Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik

Mathe macht Musik!

Fächerverbindender Unterricht in Mathematik und Musik in der Grundschule

Zulassungsarbeit

gem. § 30 LPO I für das Lehramt an Grundschulen

von

Maria Reichle

vorgelegt bei Dr. Renate Motzer
vorgelegt am 9. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 1

1. Einleitung 3

2. Mathematik und Musik – interdisziplinäre Aspekte..6

2.1 Das Tonsystem der alten Chinesen..8

2.2 Harmonielehre nach Pythagoras: Alles ist Zahl 11

2.2.1 Experimente mit dem Monochord 11

2.2.2 Das pythagoreische Tonsystem...13

2.2.3 Das pythagoreische Komma..15

2.3 Die reine Stimmung 18

2.4 Eulers Zahlen zu Stimmung und Konsonanz...21

2.5 Die mitteltönige Stimmung..24

2.6 Die gleichstufig temperierte Stimmung 26

2.7 Die Obertonreihe 29

2.8 Stochastische Komposition...32

2.9 Symmetrie in der Musik 35

3. Pädagogische und psychologische Grundlagen 37

3.1 Fächerverbindender Unterricht in der Grundschule....................................37

3.1.1 Begriffsklärung...37

3.1.2 Ziele des fächerverbindenden Unterrichts 38

3.1.3 Das Prinzip der Ganzheitlichkeit 39

3.1.3.1 Begriffsklärung...39

3.1.3.2 Begründungen des Prinzips..40

3.2 Positive Auswirkung von Musik auf verschiedene, für den Mathematikunterricht relevante Bereiche 43

3.2.1 Affektiv-motivationale Disposition 46

3.2.2 Lerneffizienz...49

3.2.3 Intelligenz...54

3.2.4 Wahrnehmung, Aufmerksamkeit und Konzentration 58
3.2.5 Kreativität 63
3.2.6 Lernklima und soziale Kompetenz 64

4. Praktische Umsetzung in der ersten Jahrgangsstufe 67

4.1 Allgemeines zu Musik im mathematischen Anfangsunterricht 67

4.2 Die Klasse 1a der VS Fischach 72

4.3 Unterrichtseinheit „Lagebeziehungen“ 73
4.3.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards 73
4.3.2 Ziele, Planung und Analyse 74
4.3.3 Reflexion 77

4.4 Unterrichtseinheit „Zahlen gibt es überall“ 79
4.4.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards 79
4.4.2 Ziele, Planung und Analyse 79
4.4.3 Reflexion 82

4.5 Unterrichtseinheit zur Zahl 2 84
4.5.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards 84
4.5.2 Ziele, Planung und Analyse 85
4.5.3 Reflexion 87

4.6 Unterrichtseinheit zur Zahl 3 89
4.6.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards 89
4.6.2 Ziele, Planung und Analyse 89
4.6.3 Reflexion 91

4.7 Unterrichtseinheit zur Rhythmik 93
4.7.1 Bezug zu Lehrplan und zu Bildungsstandards 93
4.7.2 Ziele, Planung und Analyse 93
4.7.3 Reflexion 96

4.8 Unterrichtseinheit „Zahlen erleben“ 97
4.8.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards 97
4.8.2 Ziele, Planung und Analyse 97
4.8.3 Reflexion 101

4.9 Unterrichtseinheit „Muster“ 103
4.9.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards 103
4.9.2 Ziele, Planung und Analyse 103
4.9.3 Reflexion 106

5. Resümee und Ausblick 107

Abbildungsverzeichnis 109

Tabellenverzeichnis 110

Abkürzungsverzeichnis 111

Literaturverzeichnis 112

Anhang 121

a) Materialien zur Unterrichtseinheit „Lagebeziehungen“ 121

b) Materialien zur Unterrichtseinheit „Zahlen gibt es überall“ 122

c) Materialien zur Unterrichtseinheit zur Zahl 2 125

d) Materialien zur Unterrichtseinheit zur Zahl 3 128

e) Materialien zur Unterrichtseinheit „Muster“ 131

Eidesstattliche Versicherung 134

Vorwort

„Musica est exercitium arithmeticae
occultum nescientis se numerare animi.“[1]
Gottfried Wilhelm Leibniz

Nach diesem Satz aus einem Brief von Leibniz 1712 an Christian Goldbach ist Musik eine unbewusste arithmetische Tätigkeit der Seele, die sich nicht dessen bewusst ist, dass sie rechnet. In der Musik steckt Mathematik. Das Verständnis für die Verwandtschaft zwischen Musik und Mathematik hat eine lange Geschichte. Von den Zahlenverhältnissen der Tonhöhen nach Pythagoras über Eulers mathematische Gesetze der Konsonanz und Arnold Schönbergs Zwölftontheorie bis hin zur stochastischen Kompositionstechnik von Iannis Xenakis: Überall lässt sich eine Verbindung von Musik und Mathematik erkennen. Musik ist als physikalischer Vorgang mathematisch beschreibbar, Musizieren als mathematisches Tun.[2] Musik lässt sich unter anderem als Zeit-Kunst betrachten, denn alle musikalischen Phänomene entfalten sich in verschiedenen Zeit-Dimensionen, die sich mathematisch beschreiben lassen. So dauern einzelne Töne bestimmte Minutenbruchteile, die Schwingungszahlen der Töne sind in der Dimension von Sekundenbruchteilen als Tonhöhen wahrnehmbar. Mathematik wird wiederum allzu häufig als bloße Rechenfertigkeit verstanden, der künstlerisch-kreative Aspekt dagegen wird oftmals nicht wahrgenommen.[3] Bastian bekräftigt die Gemeinsamkeiten von Mathematik und Musik: „Freilich sind Mathematik und Musik unterschiedliche Gebiete. Anders als manches (jeweilige) Laienurteil vermuten läßt, bestehen jedoch keine wesentlichen Unterschiede im Hinblick auf die Anteile rationaler und intuitiver Kräfte bei schöpferischer Tätigkeit in ihnen.“[4] Einige Facetten dieser vielfältigen Gemeinsamkeiten und Verbindungen sollen in vorliegender Arbeit beleuchtet werden.

Als Studentin des Lehramtes für Grundschulen mit Hauptfach Mathematik und Drittelfach Musik sind für mich nicht nur interdisziplinäre Aspekte der beiden Fachwissenschaften interessant, sondern auch die Möglichkeiten einer Verbindung von Mathematik und Musik im Unterricht. Im Fachprofil Mathematik des

[1] Benary 2001 – Musik und Zahl, S. 117.
[2] Ullrich 2008 – Mathe klingt gut, S. 773f.
[3] Weiß 2003 – Klingende Zahlen, S. 2.
[4] Metzler 1985 – Schöpferische Tätigkeit in Mathematik, S. 57.

Lehrplans für die bayerische Grundschule wird betont, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen sollen, dass sich die Mathematik auf vielfältige Weise mit anderen Fächern und Lernbereichen verknüpfen lässt.[5] Ausgehend von einigen Studien der Psychologie, die Musik als wertvolles Element für den Unterricht und die Erziehung beurteilen, soll im Rahmen dieser Zulassungsarbeit die Verknüpfung von Mathematik und Musik in die Praxis umgesetzt werden. Insbesondere soll geklärt werden, ob sich die Fächerverbindung gerade auch für den Anfangsunterricht eignet und welche Möglichkeiten sich für eine sinnvolle Verbindung von Mathematik und Musik bieten.

Augsburg, Februar 2010 Maria Reichle

[5] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 35.

1. Einleitung

„Die Musik allein wirkt gleichzeitig
auf die Phantasie, auf das Gemüt,
auf das Herz und die Sinne.“[6]
Hector Berlioz

Mit großer Besorgnis stellen viele Eltern und Musiker fest, dass das Fach Musik in den allgemeinbildenden Schulen ins Abseits gerät. Diese Sorge ist nicht unbegründet. In den Grund- und Hauptschulen der Bundesrepublik Deutschland fallen bis zu 80% der Musikstunden aus oder sie werden fachfremd erteilt.[7] Dabei ist Musik in Erziehung und Unterricht äußerst kostbar – mit Sokrates vor mehr als 2000 Jahren gesprochen: „So ist also die Erziehung durch Musik darum die vorzüglichste, weil Rhythmus und Harmonie am tiefsten ins Innere der Seele eindringen und ihr Anstand und Anmut verleihen.“[8] Im Lehrplan der bayerischen Grundschule wird betont, dass Musik ein wichtiger Bestandteil der kindlichen Lebenswelt und der menschlichen Kultur ist und der musikalischen Förderung aller Kinder in der Grundschule deshalb eine bedeutende Aufgabe zukommt, weil sich die jedem Kind eigene Ansprechbarkeit und Begeisterung für Musik gerade im Kindesalter beim Singen, Musizieren und Musikhören weiterentwickeln kann.[9] Spitzer, deutscher Psychiater, Psychologe und Hochschullehrer, der sich selbst als musikbegeisterten Neurowissenschaftler bezeichnet, schreibt: „Dass solche *aktive* Beschäftigung mit Musik allen Kindern von der Geburt bis ins Greisenalter gut tut, wussten Platon und Friedrich Schiller, Pythagoras und Rudolf Steiner, Johann Heinrich Pestalozzi und Maria Montessori ebenso wie Sie und ich.“[10] Auch durch die „Medienüberfütterung“ sehnen sich die Kinder nach Erfahrungen aus erster Hand, die sie durch das eigene Tun, das Singen machen können.[11] Möckl und Haus haben dies wie folgt formuliert: „Das Singen und Hören, aber auch das ‚Machen’ von Liedern ist auch heute, trotz des Überangebots an technisch vermittelter Musik, für viele Menschen ein echtes Bedürfnis.“[12] In diesem Sinne sollte

[6] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 11.
[7] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 9.
[8] Ebd., S. 24.
[9] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 49.
[10] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 139.
[11] Schneider 1996 – Musisch orientierter Mathematikunterricht, S. 18.
[12] Möckl, Haus 1992 – Musikunterricht leichtgemacht, S. 24.

man dieses Bedürfnis nach Liedern auch in einem guten Mathematikunterricht stillen.

Faust-Siehl sieht ebenfalls die Notwendigkeit der musisch-ästhetischen Erziehung und speziell der Verbindung zum Mathematikunterricht. Sie kritisiert, dass die Bezüge des Mathematikunterrichts zur Musik oder zur Bewegungserziehung zu selten entfaltet werden.[13] Im Allgemeinen wird der Mathematikunterricht von vielen als eine „trockene“ und nüchterne Angelegenheit bewertet. Viele haben in ihrer Schulzeit keinen Zugang zur Mathematik gefunden, konnten nie dafür begeistert werden und zweifeln daher auch an ihrer eigenen mathematischen Kompetenz. Wichtig ist es, im Unterricht – speziell auch im Anfangsunterricht – jedes einzelne Kind anzusprechen, die verschiedenen Lerntypen zu berücksichtigen und Begeisterung und Freude an der Mathematik zu ermöglichen und zu fördern. Durch die Akzentuierung der mathematischen Ästhetik und der musikalischen Logik können Mädchen und Jungen neue Zugänge zu beiden Disziplinen eröffnet werden.

Blickt man auf die Entwicklungen in der Mathematikdidaktik der letzten Jahre, so scheint eine reflektierte Verbindung von Musik und Mathematik in breitem Maße möglich. Die Mathematikdidaktik hat sich seit Anfang der 90er Jahre zunehmend in Richtung John Deweys Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens entwickelt. Standorte und Denkwege der Kinder werden zunehmen ernst genommen und ganzheitliche, kontextgebundene Zugänge zu den Lerninhalten postuliert. Der Lernweg wird als Konstruktionsprozess gesehen, der bewusst individuelle Interpretationsweisen und differente Lösungswege in Kauf nimmt.[14] Anschauungsmittel sollen dabei einige Kriterien erfüllen, wie z. B. adäquate Repräsentanz der Struktur des mathematischen Sachverhalts, vielfältige Einsetzbarkeit, einfache Handhabbarkeit, Haltbarkeit, umweltverträgliches Material und leichte Praktikabilität beim Operieren im Kopf. Diese Kriterien lassen Klang und Bewegung als besonders geeignet erscheinen.[15] Folglich bieten sich hier zahlreiche Anknüpfungspunkte für die Musik. Verschiedene Forschungsprojekte haben positive Effekte von Musik auch auf das Mathematiklernen bestätigt. Neuerer Hirnforschung, psychologischer und musikpädagogischer Forschung gelang es übereinstimmend und eindrucksvoll nachzuweisen, „welch gigantische Sinfonie der Kräfte

[13] Faust-Siehl, Garlichs et al. 1996 – Die Zukunft beginnt, S. 89.
[14] Cslovjecsek 2004 – Mathe macht Musik, S. 5f.
[15] Krauthausen 2000 – Lernen, S. 42.

die Musik auszulösen vermag, welche tiefgehenden Spuren sie im Kopf hinterlässt".[16]

Ausgehend von einigen interdisziplinären Aspekten von Mathematik und Musik, die im folgenden Kapitel genauer betrachtet werden, soll in der vorliegenden Arbeit ebenfalls die didaktische Verknüpfung der beiden Bereiche begründet und praktisch umgesetzt werden. Der fächerverbindende Unterricht, der in einer ersten Klasse der Volksschule Fischach durchgeführt wurde, basiert auf pädagogischen und psychologischen Grundlagen, welche im dritten Kapitel näher beleuchtet werden. Dazu wird der Ansatz des fächerverbindenden Unterrichts thematisiert und zudem werden einige vorteilhafte Auswirkungen erläutert, die der Einsatz von Musik im Mathematikunterricht mit sich bringen kann.

Bei allen Fotografien, die die praktische Umsetzung der Fächerverbindung in der Klasse 1a der Volksschule Fischach-Langenneufnach dokumentieren, handelt es sich um privates Bildmaterial. Die Eltern der Kinder haben der Veröffentlichung der Aufnahmen im Rahmen dieser Arbeit zugestimmt.

Für die Publikation der vorliegenden Arbeit waren geringfügige Anpassungen der Originalfassung erforderlich. Daher weist sie im Vergleich zur Originalfassung formale Veränderungen auf. Inhaltlich wurden jedoch keine Veränderungen vorgenommen.

[16] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 9.

2. Mathematik und Musik – interdisziplinäre Aspekte

Um 1700 wurde die Musik als mathematische Wissenschaft bezeichnet, womit man sich auf eine jahrhundertealte Tradition stützte. War mit Mathematik zumeist Arithmetik gemeint, so stand bei Johannes Kepler, der die Musik zur Astronomie in Beziehung setzte, die Geometrie im Zentrum. Damit sind die vier Disziplinen des Quadriviums, der zahlgebundenen Wissensgebiete der Sieben freien Künste (siehe Abbildung 1), genannt: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik.[17] Diese „septem artes liberales" haben ihren Ursprung bei den griechischen Sophisten vor Plato, wurden in der spätgriechisch-römischen Epoche als Lehrkanon entfaltet und im Mittelalter ins Bildungssystem übernommen.[18] So liegen die Ursprünge der Verbindung von Mathematik und Musik weit vor unserer Zeit. Einige Berührungspunkte sollen in diesem Kapitel näher betrachtet werden.

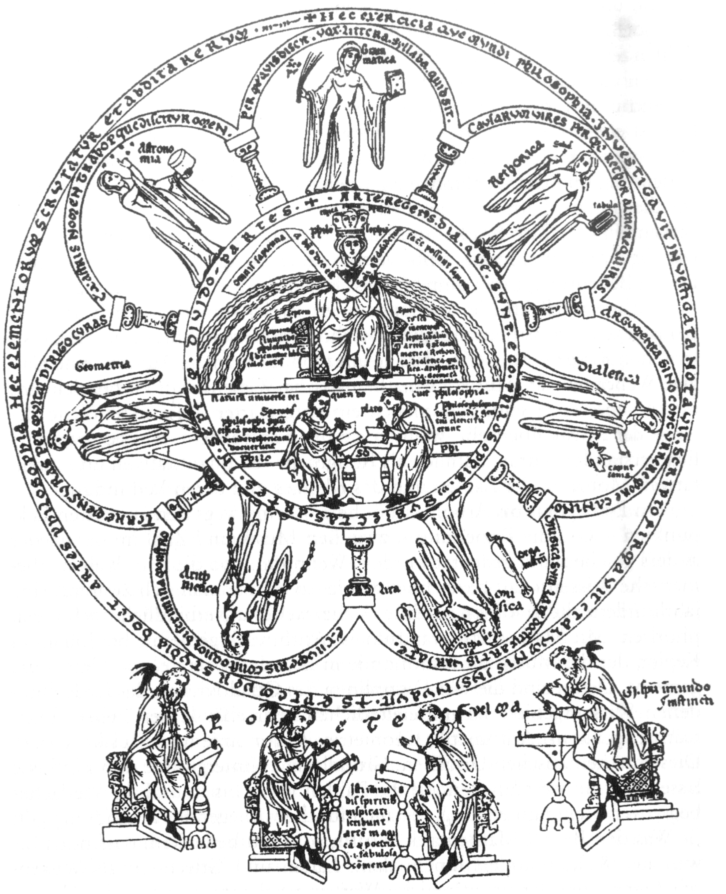


Abbildung 1: *Die Sieben freien Künste.*[19]

Miniatur aus dem Hortus delicarum der Ätissin Herrad von Landsberg, 2. Hälfte des 12. Jahrhunderts.

In der Mitte thront die Philosophie (über Sokrates und Plato); im Kreis darum die sieben artes liberales; die Musica rechts unten; ihr sind drei Saiteninstrumente beigegeben: die hier cithara genannte Harfe, eine lira und eine Drehleier (organistrum).

[17] Benary 2001 – Musik und Zahl, S. 10.
[18] Wille 1985 – Musiktheorie und Mathematik, S. 9.
[19] Benary 2001 – Musik und Zahl, S. 9.

Zum Verständnis einiger interdisziplinärer Aspekte werden vorweg grundlegende Gesetzmäßigkeiten eines Tones erklärt: Ein Ton wird durch regelmäßige Schwingungen eines Körpers, z. B. einer Saite erzeugt. Tonhöhe, Saitenlänge und Schwingungszahl sind drei Größen, die voneinander abhängen. Die Tonhöhe ist direkt proportional zur Schwingungszahl, d. h. sie steigt mit ihr an. Zur Saitenlänge ist sie dagegen umgekehrt proportional, denn die Tonhöhe sinkt mit zunehmender Saitenlänge bei gleichbleibender Spannung.[20]

[20] Kleinhammes 1949 – Die Quadratur des Kreises, S. 10.

2.1 Das Tonsystem der alten Chinesen

Der chinesische Schriftsteller Lü Pu-Wei erzählt im dritten Jahrtausend vor Christus vom mythischen Kaiser Huang-Ti und seinem ebenso sagenumwoben „Minister“ Ling-Lun. Die Legende berichtet, dass Ling-Lun vom Kaiser an die westliche Grenze des Reiches gesandt wurde, um die Musik zu erforschen und um eine Musiktheorie zu begründen. Nach der Rückkehr von seiner Studienreise habe er ein Bambusrohr von der Länge des kaiserlichen Fußes zurechtgeschnitten. Dieses Rohr erzeugte beim Anblasen einen Ton, welcher als Grundton des Systems festgelegt wurde. Von diesem Ausgangs-Bambusrohr leitete Ling-Lun weitere Töne ab, indem er zusätzliche Bambusrohre zurechtschnitt. Deren Länge erhielt er dadurch, dass er die Länge des zuvor angefertigten Rohres jeweils um ein Drittel kürzte oder verlängerte. So war das zweite Bambusrohr $\frac{2}{3}$ so lang wie das erste, das dritte Bambusrohr hatte die Länge $\frac{4}{3}$ des zweiten, das vierte $\frac{2}{3}$ des dritten usw. Dies ergab musikalisch gesehen eine Folge von aufsteigenden Quinten und fallenden Quarten und führte zum pentatonischen Tonsystem, wie es noch heute den alten asiatischen Musikkulturen zugrunde liegt.[21]

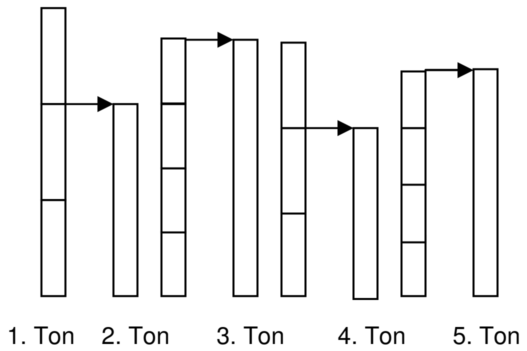


Abbildung 2: *Konstruktion des pentatonischen Tonsystems*

Wird die Länge des zum Grundton gehörenden Rohres zu 1 normiert, so besitzt das zweite Rohr die Länge $\frac{2}{3}$. Das dritte Bambusrohr erhält dann die Länge $\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$, das vierte die Länge $\frac{8}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$ und das fünfte die Länge $\frac{16}{27}\times\frac{4}{3}=\frac{64}{81}$. Zusammen mit der Oktave, die sich nach der Halbierung des Bambusrohres ergibt, kann die Skala der Chinesen notiert werden, wenn man die nach Vorschrift erhaltenen Rohrlängenverhältnisse der absteigenden Größe nach sortiert:

[21] Armbrust 1999b – Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife, S. 76.

1. Ton	2. Ton	3. Ton	4. Ton	5. Ton	Oktavton
$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 1: *Skala aus dem pentatonischen Tonsystem der alten Chinesen*[22]

Dieser Konstruktionsmechanismus beruht ausschließlich auf Zahlenverhältnissen und nicht auf absoluten Angaben von Größen. Er ist für die Beschreibung der Stimmung elementar. Folglich spielt die Mathematik durch die ordnungsstiftenden Zahlenproportionen in dieser musikalischen Stimmung eine entscheidende Rolle.

Betrachtet man die Brüche, die die relativen Rohrlängen repräsentieren, so erkennt man, dass die absteigenden Quarten nicht unbedingt gebraucht werden, da die Aneinanderreihung von Quintsprüngen ausreichend ist: Der erste Quintsprung führt zum vierten Ton der Proportion $\frac{2}{3}$. Der darauffolgende Ton wäre nach dem Verfahren „Quinte + Quinte" zu bilden.[23] Hier ist zu erkennen, dass der Addition der Intervalle, also dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte, das Multiplizieren der zugeordneten Verhältniszahlen entspricht. Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um einen Homomorphismus[24] der additiven Intervallstruktur in die multiplikative Proportionenstruktur.[25] Die Doppelquinte wäre demnach äquivalent zu $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Der dazugehörige Ton liegt außerhalb der Ausgangsoktave, weshalb eine Transposition um eine Oktave nach unten vorgenommen werden muss, um eine Tonleiter nach dem üblichen Muster zu erhalten. Dies entspricht der Multiplikation der Proportion mit 2. Damit ergibt sich ein neuer Ton mit der Verhältniszahl $\frac{8}{9}$. Der darauffolgende Quintschritt nach oben führt zu $\frac{16}{27}$; der zugehörige Ton liegt in der Ausgangslage. Der nächste Ton mit der Proportion $\frac{16}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$ liegt wieder außerhalb der Oktave, durch entsprechende Oktavierung erhält man $\frac{32}{81} \times \frac{2}{1} = \frac{64}{81}$.

---

[22] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 74.
[23] Ebd., S. 73f.
[24] „Ein Homomorphismus ist eine Abbildung f: G $\rightarrow$ H zweier Gruppen G und H mit der Verknüpfung *, wenn gilt: $f(a*b) = f(a) * f(b)$, $\forall\, a,b \in G$." Brüning 2003 – Musik verstehen durch Mathematik, S. 94.
[25] Krammer 1994 – Der Harmoniegedanke bei Pythagoras, S. 172.

Demzufolge lässt sich die chinesische „Tonleiter“ auch über Quintsprünge und entsprechende Oktavtransposition darstellen. Dieses musikalische und letztlich mathematische Ordnungs- und Konstruktionsprinzip wurde unter anderem von den Pythagoreern begeistert aufgenommen.[26]

[26] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 74.

2.2 Harmonielehre nach Pythagoras: Alles ist Zahl

Einleitend für das zweite Kapitel wurde erwähnt, dass man sich bereits in der Antike wissenschaftlich mit Musik beschäftigte. Pythagoras von Samos (um 570 – 480 v. Chr.)[27] untersuchte musikalische Phänomene als Ausdruck einer letztlich auf Proportionen (ganzer) Zahlen basierenden, alles umfassenden Kosmologie. Darin sind mathematische und musiktheoretische Gesetzmäßigkeiten zu entdecken, weshalb die Musikwissenschaft als scientia mathematica mit der Arithmetik, der Geometrie und der Astronomie zum Quadrivium der ersten Wissenschaften gehört. Die Pythagoreer, eine auf Pythagoras zurückgehende Gruppe von naturwissenschaftlich geprägten Denkern, gleichermaßen Philosophen, Mathematiker, Musikwissenschaftler und Politiker, schätzten die Musik als Teil einer Weltordnung, die auf allgemein gültigen Zahlengesetzlichkeiten beruht. Deren harmonikale Struktur lässt sich mithilfe eines einfachen Monochords, einer über einem Resonanzkasten aufgespannten, klingenden Saite, hörbar und damit unmittelbar erfahrbar machen.[28]

2.2.1 Experimente mit dem Monochord

Irdische Musik war für die Pythagoreer eine Nachbildung der himmlischen Musik, deren Harmonie auf Zahlen beruhte. So wird die erste Tetraktys – eine bedeutsame Vierergruppe von Zahlen, die den griechischen Tonsystemen zugrunde liegt und die als Quelle und Wurzel ewiger Natur angesehen wird – durch die Zahlen 6, 8, 9 und 12 gebildet. Am Monochord, einem Resonanzkörper mit nur einer Saite und einem verschiebbaren Steg, wurden diese Zahlen zum Erklingen gebracht.[29]

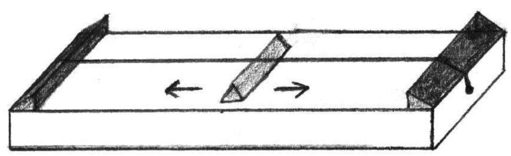


Abbildung 3: *Monochord*

Den Zusammenhang von Ton und Zahl, von musikalischer Wahrnehmung einerseits und Zahlenverhältnissen andererseits, erkannte Pythagoras bei seinen Experimenten. Seine Entdeckung bestand darin, dass den grundlegenden Intervallen der Musik (Oktave, Quinte und Quarte) einfache Zahlenverhältnisse der Längen einer schwingenden Saite entsprechen.[30] Eine gespannte Saite mit einer bestimmten Tonhöhe klingt nach ihrer Halbierung exakt

[27] Brüning 2003 – Musik verstehen durch Mathematik, S. 93.
[28] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 10.
[29] Wille 1985 – Musiktheorie und Mathematik, S. 7.
[30] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 6.

eine Oktave höher. Daraus ist das Zahlenverhältnis 1:2 (entspricht 6:12) abzuleiten. Entsprechend fanden sie für Quinte und Quarte die Längen- bzw. Zahlenproportionen 2:3 (entspricht 8:12) und 3:4 (entspricht 9:12).[31] Diese Intervalle lassen sich also nicht nur durch die Zahlen der ersten Tetraktys, sondern auch durch die Zahlenfolge 1, 2, 3, 4 darstellen, welche auch als die zweite Tetraktys bezeichnet wurde.[32]

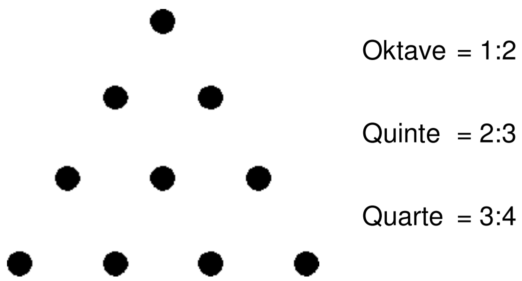


Abbildung 4: *Die zweite Tetraktys, dargestellt als gleichseitiges Dreieck*

Die Oktavaufteilung der ersten Tetraktys war auch Ausdruck der Lehre vom arithmetischen und harmonischen Mittel: Die Formel für das arithmetische Mittel zweier Größen a und b lautet: $m = \frac{(a+b)}{2}$.[33] Die Zahl 9 ist das "arithmetische Mittel" zwischen 12 und 6, d. h. die Differenzen 12 – 9 und 9 – 6 sind gleich. Die Quarte stellt also das arithmetische Mittel von Grund- und Oktavton dar.[34]

Das harmonische Mittel m zwischen zwei Gliedern a und b wird berechnet mit $m = \frac{2ab}{a+b}$.[35] Die Zahl 8 ist das "harmonische Mittel" zwischen 12 und 6, d. h. die Differenzen 12 – 8 und 8 – 6 verhalten sich wie 12 zu 6, da $m = \frac{2ab}{a+b} \quad \Leftrightarrow \quad am + bm - 2ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(m-b) - b(m-a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a-m}{m-b} = \frac{a}{b}$.

Wie mithilfe des arithmetischen Mittels kann die Oktave folglich auch durch Anwendung des harmonischen Mittels in Quinte und Quarte geteilt werden.

[31] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 10.
[32] Jacobsen 2001 – Das Pythagoreische Stimmungssystem und seine Anwendung, S. 533.
[33] Bindel 1985 – Die Zahlengrundlagen der Musik, S. 111.
[34] Wille 1985 – Musiktheorie und Mathematik, S. 7f.
[35] Bindel 1985 – Die Zahlengrundlagen der Musik, S. 111.

Alle vier Zahlen bilden die Proportion $\frac{12}{9} = \frac{8}{6}$, die in ihrer Verbindung von arithmetischem und harmonischem Mittel die "vollkommenste Proportion" genannt wurden.[36]

Für das pythagoreische Denken ist ein Zahlenverhältnis und das entsprechende Intervall ein und dasselbe. Es ist nur folgerichtig, wenn die Welt des Klangs genau nach den gleichen harmonischen Prinzipien aufgebaut ist wie die Gesetze der Physik, der Astronomie und der Mathematik – und umgekehrt. „Alles ist Zahl!", so lautet die Quintessenz.[37]

2.2.2 Das pythagoreische Tonsystem

Das bis heute gültige Muster der siebenstufigen Tonleiter gründet sich auf eine weitere Aufteilung der Tetraktysintervalle. Die Entdeckung, dass dem Zusammensetzen musikalischer Intervalle das Multiplizieren arithmetischer Brüche entspricht, war eine große Leistung früher exakter Wissenschaft. Sie hat die Wechselwirkung zwischen Musiktheorie und Mathematik entscheidend bestimmt.[38]

In der Schule der Pythagoreer wurden zum Aufbau der Tonleiter nur die Quinte und die Quarte als Grundbausteine verwendet. Die Quarte abwärts entspricht wiederum einer Quinte aufwärts und einer anschließenden Oktave abwärts. So wurde ausgehend vom Grundton allein durch das Aneinanderreihen von Quinten und nachfolgendem Transformieren in die betrachtete Oktave (Oktavieren) ein Tonsystem erzeugt. Gilt der Grundton c_n als vorgegeben, können die Töne zwischen dem Grundton und der zugehörigen Oktave c_{n+1} auf folgende Weise gebildet werden: Von c_n gelangt man durch einen Quintschritt bzw. mathematisch gesehen durch die Multiplikation mit $\frac{2}{3}$ zum Ton g_n. Erneute Multiplikation mit $\frac{2}{3}$ ergibt den Wert $\frac{4}{9}$, der kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Der Ton liegt also außerhalb der betrachteten Oktave und muss transformiert werden. Die Multiplikation mit 2 entspricht der Transformation in die nächsttiefere Oktave. Demzufolge ergibt sich ein Intervall zum Grundton mit dem Zahlenverhältnis $\frac{4}{9} \times 2 = \frac{8}{9}$. Addiert man sukzessive weitere Quinten und oktaviert die Töne entsprechend, so erhält man der Reihe nach

[36] Wille 1985 – Musiktheorie und Mathematik, S. 7f.
[37] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 11.
[38] Wille 1985 – Musiktheorie und Mathematik, S. 7f.

die Brüche $\frac{8}{9} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{16}{27}$, $\frac{16}{27} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{64}{81}$, $\frac{64}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{128}{243}$. Die Quarte zum Grundton c entspricht einer Quinte abwärts und einer Oktave aufwärts und wird folglich durch den Wert $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ausgedrückt. Nachfolgend sind die Verhältnisse der Größe nach geordnet und mit heute bekannten Namen versehen:

Ton	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	a_n	h_n	c_{n+1}
Teilungsverhältnis	$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Verhältnis zum vorausgehenden Ton		$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$

Tabelle 2: *Oktavausschnitt aus der pythagoreischen Stimmung*[39]

Die letzte Zeile obiger Tabelle zeigt, dass es zwei verschiedene Intervalllängen zwischen benachbarten Tönen gibt: Das große Intervall, das durch den Wert $\frac{8}{9}$ ausgedrückt wird, trägt auch den Namen pythagoreischer Ganztonschritt, das kleine Intervall mit dem Wert $\frac{243}{256}$ heißt pythagoreischer Halbtonschritt.[40]

Die pythagoreische Stimmung lässt sich aus mathematisch-geometrischer Sicht in einem Koordinatensystem darstellen, wie in Abbildung 5 zu sehen. Wie bereits erläutert, benötigt man zur Darstellung der Töne nur zwei „Koordinaten“, nämlich die Quint- und die Oktavkoordinate. Identifiziert man jeweils eine Koordinatenrichtung mit einer Sorte Intervallschritte, kann man das pythagoreische Tonsystem in einem zweidimensionalen Koordinatensystem anordnen.

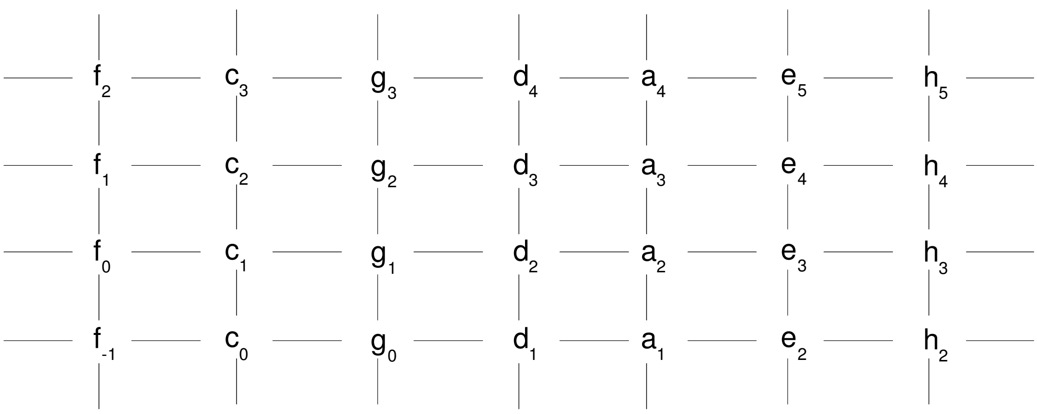


Abbildung 5: *Ausschnitt aus dem Tonraster des pythagoreischen Tonsystems*[41]

[39] Nestke 1995 – Zahlen und Figuren, S. 9.
[40] Ebd., S. 8f.
[41] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 76.

Für die Töne des pythagoreischen Systems könnten also Koordinaten angegeben werden, indem man ein Paar (q,o) definiert, wobei q die Anzahl der zurückgelegten Quintschritte und o die Anzahl der Oktavschritte angibt. Als Ursprung wird ein Ton festgesetzt, der die Koordinaten (0,0) und als Zahlenverhältnis den Wert 1 zugeordnet bekommt. Die Verhältniszahl v_x eines Tons x lässt sich dann dementsprechend berechnen: $v_x = \left(\frac{2}{3}\right)^q \times \left(\frac{1}{2}\right)^o$

Beispielsweise hat a_1 bezüglich c_1 die Koordinaten (3,-1), woraus sich das bereits bekannte Zahlenverhältnis $v_{a_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{16}{27}$ ergibt.[42]

Es wird deutlich, dass man durch entsprechende Quintfortschreitungen nicht auf einen durch Oktavverwandtschaften konstruierten Ton kommen kann. Mathematisch begründet sich dies einfach: Es gibt kein Vielfaches von $\frac{1}{2}$, das zugleich Vielfaches von $\frac{2}{3}$ ist.[43] Diese Tatsache wird im folgenden Kapitel näher betrachtet.

2.2.3 Das pythagoreische Komma

Geht man, wie Pythagoras, von rein gestimmten Quinten aus, so erhält man durch Übereinanderschichten keinen Quintenzirkel, der sich nach endlich vielen Schritten wieder beim Ausgangston schließt, sondern eine endlose Quintenspirale, deren Töne sich mit exakt zu stimmenden Frequenzen in der Praxis auf einem Tasteninstrument nicht realisieren lassen (siehe Abbildung 6).

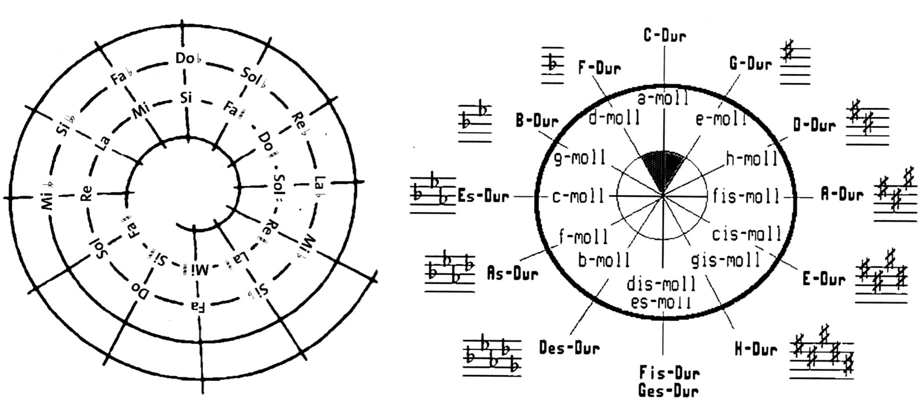


Abbildung 6: *Quintenspirale des Pythagoras (links) und Quintenzirkel (rechts)*[44]

[42] Ebd.
[43] Armbrust 1999b – Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife, S. 77.
[44] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 14.

„Vergleicht man die Frequenzen, die sich – z. B. ausgehend vom Ton C – nach zwölf Quinten für his (!) und sieben Oktaven für den Ton c errechnen lassen, dann ergibt sich eine deutlich hörbare Frequenzdifferenz von knapp einem Achtelton. Diese Differenz ist als Pythagoräisches Komma in die Geschichte der Musiktheorie eingegangen.“ [46]

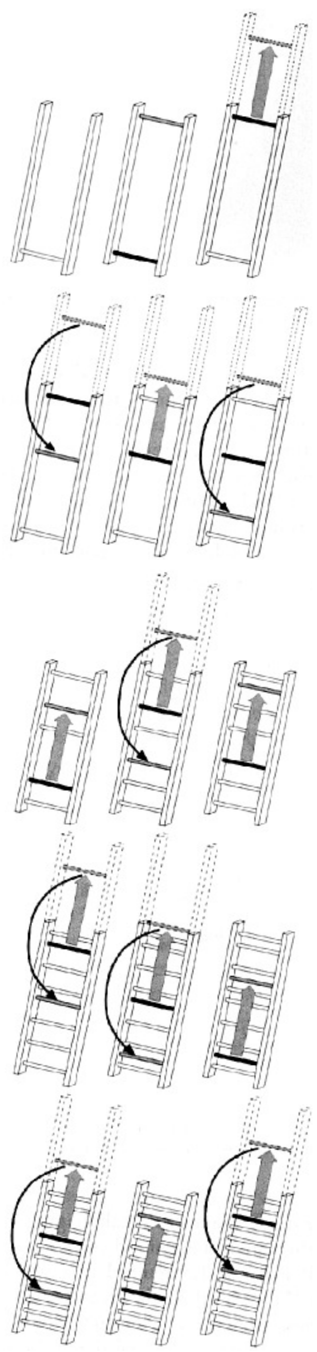


Abbildung 7: *Quinten-Oktaven-Algorithmus*[45]

Mit freundlicher Genehmigung von SCHATTAUER, Stuttgart

Eine alternative Vorgehensweise, diesen Fehler zu veranschaulichen, ist das Einfügen von Leitersprossen in eine Leiter. Die oberste und die unterste Sprosse der Leiter – im übertragenen Sinne der Grundton und die Oktave – genügen, um jede Sprosse bzw. jeden Ton festzulegen. Begonnen wird z. B. mit einem Ton c_n. Nun geht man eine Oktave nach oben und erhält den Ton c_{n+1}. Um weitere Sprossen bzw. Töne dazwischen festzulegen, ist nach in Kapitel 2.2.2 bereits beschriebenem Quinten-Oktaven-Algorithmus zu verfahren: Die neue Sprosse bzw. der neue Ton wird immer durch Quintabstand festgelegt und falls erforderlich anschließend um eine Oktave herabgesetzt, um zwischen der festgelegten obersten und untersten Sprosse zu bleiben (siehe Abbildung 7). Nach zwölf Schritten dieses Quinten-Oktaven-Algorithmus' ist man beinahe wieder bei der Ausgangssprosse angelangt. Anstatt jedoch wieder bei der obersten Sprosse anzugelangen, landet man ein Stück zu hoch (siehe Abbildung 8). Diese Höhendifferenz veranschaulicht das pythagoreische Komma.

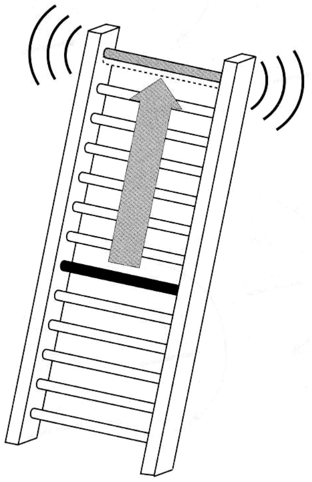


Abbildung 8: *Pythagoreisches Komma*[47]

Mit freundlicher Genehmigung von SCHATTAUER, Stuttgart

[45] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 86f.
[46] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 14.
[47] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 88.

Um den zwölften Ton zu erhalten, muss man vom untersten Ton insgesamt zwölf Quinten nach oben und sieben Oktaven nach unten gehen. Wird mit den Frequenzverhältnissen gerechnet, die umgekehrt proportional zu den Saitenlängen sind, entspricht dies in mathematischer Hinsicht dem Rechengang

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-7} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{1}\right)^{7}} = \frac{\frac{531441}{4096}}{\frac{128}{1}} \approx 1{,}01364 \, .$$

Der Unterschied zur Frequenz des Ausgangstons beträgt etwa 1,364% und wird als pythagoreisches Komma bezeichnet.[48]

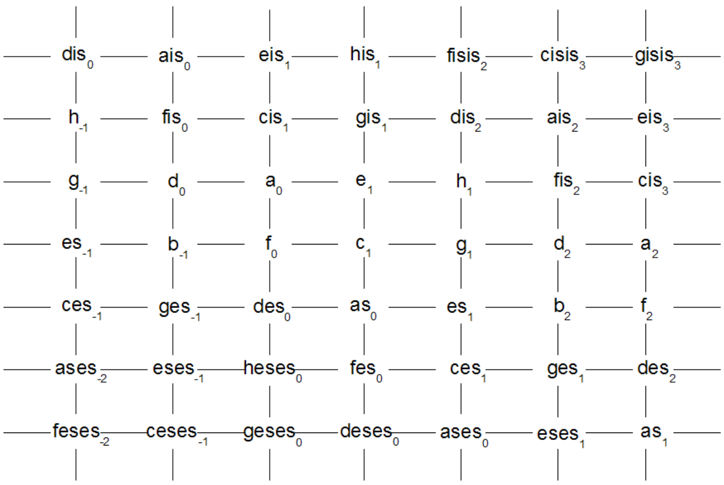
[48] Ebd., S. 86ff.

2.3 Die reine Stimmung

Da die Terz nur durch recht große Zahlenverhältnisse beschreibbar war, galt sie für die Pythagoreer nicht als konsonantes Intervall.[49] Deshalb kam sie auch nicht für den Aufbau einer möglichen Stimmung infrage. Zwar wurde im 12. Jahrhundert schon darauf hingewiesen, dass die pythagoreischen Terzwerte ($\frac{8}{9} \times \frac{243}{256} = \frac{27}{32}$ für die kleine, $\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{81}$ für die große Terz) den einfachen Proportionen $\frac{5}{6}$ und $\frac{4}{5}$ sehr nahe kämen, trotzdem wurden sie nicht als Konsonanzen in die Musiktheorie aufgenommen.

Der Humanismus und die Zeit der Aufklärung brachten jedoch einen Umschwung mit sich: Dem Ohr, das die Terz als konsonantes Intervall wahrnimmt, wurde Gehör geschenkt.[50] Dies mag auch am Auftreten der Terz in der Obertonreihe, die in Kapitel 2.7 thematisiert wird, liegen.[51] Zur Konstruktion der sogenannten reinen Stimmung wird daher neben den Intervallen aus der pythagoreischen Stimmung zusätzlich die reine Terz mit der Relation $\frac{4}{5}$ verwendet.

Da bei den Pythagoreern nur Schritte in Quint- und Oktavrichtung möglich waren, war ihr „Tonraster" zweidimensional. In der reinen Stimmung kommt die Richtung der großen Terz hinzu, wodurch ein dreidimensionales System entsteht.



Für die nebenstehende Abbildung wurde nur die Ebene der Quint-Terz-Richtung herausgegriffen. Die Oktavrichtung steht dabei aus der Ebene heraus.

Abbildung 9: *Eine Ebene aus dem Raster der reinen Stimmung*[52]

[49] „Konsonanz und Dissonanz sind gegensätzliche Begriffe. Die Konsonanz ist ein Ruheklang. […] Bei konsonanten Tönen oder Klängen hat der Hörer das Gefühl, daß sie zueinander passen und zusammengehören […]." Dachs, Söhner 1992 – Harmonielehre, S. 148.

[50] Armbrust 1999b – Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife, S. 78.

[51] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 20.

[52] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 79.

Die pythagoreische Stimmung ist in diesem dreidimensionalen Raster voll enthalten, sie bildet eine Ebene in der Quint-Oktav-Richtung.
Zu beachten ist, dass im dreidimensionalen System der reinen Stimmung zum Teil verschiedene Töne mit gleichem Namen belegt sind.[53] Geht man z. B. im dreidimensionalen System vom Ton f_0 vier Quintschritte aufwärts, kommt man zum Ton a_2. Zählt man von f_0 zwei Oktaven und eine Terz aufwärts, erhält man ebenfalls a_2. Der Name der Töne ist gleich, die Frequenzen jedoch unterschiedlich. Mit $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{\left(\frac{2}{1}\right)^2 \times \frac{5}{4}} = \frac{81}{80} = 1{,}0125$ beträgt dieser Unterschied 1,25% und wird syntonisches Komma genannt.[54] Korrekterweise müssten für die verschiedenen Frequenzen neue Tonnamen dazugenommen werden. Da die Proportionen der gleich benannten Töne aber sehr nahe beieinander liegen, ist dies aber nicht üblich.[55]
In der reinen Stimmung lässt sich ein Tripel (q,t,o) definieren, in dem q die Anzahl der Quintsprünge ab einem Ursprungston darstellt, t die Anzahl der Terzsprünge und o die Anzahl der Oktavsprünge. Damit ergibt sich für einen quint-terz-oktav-reinen Ton y zum Ursprungston das Zahlenverhältnis $v_y = \left(\frac{2}{3}\right)^q \times \left(\frac{4}{5}\right)^t \times \left(\frac{1}{2}\right)^o$.[56]

Daraus ergeben sich unter anderem folgende Verhältnisse der Saitenlängen:

Ton	c_n	cis_n	des_n	d_n	dis_n	es_n	e_n	f_n	fis_n	ges_n	g_n	gis_n	as_n	a_n	ais_n	b_n	h_n	c_{n+1}
Teilung-verhältnis	$\frac{1}{1}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{75}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{128}{225}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 3: *Oktavausschnitt aus der reinen Stimmung auf dem Grundton c_n*

Um die Intervalle zwischen den Tönen mit denen der pythagoreischen Stimmung zu vergleichen, werden nun dieselben acht Töne wie in Tabelle 2 herausgegriffen:

Ton	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	a_n	h_n	c_{n+1}
Teilungs-verhältnis	$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
Verhältnis zum vorausgehenden Ton		$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{15}{16}$

Tabelle 4: *Oktavausschnitt aus der reinen Stimmung auf dem Grundton c_n mit 8 Tönen*

[53] Ebd., S. 78f.
[54] Mazzola, Muzzulini 1990 – Geometrie der Töne, S. 70.
[55] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 78f.
[56] Ebd., S. 79.

Anzumerken ist, dass der Ton e hier etwas tiefer ist als der des pythagoreischen Systems, dem ein Teilverhältnis von $\frac{64}{81}$ entspricht. Das Intervall zwischen e und f entspricht dem Bruch $\frac{15}{16}$ und wird in diesem System Halbtonschritt genannt. Der pythagoreische Ganztonschritt $\frac{8}{9}$ von c nach d bleibt als sogenannter kleiner Ganztonschritt erhalten und von d nach e entsteht ein Intervall mit dem Wert $\frac{9}{10}$, der sogenannte große Ganztonschritt.[57]

Grundsätzlich wäre es möglich, ein n-dimensionales Gitter in reiner Stimmung zu konstruieren, indem n reine Intervalle als Stimmungsgrundlage herangezogen werden. Mit quint-terz-septim-oktav-reinen Stimmungen gelangt man schon in den Bereich der Vierteltöne, der eifrig diskutiert und in dem genauso beflissen musiziert und komponiert wird.[58]

[57] Nestke 1995 – Zahlen und Figuren, S. 9.
[58] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 80.

2.4 Eulers Zahlen zu Stimmung und Konsonanz

Für den Mathematiker Leonhard Euler (1707 – 1783) war die Musik ein Teil der Mathematik. Er versuchte, die Musik auf die sichersten Grundlagen der Harmonie aufzubauen und entwickelte die Arbeiten von Pythagoras weiter.[59]

Wie bereits beschrieben, können alle Töne aus der quint-terz-oktav-reinen Stimmung durch Proportionen aus Vielfachen der Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{1}{2}$ dargestellt werden. Euler erkannte, dass diese Proportionen aus Potenzen der Zahlen 2, 3 und 5 bestehen – ob diese im Zähler oder Nenner stehen, bleibt zunächst außen vor – und ordnete jedem Ton eine bestimmte Zahl zu, die er aus Potenzen der Zahlen 2, 3 und 5 zusammensetzt. Einem Quintsprung entspricht die Multiplikation mit 3, bei einem Sprung in die Terzrichtung multipliziert man mit 5, der Oktavierung entspricht die Multiplikation mit 2.

Mit diesen Zuordnungen erhält man nebenstehenden Ausschnitt aus einer Quint-Terz-Ebene.

$3^{-1}5^{2}$	$3^{0}5^{2}$ Cis	$3^{1}5^{2}$ Gis	$3^{2}5^{2}$ Dis	$3^{3}5^{2}$ B
$3^{-1}5^{1}$	$3^{0}5^{1}$ A	$3^{1}5^{1}$ E	$3^{2}5^{1}$ H	$3^{3}5^{1}$ Fis
$3^{-1}5^{0}$	$3^{0}5^{0}$ F	$3^{1}5^{0}$ C	$3^{2}5^{0}$ G	$3^{3}5^{0}$ D
$3^{-1}5^{-1}$	$3^{0}5^{-1}$	$3^{1}5^{-1}$	$3^{2}5^{-1}$	$3^{3}5^{-1}$

Abbildung 10: *Ausschnitt aus einer Quint-Terz-Ebene der reinen Stimmung mit den Eulerschen Zahlenzuordnungen*[60]

Euler stellte den Satz auf, dass die Anzahl der Teiler eines Primzahlproduktes $a^m b^n c^p$ genau (m+1)(n+1)(p+1) beträgt. Dabei stellt $3^3 5^2$, das „genus diatonico-chromaticum" dar. Die Zahlen, denen in Abbildung 12 Tonnamen zugeordnet sind, sind die (3+1)(2+1) = 12 Teiler von $3^3 5^2$. Diesen Ausschnitt der Stimmung kann man daher auch in Form eines Hasse-Diagrammes darstellen, in dem die Teiler durch entsprechende Kombination der Primzahlpotenzen aufgelistet werden (Abbildung 11).

[59] Beckmann 2003 – Fächerübergreifender Mathematikunterricht, S. 123.
[60] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 81.

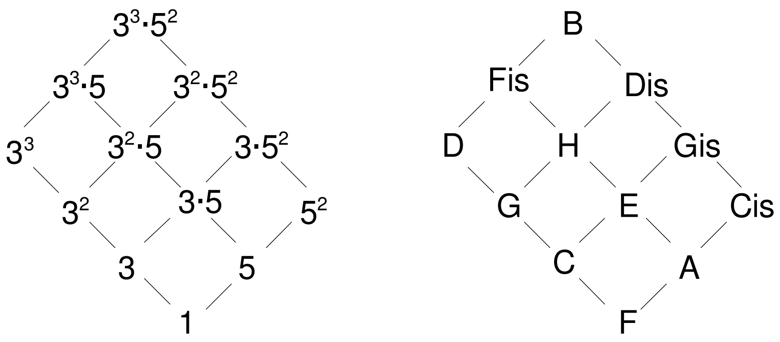


Abbildung 11: *Eulers genus diatonico-chromaticum als Hasse-Diagramm (links die Darstellung mit den Teilern, rechts mit den entsprechenden Tonnamen)*[61]

Euler versuchte außerdem, den Begriff „Konsonanz“ zu klären und einen rein mathematisch motivierten Ansatz zu präsentieren. Dazu verwendete er zunächst den Satz über die eindeutige Zerlegung einer Zahl in Primzahlen, der die Darstellung einer positiven ganzen Zahl a in der Form $a = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times ... \times p_n^{e_n}$ eindeutig sichert, wobei $p_1 < p_2 < ... < p_n$ eine wachsende Folge von Primzahlen und $e_1, e_2, ..., e_n$ positive ganze Zahlen sind.[62] Daraufhin definiert Euler den „gradus-suavitatis“, den Grad der Annehmlichkeit durch die Gradusfunktion Γ: $\Gamma(a) = 1 + \sum_{k=1}^{n} e_k p_k - \sum_{k=1}^{n} e_k$, wobei $\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) := \Gamma(x \times y)$ wenn $\frac{x}{y}$ ein gekürzter Bruch ist. In diese Γ-Funktion setzt Euler die Intervallverhältnisse der reinen Stimmung ein.[63] Mit $20 = 2^2 \times 5^1$ ist beispielsweise der Grad der Annehmlichkeit einer reinen Terz $\Gamma\left(\frac{4}{5}\right) := \Gamma(4 \times 5) = \Gamma(20) = 1 + (2 \times 2 + 1 \times 5) - (2 + 1) = 7$, der Konsonanzgrad eines pythagoreischen Ganztonschritts beträgt $\Gamma\left(\frac{8}{9}\right) := \Gamma(2^3 \times 3^2) = 1 + (3 \times 2 + 2 \times 3)$ $- (3 + 2) = 8$. Mittels dieser Berechnungen ergibt sich eine Zuordnung der einfachen Intervalle, wie in Tabelle 5 zu sehen.

[61] Ebd., S. 80ff.
[62] Ebd., S. 81.
[63] Wille 1985 – Musiktheorie und Mathematik, S. 10.

Γ	Proportionen der Intervalle
1	1:1
2	1:2
3	1:3, 1:4
4	2:3, 1:6, 1:8
5	3:4
6	2:5, 2:9
7	3:5, 4:5, 4:9, 3:16
8	5:6, 5:8, 8:9, 1:128

Tabelle 5: *Zuordnung von Intervallproportionen zu Konsonanzgraden nach der Gradusfunktion*[64]

Euler beschreibt diese Gradusfunktion nicht nur für Intervalle, also das Verhältnis von zwei Tönen zueinander, sondern dehnt die Theorie auch auf Mehrklänge aus. So wäre es schließlich nach der Idee von Euler prinzipiell möglich, sogar ein ganzes Werk entsprechend seiner Klangfolgen zu analysieren und ihm so einen gewissen Grad an „Annehmlichkeit“ zuzuordnen. Im Gegenzug könnte man gebräuchliche Kompositionsformen und -strukturen als Zahlenfolgen ausdrücken und dann umgekehrt einen Kompositionsmechanismus in Gang setzten. Diese Auffassung verbindet Komponieren und Kombinieren.[65]

[64] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 83.
[65] Busch 1970 – Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie, S. 71.

2.5 Die mitteltönige Stimmung

Ab 1500 setzte sich allmählich die Mehrstimmigkeit durch. Problematisch war dabei jedoch das syntonische Komma, das beim Zusammenspiel von Terzen und Quinten auftritt.[66] Um den Quintenzirkel zu schließen und so den Missstand zu beheben, wurden nach dem Grundprinzip der mitteltönigen Stimmung die Terzen (wenn hier von Terz die Rede ist, ist immer die große Terz mit dem Zahlenverhältnis $\frac{4}{5}$ gemeint), die damals gerade erst durchgesetzt worden waren[67], rein erhalten und elf Quinten verkleinert.[68] Dazu wurde das geometrische Mittel m eingesetzt, das sich durch die Formel $m = \sqrt{a \times b} \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{m}{b}$ definiert.[69] Man stimmte ein d_n ein, das in der geometrischen Mitte zwischen c_n und e_n lag. Die reine Terz mit der Proportion $\frac{4}{5}$ wurde damit in zwei gleich große Ganztöne geteilt. Im Quint-Terz-Raster müsste also in der Terzrichtung zwischen zwei terzverwandten Tönen noch einen „Zwischenton" eingefügt werden. Die Hinzunahme des geometrischen Mittels führt schnell auf irrationale Zahlen. Diese geometrische Erweiterung des Tonraumes ist nicht nur musikgeschichtlich, sondern auch mathematisch von Interesse.

Die Terz spielt die entscheidende Rolle. So geht man, um die Töne der mitteltönigen Stimmung zu konstruieren, vom Grundton eine Terz aufwärts zum Ton mit dem Saitenverhältnis $\frac{4}{5}$ und dann wiederum eine Terz weiter zum Ton mit der Proportion $\frac{16}{25}$. Vom Grundton c_n aus wären dies die Töne e_n und gis_n. Sodann wird das geometrische Mittel innerhalb der ersten Terz ($m = \sqrt{1 \times \frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$) und darauffolgend das zwischen dem neuen Ton und der Oktave des Grundtons ($m = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$) ermittelt, was von c_n aus zu d_n und g_n führt. Wurde von die-

[66] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 84.
[67] Vogel 1976 – Reine Stimmung und Temperierung, S. 274.
[68] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 15.
[69] Brüning 2003 – Musik verstehen durch Mathematik, S. 112.

sem Ton aus eine reine Terz nach oben abgetragen ($\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{\sqrt[4]{5^5}}$, was auf dem Grundton c_n dem Ton h_n entspricht), wird zwischen den beiden letzten Tönen wieder das geometrische Mittel $m = \sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \times \frac{4}{\sqrt[4]{5^5}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ bestimmt, das von c_n aus dem Ton a_n gleichkommt. Von diesem Ton aus geht es zum einen eine Terz abwärts ($\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \times \frac{5}{4} = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}$), im Beispiel also von a_n zu f_n, und zum anderen eine Terz aufwärts. Der daraus resultierende Ton wird nach unten oktaviert und hat das Zahlenverhältnis $\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \times \frac{4}{5} \times 2 = \frac{16}{\sqrt[4]{5^7}}$, das von c_n aus dem Ton cis_n entspricht. Durch weitere Terzsprünge werden die Töne dis_n, b_n und fis_n mit den Verhältnissen $\frac{\sqrt[4]{5^3}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ und $\frac{8}{\sqrt{5^3}}$ erreicht.[70]

Ton	c_n	cis_n	d_n	dis_n	e_n	f_n	fis_n	g_n	gis_n	a_n	b_n	h_n	c_{n+1}
Teilung-verhältnis	$\frac{1}{1}$	$\frac{16}{\sqrt[4]{5^7}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt[4]{5^3}}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt[4]{5}}{2}$	$\frac{8}{\sqrt{5^3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{4}{\sqrt[4]{5^5}}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 6: *Oktavausschnitt aus der mitteltönigen Stimmung*[71]

Jedoch tritt auch in der mitteltönigen Stimmung noch ein „Fehler“ auf: Die Frequenzen der zwölften Quinte und der siebten Oktave des Grundtons sind nicht identisch: $\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{1}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{1}\right)^{-7} = \frac{\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12}}{2^7} = \frac{125}{128} = 0{,}9765625 \neq 1$

Damit sich der Quintenzirkel schließt, wird die zwölfte Quinte nach elf Quinten mit der Proportion $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ übermäßig groß; sie ist unbrauchbar und wird wegen des heulenden Klangeindrucks Wolfsquinte genannt.[72]

[70] Armbrust 1999b – Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife, S. 80.
[71] Ebd.
[72] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 15f.

2.6 Die gleichstufig temperierte Stimmung

Nach dem Ende des Mittelalters entwickelte sich in der Musik der Renaissance und des Barock eine zunehmende kompositorische Vielfalt. Komponisten und Musiker versuchten, im Verlauf eines Stückes nicht in einer vorgegebenen Tonart zu bleiben, sondern zu modulieren, d. h. von einer Tonart in mehreren Schritten zu einer neuen überzugehen. In verschiedenen Tonarten unterscheiden sich jedoch die einander entsprechenden Töne voneinander, sodass sich bei mehreren nacheinandergeschalteten Grundtonwechseln beliebig nah beieinanderliegende Töne ergeben.[73] Auch der Instrumentenbau übte auf die Musiktradition Europas beträchtlichen Einfluss und so wurde nach einer theoretischen und praktisch realisierbaren Lösung gesucht, damit Instrumente mit festgelegter Temperierung (z. B. Klavier) mit Instrumenten mit variabler Stimmung (z. B. Geige) zusammenspielen können. Um das Problem des pythagoreischen Kommas zu lösen, suchte man ein gemeinsames Maß von Quint- und Oktavsprüngen, damit man nach m Quintensprüngen aufwärts und n Oktavsprüngen abwärts wieder die Grundfrequenz erreicht.[74] Mathematisch formuliert sind demnach $m, n \in N$ gesucht, sodass gilt:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^m \times 1^n}{2^m \times 2^n} = \frac{3^m}{2^{m+n}} = 1$$

Weil diese Bedingung nicht exakt erfüllt werden kann, da eine 3er-Potenz nie gerade ist, ist eine möglichst gute Näherung gesucht.

$$3^m = 2^{m+n} \quad \Rightarrow \quad m \times \log 3 = (m+n) \times \log 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m+n}{m} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0{,}4771}{0{,}3010} = \frac{4771}{3010}$$

Zur Näherungslösung erfolgt eine Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{4771}{3010} = 1 + \frac{1761}{3010} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3010}{1761}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1249}{1761}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{512}{1249}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{225}{512}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{62}{225}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{39}{62}}}}}} = \quad \ldots$$

[73] Nestke 1995 – Zahlen und Figuren, S. 10.
[74] Brüning 2003 – Musik verstehen durch Mathematik, S. 107.

Die verschiedenen Stufen der Kettenbruchentwicklung liefern folgende Näherungswerte:

① $1 = 1$

② $1+\frac{1}{1} = 2$

③ $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2}$

④ $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = \frac{8}{5}$

⑤ $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$

⑥ $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}} = \frac{65}{41}$

Die vierte Näherungsstufe liefert $\frac{m+n}{m} \approx \frac{8}{5}$ und würde mit nur fünf Tönen innerhalb einer Oktave zu wenig Auswahl bieten. Mit 41 Tönen hätte die sechste Näherungsstufe unhandlich viele Zwischenstufen.[75] Um eine adäquate Spielbarkeit gewährleisten zu können, wurde die Unterteilung der Oktave in zwölf Tonschritte, wie sie aus der fünften Näherungsstufe resultiert, beibehalten und weiter nach einer Lösung gesucht, den Tonschritten eine einheitliche Größe zu geben.[76] Mit der Forderung, dass genau zwölf gleichverteilte Tonschritte eine Oktave ergeben müssen, lässt sich der zugehörige Halbtonschritt H dieser sogenannten gleichstufig temperierten Stimmung folgendermaßen berechnen:

$$H^{12} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad H = 2^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

Damit ergibt sich ausgehend von einem Ton c_n die Skala der gleichstufig-temperierten Stimmung mit den zugehörigen relativen Saitenlängen, die auf den Grundton c_n bezogen sind.[77]

Ton	c_n	cis_n	d_n	dis_n	e_n	f_n	fis_n	g_n	gis_n	a_n	b_n	h_n	c_{n+1}
Teilung-verhältnis	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^2}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^3}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^4}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^5}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^6}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^7}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^8}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^9}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{10}}}$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{11}}}$	$\frac{1}{2}$

Tabelle 7: *Oktavausschnitt aus der gleichstufig temperierten Stimmung*[78]

[75] Freudenthal 1983 – Warum hat die Tonleiter zwölf, S. 48f.
[76] Brüning 2003 – Musik verstehen durch Mathematik, S. 108.
[77] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 85.
[78] Ebd.

Da alle zwölf Tonschritte gleich groß sind, erlaubt die gleichstufig temperierte Stimmung beliebige Modulationen und den Bau von Instrumenten mit fester Stimmung.[79]

Im Rahmen der gleichstufig temperierten Stimmung lässt sich auch erklären, warum die Abstände der Bünde einer Gitarre, mit denen eine gespannte Saite verkürzt werden kann, mit wachsender Tonhöhe abnehmen: Betrachtet man Tabelle 7, ist die abnehmende Saitenlänge zu erkennen, denn von einem Ton zum nächsten erfolgt eine Multiplikation mit dem Faktor $H = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} < 1$. Die Saitenlängen nehmen also um diesen Faktor ab. Die Längendifferenz zwischen dem ersten Ton (Länge 1) und dem zweiten Ton (Länge H) einer Saite ist also gerade $1-H$. Zwischen dem dritten Ton (Länge H^2) und dem ersten Ton beträgt die Differenz $1-H^2$. Zwischen dem dritten und zweiten Ton misst die Längendifferenz also $(1-H^2)-(1-H) = H\times(1-H)$. Analog beträgt der Abstand zwischen dem vierten und dem dritten Bund $(1-H^3)-(1-H^2) = H^2\times(1-H)$, der Abstand zwischen dem n-ten und dem (n+1)-ten Bund beläuft sich auf $H^{n-1}\times(1-H)$. Da $H<1$, wird der Faktor H^{n-1} mit wachsendem n kleiner, d. h. der Abstand wird mit wachsender Potenz von Bund zu Bund ebenfalls kleiner. Diese Bundstandsverkleinerung ist bei zahlreichen Saiteninstrumenten (z. B. Banjos, Mandolinen) deutlich sichtbar. Bei der Geigenfamilie dagegen, die keine Bünde besitzt, muss der Musizierende die Finger in den höheren Lagen geschickt enger zusammenrücken, um die richtigen Tonhöhen zu greifen. Bei anderen Instrumenten, beispielsweise bei Orgeln, Panflöten, Klangstäben von Xylofonen, Metallofonen etc., findet sich eine ähnliche Abhängigkeit.[80]

[79] Nestke 1995 – Zahlen und Figuren, S. 10.
[80] Armbrust 1999a – Tonsysteme und Stimmungen, S. 88.

2.7 Die Obertonreihe

Männer und Frauen singen aufgrund der unterschiedlichen Anatomie des Kehlkopfes im Abstand von einer Oktave, oft ohne überhaupt zu bemerken, dass ein anderer Ton gesungen wird. Dass wir eine Oktave entweder gar nicht hören oder sie zumindest nicht als unangenehm erleben, liegt daran, dass die Oktave ganz eindeutig in der Natur vorkommt. Wir sind an die Oktave gewöhnt, weil es sich dabei um den ersten Oberton in dem Schall handelt, der von jedem harmonisch schwingenden Körper produziert wird.[81]

Die Obertöne wurden 1636 von Marine Mersenne entdeckt und 1702 von Joseph Sauveur genau erforscht.[83] Er beschrieb erstmals die Obertonstruktur einer schwingenden Saite. Eine erklingende Saite schwingt nicht nur in ihrer gesamten Länge, sondern wird durch sogenannte Knoten, zwischen denen jeweils wieder ein Schwingungsbauch liegt, in verschiedene selbstständig schwingende Teile unterteilt. So ist es zu erklären, dass ein Körper neben dem Grundton mit seiner Grundschwingung gleichzeitig auch noch eine Reihe von anderen Tönen, die sogenannten Obertöne, aussendet.[84]

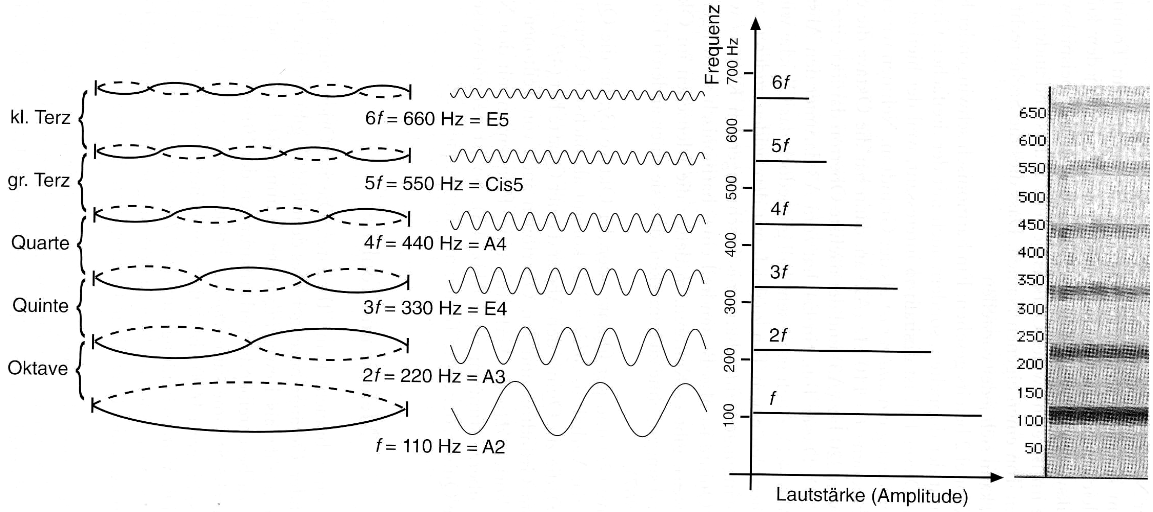


Abbildung 12: *Schwingung einer Saite*[82]

Mit freundlicher Genehmigung von SCHATTAUER, Stuttgart

In Abbildung 12 sind links die ersten sechs Möglichkeiten der Schwingung einer Saite dargestellt, die mit einer Grundschwingung von 110 Hz schwingt. Sie schwingt dann gleichzeitig mit 220 Hz, dem ersten Oberton, nur nicht so stark, ebenso mit 330 Hz usw. Rechts neben der schwingenden Saite sind diese

[81] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 82f.
[82] Ebd., S. 84.
[83] Taschner 2005 – Der Zahlen gigantische Schatten, S. 30.
[84] Kleinhammes 1949 – Die Quadratur des Kreises, S. 10.

Schwingungen gezeichnet. Im nebenstehenden Diagramm sind die Frequenz der Teiltöne und deren (nach oben kleiner werdende) Amplitude zu sehen. Ganz rechts ist eine zum Schema passende reale Messung dargestellt, sodass das Spektrogramm des Tons A2 mit seinen ersten 5 Obertönen ersichtlich wird. Die Amplitude ist hier als Grauwert dargestellt; je dunkler das Grau erscheint, desto lauter ist der Teilton.[85]

Die Grundtonschwingung ruft den Tonhöheneindruck hervor, die Obertöne sind bestimmend für die Klangfarbe. Jedes Musikinstrument weist eine charakteristische Obertonstruktur auf, die seine Klangfarbe unverwechselbar macht. „Pythagoras wäre nicht erstaunt gewesen, wenn er noch erfahren hätte, dass sich auch die auf die Klangfarbe eines Tons auswirkende Schwingungsform eines musikalisch verwendbaren Klangs durch einfache Proportionen ganzer Zahlen darstellen lässt."[86] Die Frequenzen der Obertöne sind ganze Vielfache der Frequenzen des Grundtons und stehen folglich im Verhältnis 1 : 2 : 3 : 4 usw.[87] Damit entsprechen die Obertöne exakt der Tonreihe, die man bei einer fortlaufenden Teilung der Monochordsaite durch die einfachen ganzen Zahlen erhält, also wenn $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, usw. der ganzen Saite erklänge. Dem entspricht zugleich eine fortlaufende Multiplikation der Schwingungszahlen eines Tones mit den Primzahlen. Der Grundton C zeigt folgende Obertonreihe:

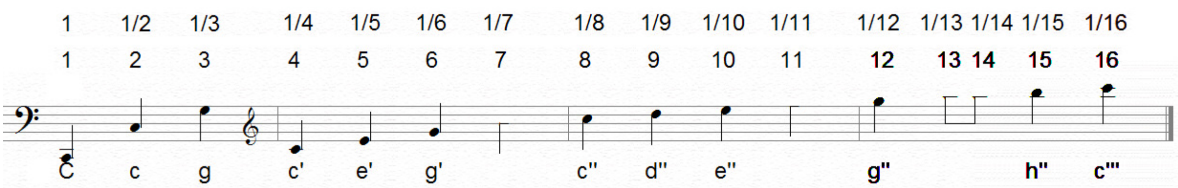


Abbildung 13: *Obertonreihe mit Grundton C*[88]

In Abbildung 13 sind über den Noten der Obertonreihe die Verhältniszahlen der diesen Tönen entsprechenden Saitenlängen und Schwingungen angegeben. Der erste Oberton c des Grundtones C ist also identisch mit dem Ton, der erklingt,

[85] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 84.
[86] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 19.
[87] Ebd., S. 19f.
[88] Kleinhammes 1949 – Die Quadratur des Kreises, S. 11.

wenn genau $\frac{1}{2}$ der Saitenlänge des Tones C schwingt. Der vierte Oberton e' ist wiederum identisch mit dem Ton, den exakt $\frac{1}{5}$ der ganzen Saitenlänge ergeben würde.

Die eingeklammerten Striche stehen für Töne, die in unserem Tonsystem keine Verwendung finden, da es sich nur auf die Teiltöne der Primzahlen 1, 2, 3, 5 und deren Vielfache beschränkt. Die eingeklammerten Töne hätten jedoch in Bezug auf die Schwingungszahl des Grundtons die Verhältniszahlen 7, 11, 13 und $14 = 2 \times 7$.[89]

Die reinen Frequenzverhältnisse der Obertonstruktur periodischer Klänge wurden auch zur Begründung von musikalischen Tonsystemen und Konsonanz- bzw. Dissonanzerklärungen herangezogen: Der Organist und Musiktheoretiker Jean Philippe Rameau (1683 – 1764) war der Hauptvertreter einer im 18. Jahrhundert entstehenden physikalistisch-naturalistischen Musiktheorie. Diese Theorie schließt von der Existenz der Obertonreihe auf die Naturgegebenheit von musikalischen Phänomenen. Musikalisches Hören sei immer Hören im Sinne der Obertöne. Diese Auffassung erlangte auch für die späteren Musiktheorien von Hugo Riemann, der vor allem auf den Durdreiklang in der Obertonreihe verwies, bis hin zu Paul Hindemith und vielen anderen eine substanzielle Bedeutung, obwohl auch hier die Einwände der Intonationsforschung gegen allzu starre mathematische Exaktheit beim Hören von Frequenzproportionen gültig bleiben.[90]

[89] Ebd., S. 10f.
[90] Enders 2005 – Mathematik ist Musik für den Verstand, S. 20.

2.8 Stochastische Komposition

In einer Einleitung zu einem der musikalischen Würfelspiele heißt es im Pariser Journal des Luxus und der Moden vom Februar 1787:

> „Einer der neusten modischen Zeitvertreibe in Gesellschaften ist jetzt in Frankreich das musikalische Würfel-Spiel; wo jedermann, […] ohne ein Wort von Composition zu verstehen, vermittelst zweyer Würfel und eines Notenblatts, Menuets ins Unendliche komponiren kann. Keiner unserer Leser wird hoffentlich diese Kunst für Hexerey, oder für mehr halten als was sie ist: nemlich einen glücklichen Einfall eines guten mathematischen Kopfs, die müßige frivole Pariser Welt mit einer musikalischen Posse auf etliche Tage zu amüsiren.“[91]

Ein solches musikalisches Würfelspiel bestand aus ein oder zwei (manchmal auch drei) Würfeln, einer Tabelle und einem dazugehörigen Notenblatt. Die Tabelle verwies auf einzelne Takte des Notenblatts und war so aufgebaut, dass ihre Zeilen der Augenzahl der Würfel entsprachen, ihre Spalten der Reihenfolge des Wurfs.[92] Von Wolfgang Amadeus Mozart (1756 – 1791) ist ein solches musikalisches Würfelspiel bekannt. Mozarts „Anleitung zum Componieren von Walzern vermittelst zweier Würfel“ erschien erstmals 1793, also nach dem Tod Mozarts, weswegen seine Autorenschaft umstritten ist. Unbestritten ist jedoch, dass er sich mit solchen Spielereien befasst hat. Zum Komponieren der Würfelwalzer sind zwei Tabellen gegeben, eine für den ersten und einen für den zweiten Walzerteil. Pro Spalte bzw. Taktzahl stehen jeweils elf Takte zur Auswahl.[93]

	1. Walzerteil								2. Walzerteil							
Takt → Augen-summe↓	A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	179
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Tabelle 8: *Zahlentafeln zu Mozarts Würfelwalzer*[94]

[91] Reuter 2001 – Musikalische Würfelspiele
[92] Reuter 2001 – Musikalische Würfelspiele
[93] Christmann 1999 – Unterrichtsprojekte zum Themenkreis Stochastik, S. 111ff.
[94] Ebd., S. 115.

Würfelt jemand mit zwei Würfeln im ersten Wurf z. B. eine 4, so wird der hierzu gehörenden Takt 69 aus dem Notenblatt als erster Takt der Komposition notiert. Ist der zweite Wurf eine 9, so wird als zweiter Takt der Takt 84 aus dem Notenblatt hinzugefügt usw. Wurde 16 mal gewürfelt, entsteht mit Hilfe der jeweils auf das Notenblatt verweisenden Tabelle ein komplettes Musikstück. Da es für jeden der 16 Takte elf Auswahlmöglichkeiten gibt, stehen 176 Takte zur Verfügung, die auf 11^{16} verschiedene Weisen kombiniert werden können. Einige sind dabei doppelt gezählt, denn Mozart hat manchmal den gleichen Baustein mehrfach verwendet. Dennoch bleibt die gigantische Zahl von 759.499.667.166.482 möglichen „Kompositionen“. Nach jedem Würfeln erklingt also höchstwahrscheinlich ein einmaliges Werk.[95] Obwohl alle diese Stücke verschieden sind, entsteht nach einigen Beispielen das Gefühl, alles irgendwo schon einmal gehört zu haben. Der Grund ist sicher darin zu suchen, dass das menschliche Ohr die Töne nicht einfach nur hört, sondern unbewusst Strukturen im Gehörten ermittelt.[96] Die harmonische Struktur haben alle Würfelkompositionen der gleichen Vorlage gemeinsam, denn bei der Komposition eines solchen Spiels wurde so vorgegangen, dass zunächst eine Vorlage komponiert wurde und von dieser dann fünf (bei einem Würfel) oder zehn (bei zwei Würfeln) Variationen über das gleiche harmonische Schema erstellt wurden. So wurden die Takte zwischen den Variationen austauschbar und es konnte nun mit Hilfe der Würfel ermittelt werden, welcher Takt von welcher Variation pro Takt gespielt wurde. Kurz gefasst: Es verändert sich im Grunde immer nur die rhythmische und melodische Linie über einem gleichbleibenden harmonischen Modell. Im Allgemeinen handelt es sich bei den musikalischen Würfelspielen in der Regel um periodische, gleichförmig aufgebaute Stücke wie Menuette, Polonaisen, Walzer und ähnliches.[97]

Größere Bedeutung hat der Zufall in der zeitgenössischen Musik. Beispielsweise trug beim Komponisten Iannis Xenakis (1922 – 2001) die Stochastik zur Entstehung seiner Werke grundlegend bei. Er bevorzugte den Einsatz elektronischer Geräte, da nach seiner Auffassung die rationale Kontrolle des Klangs durch das Wissen um dessen Berechenbarkeit zu einem verbesserten Einsatz des Klangs führe. So bereitete er mit neuartigen kompositorischen Ideen als einer der Ersten

[95] Behrends 2006 – Fünf Minuten Mathematik, S. 170.
[96] Behrends 2008 – Mathematik, S. 33.
[97] Reuter 2001 – Musikalische Würfelspiele

der Computermusik den Weg.[98] Durch den Gebrauch der Stochastik entscheidet dabei der Zufall nicht nur über die Noten und die Reihenfolge, in der sie gespielt werden, sondern auch darüber, mit welcher Wellenform sie zum Klingen gebracht werden.[99] Die stochastischen Methoden sind so in die Kompositionstechnik integriert, dass sie nicht zufällig etwas entscheiden, sondern nur dazu dienen, eine Menge akustischer Einzelereignisse so zu strukturieren, dass ihre Gesamtheit einer kompositorischen Idee gerecht wird. Der Zufall steuert die Parameter-Mittelwerte sowie die Verteilung der Elemente. Ziel des Kompositionsprozesses bleibt das einmal errechnete Werk.[100]

[98] Brüning 2003 – Musik verstehen durch Mathematik, S. 115ff.
[99] Behrends 2006 – Fünf Minuten Mathematik, S. 170.
[100] Baltensperger 1996 – Iannis Xenakis und die stochastische, S. 414.

2.9 Symmetrie in der Musik

Beim Komponieren werden musikalische Motive (kurze Tonfolgen) von den Komponisten häufig nach bestimmten Regeln abgewandelt. Werden diese Transformationen am Tonhöhen-Zeit-Diagramm betrachtet, können sie geometrisch gedeutet werden. Dem Transponieren entsprechen Verschiebungen in Richtung der Zeit-Achse, dem Krebs (Rückwärtslesen) Spiegelungen an einer senkrechten Achse, der Umkehrung Spiegelungen an einer waagrechten Achse und der Krebsumkehr Doppelspiegelungen, die auch als Punktspiegelung gedeutet werden können.
An einem Beispiel aus der Zwölftonmusik, in der aus den zwölf Tonhöhen zunächst eine Grundreihe zusammengestellt bzw. mathematisch ausgedrückt eine Permutation der Tonhöhen ausgewählt wird, soll dies veranschaulicht werden. Auf diese Grundreihe werden die soeben beschriebenen Techniken der Motivbearbeitung angewandt. Tabelle 9 enthält in der zweiten Zeile die Grundreihe aus einem Werk (Viertes Quartett) des Zwölfton-Komponisten Arnold Schöneberg. Diese wird in der dritten Zeile um drei Halbtöne nach oben transponiert. Dabei werden in der Tabelle Werte außerhalb der Standardwerte 0 bis 11 durch Addition oder Subtraktion der Zahl 12 auf diese umgerechnet. Musikalisch gesehen wird also mit Tonhöhenklassen gearbeitet, mathematisch betrachtet mit Restklassen modulo 12.

Standardreihe	(c) 0	(cis) 1	(d) 2	(dis) 3	(e) 4	(f) 5	(fis) 6	(g) 7	(gis) 8	(a) 9	(ais) 10	(h) 11
Grundreihe	0	11	7	8	3	1	2	10	6	5	4	9
Transposition (+3)	3	2	10	11	6	4	5	1	9	8	7	0
Krebs	9	4	5	6	10	2	1	3	8	7	11	0
Umkehrung (3)	6	7	11	10	3	5	4	8	0	1	2	9
Krebsinversion (6)	3	8	7	6	2	10	11	9	4	5	1	0

Tabelle 9: *Transformationen an einer Grundreihe aus der Zwölftonmusik*[101]

In den Notendarstellungen (Abbildung 14) werden die durch die Abbildungen gewonnenen Tonhöhen beibehalten, damit die Geometrie besser erkannt werden kann. Beim Krebs wird die Grundreihe am rechten Rand gespiegelt. Bei der Umkehrung deutet die (3) an, dass an der waagrechten Achse mit dem y–Wert 3 (entsprechend dis) gespiegelt wird. Bei der Krebsumkehr wurde die Krebsreihe an y=6 (entsprechend fis) gespiegelt. Die Tondauern wurden im Beispiel konstant gewählt und die Töne mit Viertelnoten notiert, in den Werken variieren sie ebenso wie die Oktavlage der Tonhöhen.

[101] Christmann – Geometrie und Musik

Abbildung 14: *Transformationen an einer Grundreihe aus der Zwölftonmusik*[102]

Bei der Umkehrung erfolgt in der tonalen Musik eine tonale Spiegelung, d. h. es werden nur Töne der jeweiligen Tonart aufgenommen, die leiterfremden Zwischentöne sind zu streichen. Spiegelt man beispielsweise in C-Dur tonal an e, so geht d in f über, c in g usw. Bei der Zwölftontechnik dagegen sind alle zwölf Töne gleichberechtigt, die Umkehrung erfolgt „atonal". Im genannten Beispiel würde d in fis, c in gis übergehen.[103]

Musikalische Zahlenspiele hatten vor allem in der Barockzeit Hochkonjunktur, denn die Mathematik galt als vollkommene Wissenschaft. So liebte Johann Sebastian Bach komplexe Ordnungen und strenge Kompositionsregeln. Sein unvollendet gebliebenes Spätwerk „Die Kunst der Fuge" ist streng mathematisch konstruiert. Bach wandte die zuvor beschriebenen Techniken professionell an, spiegelte Melodien in der Tonhöhe, führte sie in anderem Rhythmus und neuen Tonarten fort und dies parallel in mehreren Stimmen.[104] Dies soll an einem kleinen Partiturausschnitt (Abbildung 15) verdeutlicht werden. Hier entsteht die zweite Stimme aus der ersten durch tonale Umkehrung (Spiegelung) an dem Ton gis. Außerdem erfolgt noch eine Verschiebung in Richtung der Zeitachse.

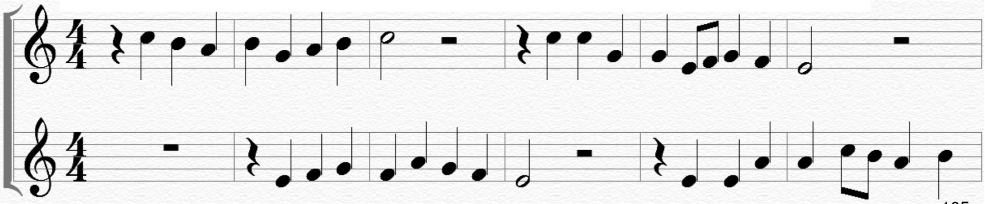


Abbildung 15: *Umkehrung mit Verschiebung in einem Choralvorspiel von Bach*[105]

[102] Ebd.
[103] Ebd.
[104] Schröder 2008 – Klingende Zahlen, S. 25.
[105] Christmann – Geometrie und Musik

3. Pädagogische und psychologische Grundlagen

3.1 Fächerverbindender Unterricht in der Grundschule

3.1.1 Begriffsklärung

Wirft man einen Blick in die Unterrichtswirklichkeit, so zeigt sich diese bis auf wenige Ausnahmen durchgängig als gefächert organisiert. In der Grundschule wird der sogenannte Anfangsunterricht zwar ungefächert erteilt und scheint somit eine Ausnahme zu bilden. Dies erweckt jedoch zumeist nur den Anschein nach außen, im Inneren hingegen wird bereits eine Fächerorientierung erkennbar, was schon durch die Sprachformeln zum Ausdruck kommt, wenn von „Anfangsunterricht in Mathematik“ oder „Anfangsunterricht in Deutsch“ usw. die Rede ist. Zwischen die beiden konträren Organisationsformen „gefächert“ und „ungefächert“ schieben sich einige Formen, die man einem mittleren Organisationsprinzip für Unterricht zuordnen kann. Sie streben grundsätzlich einen Unterricht an, der sich weder ausschließlich an das Fachprinzip anlehnt noch sich dagegen wendet und ungefächert sein soll, sondern Momente von beiden entgegengesetzten Organisationsformen aufweist. Fächerverbindender bzw. fächerübergreifender Unterricht zählt zu jenen Organisationsformen für Unterricht, die genanntem mittlerem Prinzip entsprechen.[106]

Forsbach, die sich mit fächerübergreifendem Musikunterricht beschäftigt, stellt folgende Definition auf:

> „Fächerübergreifender Unterricht meint eine Unterrichtsform, die gezielt die Grenzen einzelner Fachperspektiven überschreitet. Sie erweitert das System des Fachunterrichts und richtet sich gegen den alleinigen Fachunterricht, ohne diesen auflösen zu wollen. Fächerübergreifender Unterricht ist eine Ergänzung des Fachunterrichts. Er setzt diesen voraus und führt wieder dahin zurück.“[107]

Eine alternative Begriffsbestimmung gibt Beckmann, die sich mit fächerübergreifendem Mathematikunterricht befasst:

> „Fächerübergreifender/fächerverbindender Unterricht bedeutet die (unterrichtliche) Beschäftigung mit einem (fachbezogenen oder außerfachlichen) Gebiet, indem die fachlichen Grenzen überschritten werden und andere Fächer einbezogen werden. […] Das Interesse fächerübergreifenden/fächerverbindenden Unterrichts liegt in

[106] Peterßen 2000 – Fächerverbindender Unterricht, S. 14f.
[107] Forsbach 2008 – Fächerübergreifender Musikunterricht, S. 18.

> seiner Bereicherung der Fächer. […] Es kann inhalts-, methoden-, kompetenz- und denkweisenorientiert sein."[108]

Ist das Interesse inhaltsorientiert, begünstigt der Fächerübergriff die Erarbeitung eines bestimmten Inhalts (z. B. das Eckenkonzert zum Erlernen und Festigen der Begriffe der räumlichen Lage, siehe Kapitel 4.3). Spricht man von Methodenorientierung, unterstützt der Fächerübergriff die Erarbeitung einer bestimmten Methode (z. B. kann eine Zahl durch Hören, Fühlen, Hüpfen etc. ganzheitlich besser erfasst werden, siehe Kapitel 4.8). Wenn der Fächerübergriff bestimmte Kompetenzen im Sinne persönlicher Voraussetzungen für Verhalten und Erlebniswelten fördern soll, (z. B. Förderung der Konzentrationsfähigkeit durch Rhythmusspiele, siehe Kapitel 4.7), ist das Interesse kompetenzorientiert. Von Denkweisenorientierung ist die Rede, wenn der Fächerübergriff den Zugang zu einer bestimmten Denkweise verbessert.[109]

In der didaktischen Theorie wie auch in großen Teilen der Praxis werden die beiden Begriffe „fächerverbindender" und „fächerübergreifender" Unterricht nicht einheitlich voneinander getrennt und meist synonym verwendet. Dabei fällt auf, dass die Bezeichnung „fächerübergreifend" wesentlich häufiger Verwendung findet. Im Lehrplan für die bayerische Grundschule wird der Begriff „fächerverbindend" jedoch abgegrenzt vom Begriff „fächerübergreifend", der sich hier auf alle Bildungs- und Erziehungsaufgaben bezieht, die sich keinem bestimmten Fach zuordnen lassen.[110] Die vorliegende Arbeit orientiert sich an letztgenannter Begriffsunterscheidung.

3.1.2 Ziele des fächerverbindenden Unterrichts

Die Organisationsform des fächerverbindenden Unterrichts soll eine Bereicherung darstellen und den Unterricht wertvoller, effektiver und nachhaltiger gestalten. Für die Grundschule kann und soll der fächerverbindende Unterricht folgende Funktionen annehmen:

- Besondere Möglichkeit der Schülerorientierung
- Raum für ganzheitliches Lernen
- Besondere Möglichkeit der Motivation
- (Zusätzliche) Möglichkeit, wichtige geistige Grundtechniken zu erlernen

---

[108] Beckmann 2003 – Fächerübergreifender Mathematikunterricht, S. 23.
[109] Ebd., S. 19f.
[110] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 15.

- Raum, in dem allgemeine Kompetenzen besser geübt werden können
- Möglichkeit, den Umgang mit Heterogenität zu entwickeln
- Beitrag zur Allgemeinbildung[111]

Einige dieser Punkte werden im Verlauf der Arbeit genauer beleuchtet und auch speziell auf die Verbindung von Mathematik und Musik bezogen. Dem ganzheitlichen Lernen kommt eine besondere Bedeutung zu. Forsbach benennt das ganzheitliche Lernen als die wichtigste Zielvorstellung des fächerverbindenden Unterrichts.[112] Termini wie die Pädagogik vom Kinde aus, Lernen mit Kopf, Herz und Hand und die Vernetzung von Unterricht und Schulleben sind hier von Bedeutung.[113] Im folgenden Punkt soll deshalb auf das Prinzip der Ganzheitlichkeit ausführlicher eingegangen werden.

3.1.3 Das Prinzip der Ganzheitlichkeit

Bereits Anfang des 19. Jahrhunderts formulierte Johann Heinrich Pestalozzi als zentrale Aufgabe seines Konzepts der Elementarbildung, dass alle Grundkräfte des Menschen durch Lernen mit „Kopf, Herz und Hand" entwickelt werden sollen.[114] Die gleichmäßige Entwicklung der verschiedenen Persönlichkeitsbereiche und die Verbindung der entsprechenden Kompetenzen, der intellektuellen, sittlich-religiösen und handwerklichen Kräfte gehen in der Regel nicht von selbst vonstatten und müssen daher im pädagogischen Verhältnis angestrebt und gefördert werden.[115] Was bedeutet jedoch „Ganzheitlichkeit" genau und warum gilt es, diese anzustreben?

3.1.3.1 Begriffsklärung

Nach Wiater verlangt das Unterrichtsprinzip Ganzheit, Unterrichtsinhalte mehrperspektivisch zu behandeln und dabei den Schülerinnen und Schülern[116] ein bedeutungsvolles „Kopf, Herz und Hand" zu ermöglichen. Ein Ganzes definiert sich nach Wiater als eine in sich strukturierte und innerlich verbundene, differenzierte Einheit aus unterscheidbaren Elementen. Die Einzelteile haben für sich allein zwar Bedeutung, ihr Sinn ergibt sich aber erst aus ihrer Verbindung.[117]

---

[111] Beckmann 2003 – Fächerübergreifender Mathematikunterricht, S. 30.
[112] Forsbach 2008 – Fächerübergreifender Musikunterricht, S. 48.
[113] Dethlefs-Forsbach 2005 – Fächerübergreifender Unterricht aus der Sicht, S. 257ff.
[114] Wiater 2001 – Unterrichtsprinzipien, S. 64.
[115] Cslovjecsek, Spychiger 2001 – Mus ik oder Mus ik, S. 21.
[116] Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird lediglich die maskuline Form verwendet. Diese kurze Schreibweise dient der Vereinfachung und schließt eine Wertung aus.
[117] Wiater 2001 – Unterrichtsprinzipien, S. 62.

3.1.3.2 Begründungen des Prinzips

Ganzheit betrifft im Kontext von Schule und Unterricht mehrere Aspekte und lässt sich auf unterschiedliche Art und Weise begründen. Die Ganzheit der Person des Schülers als Leib-Seele-Geist-Einheit, als Einheit von Denken, Fühlen und Handeln zeigt die Notwendigkeit des Prinzips aus anthropologischer Sicht. Der Unterricht darf nicht nur an die Kognition gerichtet sein, da an jeder Handlung einer Person Geist, Psyche und Leib zugleich und integrativ beteiligt sind.[118] Auch der Lehrplan betont, dass beim Lernen die Eigenaktivität, also das Handeln der Schüler eine entscheidende Rolle spielt, denn erst aufbauend auf bisherige Erfahrungen entwickeln sie eigene, subjektiv stimmige Vorstellungen, die durch weiteres Lernen objektiviert werden. Die Kinder lernen, indem sie neue und bereits vorhandene Informationen und Handlungsmuster miteinander verknüpfen.[119]

Eine psychologische Begründung erbringen neurophysiologische und neurobiologische Forschungen: Beim Lernen soll das ganze Gehirn, also beide Gehirnhälften beteiligt werden.[120] Das Großhirn ist in die linke und die rechte Großhirnhemisphäre geteilt, die durch den sogenannten Balken verbunden werden. Die beiden Hälften sind symmetrisch angeordnet, aber sowohl anatomisch als auch funktionell asymmetrisch. Grundsätzlich können beide Hirnhälften alle Aufgaben erfüllen; überdies sind beide für unterschiedliche Informationsverarbeitung spezialisiert. Beispielsweise ist in der Informationsaufnahme für die linke Hemisphäre das Hören wichtiger als das Sehen, für die rechte Hemisphäre ist das Sehen effektiver als das Hören. Informationen werden nur dann optimal aufgenommen und verarbeitet, wenn möglichst viel der vorhandenen Hirnkapazität genutzt wird und wenn die Spezialfunktionen beider Hemisphären in Anspruch genommen werden. Bedeutsam ist die Zusammenarbeit der Spezialisten. Welche der beiden Hemisphären dominant ist, ist genetisch bedingt. Die dominante Hälfte reagiert spontaner, spielt die führende Rolle in der Informationsaufnahme und -verarbeitung und prägt das individuelle Arbeits- und Lernverhalten. Diese individuellen Lernanlagen müssen zwar als Tatbestand akzeptiert und respektiert werden, wichtiger als die Zuordnung von Personen und Hemisphärendominanz ist aber die wechselseitige Kommunikation beider Hirnhälften miteinander. Für komplexe intellektuelle und

[118] Wiater 2001 – Unterrichtsprinzipien, S. 61.
[119] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 9.
[120] Wiater 2001 – Unterrichtsprinzipien, S. 63.

motorische Prozesse werden die Talente beider Hirnhälften benötigt. Eine einseitige Bevorzugung von speziellen Funktionsleistungen wirkt sich umso nachteiliger aus, je schwächer die Balkenfunktion, d. h. der Informationsaustausch zwischen den Hemisphären, ausgeprägt ist.[121] Wo dieser Austausch zwischen den Hemisphären trainiert wird, vermehren sich durch multisensorielle und multimotorische Lerntechniken die Zwischenverbindungen des Gehirns. Auf diese Weise werden die Möglichkeiten zu ausgedehnteren Aktivitäten in der Großhirnrinde und damit ein besseres Lernvermögen gefördert.[122] Die Nutzung beider Gehirnhälften erhöht also die Lerneffizienz deutlich. Dies belegen auch Forschungen zum vernetzten Denken: Schülern soll der Lernstoff über möglichst viele Eingangsgebiete angeboten werden, denn je mehr Wahrnehmungsfelder im Gehirn bei der Informationsaufnahme und -verarbeitung beteiligt sind, desto mehr Assoziationsmöglichkeiten bieten sich für ein tieferes Verständnis, desto größer sind die Aufmerksamkeit und die Lernmotivation, desto besser wird die Information behalten und desto leichter kann man sich wieder an sie erinnern.[123] Speziell auf Musik bezogene neurophysiologische Argumente werden in Kapitel 3.2.2 erläutert.

Pädagogisch wird das Prinzip der Ganzheitlichkeit zum einen mit der Ganzheit des Unterrichtsinhalts begründet, der Zugänge aus unterschiedlichen Perspektiven zulässt. Zum anderen basiert es darauf, dass Lernen die individuellen kognitiven, emotionalen, motorischen und volitionalen Strukturen aktiviert. Daher gilt es, die Ganzheit der Erlebnis- und Auffassungsweise des Schülers, die das Lernen jeden Alters prägt, zu beachten.[124] Auch in den Grundlagen und Leitlinien des aktuellen Lehrplans für die bayerische Grundschule wird betont, dass Grundschulkinder Phänomene, Fragen und Probleme der sie umgebenden Welt nicht nach Fächern gegliedert, sondern aus eigenen vielfältigen Perspektiven und ganzheitlich wahrnehmen.[125] Krauthausen verbildlicht dies, indem er schreibt:

> „Die Erfahrungswelt der Kinder ist [...] per se komplex und vergleichbar mit der Situation, in der jemand mit einem Schachspiel spielen muss, welches sehr viele [...] Figuren aufweist, die mit Gummifäden aneinander hängen, so dass es ihm unmöglich ist, nur eine Figur zu bewegen. Außerdem bewegen sich seine und des

[121] Ellrott, Aps-Ellrott 1998 – Erfolgreich lernen im Mathematikunterricht, S. 44ff.
[122] Gaddes 1991 – Lernstörungen und Hirnfunktion, S. 62f.
[123] Wiater 2001 – Unterrichtsprinzipien, S. 63f.
[124] Ebd. S. 62ff.
[125] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 11.

> Gegners Figuren auch von allein, nach Regeln, die er nicht genau kennt oder über die er falsche Annahmen hat. […] Kinder sehen die Welt als Ganzes, geheimnisvoll vielleicht, aber nichtsdestoweniger ganz. Sie teilen sie nicht in kleine luftdicht verpackte Kategorien auf, wie wir Erwachsenen es gerne tun."[126]

Um der kindlichen Wahrnehmung entgegenzukommen und somit ganzheitliches Lernen zu ermöglichen, fasst der so genannte „Grundlegende Unterricht" der bayerischen Grundschulen in den Jahrgangsstufen 1 und 2 die Unterrichtszeit für Deutsch, Mathematik, Heimat- und Sachunterricht, Musikerziehung und Kunsterziehung zusammen. Die Grundlagen und Leitlinien des Lehrplans unterstreichen, dass fächerverbindendes Lernen in allen Jahrgangsstufen der Grundschule wichtig und notwendig ist. Dabei ist es aber ausdrücklich erforderlich, sich an den Lernzielen der jeweiligen Fächer zu orientieren und eine sachgerechte Behandlung sicherzustellen.[127]

Die Grundschule muss also nicht nur ein Raum für geistiges, sondern auch für körperlich-sinnliches Lernen sein. Faust-Siehl fordert, dass die Schulen den Mut finden müssen, Körper, Hände, Bewegung und alle Sinne in viel stärkerem Maß als bisher zur Geltung kommen zu lassen.[128]

Metzler spricht ein Plädoyer für Ganzheitlichkeit speziell auch bei der Begabtenförderung aus. Rationale und emotionale, intellektuelle und intuitive Kräfte sollen jeweils gemeinsam gefördert werden, und zwar um der beteiligten Person und der Arbeitsergebnisse willen.[129]

[126] Krauthausen 2000 – Lernen, S. 35.
[127] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 11.
[128] Faust-Siehl, Garlichs et al. 1996 – Die Zukunft beginnt, S. 100.
[129] Metzler 1985 – Schöpferische Tätigkeit in Mathematik, S. 46.

3.2 Positive Auswirkung von Musik auf verschiedene, für den Mathematikunterricht relevante Bereiche

„Von Hellas bis heute […] werden immer wieder ‚Wirkkräfte' von Musik und Musizieren für die Erziehung des Menschen in zahllosen Aphorismen beschworen [...]"[130], so Bastian in seiner Studie über Musik(erziehung) und ihre Wirkung. Musizieren gehört nach Altenmüller zu den schwierigsten menschlichen Leistungen, denn Gehörsinn, Motorik, Körperwahrnehmung und Hirnzentren, die Emotionen verarbeiten, werden gleichzeitig beansprucht.[131] Schon Sokrates (469 – 399 v. Chr.) weist auf diese Wirkkräfte hin: „So ist also die Erziehung durch Musik darum die vorzüglichste, weil Rhythmus und Harmonie am tiefsten in das Innere der Seele dringen, ihr Anmut und Anstand verleihen."[132] Hector Berlioz (1803 – 1869) betont die ganzheitliche Kraft von Musik, indem er schreibt: „Die Musik wirkt gleichzeitig auf die Phantasie, auf das Gemüt, auf das Herz und die Sinne."[133] Die große Bedeutung der Ganzheitlichkeit wurde im vorangegangenen Kapitel bereits erläutert.

Zoltán Kodály (1882 – 1967), von dem die Musikerziehung in Ungarn in den letzten Jahrzehnten sehr stark geprägt wurde, erläutert ebenfalls die große Reichweite von Musik: „Im Musikunterricht lernen wir nicht nur Musik. Das Singen fördert die Konzentration, die Aufmerksamkeit, verbessert die psychosomatische Disposition, erzieht zur Arbeit, macht Kräfte im Menschen lebendig, gibt Mut, befreit ihn von Hemmungen, erzieht zur Gemeinschaft, bewegt den ganzen Menschen nicht nur partiell und macht die Schule anziehender."[134] 1951 wurde in Ungarn auf Initiative Zoltán Kodálys die sogenannte Musikgrundschule, eine Volksschule mit erweitertem Musikunterricht ins Leben gerufen. Seine Ideen zur Musikerziehung wurden unter dem Begriff „Kodály-Methode" bekannt. Kodály betonte stets, dass aktive Musikausübung auch die Entwicklung anderer Fähigkeiten des Kindes fördere sowie körperliche und geistige Eigenschaften gleichermaßen vorteilhaft beeinflusse. Deshalb forderte er die Umgestaltung aller Grundschulen in Musikgrundschulen.[135] Es ist darauf zu verweisen, dass die Kodály-Methode kein reines Musiktraining ist, sondern auch als ein elementares Wahrnehmungs-

[130] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 52.
[131] Altenmüller 2001 – Macht musizieren intelligent, S. 12.
[132] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 11.
[133] Ebd.
[134] Ebd.
[135] Szőnyi 1973 – Aspekte der Kodály-Methode, S. 9.

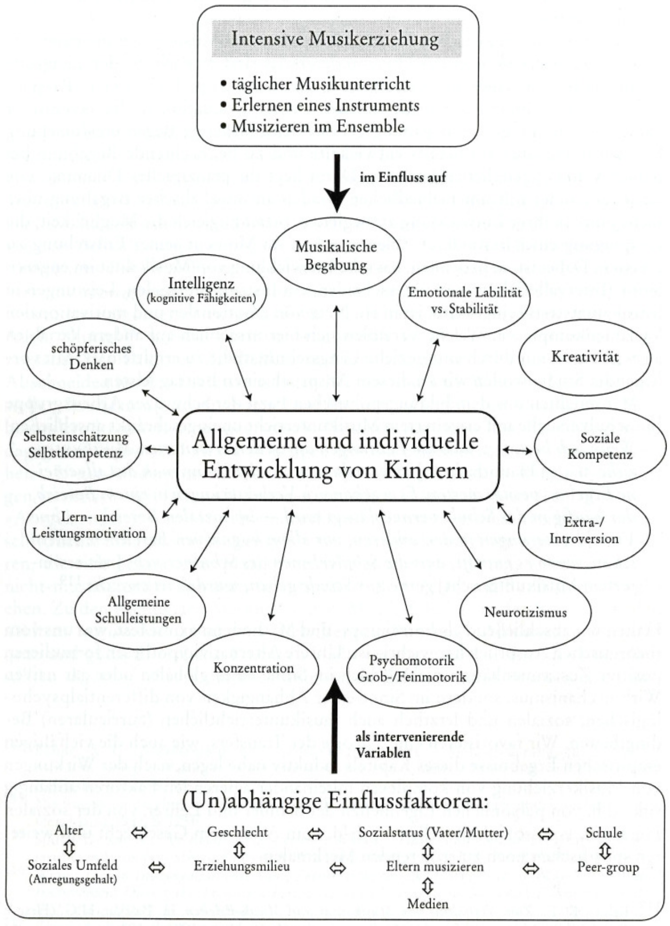
und Konzentrationstraining aufgefasst werden kann.[136] Das Buch „Musikerziehung in Ungarn“ von Frigyes Sándor erlangte in den 60er Jahren große Bekanntheit und viel Bewunderung. Dessen Berichten zufolge wirkt sich tägliches Singen und Musizieren, wie es nach den Anleitungen von Zoltán Kodály in den Musikgrundschulen praktiziert wurde, für die Schüler weit über die musikalische Förderung hinaus positiv auf die schulische Entwicklung aus. „Die Kinder sollen erhöhte Konzentration und Kreativität aufweisen, lieber zur Schule gehen und mehr Gemeinschaftssinn entwickeln – alles ausgezeichnete Voraussetzungen zum Lernen und für gute Schulleistungen.“[137] Der ungarische Musikpädagoge Gábor Friss, der das kodálysche Unterrichtsprogramm befürwortet, schreibt in Sándors „Musikerziehung in Ungarn“: „Die Lernergebnisse der Schüler der Musikgrundschulen sind auf dem Gebiet aller Fächer bedeutend höher als bei den Schülern der üblichen Volksschulen. Die Musik wirkt demnach nicht nur im eigenen Bereich, sondern lässt sich auch bei der Aneignung und Vertiefung in den allgemeinbildenden Unterrichtsfächern nutzen. Darin liegt ihr großer erzieherischer Wert.“[138] Unter anderem haben Schüler mit erweitertem Musikunterricht eine erhöhte Rechenfertigkeit, weil sie sich im Rhythmus üben. Sie zeichnen besser, weil der Form- und Farbensinn auch im Musikunterricht geübt werde und weil das Instrumentalspiel sie geschickter mache. Außerdem seien sie von der rhythmischen Schulung und vom polyfonen Singen her konzentrationsfähiger.[139] In der Längsschnittstudie, die 1996 mit Erstklässlern in Rhode Island durchgeführt wurde, kommen Gardiner und Mitarbeiter zum Ergebnis, dass über die grundsätzlichen musikalischen Aspekte hinaus auch grundsätzliche psychische Funktionen trainiert werden, die nicht nur typisch und wesentlich für die Musik bzw. das Ausüben von Musik sind. Die Kinder, die Musikerziehung nach der Kodály-Methode erhielten, haben insgesamt sehr von diesem Training profitiert und auch ihre Rechenleistungen verbessert. Die Verbesserungen sind ausgeprägter als bei den Kindern aus der Kontrollgruppe ohne den speziellen Unterricht. Besonders bei Kindern mit Schwierigkeiten im Rechnen bzw. Lesen wirkt sich das Kodály-Training sehr positiv auf die Leistungen aus[140], nicht zuletzt, weil das Erlernen musischer Fertigkeiten dazu zwingt,

[136] Jäncke, Altenmüller 2008 – Macht Musik schlau, S. 63.
[137] Spychiger 1993 – Musik und außermusikalische Lerninhalte, S. 363.
[138] Friss 1969 – Die Musikgrundschule, S. 168.
[139] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 65.
[140] Jäncke, Altenmüller 2008 – Macht Musik schlau, S. 62f.

geistig bis an die Grenzen zu gehen, was für andere Lernbereiche wie Mathematik nützlich ist.[141]

In der Langzeitstudie „Musik(erziehung) und ihre Wirkung" unter Leitung von Prof. Hans Günther Bastian geht es um die Frage, welche musikimmanenten Wirkungen und Merkmalsausprägungen erweiterte Musikerziehung auf die allgemeine (und individuelle) Entwicklung von jungen Menschen hat.[143] In dieser Studie wurde empirisch nachgewiesen, dass erweiterte Musikerziehung die Entwicklung von Kindern positiv beeinflusst.[144] Abbildung 16 gibt uns einen Überblick über das systemische Netz von Einflussfaktoren auf die Entwicklung von Kindern, in das die Musik eingebunden ist.

Abbildung 16: *Systemisches Netz von Einflussfaktoren*[142]



Mit freundlicher Genehmigung von SCHOTT MUSIC, Mainz

Nach Hirler wird durch Rhythmik und Musik eine Vielzahl an essenziellen Fähigkeiten gefördert, darunter die Konzentrationsfähigkeit, die Kinästhesie, die Raumwahrnehmung, die Sensibilisierung des Gehörs, die musikalische Ausdrucksfähigkeit, motorische Fähigkeiten (Bewegungs- und Gleichgewichtssinn), die soziale Kompetenz, die taktile, haptile und propriozeptive Sinneswahrnehmung sowie die Fantasie und Kreativität.[145] Auch das Fachprofil der Musikerziehung im Lehrplan für die bayerische Grundschule verweist darauf, dass eigene musikpraktische Aktivitäten, die in der Grundschule im Mittelpunkt stehen, einen wichtigen Beitrag

[141] Staines 2001 – Transferleistung auf dem Prüfstand, S. 75.
[142] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 88.
[143] Ebd., S. 47.
[144] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 7.
[145] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 40.

zur Persönlichkeitsbildung leisten und außerdem die motorische Koordination und die Konzentrationsfähigkeit der Kinder fördern.[146]

Da Musik auf so viele Facetten Einfluss nimmt, ist sie auch und vielleicht gerade besonders im Mathematikunterricht wertvoll und nutzbringend. Sie fördert Kompetenzen und Eigenschaften, die für das Lernen in Mathematik förderlich bzw. konstitutiv sind.

3.2.1 Affektiv-motivationale Disposition

Im Bildungswesen sind Effektivität und Effizienz anzustreben, Wissenserwerb bzw. Lernen gilt als „ernste Sache". Aber Lernen hat auch mit Freude zu tun![147]

Zunächst sollen die Begriffe „Lernfreude" und „Lernmotivierung" geklärt werden:

Lernfreude ist die „positive affektive Gestimmtheit im Zusammenhang mit (schulischen) Leistungsanforderungen" und das Gegenteil von Leistungsangst. Lernfreude kann sowohl instrumentell als Bedingung für Leistungen als auch als Ziel an sich angesehen werden.[148]

Lernmotivierung „ist die momentane Bereitschaft eines Individuums […], seine sensorischen, kognitiven und motorischen Funktionen auf die Erreichung eines Lernzieles zu richten und zu koordinieren."[149]

Allgemein wird der Wissenserwerb in der pädagogisch-psychologischen Fachliteratur als ein Prozess beschrieben, der von kognitiven Schemata des Menschen ausgeht. Diese werden mit neuen Daten verknüpft, was zu einer Umstrukturierung dieser Schemata führt. Dabei kommt den neurophysiologischen Forschungsergebnissen besondere Bedeutung zu. Diese haben nicht nur die Hirnhälften-Dominanz als für den Wissenserwerb bedeutsam herausgefunden (siehe Kapitel 3.2.2), sondern auch darauf hingewiesen, dass das limbische System der Kognition vorgeschaltet ist und alle aufzunehmenden Informationen emotional gewertet werden. Das Gefühl spielt beim Lernen also eine dominierende Rolle; Gefühle prägen die Einstellung des Menschen zu seiner Um- und Mitwelt und alle Wahrnehmungen sind mit bewusstem und unbewusstem, gefühlsgetragenem Erleben verknüpft.[150] Individuelle Stimmungen sind maßgebend für individuelles Lernver-

[146] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 49.
[147] Cslovjecsek, Spychiger 2001 – Mus ik oder Mus ik, S. 3.
[148] Lukesch 2006 – Einführung in die pädagogische Psychologie, S. 212.
[149] Heckhausen 1977 – Förderung der Lernmotivierung, S. 194.
[150] Wiater 2007 – Wissensmanagement, S. 155.

halten, einschließlich Gedächtnisbildung und Erinnerungsvermögen.[151] Ein positives Lernklima, Lernfreude, Motivation und Selbstvertrauen sind entscheidend für erfolgreiches Lernen.

Viele Lehrerinnen und Lehrer empfinden den Mathematikunterricht als anstrengend, weil er für rational, nüchtern und trocken gehalten wird und Möglichkeiten, positive Gefühlserlebnisse zu vermitteln, kaum existieren, nicht wahrgenommen oder außer Acht gelassen wurden.[152] „Dass Lerninhalte besser verstanden und behalten werden, wenn sie emotional ansprechend sind“[153], steht jedoch nach obigen Ausführungen außer Frage. In den Grundlagen und Leitlinien des Lehrplans für die bayerische Grundschule wird darauf hingewiesen, dass durch die Vermittlung von positiven Lernerfahrungen die natürliche Neugier der Kinder erhalten und eine kontinuierliche Lernmotivation aufgebaut werden soll.[154] „Dazu kann die Musik im Mathematikunterricht einen nicht zu unterschätzenden Beitrag leisten.“[155] Kinder musizieren gern, wodurch Potenzial für Lernen und Entwicklung entsteht[156], denn die gute Stimmung löst Lernhemmungen und nimmt den Kindern Ängste. Franz Möckl und Karl Haus schreiben: „Lieder bewirken seelischen Ausgleich, lösen Spannungen, haben therapeutische Wirkung […].“[157] Dies scheint wohl als die günstigste Voraussetzung, mathematische Inhalte zu vermitteln. Das Singen im Mathematikunterricht fordert die Kinder sowohl kognitiv als auch affektiv. Klangliche Repräsentationen ermöglichen es, verbalsprachliche oder visuelle Anforderungen für einen Moment zu reduzieren. Selbst musizieren (allein und in der Gruppe) ist immer auch mit Bewegung und mit Kommunikation verbunden.[158] Bewegung als solche macht Kindern Spaß. Das Lernen von Mathematik mit Bewegung lässt die Motivation auch auf Mathematik überspringen.[159] Außerdem kommt das eigene Musizieren dem natürlichen Ausdrucksbedürfnis der Kinder entgegen. Es gibt wohl kaum ein Kind, das nicht gerne spielt. Die Lust zu spielen liegt auch musikalischen Tätigkeiten zugrunde, denn Musizieren ist Spielen.[160]

---

[151] Ellrott, Aps-Ellrott 1998 – Erfolgreich lernen im Mathematikunterricht, S. 48.
[152] Gierlinger (Hg.) 2001a – Zahlenzauber 1. Lehrermaterialien, S. 233.
[153] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 9.
[154] Ebd.
[155] Gierlinger (Hg.) 2001a – Zahlenzauber 1. Lehrermaterialien, S. 233.
[156] Ullrich 2008 – Mathe klingt gut, S. 773.
[157] Möckl, Haus 1992 – Musikunterricht leichtgemacht, S. 24.
[158] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 11.
[159] Ganser 1998 – Rechenschwäche, S. 10.
[160] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 11.

Von Silvia Regelein stammt die Aussage: „Zahlenlieder stimmen oft besser aufs Rechnen ein als verkrampfte Motivationsgags.“[161] Dies mag daran liegen, dass Musik eng mit den Gefühlen verbunden ist: Die Wahrnehmung von Musik wie auch das eigene Musizieren und Singen wirkt auf die Gefühle. Musik steht auch in Zusammenhang mit Bewegung und regt an. Positive Ereignisse und Situationen mit hohem motivationalem Potenzial basieren sehr häufig auf der Freude an musikalischen Elementen: Puls, Rhythmus, Klangfarbe, Melodie, Schwingung, Struktur, Form, Dynamik.[162]

Die Motivation wird außerdem vom Selbstvertrauen beeinflusst, das wiederum durch Musizieren gestärkt werden kann. „Etwas vorzuzeigen, eine Lösung zu präsentieren usw. bedingt in musikalischer Tätigkeit von Beginn weg ein gesundes Selbstbewusstsein: ‚Ich und die Sache - und die anderen hören zu!’. Dabei kann gelernt werden, dass Fehler zu machen keine Schande ist – und diese Erfahrung macht ebenso stark wie das im Üben gewonnene Vertrauen, dass Fremdes, Schwieriges und gar scheinbar Unmögliches für sich gewonnen werden kann.“[163]

Im Schweizer Schulprojekt von Weber von 1988 bis 1992 wurde mit 1200 Schülern der Unter-, Mittel- und Oberstufe die Wirkung des Musikunterrichts auf Schulleistungen untersucht. Die Experimentalklassen fielen dabei durch hohe Motivation und ein gutes Unterrichtsklima auf.[164] Auch eine Analyse der Studie von Klaus-Ernst Behne zu Wirkungen von Musik aus dem Jahr 1995 zeigt, dass intensiver Musikunterricht positive Auswirkungen auf Sozialverhalten und Motivation der Schüler hat.[165]

„Wenn Musizieren als nachgewiesener Transfereffekt die Freude an der Schule fördert, dann fördert sie zugleich die Freude an der Musik in eben dieser Schule – und umgekehrt!“[166]

[161] Schneider 1996 – Musisch orientierter Mathematikunterricht, S. 17.
[162] Cslovjecsek, Spychiger 2001 – Mus ik oder Mus ik, S. 19f.
[163] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 11.
[164] Jäncke, Altenmüller 2008 – Macht Musik schlau, S. 75ff.
[165] Altenmüller 2001 – Macht musizieren intelligent, S. 7.
[166] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 29.

3.2.2 Lerneffizienz

„Lernen ist stets mit Gedächtnisbildung verbunden.“[167] Nach Anthropologe Alan P. Merriam dient die Musik den Menschen zur Erinnerung und zum Gedächtnis.[168] Im Lehrplan für die bayerische Grundschule heißt es: „Wiederholung und Sicherung haben einen hohen Stellenwert im Unterricht.“[169] Im Sinne des kumulativen Lernens bedürfen Lerninhalte gerade auch in der Mathematik ständiger Wiederholung, bis sie schließlich automatisiert sind. Lieder mit einfacher Struktur, die dazu dienen, Rechnungen mit Schlüsselfunktion wie z. B. die Zerlegungen bis 10 einzuprägen, sogenannte „Eselsbrückenlieder“, unterstützen den Automatisierungsprozess.[170] „Mathelieder“ können folglich nicht nur als Einstimmung für einen guten Unterricht dienen, sondern können sich als Lernlieder auch dafür eignen, dass den Kindern die Mathematik in „Fleisch und Blut“ übergeht.[171] Die besondere Eignung des Liedes für die Schule liegt zunächst in seiner Beschaffenheit. Das Lied als kleines musikalisches Gebilde, in symmetrischer Gliederung, in metrischem Gleichmaß und einfachen Intervallfolgen im diatonischen Bereich lässt sich auch von ungeübten Schülern oder in größeren Gruppen leicht aneignen. Darüber hinaus gewann die Eigenschaft der Verbindung der Melodie mit dem Text im pädagogischen Zusammenhang große Bedeutung. Das Lied wurde als Übermittler außermusikalischer Inhalte erkannt. So spricht nichts dagegen, dass dieser außermusikalische Inhalt ein mathematischer ist, zumal man sich einen Liedtext schlichtweg besser merken kann als einen stur auswendig gelernten Sachverhalt. „Das Lied kann durch Singen und Auswendiglernen in jeden Menschen eingeschleust werden; es bleibt dort ‚deponiert’ und wird bei Bedarf von innen oder außen abgerufen“, so Heinz Lemmermann.[172]

Nicht nur die Gedächtnisleistung wird durch Musik verbessert. Einige Querschnittuntersuchungen belegen, dass Personen mit Musikerfahrung bessere Leistungen in visuell-räumlichen Tests aufweisen, was – so wird angenommen – damit zusammenhängt, dass verschiedene Aspekte der Musik in unserem Gehirn räumlich repräsentiert sind. Durch das Musizieren werden diese visuell-räumlichen

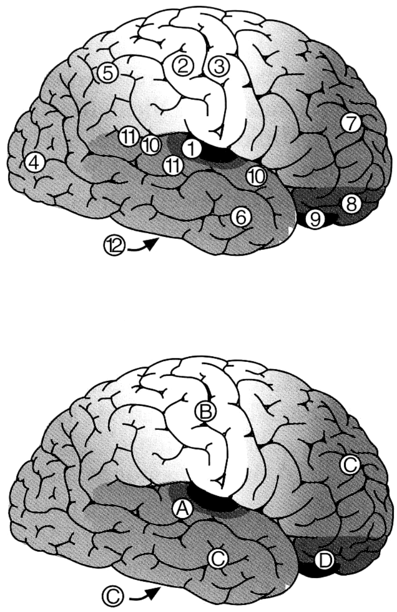
[167] Ellrott, Aps-Ellrott 1998 – Erfolgreich lernen im Mathematikunterricht, S. 34.
[168] Cslovjecsek, Spychiger 2001 – Mus ik oder Mus ik, S. 17.
[169] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 10.
[170] Gierlinger (Hg.) 2001a – Zahlenzauber 1. Lehrermaterialien, S. 233.
[171] Schneider 1996 – Musisch orientierter Mathematikunterricht, S. 17.
[172] Ebd., S. 18.

Funktionen offenbar synchron mittrainiert. Da das Rechnen und der Umgang mit Zahlen wiederum stark von visuell-räumlichen Fertigkeiten abhängen, besteht auch ein Zusammenhang zwischen dem Musizieren und verschiedenen Rechenleistungen. Einige Untersuchungen unterstützen die Hypothese, dass Musizieren die Rechenleistung fördert.[173] Rauscher und Shaw legten 1998 eine Studie vor, in der 34 Kinder im Vorschulalter für ein halbes Jahr Klavierunterricht bekamen und danach nicht nur kleine Stücke von Mozart und Beethoven spielen konnten, sondern auch in raum-zeitlichen Aufgaben besser abschnitten als zwei Kontrollgruppen, von denen eine Computertraining erhielt. Das Erlernen künstlerischer Fähigkeiten bewirkt unter anderem, dass die geistigen Fähigkeiten gewissermaßen gestreckt werden und diese Flexibilität auf andere Bereiche übergreift. „Die Tatsache des besseren Lernens von Mathematik […] könnte auf das Erlernen geistiger Fähigkeiten wie beispielsweise von Ordnungsprinzipien und anderer Elemente mathematischen Denkens in diesem Alter zurückzuführen sein.“[174]

Aus der neueren Hirnforschung, die neurobiologische und neurophysiologische Befunde liefert, kommen weitere Argumente für die Wirkungen von Musik und Musizieren. Musikhören und -machen fördern die Verbindung und Aktivität zwischen beiden Hirnhälften, sie führen zu gigantischen „neuronalen Vernetzungen“. Im Unterschied zu den vereinfachenden Konzepten der Hirnforschung in den 80er Jahren ist heute bekannt, dass die Melodieverarbeitung mehr in der rechten, die Rhythmusverarbeitung dagegen mehr in der linken Hirnhälfte geschieht, dass Musik also stets beide Hirnhälften aktiviert. Dies führt zu einer optimaleren Ausbalancierung beider Hemisphären. Die meisten Menschen aktivieren für bestimmte Tätigkeiten eine der beiden Hirnhälften stärker als die andere. Forschungsergebnissen zufolge lassen sich Musiker nicht in ein solches Alternativschema einordnen, sondern verfügen über eine bessere Verbindung zwischen den beiden Hemisphären.[175]

Es gibt im Gehirn kein Musikzentrum. Macht jemand Musik, so ist oft sein ganzer Körper beteiligt. Daher ist es nicht verwunderlich, dass Studien zur Repräsentation von Musik im Gehirn ergaben, dass beinahe das gesamte Gehirn zur Musik beiträgt.[176] Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 17 ersichtlich.

[173] Jäncke, Altenmüller 2008 – Macht Musik schlau, S. 195.
[174] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 139.
[175] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 38.
[176] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 212.



① akustische Analyse und Repräsentation
② Tastempfinden beim Musizieren
③ Motorik beim Musizieren, Singen,Tanzen
④ Noten lesen
⑤ Raum und Körpersprache beim Tanzen
⑥ Metrum (Takt)
⑦ Erwartungen, Pläne, allgemeines Wissen
⑧ Persönlichkeit, Vorlieben, Musikgeschmack
⑨ Emotionen
⑩ Stimme hören
⑪ Melodie hören
⑫ Assoziationen, Erfahrungen, Episoden

Ⓐ Hören
Ⓑ Musizieren, Tanzen
Ⓒ Verstehen
Ⓓ Erleben, Fühlen

Abbildung 17: *Musikbezogene Funktionen in der Großhirnrinde*[177]

Das gesamte Gehirn macht Musik. In der Großhirnrinde sind unterschiedliche musikbezogene Funktionen eingezeichnet, oben etwas feiner, unten in ganz grober Übersicht.

Musik hat zweifellos hirnphysiologische Wirkungen, sie hinterlässt Spuren im Kopf, beeinflusst das Zusammenwirken der rund zehn Milliarden Nervenzellen, deren hochkomplexe Komposition aus raum-zeitlichen Interaktionsmustern all unseren mentalen, kognitiven und sozialen Aktivitäten zugrunde liegt.[178]

So ist die Rhythmik als Teilbereich der Musik eine gute Möglichkeit, das interhemisphärische Zusammenspiel zu fördern, und zwar bereits ab dem Kleinkindalter. In der Rhythmik spielt neben den visuellen und taktil-kinästhetischen Wahrnehmungsspielen die Hörwahrnehmung eine große Rolle. Durch den Einsatz von Musik in Form von Liedern, Tänzen, Reimen (Sprache ist durch Sprachmelodie, Sprachrhythmus, Stimmhöhe, Sprachartikulationen im weitesten Sinne Musik), auditiven Wahrnehmungsspielen, Fortbewegungsarten und Klanggeschichten kann eine sensorisch effektive Förderung gelingen.[179] Von Wagner und Bentley wurde bei Mädchen das sechste bis neunte Lebensjahr, von Holz das elfte Lebensjahr, bei Jungen das neunte bis 13. Lebensjahr als sensible rhythmische Phase angegeben.[180] Kinder sind also im Grundschulalter im Bereich der Rhythmik besonders aufnahmefähig.

Ergänzt man die Hemisphärenforschung durch Forschungen zum vernetzten Denken, so ergibt sich, dass Schüler den Wissensstoff über möglichst viele Eingangs-

[177] Ebd., S. 209.
[178] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 38f.
[179] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 33.
[180] Schirmer 1993 – Musik, Bewegung und Sprache, S. 21.

kanäle aufnehmen sollen, wie in Kapitel 2.1.3.2 im Sinne der Ganzheitlichkeit bereits erläutert wurde. „Ein Lernen, das nicht auf den menschlichen Organismus Rücksicht nimmt, das neben dem kognitiven Bereich nicht auch die anderen, teils unbewussten Gehirnpartien (Mustererkennung, bildhaft und analog arbeitende Bereiche, emotionale und intuitive Vorgänge, haptische und motorische Bereiche, Rhythmus-, Klang- und Musikerleben) einbezieht, ist unökonomisch und widernatürlich, weil es die Einheit von Körper, Seele und Geist des Menschen verkennt.“[181]

Da die Lerneffizienz, wie in Kapitel 3.1.3 ausgeführt, durch Ganzheitlichkeit deutlich gesteigert wird, muss auch im Mathematikunterricht mit Sinnen, Gefühlen und Verstand gelernt werden. Dabei kommen Sinne und Gefühle meist zu kurz. Die Facette des Emotionalen, die schließlich einen großen Einfluss auf die Lerneffizienz hat, wurde bereits im vorangegangenen Kapitel erläutert. An dieser Stelle soll auf die umfassende Aktivierung der Sinne des Kindes näher eingegangen werden, die die Basis des Lernens im Grundschulalter darstellt. Die sensorischen Informationen bilden den Ausgangspunkt in der Entwicklung des Denkens. Nach dem Entwicklungsmodell von Ayres, das auch in Übereinstimmung zur neueren Neuropsychologie steht, erfolgt die Höherentwicklung durch Verknüpfung von immer mehr Sinneseindrücken auf verschiedenen Kanälen.[182] Daher ist im Mathematikunterricht darauf zu achten, alle Sinne einzubinden und insbesondere Sinne bewusst einzeln anzuregen, indem die anderen ausgeschaltet werden und bewusst zu verbinden, indem sie synchron geschaltet werden: Töne hören lassen, Klopfzeichen geben oder auf dem Rücken spüren lassen, Knoten bei verbundenen Augen fühlen lassen, Schritte gehen lassen, all diese Tätigkeiten bieten wertvolle Sinneserfahrungen. Die sensorischen Kanäle sollen verstärkt werden, sodass sich mit der Zahl viele sinnliche Aspekte verbinden und wechselseitig aufrufen.[183] Musik kann außerordentlich gut eingesetzt werden, um alle Sinne anzusprechen.[184] Außerdem ist die Verbindung von Musik und Bewegung förderlich für die Lerneffizienz. Montessori bezeichnet die körperliche Bewegung als „Schlüssel zur gesamten Formung der Persönlichkeit“ und beschreibt sie als „unerläßlichen Faktor für den Aufbau des Bewußtseins […], für den Aufbau von Intelligenz, für ein

[181] Wiater 2007 – Wissensmanagement, S. 155 f.
[182] Ganser 1998 – Rechenschwäche, S. 10.
[183] Rinkens 1999 – Wider die verkopfte Mathematik, S. 40.
[184] Ullrich 2008 – Mathe klingt gut, S. 775.

Ausbilden von abstrakten Vorstellungen […], für einen Austausch zwischen Geist und Außenwelt, zwischen innerer und äußerer Wirklichkeit".[185] Der Psychologe Jean Piaget beschrieb die frühkindliche Entwicklung als elementares sensomotorisches Adaptionsverhalten, in dessen Verlauf Grunderfahrungen gemacht werden, die dann zur Begriffsbildung führen. Über motorische Aktivitäten erhält das Kind sensorische Eindrücke. Ein vergrößertes Reizangebot verbessert wiederum die Bewegungskoordination und schafft Voraussetzungen für motorische Lernleistungen. Im frühen Kindesalter wird die motorische Entwicklung als Gradmesser der erreichten Intelligenzstufe gewertet. Dieser Zusammenhang beschränkt sich nicht zwangsläufig auf diesen Lebensabschnitt. Zwischen motorischem Training und der Steigerung kognitiver Leistungen konnte von verschiedenen Autoren ein Zusammenhang gefunden werden.[186]

Eine Art, Zahlen sinnlich erlebbar zu machen und zudem Bewegung ins Spiel zu bringen, ist beispielsweise das Bewegungsspiel im Mathematikunterricht, das eine Kombination aus Mathematik, Sport und Musik darstellt. Durch den Rhythmus der Musik und die Bewegung im Raum erleben die Schüler die Zahlen dreidimensional, sie erfahren die Zahlen sozusagen mit dem ganzen Körper und mit ihren Sinnen. Besonders bei Grundschülern, deren Bewegungsdrang noch sehr groß ist, geht mit Bewegung alles besser. Kognitives Lernen fällt über die Bewegung leichter, weil das Kind ganzheitlich beansprucht wird und nicht nur seine Denkbahnen. Deshalb werden mathematische Inhalte besser aufgenommen und verarbeitet. Rhythmische Bewegung unterstützt beispielsweise die mechanische Beherrschung der Einmaleinsreihen, was dazu führt, dass der Kopf frei wird für andere Dinge.[187] Außerdem ist die koordinierte rhythmisierte Bewegung Ausgangspunkt der Eins-zu-eins-Zuordnung, die zum Lernen des Zählens beherrscht werden muss. Die heilpädagogische Wirkung von Rhythmus und Musik bei lern- und verhaltensauffälligen Kindern ist hinreichend nachgewiesen.[188]

[185] Tervooren 1996 – Ein Weg zur Menschlichkeit, S. 33.
[186] Schirmer 1993 – Musik, Bewegung und Sprache, S. 8ff.
[187] Faltus 1996 – Das Bewegungsspiel im Mathematikunterricht, S. 1.
[188] Ganser 1998 – Rechenschwäche, S. 7ff.

3.2.3 Intelligenz

Nach Hirler haben Kinder mit regelmäßigem Musikunterricht in vielen Bereichen, wie z. B. auch im Bereich der Intelligenz, einen Vorsprung.[189] Außerdem beeinflusst regelmäßige und gezielte Bewegung die Intelligenzentwicklung des Kindes positiv, so Faltus.[190]

Zunächst stellt sich jedoch die Frage, was unter Intelligenz zu verstehen ist. Die Auffassungen darüber, was Intelligenz ist und aus welchen Fähigkeiten sie zusammengesetzt ist, gehen weit auseinander. Grundsätzlich stehen sich zwei Auffassungen von Intelligenz gegenüber: Eine Position geht davon aus, dass ein genereller, bereichsübergreifender Intelligenzfaktor existiert und Leistungen wie sprachliche oder mathematische Fähigkeiten Teilbereiche der allgemeinen Intelligenz darstellen.[191] Eine entsprechende Definition findet sich beispielsweise im Psychologischen Wörterbuch: Intelligenz bezeichnet die Fähigkeit „sich in neuen Situationen auf Grund von Einsichten zurecht zu finden oder Aufgaben mit Hilfe des Denkens zu lösen, ohne dass hierfür Erfahrungen, sondern vielmehr die Erfassung von Beziehungen, das Wesentliche ist“.[192] Die Intelligenzanteile werden nach der Intelligenztheorie von Cattell in fluide und kristalline Anteile aufgeteilt. Die fluiden Anteile stellen eine (erbliche) Grundausstattung dar, die von umweltlichen Anregungsbedingungen relativ unabhängig ist, wohingegen der kristalline Anteil als durch den Lernprozess beeinflussbar gilt.[193] Diese Vorstellung einer allgemeinen Intelligenz macht die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten durch Förderung des musikalischen Bereichs bzw. die gegenseitige Beeinflussung denkbar. Die konträre Auffassung besagt, dass es verschiedene Formen von Intelligenz gibt, die relativ unabhängig voneinander sind und sich auf Fähigkeiten in unterschiedlichen Bereichen beziehen.[194] Gardner unterscheidet in seinem Konzept der multiplen Intelligenz sieben Intelligenzen als Grundausstattung menschlicher Geistestätigkeit, menschlichen Wissens und Erlebens (linguistische, logisch-mathematische, räumliche, musikalische, körperlich-kinästhetische, intrapersonale und interpersonale Intelligenz). Unter Intelligenz wird hier die Fähigkeit verstanden, „Probleme zu lösen oder Produkte zu erzeugen, denen in einem kulturellen

[189] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 28.
[190] Faltus 1996 – Das Bewegungsspiel im Mathematikunterricht, S. 1.
[191] Gembris 2001 – Musik, Intelligenz und Persönlichkeitsentwicklung, S. 135f.
[192] Dorsch, Häcker et al. (Hg.) 1994 – Dorsch Psychologisches Wörterbuch, S. 356.
[193] Lukesch 2006 – Einführung in die pädagogische Psychologie, S. 101.
[194] Gembris 2001 – Musik, Intelligenz und Persönlichkeitsentwicklung, S. 135f.

Umfeld oder in einer Gemeinschaft Wert beigemessen wird“.[195] Die Vorstellung verschiedener, relativ eigenständiger und voneinander unabhängiger Bereiche der Intelligenz lässt es zunächst unwahrscheinlich wirken, dass durch Förderung der musikalischen Intelligenz auch die mathematische beeinflusst wird.

Im Jahr 1993 sorgte eine Studie zu Musik, Intelligenz und Gedächtnis weltweit für Aufsehen, deren Ergebnis unter dem Namen Mozart-Effekt bekannt wurde. Rauscher und Mitarbeiter ließen 36 College-Studenten für zehn Minuten Mozarts Sonate für zwei Klaviere in D-Dur (KV 448) oder ein Entspannungstonband oder gar nichts hören und testeten dann mit einer standardisierten Aufgabe deren räumliche Intelligenz. Hatten die Studenten Mozart gehört, waren ihre Leistungen um acht Punkte besser als unter den anderen Bedingungen. Das Ergebnis war statistisch signifikant.[196] Der Mozart-Effekt wird so erklärt, dass das Hören von Musik eine Aktivierung bestimmter neuronaler Bahnen bewirke, die sowohl für geistige Verarbeitung von musikalischen Strukturen als auch für das Lösen bestimmter räumlicher Aufgaben wichtig sind. In der Folgezeit wurden weitere Studien zum Mozart-Effekt durchgeführt. In einer dieser Untersuchungen wurde herausgefunden, dass sowohl nach dem Hören von Mozart-Musik als auch nach dem Hören einer Geschichte von Stephen King leichte Verbesserungen bei räumlichen Aufgaben auftraten, jedoch nur dann, wenn das zuvor Gehörte den Probanden gefiel. Ein anderes Experiment, an dem über 8000 britische Schulkinder teilnahmen, ergab, dass auch das Hören von Popmusik im Vergleich zu einer Kontrollgruppe, die der Diskussion eines wissenschaftlichen Experimentes zuhörte, bessere Leistungen in einigen räumlichen Aufgaben erbrachte. Diese Ergebnisse lassen sich zusammen mit anderen Befunden auch so interpretieren, dass im Allgemeinen Reize, die als angenehm empfunden werden und zu einer rechtsseitigen, kognitiven Aktivierung führen, leichte temporäre Verbesserungen bei räumlichen Aufgaben mit sich bringen können. Es muss also nicht Mozart sein.[197]

Generell bleibt festzuhalten, dass musikalisches Wahrnehmen und Produzieren die musikalische Intelligenz (vgl. Konzept der multiplen Intelligenz) fördert, die wiederum mit allen anderen Intelligenzen verbunden ist. Alle Intelligenzen müssen

[195] Altenmüller 2001 – Macht musizieren intelligent, S. 6.
[196] Spitzer 2004 – Musik im Kopf, S. 137.
[197] Gembris 2001 – Musik, Intelligenz und Persönlichkeitsentwicklung, S. 141ff.

gefördert und vernetzt werden.[198] Eine Studie nach Altenmüller und anderen aus dem Jahr 2000 zeigt, dass Musikerziehung und Gehörbildung ganz offenbar die Nervenzellenvernetzung der Großhirnrinde und die Hirnaktivierung spezifisch beeinflussen können.[199]

In der Langzeitstudie von Bastian, die sechs Jahre lang an sieben Berliner Grundschulen durchgeführt wurde, wurde auch die Entwicklung des IQ von Kindern mit verstärktem Musikunterricht im Vergleich zu Kindern mit regulärem Musikunterricht untersucht. Bastian setzte in seiner Studie zur Untersuchung der Intelligenzentwicklung zwei verschiedene Tests ein.
Der Culture Faire Intelligence Test (CFT), der auf der Intelligenztheorie von Cattell basiert, erhebt konzeptionell den Anspruch, intellektuelle Fähigkeiten weitgehend unabhängig von spezifischen kulturellen Gegebenheiten zu erfassen und deshalb Personen mit unterschiedlicher Schichtzugehörigkeit fair zu testen.[200] Den Ergebnissen dieses Tests zufolge entwickeln sich beide Schülergruppen in den ersten Jahren ihrer Grundschulzeit nicht sehr unterschiedlich. Nach vier Jahren erweiterter Musikerziehung kommt es jedoch zu einem deutlichen IQ-Zugewinn bei Kindern aus musikbetonten Grundschulen (IQ-Mittelwert 110 zu 105).[201] Dabei steigern Kinder aus den musikbetonten Klassen, die bereits zu Projektbeginn im IQ-Test überdurchschnittliche Werte erreicht hatten, diesen kognitiven Begabungsvorteil nach vier Jahren Instrumental- und Ensemblespiel signifikant deutlicher als Kinder aus der Kontrollgruppe ohne erweiterte Musikerziehung.[202] Sozial benachteiligte und in ihrer kognitiven Entwicklung weniger geförderte Kinder (mit einem IQ zwischen 80 und 90) profitieren ebenso von einer erweiterten Musikerziehung. Tendenziell steigern sie sich im Laufe der Zeit kontinuierlich, was für unterdurchschnittlich kognitiv begabte Kinder ohne Musiktreatment nicht bilanziert werden kann. Außerdem sind Kinder der Musikbetonung über alle Messzeitpunkte im überdurchschnittlichen Bereich häufiger vertreten. Langfristig gesehen verbessern Musik, Musizieren und Musikerziehung laut dieser Untersuchung die Intelligenz-

[198] Cslovjecsek, Spychiger 2001 – Mus ik oder Mus ik, S. 21.
[199] Altenmüller 2001 – Macht musizieren intelligent, S. 9.
[200] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 76.
[201] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 278.
[202] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 36.

entwicklung von Kindern signifikant. Dies gilt sowohl für Kinder mit anfänglich unter- wie überdurchschnittlichen IQ-Werten.[203]

Mit dem zweiten Test, dem Adaptiven Intelligenz Diagnostikum (AID), werden Parameter wie verbal-akustische Fähigkeiten (Alltagswissen, angewandtes Rechnen, unmittelbares numerisches Reproduzieren, Synonyme finden, Funktionen abstrahieren, soziales Erfassen und sachliches Reflektieren) sowie manuell-visuelle Fähigkeiten (Realitätssicherheit, soziale und sachliche Folgerichtigkeit, Kodieren und Assoziieren, figurales Antizipieren und Kombinieren, abstraktes Analysieren und Synthetisieren) überprüft.[204] Der entscheidende Vorteil dieses Tests liegt darin, dass er einen Individualtest mit antwortabhängiger Aufgabenvorgabe darstellt. Musizierende Kinder im Alter zwischen acht und elf Jahren zeigen in mehreren Subtest-Leistungen einen deutlichen Entwicklungsvorsprung. Mit den Ergebnissen dieser AID-Subtests wird die Hypothese als verifiziert angesehen, dass Kinder gerade in der Altersphase der Acht- bis Zehnjährigen von Musik, Musizieren und Musikerziehung in signifikanter Weise profitieren und sich vorteilhafter entwickeln im Allgemeinwissen, im Textrechnen und in der Fähigkeit zu abstrahieren.[205]

Schließlich schreibt Bastian, dass in seiner Studie zu Schulbeginn, d. h. bereits für eine frühe Altersphase, ein monoton steigender Zusammenhang zwischen Intelligenz und musikalischer Begabung festgestellt werden konnte. Mit höheren Musikalitätswerten steigen auch die IQ-Werte. Damit gelten nach Bastian für erst sechs- bis siebenjährige Kinder Forschungsergebnisse, die eine Korrespondenz zwischen Musikalität und Intelligenz behaupten, als bestätigt.[206] Diese Transfereffekte lassen sich mit Thorndikes Theorie der „identischen Elemente“ erklären, die dem Lernen in Musik im Besonderen und der kognitiven Entwicklung im Allgemeinen gemeinsam sind. „Musik ist Komposition, Syntax und Struktur kognitiven Anspruchs, denn die Tektonik der Musik hat etwas Abstraktes, Logisches, Figurales, sie verlangt das Entdecken von Formen und Formprinzipien.“[207] Musizieren übt sehr viele Intelligenzbereiche per se, unter anderem die kinästhetische Intelligenz, durch rhythmische Muster die mathematische Intelligenz und durch die Fähigkeit, seine eigenen Emotionen zu erforschen die intrapersonale Intelligenz.

[203] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 278.
[204] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 82f.
[205] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 291.
[206] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 35f.
[207] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 292.

Die Voraussetzungen für gelingende Musik zu schaffen ist zugleich ein Training und eine Koordination muskulärer und nervlicher Vorgänge.[208]
In der Schellenberg-Studie von 2004 erhielten zwei Versuchsgruppen ein Jahr lang speziellen Musikunterricht (nach der Kodály-Methode), eine Versuchsgruppe nahm ein Jahr lang an einem Schauspielunterricht teil, während die vierte Versuchsgruppe keinen zusätzlichen Unterricht erhielt. Die Kinder mit Musikunterricht zeigten einen stärkeren Anstieg des IQ (rund sieben Punkte) als jene Kinder, die lediglich Schauspielunterricht erhalten oder keinen zusätzlichen Unterricht genossen hatten (beide nur rund vier Punkte). Dieser Unterschied ist statistisch signifikant.[209]

3.2.4 Wahrnehmung, Aufmerksamkeit und Konzentration

„Denken entwickelt sich aus elementarer Wahrnehmung."[210] Schon dieses Zitat von Ellrott verdeutlicht, wie bedeutsam die Förderung der Wahrnehmungsfähigkeit ist. Die Wahrnehmung ist grundlegend für alle Operationen: Erfolgreich-motorisches Verhalten ist ohne Wahrnehmungskompetenz ebenso unmöglich wie die Entwicklung der Intelligenz. Die Organisation von Wahrnehmung ist die Grundlage der kognitiven Entwicklung.[211] Die Wahrnehmung ist nicht vom Erkenntnis- und Denkvorgang zu trennen. Sie stellt eine Basis für den hierarchischen Aufbau höherer geistiger Fähigkeiten dar und ist damit auch für die schulische Leistungsfähigkeit und die gesamte Persönlichkeitsentwicklung grundlegend.[212] Die Wahrnehmung zählt explizit auch zu den mathematischen Grundfertigkeiten. An der erfolgreichen Aneignung pränumerischer und numerischer Operationen sind nach dem Teilleistungsmodell des Staatsinstituts für Schulpädagogik und Bildungsforschung unter anderem die taktil-kinästhetische-vestibuläre Wahrnehmung, die räumliche Orientierungsfähigkeit, die auditive Wahrnehmung, die visuelle Wahrnehmung, die Wahrnehmungsgeschwindigkeit, das Zusammenwirken der Sinne und das Zusammenwirken von Wahrnehmung und Motorik beteiligt.[213]

[208] Ebd., S. 292f.
[209] Jäncke, Altenmüller 2008 – Macht Musik schlau, S. 72f.
[210] Ellrott, Aps-Ellrott 1998 – Erfolgreich lernen im Mathematikunterricht, S. 30.
[211] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 71.
[212] Schirmer 1993 – Musik, Bewegung und Sprache, S. 10.
[213] Gottschalk 1992 – Grundlegende mathematische Fähigkeiten, S. 13.

Gerade darin liegt der besondere Auftrag des musisch-ästhetischen Lernbereichs. Er soll Wahrnehmungsfähigkeit, Empfindungsfähigkeit und Ausdrucksfähigkeit über das ausschließlich Nützliche, instrumentell Verwertbare hinaus entfalten. Die (sinnliche) Wahrnehmung ist geradezu die Basis der Lernfähigkeit. Die auf äußere Objekte oder innere Empfindungen gerichtete Eindrucksfähigkeit differenziert sich im Wechsel von Wahrnehmungs- und Ausdruckstätigkeit.[214] Cslovjecsek schreibt, dass Musik und Bewegung den Wahrnehmungs- und Differenzierungsprozess unterstützen, denn Schüler lernen so, dass Sachverhalte nicht nur visuell oder haptisch, sondern auch auditiv und kinästhetisch erfasst werden können.[215] Tervooren bezeichnet die Sinneserziehung als das Fundament aller Erziehung.[216] Montessori schließt 1918 in ihre frühe Beschreibung eines erzieherischen Auftrags ein: „Die Sinne sind ‚Greiforgane' der Bilder der Außenwelt, die für den Verstand so notwendig sind wie die Hand als Greiforgan der für den Körper notwendigen materiellen Dinge. Doch beide – Sinne und Hand – können über solche einfache Aufgaben hinaus verfeinert und dadurch immer wertvollere Gehilfen des großen inneren Motors werden, der sie in seinen Diensten hält."[217] Tervooren bestärkt und ergänzt dies, indem sie dafür plädiert, dass das Auge wieder vom Sehen zum Schauen hingeführt werden muss, das Ohr vom Hören zum Lauschen, der Tastsinn vom Greifen zum Begreifen etc.[218] Die Schulung der Hörfähigkeit durch Musik(erziehung) wurde schon von Pestalozzi als sehr bedeutsam erachtet. Er war der Meinung, dass die Musik die Kinder zu jeder Art der Geistesübung allgemein und sicher vorbereite. Das Hörenkönnen hielt er für das allgemeine Fundament unserer Veredelung. Antholz macht auf die prinzipielle Bedeutung einer Hörerziehung im optischen Zeitalter aufmerksam. Er verweist auf experimentelle Untersuchungen, die ergaben, dass bewusste Hörerziehung Lernfähigkeit und Lernkapazität steigert. Je mehr akustische Reize Kinder empfangen und zu verarbeiten lernen, desto bessere Ergebnisse werden sie auch in den einzelnen Schulfächern erzielen. Denn insbesondere Kinder im Vor- und Grundschulalter verarbeiten Sprechreize nicht aufgrund einer intellektuellen Analyse. Vielmehr werden die akustischen Elemente des Wortes (Intensität, Intonation, Tempo und

[214] Faust-Siehl, Garlichs et al. 1996 – Die Zukunft beginnt, S. 92.
[215] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 10.
[216] Tervooren 1996 – Ein Weg zur Menschlichkeit, S. 101.
[217] Montessori 2005 – Die Entdeckung des Kindes, S. 165.
[218] Tervooren 1996 – Ein Weg zur Menschlichkeit, S. 101.

Melodie der Wortverbindungen, Betonung und Färbung der Stimme) verarbeitet.[219] Bewegung und Wahrnehmung sind demzufolge natürlich auch für die Entwicklung des mathematischen Denkens grundlegend. Im Folgenden werden einige wichtige Bereiche genannt, die in der Verbindung von Motorik und Wahrnehmung Grunderfahrungen ermöglichen, auf die mathematisches Denken aufbaut: Die taktile Körperwahrnehmung ist der entwicklungsmäßig früheste Sinneskanal. Er stellt die Grundlage für Materialerfahrung dar. Darauf bauen dann pränumerische Leistungen wie Klassifizieren und Bilden von Reihen auf. Im Bereich der Körperwahrnehmung (Körperbewusstsein, Körperschema) ist neben dem taktil-kinästhetischen Anteil auch Bewegung notwendig. Körperteile können nur an sich selbst praktisch erfahren werden. Bewegungen sollen einem Vorbild nachgemacht werden. Es muss ein Bewusstsein über den Körper entstehen, über die einzelnen Körperteile, unabhängig auch von der visuellen Kontrolle. Bei der Lateralität, einem Sonderfall der Körperwahrnehmung, geht es um die Dimensionen links/rechts. Das Überschreiten der Körpermitte gehört ebenfalls zu den Leistungen in diesem Bereich. Auch die Orientierung des Körpers im Raum spielt eine Rolle. Alle Raumdimensionen (oben/unten, vorne/hinten, links/rechts) können nur durch Bewegungserfahrungen gemacht werden. Das Kind muss in einem konkreten Raum Dinge holen oder in verschiedene Richtungen laufen. Dies geschieht durch Bewegung, in Verbindung mit Erfahrungen im vestibulären Bereich. Das Gleichgewicht muss erlebt werden, dann erst können die Dimensionen unten/oben erfahren werden. Auch der sichere Umgang mit den Dimensionen links/rechts ist für die Mathematik entscheidend. Die Arbeitsrichtung hängt davon ab, das Stellenwertsystem ist in einer bestimmten Richtung aufgebaut und Zahlen werden nach einem bestimmten Muster gelesen. Durch Musik und Bewegung können auch mathematische Inhalte an sich gefördert werden. Erkenntnisse und Einsichten werden über Handlungen erreicht.[220] „Mathematische Vorstellungsbilder sind aus konkreten Handlungen hervorgegangene abstrakte, übertragbare und idiosynkratische Prototypen bestimmter mathematischer Sachverhalte.“[221]

[219] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 71.
[220] Ganser 1998 – Rechenschwäche, S. 8.
[221] Lorenz 1991 – Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung, S. 53.

Die Fähigkeit zur Wahrnehmung und die Fähigkeit zur Konzentration bzw. Aufmerksamkeit sind eng miteinander verknüpft; Konzentration und Aufmerksamkeit bewirken eine Filterung der Wahrnehmungen.[222]

Unter Aufmerksamkeit wird eine „auf die Beachtung eines Objekts (Vorgang, Gegenstand, Idee usw.) gerichtete Bewusstseinshaltung, durch die das Beobachtungsobjekt apperzipiert wird“[223] verstanden.

Konzentration wird als „Sammlung, Ausrichtung der Aufmerksamkeit auf eng umgrenzte Sachverhalte“[224] bezeichnet. Der Zustand der Konzentration ist als „Gipfelform“ der Aufmerksamkeit zu verstehen. Für diesen Zustand sind als Charakteristika unter anderem das zielgerichtete Anspannen des Willens, ein abschirmendes Ausschalten störender Wahrnehmungen, ein hellwacher Zustand der Aufnahmebereitschaft, ein gegliedertes Ordnen des Denkens und ein filterndes Erinnern des Wissens zu nennen.[225]

Konzentration ist folglich die Fähigkeit, alle Vorstellungen, Wahrnehmungen und Gedanken zu sammeln, sie auf einen Erlebnisinhalt zu richten, Unwesentliches zu lassen und Zerstreuungen abzulegen. „Konzentration beinhaltet einen sehr komplexen Vorgang, der viel psychische Kraft erfordert, um Störfaktoren Widerstand zu leisten, d. h. sich nicht ablenken zu lassen.“[226]

1963 konnte Colbert nachweisen, dass durch Musik eine solche Einengung der Aufmerksamkeit herbeigeführt werden kann und führte auch ihren angstlösenden und entspannenden Effekt darauf zurück, der wiederum genutzt werden kann, um eine harmonische Lernatmosphäre zu schaffen.[227] In Bastians Studie wurde festgestellt, dass es in der Schülergruppe mit Musikbetonung weniger schwache Leistungen und vor allem weniger extrem schwache Leistungen gibt. Es wird als bestätigt angesehen, dass Musizieren und Musikerziehung deutlich schwachen Konzentrationsleistungen von Kindern vorbeugen können, dass Musik sozusagen an sich ein einzigartiges Übungsfeld darstellt, das vor allem konzentrationsschwachen Kindern helfen und sowohl präventiv als auch kompensatorisch wirken kann.[228] Durch ihre Unmittelbarkeit und ihre Flüchtigkeit stellen akustische, kinästhetische und taktile Erfahrungen spezielle Anforderungen an Wahrnehmungsfä-

[222] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 42.
[223] Dorsch, Häcker et al. (Hg.) 1994 – Dorsch Psychologisches Wörterbuch, S. 69.
[224] Ebd., S. 405.
[225] Lukesch 2006 – Einführung in die pädagogische Psychologie, S. 128.
[226] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 345.
[227] Schirmer 1993 – Musik, Bewegung und Sprache, S. 19.
[228] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 354.

higkeit und Konzentration, womit wichtige aktive Lernwege der Kinder für den Unterricht zugänglich gemacht werden. Außerdem wird gleichzeitig das Verständnis der Lehrpersonen für unerwartete Denkwege der Lernenden gefördert. Gemeinsames Musizieren mit verteilten Rollen, spielerische Gehörbildungsübungen und musikalische Spiele können daher zielgerichtet eingesetzt werden, um Konzentration zu fordern und zu fördern.[229]

Auch die Bewegung steht in engem Zusammenhang mit der Wahrnehmung und folglich auch der Aufmerksamkeit und der Konzentration. Die kinästhetische Wahrnehmung ist bei vielen Kindern unterentwickelt. In der heutigen Zeit fehlen Kindern häufig grundlegende Bewegungserfahrungen, die für eine normale körperliche und geistige Entwicklung notwendig sind.[230] Deshalb sollte in der Schule so oft wie möglich Zeit für die Schulung motorischer Fähigkeiten und der Körperwahrnehmung sein. Im Lehrbuch „Zahlenzauber 1“ wird darauf verwiesen, dass viele Kinder große Mühe haben, sich auf ihrem Platz ruhig zu verhalten und konzentriert zu arbeiten. Dieser Tatsache können vor allem auch Bewegungslieder im Unterricht Rechnung tragen. Durch Singen und Sich-Bewegen kann überschüssige Energie abgebaut und die Aufmerksamkeit gebündelt werden.[231] Somit ist wieder konzentriertes Arbeiten am Platz möglich. Manche Schüler sind zudem erst durch Bewegung zu konzentrierter Leistung fähig. Motorische Nebentätigkeiten beeinflussen hier die konzentrierte Tätigkeit in positiver Weise.[232] Die Sensomotorik in der Rhythmik trägt ebenfalls zur Wahrnehmungs- und Konzentrationsschulung bei. Bei der Sensomotorik[233] handelt es sich um ein vernetztes Zusammenspiel aller Sinne unseres Organismus. Sinnesreize, die aktiv aufgenommen oder passiv erspürt werden, sind mit unmittelbaren Bewegungsimpulsen gekoppelt. Ohne eine bewusste Wahrnehmung kann keine motorische Reaktion erfolgen. Da Wahrnehmung und Konzentration untrennbar miteinander gekoppelt sind, ist die sensomotorische Förderung durch Rhythmik eine Wahrnehmungs- und Konzentrationsschulung.[234]

[229] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 5ff.
[230] Gierlinger (Hg.) 2001a – Zahlenzauber 1. Lehrermaterialien, S. 233.
[231] Ebd.
[232] Ganser 1998 – Rechenschwäche, S. 10.
[233] Lateinisch: sensus = Sinn, movere = bewegen
[234] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 40.

3.2.5 Kreativität

Joy Paul Guilford, der den heutigen Kreativitätsbegriff maßgebend geprägt hat, rückt bereits 1950 Kreativität als ein Verhaltensmuster in den Blickpunkt, das unter anderem von der Sensibilität für Probleme, dem Einfühlungsvermögen, dem Finden neuartiger Ideen (Originalität), der geistigen Flexibilität, der Fähigkeit zum Wechsel zwischen Bezugssystemen, von Motivationsfaktoren und von Einstellungen (z. B. Toleranz, Offenheit und Temperament) gekennzeichnet ist.

„Jede Aussicht auf eine wirkliche Fortentwicklung der menschlichen Natur hängt davon ab, ob wir Mittel und Wege zur Bewahrung des Schöpferischen finden“ [235], so Lawrence S. Kubie, amerikanischer Psychologe und Sozialkritiker. Wenn wir seine Worte ernst nehmen, dann wird die Forderung nach Kreativität zu einer zentralen pädagogischen Herausforderung, der sich jede Lehrkraft zu stellen hat.[236]

So wird auch im Lehrplan für die bayerische Grundschule Kreativität gefordert. Nach den Grundlagen und Leitlinien gehört zur Entwicklung der Persönlichkeit auch das Entwickeln von Kreativität, Einfühlungsvermögen, Initiative und Flexibilität. Außerdem soll die Schule als Beitrag zur Bildung der gesamten Schülerpersönlichkeit ebenso die kindliche Wahrnehmungsfähigkeit, die musischen Kräfte sowie die Kreativität fördern und einen angstfreien Zugang zu neuem Lernen und zu kreativem Erproben eigener Lösungswege schaffen.[237] Im Fachprofil Mathematik ist von „kreativem Problemlösen“ die Rede.[238]

Im musisch-ästhetischen Lernbereich werden die Voraussetzungen für schöpferische Tätigkeiten erworben.[239] Im Lehrplan für die bayerische Grundschule wird die Kreativität als ein wichtiger Bereich des Musiklernens hervorgehoben.[240] Neurologisch betrachtet ist für die Auslösung und Kontrolle verschiedener kreativer Akte wahrscheinlich das Zusammenspiel dreier Hirnsysteme verantwortlich, des limbischen Systems, großer Teile des Stirnhirns und der Schläfenlappen. Das limbische System liefert sozusagen den „Treibstoff“ und Antrieb für unsere Handlungen

[235] Köppel 1988 – Kreativität im Grundschulalter, S. 2.
[236] Ebd.
[237] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 7ff.
[238] Ebd., S. 37.
[239] Faust-Siehl, Garlichs et al. 1996 – Die Zukunft beginnt, S. 93.
[240] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 49.

und die Kreativität. Es ist der Kognition vorgeschaltet und kann durch Musik angeregt werden.[241]

So ist die Entwicklung der Kreativität mitunter „ein Auftrag, dem sich auch die rhythmisch-musikalische Erziehung verpflichtet fühlt mit dem entdeckenden Lernen, verbunden mit der Freude am Finden und Erfinden, den immer wieder erneuten Variationen und Improvisationen zu einer Bewegungsaufgabe/musikalischen Aufgabe, am Führen und Geführtwerden durch einen Bewegungspartner, eine rhythmische Folge, einen musikalischen Ablauf, eine gesungene Melodie, einen gesprochenen Text, ein Instrument, eine musikalische Komposition.“[242] Schöpferisches Denken und Handeln ist nicht ohne ein Zusammenspiel von Körper, Geist und Seele möglich. Kreativität bedeutet schöpferisch tätig sein – aus sich selbst, in seinen physischen, seelischen und geistigen Möglichkeiten heraus. Im Rhythmikunterricht bedeutet Kreativität, mit Menschen und Gegenständen zu kommunizieren, die daraus entstehende Wechselwirkung zu reflektieren und diese wiederum in Interaktion mit den anderen Gruppenmitgliedern umzusetzen. Wir geben Kindern eine wichtige Komponente zur Persönlichkeitsentfaltung mit auf den Weg, wenn sie ihre Kreativität im Rhythmikunterricht entwickeln und ausleben können.[243] Im Lehrbuch „Mathe macht Musik“ spielen viele Aufgaben mit einzelnen Tönen oder Geräuschen oder basieren auf einem sich wiederholenden einfachen Muster. Solche einschränkenden Rahmenbedingungen sind oft die Basis für außergewöhnliche Lösungen und geistreiche Gestaltungen und auch der Motor für die Entwicklung weiterer Spielformen. Ebenso aktiviert das Umsetzen von musikalischen Äußerungen in andere Zeichensysteme (und umgekehrt) ein großes Potenzial von kreativen Leistungen sowohl der Schüler wie auch der Lehrkraft.[244]

3.2.6 Lernklima und soziale Kompetenz

Das Lernklima ist abhängig von einer guten Atmosphäre in der Klasse und einem offenen Umgang mit individueller Leistungsfähigkeit und mit persönlichen Grenzen. „Durch gemeinsames Tun ermöglicht die Musikerziehung in besonderer Weise soziales Lernen.“[245] Viele musikalische Spiel- und Arbeitsformen, die in der

[241] Jäncke, Altenmüller 2008 – Macht Musik schlau, S. 321.
[242] Tervooren 1996 – Ein Weg zur Menschlichkeit, S. 171.
[243] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 29.
[244] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 10.
[245] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 49.

Schule einsetzbar sind, wirken integrierend. Durch Musik wird das Teamverhalten trainiert, denn beim Musizieren ist hohe Eigenständigkeit und gleichzeitig viel Empathie gefördert. In der Musik geht es meist darum, im Team wechselnde Rollen auszufüllen, beispielsweise die eines Solisten und der Begleitung. Gleichzeitig ist man sowohl als (Mit-)Spieler als auch als Zuhörer gefordert. Schafft es die Gruppe, einen gemeinsamen Puls zu halten, also das Tempo der Vorgänger zu übernehmen? Schafft es die Solistin, sich zu herauszustellen und gleichzeitig zuzuhören und sich einzufügen? Gemeinsames musikalisches Handeln gründet auf gleichzeitigem Bei-sich-, Bei-der-Sache- und Bei-den-Mitspielenden-Sein. Nonverbale Kommunikation hat dabei einen hohen Stellenwert. Wenn beispielsweise etwas vorgespielt wird, müssen alle gleichzeitig und vom Anfang bis zum Schluss zuhören, um das Resultat zu beurteilen oder selbst musikalisch zu reagieren. Auch die Art, wie mit Fehlern umgegangen wird, trägt zum Klassenklima bei. Der Umgang mit Fehlern beschränkt sich oft auf deren Tilgung und Verbesserung in statischen Situationen. Üben ist ein großer Bestandteil der Musik und hat damit zu tun, Fehler zu machen, Fehler zu erkennen und Strategien zu entwickeln. Davon abgesehen wohnt vielen Fehlern ein interessantes kreatives Potenzial inne.[246] Die Hypothese, dass Musikerziehung und Musizieren das soziale Klima in einer Klasse und darüber hinaus in der gesamten Schule verbessern können, konnte in der Bastian-Studie bestätigt werden. Das Sympathieklima war in der Modellklasse ausgeglichener, homogener, geschlossener, was für die Atmosphäre einer Schulklasse als positiv zu bewerten ist. Gemeinsames Musizieren korrigiert nach Bastian das Ablehnungsverhalten von Kindern gegenüber Mitschülern deutlich nach unten.[247]

Auch die Sozialkompetenz jedes Einzelnen kann durch Musik positiv beeinflusst werden. „Mit der Sozialkompetenz ist vor allem die Befähigung des Individuums gemeint, sich selber helfen zu können und sozialen Kontakt zu Mitmenschen aufzunehmen. Damit verbunden ist die Verantwortung des Menschen für sich selber und für andere Individuen.“[248] Soziale Kompetenz schließt ein Bündel von Fähigkeiten ein, die Musik par excellence aus sich selbst am besten vermitteln kann, ohne dass sie sprachlich vermittelt werden oder Begrifflichkeiten geklärt werden müssen. Dazu zählt die Fähigkeit zu Rollenhandeln und auch -distanz, zur sozia-

[246] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 10.
[247] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 52ff.
[248] Dorsch, Häcker et al. (Hg.) 1994 – Dorsch Psychologisches Wörterbuch, S. 732f.

len Identität, zur Frustrationstoleranz, zur Empathie, zur sozialen Originalität und Kreativität, zum Verstehen des Selbst und des Miteinander, zum authentischen Ausdruck, zur Selbstreflexion und zur Perspektivenübernahme. Dies sind allesamt Fähigkeiten, die über die Musik gleichsam sanktions- und repressionsfrei propädeutisch und experimentell erprobt werden und dadurch – ohne Ängste und Schaden zu nehmen – auch für „Realräume des Lebens“ qualifizieren können.[249] Der Rhythmikunterricht, wie ihn Hirler beschreibt, greift sowohl in Form von freien Experimentierphasen, in denen die Kinder kreativ agieren, als auch mit straff strukturierten Regelspielen das kindliche Bedürfnis nach Spiel auf. So entwickeln die Kinder spielerisch eine Frustrationstoleranz und die daraus entstehende Fähigkeit, Konflikte mit Gleichaltrigen zu lösen – beides wichtige Grundlagen für den Erwerb sozialer Kompetenz.[250] Die Bastian-Studie gibt an, dass Musik machende Kinder ihre soziale Reflexionsfähigkeit deutlich (um 12%) steigerten, während die Leistungen der Kontrollgruppe gleich schwach ausgeprägt blieben bzw. sogar leicht abfielen. Noch eineinhalb Jahre nach diesen Messungen befanden sich Kinder aus den Modellschulen mit erweiterter Musikerziehung zur Hälfte im über- und durchschnittlichen Bereich, Kinder aus den Kontrollgruppen zu mehr als zwei Drittel im unterdurchschnittlichen. Kinder mit erweiterter Musikerziehung fühlen sich nach Bastian außerdem sozial, emotional und leistungsmotivational in ihren Schulklassen integrierter als Gleichaltrige ohne diesen musischen Zugang. Insgesamt wurde das Sozialverhalten der Schüler in der Modellgruppe zu allen Zeitpunkten von ihren Lehrern besser bewertet als in der Kontrollgruppe.[251] Die Ergebnisse der Bastian-Studie sind in diesem Bereich also sehr positiv und ergeben aus sozialer Sicht einen klaren musikerzieherischen Auftrag, der da lautet: „Setzen wir gegen die physische Gewalt die psychische Macht der Musik!“[252]

[249] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 339.
[250] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 27.
[251] Bastian 2007 – Kinder optimal fördern, S. 57ff.
[252] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 342.

4. Praktische Umsetzung in der ersten Jahrgangsstufe

4.1 Allgemeines zu Musik im mathematischen Anfangsunterricht

„Wenn du wenig Zeit hast,
nimm dir am Anfang viel davon!“[253]
Ruth Cohn

Der Anfang einer Entwicklung ist ausschlaggebend für den weiteren Prozess. Daher soll in vorliegender Arbeit speziell der Anfangsunterricht in den Blick genommen werden. Mathematisches Verständnis hat seine Ursprünge sehr früh in der Entwicklung. Um das mathematische Denken zu ermöglichen, ist eine Reihe basaler und pränumerischer Leistungen notwendig. Aufbauend auf grundlegende kognitive Teilleistungen wie Motorik, Wahrnehmung, räumliche Orientierungsfähigkeit, Gedächtnis und Orientierung in der Zeit, rücken pränumerische Einsichten und die Zahlbegriffsentwicklung in den Mittelpunkt.[254] Zu den Voraussetzungen für mathematisches Verständnis gehören die Grob- und Feinmotorik, die verschiedenen Wahrnehmungsbereiche, darauf aufbauend unter anderem das Klassifizieren, die Seriation, die Invarianz der Menge und die Eins-zu-eins-Zuordnung. Dabei ist zu beachten, dass ein basaler Bereich wie z. B. die akustische Wahrnehmung nicht isoliert gesehen werden darf und es bei einer Förderung nicht nur einen kleinen Bereich partikular zu „trainieren“ gilt.[255] Musik kann dazu beitragen, basale Fähigkeiten zu festigen und numerische Fähigkeiten anzubahnen. Im Folgenden werden daher einige Möglichkeiten erläutert, Musik sinnvoll im mathematischen Anfangsunterricht einzusetzen um notwendige Fähigkeiten zu fördern.
Zunächst soll auf den Aufbau des Körperschemas eingegangen werden, denn die Ausbildung der Raumorientierung mit dem eigenen Körper als zentralem Bezugspunkt ist eine wichtige Voraussetzung für mathematische Lernprozesse. Zahlbeziehungen sind räumlicher Natur (Zahlenstrahl, Hundertertafel, Stellenwertsystem etc.). Um diese adäquat erschließen und verstehen zu können, müssen sich Kinder im Raum orientieren und zurechtfinden. Den Körper soweit erspürt zu haben und wahrzunehmen, dass er als inneres Bild präsent ist, ist Voraussetzung (auch) für die Mathematik. Hierzu können musische Elemente beitragen, denn fast jede

[253] Philipp, Rolff 2004 – Schulprogramme und Leitbilder entwickeln, S. 29.
[254] Moog 2005 – Zahlen begreifen, S. 9.
[255] Ganser 1998 – Rechenschwäche, S. 7f.

Musik fordert zu individuellen Körperbewegungen heraus. Um rhythmische Erfahrungen mit dem Körper zu machen, können sich Kinder zu einer gut hörbar gespielten Musik gemeinsam im Klassenzimmer bewegen oder auch vorgegebene Bewegungen nachahmen. Klatschverse und rhythmische Sprechstücke fördern Sprache, Musik und das Körperschema ebenso. Beispielsweise kann zu Versen oder Liedern ein rhythmisches Schema ausgeführt werden. Einfache Tänze bieten sich ebenfalls zum Aufbau des Körperschemas an.

Die Zuordnung und Festigung der Links-rechts-Orientierung ist z. B. für das Verständnis des Zahlenraums und des Stellenwertsystems grundlegend und bereitet einer nicht zu unterschätzenden Zahl von Schulanfängern Schwierigkeiten. Durch Musik kann hier eine abwechslungsreiche Förderung gewährleistet werden. Lieder und von Musik gelenkte Bewegungsübungen stellen eine motivierende Übungsmöglichkeit dar, die auch für weitere Raum-Lage-Zusammenhänge hilfreich ist.

Auch das korrekte Hören, das beim Umgang mit Zahlen wie im Bereich Sprache notwendige Voraussetzung ist, kann durch Musik gefördert werden. Um die akustische Wahrnehmung von Zahlen und Mengen vorzubereiten, können z. B. von den Schülern Geräusche, Tonhöhen und Rhythmen erkannt, unterschieden und wiedergegeben werden. Das Erkennen, Unterscheiden und Wiedergeben von Tonlängen kann ebenfalls zur Schulung der auditiven Wahrnehmung eingesetzt werden. Denkbar wäre hier, dass alle Schüler, solange die Lehrkraft einen Ton summt oder spielt, eine gerade Strecke gehen oder einen geraden Strich auf einem großen Blatt zeichnen, die Ergebnisse dann vergleichen, Unterschiede zu klären versuchen und die Strecken messen. Beim nächsten Ton versuchen die Kinder, das gleiche Tempo wie vorher zu benutzen und können die Tonlängen durch Messen der Strecken vergleichen. Auch sogenannte „Weglasslieder“ wie beispielsweise „Mein Hut, der hat drei Ecken“, bei denen Teile eines Liedes nach und nach durch Bewegungen ersetzt oder ohne Ersatz weggelassen werden, stellen eine bewährte Übungsform dar. [256]

Den Umgang mit Zahlen können Kinder spielerisch lernen. Neben verschiedenen Würfel- oder Kartenspielen (Memory, Domino, Würfelspiele, ...) gibt es auch musikalische und sportpädagogische Bewegungsspiele, die den Einsatz von Kopf und Körper verlangen.[257] Musik kann als Gestaltungselement von Rechenspielen ein-

[256] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 46ff.
[257] Metcalf, Harvey 2008 – Mathilde, die Mathe-Ratte, S. 42.

gesetzt werden, wenn die Schüler etwa Gruppen einer bestimmten Größe bilden sollen, sobald eine eingespielte Musik abbricht.[258] Hier kommt die Einsicht der Anzahlinvarianz ins Spiel, die bei der Decodierung von Zahlsymbolen in konkrete Mengen relevant zu sein scheint. Welche Personen, Dinge oder Gegenstände mit welchem Zahlsymbol bezeichnet werden, ist beliebig; die Zahl bezeichnet die Anzahl, d. h. eine abstrakte Eigenschaft einer Menge. Die Repräsentation der Mengenmächtigkeit kann in unterschiedlicher Weise erfolgen. Im Laufe der Zahlbegriffsentwicklung werden zunehmend abstraktere Darstellungsmöglichkeiten benutzt.[259] Für Kinder mit einem hohen auditiven Lerntypenanteil ist die akustische Darstellung von Zahlen, Mengen und Reihen besonders wichtig. Außerdem können Zahlenmengen und -folgen dadurch für alle abwechslungsreich und anspruchsvoll gesichert werden. Neben visuellen und haptischen Sinnesreizen bieten sich deshalb auch akustische Wege an. Akustisch dargestellte Zahlfolgen können durch Hören und Zählen mitvollzogen werden, wenn Kinder z. B. eine mit Alltagsgegenständen (Münzen in einer Dose o. ä.) oder einfachen Instrumenten produzierte Folge von gleichen Geräuschen parallel mitzählen. Mit Tempoveränderungen oder dem Gebrauch verschiedener Geräuschquellen kann der Schwierigkeitsgrad gesteigert werden.[260]

Nach dem Lehrplan für die bayerische Grundschule sollen im Mathematikunterricht unter anderem die grundlegenden Fähigkeiten Vergleichen, Unterscheiden, Klassifizieren, Ordnen, Strukturieren und Gesetzmäßigkeiten entdecken entwickelt und gesteigert werden.[261] Unter Klassifikation versteht man die „Fähigkeit, Gegenstände nach Gleichheiten, Ähnlichkeiten und Verschiedenheiten in Gruppen zu ordnen“.[262] Bei der Klassifikation von Mengen nach deren Zahleigenschaften kann es z. B. darum gehen, verschieden dargestellte Mengen als gleichmächtig zu erkennen. „Seriation bezeichnet die Fähigkeit, Gegenstände gemäß eines quantitativen Merkmals in eine auf- oder absteigende Reihe zu ordnen.“[263] Der Teilbereich der Seriationsleistung, in dem Mengen nach ihrer Mächtigkeit geordnet werden, ist für die Zahlbegriffsentwicklung besonders relevant. Sortieren und Klassifizieren sind demnach elementare mathematische Tätigkeiten.

[258] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 50.
[259] Moog 2005 – Zahlen begreifen, S. 10f.
[260] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 47.
[261] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 35.
[262] Moog 2005 – Zahlen begreifen, S. 9.
[263] Ebd., S. 10.

Hierzu kann Musik wiederum zur Förderung eingesetzt werden, da man z. B. auch Klänge (etwa Fell-, Metall-, Holz- und Rasselklänge) vergleichen und sortieren und in Gruppen einordnen kann.[264] Akustisch dargestellte Mengen können ebenfalls bestimmt und geordnet werden, wenn beispielsweise Behälter mit bestimmten Gegenständen befüllt werden, dann durch Schütteln die größeren/kleineren Mengen bestimmt und zunehmend die tatsächlichen Mengen erhört werden sollen. Dazu würde sich das Ordnen von Filmdöschen anbieten, die mit unterschiedlich vielen gleichen Gegenständen (z. B. Erbsen) gefüllt sind.[265] Ebenso kommt hier die Stück-für-Stück-Zuordnung zum Tragen, die dem Kind die technische Möglichkeit zur Reihenfolgenbildung anhand der Anzahl von Gegenständen bietet. Dabei können jeweils zwei Mengen miteinander verglichen werden.

Eine „Zählfertigkeit" in Form des Aufsagens der Zahlwortreihe ist häufig die erste feststellbare und geförderte „Rechenleistung"; diese kann allerdings vollkommen unabhängig von der ordinalen Bedeutung (Bestimmung der Position der Zahl innerhalb des Zahlenraums) des Zahlworts automatisiert sein. Bedeutsam ist erst die Zuordnung des Zahlwortes zu dem betreffenden Zählobjekt, verbunden mit der Fertigkeit, eine Zahl im Zahlenraum richtig lokalisieren zu können. Für den Aufbau des Zahlenraums muss deutlich werden, dass mit jedem Weiterzählen um eine Zahl auch die repräsentierte Anzahl des Zahlwortes um eins größer wird. Dies erfordert die Integration von kardinalem (Zuordnung einer Mengenmächtigkeit zu einem bestimmten Zahlsymbol) und ordinalem Zahlaspekt. Die Einsicht in die Bedeutung der Zahlen ist die Voraussetzung für das Verständnis der Richtungen bei der Addition und Subtraktion. Im Zusammenhang mit der Bewältigung dieser Operationen ist es notwenig, die Zahlreihe in beide Richtungen und von beliebigen Startpunkten aus zu beherrschen.[266] Dazu zeigen Lieder, in denen aufwärts oder abwärts zählend in fantasievollen, spielerischen Kontexten Mengen vergrößert bzw. verkleinert werden, über längere Zeit hinweg einen hohen Motivationsgrad auf. Dabei wird sowohl das Zählen und spontane Erfassen von Mengen als auch die Freude am Singen gefördert. Die Kinder können die Handlungen der Lieder parallel zum Gesang spielen.[267]

[264] Metcalf, Harvey 2008 – Mathilde, die Mathe-Ratte, S. 37.
[265] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 48.
[266] Moog 2005 – Zahlen begreifen, S. 10.
[267] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 48.

Zu den grundlegenden Zielen des Anfangsunterrichts in Mathematik gehört die Entwicklung des Verständnisses für Rechenoperationen. Dazu gehören sowohl Vereinigen, Vermindern, Zerlegen und Ergänzen konkreten Materials als auch dessen symbolische Bearbeitung. Diese Operationen setzen Einsichten in die Struktur des Zahlenraumes voraus. Hier ist es nötig, sich schrittweise von der „Zählhandlung“ abzulösen.[268] Das Verständnis für das Hinzunehmen und Wegnehmen sowie für die dadurch entstehenden Veränderungen kann ebenso wie einfache Rechnungen musikalisch gestützt und gefördert werden. Auch hier finden Weglasslieder Verwendung, denn durch das Ersetzen von Wörtern durch Gesten und das anschließende Wiedereinfügen verdeutlichen sie das Wegnehmen und Wiederhinzufügen.[269]

Muster und Reihen sind ebenfalls ein zentrales Thema in der Grundschul-Mathematik. Muster kann man überall entdecken, nicht nur in Zebrastreifen, in einem Schal oder in der Tapete, sondern auch in der Natur (Spinnennetz, Blattanordnungen, ...) und in der Musik (Rhythmen, Liedformen, …).[270] Auch akustisch dargestellte Reihen können erkannt werden. Kinder bekommen einige Muster wie „X – – X – – X – –“ und andere in ähnlicher Darstellung vorgegeben und müssen diese den von der Lehrkraft gespielten Reihen zuordnen. (Für X und – können beliebige unterschiedliche Instrumente verwendet werden.) Kinder können selber kreativ werden, ihre eigenen Reihen entwerfen und anderen vorspielen.[271]

[268] Moog 2005 – Zahlen begreifen, S. 10f.
[269] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 50.
[270] Metcalf, Harvey 2008 – Mathilde, die Mathe-Ratte, S. 39.
[271] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 48.

4.2 Die Klasse 1a der VS Fischach

Die VS Fischach-Langenneufnach befindet sich in einer dörflichen Umgebung. Die Grundschule umfasst zwölf Klassen mit insgesamt 270 Schülern, davon werden in Fischach die Klassen 1 bis 4 jeweils zweizügig geführt, in der Außenstelle Langenneufnach einzügig. Nur ein sehr geringer Anteil der Schüler hat einen Migrationshintergrund (ca. 3 bis 4%). Alle Kinder der Klasse 1a sind wohnhaft in Fischach und können zu Fuß zur Schule kommen.

Als eine von sieben Schulen in Schwaben nimmt die Volksschule Fischach-Langenneufnach seit September 2004 am bundesweiten Programm SINUS-Transfer Grundschule teil. Acht Lehrerinnen beschäftigen sich seitdem intensiv mit der „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“, so die offizielle Zielsetzung des Projekts.

Mit Ausnahme eines Kindes besuchten alle Kinder der Klasse 1a den Kindergarten in Fischach. Kindergarten und Schule arbeiten sehr gut zusammen, so werden gegenseitige Hospitationen vorgenommen, die Lehrer besuchen die Vorschulkinder, die Erstklässler werden dann von den Erzieherinnen besucht und ein gemeinsamer Elternabend wird abgehalten. Das Material betreffend ist der Kindergarten sehr gut ausgestattet. Mit den künftigen Schulanfängern wird gesondert gearbeitet. Beispielsweise werden die Kinder mit dem Würzburger Trainingsprogramm „Hören, lauschen, lernen“ auf den Erwerb der Schriftsprache vorbereitet, sachkundliche Fragestellungen werden bearbeitet, Übungen zum Zählen werden vorgenommen, Flächenformen werden verglichen und geordnet usw. Das Mädchen, das als einziges eine andere schulvorbereitende Einrichtung besuchte, fiel mit sprachlichen Problemen, sehr geringem Wortschatz, motorischen Schwierigkeiten und sehr geringer Merkfähigkeit auf.

Insgesamt erscheinen die Kinder der Klasse 1a interessiert, motiviert und lernwillig. Sie sind mit Begeisterung und Freude bei der Sache und bringen auch Material von zu Hause mit.

Das Klassenzimmer ist groß, hell und freundlich gestaltet. Für den Beginn des ersten Schuljahres wurde die Sitzordnung so gewählt, dass zwölf Tische für je zwei Kinder in drei Reihen (Fenster-, Mittel- und Türreihe) stehen. Dabei ist im hinteren Teil des Klassenzimmers noch Platz für Freiarbeitsmaterial etc., vor der Tafel lässt sich ein Stuhlkreis bilden.

4.3 Unterrichtseinheit „Lagebeziehungen“

4.3.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards

Im Fachprofil Mathematik des Lehrplans für die bayerische Grundschule heißt es zur Geometrie: „Die Schüler verbessern die auf ihren Körper und ihren Handlungsraum bezogene räumliche Orientierung und erweitern ihre Raumvorstellung und ihr räumliches Denken.“[272] Das Thema Lagebeziehungen ist im Lehrplanpunkt 1.1.1 „Raumerfahrung und Raumvorstellung“ verankert. Zunächst gilt es, die Lagebeziehungen am eigenen Körper zu erfahren und zu erfassen. Die rechte und linke Körperhälfte soll unterschieden werden können. Dazu wird empfohlen, durch Wahrnehmungsspiele, Verse oder Lieder das Körperbewusstsein zu sensibilisieren. Die Schüler sollen außerdem die Lage von Gegenständen im Raum erfassen und beschreiben. Die Beziehungen von Gegenständen zum eigenen Körper und von Gegenständen zueinander sollen richtig erkannt und begrifflich korrekt benannt werden. Im Unterricht soll die Frage „Wer/was ist vor, hinter, rechts, links von mir?“ thematisiert werden, die Lage soll durch Sehen, Tasten, Hören festgestellt werden, in einem Gesamtbild sollen Teile wiedergefunden und ihre Lage beschrieben werden. Dabei ist die sichere Verwendung der Begriffe der räumlichen Lage (oben - unten/über - unter - auf, hinten - vorne/hinter - vor, links (von) - rechts (von), zwischen - neben) wichtig.[273]

Im Fachlehrplan Musikerziehung wird unter Punkt 1.3.1 „Instrumente erkunden“ gefordert, dass Kinder Klangeigenschaften, Aussehen und Bezeichnungen von Instrumenten aus ihrem Umfeld, unter anderem auch des Schulinstrumentariums (Glockenspiel, Xylofon, Metallofon, Trommel, Claves, Triangel) kennenlernen sollen.[274]

Bezogen auf die Bildungsstandards findet sich die Thematik als inhaltliche mathematische Kompetenz in Punkt 3.2 „Raum und Form“ wieder. Die Schüler sollen sich im Raum orientieren können, über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen und räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen.[275]

[272] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 35.
[273] Ebd., S. 99.
[274] Ebd., S. 149.
[275] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 10.

4.3.2 Ziele, Planung und Analyse

Diese Unterrichtseinheit verfolgt sowohl mathematische als auch musikalische und allgemeine Lernziele. Die mathematischen Ziele betreffend sollen die Schüler Lagebeziehungen am eigenen Körper und die Lage von Gegenständen im Raum erfahren, erfassen und beschreiben, dadurch auch ihre räumliche Orientierung verbessern und die Begriffe zur räumlichen Lage richtig und sicher verwenden. Darüber hinaus soll die auditive Wahrnehmung geschult, die Konzentrationsfähigkeit verbessert und die soziale Kompetenz gestärkt werden.

Auf musikalischer Ebene sollen die Kinder den Umgang mit Instrumenten erproben und dabei Klang, Aussehen und Bezeichnung der Instrumente kennenlernen.

Die Unterrichtseinheit ist auf eine Doppelstunde, d. h. auf 90 Minuten ausgelegt.

Artikulation	Arbeitsform/ Methode	Unterrichtsgeschehen	Medien/ Material
Hinführung	*An den Plätzen*	L: Kennst du schon den Schüttelhit? - Falls ein Kind den Schüttelhit kennt, lässt L dieses erklären. - Durchführen des Schüttelhits	
Erarbeitung	Stummer Impuls	L schlägt die Tafel auf, auf der Innenfläche ist ein 3x3-Setzkasten zu sehen: Ss: Kästchen, Viereck, Setzkasten, … L: Das ist ein Setzkasten. In einen Setzkasten kann man Dinge einsortieren, z. B. kleine Figuren, Spielsachen, etc. Auch wir wollen jetzt Sachen richtig einsortieren! Das Auto gehört nach rechts oben! S darf das Kärtchen mit dem Auto an der Tafel in das richtige Kästchen hängen. L: Apfel links in der Mitte, Katze, Ball,… Ss ordnen Gegenstände ein.	Tafel mehrere Bildkarten, Magnete

	EA	- Rätsel rückwärts: L hängt z. B. Apfel in den leeren Setzkasten. S: Der Apfel hängt rechts in der Mitte. L teilt Blätter und Schachteln aus. Ss sollen Gegenstände nach Anweisung der L richtig in den Setzkasten legen.	24 x Setzkasten DIN-A4, 24 x Schachtel mit kleinen Gegenständen
Sicherung	Spiel	„Eckenkonzert“	16 x Rhythmusinstrumente, Augenbinden

Um die Kinder für die Thematik zu motivieren und bereits vorneweg die verschiedenen Begriffe der räumlichen Lage bewusst und am Körper erfahrbar zu machen, wird zum Einstieg der Schüttelhit[276] gerappt. Die von der Quelle etwas abgeänderte Version ist im Anhang unter Punkt a) zu finden.
Durch die gemeinsame Arbeit am 3x3-Setzkasten soll die korrekte Verwendung der Begriffe „rechts, links, oben, unten, in der Mitte“ gelernt werden. Eventuell besitzen einige Kinder selber einen Setzkasten, um Sammelgegenstände wie Figuren aus dem Überraschungsei etc. darin aufzubewahren. Zumindest bringt jedes Kind die Erfahrung mit, seine Spielsachen an den jeweils richtigen Platz im Schrank/Regal/... zu räumen. Deshalb setzt die Aufgabe, Dinge in einen Setzkasten einzusortieren und wieder zu finden, an der Lebenswelt der Kinder an. Die Lagebeschreibung der einzelnen Gegenstände im Setzkasten soll die Begriffe zur räumlichen Lage festigen, sodass die Kinder gut für die Einzelarbeit vorbereitet sind. Dazu bekommen alle Schüler ein DIN-A4-Papier mit aufkopiertem Setzkas-

[276] Brack, Gremminger 2009 – Bewegung und Sprache, S. 25.

ten und eine Schachtel mit verschiedenen kleinen Gegenständen (Wäscheklammer, Streichholzschachtel, Feder, Büroklammer, Holzwürfel, Zahnstocher, Nuss). Die Kinder sollen die Anweisungen richtig befolgen und den jeweils von der Lehrkraft genannten Gegenstand an die richtige Stelle im Setzkasten legen. Die Lehrkraft kann bei dieser Übung beobachten, wer noch Schwierigkeiten mit machen Begrifflichkeiten hat und wer die Gegenstände schon schnell und sicher an den richtigen Platz legen kann.

Nachdem die räumliche Lage nun durch Bewegung und visuell erfahrbar wurde, soll mit dem Eckenkonzert[277] der auditive Kanal angesprochen werden. Die Lehrkraft verteilt an 16 Kinder Instrumente, z. B. Rasseln, Triangeln, Klangstäbe usw. Dabei werden der Name und die Spielweise eines jeden Instruments erklärt, sodass die die Kinder den richtigen Umgang mit einzelnen Elementen aus dem Orff-Instrumentarium kennenlernen. Die Schüler werden so in die vier Ecken des Klassenzimmers verteilt, dass in jeder Ecke vier Kinder mit unterschiedlichen Instrumenten stehen. Vier Ss ohne Instrument stellen sich in die Mitte des Klassenzimmers mit Blick zur Tafel und bekommen die Augen verbunden. Beim Einsatz der Instrumente muss auf einen angemessenen Lautstärkepegel und Disziplin geachtet werden. Damit sich die Kinder um eine geregelte Durchführung bemühen und sich selbst für einen reibungslosen und fairen Ablauf verantwortlich fühlen, wird bei jedem Spieldurchgang an eine Vierergruppe die Rolle der Schiedsrichter vergeben. Damit sind an alle 24 Kinder die Aufgaben verteilt. Auf ein Handzeichen der Lehrerin spielen die Schüler in einer Ecke ihre Instrumente, die Schüler in der Mitte hören nun, woher der Klang kommt, zeigen in die Richtung und nennen dann die richtige Lagebeziehung. Im Anschluss werden die Rollen getauscht, sodass jedes Kind als Hörer und als Spieler aktiv wird. Durch die Aufgabe, die Richtung zu erkennen, aus welcher der Klang kommt, wird die auditive Wahrnehmungsfähigkeit und die Konzentrationsfähigkeit gefordert und gefördert. Auch das Reaktionsvermögen der Instrumentenkinder, die auf das Zeichen der Lehrkraft einsetzen müssen, wird geschult.

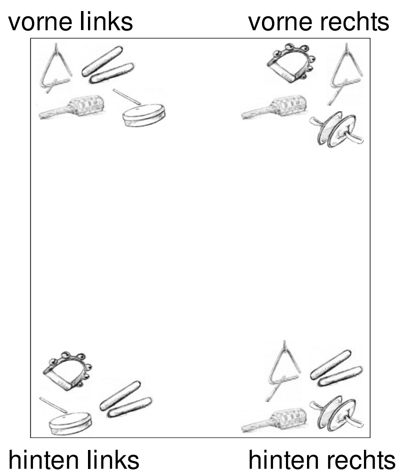


Abbildung 18: *Anordnung zum Eckenkonzert*

[277] Gierlinger (Hg.) 2001b – Zahlenzauber 1. Mathematikbuch, S. 21.

4.3.3 Reflexion

Die Unterrichtseinheit wurde in den ersten beiden Stunden am Freitag, den 25.09.09 durchgeführt.

Den Schüttelhit kannten die Kinder bereits. Die wichtigen Begriffe „oben, unten, rechts, links“ wurden wiederholt und nach einem ersten Versuch hatten die Kinder sichtlich Spaß. Der Vorschlag eines Mädchens, bei „oben“ zu hüpfen und bei „unten“ in die Hocke zu gehen, wurde aufgegriffen und verstärkte die Raumwahrnehmung. Zuletzt wurde bei „links“ nach links gehüpft, bei „rechts“ auf die rechte Seite. Die Müdigkeit, die bei vielen Kindern zu Beginn des Tages zu bemerken war, konnte durch die Bewegung überwunden werden.

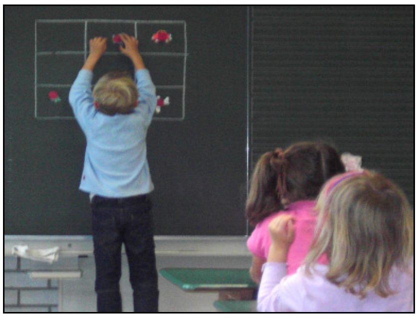


Abbildung 19: *Setzkasten-Übung an der Tafel*

Die Setzkasten-Übung an der Tafel meisterten die Kinder gut. Auf Rückfragen, warum das Bild gerade an jenen Platz gehört, wurden logische Erklärungen geliefert. („Das Auto von vorher ist rechts oben, wenn das Flugzeug unten rechts hin muss, dann weiß man ja die Spalte schon!“) Durch die gemeinsamen Versuche und Erklärungen waren die Kinder gut für die Einzelarbeit vorbereitet. Etwaige Unsicherheiten wurden von den Kindern durch Vergleichen mit dem Banknachbarn beseitigt.

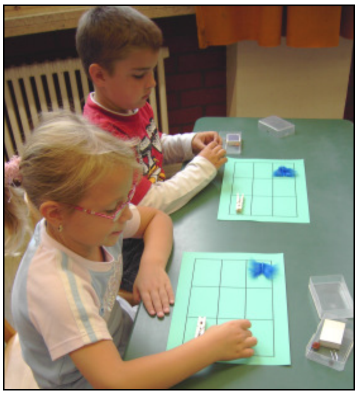


Abbildung 20: *Setzkasten-spiel in Einzelarbeit*

Abbildung 21: *Spielen mit Instrumenten beim Eckenkonzert*

Beim Austeilen der Instrumente waren von einigen Name und Spielweise schon bekannt, von manchen (z. B. Klanghölzer) wurde dies noch genauer erklärt. Die Kinder waren eifrig bei der Sache und konnten ihre Instrumente kaum ruhig halten. Nachdem jedoch klare Regeln aufgestellt wurden und die Kinder erklärt bekamen, dass das Spiel sonst nicht funktioniert, bemühten sie sich.

Abbildung 22: *Kinder beim Eckenkonzert*

Die Kinder waren sehr motiviert und hatten Spaß, auch die Aufgabe des Schiedsrichters wurde sehr ernst genommen. Das Wahrnehmen der Klänge gelang den „Hör-Kindern“ hervorragend, die Angabe der Richtung wurde immer sicherer.

Bei einer nächsten Durchführung des Eckenkonzerts könnte man den Schwierigkeitsgrad steigern, indem man die Kinder mit Instrument auch an die Seitenmitten verteilt oder zwei Gruppen parallel spielen lässt.

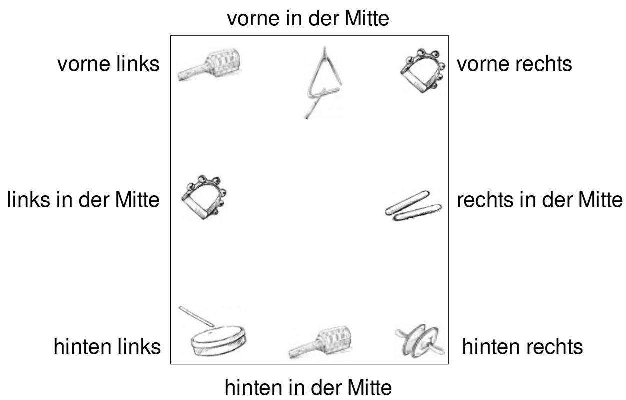


Abbildung 23: *Anordnung zum Eckenkonzert in erweiterter Version*

4.4 Unterrichtseinheit „Zahlen gibt es überall“

4.4.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards

In den Grundlagen und Leitlinien des Lehrplans wird zur grundlegenden Bildung gezählt, sich zunehmend eigenständig die umgebende Welt erschließen, erklären, sich in ihr zurechtfinden und sie mitgestalten zu können. Als Beitrag zur Bildung der gesamten Schülerpersönlichkeit soll die Schule die kindliche Wahrnehmungsfähigkeit, die musischen Kräfte sowie die Kreativität fördern und die Grundlagen für ästhetisches Empfinden schaffen.[278]
Im Fachlehrplan Mathematik wird die Thematik ebenfalls aufgegriffen. Zu erkennen, dass Zahlen ein Bestandteil des menschlichen Lebens sind und ein Mittel, die Welt quantitativ zu erschließen, gehört zum Punkt 1.2 „Zahlen“. Die Lebenswelt soll von den Schülern im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkundet und untersucht werden. Zahlen aus der Lebenswelt sollen entdeckt, gedeutet und aufgeschrieben werden. Dabei geht es um Nummern (z. B. Haus-, Auto- und Telefonnummern), Maßzahlen (Geldbeträge, Massen, usw.) und darum, Zahlreihen und Folgen zu entdecken, wie z. B. auf dem Metermaß, auf der PC-Tastatur oder auf Kalendern. An dieser Stelle wird auch auf die Verbindung zur Musikerziehung in Form von Abzählversen und Zahlenliedern hingewiesen, wie sie im Fachlehrplan Musikerziehung in Punkt 1.1.1 erscheinen.[279] Demzufolge sollen im Unterricht gemeinsam altersgemäße und musikalisch ansprechende Lieder zu unterschiedlichen Themen gesungen werden.[280]
Da die Bildungsstandards Ziele für das Ende der Primarstufe, also die 4. Jahrgangsstufe, angeben, findet sich dieses Thema dort nur ansatzweise im Punkt „Zahlen und Operationen“, wo es unter anderem um Zahldarstellungen geht.[281]

4.4.2 Ziele, Planung und Analyse

In mathematischer Hinsicht sollen die Schüler Zahlen aus der Lebenswelt entdecken und die Funktion der Zahlen kennenlernen, um so auch selbstständig die Zahlen aus ihrer Umwelt deuten und sich zurechtfinden zu können.

[278] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 8.
[279] Ebd., S. 100.
[280] Ebd., S. 147.
[281] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 9.

Was die Musikerziehung angeht, sollen die Kinder das Lied „Überall sind Zahlen“ erlernen. Auch ein positives Lernklima soll explizites Ziel dieser Unterrichtseinheit sein.

Die Unterrichtseinheit ist auf eine Doppelstunde ausgelegt.

Artikulation	Arbeitsform/ Methode	Unterrichtsgeschehen	Medien/ Material
Hinführung		Ss bringen von zu Hause mitgebrachte Gegenstände mit in den Stuhlkreis.	
	Stuhlkreis, stummer Impuls	L legt Bilder (Auto mit Autonummer, Hausnummernschild, Sporttrikot mit Zahl) in die Mitte. Ss: Auf allen drei Dingen sind Zahlen geschrieben.	Bilder
	L-Ss-Gespräch	L: Wozu sind denn die Zahlen gut? Braucht man die denn unbedingt? Ss: Hausnummer für den Postboten, … L: Zahlen braucht man ganz oft! Wo überall Zahlen sind, wollen wir uns gemeinsam anschauen. Du darfst jetzt, wenn du an der Reihe bist, deine mitgebrachten Dinge vorstellen.	
Erarbeitung		Ss zeigen, wo sie überall Zahlen gefunden haben, legen die Gegenstände in die Kreismitte und erklären, wozu die Zahlen gebraucht werden. (Ss rufen sich gegenseitig auf.)	
	Arbeitsauftrag	L: Wenn du nachher wieder auf deinem Platz sitzt, bekommst du dein Zahlenheft und einen Papierstreifen mit der Überschrift. S liest Überschrift vor: „Das weiß ich schon über Zahlen und Rechnungen!“	Hefte, Überschriftstreifen

	An den Plätzen, EA	L: Du klebst die Überschrift auf die erste Seite ganz oben auf und darfst darunter malen, wo man überall Zahlen entdecken kann und aufschreiben, was du schon mit Zahlen weißt oder kannst. (einzelne Zahlen, Rechnungen, …) Ss arbeiten an der Weißblattaufgabe.	
Sicherung	*Kinositz*	Bilder aus der Hinführung werden an die Tafel gehängt. L: Zahlen gibt es überall. Tragen wir schnell noch einmal zusammen, was wir gefunden haben! Ss: Hausnr., Preise, … L singt Lied „Zahlen gibt es überall“ vor. Ss versuchen die Bilder zu ordnen. Dann singen alle gemeinsam das Lied.	Bilder, Magnete, Tafel, Gitarre

Als Hausaufgabe bekommen die Kinder im Vorfeld den Auftrag, sich umzusehen, wo überall Zahlen zu finden sind und zwei bis drei Gegenstände mit Zahlen in die Schule mitzubringen. Dadurch sollen sie einen Blick für Zahlen in der Umwelt entwickeln.

Als Einstieg in das Thema werden drei Bilder (Auto mit Autonummer, Hausnummernschild, Sporttrikot mit Zahl) als stummer Impuls in die Mitte des Stuhlkreises gelegt. Die Kinder sollen herausfinden, dass auf jedem der drei Bilder Zahlen zu sehen sind. Außerdem wird besprochen, wozu die Zahlen auf den Gegenständen gut sind, nämlich in diesem Fall zur Codierung bzw. zur Angabe der Position innerhalb einer Reihe.

Da die Schüler etwas von zu Hause aus ihrer Lebenswelt mitbringen dürfen, können sie sich mit dem Thema identifizieren. Jedes Kind darf seine mitgebrachten Gegenstände in die Kreismitte legen und die Zahlen deuten bzw. ihre Funktion erklären. Alternativ wird Letzteres im Klassenverband besprochen. Durch die Vielfalt der mitgebrachten Gegenstände soll auch die Vielfalt der Funktion von Zahlen deutlich werden.

Im Anschluss dürfen die Kinder die erste Seite im Zahlenheft gestalten, indem sie notieren oder malen, was sie schon über Zahlen wissen, wo Zahlen vorkommen, welche Zahlen sie schon kennen oder wie man mit ihnen rechnet. Dieser sogenannte „Weißblatttest“ dient auch der Ermittlung des individuellen Vorwissens der Kinder und kann für den weiteren Mathematikunterricht als Grundlage für die Differenzierung verwendet werden.
Um den Bogen zum Anfang der Unterrichtseinheit zu spannen und die Erkenntnisse zu sichern, wird kurz von den Schülern zusammengetragen, wo überall Zahlen zu finden sind. Dann bekommen die Bilder aus der Hinführung, die nun mit Magneten an der Tafel hängen, nochmals Bedeutung. Die Lehrkraft singt das Lied „Zahlen gibt es überall“[282] mit Gitarrenbegleitung vor; die Schüler ordnen die Bilder der Reihenfolge nach, wie sie im Lied zu hören sind. Dies wird vorher als Auftrag formuliert. So konzentrieren sie sich auf den Liedtext und prägen sich diesen rasch ein. Schließlich wird das Lied gemeinsam gesungen, die Bilder an der Tafel können als Gedächtnisstütze dienen.

4.4.3 Reflexion

Die Unterrichtseinheit wurde am Montag, den 28.09.09 in den ersten beiden Stunden durchgeführt.

Abbildung 24: *Zahlen in der Umwelt*

Die Kinder hatten am Wochenende nach Zahlen in ihrer Umwelt Ausschau gehalten und waren somit bereits sensibilisiert, weshalb die Hinführung rasch gelang. Sie brachten viele unterschiedliche Gegenstände mit, sodass ersichtlich wurde, wie wichtig Zahlen in unserer Umwelt für uns sind. Der „Weißblatttest“ zeigte den unterschiedlichen Wissensstand der Kinder auf. Wussten manche Kinder erst ansatzweise etwas mit Zahlen anzufangen und konnten keine Zahl korrekt schreiben, konnten einige schon Additions- und Subtraktionsaufgaben über den Zahlenraum bis 1000 hinaus lösen und Zusammen-

[282] Gierlinger (Hg.) 2001a – Zahlenzauber 1. Lehrermaterialien, S. 235.

hänge herstellen. Ausgewählte Beispiele, die die Heterogenität gut sichtbar werden lassen, sind im Anhang unter Punkt b) zu finden.

Das Lied bildete einen gelungenen Abschluss der Stunde. Die Kinder hatten sich nun intensiv mit den Zahlen in ihrer Umwelt auseinandergesetzt und konnten ihre gewonnene Erkenntnis „Zahlen gibt es überall" verinnerlichen und festigen. Durch die Ordnungs-Aufgabe beim Zuhören erfassten sie den Text sehr schnell. Das Singen machte den Kindern Spaß, schuf eine gute Atmosphäre und vermittelte Freude an der Welt der Zahlen.

4.5 Unterrichtseinheit zur Zahl 2

4.5.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards

Im Fachlehrplan Mathematik des Lehrplans findet sich unter Punkt 1.1.1 „Raumerfahrung und Raumvorstellung“, dass die Schüler Lagebeziehungen am eigenen Körper erfahren und erfassen sollen. Die rechte und linke Körperhälfte (Hände, Füße, andere Körperteile) sollen unterschieden werden. Durch Wahrnehmungsspiele, Verse oder Lieder soll das Körperbewusstsein sensibilisiert werden.[283] Im Fachprofil Mathematik heißt es unter „Zahlen und Rechnen“: „Als Grundlage für das Rechnen erwerben die Schüler eine nach verschiedenen Aspekten entfaltete, lebendige Zahlvorstellung und ein gesichertes Wissen über die natürlichen Zahlen sowie deren Darstellung in Worten und schriftlichen Symbolen nach dem dekadischen Stellenwertsystem.“[284] Laut Punkt 1.2.1 soll die Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkundet und untersucht werden. Außerdem sollen die Ziffern von 0 bis 9 lesen und schreiben gelernt werden. In 1.2.2 „Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen“ wird gefordert, Anzahlen zu schätzen und durch Zählen zu erfassen, Anzahlen zu ertasten, zu erhören etc. Anzahlen sollen konkret, bildlich und symbolisch dargestellt werden. Dazu können Mengen einer bestimmten Anzahl mit Gegenständen, gelegt und Anzahlen zeichnerisch, durch Klatschen, Klopfen, Hüpfen usw. dargestellt werden. Darüber hinaus sollen Zahlzeichen und Zahlwörter Mengen zugeordnet werden und umgekehrt.[285]

In den Bildungsstandards lässt sich das Thema bei Punkt 3.1 verorten, wo es unter anderem um Zahldarstellungen geht.[286] Da aber in den Bildungsstandards Ziele für die vierte Jahrgangsstufe genannt werden, gehen basale Fähigkeiten, die Zahlenvorstellung für „2“ und die richtige Schreibweise nicht explizit in die geforderten Kompetenzen ein.

Für die Musikerziehung wird im Lehrplan gefordert, dass gemeinsam altersgemäße und musikalisch ansprechende Lieder zu unterschiedlichen Themen gesungen werden. Außerdem sollen laut Lehrplanpunkt 1.1.2 „Mit Instrumenten spielen“ Lieder mit Körperinstrumenten („Bodypercussion“) rhythmisch begleitet werden.[287]

---

[283] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 100.
[284] Ebd., S. 35.
[285] Ebd., S. 101.
[286] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 10.
[287] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 147f.

4.5.2 Ziele, Planung und Analyse

Was die Mathematik betrifft, sollen die Schüler die Zahl 2 und ihre Bedeutung in der Umwelt erfassen und die Ziffer korrekt schreiben können. Auch das Verständnis der Invarianz der Menge wird erzielt. Außerdem soll das Körperbewusstsein sensibilisiert werden. Dabei sollen die Kinder die Symmetrie ihres Körpers erfahren, die beiden Körperhälften unterscheiden und sich bewusst werden, dass einige Körperteile zweimal vorhanden sind. Darüber hinaus soll die auditive Wahrnehmung geschult werden.

In musikalischer Hinsicht ist das Erlernen des Liedes „Zwei davon“ mit Bewegungen und Bodypercussion ein Lernziel.

Die Unterrichtseinheit ist auf eine Doppelstunde ausgelegt.

Artikulation	Arbeitsform/ Methode	Unterrichtsgeschehen	Medien/ Material
Hinführung	*Stuhlkreis* Stummer Impuls	L legt verschiedene Gegenstände in die Mitte des Kreises, zu denen jeweils der zweite zum Paar fehlt. (Handschuh, Socke, Tischtennisschläger, Memorykarte, Klangstab, Ohrring) Ss: Man braucht zwei Socken, weil man zwei Füße hat; alleine kann man nicht Tischtennis spielen; beim Memory muss man zwei zusammen finden … Ss dürfen bei der passenden Erklärung jeweils den zweiten Teil dazu legen.	Gegenstände (jeweils Teile eines Paars)
Erarbeitung	 Lied *An den Plätzen*	L: Von welchen Dingen braucht man denn immer zwei? Ss: Schuhe, Hände, Ohren, … Lied „Zwei davon“ L öffnet Tafel: Zahl „2“ L: Wie sieht die „2“ aus? SS: oben rund, unten links eine Ecke, …	 Tafelbild

		Schreibübungen: Ss spuren die „2“ an der Tafel nach, schreiben die „2“ in die Luft, auf den Rücken des Banknachbars, formen die „2“ mit Knetmasse, spuren auf AB Zahl in verschiedenen Grö- ßen nach und schreiben die „2“ selber.	Knet- masse, AB
	Sitzkreis Spiel	L erklärt Spiel Durchführung „Geräusche-Memory“	Dosen- paare
Sicherung		Lied „Zwei davon“ wird wiederholt	

Für die guten Leser wurde im Vorfeld in der Freiarbeit ein Gedicht zur Zahl 1[288] bereit gelegt. Dieses sensibilisierte die Kinder schon für Zahlen am eigenen Körper und dafür, dass man manche Körperteile nur einmal hat. Um das Gedicht allen zugänglich zu machen, durften es die Kinder, die schon lesen können, den anderen Kindern vorlesen.

Um die Schüler zum Thema hinzuführen, sollen sie durch den stummen Impuls (Teile eines Paares) die Bedeutung der Zahl 2 erkennen. Die Erklärung, warum man jeweils zu einem Gegenstand aus der Stuhlkreismitte noch den zweiten benötigt, soll beim Ergänzen der Paare gegeben werden. Auch die Invarianz der Menge soll deutlich werden: Zwei große Handschuhe stellen die Menge 2 dar, aber auch zwei kleine Ohrringe.

Viele Gebrauchsgegenstände sind aufgrund der Symmetrie des eigenen Körpers erst als Paar funktionstüchtig. Diese Erkenntnis liefert den Einstieg ins Lied „Zwei davon“[289]. Die Kinder überlegen sich ein doppelt vorhandenes Körperteil und seine Funktion, dichten so ihre eigenen Strophen und dürfen kreativ werden (z. B. „Zwei Ohren hab ich, die sind zum hören.“ oder „Zwei Füße hab ich, die sind zum gehen.“). Dazu wird auch eine passende Bewegung ausgedacht. Beim Singen wird die Zahl 2 wird am Körper erfahrbar gemacht und zusätzlich wird das Körperbewusstsein gestärkt. Durch die begleitenden Bewegungen und das Bodypercussion-Element wird die Konzentration geschult. Nicht zuletzt macht das Singen den Kindern Spaß und hat einen motivierenden Effekt.

[288] Metcalf, Röckener 2005 – Zahlen, bitte, S. 2.
[289] Metcalf, Harvey 2008 – Mathilde, die Mathe-Ratte, S. 12f.

Durch die Schreibübungen zur Zahl 2 können die Schüler die Form der Ziffer wahrnehmen und am eigenen Körper spüren. Gemeinsam werden die Besonderheiten der Ziffer, wie z. B. die Ecke links unten, an der Tafel betrachtet und die „2“ an der Tafel nachgespurt. Das Zeichnen einer überdimensional großen „2“ in die Luft, bei dem sich die Kinder weit nach oben strecken und schließlich auch ganz klein machen sollen, soll ihnen die Form körperlich wahrnehmen lassen und daneben auch dem kindlichen Bewegungsdrang entgegen kommen. Bekommt man die Zahl auf den Rücken geschrieben, kann auch ein innerliches Bild der Ziffer entstehen. Das Formen der „2“ aus Knetmasse bietet sich besonders an, da zum einen die Form der „Vorlage“ an der Tafel genau betrachtet werden muss und zum anderen eventuelle Fehler an der selbst geformten Zahl leicht korrigiert werden können. Schließlich soll durch das Bearbeiten des Arbeitsblattes das feinmotorische Schreiben und der konkrete Schreibablauf geübt werden. Insgesamt wird die Zahl also in der Unterrichtseinheit sowohl konkret als auch symbolisch dargestellt und so die Intermodalität gefördert. Das Arbeitsblatt wird in das Zahlenheft der Kinder eingeklebt.

Für das Spiel „Schüttelmemory“ werden von der Lehrkraft in der Vorbereitung je zwei Filmdöschen mit dem gleichen Inhalt befüllt. Nach den bekannten Regeln für Memory gilt es nun, die Döschen durch Schütteln am Klang zu unterscheiden und Paare herauszufinden. Das Spiel soll abschließend ein weiteres Mal die Bedeutung der Zahl 2 als „Paar“ betonen, die Zahl erlebbar werden lassen und aufgrund der vielen teilweise sehr ähnlichen Geräusche genaues Hinhören und damit auch Konzentration erfordern und fördern.

Als Hausaufgabe sollen die Kinder in Zeitungen, Zeitschriften, Prospekten etc. Bilder zur Zahl „2“ oder gedruckte Ziffern suchen, ausschneiden und damit die zweite Hälfte der Doppelseite für die „2“ im Zahlenheft gestalten.

4.5.3 Reflexion

Die Unterrichtseinheit wurde am Freitag, den 02.10.09 in den ersten beiden Stunden durchgeführt.

In der Hinführung wurde den Kindern bewusst, dass man einige Dinge zweimal benötigt. Die Gründe dafür wurden genannt: Man braucht zwei Handschuhe, weil man zwei Hände hat. Man braucht zwei Tischtennisschläger, weil zwei Spieler miteinander spielen. Auch der Begriff „ein Paar“ wurde deutlich.

Diese Überlegungen wurden weitergeführt: Zum Lied „Zwei davon“ durften sich die Kinder Strophen überlegen, indem sie ein doppelt vorhandenes Körperteil und seine Funktion nannten. Hier zeigten sich die Kinder sehr einfallsreich und kreativ und so wurden einige Strophen gemeinsam gesungen: Mit Händen klatschen, mit Füßen gehen, die Beine baumeln lassen, mit Augen sehen, mit Wimpern blinzeln, mit Augenbrauen zucken, mit Schultern kreisen, die Ellenbogen beugen etc.

Abbildung 25: *Kinder beim Singen des Liedes „Zwei davon“*

Nach dem Beschreiben der „2“ an der Tafel, dem Nachspuren, in die Luft und auf den Rücken schreiben musste die große „2“ an der Tafel noch einmal genau ins Auge gefasst werden, damit sie mit Knetmasse richtig geformt werden konnte. An dieser Stelle bemerkten viele Kinder den Klappfehler (d. h. die Ziffer ist spiegelverkehrt) an ihrer geformten Zahl. Durch das Kneten hatten die Kinder die Möglichkeit, die Form der „2“ dreidimensional wahrzunehmen und wenn nötig nachträglich umzuformen und nachzubessern.

Abbildung 26: *Schüttelmemory*

Das Schüttelmemory verdeutlichte den Kindern nicht nur die Bedeutung der Zahl 2 noch einmal, sondern schulte auch die auditive Wahrnehmung. Dadurch, dass sich zwei Paare im Klang sehr ähnlich waren, musste sehr genau hingehört werden. Da die Kinder nur selten selbst zum Schütteln an die Reihe kamen, sie aber Spaß daran hatten und das Material sich für die Freiarbeit anbietet, konnte es im Klassenzimmer bleiben und auf Weiteres selbstständig von den Kindern verwendet werden.

Einige Arbeitsergebnisse der Hausaufgabe sind im Anhang Punkt c) zu finden.

4.6 Unterrichtseinheit zur Zahl 3

4.6.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards

Im Fachprofil Mathematik heißt es unter „Zahlen und Rechnen“: „Als Grundlage für das Rechnen erwerben die Schüler eine nach verschiedenen Aspekten entfaltete, lebendige Zahlvorstellung und ein gesichertes Wissen über die natürlichen Zahlen sowie deren Darstellung in Worten und schriftlichen Symbolen nach dem dekadischen Stellenwertsystem.“[290] Dem Fachlehrplan Mathematik zufolge soll die Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen erkundet und untersucht werden. Die Ziffern von 0 bis 9 sollen lesen und schreiben gelernt werden. Anzahlen durch Zählen zu erfassen und Ziffern von 0 bis 9 zu lesen und zu schreiben ist im Lehrplanpunkt 1.2.2 „Zahlen bis 20 erfassen und auf verschiedene Weise darstellen“ festgeschrieben. Außerdem wird im Punkt 1.1.2 Flächenformen gefordert, Flächenformen zu untersuchen, zu beschreiben, zu benennen und z. B. durch Falten herzustellen.[291]

Laut Bildungsstandards sollen geometrische Figuren erkannt und dargestellt werden. Darunter fällt auch das Herstellen (z. B. Falten) und Untersuchen von eigenen Modellen. Ebenso sollen den Figuren Fachbegriffe zugeordnet werden. [292]

Dem Lehrplanpunkt 1.1.1 der Musikerziehung „Singen und sprechen“ zufolge sollen im Unterricht gemeinsam altersgemäße und musikalisch ansprechende Lieder zu unterschiedlichen Themen gesungen werden. Außerdem wird Bewegung zur Musik als wichtiger Punkt genannt.[293]

4.6.2 Ziele, Planung und Analyse

In einer Doppelstunde sollen die Schüler die Zahl 3 und ihre Bedeutung erfassen. Ein wichtiges Lernziel der Unterrichtseinheit ist die korrekte Schreibweise der Ziffer. Wiederum wird das Verständnis der Invarianz der Menge angestrebt. Darüber hinaus sollen die Kinder die Eigenschaften eines Dreiecks kennenlernen.

[290] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 35.
[291] Ebd., S. 100f.
[292] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 10.
[293] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 147ff.

Neben diesen mathematischen Lernzielen sind die Schulung der auditiven Wahrnehmung und der Konzentrationsfähigkeit und das genaue Ausführen konkreter Arbeitsanweisungen explizite Ziele.
Aus musikalischer Sicht soll ein weiteres Lied einschließlich der passenden Bewegung ins Repertoire der Kinder aufgenommen werden.

Artikulation	Arbeitsform/ Methode	Unterrichtsgeschehen	Medien/ Material
Hinführung	*An den Plätzen* Stummer Impuls	Bild zur Zahl „3“ Ss: viele Sachen dreimal, 3er im Bild Ss tragen dreifach zu sehende Dinge zusammen.	Farbfolie, OHP
Erarbeitung	L-Ss-Gespräch Übungen Stummer Impuls *Stuhlkreis*	L öffnet Tafel: groß aufgeschriebene Zahl „3“ Wie sieht die „3“ aus? Schreibübungen: Ss spuren die „3“ an der Tafel nach, schreiben die „3“ in die Luft, auf den Rücken des Banknachbars, formen die „3“ mit Knetmasse, spuren auf AB Zahl in verschiedenen Größen nach und schreiben die „3“ selber. L legt Papierhut in die Mitte. Ss: Hut, drei Ecken, kann man basteln, … L: Kennt jemand ein Lied, in dem ein solcher Hut vorkommt? Ss: Mein Hut, der hat drei Ecken Das Lied „Mein Hut, der hat drei Ecken“ wird gemeinsam gesungen. → Lied als Weglasslied singen (drei, Ecken, Hut)	Tafel Knetmasse, Papier, Wachsmalkreiden Dreieckshut
Sicherung	*An den Plätzen*	Dreieckshut basteln	Zeitungspapier

Um die Schüler für die Zahl „3“ zu sensibilisieren, wird den Kindern mit dem Overheadprojektor ein Bild[294] gezeigt, auf dem viele Dinge dreifach zu sehen sind und die Zahl 3 oft vorkommt. Sie dürfen der Klasse ihre Entdeckungen mitteilen.
Die Schreibübungen sind adäquat zu den Übungen zur Zahl „2“ vorgesehen, da zum einen die gleichen Ziele verfolgt werden und die Kinder zum anderen schon mit der Art und Weise zu üben vertraut sind. Das Arbeitsblatt wird wiederum ins Zahlenheft eingeklebt.
Ein Dreieckshut aus Zeitungspapier soll bei den Kindern in Zusammenhang mit der Zahl „3“ gebracht werden und außerdem zum Lied „Mein Hut, der hat drei Ecken“[295] hinführen. Das Lied wird in unterschiedlichen Geschwindigkeiten gesungen und dann als „Weglasslied“ eingeübt. Dazu werden die Worte „Hut“, „drei“ und „Ecken“ durch Bewegungen ersetzt: Der Hut wird mit Händen als Dreieck über dem Kopf dargestellt, die Zahl drei mit drei Fingern und die Ecken durch Zeigen auf den angewinkelten Ellenbogen. Zunächst wird nur jeweils ein Wort weglassen und mit Bewegung ersetzen. So werden nach und nach alle Bewegungen eingeführt. Sind alle Bewegungen bekannt, kann auf Schülerwunsch ein bestimmtes Wort weglassen und schließlich auch zwei oder alle drei Wörter mit Bewegung ersetzt werden.
Zum Abschluss soll jedes Kind beim Basteln des Dreieckshutes die Faltanweisungen befolgen und die Eigenschaften eines Dreiecks erfassen.
In der darauffolgenden Mathematikstunde wird die zweite Hälfte der Doppelseite zur Zahl „3“ im Zahlenheft gestaltet.

4.6.3 Reflexion

Die Unterrichtseinheit wurde am Freitag, den 09.10.09 in den ersten beiden Stunden durchgeführt.
Die Kinder stellten sofort fest, dass auf dem Bild viele Dreien und dreifach vorhandene Dinge zu sehen sind. Sie betrachteten es bis ins Detail und waren ehrgeizig, immer weitere Entdeckungen zu machen. Dabei wurde auch schon das Dreieck als geometrische Form thematisiert, die als Ohrringe der Hexe zu sehen sind. Die „3“ in die Luft zu schreiben war unter anderem einen eine gute Bewegungsübung nach der bisher sitzenden Tätigkeit. Um eine große Drei zu schreiben, sollten sich die Kinder erst ganz weit nach oben strecken und die Zahl dann bis an den Boden

[294] Metcalf, Röckener 2005 – Zahlen, bitte, S. 7.
[295] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 30.

reichen lassen. Beim Kneten war es den Kindern wieder möglich, die Zahl durch genaues Beobachten, Formen, Vergleichen und nachträgliches Korrigieren so normgetreu wie möglich auszuarbeiten. Beim Nachspuren mussten manche Kinder auf die geforderte Genauigkeit und Sorgfältigkeit hingewiesen werden.

Abbildung 27: *Kneten der Zahl 3*

Mit dem Papierhut und einigen Schüleräußerungen dazu („Das ist ein Hut.“, „Den kann man aus Zeitung falten.“, „Der hat drei Ecken.“) assoziierten einzelne Kinder sogleich das Lied „Mein Hut, der hat drei Ecken“, sodass die Überleitung fließend gelang. Ein Mädchen traute sich, den Anfang des Liedes vorzusingen, sodass die Kinder, die es ebenfalls schon kannten, gleich mit einsteigen konnten. Die Kinder hatten Freude daran, das Lied einmal langsam, einmal schnell zu singen, dazu Bewegungen auszuführen. Das Ersetzen einzelner Worte durch die jeweils passende Bewegung brachte Spannung ins Spiel. Die Kinder konzentrierten sich auf den fehlerlosen Ablauf und die richtige Koordination. Je mehr Worte durch Bewegungen ersetzt wurden, desto mehr Aufmerksamkeit und positive Anspannung war zu spüren.

Abbildung 28: *Bewegungen zum Lied „Mein Hut der hat drei Ecken“*

Das Basteln des Dreieckshutes erforderte die exakte Ausführung der Arbeitsanweisungen, machte den Kindern Spaß und war dafür nutzbringend, die Eigenschaften des Dreiecks besser zu erfassen.

Abbildung 29: *Klassenfoto mit Dreieckshüten*

4.7 Unterrichtseinheit zur Rhythmik

4.7.1 Bezug zu Lehrplan und zu Bildungsstandards

Im Fachlehrplan Mathematik ist im Punkt 1.2.1 das Zählen mit inbegriffen, wofür die Eins-zu-eins-Zuordnung die Basis darstellt.[296]
Im Fachlehrplan Musikerziehung im Punkt 1.1.1. „Singen und Sprechen“ ist verankert, dass auf bewusstes rhythmisches Sprechen Wert gelegt wird, Lieder mit Körperinstrumenten oder mit elementaren Schlaginstrumenten rhythmisch begleitet werden sollen und auf diese Weise der Rhythmus erfahren und mitvollzogen werden soll.[297] Durch gemeinsames Tun soll soziales Lernen ermöglicht werden.[298]
In Bezug auf die Bildungsstandards lässt sich die Eins-zu-eins-Zuordnung analog zum Lehrplan als Voraussetzung für den Punkt 3.1 „Zahlen und Operationen“ erklären, wo Zahlbeziehungen, also auch das Zählen und das Zahlverständnis Thema sind.[299]

4.7.2 Ziele, Planung und Analyse

In dieser Stunde sollen die Schüler durch die Koordination von rhythmischer Sprache und Bewegung vor allem ihre Konzentration schulen. Durch die Parallelität von betonten Silben und der Bewegung soll die Eins-zu-eins-Zuordnung als pränumerische Fähigkeit gefestigt werden, die die Grundlage für das Zählen und das kardinale Verständnis des Zählaktes darstellt.
Die Musik betreffend sollen die Schüler ein Lied kennenlernen und den Rhythmus mit entsprechenden Bewegungen mitvollziehen können.

Artikulation	Arbeitsform/ Methode	Unterrichtsgeschehen	Medien/ Material
Hinführung	*An den Plätzen* L-Ss-Gespräch	L: Wir haben uns gerade begrüßt. Zum Begrüßen kann man Verschiedenes sagen oder auch tun. Fällt dir da etwas ein? (Auch aus anderen Ländern?) Ss: Deutschland: Guten Tag, Auf Wiedersehn!	

[296] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 101.
[297] Ebd., S. 147.
[298] Ebd., S. 49.
[299] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 9.

		Italien: Bon giorno, Arrividerci … L: Die Begrüßung im Land der Schuhe heißt „Hallo du, gib mir bitte deinen Schuh, deinen Schuh!“ Antwort: „Gib ihn weiter und hab Acht, wie man das macht.“ Wir wollen uns heute wie im Land der Schuhe begrüßen!	
Erarbeitung		- Der Satz wird gemeinsam rhythmisch gesprochen. - Der jeweils linke Banknachbar zieht einen Schuh aus und nimmt ihn in die Hand. S ohne Schuh sagt zu rechtem Nachbarn: „Hallo du! Gib mir bitte deinen Schuh, deinen Schuh!“ Nachbar gibt ihm den Schuh und antwortet: „Gib ihn weiter und hab Acht, wie man das macht!“ L: Die Leute im Land der Schuhe sprechen diesen Satz nicht nur, sie singen ihn sogar! Probieren wir das einmal aus! - Satz wird mit Melodie gesungen. L: Wenn sich ganz viele Leute aus dem Schuh-Land sich treffen, gibt es da eine Tradition: Man spielt zur Begrüßung das Schuhspiel!! Dazu darfst du in den Sitzkreis kommen.	Haus-schuhe
	Boden-Sitzkreis	L: Wie Sportler beim Sport müssen sich auch die Schuhe für das Spiel aufwärmen und trainieren! Jeder zieht seinen rechten Schuh aus und schlägt mit dem Schuh vor sich auf dem Boden den Takt mit.	

		- Spiel im großen Kreis: Die Schuhe sollen im Takt jeweils an den rechten Nachbarn weitergegeben werden. So wandern die Schuhe also im Rhythmus gegen den Uhrzeigersinn im Kreis.	
Sicherung		Geschwindigkeit steigern	

Zum gemeinsamen Beginn begrüßen sich Kinder und Lehrerin wie gewohnt. Daran anknüpfend werden verschiedene Begrüßungsformeln thematisiert. Die Kinder kennen verschiedene Begrüßungsarten, sei es aus dem Urlaub in einem Land, in dem eine andere Sprache gesprochen wird oder von Bekannten, die einen anderen Dialekt sprechen etc. Anfangs werden verschiedene Begrüßungs- und Verabschiedungsworte von den Kindern zusammengetragen. Im Anschluss bekommen die Kinder aus einem Fantasieland, dem Land der Schuhe, erzählt. Im Land der Schuhe werden zur Begrüßung die Schuhe getauscht und dabei wird eine Begrüßungsformel gesprochen (betonte Silben unterstrichen): „Hallo <u>du</u>, gib mir <u>bit</u>te deinen <u>Schuh</u>, deinen <u>Schuh</u>!“ Die Antwort darauf lautet: „Gib ihn <u>wei</u>ter <u>und</u> hab Acht, wie man das <u>macht.</u>“[300] Kinder der ersten Klasse hören gerne Geschichten und lassen sich darauf ein. Die Begrüßung der Leute aus diesem Land soll ausprobiert werden: Zunächst wird der Satz zum Üben gemeinsam rhythmisch gesprochen. Dann wird zu zweit eine Begrüßung nachgespielt: Der jeweils linke Banknachbar zieht einen Hausschuh aus und nimmt ihn in die Hand. Der rechte Banknachbar sagt nun zum linken: „Hallo du! Gib mir bitte deinen Schuh, deinen Schuh!“ Daraufhin gibt der Nachbar ihm den Schuh und antwortet: „Gib ihn weiter und hab Acht, wie man das macht!“ Diese Vorübung für das spätere Kreisspiel wird mehrere Male rhythmisch durchgeführt. Da die Leute im Land der Schuhe laut Lehrererzählung diesen Satz nicht nur sprechen, sondern ihn sogar singen, wird die Begrüßung mit einer Melodie versehen und so geübt. Schließlich erzählt die Lehrkraft, dass dort, wenn sich mehrere Leute treffen, traditionell zur Begrüßung das Schuhspiel durchgeführt wird. Dazu kommen die Kinder in den Sitzkreis. Um sie auf die komplexe Koordination vorzubereiten, schlagen die Kinder den Rhythmus erst mit dem eigenen Schuh vor sich auf dem Boden mit. Schließlich wird bei den betonten Silben der Schuh an den rechten Nachbarn

[300] Cslovjecsek 2001 – Mathe macht Musik, S. 16.

weitergegeben werden, sodass die Schuhe im Rhythmus gegen den Uhrzeigersinn im Kreis wandern. Die Kinder müssen sich konzentrieren und versuchen, den Rhythmus zu halten. Sie müssen aufeinander Rücksicht nehmen, eventuell dem schwächeren Nachbarkind den „Trick" noch einmal erklären und geduldig sein. Das Spiel wird in sehr niedriger Geschwindigkeit begonnen und kann bei Zeiten schneller werden.

4.7.3 Reflexion

Die Unterrichtseinheit wurde am Mittwoch, den 14.09.09 in der ersten Stunde durchgeführt. Die Ideen für verschiedene Begrüßungen waren sehr zahlreich! Neben Worten aus dem Italienischen und Türkischen fanden die Kinder auch verschiedene Begrüßungen in Umgangssprache oder Dialekt wie „Moin moin" oder „Griaß di". Auf die Geschichte vom Fantasieland ließen sich die Kinder ein. Da die Begrüßung in ihren Ohren besonders lustig klang, probierten sie diese schon selbst aus. Die Angaben „linker" und „rechter" Banknachbar führten zunächst bei manchen Kindern zu Verwechslungen. An dieser Stelle wurden die Begriffe zur Lagebeziehung wiederholt, woraufhin sich die Unklarheiten lösten. Als der Rhythmus des Satzes von allen Kindern erfasst worden war, war das Einstudieren der Melodie problemlos. Die Vorübung für das Schuhspiel, zuerst nur den eigenen Schuh in der Hand zu behalten und mit diesem den Takt zu klopfen, erwies sich als hilfreich und wurde durchgeführt, bis die Kinder sicher waren. Bei der anschließenden Endversion entstand zunächst Verwirrung und es häuften sich Schuhberge. Deswegen wurde das Spiel sogleich mit sehr niedrigem Tempo gespielt, damit jedem Kind das Prinzip des Spiels, dass die Schuhe im Endeffekt im Kreis wandern, klar wurde und die Koordination verlangsamt eingeübt werden konnte. Wenn sich Schuhe häuften, wurde nach einer Runde abgebrochen, neu sortiert und neu begonnen. Runde für Runde klappte das Spiel besser, sodass das Tempo gesteigert werden konnte und die Kinder Spaß daran hatten.

4.8 Unterrichtseinheit „Zahlen erleben“

4.8.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards

Unter dem Punkt 1.2 „Zahlen“ wird im Lehrplan zum einen gefordert, die Lebenswelt im Hinblick auf Mengen und Zahlen zu untersuchen und die Ziffern von 0 bis 9 zu lesen und zu schreiben und zum anderen, die Zahlen bis 20 zu erfassen und auf verschiedene Weise darzustellen. Anzahlen sollen konkret, bildlich und symbolisch, zeichnerisch, durch Klatschen, Klopfen, Hüpfen usw. dargestellt und Zahlzeichen und Zahlwörter Mengen zugeordnet werden.[301]

In den Bildungsstandards wird im Punkt 3.1 „Zahlen und Operationen“ gefordert, sich im Zahlenraum bis 1.000.000 zu orientieren.[302] In der ersten Klasse wird dieses Ziel im Zahlenraum bis 20 angestrebt.

Im Lehrplan der Musikerziehung ist das Erlernen von altersgemäßen Liedern ein wichtiges Thema. Unter Punkt 1.1.2 „Mit Instrumenten spielen“ wird die einfache Begleitung mit Stabspielen genannt. Auch die Schlägelführung an Stabspielen soll eingeübt werden.[303]

4.8.2 Ziele, Planung und Analyse

In mathematischer Hinsicht sollen die Schüler die Zahlwortreihe festigen und Zahlen mit allen Sinnen ganzheitlich erfassen, sie sowohl konkret als auch bildlich und symbolisch wahrnehmen.

Die Musikerziehung betreffend sollen die Kinder das Lied „Rückwärts zählen“ erlernen und mit verschiedenen Instrumenten aus dem Orff-Instrumentarium spielen.

Die Unterrichtseinheit ist auf eine Doppelstunde ausgelegt.

Artikulation	Arbeitsform/ Methode	Unterrichtsgeschehen	Medien/ Material
Hinführung	*Stuhlkreis*	L stellt Xylofon in die Kreismitte, legt die Xylofonstäbe durcheinander um das Instrument herum.	4 Xylofone,

[301] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 101.
[302] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 9.
[303] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 148.

	L-Ss-Gespräch	L: Die Stäbe sind durcheinander geraten, kannst Du mir helfen? Ss: Man muss sie der Größe nach ordnen! Ss sortieren Xylofonstäbe nach der Größe, fügen sie in das Instrument ein. L: Ihr seht am Xylofon Zettel kleben! Ss: Auf den Zetteln stehen die Zahlen 1 bis 10, man kann sie den Stäben zu ordnen! Ss kleben die Klebezettel von 1-10 angefangen auf die Xylofonstäbe, angefangen beim längsten Stab (C) C, D, E, F, G, A, H, C, D, E 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	4 x Klebezettel 1-10
	GA	Analog werden drei weitere Xylofone in drei Gruppen von den Kindern richtig zusammengesetzt und die Stäbe nummeriert. L verteilt Xylofone und Schlägel an jedes sechste Kind im Kreis. (L lässt Xylofone im Verlauf der Liederarbeitung fünfmal nach rechts weitergeben)	
Erarbeitung		Lied „Rückwärts zählen“ L: Die Xylofonkinder dürfen nun ihr Instrument einmal ausprobieren und alle Töne nacheinander spielen! Ss spielen gemeinsam ihre Töne nach oben. L: Die Kinder ohne Instrument dürfen jetzt den Xylofonkindern helfen und zu den Tönen die Zahlen dazu singen!	

		Ss singen die Töne mit Zahlen 1 bis 10 mit. (wiederholt) L: Weil das schon so prima klappt, machen wir daraus jetzt ein Lied! Wir singen unsere Zeile noch einmal gemeinsam und dann hörst du, wie es weiter geht! L singt Rest des A-Teils vor. Ss singen A-Teil wiederholt. L: Das Lied geht noch weiter! L singt beim nächsten Durchgang den B-Teil dazu. L: Was meinst du, wie es jetzt weiter geht? Ss: Rückwärts spielen und singen! Lied wird mit wechselnden Xylofonkindern gesungen.	
		L: Jetzt kannst du so gut zählen, dass du fit bist für das, was jetzt ansteht! Wenn du wieder am Platz bist, erkläre ich dir, was zu tun ist!	
	An den Plätzen Stationen-zirkel (meist PA, jeweils 2x2 Kinder pro Station)	L teilt Kinder in 6 Gruppen ein, erklärt den Ablauf und die einzelnen Stationen: 1. Ziffer auf den Rücken des Vordermanns schreiben → Vordermann trommelt Anzahl 2. Fühlsäckchen (blind Anzahl der Muggelsteine im Säckchen erfühlen, Partner kontrolliert) 3. Zahl spielen → Partner sagt Zahl 4. Fühlschnüre (blind Anzahl der Kugeln erfühlen, Partner kontrolliert)	Statio-nenkarten 1-6, CD, CD-Player 2 Hand-trommeln, Fühl-säckchen, 2 Claves, Fühl-schnüre, Augen-binden,

		5. Mit der Taschenlampe blinken, Partner zählt mit und sagt die Zahl 6. Zahl würfeln → Partner hüpft der Augenzahl entsprechend auf einem Bein	2 Taschenlampen, 2 Kartons, 2 Würfel
Sicherung	*An den Plätzen* Spiel	L erklärt nachfolgendes Spiel. Bewegungsspiel mit Zahlen	CD, CD-Player

Zur Hinführung wird im Stuhlkreis ein Xylofon in die Kreismitte gestellt und die Xylofonstäbe durcheinander rund um das Instrument verteilt. Das Ordnen der Stäbe soll den Schülern den Aufbau des Instruments verdeutlichen und die Tätigkeit „Ordnen“ an sich als pränumerische Fähigkeit geschult werden. Die Schüler dürfen den Stäben Klebezettel mit den Zahlen 1 bis 10 zuordnen, wodurch die Zahlenreihe und auch die Eins-zu-eins-Zuordnung gefestigt werden sollen. Als zusätzliche Übung werden analog drei weitere Xylofone in drei Gruppen von den Kindern richtig zusammengesetzt und die Stäbe nummeriert, was von den Erstklässlern ungeübte Kompetenzen zur Gruppenarbeit verlangt. Damit im Verlauf der Liederarbeitung jedes Kind einmal das Xylofon spielen darf, verteilt die Lehrkraft die Xylofone mit Schlägel an jedes sechste Kind im Kreis und lässt die Instrumente im weiteren Stundenverlauf fünfmal nach rechts weitergeben. Zuvor werden Regeln zum Umgang mit den Instrumenten erklärt: Wer sein Instrument „nicht zügeln kann“, muss es sofort weitergeben. Um die Zahlenreihe bis 10 einzuüben und die Xylofonkinder ihr Instrument ausprobieren zu lassen, dürfen sie gemeinsam alle Töne nacheinander spielen, die Kinder ohne Instrument dürfen dann den Xylofonkindern helfen und zu den Tönen die Zahlen dazu singen. Damit ist schon ein Teil des Liedes „Rückwärts zählen“[304] erarbeitet, das im Anschluss Stück für Stück zur Vollständigkeit erweitert wird. Die adäquate Tonfolge soll den Kindern das Rückwärtszählen erleichtern.

Zur Stationenarbeit mit sechs Stationen werden die Kinder in sechs Gruppen eingeteilt, sodass jede Gruppe aus vier Kindern besteht. Da diese Methode für die

[304] Metcalf, Harvey 2008 – Mathilde, die Mathe-Ratte, S. 10f.

Kinder neu ist und die Arbeit in Gruppen zunächst eingeübt werden muss, ist an allen Stationen Partnerarbeit gefordert und das Material an den meisten Stationen doppelt vorhanden. Als Zeichen zum Stationenwechsel wird Musik eingespielt. Die Regeln der Stationenarbeit und die einzelnen Stationen müssen genau erklärt werden, sodass für die ungewohnte offene Unterrichtssituation keine Unsicherheiten zurückbleiben. Auch Hinweise zur Disziplin werden gegeben.

Abschließend wird im Klassenverband ein Bewegungsspiel mit Zahlen gespielt, welches das Wahrnehmen von Anzahlen nochmals festigen soll. Wenn Musik läuft, bewegen sich die Schüler im Raum und tanzen. Wenn die Lehrkraft die Musik stoppt, gibt sie eine bestimmte Zahl vor. Auf diese Anweisung hin sollen die Schüler Zweier-/Dreier-/Vierer-/Sechser-/Achter-Gruppen bilden.

4.8.3 Reflexion

Die Unterrichtseinheit wurde am Freitag, den 16.10.09 in den ersten beiden Stunden durchgeführt. Als das Instrument in die Mitte gestellt wurde, meldeten sich schon die ersten Kinder. Ein Junge wusste, dass es sich bei diesem Instrument um ein „Xylofon" handelt, ein. Die Kinder wussten, dass die Stäbe in das Instrument eingebaut werden müssen, damit es mit Schlägeln gespielt werden kann. Ein Mädchen wies darauf hin, dass auf den Stäben Buchstaben zu sehen sind. Daher kam bei der Überlegung, wie man die Stäbe denn nun ordnen müsse, die Idee, nach den Buchstaben zu gehen.

Abbildung 30: *Xylofon-Puzzle*

Nachdem ein Kind die unterschiedlichen Tonhöhen der Stäbe erwähnte, wurden die Stäbe auch auf andere Eigenschaften untersucht und die unterschiedliche Größe erkannt, woraufhin sie danach geordnet wurden. Beim Zuordnen der Zahlen kamen zwei Gedanken auf: Man könnte die „1" dem kleinsten Stab zuordnen und die „10" dem größten oder man könnte die „1" auf den größten Stab, die „2" auf den zweitgrößten Stab etc. kleben. Schließlich wurde Letzteres durchgeführt.

Abbildung 31: *Zusammenbauen der Xylofone in Gruppenarbeit*

Die Arbeit in Sechsergruppen, in denen die drei weiteren Xylofone analog zusammengebaut und die Stäbe nummeriert werden sollten, gestaltete sich zunächst etwas schwierig. Für die Erstklasskinder war es ungewohnt und schwierig, sich in einer größeren Gruppe selbstständig zu arrangieren, sich einzubringen, trotzdem aber auch andere anzuhören. Nach kurzen Anweisungen zur Vorgehensweise in der Gruppe konnte die Aufgabe jedoch zufriedenstellend erfüllt werden.

Das Zählen von eins bis zehn stellte für die meisten Kinder kein Problem dar. Das rhythmische Zählen und die aufsteigende Tonfolge erleichterten das Einprägen zusätzlich. Die Kinder am Xylofon konnten die Zahlenfolge zeitgleich zum rhythmischen Spielen noch einmal ablesen. So gelang es der Klasse auf Anhieb, mit Xylofonbegleitung flüssig rückwärts zu zählen.

Abbildung 32: *Zahlen spielen und hören*

Da in der Klasse noch nie zuvor eine Stationenarbeit durchgeführt worden war, nahmen die Erklärungen im Vorfeld einige Zeit in Anspruch. Den Kindern machte es Spaß, an den verschiedenen Stationen zu arbeiten. Zwar kam es an manchen Stellen zu Streitigkeiten, diese konnten jedoch durch Eingreifen in die Kleingruppen und nochmaligem Erklären von Verhaltensregeln rasch geklärt werden. Dazu war es sehr günstig, dass zwei Lehrkräfte zeitgleich anwesend waren.

Das eigentlich einfache Spiel zum Abschluss enthält ebenfalls Potenzial, um die sozialen Kompetenzen der Schüler zu beobachten und zu fördern. Zum Bilden von Gruppen einer gewissen Größe gehört es dazu, aus zu großen Gruppen jemanden gehen zu lassen und in zu kleine Gruppen noch jemanden aufzunehmen. Im Spiel wurde klar, dass hier jeder gleich viel zählt, es keine Ausnahmen oder Privilegien gibt und auch eine Gruppe mit Mitschülern gebildet werden kann, mit denen man sonst nichts zu tun hat.

Ein Mädchen, das bisher eher teilnahmslos und unmotiviert erschien, erzählte, dass ihr der heutige Unterricht Spaß machte. Dies lag gewiss auch mit am sozialen Umgang und dem motivierenden Element Musik.

Abbildung 33: *Bewegungsspiel mit Zahlen*

4.9 Unterrichtseinheit „Muster“

4.9.1 Bezug zu Lehrplan und Bildungsstandards

Im Lehrplan heißt es im Fachprofil Mathematik, dass die Schüler im handelnden Umgang mit Gegenständen oder didaktischen Modellen eine erste Einsicht in neue Inhalte und Verfahren gewinnen sollen. Explizit wird erwähnt, dass zum Verstehen die handelnde und zeichnerische Durcharbeitung der Aufgaben ebenso erforderlich ist wie eine intensive Versprachlichung. Die wechselseitige Verknüpfung der verschiedenen Darstellungsebenen (handelnd, zeichnerisch, symbolisch sowohl schriftlich als auch verbal) erweist sich dabei laut Lehrplan als besonders wirksam. Bei der selbstständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen sollen die Schüler zu schöpferischem Denken angeregt werden.[305] Im Punkt 1.1.2 des Fachlehrplans Mathematik wird gefordert, Muster zusammenzusetzen und zu beschreiben. Figuren und Muster sollen erfunden, gelegt, nachgelegt, ergänzt, gezeichnet und nachgezeichnet werden. Nach Punkt 1.2.1 sollen die Schüler Ziffernmuster erfinden und aufschreiben.[306]

In den Bildungsstandards kann die Thematik dem Punkt 3.3 „Muster uns Strukturen“ zugeordnet werden. Hier wird gefordert, Gesetzmäßigkeiten in Mustern zu erkennen, zu beschreiben, fortzusetzen und selbst zu entwickeln.[307]

Im Lehrplan der Musikerziehung wird für die erste Klasse das Erkennen rhythmischer Bausteine gefordert.[308]

4.9.2 Ziele, Planung und Analyse

Aus mathematischer Sicht sollen die Schüler Muster erkennen, fortsetzen und erfinden und dabei die handelnde, die ikonische und die symbolische Ebene verknüpfen.

Ein musikalisches Lernziel der Doppelstunde ist das Erkennen rhythmischer Bausteine.

[305] Ebd., S. 35f.
[306] Ebd., S. 100f.
[307] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 10.
[308] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 148.

Artikulation	Arbeitsform/ Methode	Unterrichtsgeschehen	Medien/ Material
Hinführung	*Stuhlkreis*	L: Ich mache dir jetzt etwas vor. Sobald du weißt, wie es geht, machst du einfach mit! L: 2 x patschen, 1 x klatschen, 2 x patschen, 1 x Klatschen, …	
Erarbeitung	L-Ss-Gespräch	L: „Was hast du jetzt gemacht?“ S: Immer 2 x patschen, 1 x klatschen L: Kannst du das auf unserer Musterschlange mit Plättchen legen? S: blau, blau, rot, blau, blau, rot, … - Zweiter Versuch mit anderem Muster - Ss überlegen selbst Muster und passende Umsetzungen. Rätsel: - Wie könnte man das gelegte Muster in Klang umsetzen? L legt Muster, S macht Vorschlag, alle machen mit. - Welche der drei gelegten Muster-Zeilen ist gemeint? L „spielt“ Muster.	Musterschlange, große Magnet-Wendeplättchen
	An den Plätzen	L teilt AB aus. L gibt das erste Muster an der Tafel vor, das die Ss auf dem AB fortführen. Das Muster wird von einem S an der Tafel fortgeführt und somit die Fortsetzung der Ss kontrolliert.	AB, große Magnet-Wendeplättchen
	EA	Ss bearbeiten das AB.	Wendeplättchen
Sicherung	PA	L erklärt Spiel: Version von „Rückenklopfer“	Wendeplättchen

Zur Hinführung sollen die Kinder versuchen, ein von der Lehrkraft ausgeführtes Bodypercussion-Muster mit zwei verschiedenen Elementen auszuführen. Das Muster wird so gewählt, dass es jedem Kind möglich ist, den Rhythmus aufzunehmen, sodass am Anfang der Stunde positive Motivation und ein Gefühl des eigenen Zutrauens entstehen. Durch Versprachlichung soll das Muster bewusst gemacht und durch Wendeplättchen, die in die Musterschlange gelegt werden, in die ikonische Ebene übersetzt werden. Nach einem zweiten Durchgang mit einem Muster, das die Lehrkraft vorgibt, dürfen sich auch die Schüler Bodypercussion-Muster für die Klasse überlegen, welche versprachlicht und mit Plättchen gelegt werden sollen. Eine nächste Übung stellt an die Kinder die Frage, wie ein von der Lehrerin gelegtes Muster per Bodypercussion in Klang umgesetzt werden könnte. Die Schülervorschläge werden ausprobiert und kontrolliert. Als weitere Übungsform zum Erkennen und Fortsetzen von Mustern wird von der Lehrkraft zu mehreren gelegten Musterzeilen ein Bodypercussion-Muster vorgegeben. Die Schüler sollen die passende Zeile herausfinden und eine Begründung für ihre Entscheidung geben. In der nächsten Phase soll jedes Kind für sich am Thema arbeiten. Dazu wird ein Arbeitsblatt[309] ausgeteilt, auf dem es Muster mit blauen und roten Punkten fortzusetzen gilt. Das erste Muster wird an der Tafel gemeinsam bearbeitet, zur Einzelarbeit stehen den Schülern Wendeplättchen als Hilfsmittel zur Verfügung. Für die letzten beiden Zeilen dürfen die Kinder selbst ein Muster erfinden und fortsetzen, im Sinne der Differenzierung also auch den Schwierigkeitsgrad selber bestimmen. Zum Abschluss spielen die Kinder in Partnerarbeit eine abgewandelte Version des Spiels „Rückenklopfer“[310], womit die Kinder noch einmal mit voller Konzentration gefordert sind und die Einheit im Sinne der Ganzheitlichkeit sinnvoll abgeschlossen wird. Der Ablauf des Spiels wird im Anhang unter Punkt f) erklärt.

In der darauf folgenden Mathematikstunde zum Thema „Zahlenmuster“ sollen zum Einstieg Zahlen an die erarbeiteten Musterschlangen geschrieben und so die Brücke von Plättchen- zu Zahlenmustern geschlagen werden.

[309] nach einer Idee von Hengartner, Hirt, Wälti 2007 – Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte, S. 107.

[310] Hirler 2001 – Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik, S. 98.

4.9.3 Reflexion

Die Unterrichtseinheit wurde am Donnerstag, den 12.11.09 in den ersten beiden Stunden durchgeführt. Der erste Rhythmus wurde von den Schülern auf Anhieb problemlos aufgenommen, auch ein zweiter Versuch gelang gut. Die Kinder äußerten sofort von sich aus Ideen für weitere Bodypercussion-Muster. Dabei musste die Erklärung ergänzt werden, dass das Muster aus genau zwei verschiedenen Elementen bestehen soll. Diese Bedingung war den Kindern aufgrund der nur zwei möglichen Farben der Wendeplättchen jedoch schließlich einsichtig. Für einige Kinder war es spürbar anspruchsvoll, zwischen der enaktiven und der ikonischen Ebene hin- und her zu schalten. Jedoch wurde die Übersetzung durch die verschiedenen Übungen bald für alle klar. Beim selbstständigen Bearbeiten der Musterzeilen verunsicherte manche Kinder zunächst die Tatsache, dass die Punkte weiß und grau statt rot und blau gedruckt waren und sie sich die Farbgebung aussuchen durften, sodass der Banknachbar gegebenenfalls ein farblich anderes Ergebnis erarbeitete. Diese Problematik wurde deshalb während der Bearbeitung kurz an der Tafel thematisiert. Die Muster auf dem Arbeitsblatt dienten als Vorlage für das abschließende Spiel. Die komplexe Anforderung, die die Intermodalität miteinschloss, forderte von den Kindern ein gewisses Maß an Disziplin und Konzentration ein. Da die Kinder sich aber selbst mehr oder weniger schwierige Muster von ihrer Vorlage aussuchen konnten und so eine innere Differenzierung grundgelegt wurde, wurde die Aufgabe gut gemeistert.

5. Resümee und Ausblick

An den ausgeführten Unterrichtseinheiten wird deutlich, dass sich Mathematik und Musik nicht nur auf theoretischer Ebene verbinden lassen, sondern auch in der Praxis der Grundschule sinnvoll zusammenspielen können. Die vom Lehrplan für die bayerische Grundschule als bedeutsam gewertete Aufgabe der musikalischen Förderung aller Kinder[311] wird angenommen. Gleichzeitig wird der Forderung des Lehrplans, den Schülern die mannigfaltigen Verknüpfungsmöglichkeiten der Mathematik mit anderen Lernbereichen zu verdeutlichen[312], im Hinblick auf Musik und Bewegung Rechnung getragen. Dass die Musik nach Berlioz gleichzeitig auf Fantasie, Gemüt, Herz und Sinne wirkt[313], kann mit den Erfahrungen aus den Unterrichtseinheiten nur nachdrücklich bestätigt werden. Die Fächerverbindung ermöglichte es, eine gute Atmosphäre zu schaffen und damit für ein fruchtbares Lernklima im Mathematikunterricht zu sorgen sowie die Sinne und somit verschiedenste Eingangskanäle anzuregen. Die Bewegung, die Aktivität der Kinder und die unterschiedlichen Methoden schufen die Grundlage für konzentriertes Arbeiten. Gerade in dieser Hinsicht bietet sich die Fächerverbindung speziell für den Anfangsunterricht an, denn zu Schulbeginn muss die Konzentrationsfähigkeit der Kinder Schritt für Schritt aufgebaut, ihre Aktivität sinnvoll genutzt und die Begeisterung und Freude an der Mathematik wie auch am Singen und an der Musik vermittelt bzw. erhalten werden. Auch das soziale Lernen spielt eine große Rolle, da Kinder zu diesem Zeitpunkt am Anfang eines sich allmählich vollziehenden Perspektivenwechsels von einer egozentrischen hin zu einer empathischen Weltsicht stehen[314], und kann durch die Fächerverbindung in den Mathematikunterricht einfließen.

Im weiteren Verlauf der ersten Jahrgangsstufe sind zahlreiche Verknüpfungen denkbar. Beispielsweise können Zahlzerlegungen akustisch wahrnehmbar gemacht werden, verschiedene Anzahlen an Tönen können addiert und subtrahiert werden, Rechnungen können in Bewegung umgesetzt werden usw. Blickt man über die erste Jahrgangsstufe hinaus, kann Musik z. B. zum Erlernen des kleinen Einmaleins beitragen. Um auditiv orientierte Lerntypen besonders anzu-

[311] Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus 2000 – Lehrplan für die bayerische Grundschule, S. 49.
[312] Ebd., S. 35.
[313] Bastian 2002 – Musikerziehung und ihre Wirkung, S. 11.
[314] Hanke 2007 – Anfangsunterricht, S. 61.

sprechen und für alle Kinder Übungsvielfalt zu gewährleisten, bieten sich zahlreiche Möglichkeiten an, die multiplikatorischen Zusammenhänge mit musikalischen Elementen sinnlich erfahrbar zu machen und so die Begriffsbildung der Multiplikation zu fördern.[315] Malaufgaben können gehört werden, z. B. können Kinder mit einem Glockenspiel, einer Triangel etc. gleichmäßige Tonfolgen erzeugen, zu denen sie Malaufgaben aufschreiben.[316] Musik kann außerdem einen Rechenanreiz in größeren Zahlenräumen darstellen. Um sich mit Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten zu befassen, wie es in den Bildungsstandards gefordert wird[317], könnte man mit Kindern „Würfelmusik" erfinden und analysieren. Hier sei auf die Anregungen von Vogel hingewiesen.[318] Darüber hinaus wäre auch ein Projekt denkbar, bei dem sich die Kinder mit interdisziplinären Aspekten beschäftigen. Sie können erkennen, dass Musik mathematische Strukturen und Gegebenheiten abbildet. Ein Musikinstrument kann als mathematische Funktion gelten, da bestimmten Parametern bestimmte Klangresultate zugeordnet werden. Zeit- bzw. Zahlenverhältnisse (Frequenz, Metrum, Takt, Rhythmus) stellen einen weiteren Weg von der Mathematik zur Musik dar. Dazu gibt Weiß mit seinen Begleitmaterialien zur Ausstellung „Klingende Zahlen. Mathematik hören – mit Musik rechnen" des Zoom Kindermuseums interessante Impulse.[319] Diese Ideen stellen nur eine kleine Auswahl der Möglichkeiten für den fächerverbindenden Unterricht in Mathematik und Musik dar. Die Verknüpfung kann natürlich in der Sekundarstufe fortgeführt werden, was sich nicht nur mit einem Zitat von Blaise Pascal – französischer Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph aus dem 17. Jahrhundert – begründen lässt.

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst,
dass man keine Gelegenheit versäumen sollte,
dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten."[320]
Blaise Pascal

[315] Menzel 2006 – 55 Kinderlieder zu den Kernthemen, S. 50.
[316] Hönisch 1999 – Mit allen Sinnen ins Einmaleins, S. 43.
[317] Kultusministerkonferenz 2005 – Bildungsstandards im Fach Mathematik, S. 11.
[318] Vogel 2007 – Alles ist Musik, S. 61ff.
[319] Weiß 2003 – Klingende Zahlen, S. 3.
[320] Reiss, Schmieder 2007 – Basiswissen Zahlentheorie, S. 275.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: *Die Sieben freien Künste.* ... 6
Abbildung 2: *Konstruktion des pentatonischen Tonsystems* ... 8
Abbildung 3: *Monochord* ... 11
Abbildung 4: *Die zweite Tetraktys, dargestellt als gleichseitiges Dreieck* ... 12
Abbildung 5: *Ausschnitt aus dem Tonraster des pythagoreischen Tonsystems* ... 14
Abbildung 6: *Quintenspirale des Pythagoras (links) und Quintenzirkel (rechts)* ... 15
Abbildung 7: *Quinten-Oktaven-Algorithmus* ... 16
Abbildung 8: *Pythagoreisches Komma* ... 16
Abbildung 9: *Eine Ebene aus dem Raster der reinen Stimmung* ... 18
Abbildung 10: *Ausschnitt aus einer Quint-Terz-Ebene der reinen Stimmung mit den Eulerschen Zahlenzuordnungen* ... 21
Abbildung 11: *Eulers genus diatonico-chromaticum als Hasse-Diagramm* ... 22
Abbildung 12: *Schwingung einer Saite* ... 29
Abbildung 13: *Obertonreihe mit Grundton C* ... 30
Abbildung 14: *Transformationen an einer Grundreihe aus der Zwölftonmusik* ... 36
Abbildung 15: *Umkehrung mit Verschiebung in einem Choralvorspiel von Bach* ... 36
Abbildung 16: *Systemisches Netz von Einflussfaktoren* ... 45
Abbildung 17: *Musikbezogene Funktionen in der Großhirnrinde* ... 51
Abbildung 18: *Anordnung zum Eckenkonzert* ... 76
Abbildung 19: *Setzkasten-Übung an der Tafel* ... 77
Abbildung 20: *Setzkastenspiel in Einzelarbeit* ... 77
Abbildung 21: *Spielen mit Instrumenten beim Eckenkonzert* ... 77
Abbildung 22: *Kinder beim Eckenkonzert* ... 78
Abbildung 23: *Anordnung zum Eckenkonzert in erweiterter Version* ... 78
Abbildung 24: *Zahlen in der Umwelt* ... 82
Abbildung 25: *Kinder beim Singen des Liedes „Zwei davon“* ... 88
Abbildung 26: *Schüttelmemory* ... 88
Abbildung 27: *Kneten der Zahl 3* ... 92
Abbildung 28: *Bewegungen zum Lied „Mein Hut der hat drei Ecken“* ... 92
Abbildung 29: *Klassenfoto mit Dreieckshüten* ... 92
Abbildung 30: *Xylofon-Puzzle* ... 101
Abbildung 31: *Zusammenbauen der Xylofone in Gruppenarbeit* ... 101
Abbildung 32: *Zahlen spielen und hören* ... 102
Abbildung 33: *Bewegungsspiel mit Zahlen* ... 102

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: *Skala aus dem pentatonischen Tonsystem der alten Chinesen* 9
Tabelle 2: *Oktavausschnitt aus der pythagoreischen Stimmung* 14
Tabelle 3: *Oktavausschnitt aus der reinen Stimmung auf dem Grundton* c_n 19
Tabelle 4: *Oktavausschnitt aus der reinen Stimmung auf dem Grundton* c_n *mit 8 Tönen* 19
Tabelle 5: *Zuordnung von Intervallproportionen zu Konsonanzgraden nach der Gradusfunktion* 23
Tabelle 6: *Oktavausschnitt aus der mitteltönigen Stimmung* 25
Tabelle 7: *Oktavausschnitt aus der gleichstufig temperierten Stimmung* 27
Tabelle 8: *Zahlentafeln zu Mozarts Würfelwalzer* 32
Tabelle 9: *Transformationen an einer Grundreihe aus der Zwölftonmusik* 35

Abkürzungsverzeichnis

AB	Arbeitsblatt
EA	Einzelarbeit
GA	Gruppenarbeit
IQ	Intelligenzquotient
KV	Köchelverzeichnis
L	Lehrkraft
PA	Partnerarbeit
S bzw. Ss	ein bzw. mehrere Schüler
SINUS	Programm der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“

Literaturverzeichnis

Lehrbücher

Cslovjecsek, Markus (2001): Mathe macht Musik. Impulse zum musikalischen Unterricht mit dem Zahlenbuch 1 und 2. Zug: Klett und Balmer (Mathe macht Musik, 1).

Cslovjecsek, Markus (2004): Mathe macht Musik. Impulse zum musikalischen Unterricht mit dem Zahlenbuch 3 und 4. Zug: Klett und Balmer (Mathe macht Musik, 2).

Gierlinger, Wolfgang (Hg.) (2001a): Zahlenzauber 1. Lehrermaterialien. München: Oldenbourg.

Gierlinger, Wolfgang (Hg.) (2001b): Zahlenzauber 1. Mathematikbuch für die neue Grundschule in Bayern. München: Oldenbourg.

Sekundärliteratur

Altenmüller, Eckart (2001): Macht musizieren intelligent? Musikalität und Intelligenz unter der Lupe der Hirnforschung. In: mip Journal, H. 2, S. 4–13.

Armbrust, Ansgar (1999a): Tonsysteme und Stimmungen. In: Armbrust, Ansgar (Hg.): Fachübergreifende Themen im Mathematikunterricht. Speyer: Staatliches Institut für Lehrerfort- und Weiterbildung des Landes Rheinland-Pfalz (Studienmaterial, 160), S. 72–95.

Armbrust, Ansgar (1999b): Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife. Mathematische Aspekte von Tonsystemen. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Jg. 52, H. 2, S. 76–82.

Baltensperger, André (1996): Iannis Xenakis und die stochastische Musik. Bern: Haupt (Publikationen der Schweizerischen Musikforschenden Gesellschaft/2, 36).

Bastian, Hans Günther (2002[3]): Musik(erziehung) und ihre Wirkung. Eine Langzeitstudie an Berliner Grundschulen. Mainz: Schott.

Bastian, Hans Günther (2007[4]): Kinder optimal fördern - mit Musik. Intelligenz, Sozialverhalten und gute Schulleistungen durch Musikerziehung. Mainz: Schott.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (2000): Lehrplan für die bayerische Grundschule. München: Maiss.

Beckmann, Astrid (2003): Fächerübergreifender Mathematikunterricht. Teil 1: Ein Modell, Ziele und fachspezifische Diskussion. Hildesheim: Franzbecker (Fächerübergreifender Mathematikunterricht / Astrid Beckmann).

Behrends, Ehrhard (2006): Fünf Minuten Mathematik. 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung Die Welt. Wiesbaden: Vieweg.

Benary, Peter (2001): Musik und Zahl. Von 1 bis 12 ; eine musikalische Zahlenkunde. Aarau: HBS Nepomuk.

Bindel, Ernst (1985[2]): Die Zahlengrundlagen der Musik im Wandel der Zeiten. 1. Teil. Stuttgart: Freies Geistesleben.

Brüning, Sabine (2003): Musik verstehen durch Mathematik. Überlegungen zu Theorie und Praxis eines fächerübergreifenden Ansatzes in der Musikpädagogik. Essen: Die Blaue Eule (Musikwissenschaft/Musikpädagogik in der Blauen Eule, 67).

Busch, Hermann Richard (1970): Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie. Regensburg: Bosse.

Christmann, Norbert (1999): Unterrichtsprojekte zum Themenkreis Stochastik und Musik. In: Armbrust, Ansgar (Hg.): Fachübergreifende Themen im Mathematikunterricht. Speyer: Staatliches Institut für Lehrerfort- und Weiterbildung des Landes Rheinland-Pfalz (Studienmaterial, 160), S. 97–178.

Cslovjecsek, Markus; Spychiger, Maria (2001): Mus ik oder Mus ik nicht? Musik als Unterrichtsprinzip. Hölstein: Schweizerischer Verein für Schule und Fortbildung (SVSF konkret).

Dachs, Michael; Söhner, Paul (1992[17]): Harmonielehre. Erster Teil. München: Kösel.

Dethlefs-Forsbach, Beate Christiane (2005): Fächerübergreifender Unterricht aus der Sicht des Faches Musik. Eine historisch-systematische Untersuchung von Theorien und Praxen sowie der Entwurf eigener Modelle und einer Konzeption des fächerübergreifenden Unterrichts mit Musik. Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Dorsch, Friedrich; Häcker, Hartmut; Stapf, Kurt H. (Hg.) (1994[12]): Dorsch Psychologisches Wörterbuch. Bern: Huber.

Ellrott, Dieter; Aps-Ellrott, Barbara (1998): Erfolgreich lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Teil 1 - Wahrnehmen, lernen, fördern. Hannover: Schroedel.

Enders, Bernd (2005): Mathematik ist Musik für den Verstand, Musik ist Mathematik für die Seele. Zum Verhältnis von Ton und Zahl, Klang und Gefühl, Musik und Technik, Sound und Computer. In: Enders, Bernd (Hg.): Mathematische Musik - musikalische Mathematik. Saarbrücken: Pfau, S. 7–37.

Faltus, Brigitte (1996): Das Bewegungsspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Jg. 17, H. 1, S. 1–15.

Faust-Siehl, Gabriele; Garlichs, Ariane; Ramseger, Jörg; Schwarz, Hermann; Warm, Ute (1996): Die Zukunft beginnt in der Grundschule. Empfehlungen zur Neugestaltung der Primarstufe. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verlag (rororo, 60156).

Forsbach, Beate (2008): Fächerübergreifender Musikunterricht. Konzeption und Modelle für die Unterrichtspraxis. Augsburg: Wißner.

Freudenthal, Hans (1983): Warum hat die Tonleiter zwölf Töne? In: Mathematik lehren, H. 1, S. 48–49.

Friss, Gábor (1969): Die Musikgrundschule. In: Sándor, Frigyes (Hg.): Musikerziehung in Ungarn. Stuttgart: Klett, S. 153–198.

Gaddes, William H (1991): Lernstörungen und Hirnfunktion. Eine neuropsychologische Betrachtung. Berlin, Heidelberg: Springer.

Ganser, Bernd (1998): Rechenschwäche. Unterrichtspraktische Förderung. Dillingen: Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung (Akademiebericht, 309).

Gembris, Heiner (2001): Musik, Intelligenz und Persönlichkeitsentwicklung. In: Gembris, Heiner; Kraemer, Rudolf D.; Maas, Georg (Hg.): Macht Musik wirklich klüger? Musikalisches Lernen und Transfereffekte. Augsburg: Wißner (Forum Musikpädagogik, 44), S. 133–148.

Gottschalk, Josef (1992): Grundlegende mathematische Fähigkeiten. Handreichung für sonderpädagogische Diagnose- und Förderklassen. München: Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung.

Hanke, Petra (2007^{2}): Anfangsunterricht. Leben und Lernen in der Schuleingangsphase. Weinheim: Beltz.

Heckhausen, Heinz (1977^{11}): Förderung der Lernmotivierung und der intellektuellen Tüchtigkeit. In: Roth, Heinrich (Hg.): Begabung und Lernen. Stuttgart: Klett (Deutscher Bildungsrat. Bildungskommission: Gutachten und Studien, 4), S. 193–228.

Hengartner, Elmar; Hirt, Ueli; Wälti, Beat (2007): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer.

Hirler, Sabine (2001^{4}): Wahrnehmungsförderung durch Rhythmik und Musik. Freiburg im Breisgau: Herder.

Hönisch, Kurt (1999): Mit allen Sinnen ins Einmaleins. In: Mette, Norbert; Träger, Gerhild (Hg.): Lernen mit allen Sinnen. Erträge vom Paderborner Grundschultag 1997. Münster: Lit (Paderborner Beiträge zur Unterrichtsforschung und Lehrerbildung, 1), S. 43–52.

Jacobsen, Silke (2001): Das Pythagoreische Stimmungssystem und seine Anwendung im Ensemblespiel. In: Tibia. Magazin für Holzbläser, Jg. 26, H. 3, S. 529–540.

Jäncke, Lutz; Altenmüller, Eckart (2008): Macht Musik schlau? Neue Erkenntnisse aus den Neurowissenschaften und der kognitiven Psychologie. Bern: Huber.

Kleinhammes, Otto (1949): Die Quadratur des Kreises aus dem Geiste der Musik. Wangen im Allgäu: Kleinhammes.

Köppel, Günter (1988): Kreativität im Grundschulalter. In: Lehrer Journal Grundschulmagazin, Jg. 3, H. 12, S. 2–5.

Krammer, Anton (1994): Der Harmoniegedanke bei Pythagoras, Kepler, Euler und Helmholtz. In: Zeitschrift für Ganzheitsforschung, Jg. 38, H. 4, S. 171–189.

Krauthausen, Günter (2000): Lernen - lehren - Lehren lernen. Leipzig ; Stuttgart ; Düsseldorf: Klett-Grundschulverlag.

Lorenz, Jens Holger (1991): Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung zum Aufbau interner arithmetischer Vorstellungsbilder. In: Lorenz, Jens Holger (Hg.): Störungen beim Mathematiklernen. Köln, S. 53–73.

Lukesch, Helmut (2006[4]): Einführung in die pädagogische Psychologie. Regensburg: Roderer (Psychologie in der Lehrerausbildung, 1).

Mazzola, Guerino; Muzzulini, Daniel (1990): Geometrie der Töne. Elemente der mathematischen Musiktheorie. Basel: Birkhäuser.

Menzel, Dirk (2006): 55 Kinderlieder zu den Kernthemen der Grundschule. Mit Unterrichtsvorschlägen und Kopiervorlagen. Donauwörth: Auer.

Metcalf, Robert; Harvey, Franziska (2008): Mathilde, die Mathe-Ratte. Singen - spielen - rechnen. Düsseldorf: Sauerländer.

Metcalf, Robert; Röckener, Andreas (2005): Zahlen, bitte! Eine musikalische Reise in die Welt der Zahlen. München: Terzio.

Metzler, Wolfgang (1985): Schöpferische Tätigkeit in Mathematik und Musik. In: Götze, Heinz (Hg.): Musik und Mathematik. Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan. Berlin: Springer, S. 45–63.

Möckl, Franz; Haus, Karl (1992): Musikunterricht leichtgemacht. Didaktik - Methodik - Materialien. München: Bayer. Schulbuchverlag.

Montessori, Maria (2005[18]): Die Entdeckung des Kindes. Herausgegeben und eingeleitet von Oswald, Paul und Schulz-Benesch, Günter. Freiburg im Breisgau: Herder.

Moog, Wolfgang (2005): Zahlen begreifen. Diagnose und Förederung bei Kindern mit Rechenschwäche. Weinheim ; Basel: Beltz (Beltz Praxis).

Nestke, Andreas (1995): Zahlen und Figuren in der Musik. I. Musikalische Bruchrechnung. In: Alpha. Mathematik als Hobby, Jg. 29, H. 10, S. 8–10.

Peterßen, Wilhelm H. (2000): Fächerverbindender Unterricht. München: Oldenbourg (EGS-Texte).

Philipp, Elmar; Rolff, Hans-Günter (2004[4]): Schulprogramme und Leitbilder entwickeln. Ein Arbeitsbuch. Weinheim: Beltz.

Reiss, Kristina; Schmieder, Gerald (2007[2]): Basiswissen Zahlentheorie. Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche. Berlin, Heidelberg: Springer.

Rinkens, Hans-Dieter (1999): Wider die verkopfte Mathematik in der Grundschule - für ein Lernen mit allen Sinnen. In: Mette, Norbert; Träger, Gerhild (Hg.): Lernen mit allen Sinnen. Erträge vom Paderborner Grundschultag 1997. Münster: Lit (Paderborner Beiträge zur Unterrichtsforschung und Lehrerbildung, 1), S. 35–42.

Schirmer, Brita (1993): Musik, Bewegung und Sprache im mathematischen Anfangsunterricht der Schule für Lernbehinderte. Dissertation. Betreut von G. Prof. Dr. Siepmann, E. Prof. Dr. Kurth und B. Prof. Dr. Steinmann. Berlin. Humboldt- Universität. Pädagogische Fakultät.

Schneider, Petra (1996): Musisch orientierter Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Jg. 17, H. 4, S. 17–32.

Schröder, Matthias (2008): Klingende Zahlen. Von »wohltemperierten Stimmungen«, strengen Kompositionsregeln und dem Einmaleins der Töne. In: Westfalenspiegel, Jg. 57, H. 1, S. 24–25.

Spitzer, Manfred (2004[4]): Musik im Kopf. Hören, musizieren, verstehen und erleben im neuronalen Netzwerk. Stuttgart: Schattauer.

Spychiger, Maria (1993[4]): Musik und außermusikalische Lerninhalte. In: Bruhn, Herbert; Oerter, Rolf; Rösing, Helmut (Hg.): Musikpsychologie. Ein Handbuch. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verlag (Rowohlts Enzyklopädie, 526), S. 360–368.

Staines, Richard (2001): Transferleistung auf dem Prüfstand: Neubewertung des außermusikalischen Potentials von Musiklernen und -hören. Ein Überblick ausgewählter Literatur. In: Gembris, Heiner; Kraemer, Rudolf D.; Maas, Georg (Hg.): Macht Musik wirklich klüger? Musikalisches Lernen und Transfereffekte. Augsburg: Wißner (Forum Musikpädagogik, 44), S. 67–90.

Szőnyi, Erzsébet (1973): Aspekte der Kodály-Methode. Frankfurt am Main, Berlin, München: Diesterweg (Schriftenreihe zur Musikpädagogik, 6).

Taschner, Rudolf (2005[3]): Der Zahlen gigantische Schatten. Mathematik im Zeichen der Zeit. Wiesbaden: Vieweg.

Tervooren, Helga (1996): Ein Weg zur Menschlichkeit: Rhythmisch-musikalische Erziehung. Essen: Die Blaue Eule (Pädagogik in der Blauen Eule, 30).

Ullrich, Ringo (2008): Mathe klingt gut. Ein Projekt zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten im Grundschulalter anhand des Zusammenhangs von Mathematik und Musik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 13.3.2008 bis 18.3.2008 in Budapest. Münster: WTM, S. 773–776.

Vogel, Corinna (2007): Alles ist Musik! Kinder experimentieren mit Rhythmus und Klang. Mülheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr.

Vogel, Martin (1976): Reine Stimmung und Temperierung. In: Schnitzler, Günter (Hg.): Musik und Zahl. Interdisziplinäre Beitr. zum Grenzbereich zwischen Musik u. Mathematik. Bonn: Verlag für Systematische Musikwissenschaft (Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen der Musik, 17), S. 265–292.

Wiater, Werner (2001): Unterrichtsprinzipien. Donauwörth: Auer (Prüfungswissen - Basiswissen Schulpädagogik).

Wiater, Werner (2007): Wissensmanagement. Eine Einführung für Pädagogen. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Wille, Rudolf (1985): Musiktheorie und Mathematik. In: Götze, Heinz (Hg.): Musik und Mathematik. Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von Herbert von Karajan. Berlin: Springer, S. 4–31.

Internetdokumente

Brack, Tanja; Gremminger, Andrea (2009): Bewegung und Sprache. Spielsammlung psychomotorisch orientierte Sprachförderung.
Online verfügbar unter http://www.bscw-hfh.ch/pub/bscw.cgi/d4398386/BrackGremmingerSpielsammlung.pdf,
zuletzt geprüft am 09.01.2010.

Behrends, Ehrhard (2008): Mathematik, die man hören kann. Präsentation der DFG zum Jahr der Mathematik 2008.
Online verfügbar unter
http://www.zahlenwissen.mmcd.de/content/1042/musik_jdm.pdf,
zuletzt geprüft am 16.01.2010.

Christmann, Norbert: Geometrie und Musik.
Online verfügbar unter http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/1geometrie_und_musik.htm,
zuletzt geprüft am 16.01.2010.

Christmann, Norbert: Zufall und Musik.
Online verfügbar unter http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm,
zuletzt geprüft am 16.01.2010.

Reuter, Christoph (2001): Musikalische Würfelspiele.
Online verfügbar unter http://www.chr-reuter.de/wuerfel/geschichte.htm,
zuletzt geprüft am 16.01.2010.

Kultusministerkonferenz (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).
Online verfügbar unter
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf,
zuletzt geprüft am 09.01.2010.

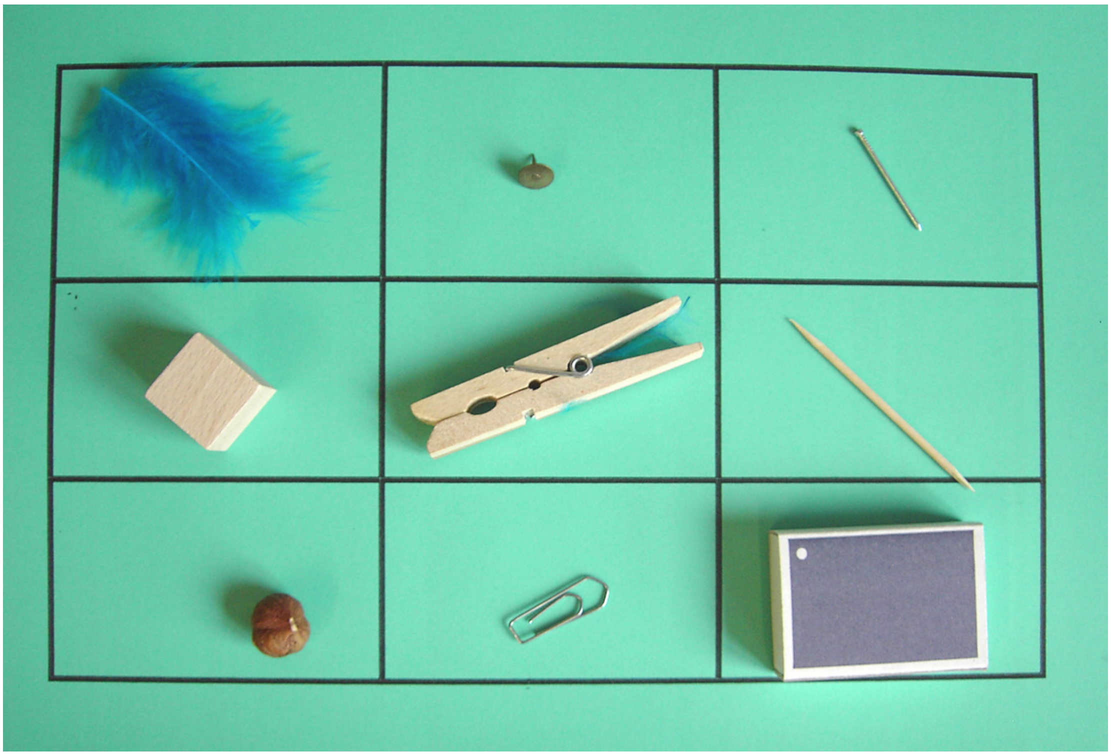
Weiß, Robert Michael (2003): Klingende Zahlen. Mathematik hören – mit Musik rechnen.
Online verfügbar unter
http://www.kindermuseum.at/jart/prj3/zoom/resources/uploads/Unterrichtsmaterialien_%20Klingende%20Zahlen.pdf,
zuletzt geprüft am 09.01.2010.

Anhang

a) Materialien zur Unterrichtseinheit „Lagebeziehungen“

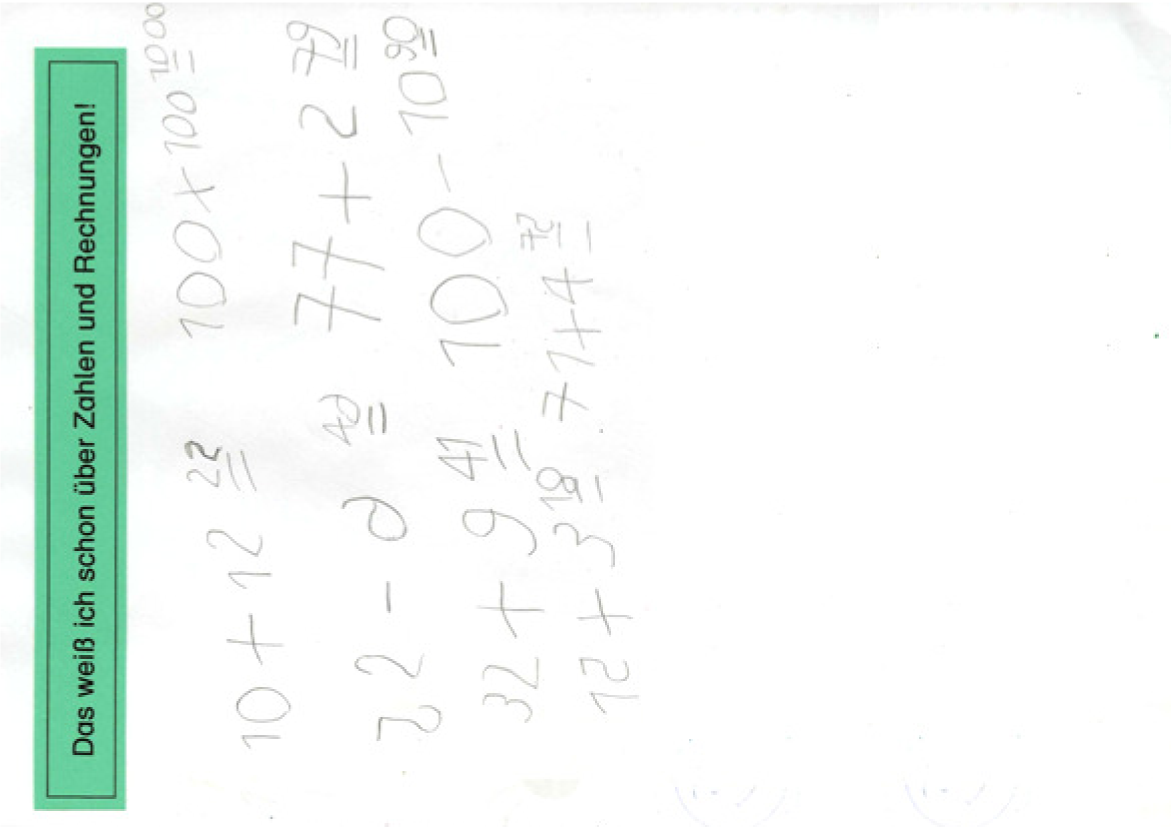
- Spieleerklärung Schüttelhit:
  Die Lehrkraft beginnt den Schüttelhit mit folgenden Versen:
  „Du, ... (Name einsetzen), bist ein super Typ,
  sag, kennst du schon den Schüttelhit?
  Dann mach doch einfach mit mir mit!“
  Bei den Schüttelversen kann im Anschluss die ganze Klasse mitmachen.
  Die Arme werden jeweils in die genannte Richtung gestreckt und geschüttelt.
  „Und oben schüttel-schüttel, schüttel-schüttel-schüttel,
  und unten schüttel-schüttel, schüttel-schüttel-schüttel,
  und rechts schüttel-schüttel, schüttel-schüttel-schüttel,
  und links schüttel-schüttel, schüttel-schüttel-schüttel“

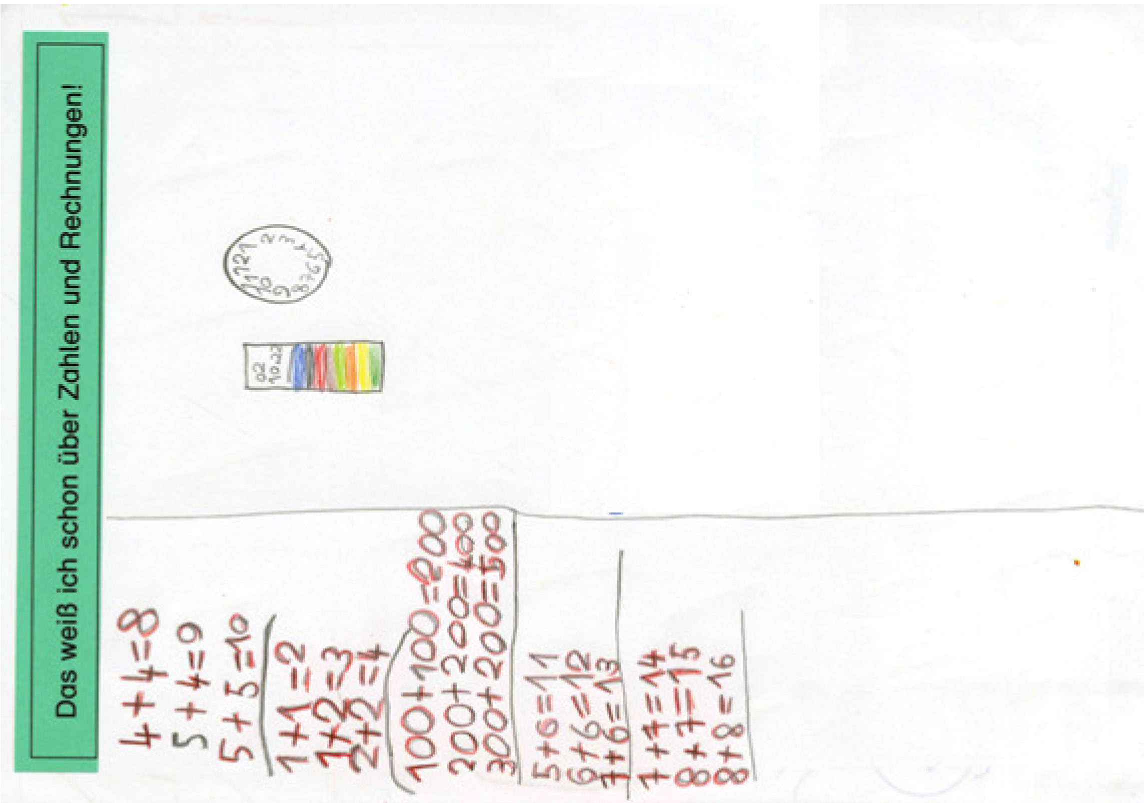
- Foto: AB Setzkasten mit 9 Gegenständen

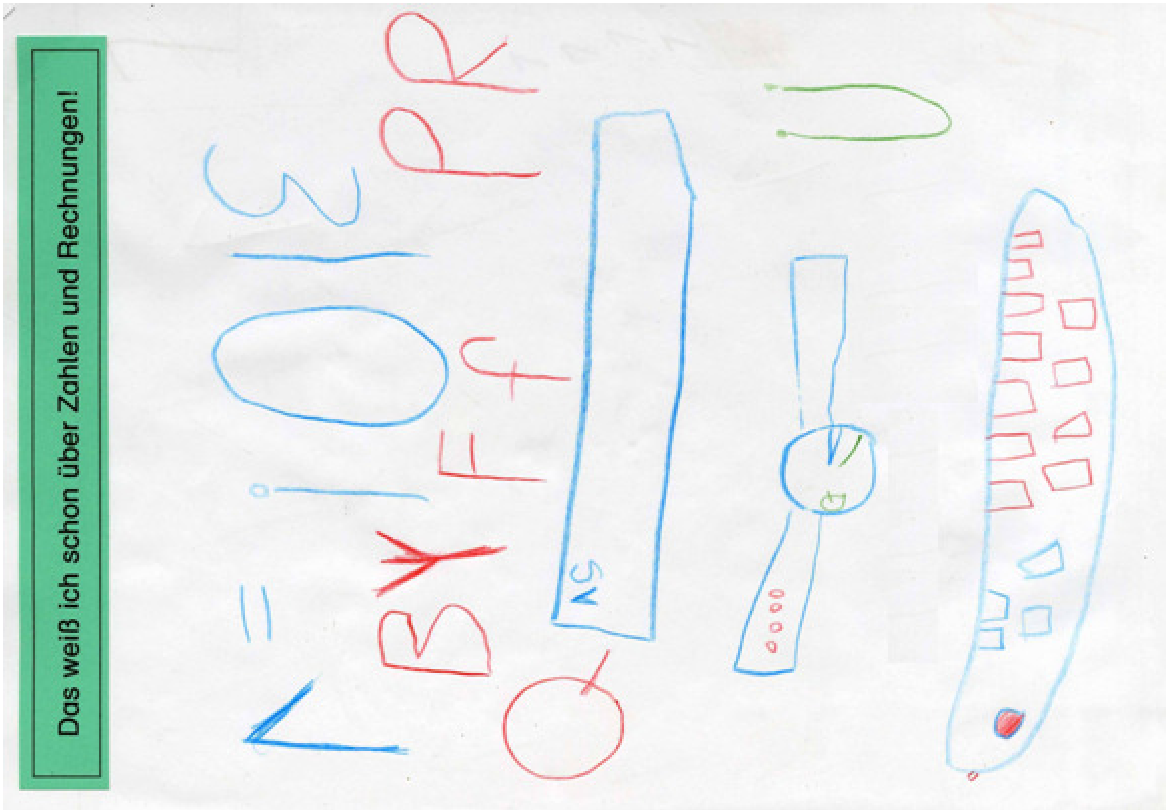


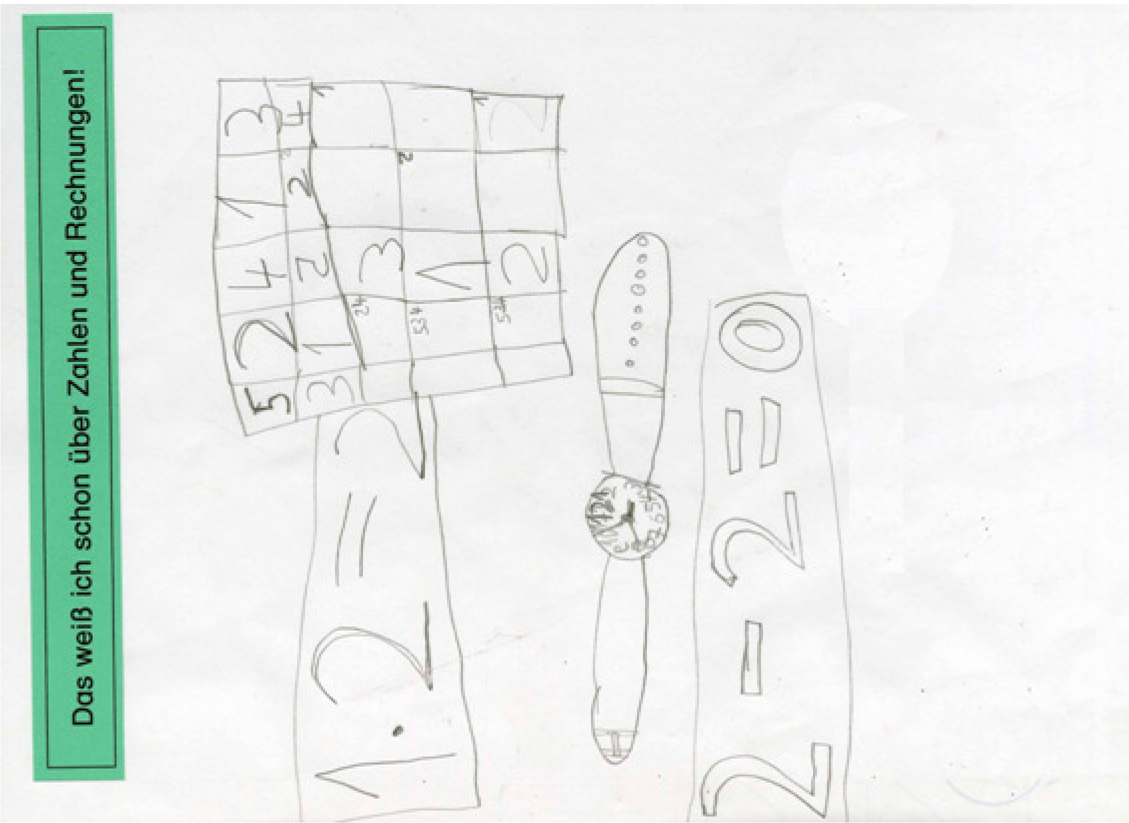
b) Materialien zur Unterrichtseinheit „Zahlen gibt es überall“

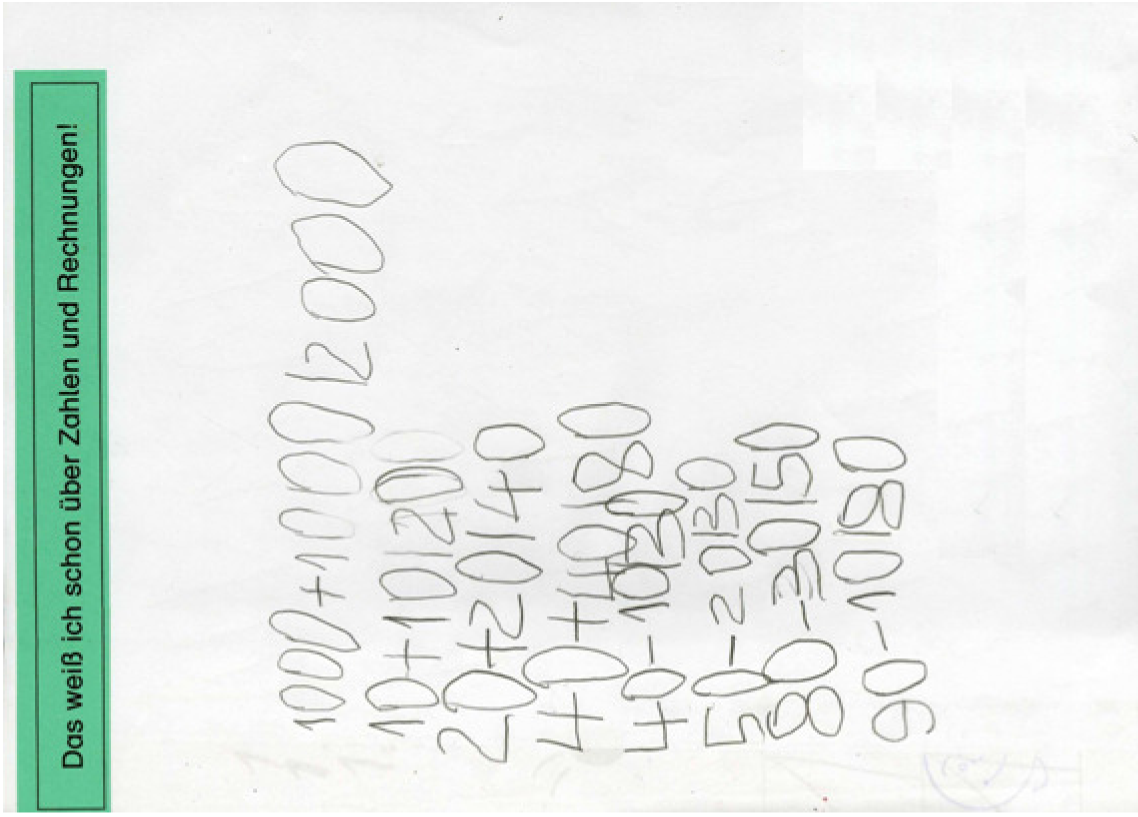
- Arbeitsergebnisse des Weißblatttests






Das weiß ich schon über Zahlen und Rechnungen!


Das weiß ich schon über Zahlen und Rechnungen!


Das weiß ich schon über Zahlen und Rechnungen!


Das weiß ich schon über Zahlen und Rechnungen!

c) Materialien zur Unterrichtseinheit zur Zahl 2

- Gedicht zur Zahl 1

Nur Eins

Nur eins will ich sagen, gleich zu Beginn:
Ich hab' nur eine Nase, ich hab' nur ein Kinn,
nur einen Rücken und auch nur einen Po.
Aber wem erzähl' ich das? Das weißt du sowieso!

Noch eins will ich sagen, doch das weißt du auch:
Du hast nur einen Hals und hast nur einen Bauch.
Nur die eine Zunge, nur den einen Mund,
hättest du ein paar davon, wär' das nicht sehr gesund!

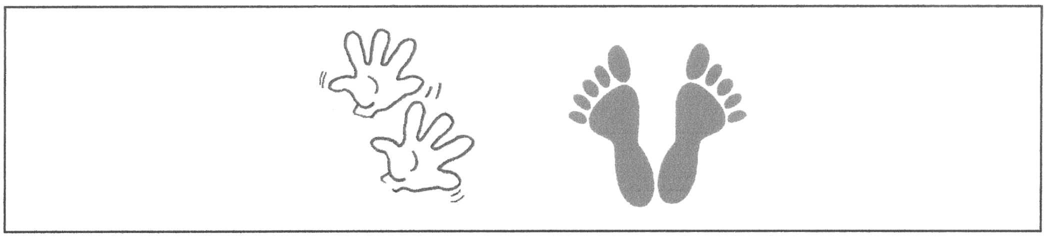
„Eins, nur eins!" sagt mein Onkel Heinz.
„Ja, es gibt halt Dinge, davon hast du nur eins!"

Noch eins will ich sagen, ich mach jetzt keinen Scherz:
Fühl' mal bitte nach: Du hast nur ein Herz!
Mehr als eins wär' komisch. Wie sagt mein Onkel Heinz?
„Ein Einhorn hat nur ein Horn, denn ein Einhorn braucht nur eins!"

Von dir gibt's nur einen, von mir gibt es nur mich.
Ich hab nur einen Körper. Das gleiche gilt für dich!
Einmal wollt' ich tauschen, ich wollt' ein neues Gesicht.
Da sagt mein Onkel Heinz zu mir: „Das geht leider nicht!"

„Eins, nur eins!", sagt mein Onkel Heinz.
„Ja, es gibt halt Dinge, davon hast du nur eins!"

- Arbeitsblatt



222

2 2 2 2 2 2 2 2 2

2 2 2 2 2 2 2 2 2

2 2 2 2 2 2 2 2 2

2 2 2 2 2 2 2 2 2

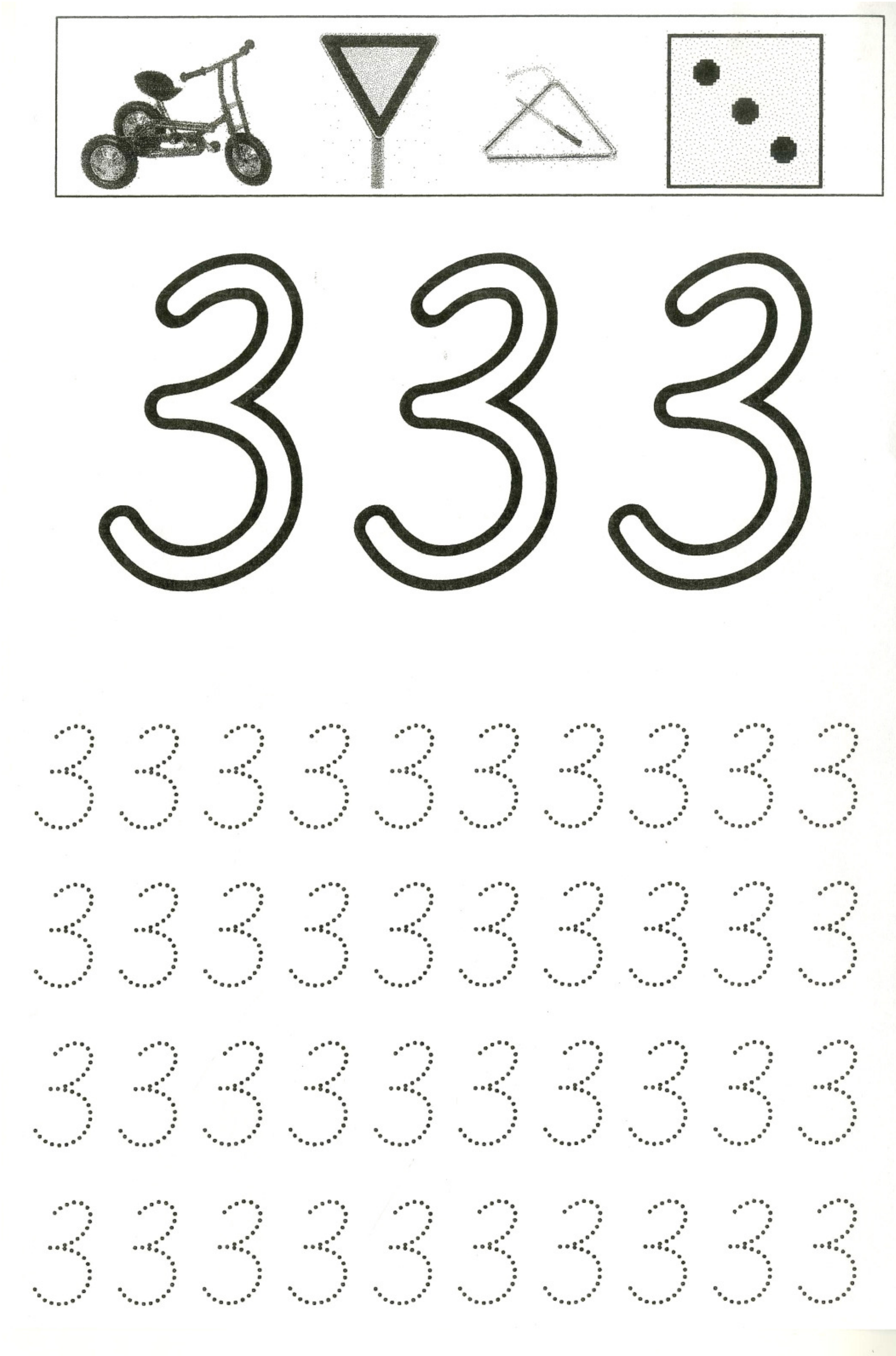
- Arbeitsergebnisse

d) Materialien zur Unterrichtseinheit zur Zahl 3

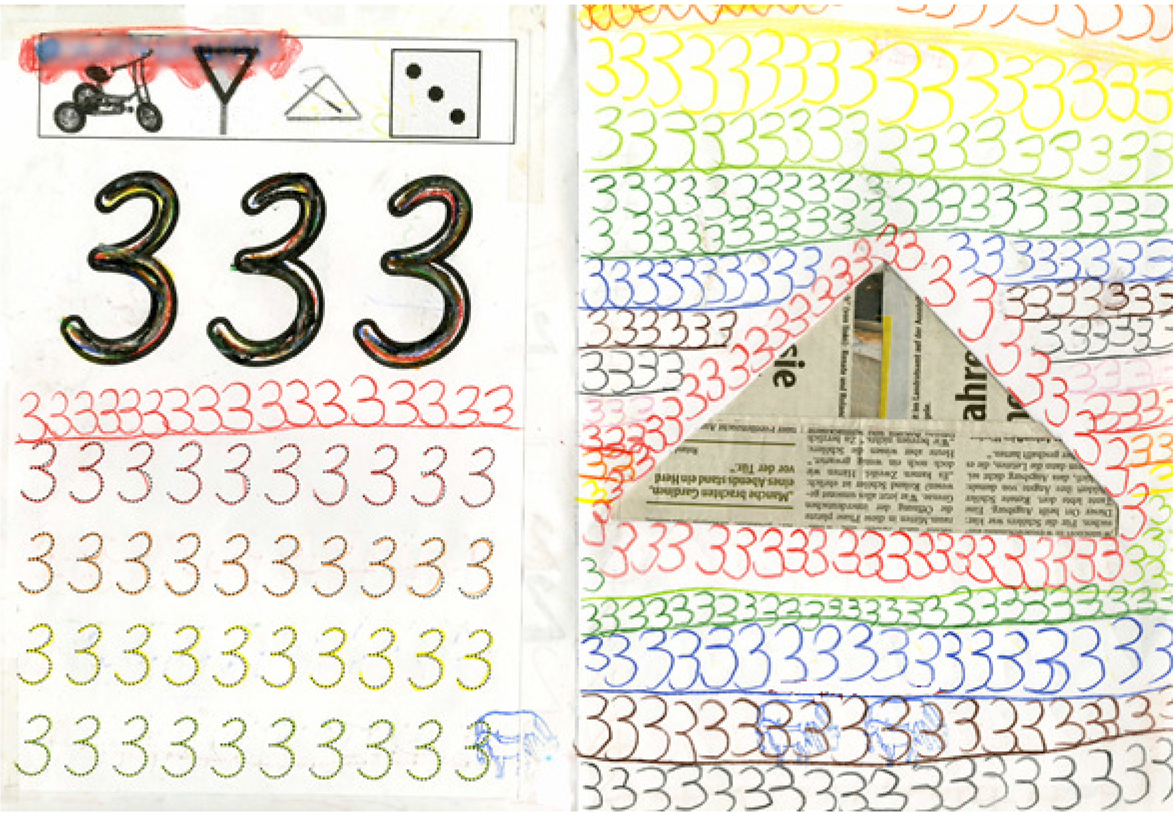
- Bild zur Zahl „3“

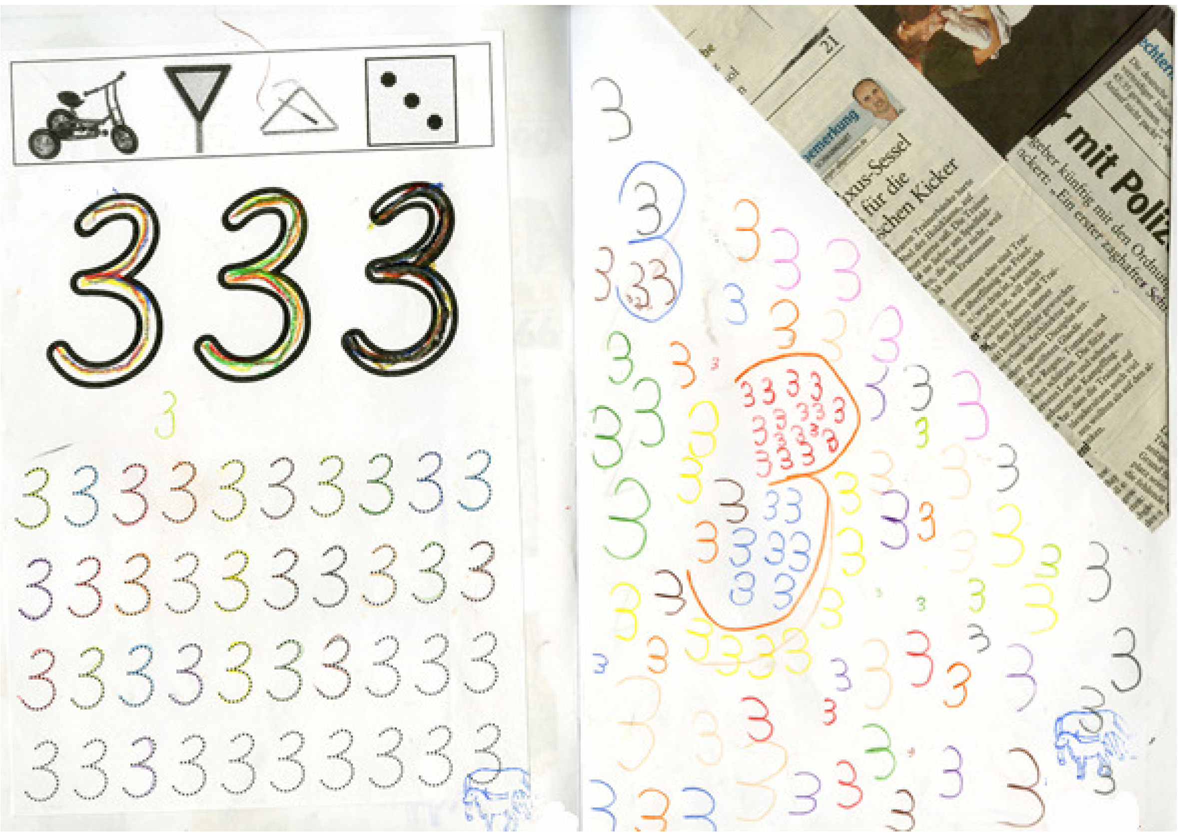
Mit freundlicher Genehmigung von TERZIO, München

- Arbeitsblatt



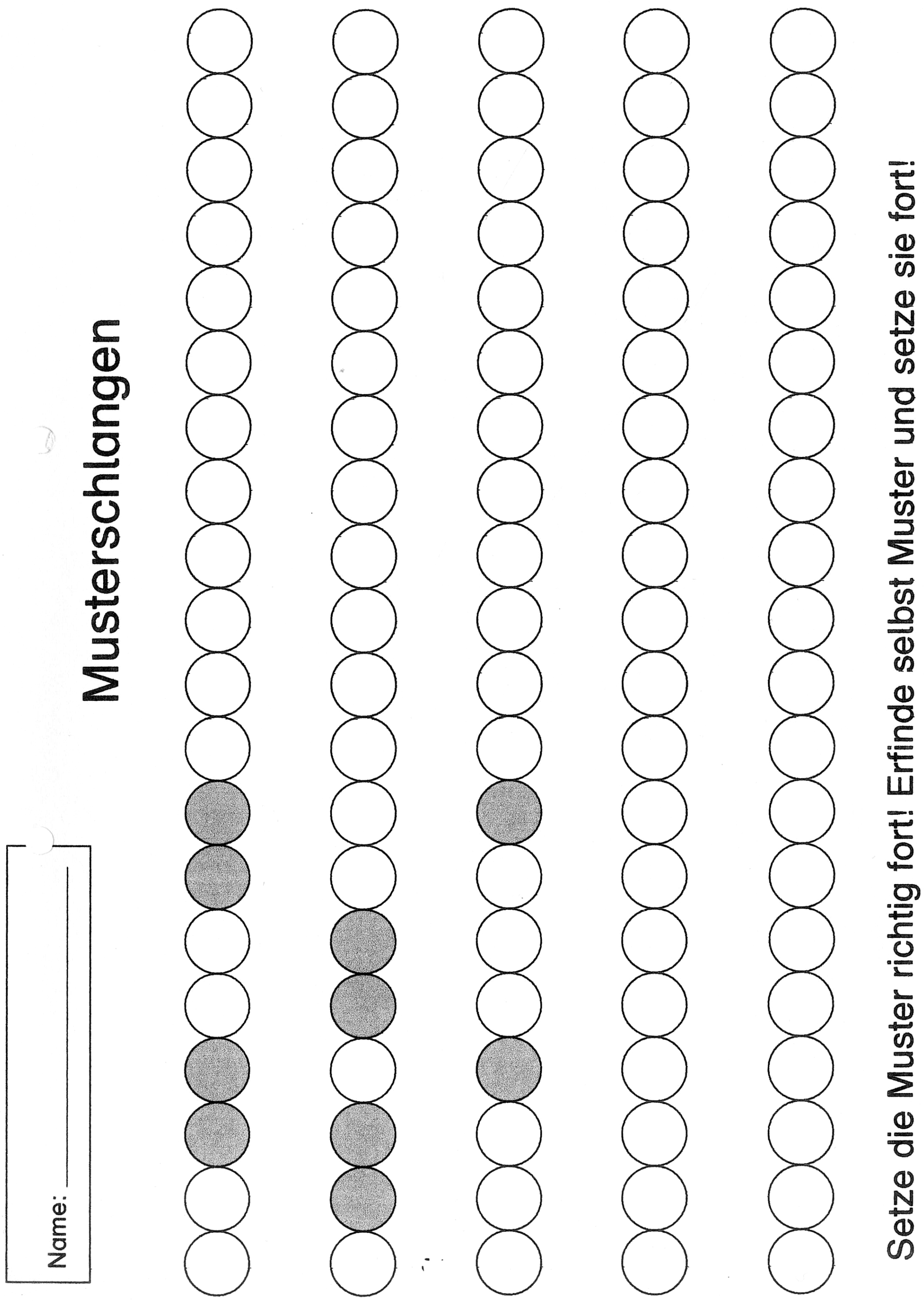
- Arbeitsergebnisse



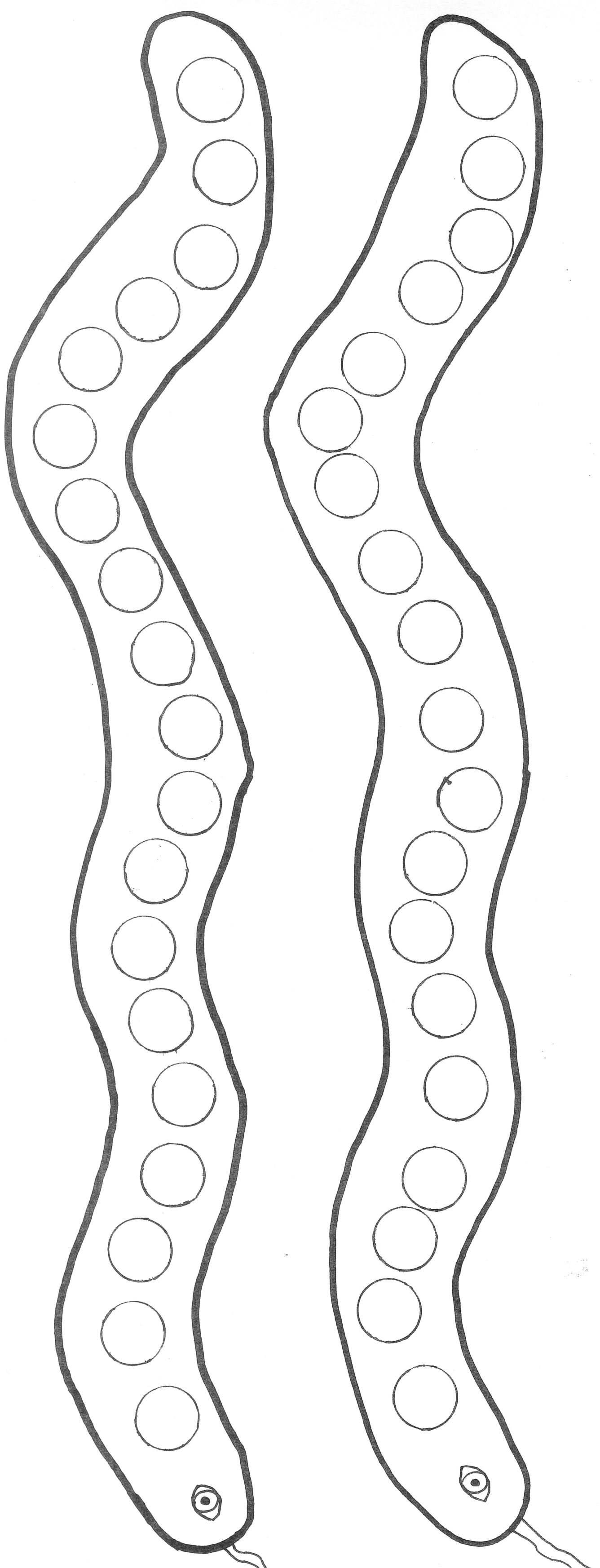


e) Materialien zur Unterrichtseinheit „Muster“

- Arbeitsblatt



- Musterschlangen



- Spieleerklärung „Rückenklopfer“:

  Beide Banknachbar-Kinder haben sich auf dem AB Muster überlegt.

  Das rechte Kind schließt die Augen, das linke Kind klopft/streicht/tippt eines seiner Muster auf den Rücken des rechten Kindes (wiederholt). Dieses legt passende Plättchen in eine Reihe. Zur Kontrolle für das rechte Kind wiederholt das linke Kind das Muster auf dem Rücken noch einmal. Das Muster wird durch Vergleichen mit der „Vorlage“ des Partners kontrolliert.

  Rollentausch: Das linke Kind klopft dem rechten sein Muster auf den Rücken.

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Zulassungsarbeit in allen Teilen selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Augsburg, den 09.02.2010

Maria Reichle