Ergebnis ist nun, daß die ersten p_3 -maximalen PGAs als Zusatzelemente (das sind gerade die Zerlegungen der äußeren Membran) der orientierten Matroide der Platonischen Körper auftreten. Setzt man in die

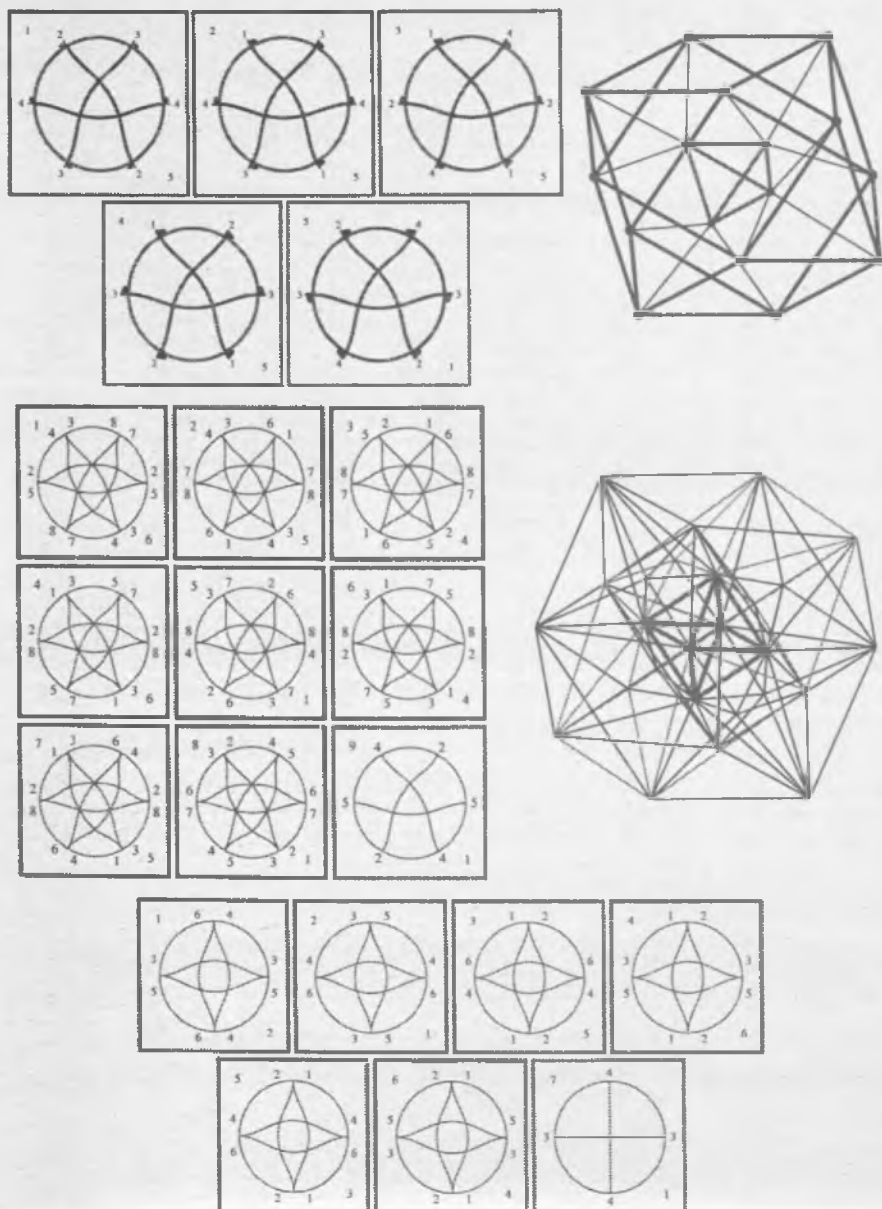


Abbildung 4: (Oben) Pseudogeraden- und Pseudoebenenarrangements für das Tetraeder, (Mitte) den Würfel und (unten) das Oktaeder.

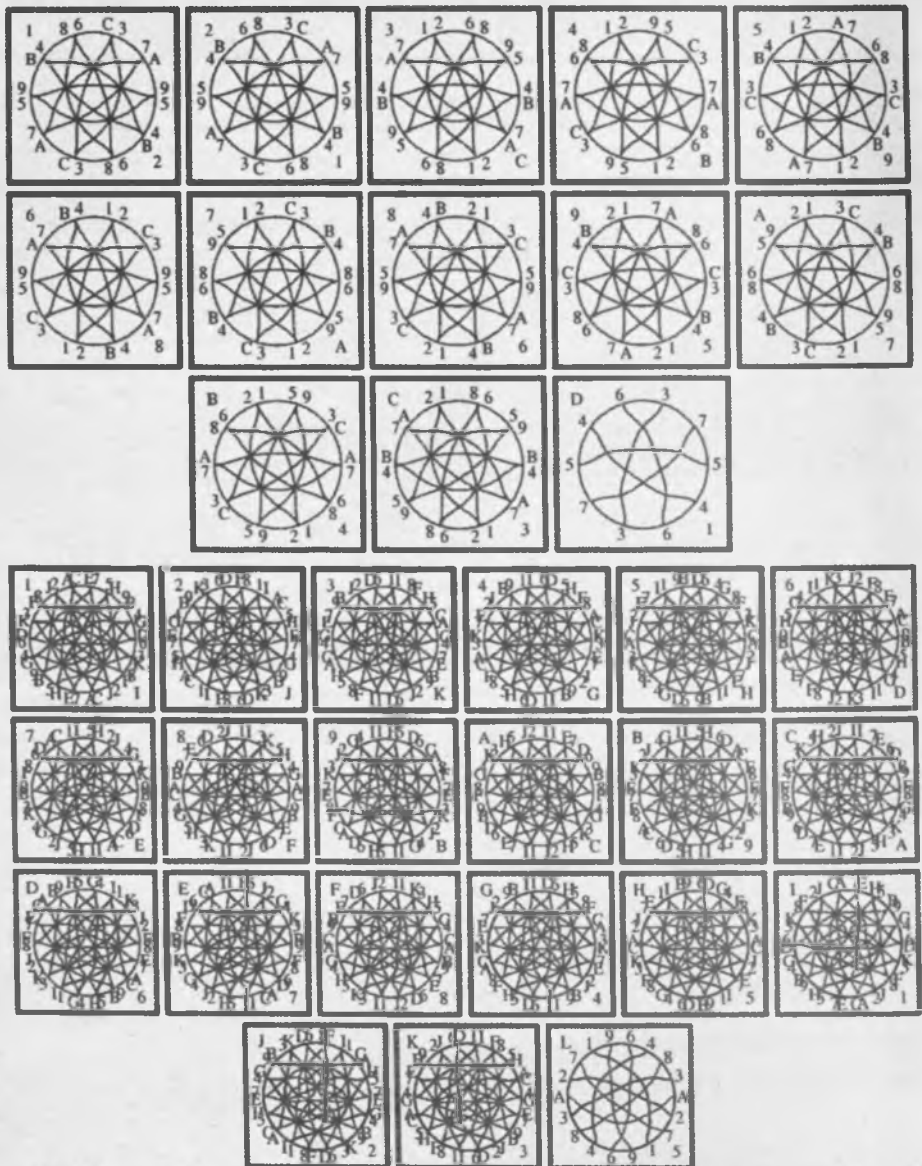


Abbildung 5: Pseudogeradenarrangements (oben) für das Ikosaeder und (unten) für das Dodekaeder, wobei dort die Elemente der Facette $\{12345\}$ hervorgehoben sind.

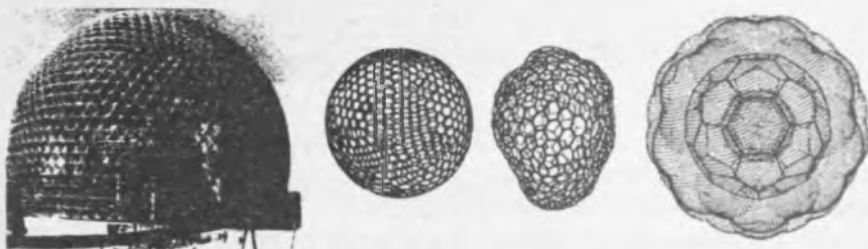


Abbildung 6: (Links) Von R. Buckminster Fuller entworfener geodätischer Dom auf der Weltausstellung 1967 in Chicago, (Mitte) Kieseläureskelette von Radiolaren und (rechts) ein C_{60} -Fulleren.

Mitte jedes Dreiecks in einem p_3 -maximalen PGA einen Punkt und verbindet zwei Punkte genau dann, wenn die zugrundeliegenden Dreiecke einen gemeinsamen Punkt haben, dann erhält man sog. *reduzierte PGAs* oder *verallgemeinerte Fullere*. Diese Strukturen wurden von dem Architekten Richard Buckminster Fuller eingesetzt, um sehr leichte freitragende Hallen zu konstruieren. Später entdeckte man sie in einer neuen Form von Kohlenstoffmolekülen, und auch in Kieseläureskeletten von Radiolaren und anderen biologischen Systemen sind sie zu finden, vgl. Abb. 6. Verallgemeinerte Fullere treten auch bei der optimalen Verteilung von Punkten auf der Sphäre auf, und reduzierte PGAs können als Verallgemeinerung der Platonischen Körper betrachtet werden. Wir können hier abschließend nur auf die ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge in [3] hinweisen.

Literaturverzeichnis

- [1] Bokowski, J.: 1993, Oriented matroids, *Handbook of Convex Geometry*, Gruber P. and Wills J.M., (eds.), Elsevier, North-Holland, NL
- [2] Bokowski, J., Roudneff, J.-P., Stempel, T.-K.: 1997, Cell decompositions of the projective plane with Petrie polygons of constant length, *erscheint*, 15p
- [3] Groß, C., Stempel, T.-K.: 1997, Regular Maps & Oriented Matroids in Vorbereitung, 15p
- [4] Waldmann, J.: 1997, Im Tal des Gnu: Der Fliesenlegerlehrling, \sqrt{WURZEL} , No.2, pp40-44

Christian Groß
Torsten-Karl Stempel
Technische Hochschule Darmstadt, Fachbereich Mathematik