

721 DA 9572 - 31,6

Die

WURZEL

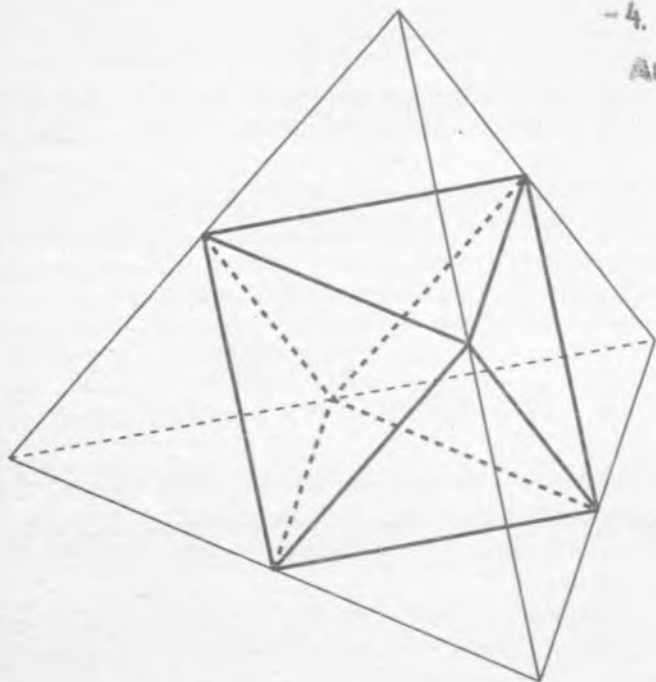
Zeitschrift für Mathematik

1,00 DM

Universitätsbibliothek

- 4. Juni 1997

Augsburg



Heft 6/97

31. Jahrgang

Diagramme und Seifenblasen

Graphische Darstellungen mathematischer Objekte und Zusammenhänge sind oft hilfreich zum Verständnis und notwendig, z.B. zur kurzgefaßten Dokumentation. 3-dimensionale geometrische Objekte, wie Polyeder, werden entsprechend ihrer Symmetrien projiziert, um sie 2-dimensional darzustellen. Bei einer solchen Zentral- oder Parallelprojektion geht Information verloren, und zur eindeutigen Rekonstruktion sind teilweise mehrere korrespondierende Ansichten (Risse) nötig. Reichen qualitative Informationen aus, z.B. wieviele m -Ecke ein Polyeder beranden (und wie diese zusammengefügt sind), dann sind Diagramme ein gutes Werkzeug, um Darstellungen zu erhalten.

Wir wollen ein physikalisches Modell beschreiben, das es gestattet, automatisch (teilweise in mehreren Schritten) aus mathematischen Strukturen ansprechende Graphiken zu erzeugen. Zunächst folgen einige notwendige Definitionen. Dann betrachten wir das einfachste Modell und ein Maß zur Beurteilung der Qualität/Schönheit der Diagramme. Daran anschließend behandeln wir Modifikationen der Berechnungen, mit dem Ziel, die Qualität der Bilder zu verbessern. Schließlich weisen wir darauf hin, daß die eingeführten Methoden auch die Approximation von Minimalflächen ermöglichen, wie sie z.B. bei Seifenblasen oder Tauchlack auftreten.

Die Thematik verbindet *abstrakte* Mathematik mit Geometrie, Physik und evtl. Chemie (eine Motivation ist, computergenerierte Moleküle darzustellen). Trotzdem reichen die Kenntnisse der Schüler aus, die Konzepte zu verstehen und selbständig zu erweitern.

Notwendige Definitionen

Ein *Graph* $G(E, K)$ besteht aus einer (endlichen) Menge von *Knoten* $E := \{1, \dots, n\}$ und *Kanten*, d.h. geordneten Paaren (u, v) mit $u, v \in E, u \neq v$. Ein *ebener* oder *planarer Graph* läßt sich ohne Überschneidungen hinzeichnen. Ein *einfacher Graph* besitzt keine Schlingen, und zu je zwei Knoten existiert höchstens eine Kante (es gibt keine sog. *parallelen Kanten*). Existiert zu je zwei Knoten eines Graphen ein Kantenzug, der diese Punkte verbindet, dann heißt der Graph *zusammenhängend*; muß man mindestens k Kanten eines Graphen entfernen, damit dieser in mehrere Teilgraphen zerfällt, dann heißt der Graph *k -zusammenhängend*. Wir betrachten Diagramme für einfache, 3-zusammenhängende planare Graphen — diese Graphen wollen wir als *sphärisch* bezeichnen. Kantengerüste von konvexen Polyedern definieren z.B. eine Klasse von sphärischen Graphen.

Ein bekanntes Konzept zur Darstellung 3-dimensionaler Polyeder ist das sog. *Schlegeldiagramm*, eine Zentralprojektion in eine Seitenfläche (Facette). Ein Schlegeldiagramm enthält die gesamte qualitative (kombinatorische) Information, und es ist möglich, die geometrische Situation zu rekonstruieren. Allerdings muß für die Erzeugung eines Schlegeldiagramms ein geometrisches Objekt vorgelegen haben, vgl. Abb. 1.

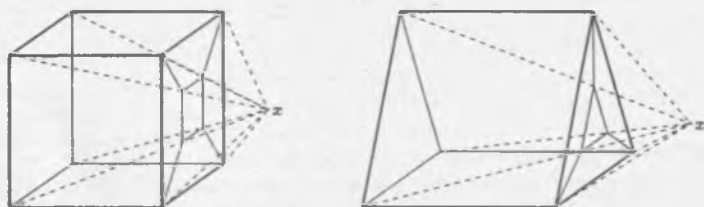


Abbildung 1: Schlegeldiagramme für einen Würfel und für ein Prisma über einem Dreieck (Projektionszentren x), vgl. [2].

Ausgehend von der Knoten- und Kantenmenge eines sphärischen Graphen wollen wir automatisch ein Diagramm für diesen Graphen erstellen lassen. Ein kleinster Kreis im Graphen definiert eine Facette, und wir bilden einen solchen Kreis mit m Knoten auf ein regelmäßiges m -Eck ab. In unserem Modell stellen wir uns vor, daß die Kanten des Graphen aus einem elastischen Material bestehen, für das das Hookesche Federgesetz gilt: *Die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage*. Auf jeden Knoten wirken jetzt Federkräfte, und wir können die resultierende Kraft \vec{F}_i berechnen (Federkonstante $\alpha_{ij} = \alpha > 0$ für eine Kante des Graphen und $\alpha_{ij} = 0$, wenn keine Kante existiert):

$$\vec{F}_i := \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(\vec{p}_i - \vec{p}_j) \Rightarrow E = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} d_{ij}^2.$$

Ein solches System aus eingespannten Federn ist bemüht, einen Zustand minimaler Energie E zu erreichen, in dem in jedem Knoten ein Kräftegleichgewicht herrscht (die resultierende Kraft verschwindet). Um Extremwerte von Funktionen zu bestimmen, leitet man diese ab und setzt die Ableitung gleich Null. Auch hier betrachten wir Ableitungen, allerdings partielle, und erhalten, daß für einen Punkt, dessen Position das gewichtete Mittel der Positionen seiner Nachbarn ist, seine lokale Energie E_i und damit die resultierende Kraft verschwindet:

$$E_i \rightarrow \min \Rightarrow \frac{\partial E_i}{\partial p_{ik}} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(p_{ik} - p_{jk}) = 0 \Rightarrow p_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_{jk}}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}}.$$

Genau diese Erkenntnis setzen wir ein, um ein einfaches *Iterationsverfahren* zu beschreiben, mit dem es möglich ist, nach Auswahl einer Randfacette automatisch ein Diagramm zu berechnen. Wir weisen jedem Knoten des (sphärischen) Graphen einen Punkt im \mathbb{R}^2 zu, wobei zu Beginn die festen Punkte der ausgewählten Facette auf die Ecken eines regelmäßigen m -Ecks projiziert werden und die freien Knoten im Ursprung liegen:

$$P^0 := \left(\underbrace{\bar{p}_1^0, \bar{p}_2^0, \dots, \bar{p}_m^0}_{\text{reg. } m\text{-Eck}}, \underbrace{\bar{p}_{m+1}^0, \dots, \bar{p}_n^0}_{\text{Ursprung}} \right).$$

Dann wird iterativ die optimale Position der freien Ecken bestimmt, vgl. Abb. 2, d.h. man wählt einen freien Knoten aus, berechnet die resultierende Kraft und verschiebt den Knoten in Richtung dieser Kraft. Betrachtet man alle Punkte gleichzeitig, dann kann man die Iteration durch eine wiederholte Matrix-Vektor-Multiplikation ausdrücken mit der Iterationsmatrix M (R ist die ausgewählte Randfacette, v_i ist die *Valenz* eines Punktes, die Anzahl seiner Nachbarn, und v_{ij} gibt an, ob eine Feder von i nach j existiert ($v_{ij} = 1$) oder nicht ($v_{ij} = 0$)):

$$P^{t+1} := M \cdot P^t, \text{ wobei } M : \begin{cases} m_{ii} = 1 & i \in R \\ m_{ii} = 0 & i \notin R \\ m_{ij} = \frac{v_{ij}}{v_i} & i \neq j, i \notin R \\ m_{ij} = 0 & i \neq j, i \in R \end{cases} \Rightarrow P^* := \lim_{t \rightarrow \infty} P^t.$$



Abbildung 2: Einige Schritte einer Energieminimierung für ein Diagramm des Archimedischen Körpers, der auch in „Sport und Chemie“ Bedeutung erlangt hat.

Modifikationen der Iterationsvorschrift

Für komplexe Diagramme kommt es im Innern zum Zusammenklumpen, und es ist möglich, das einfache Federmodell zu erweitern. Man kann dabei das zugrunde liegende *physikalische Modell* modifizieren, indem man z.B. die Federkonstanten α_{ij} von außen nach innen abnehmen läßt, oder

man modifiziert die *mathematische Beschreibung*, indem man ein gewichtetes arithmetisches Mittel betrachtet und Gewichte der Ecken von außen nach innen hin abnehmen läßt. Auch ist es möglich, ein nichtlineares Federgesetz anzunehmen und zusätzlich zu den Federkräften z.B. elektrostatische Abstoßungskräfte zu betrachten, wenn jeder Knoten eine elektrische Ladung trägt. Diese Optimierungen lassen sich durch Gütezahlen ρ vergleichen, vgl. Abb. 3 und Tab. 1, die die Verhältnisse von kürzester zu längster Kante ρ^1 oder von kleinster zu größter Fläche ρ^2 angeben.

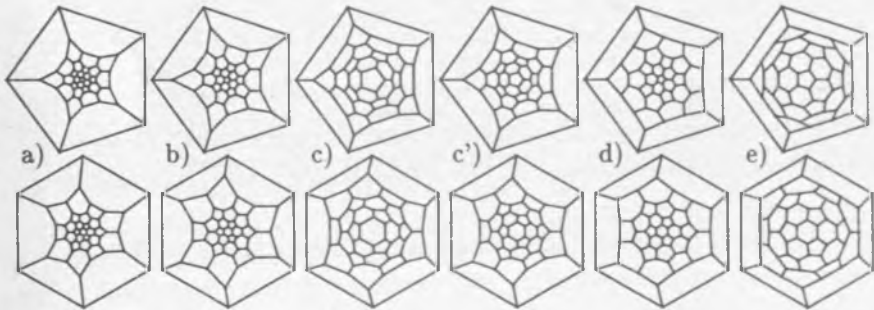


Abbildung 3: Vergleich verschiedener Modifikationen des Iterationsverfahrens (oben) mit einem 5-Eck und (unten) mit einem 6-Eck als Randfacette: a) lineares Federgesetz, b) Randgewichtung $\alpha = 5$, c+c') variable Gewichtung von Ecken und Kanten, d) nichtlineares Federgesetz $F \sim d^3$ und e) Kombination von linearem Federgesetz und einer Coulombkraft ($\gamma = 2.00, \delta = 0.01$).

Wie erwähnt, kann man aus einem Schlegeldiagramm die ursprüngliche räumliche Situation wieder rekonstruieren. Auch aus einem 2-dimensionalen Federdiagramm können wir eine 3-dimensionale Einbettung unserer sphärischen Graphen erhalten, wenn wir die Iteration 3-dimensional durchführen, vgl. Abb. 4.

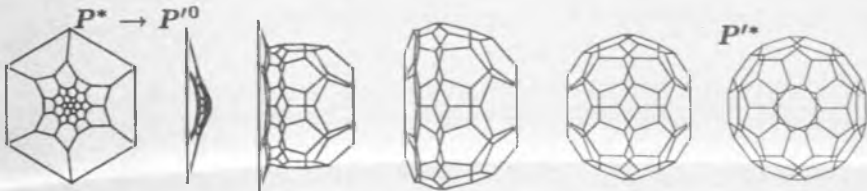


Abbildung 4: Kombination zweier Iterationen, um eine 3-dimensionale Einbettung zu konstruieren.

5-Eck	a)	b) $\alpha = 5$	c)	c')	d) d^3	e)	Abb. 4
$\sum d_{ij}$	16.379	19.364	18.733	20.049	19.650	21.759	113,288
d	0.182	0.215	0.208	0.223	0.218	0.242	1.259
d_{min}	0.042	0.065	0.082	0.092	0.097	0.139	1.232
d_{maz}	1.176	1.176	1.176	1.176	1.176	1.176	1.312
ρ_5^1	0.036	0.055	0.069	0.078	0.082	0.118	0.939
f_{min}	0.003	0.007	0.015	0.020	0.016	0.039	2.612
f_{maz}	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	2.378	4.207
ρ_5^2	0.001	0.003	0.006	0.009	0.007	0.016	0.621
6-Eck	a)	b) $\alpha = 5$	c)	c')	d) d^3	e)	Abb. 4
$\sum d_{ij}$	17.525	20.279	19.633	20.809	20.331	21.925	113.288
d	0.195	0.225	0.218	0.231	0.226	0.244	1.259
d_{min}	0.049	0.073	0.082	0.090	0.103	0.119	1.232
d_{maz}	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.312
ρ_6^1	0.049	0.073	0.082	0.090	0.103	0.119	0.939
f_{min}	0.005	0.011	0.017	0.026	0.020	0.037	2.612
f_{maz}	2.598	2.598	2.598	2.598	2.598	2.598	4.207
ρ_6^2	0.002	0.004	0.007	0.010	0.008	0.014	0.621

Tabelle 1: Vergleich der Gütezahlen der Diagramme aus Abb. 3.

Schluß

Abschließend soll noch auf die Approximation von Minimalflächen eingegangen werden, die mit den beschriebenen Methoden durchführbar ist. Federkräfte approximieren Anziehungskräfte innerhalb der Fläche, daher ist das resultierende Kantengerüst zu minimaler Energie ein Modell für eine Minimalfläche zu vorgegebener Randkurve. Die Modifikationen des Federmodells können hier z.B. dazu eingesetzt werden, ein Gleichgewicht in einem Luftstrom darzustellen.

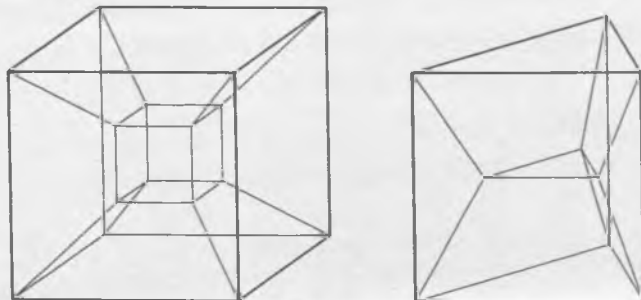


Abbildung 5: Schlegeldiagramme für einen 4-dimensionalen Würfel und für ein 4-dimensionales Prisma, vgl. [2].



Abbildung 6: Problemfall: Diagramm eines Prismas (links) mit einem linearen Federgesetz und (rechts) mit einer Gewichtung der Kanten (Variation der Federkonstanten).

Daß die vorgestellten Verfahren zur Berechnung von Diagrammen sinnvolle Lösungen liefern, kann für den Fall fester Gewichte gezeigt werden. Im Fall variabler Gewichte lassen sich allerdings Beispiele angeben, die keine Diagramme liefern, vgl. [1] und Abb. 6. Wie in Abb. 5 gezeigt, können die Konzepte auch auf höherdimensionale Objekte übertragen werden, wo allerdings ebenfalls kein Beweis vorliegt, wann sinnvolle Lösungen existieren.

Literaturverzeichnis

- [1] Groß, C.; Stempel, T.-K.: *Diagrams & Embeddings*. eingereicht, 15p, 1997.
- [2] Ziegler, G.M.: *Lectures on polytopes*. Graduated Texts in Mathematics 152, 370p. Springer-Verlag New York 1995.

Christian Groß
Torsten-Karl Stempel
Technische Hochschule Darmstadt, Fachbereich Mathematik