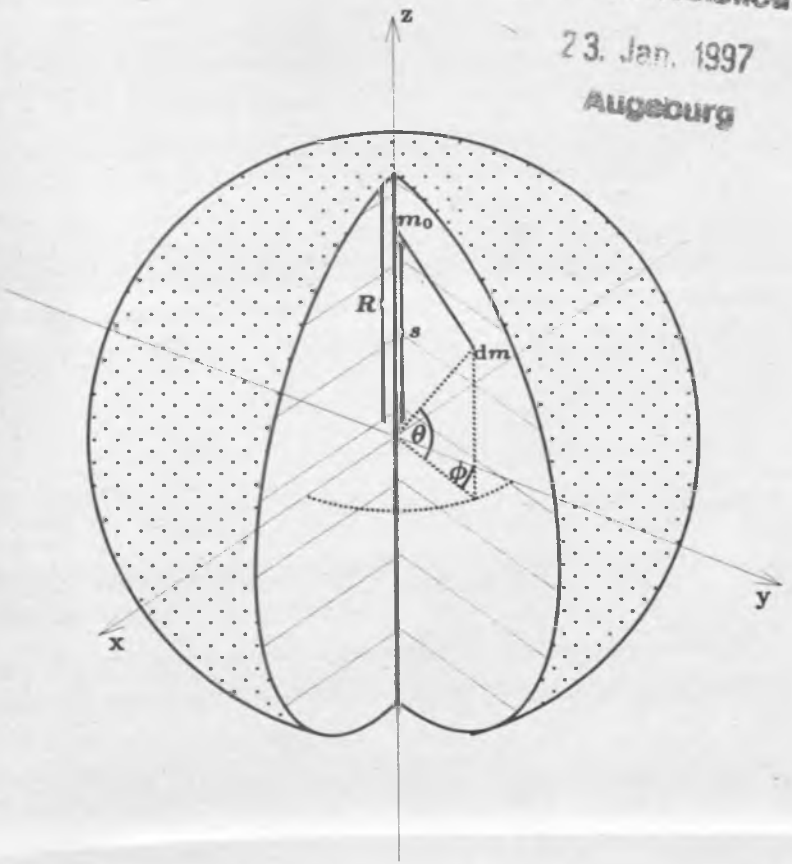
Die √WURZEL

Zeitschrift für Mathematik 9509 1,00 DM



Heft 1/97 31. Jahrgang

Räder und Straßen

Die in [3] behandelte Konstruktion einer Wälzkolbenpumpe kann in einen allgemeineren Zusammenhang eingebettet werden. Dieser Artikel enthält als Ergänzung die Berechnung von Rädern und Straßen und die Betrachtung von Grenzfällen beim Abrollen. Wie in [3] erwähnt, führen beide Abrollprobleme auf ähnliche Erhaltungs(differential)gleichungen. Auch die hier gezeigten Kurven sind mit dem in [3] beschriebenen Programm PUMPE erzeugt worden. Wir betrachten zunächst das Abrollen von Körpern deren Drehpunkt sich auf einer Geraden bewegt, siehe z.B. die ausführliche Behandlung in [1], wo Programme für das Computer-Algebra-System MATHEMATICA angegeben werden. Löst man die erhaltene Differentialgleichung anders auf, dann kann man umgekehrt zu einem gegebenen periodischen *Straßenprofil* einen Körper suchen, der gleitfrei abrollt. Schließlich betrachten wir Probleme, die beim Abrollen von Spitzen auftreten.

Mathematische Grundlagen

Wir stellen den abrollenden Körper (Rad) in Polarkoordinaten durch eine 2π-periodische Funktion $r(\varphi) = r(\varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ dar. Damit sich die Radachse konstant auf der Höhe k bewegt, muß sich der momentane Berührpunkt von Rad und Straße immer genau unter der Achse befinden. Daraus ergibt sich für das Straßenprofil $(x(\varphi), y(\varphi))$ sofort $y(\varphi) = k - r(\varphi)$. Weil der Körper gleitfrei rollen soll, muß der abgerollte Umfang gleich der zurückgelegten Wegstrecke sein $\sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2} = \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$. Man erhält analog zu den Gleichungen (1) und (2) in [3] die *Erhaltungs(differential)gleichungen* ($\mathrm{d}s$ Bogenlänge):

$$y(\varphi) = k - r(\varphi) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = -\mathrm{d}r \qquad \text{Achshöhe} = \text{konst.} \qquad (1)$$

$$\mathrm{d}x = r(\varphi)\mathrm{d}\varphi, \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}x}{k - y(x)}. \qquad \text{Wälzbedingung.} \qquad (2)$$

Man kann nun a) bei Vorgabe eines Rades die passende Straße als parametrisierte Kurve $(x(\varphi), y(\varphi))$ oder umgekehrt b) bei Vorgabe einer Straße als Funktion $y(x)$ den Drehwinkel $\varphi(x)$ und das zugehörige Rad $r(\varphi(x))$ als Funktionen der Wegstrecke finden.

Vorgabe von Rädern

Möchte man aus den Erhaltungsdifferentialgleichungen (1),(2) nach Vorgabe einer Funktion $r(\varphi)$ die zugehörige „Straße" berechnen und als Funktion

Abbildung 1 : (links) Die „Straße“ für ein gleitfrei abrollendes Polygon (hier ein regelmäßiges 4-Eck) besteht aus Segmenten der Kettenlinie, die passend gestaucht aneinander gesetzt werden, vgl.[4]. (Rechts) die Straße für eine Ellipse, deren Brennpunkt auf konstanter Höhe bewegt wird, ist eine skalierte cos-Funktion.

$y(x)$ schreiben, dann muß man das folgende Integral lösen:

$$x(\varphi) = \int_0^{\varphi} r(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Die Straße setzt sich aus Kurvenabschnitten zusammen, die mit der Periode der Radiusfunktion $r(\varphi)$ wiederholt werden. Zuerst betrachten wir **regelmäßige n-Ecke** als „Räder“:

$$r(\varphi) = \frac{k}{\cos\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi/n, \pi/n]. \tag{4}$$

Damit ist $y(0) = 0$. Mit $x(0) = 0$ folgt:

$$x(\varphi) = \int_0^{\varphi} r(t)\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right). \tag{5}$$

Diese Gleichung löst man nach $\sin\varphi$ auf, und durch Anwendung geeigneter Additionstheoreme und die Normierung $y(0) = 0$ folgt dann

$$\sin\varphi = \frac{\exp(2x/k) - 1}{\exp(2x/k) + 1} = \tanh\left(\frac{x}{k}\right) \Rightarrow y(x) = k(1 - \cosh\left(\frac{x}{k}\right)). \tag{6}$$

Die Periodenlänge $p = k\ln\left(\frac{1+\sin\pi/n}{1-\sin\pi/n}\right)$ folgt schließlich aus (5), vgl. Abb.1.

Nimmt man den Brennpunkt einer **Ellipse** mit den Halbachsen a, b als Drehzentrum :

$$r(\varphi) = \frac{b^2/a}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \quad \varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

dann muß wegen (3) die Straße folgende Form haben ($y(\varphi) = k - r(\varphi)$):

$$x(\varphi) = 2b \arctan\left(\frac{\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right).$$

Als Funktion folgt dann bis auf die Normierung $y(0) = 0$ eine cos-Funktion, die durch die Faktoren $1/b$ und $\sqrt{a^2 - b^2}$ in x- und in y-Richtung skaliert ist, vgl. Abb.1:

$$y(x) = \sqrt{a^2 - b^2} \cos\left(\frac{x}{b}\right).$$

Bemerkung: Die Straßen für polygonale Räder sind passend aneinander gesetzte Segmente der Kettenlinie, während die Räder, die auf polygonalen Straßen abrollen, Segmente der logarithmischen Spirale enthalten. Diese rollt, wie in [3] gezeigt, auf einer logarithmischen Spirale ab. Führt man für die Berührpunktkurve den Grenzprozeß für ein n-Eck mit unendlich vielen Ecken durch, dann wird die Periode $p = 2x(\pi/n)$ immer kürzer, während andererseits die Kurve immer flacher wird. Genauso erreicht man die ebene Straße für ein rundes Rad, wenn eine Ellipse mit $a = b$ vorliegt.

Vorgabe einer Straße

Eine weitere derartige Aufgabenstellung liegt in der Vorgabe einer Straße und der Suche nach einem Körper, der gleitfrei darauf abrollt. Als Beispielstraße dient eine periodische Dreiecksfunktion der Periodenlänge $2l$ ($\Rightarrow$ Rampenlänge l) und Maximalhöhe h ($y(0) = 0, y(l) = h, y(2l) = 0$ etc), vgl. Abb.2. Während des ersten Anstiegs, d.h. für $\varphi \in [0, \pi]$ gilt somit:

$$y'(x) = \frac{h}{l} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{h}{l} r(\varphi) \;\Rightarrow\; r = r_0 \exp\left(-\frac{h\varphi}{l}\right).$$

Die Konstante r_0 ergibt sich aus der Auswertung des Integrals in (3):

$$x(\pi) = l = \int_0^\pi r_0 \exp\left(-\frac{h\varphi}{l}\right) \mathrm{d}\varphi \;\Rightarrow\; r_0 = \frac{h}{1 - \exp\left(-\frac{h\pi}{l}\right)}.$$

Insgesamt erhält man für den Radius:

$$r(\varphi) = r_0 \begin{cases} \exp(-h\varphi/l) & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ \exp(-h(2\pi - \varphi)/l) & \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}.$$

Schluß

Rollbewegungen setzen sich aus infinitesimalen Rotationen um den momentanen Berührpunkt zusammen. Dieser Berührpunkt hebt sich daher im

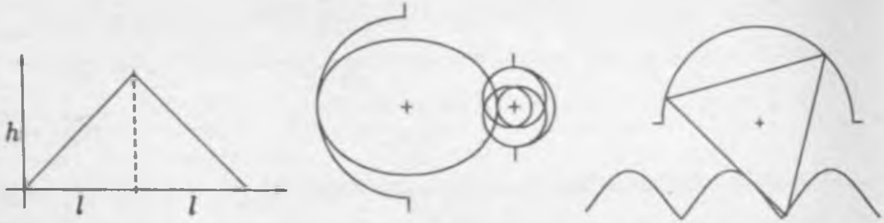


Abbildung 2 : (Rechts) Straße zur logarithmischen Spirale, (mitte) zwei aneinander abrollende Körper, wobei der Radius des 2. Körpers 6π-periodisch ist und (links) Verkanten einer abrollenden Spitze für ein regelmäßiges Dreieck.

nächsten Moment senkrecht von der Straßenoberfläche ab. Damit sich der Körper in den Knickstellen der Straße nicht verklemmt, darf sich folglich die Tangente dort höchstens um 90° ändern. Anschaulich ist klar, daß die Winkel von Straße und Körper identisch sind. Dies zeigt auch eine mathematische Untersuchung der links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Straßensteigungen, z.B. erhält man für ein regelmäßiges n-Eck:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\varphi=\frac{\pi}{n}\pm\varepsilon\right)=\pm\tan\frac{\pi}{n}.$$

Das kleinste tatsächlich abrollbare regelmäßige n-Eck ist somit ein Quadrat. Betrachtet man als mögliche Verallgemeinerung regelmäßige **n-Sterne**, die durch einen Knick in den Seitenmitten aus n-Ecken abgeleitet werden, dann gilt auch hier die oben gemachte Einschränkung. Sowohl der Knick als auch die sich ergebenden Sternspitzen müssen einen Winkel aufweisen, der größer als 90° ist; damit ist der erste abrollbare Stern fünfzackig.

Die gezeigten Beispiele besitzen alle eine geschlossene Darstellung für Rad und Straße. Im allgemeinen Fall wird man, wie in [2] erwähnt, auf numerische Lösungen zurückgreifen. Mit dem Programm PUMPE ist es auch möglich, Abrollvorgänge zu betrachten, die mechanisch nicht realisiert werden können, z.B. wenn die Funktion $r(\varphi)$ nicht 2π-periodisch ist, oder wenn sich der Körper beim Abrollen verklemmen würde, vgl. Abb.2.

Die Ellipse besitzt „schöne“ Abrolleigenschaften beim gegenseitigen Abrollen und beim Abrollen auf einer Straße. Dies gilt bei geeigneter Interpretation auch für Parabel und Hyperbel. Eine interessante (bislang noch ungeklärte) Frage ist nun die, ob auch die in [2] betrachteten verallgemeinerten Kegelschnitte ähnliche Abrolleigenschaften besitzen.

Literaturverzeichnis

[1] L.Hall, S.Wagon, *Roads and Wheels,* Math.Magazine, Vol.65, No.5, (1992), pp283-301

[2] C.Gross, T.-K.Strempel, *Verallgemeinerte Kegelschnitte,* Wurzel, No.12, (1996)

[3] C.Gross, T.-K.Strempel, *Gegenseitiges Abrollen,* Wurzel, 1997

[4] H.Wellstein, *Physikalische Experimente als Anreiz, Analysis zu lernen,* Festschrift für Hans-Joachim Vollrath, hrsg. G.Pickert, Klett Schulbuchverlag, Stuttgart (1994), 304p

Christian Groß, Torsten-Karl Strempel
Darmstadt
gross/strempel@mathematik.th-darmstadt.de

Lösungsbedingungen für die $\sqrt{\text{WURZEL}}$–Aufgaben

Die Lösungen sind — jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name und Adresse — unter dem Kennwort „Wurzel–Aufgaben“ an die Redaktion zu senden. Wer an einer Korrektur seiner Aufgaben interessiert ist, lege bitte einen frankierten Briefumschlag bei.
Alle Aussagen sind zu beweisen, unbewiesen verwendete Sachverhalte sind anzugeben. Natürlich können auch unvollständige Lösungen eingesandt werden.

In den Heften 3+4 und 9+10 erfolgt dann jeweils die Auflösung der Aufgaben. Einsendeschluß dazu ist der 1.März bzw. der 1.September. Außer einer Lösung veröffentlichen wir auch eine Übersicht über alle Leserinnen und Leser, welche vollständig richtige Lösungen eingesandt haben.