Uwe Meixner, Regensburg

FORMALE LOGIK OHNE MODELLTHEORIE

Ich setze die modelltheoretische Begründung der elementaren Prädikatenlogik, der modalen (klassischen) Aussagenlogik und der nichtklassischen Aussagenlogik (z.B. der intuitionistischen) als bekannt voraus. Demgegenüber gebe ich hier deren Begründung in der ontologisch äußerst sparsamen *Wahrheitsgesetzsemantik*, die sich aller modelltheoretischen Mittel entschlägt. Der Begriff der *Interpretation*, aber auch der der *Bewertung*, der für die *Wahrheitswertsemantik*[1] zentral ist, spielt in der Wahrheitsgesetzsemantik keine Rolle. Jede Bezugnahme auf unendlich große Mengen entfällt. Außerdem wird soweit als möglich die Bezugnahme auf nichtsprachliche Entitäten vermieden

Seien L_1, L_2 und L_3 Sprachen, deren Sätze bereits ein Bedeutung haben. L_1 ist eine Sprache der modalen Aussagenlogik mit den logischen Konstanten $\neg, \supset, L$; L_2 eine (nichtklassisch interpretierte) Sprache der Aussagenlogik mit den logischen Konstanten $\neg, \supset, \wedge, \vee$; L_3 eine Sprache der Prädikatenlogik (ohne freie Variablen) mit der auszeichenbaren einstelligen Prädikatkonstanten E und den logischen Konstanten $\neg, \supset, ()$. Die metasprachlichen Variablen x,y,z,... beziehen sich jeweils auf die Sätze von L_1, bzw. L_2, bzw. L_3 (je nach dem, von welcher Sprache gerade die Rede ist). $\alpha, \beta, \ldots$ sind Variablen für die Objekt-Konstanten von L_3, $\nu, \upsilon, \ldots$ Variablen für die Variablen von L_3. "gdw" und "wenn,dann" werden im Sinne der materialen Äquivalenz bzw. Implikation verstanden, "$\bigwedge x$" ist kurz für "für alle x"; in der Reihe "nicht", "und", "oder", "wenn,dann", "gdw" nimmt die Bindungsstärke in Leserichtung ab.

Die Wahrheitsgesetze für die logischen Konstanten von L_1 relativ zu L_1 lauten:

$$W(L_1, \neg, \supset)$$

$L_1 \neg$ $\quad N\bigwedge x(W[\neg x]$ gdw nicht $W[x])$

$L_1 \supset$ $\quad N\bigwedge x\bigwedge y(W[x \supset y]$ gdw nicht $W[x]$ oder $W[y])$

$L_1 L$ $\quad N\bigwedge x(W[Lx]$ gdw $NW[x])$

N ist hierbei der metasprachliche Modaloperator der analytischen Notwendigkeit. Für ihn gelten die S5-Gesetze und die Barcan-Formel. Dies ist einsichtig, ohne daß man sich hierzu auf die Mögliche-Welten-Semantik berufen müßte.

Uwe Meixner, Regensburg

Die Wahrheitsgesetze für die logischen Konstanten von L_2 relativ zu L_2 lauten:

$$W(L_2, \neg, \supset, \wedge, \vee)$$

$L_2\neg$ $\quad K\wedge x(W[\neg x]$ gdw Knicht $KW[x])$

$L_2\supset$ $\quad K\wedge x\wedge y(W[x\supset y]$ gdw $K($wenn $KW[x]$, dann $KW[y]))$

$L_2\wedge$ $\quad K\wedge x\wedge y(W[x\wedge y]$ gdw $K(KW[x]$ und $KW[y]))$

$L_2\vee$ $\quad K\wedge x\wedge y(W[x\vee y]$ gdw $K(KW[x]$ oder $KW[y]))$

K ist hierbei der metasprachliche Modaloperator des Wissens (der Person π zum Zeitpunkt t). Für ihn gelten die S4-Gesetze und die Barcan-Formel (was wiederum ohne MW-Semantik einsichtigt ist). Daher kann man statt "K(KW[x] und KW[y])" auch logisch äquivalent "KW[x] und KW[y]" setzen, und statt "K(KW[x] oder KW[y])" "KW[x] oder KW[y]". In L_2 werden die vertrauten aussagenlogischen Konnektoren in einer gewissen Weise epistemisch interpretiert. Es ist keineswegs die einzig plausible Weise. Zwei andere solche Weisen erhält man, indem man in $W(L_2, \neg, \supset, \wedge, \vee)$ "K" vor "W" wegläßt oder das (von links nach rechts) jeweils zweite "K" streicht.

Der Alloperator in der prädikatenlogischen Sprache L_3 kann *substitutionell*, *klassisch* oder *existenzial* (im Sinne der Freien Logik) gedeutet sein. $L_3\neg$ und $L_3\supset$ sehen aus wie $L_1\neg$ und $L_1\supset$. Aber nach den drei möglichen Deutungen des Alloperators haben wir drei verschiedene Versionen von L_3E und $L_3()$.

Bei substitutioneller Deutung

$1\text{-}L_3E$ $\quad$ fehlt (denn E ist nicht ausgezeichnet)

$1\text{-}L_3()$ $\quad \wedge x\wedge\alpha\wedge\nu$(wenn α in x und ν nicht in x, dann

$(W[(\nu)x[\nu/\alpha]]$ gdw $\wedge\beta W[x[\beta/\alpha]]))$

($x[\nu/\alpha]$ ist das Resultat der Ersetzung von α durch ν an gewissen Stellen in x.)

Bei klassischer Deutung

$\alpha, \beta, \ldots$ beziehen sich nun auf die *potentiellen* Objekt-Konstanten. Die potentiellen Objekt-Konstanten sind die Objekt-Konstanten (im normalen Sinn) zusammen mit den *virtuellen Objekt-Konstanten*. Virtuelle Objekt-Konstanten sind Objekte im Gegenstandsbereich von L_3, die nicht durch eine Objekt-Konstante bezeichnet werden (sie sind normalerweise *keine* Objekt-Konstanten). *Virtuelle Sätze* (von L_3) gehen aus Sätzen hervor, indem man eine virtuelle Objekt-Konstante für eine Objekt-Konstante in diesen substituiert. (Das Resultat wird gewöhnlich etwas sein, das man nicht an eine Tafel schreiben kann.) Die potentiellen Sätze sind die Sätze

zusammen mit den virtuellen Sätzen; auf die potentiellen Sätze beziehen sich nun die Variablen x,y,...

2-L_3() lautet dann wie 1-L_3() (nur daß eben die Variablen α,β und x anders gedeutet sind). 2-L_3E fehlt, da E nicht ausgezeichnet ist.

Bei existenzialer Deutung

Die Belegung der metasprachlichen Variablen ist wie im vorausgehenden Fall. Es wird aber eine zusätzliche Unterscheidung eingeführt: *fiktive* Objekt-Konstanten sind Objekt-Konstanten (im normalen Sinn), die nichts bezeichnen; *genuine* Objekt-Konstanten sind Objekt-Konstanten, die etwas bezeichnen; *nichtfiktive* Objekt-Konstanten sind die genuinen Objekt-Konstanten zusammen mit den virtuellen.

3-L_3E $\quad \Lambda\alpha(W[E(\alpha)]$ gdw α ist eine nichtfiktive Objekt-Konstante)

3-L_3() $\quad \Lambda x\Lambda\alpha\Lambda\nu$(wenn α in x und ν nicht in x, dann $(W[(\nu)x[\nu/\alpha]]$ gdw $\Lambda\beta$(wenn β eine nichtfiktive Objekt-Konstante, dann $W[x[\beta/\alpha]]))$)

Für Sprachen, deren *Valenz* Wahrheit (und nicht z.B. Beweisbarkeit) ist, lautet dann das generelle Schema für die Definition der *logischen Wahrheit*: Ist x ein Satz von L_1:

x ist L_1-logisch wahr := *W[x]* ist logisch (im Sinne der Logik der Metasprache) herleitbar aus den Wahrheitsgesetzen für die logischen Konstanten von L_1 relativ zu L_1.

Jede Bezugnahme auf überabzählbar viele unendlich große höchst komplexe Entitäten (Interpretationen im modelltheoretischen Sinn, übrigens aber auch Bewertungen) entfällt.

Sei K nun ein (Satz-)Kalkül für L_1:

K ist *semantisch widerspruchsfrei* bzgl. der Logik von L_1 gdw jeder in K beweisbare Satz von L_1 L_1-logisch wahr ist.

K ist *semantisch vollständig* bzgl. der Logik von L_1 gdw jeder L_1-logisch wahre Satz von L_1 in K beweisbar ist.

Wie können wir nun ohne modelltheoretische Mittel Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit eines Kalküls beweisen?

Zur Widerspruchsfreiheit: Sei x ein Satz von L_1, der in beweisbar ist; also gibt es einen Beweis in K für x; wir zeigen, daß sich jeder Beweis in K für x "übersetzen" läßt in eine logische Herleitung von *W[x]* aus den Wahrheitsgesetzen für die logischen Konstanten von L_1 relativ zu L_1; folglich ist x L_1-logisch wahr.

Zur Vollständigkeit: Sei x ein Satz von L_1, der L_1-logisch wahr

ist; also gibt es eine logische Herleitung von *W[x]* aus den Wahrheitsgesetzen für die logischen Konstanten von L_1 relativ zu L_1; wir zeigen, daß sich jede solche Herleitung "übersetzen" läßt in einen Beweis in K für x; folglich ist x in K beweisbar.

Entscheiden wir uns für die klassische Deutung des Alloperators, so läßt sich in der Wahrheitsgesetzsemantik zeigen, daß jeder *geeignete* Kalkül für L_3 semantisch vollständig ist bzgl. der Logik von L_3 (der klassischen elementaren Prädikatenlogik):

Angenommen *W[x]* kann aus $W(L_3,\neg,\supset,())$ logisch hergeleitet werden; dann gibt es eine Standard-Herleitung[2] von *W[x]* aus $W(L_3,\neg,\supset,())$: beginne mit *nicht W[x]* und konstruiere unter Verwendung von $W(L_3,\neg,\supset,())$ (wobei die objektsprachliche Komplexität Schritt für Schritt vermindert wird) einen Herleitungsbaum, der in jedem Ast einen Widerspruch enthält. Was eine Standard-Herleitung aus $W(L_3,\neg,\supset,())$ ist, läßt sich durch ein Beispiel besser ersehen als durch eine exakte Definition (die natürlich angegeben werden kann): $W[(o)(F(o)\supset F''(o))\supset(\neg(o)\neg F(o)\supset\neg(o)\neg F''(o))]$ soll standardgemäß aus $W(L_3,\neg,\supset,())$ hergeleitet werden. Eine seiner Standard-Herleitung aus $W(L_4,\neg,\supset,())$ ist:

nicht $W[(o)(F(o)\supset F''(o))\supset(\neg(o)\neg F(o)\supset\neg(o)\neg F''(o))]$ 1

$W[(o)(F(o)\supset F''(o))]$ 2(1,$L_3\supset$)

nicht $W[\neg(o)\neg F(o)\supset\neg(o)\neg F''(o)]$ 3(1,$L_3\supset$)

$W[\neg(o)\neg F(o)]$ 4(3,$L_3\supset$)

nicht $W[\neg(o)\neg F''(o)]$ 5(3,$L_3\supset$)

$W[(o)\neg F''(o)]$ 6(5,$L_3\neg$)

nicht $W[(o)\neg F(o)]$ 7(4,$L_3\neg$)

nicht $W[\neg F(\beta)]$ 8(7,L_3 (),β eine neue Variable)

$W[\neg F''(\beta)]$ 9(6,L_3 (),Instanziierung durch β)

$W[F(\beta)]$ 10(8,$L_3\neg$)

nicht $W[F''(\beta)]$ 11(9,$L_3\neg$)

$W[F(\beta)\supset F''(\beta)]$ 12(2,L_3 (),Instanziierung durch β)

13a1(12,$L_3\supset$) nicht $W[F(\beta)]$ $W[F''(\beta)]$ 13b1(12,$L_3\supset$)

Wenn *W[x]* aus $W(L_3,\neg,\supset,())$ logisch herleitbar ist, so ist es auch standardgemäß aus ihm herleitbar. Auf dieser Voraussetzung ruht der Beweis der semantischen Vollständigkeit jedes geeigneten Kalküls für L_3 hinsichtlich der Logik von L_3 in der Wahrheitsge-

setzsemantik. Sollte diese Voraussetzung ungerechtfertigt erscheinen (mir ist sie evident), so vergleiche man sie zunächst mit den eher problematischeren Voraussetzungen, auf denen ein Henkin-Beweis basiert, und dann urteile man abermals.

Sei K ein geeigneter Kalkül für L_3. Für einen *geeigneten* Kalkül für L_3 sind die Regelschemata und Meta-Theoreme beweisbar, die unten genannt sind. Ein bekannter geeigneter Kalkül für L_3 ist beispielsweise:

A1 $A \supset (B \supset A)$

A2 $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

A3 $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

A4 $(\nu)A[\nu] \supset A[\delta]$

R1 $A, A \supset B \vdash B$

R2 $A \supset B[\delta] \vdash A \supset (\nu)B[\nu]$ (δ nicht in $A \supset (\nu)B[\nu]$)

Jeder Ast einer Standard-Herleitung von *W[x]* aus $W(L_3, \neg, \supset, ())$ (im Beispiel sind es zwei) kann mechanisch übersetzt werden in eine (redundante Schritte enthaltende) Ableitung in K von $\neg((o)F(o) \supset (o)F(o))$ (oder einer anderen Kontradiktion der Gestalt $\neg(B \supset B)$, die keine Objekt-Konstanten enthält):

W[y] wird y, und *nicht W[y]* wird $\neg$y. Die Ableitungsschritte die nicht Annahmen sind, werden gerechtfertigt durch die in K (als geeigneten Kalkül) beweisbaren Regelschemata $\neg(A \supset B) \vdash A$, $\neg(A \supset B) \vdash \neg B$, $\neg\neg A \vdash A$, $A \vdash A$, $(\nu)A[\nu] \vdash A[\delta]$; $A, \neg A \vdash B$ wird verwendet, um den letzten Schritt zu rechtfertigen. $\neg(A \supset B) \vdash A$ entspricht der Anwendung von $L_3 \supset$ auf *nicht W[x⊃y]* mit dem Resultat *W[x]*; $\neg(A \supset B) \vdash \neg B$ entspricht der Anwendung von $L_3 \supset$ auf *nicht W[x⊃y]* mit dem Resultat *nicht W[y]*; $\neg\neg A \vdash A$ entspricht der Anwendung von $L_3 \neg$ auf *nicht W[¬x]* mit dem Resultat *W[x]*; $A \vdash A$ entspricht der Anwendung von $L_3 \neg$ auf *W[¬x]* mit dem Resultat *nicht W[x]*; $(\nu)A[\nu] \vdash A[\delta]$ entspricht der Anwendung von $L_3()$ auf *W[(ν)x[ν]]* mit dem Resultat *W[x[β]]* ("β" steht hier repräsentativ für die jeweils verwendete Variable). Der erste Schritt ist eine Annahme; "Annahme" mit Einführung einer *neuen* Objekt-Konstanten entspricht der Anwendung von $L_3()$ auf *nicht W[(ν)x[ν]]* mit dem Resultat *nicht W[x[β]]* ("β" steht hier repräsentativ für die jeweils verwendete *neue* Variable); "Annahme" entspricht der Anwendung von $L_3 \supset$ auf *W[x⊃y]*, sei das Resultat im betrachteten Ast *nicht W[x]* oder *W[y]*.

Somit läßt sich der linke Ast der obigen Standard-Herleitung übersetzen in:

Uwe Meixner, Regensburg

1	$\neg((o)(F(o)\supset F''(o))\supset(\neg(o)\neg F(o)\supset\neg(o)\neg F''(o)))$	Annahme
2	$(o)(F(o)\supset F''(o))$	$1;\neg(A\supset B) \vdash A$
3	$\neg(\neg(o)\neg F(o)\supset\neg(o)\neg F''(o))$	$1;\neg(A\supset B) \vdash \neg B$
4	$\neg(o)\neg F(o)$	$3;\neg(A\supset B) \vdash A$
5	$\neg\neg(o)\neg F''(o)$	$3;\neg(A\supset B) \vdash \neg B$
6	$(o)\neg F''(o)$	$5;\neg\neg A \vdash A$
7	$\neg(o)\neg F(o)$	$4;A \vdash A$
8	$\neg\neg F(a)$	Annahme mit neuer Objekt-Konstante a
9	$\neg F''(a)$	$6;(\nu)A[\nu] \vdash A[\delta]$; Instanziierung von a
10	$F(a)$	$8;\neg\neg A \vdash A$
11	$\neg F''(a)$	$9;A \vdash A$
12	$F(a)\supset F''(a)$	$2;(\nu)A[\nu] \vdash A[\delta]$; Instanziierung von a
13	$\neg F(a)$	Annahme
14	$\neg((o)F(o)\supset(o)F(o))$	$10,13;A,\neg A \vdash B$

Die zweite Ableitung, in die der rechte Ast der betrachteten Standard-Herleitung übersetzt werden kann, sieht wie die erste aus, außer daß wir am Ende haben:

13	$F''(a)$	Annahme
14	$\neg((o)F(o)\supset(o)F(o))$	$13,11;A,\neg A \vdash B$

Demnach:

(a) $\neg((o)(F(o)\supset F''(o))\supset(\neg(o)\neg F(o)\supset\neg(o)\neg F''(o))),\neg\neg F(a),\neg F(a) \vdash \neg((o)F(o)\supset(o)F(o))$;

(b) $\neg((o)(F(o)\supset F''(o))\supset(\neg(o)\neg F(o)\supset\neg(o)\neg F''(o))),\neg\neg F(a),F''(a) \vdash \neg((o)F(o)\supset(o)F(o))$;

Für den Kalkül K (als geeigneten Kalkül) können nun die folgenden Meta-Theoreme bewiesen werden, die dazu hinreichen, sich von jeder Annahme außer der ersten in jeder K-Regel zu befreien, die einer K-Ableitung entspricht, die die Übersetzung eines Astes einer Standard-Herleitung von *W[x]* aus $W(L_3,\neg,\supset,())$ ist.

(1) $\Gamma,\neg A \vdash C;\ \Gamma,B \vdash C \ \vdash\!\!\vdash\ \Gamma,A\supset B \vdash C$;

(2) $\Gamma,A \vdash B;\ \Gamma \vdash A \ \vdash\!\!\vdash\ \Gamma \vdash B$;

(3) $\Gamma,\neg A[\delta] \vdash B$; δ nicht in $\Gamma,\neg(\nu)A[\nu],B \ \vdash\!\!\vdash\ \Gamma,\neg(\nu)A[\nu] \vdash B$.

Schließlich wende man an:

(4) $\Gamma,\neg A \vdash \neg(B\supset B) \ \vdash\!\!\vdash\ \Gamma \vdash A$ (was für K ebenfalls beweisbar ist).

Für unser Beispiel haben wir also:

"*zuerst*" sei die Abkürzung für $(o)(F(o)\supset F''(o))\supset(\neg(o)\neg F(o)\supset \neg(o)\neg F''(o))$; "*zuletzt*" sei die Abkürzung für $\neg((o)F(o)\supset(o)F(o))$. Aufgrund von (1) aus (a) und (b): $\neg$*zuerst*, $\neg\neg F(a), F(a)\supset F''(a) \vdash$ *zuletzt*; also aufgrund von (2), da $\neg$*zuerst*, $\neg\neg F(a) \vdash F(a)\supset F''(a)$ (siehe die obige Ableitung), $\neg$*zuerst*, $\neg\neg F(a) \vdash$ *zuletzt*; also aufgrund von (3) $\neg$*zuerst*, $\neg(o)\neg F(o) \vdash$ *zuletzt*; also aufgrund von (2), da $\neg$*zuerst* $\vdash \neg(o)\neg F(o)$ (siehe die obige Ableitung), $\neg$*zuerst* $\vdash$ *zuletzt*; also schließlich aufgrund von (4) $\vdash$ *zuerst*, was zu beweisen war.

Fußnoten:

[1]Hugues Leblanc zeigt in "On Dispensing with Things and Worlds", daß die Wahrheitswertsemantik, die die Quantifikation prinzipiell substitutionell behandelt und Mengen möglicher Welten durch Bewertungsmengen repräsentiert, hinsichtlich dessen, was man von einer logischen Semantik üblicherweise erwartet, dasselbe zu leisten vermag wie die orthodoxe modelltheoretische Vorgehensweise; er hält dann dafür, daß sie aufgrund ihrer größeren ontologischen Sparsamkeit der letzteren vorzuziehen sei. Die Wahrheitsgesetzsemantik ist ontologisch noch sparsamer als die Wahrheitswertsemantik. Ob sie dasselbe zu leisten vermag, bleibt zu untersuchen. Ich zeige hier jedenfalls wie Vollständigkeitsbeweise in der Wahrheitsgesetzsemantik für Kalküle der elementaren Prädikatenlogik aussehen.

[2]Die besonders durchsichtige und elegante Standardform, die ich hier betrachte, beruht auf Raymond Smullyan, *First-order Logic*.

Literatur:

Leblanc, H.: "On Dispensing with Things and Worlds", in M. K. Munitz (Hrsg.), *Logic and Ontology*, New York University Press: New York 1973, 241-259.

Smullyan, R.: *First-order Logic*, Springer: Berlin 1968.