

72/101 5572-50,12

# Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$

Zeitschrift für Mathematik

1,00 DM

Universitätsbibliothek

11. Dez. 1996  
Augeburg

WU: R=ZE, LLL...

WUR: ZEL = W, GUTGUTGUT...  
mit  $N=4$



Einen  
guten  
Rutsch  
ins neue Jahr !

## Verallgemeinerte Kegelschnitte – Kurven mit mehreren Brennpunkten

Wir verallgemeinern den Ansatz von R.Thommes [2], die Ellipse um einen Brennpunkt zu erweitern und Eigenschaften von sog. Trillipsen zu studieren. Dazu betrachten wir eine gewichtete Summe von Abständen zu  $n$  Brennpunkten  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  im  $\mathbb{R}^d$  mit Gewichten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Wir definieren verallgemeinerte Kegelschnitte und vergleichen diese bezüglich ausgewählter Eigenschaften mit Ellipse, Parabel und Hyperbel.

Wir verwenden das Skalarprodukt und den euklidischen Abstand im  $\mathbb{R}^d$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{j=1}^d x_j y_j, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|_2 := \sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle} \quad (1)$$

und definieren über die *gewichtete Abstandssumme* zu den Brennpunkten den *verallgemeinerten Radius*  $\rho(\vec{x})$  und folgende Punktengen:

$$\rho(\vec{x}) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\vec{x} - \vec{b}_i\|_2, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad K_{\rho,n} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid \rho(\vec{x}) = \rho\} \quad (2)$$

$$B_{\rho,n} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid \rho(\vec{x}) \leq \rho\}.$$

$K_{\rho,n}$  bezeichnen wir als *verallgemeinerten Kegelschnitt*.

Diese Definition gilt für beliebige Dimensionen und enthält mit  $n = 1, \alpha_1 > 0$  die Kugeln im  $\mathbb{R}^d$ , sowie für  $n = 2, \alpha_{1,2} > 0$  Ellipsoide ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) und Eikörper ( $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ). In den Bildunterschriften geben wir die Brennpunkte und Gewichte als Vektoren  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{d+1}$  an, wobei die letzte Koordinate ist.

Wir beschränken uns zunächst auf den 2-dimensionalen Fall, so daß ein verallgemeinerter Kegelschnitt wie folgt implizit definiert ist:

$$\alpha_1 \sqrt{(x - b_{1,x})^2 + (y - b_{1,y})^2} + \dots + \alpha_n \sqrt{(x - b_{n,x})^2 + (y - b_{n,y})^2} = \rho. \quad (3)$$

Diese Gleichung kann schon für zwei Brennpunkte und  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  oder für 3 Brennpunkte nicht mehr so aufgelöst werden, daß man  $y$  als Funktion von  $x$  erhält. Betrachtet man die Darstellung allerdings als Punkt einer Fläche  $(x, y, \rho(x, y))$  im  $\mathbb{R}^3$ , dann entsteht ein verallgemeinerter Kegelschnitt durch den Schnitt dieser Fläche mit einer Ebene parallel zur  $xy$ -Ebene in der Höhe  $\rho$ . Dies kann man verwenden, um verallgemeinerte Kegelschnitte über Niveauliniendarstellungen von Flächen zu erhalten.

- Das Computeralgebraprogramm **MATHEMATICA** liefert mit den Befehlen  $\text{Plot3D}[r[x,y],\{x,-2,2\},\{y,-2,2\}]$  und  $\text{ContourPlot}[r[x,y],\{x,-2,2\},\{y,-2,2\}]$

Darstellungen der Flächen und Niveaulinien für verallgemeinerte Kegelschnitte mit  $n$  Brennpunkten und Gewichten  $\alpha_i$ , siehe z.B. Abb.2.

- Auch mit dem Computeralgebraprogramm **MAPLE** kann man Flächen darstellen und die Niveaulinien hervorheben. Zudem ist es möglich, die impliziten Gleichungen direkt auszuwerten und man erhält mit den Befehlen

$\text{implicitplot}(r[x,y],\{x,-2,2\},\{y,-2,2\})$  und  
 $\text{implicitplot3d}(r[x,y,z],\{x,-2,2\},\{y,-2,2\},\{z,-2,2\})$

auch Darstellungen von verallgemeinerten 1- und 2-dimensionalen Kegelschnitten, siehe Abb.5 am Ende.

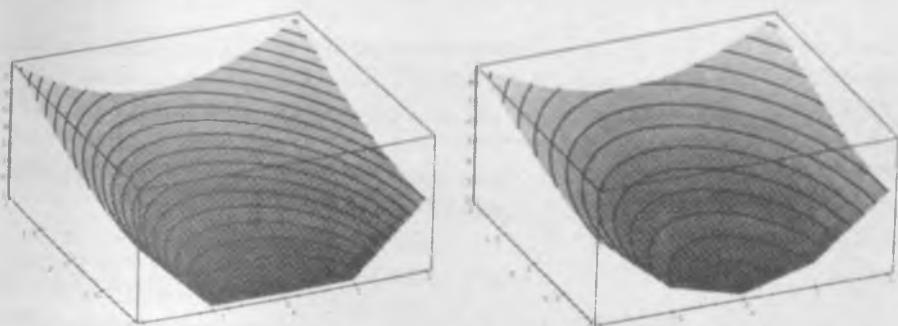


Abbildung 1: Niveauliniendarstellungen (links)  $\vec{b}_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 0, 1)$  und (rechts)  $\vec{b}_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_2 = (0, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_3 = (1, 0, 1)$ .

## 1 Verallgemeinerte Ellipsen

Wählt man alle Gewichte positiv, dann kann man zeigen, daß die Mengen  $B_{\rho,n}$  konvex sind, also als Inneres verallgemeinerter Ellipsen aufgefaßt werden können, vgl. Abb.1. Die konvexe Hülle zweier Punkte  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$  ist definiert als ihre Verbindungsstrecke:

$$\text{conv}\{\vec{x}, \vec{y}\} := \{\vec{t} \in \mathbb{R}^d \mid \vec{t} = t\vec{x} + (1-t)\vec{y}, \quad t \in [0, 1]\}.$$

Eine Menge  $M$  heißt *konvex*, wenn für alle Punktpaare  $(\vec{x}, \vec{y})$  aus  $M$  auch deren konvexe Hülle in  $M$  enthalten ist. Der euklidische Abstand zweier Punkte ist homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung:

$$\|t\vec{x}\|_2 = |t| \|\vec{x}\|_2, \quad \|\vec{x} + \vec{y}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}.$$

Sind  $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$  und  $\vec{t} \in \text{conv}\{\vec{x}, \vec{y}\}$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \|\vec{p} - \vec{t}\|_2 &= \|\vec{p} - (t\vec{x} + (1-t)\vec{y})\|_2 = \|t(\vec{p} - \vec{x}) + (1-t)(\vec{p} - \vec{y})\|_2 \\ &\leq t\|\vec{p} - \vec{x}\|_2 + (1-t)\|\vec{p} - \vec{y}\|_2. \end{aligned}$$

Also sind die Mengen  $B_{\rho, n}$  konvex: für je zwei Punkte in der Menge liegen auch alle Punkte auf der Verbindungsstrecke in der Menge, denn für alle  $\vec{t} \in \text{conv}\{\vec{x}, \vec{y}\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{t}) &= \sum_{i=1}^n \|\vec{p}_i - \vec{t}\|_2 \leq t \sum_{i=1}^n \|\vec{p}_i - \vec{x}\|_2 + (1-t) \sum_{i=1}^n \|\vec{p}_i - \vec{y}\|_2 \\ &\leq t\rho(\vec{x}) + (1-t)\rho(\vec{y}). \end{aligned}$$

## 2 Verallgemeinerte Parabeln und Hyperbeln

Eine Parabel entsteht aus einer Ellipse, wenn man einen Brennpunkt festhält und den anderen Brennpunkt auf einer radialen Geraden „gegen unendlich schiebt“, siehe Abb.2. Um den Abstand zu einem Punkt  $b_{i, \infty}$  im Unendlichen, einem *Fernpunkt*, zu berechnen, ersetzen wir den Punkt durch eine Gerade  $g_i$ , deren normierter Normalenvektor  $\vec{n}_i$  in Richtung des Fernpunktes zeigt. Jeder Punkt auf der Geraden  $g_i$  hat den gleichen Abstand zu dem Fernpunkt, und wir können den Abstand zu dem Fernpunkt durch den gerichteten Abstand zur Geraden  $g_i$  ersetzen:

$$d(\vec{x}, \vec{b}_{i, \infty}) := \bar{d}(\vec{x}, g_i) = -\langle \vec{n}_i, \vec{x} \rangle.$$

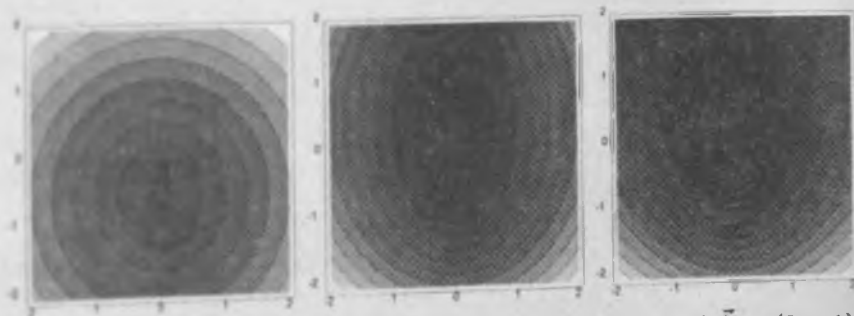


Abbildung 2: Verschieben eines Brennpunktes,  $b_1 = (0, -1, 1)$ ,  $\vec{b}_2 = (0, a, 1)$  mit  $a = 1, 5, 10$  (von links).

Dieser gerichtete Abstand zu Geraden kann im Gegensatz zum euklidischen Abstand auch negative Werte annehmen. Dies hat zur Folge, daß die Gewichte für Fernpunkte immer positiv gewählt werden können, evtl. ersetzt

man  $\vec{n}_i$  durch  $-\vec{n}_i$ . Durch Verschieben der Geraden in Richtung von  $\vec{n}_i$ , läßt sich immer erreichen, daß die gewichtete Abstandssumme Null wird. Die so verschobene Gerade bezeichnen wir dann in Analogie zum klassischen Fall als Brenngerade: Eine Parabel ist der Ort aller Punkte ist, deren Abstand zu einem Punkt und einer Geraden gleich ist. Verallgemeinerte Parabeln sind also Mengen von Punkten, deren gewichtete Abstandssumme zu endlich vielen Brennpunkten und einer Geraden konstant ist.

Hat man mehrere Fernpunkte, so kann man diese zu einem einzigen Fernpunkt zusammenfassen. Sind nämlich  $m$  Fernpunkte mit Normalenvektoren  $\vec{n}_i$  und Gewichten  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) gegeben, so berechnet sich ihr Anteil an der gewichteten Abstandssumme zu ( $\alpha_{\text{neu}} := \|\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{n}_i\|_2$ ):

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i d(\vec{x}, \vec{b}_i, \infty) = - \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle \vec{n}_i, \vec{x} \rangle = - \langle \alpha_{\text{neu}} \vec{n}_{\text{neu}}, \vec{x} \rangle = d(\vec{x}, \vec{b}_{\text{neu}}, \infty)$$

und falls  $\alpha_{\text{neu}} \neq 0$  gilt  $\vec{n}_{\text{neu}} := \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{n}_i}{\|\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{n}_i\|_2}$ .

Betrachtet man z.B. alle Punkte, die zu zwei Geraden  $g_1, g_2$  mit gleicher Gewichtung eine konstante Abstandssumme haben, so liegen diese Punkte auf Parallelen zu der Winkelhalbierenden von  $g_1$  und  $g_2$  mit dem Normalenvektor  $\vec{n} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$ .

Für einen endlichen und einen unendlich fernen Brennpunkt erhält man bei gleichem Gewicht also eine Parabel und bei mehr als einem endlichen Brennpunkt eine verallgemeinerte Parabel, siehe Abb.3 links.

Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstandsdifferenz zu zwei Punkten konstant ist, d.h. wir haben also eine Abstandssumme mit einem positiven und einem negativen Gewicht. Wie auch für Ellipse und Parabel läßt sich diese Definition auf mehr als zwei Brennpunkte bzw. andere Gewichte als  $\pm 1$  ausdehnen, siehe Abb.3 mitte. Offene Kurven können nur entstehen, wenn das Gewicht des Fernpunktes mindestens so groß wie die Summe der Gewichte der endlichen Brennpunkte ist. Um dies zu zeigen, ist es günstig, die Darstellung in Polarkoordinaten zu verwenden ( $\vec{b}_i = r_i(\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$ ,  $\vec{x} = r(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ ):

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\vec{x} - \vec{b}_i\|_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sqrt{r^2 - 2rr_i \cos(\vartheta - \vartheta_i) + r_i^2}.$$

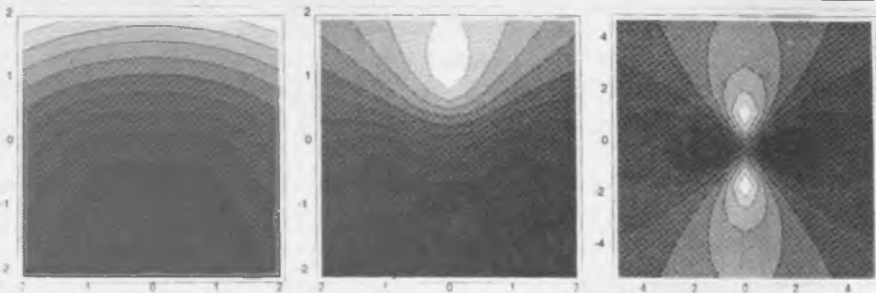


Abbildung 3: Verallgemeinerte Parabel (links),  $\vec{b}_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_3 = (0, -\infty, 2)$ ; verallgemeinerte Hyperbeln (mitte),  $\vec{b}_1 = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_3 = (0, 1, 2)$  und nichtklassische verallgemeinerte Kegelschnitte (rechts),  $\vec{b}_1 = (-1, 0, -1)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b}_3 = (0, -1, 1)$ ,  $\vec{b}_4 = (0, 1, 1)$ .

Für  $r \gg r_i$  kann man die Wurzeln entwickeln ( $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2-x^2/8+\dots$ , für  $x \ll 1$ ) und erhält:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i r \sqrt{1 - 2 \frac{r_i}{r} \cos(\vartheta - \vartheta_i) + \frac{r_i^2}{r^2}} \approx r \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Sei  $\vec{b}_{0,\infty}$  ein Fernpunkt, dann liefert diese Entwicklung ( $\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ):

$$\rho(\vec{x} \gg \vec{b}_i) = (\alpha - \alpha_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0))r \quad (4)$$

Die obige Gleichung ist aber gerade die Polarkoordinatendarstellung für Kegelschnitte in der Brennpunktform. Man erhält also für  $|\alpha| \neq 0$  alle Typen von (klassischen) Kegelschnitten, je nachdem wie sich die Gewichte der endlichen und des unendlich fernen Punktes zueinander verhalten.

$$r(\vartheta) = \frac{\rho_0}{\alpha - \alpha_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \begin{cases} |\alpha| > |\alpha_0| & \text{Ellipse} \\ |\alpha| = |\alpha_0| & \text{Parabel} \\ |\alpha| < |\alpha_0| & \text{Hyperbel} \end{cases} \quad (5)$$

Es gibt allerdings auch Kurventypen, die nicht als Erweiterungen der klassischen Kegelschnitte aufgefaßt werden können. So zeigt Abb.3 rechts eine Schar verallgemeinerter Kegelschnitte zu 4 Brennpunkten, wobei zwei das Gewicht +1 und zwei das Gewicht -1 haben.

### 3 Physikalische Eigenschaften

Kegelschnitte haben bezüglich der Brechung und Reflexion von Lichtstrahlen „schöne“ Eigenschaften, deren Gültigkeit man für verallgemeinerte Kegelschnitte ebenfalls überprüfen kann. Eine Ellipse reflektiert jeden Lichtstrahl, der von einem Brennpunkt ausgeht, zurück zum anderen Brennpunkt (Flüstersäle). Dies gilt bei entsprechender Übertragung auch für Parabeln und Hyperbeln, siehe Abb.4.

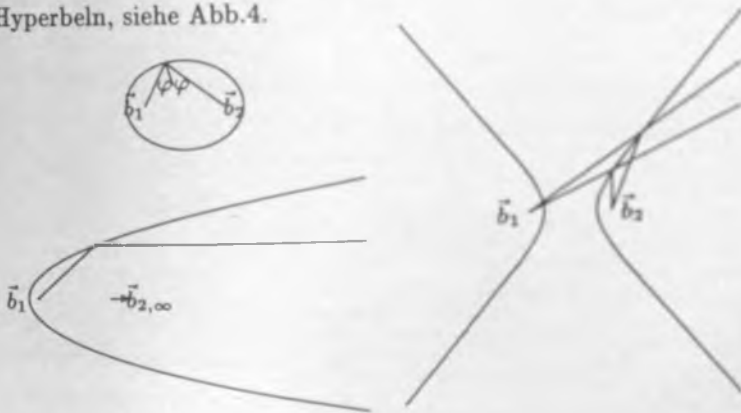


Abbildung 4: Brennpunktstrahlen für klassische Kegelschnitte  $|\alpha_{1,2}| = 1$ .

Für eine verallgemeinerte Ellipse ist die Frage nach einer solchen Eigenschaft zunächst sinnlos, da alle Brennpunkte gleichberechtigt sind und ein Strahl von einem Brennpunkt aus nicht zweigeteilt werden kann. Man kann aber die Eigenschaft, daß Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel ist, auch so formulieren, daß die gewichtete Summe der Winkel mit der Tangente an die Kurve in jedem Punkt identisch verschwindet. Dies läßt sich aus der Definition der gewichteten Abstandssumme ableiten. Sei  $\vec{t}$  die Tangente im Punkt  $\vec{x}$  an einen verallgemeinerten Kegelschnitt. Der Winkel bzw. dessen Cosinus, den ein Lichtstrahl  $\vec{l}_i$  von einem Brennpunkt  $\vec{b}_i$  aus mit  $\vec{t}$  einschließt, berechnet sich zu  $\cos \varphi_i = \frac{(\vec{x} - \vec{b}_i) \cdot \vec{t}}{|\vec{x} - \vec{b}_i| |\vec{t}|}$  und die gewichtete Summe dieser Winkel läßt sich dann umformen zu:

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{(\vec{x} - \vec{b}_i) \cdot \vec{t}}{|\vec{x} - \vec{b}_i| |\vec{t}|} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{(\vec{x} - \vec{b}_i)}{|\vec{x} - \vec{b}_i|} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} \vec{\nabla}_x \rho(\vec{x})$$

und dies gilt, weil Niveaulinien und Gradient immer senkrecht aufeinander stehen (wo immer der Gradient gebildet werden kann, also außerhalb der Brennpunkte).

Physikalisch gibt es aber kein gewichtetes Reflexionsgesetz und diese Eigenschaft kann nur für spezielle Ovale mit zwei Brennpunkten interpretiert werden. Wählt man ein Oval so, daß ein Brennpunkt außerhalb und einer innerhalb liegt, siehe Abb.5, dann entspricht die obige Gleichung dem Snelliusschen Brechungsgesetz, wenn man die Brechnungsindizes zu  $n_1 = \alpha_1$  und  $n_2 = \alpha_2$  wählt.

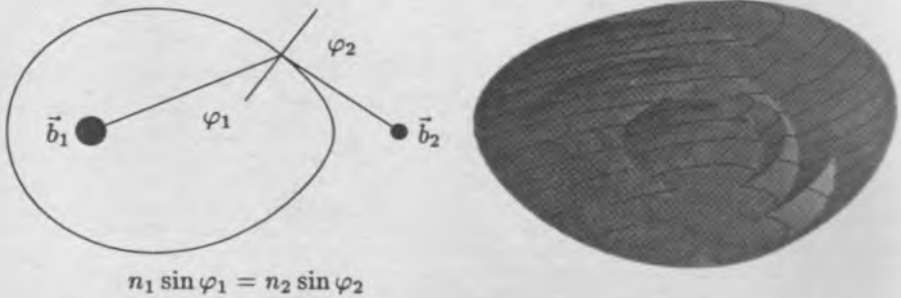


Abbildung 5: (Rechts) Snelliussches Brechungsgesetz für ein Oval,  $\vec{b}_1 = (-1, 0, 2)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 0, 1)$  und (links) 2-dimensionale verallgemeinerte Kegelschnitte (Ovaloide),  $\vec{b}_1 = (-1, 0, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 0, 0, 2)$ ,  $\rho = 3, 4, 5$ .

Wie in [2]-II beschrieben, kann man bei positiven Gewichten auch für verallgemeinerte Kegelschnitte eine Gärtnerkonstruktion angeben. Diese Konstruktion läßt sich dann auch zur Bestimmung des Punktes mit kleinstem Radius verwenden. Die verallgemeinerte Gärtnerkonstruktion wirft die Frage nach der Anzahl der Punkte mit minimalem Radius, der sog. Fermat-Toricelli-Punkte, auf. Wir zeigen in [1], daß die Menge  $K_{\rho, n}$  der Punkte mit minimalem Radius entweder aus genau einem Punkt oder aus der Verbindung von zwei Brennpunkten besteht. Letzteres ist nur dann möglich, wenn alle Brennpunkte auf einer Geraden liegen und es Punkte auf dieser Geraden gibt, für die die Summen der Gewichte „links und rechts“ identisch sind.

Die Fermat-Toricelli-Punkte können z.B. über ein Iterationsverfahren oder über ein Gradientenverfahren berechnet werden ( $\gamma_j^i := \|\vec{x}^i - \vec{b}_j\|$ ,  $\rho^i = \rho(\vec{x}^i)$ ):

$$\vec{x}^{i+1} = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{b}_j \gamma_j^i}{\sum_{j=1}^n \alpha_j \gamma_j^i}, \quad \vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \vec{\nabla}(\rho^i).$$

#### 4 Schluß

Viele der gezeigten Eigenschaften lassen sich problemlos auch auf höhere Dimensionen übertragen und wurden z.T. nur der besseren Darstellbarkeit wegen 2-dimensional behandelt, vgl. [1] auch für ein ausführliches Literatur-



verzeichnis. Natürlich haben wir nur einige Eigenschaften auf ihre Übertragbarkeit hin überprüft. So könnte man versuchen, z.B. den Umfang bzw. die Fläche verallgemeinerter Ellipsen durch ihre Brennpunkte bzw. verallgemeinerte Halbachsen auszudrücken. Allerdings müssen die Brennpunkte keine konvexen Konfigurationen bilden, so daß die Definition solcher verallgemeinerter Halbachsen schon sehr willkürlich wird. Asymptotisch konvergieren Fläche und Umfang gegen die Größen einer passend gewählten Ellipsen- bzw. Kreisschar, je nachdem, ob  $\alpha_0 \neq 0$  oder  $\alpha_0 = 0$  in der Entwicklung aus Gl.(4). Abschließend folgen in Abb.6 Ellipsen in verschiedenen  $p$ -Normen.

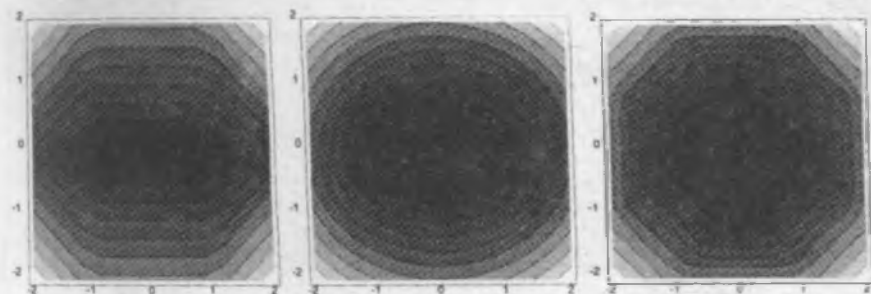


Abbildung 6: Ellipsen in verschiedenen  $p$ -Normen,  $\vec{b}_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $p = 1, 2, \infty$ .

## Literaturverzeichnis

- [1] C.GROSS, T.-K.STREMPER, *Topologie verallgemeinerter Kegelschnitte*, Mathematische Semesterberichte, erscheint
- [2] R.THOMMES, *Erweiterung der Ellipse auf 3 Brennpunkte I-III*, Wurzel, No.2,5,6, (1995), pp26-34, pp93-99, pp130-137

Christian Groß, Torsten-Karl Stempel  
Technische Hochschule Darmstadt  
gross / stempel@mathematik.th-darmstadt.de