

**ASYMPTOTISCHES VERHALTEN DER
EULER-POINCARÉ-CHARAKTERISTIK VON
KEIM-KORN-MODELLEN IN WACHSENDEN
BEOBACHTUNGSFENSTERN**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Dr. rer. nat.

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Augsburg

von

Sebastian Heitzer

Augsburg, Juni 2022



Erstgutachter: Prof. Dr. Lothar Heinrich
Zweitgutachter: Prof. Dr. Evgeny Spodarev

Tag der mündlichen Prüfung: 11.11.2022

DANKSAGUNG

Lieber Lothar, einen riesen Dank dafür, was Du die letzten knapp vier Jahre für mich gemacht hast.

Außerdem danke ich meiner Mama und meinem Bruder (wegen Rechtschreibprüfung) und meiner Freundin (für alles sonst).

Zu guter Letzt möchte ich auch allen und insbesondere Professoren, Lehrern und Übungsleitern danken, die mir in meinem Leben etwas beigebracht haben.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1
2	GRUNDLEGENDE DEFINITIONEN	3
2.1	Markierte Punktprozesse	3
2.2	Zufällige abgeschlossene Mengen	9
3	DIE EULER-POINCARÉ-CHARAKTERISTIK	12
3.1	Positive Tangentenpunkte	16
3.2	Negative Tangentenpunkte	18
3.3	Schätzung der Euler-Poincaré-Charakteristik	21
4	KENNZAHLEN DER TANGENTENPUNKTPROZESSE	25
5	VERTEILUNGSASYMPTOTIK DER EULER-POINCARÉ-CHARAKTERISTIK	43
5.1	Das stationäre Boolesche Modell	43
5.2	Keim-Korn-Modelle mit β -mischenden Keim-Prozessen	65
6	SCHÄTZUNG DER ASYMPTOTISCHEN VARIANZ	72
7	SIMULATIONSSTUDIEN	79
	SYMBOLVERZEICHNIS	86
	LITERATURVERZEICHNIS	87

1 EINLEITUNG

Zufällige Prozesse treten in unterschiedlichen Ausprägungen in der belebten und unbelebten Natur auf. Wir wollen in dieser Arbeit spezielle zufällige räumliche Strukturen, die sogenannten Keim-Korn-Modelle, untersuchen. Keim-Korn-Modelle entstehen aus Überlagerungen von zufällig geformten Körnern, die an zufälligen Orten wachsen. Beispielsweise können die in einem Käselaiab eingeschlossenen Luftblasen als Realisierung eines Keim-Korn-Modells angesehen werden.

Bei der Betrachtung von solchen zufälligen Mengen im Raum ergeben sich direkt interessante Fragestellungen: Wie löchrig ist der Käse und wie groß ist der Volumenanteil der Lufteinschlüsse? Diese Frage lässt sich von außen offenbar nicht klären. Erst mit Hilfe eines Schnittes durch den Käselaiab (d.h. der Entnahme einer Stichprobe) kann man entsprechende Aussagen treffen.

Um aus einer Stichprobe quantitative Aussagen über eine zufällige Menge treffen zu können, ist die mathematische Beschreibung der zugrundeliegenden zufälligen Prozesse von zentraler Bedeutung. Dabei ergibt sich über die Definition sinnvoller Kennzahlen hinaus auch die Frage, ob sich aus einer Realisierung einer zufälligen Menge Rückschlüsse auf den zugrundeliegenden Prozess ziehen lassen. Solche oder ähnliche Fragestellungen sind dabei keineswegs nur theoretisch, sondern finden Anwendung z.B. in der Bildverarbeitung oder der Metallurgie.

Für Keim-Korn-Modelle sind naheliegende Kennzahlen wie der Flächenanteil sehr gut verstanden und statistisch gut schätzbar. Eine weitere interessante Kennzahl ist die Euler-Poincaré-Charakteristik, die ein Maß für die Porosität einer Struktur im Raum ist. Wir wollen mit dieser Arbeit einen Beitrag zum Verständnis der Euler-Poincaré-Charakteristik von Keim-Korn-Modellen leisten. Dabei sind wir insbesondere an der Entwicklung eines Schätzers und seiner Verteilung asymptotik interessiert. Im Gegensatz zu existierenden Arbeiten werden wir einen punktprozess-theoretischen Zugang zu dieser Problemstellung wählen. Im Folgenden wollen wir kurz den Aufbau der vorliegenden Arbeit skizzieren.

Im zweiten Kapitel führen wir die erforderliche Notation ein und stellen grundlegende Definitionen und Aussagen für den weiteren Verlauf bereit.

In Kapitel drei befassen wir uns mit der Definition und Schätzung der Euler-Poincaré-Charakteristik. Diese kann man über verschiedene Zugänge bestimmen. Wir werden die Euler-Poincaré-Charakteristik mit Hilfe von positiven bzw. negativen Tangentenpunkten berechnen. Zur Definition der Tangentenpunktprozesse lehnen wir uns an die rekursive Konstruktion von Hadwiger an.

Daraufhin wollen wir Kennzahlen der im dritten Kapitel definierten Prozesse für den Fall eines Booleschen Modells berechnen. Ausgangspunkt bei den Rechnungen wird die Slivnyak-Mecke Formel sein. Wir werden insbesondere sehen, dass der im dritten Kapitel definierte Schätzer erwartungstreu ist.

Das Herzstück dieser Arbeit bildet Kapitel fünf. Dort wollen wir die Verteilung asymptotik des Schätzers der Euler-Poincaré-Charakteristik untersuchen. Dabei betrachten wir zunächst Boolesche Modelle mit beschränkten Körnern. Diese starken Einschränkungen führen zu einer sehr speziellen Abhängigkeitsstruktur, der sogenannten m -Abhängigkeit. Wir werden daher in diesem Fall in der Lage sein Edgeworth-Entwicklungen und ungleichmäßige Berry-Esseen Schranken anzugeben. Durch eine Approximation mit Hilfe von m -abhängigen Feldern werden wir auch einen zentralen Grenzwertsatz für Boolesche

Modelle mit unbeschränkten Körnern in \mathbb{R}^2 beweisen. Um zentrale Grenzwertsätze für allgemeinere Keim-Korn-Modelle formulieren zu können, müssen wir abstraktere Abhängigkeitsstrukturen untersuchen. In dieser Arbeit werden wir uns auf β -mischende Keim-Prozesse fokussieren. Für diese größere Klasse an Prozessen wird es nicht mehr möglich sein Konvergenzgeschwindigkeiten in den Grenzwertsätzen anzugeben.

Um die Verteilung asymptotik aus dem fünften Kapitel für Hypothesentests und die Konstruktion von asymptotischen Konfidenzintervallen nutzbar zu machen, müssen wir alle Verteilungsparameter bestimmen. Dies ist für die asymptotische Varianz allerdings nur im Fall des Booleschen Modells (und selbst dort nur semi-explizit) möglich. Daher befasst sich Kapitel sechs mit der Definition und Untersuchung eines Schätzers für die asymptotische Varianz. Es zeigt sich, dass der eingeführte Schätzer asymptotisch erwartungstreu und L^2 -konsistent ist.

Abgerundet wird die Arbeit von Simulationsstudien. Dazu greifen wir die Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln auf, indem wir eine entsprechend normierte Größe mit der Standardnormalverteilung vergleichen und ein Konfidenzintervall berechnen.

2 GRUNDLEGENDE DEFINITIONEN

Die mathematische Untersuchung zufälliger Muster im Raum beruht auf der Untersuchung der zugrundeliegenden zufälligen Prozesse. In unserem Fall sind das sogenannte markierte Punktprozesse, die ein Keim-Korn-Modell erzeugen. In diesem Kapitel wollen wir alle für den weiteren Verlauf notwendigen Definitionen und bekannten Resultate nennen und Notationen einführen. Dabei orientieren wir uns an [19], [29] und [41].

2.1 MARKIERTE PUNKTPROZESSE

Wir betrachten grundsätzlich den d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^d mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diesen statten wir mit der borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ aus. Zusätzlich betrachten wir den sogenannten *Markenraum* \mathcal{M} , von dem wir verlangen, dass er ein separabler, vollständig metrisierbarer Raum (ein sogenannter polnischer Raum) ist. Den Markenraum versehen wir ebenfalls mit der entsprechenden borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. Für uns wird insbesondere die Menge der nichtleeren, konvexen und kompakten Mengen (versehen mit der Hausdorff-Metrik) als Markenraum eine wichtige Rolle spielen. Wir interessieren uns für Zählmaße $\psi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{N}_0$, die wir mit ihrem Träger

$$\text{supp}(\psi) := \{(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} \mid \psi(\{(x, m)\}) > 0\}$$

identifizieren können. Wir nennen ein Zählmaß ψ *einfach*, wenn $\psi(\{x\} \times \mathcal{M}) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Außerdem nennen wir ein Zählmaß ψ *lokal endlich*, falls $\psi(B \times \mathcal{M}) < \infty$ für alle $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, wobei wir mit $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ die beschränkten Borel-Mengen des \mathbb{R}^d bezeichnen. Auf der Menge der lokal endlichen Zählmaße

$$N_{\mathcal{M}} := \{\psi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{N}_0 \mid \psi \text{ ist lokal endliches Zählmaß}\}$$

erzeugen wir eine σ -Algebra $\mathfrak{N}_{\mathcal{M}}$ durch

$$\mathfrak{N}_{\mathcal{M}} := \sigma(\{\psi \in N_{\mathcal{M}} \mid \psi(B \times L) = n\} : n \in \mathbb{N}_0, L \in \mathcal{B}(\mathcal{M}), B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)).$$

Mit diesen Definitionen können wir auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ markierte Punktprozesse definieren:

Definition 2.1 (Markierter Punktprozess): *Eine $(\mathcal{A}, \mathfrak{N}_{\mathcal{M}})$ -messbare Abbildung $\Psi_{\mathcal{M}} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (N_{\mathcal{M}}, \mathfrak{N}_{\mathcal{M}})$ heißt markierter Punktprozess (in \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{M}).*

Aus einem markierten Punktprozess $\Psi_{\mathcal{M}}$ können wir gemäß $\Psi(\cdot) := \Psi_{\mathcal{M}}(\cdot \times \mathcal{M})$ den zugrundeliegenden (unmarkierten) Punktprozess Ψ erhalten. Auch wenn im Folgenden unser Augenmerk auf markierten Punktprozessen liegt, gelten doch auch alle Aussagen analog für unmarkierte Punktprozesse.

Betrachten wir nun Definition 2.1 genauer. Ein markierter Punktprozess ist für uns ein spezielles zufälliges Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M})$, seine Verteilung $P_{\Psi_{\mathcal{M}}}(\cdot) := \mathbb{P}(\Psi_{\mathcal{M}} \in \cdot)$ definieren wir durch das Bildmaß. Für die Beschreibung der Verteilung sind die endlichdimensionalen Verteilungen wesentlich. Wir interpretieren für festes $B \times L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M})$ die Zufallsgröße $\Psi_{\mathcal{M}}(B \times L)$ als Anzahl der Punkte in B mit Marken in L .

Die Zusatzvoraussetzung, dass das Zählmaß lokal endlich ist, sichert die Existenz von zufälligen Folgen $(X_i)_{i \geq 1}$ bzw. $(M_i)_{i \geq 1}$ mit Werten in \mathbb{R}^d bzw. \mathcal{M} , sodass ein markierter Punktprozess mit Hilfe des Diracmaßes durch

$$\Psi_{\mathcal{M}} = \sum_{i \geq 1} \Psi_{\mathcal{M}}(\{(X_i, M_i)\}) \delta_{(X_i, M_i)}$$

dargestellt werden kann. Wir nennen einen markierten Punktprozess einfach, wenn seine Realisierungen mit Wahrscheinlichkeit 1 einfach sind. Für einfache Prozesse gilt dann

$$\Psi_{\mathcal{M}} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)}.$$

Die Verteilung von einfachen Prozessen wird durch die Leerwahrscheinlichkeiten festgelegt. In dieser Arbeit werden wir fortan ausschließlich einfache Prozesse betrachten. Anstatt einen markierten Punktprozess als Maß zu interpretieren, können wir ihn auch mit seinem Träger identifizieren. In diesem Sinne sind unmarkierte Punktprozesse als Punktmuster in \mathbb{R}^d interpretierbar (siehe Abbildung 2.4).

Der bedeutendste und am besten verstandene Prozess der Stochastischen Geometrie ist der Poisson-Prozess. Seine Bedeutung lässt sich damit begründen, dass er viele zufällige Phänomene in der Natur adäquat beschreibt und sich trotzdem viele Rechnungen explizit durchführen lassen.

Definition 2.2 (Poisson-Prozess): *Sei Λ ein lokal endliches Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M})$. Ein markierter Punktprozess $\Psi_{\mathcal{M}}$ heißt Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ , falls gilt:*

- (i) *Für $n \in \mathbb{N}$ und disjunkte $B_1 \times L_1, \dots, B_n \times L_n \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M})$ sind die Zufallsgrößen $\Psi_{\mathcal{M}}(B_1 \times L_1), \dots, \Psi_{\mathcal{M}}(B_n \times L_n)$ vollständig unabhängig.*
- (ii) *Für alle $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathbb{P}(\Psi_{\mathcal{M}}(B \times L) = k) = e^{-\Lambda(B \times L)} \frac{\Lambda(B \times L)^k}{k!}.$$

Wir schreiben dann kurz $\Psi_{\mathcal{M}} \sim \Pi_{\Lambda}$.

Ist $\Psi_{\mathcal{M}} \sim \Pi_{\Lambda}$, so ist $\Psi_{\mathcal{M}}$ genau dann einfach, wenn Λ atomlos ist. Außerdem folgt aus der Definition direkt, dass $\mathbb{E}[\Psi_{\mathcal{M}}(B \times L)] = \Lambda(B \times L)$. Dies führt auf die allgemeingültige Definition eines wichtigen begleitenden Maßes für markierte Punktprozesse.

Definition 2.3 (Intensitätsmaß): *Sei $\Psi_{\mathcal{M}}$ ein markierter Punktprozess mit $\mathbb{E}[\Psi(B)] < \infty$ für alle $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt das Maß $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\Lambda(A) := \mathbb{E}[\Psi_{\mathcal{M}}(A)]$$

das Intensitätsmaß von $\Psi_{\mathcal{M}}$.

Dass es sich bei dem Intensitätsmaß tatsächlich um ein Maß handelt, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz. Das Intensitätsmaß taucht oft in expliziten Rechnungen auf. Das liegt unter anderem am sogenannten Campbell-Theorem. Für einen markierten

Punktprozess $\Psi_{\mathcal{M}}$ mit Intensitätsmaß Λ und eine nicht-negative und messbare oder (bzgl. Λ) integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i \geq 1} f(X_i, M_i) \right] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}} f(x, m) \Lambda(d(x, m)).$$

Betrachten wir nun beispielhaft Realisierungen von unterschiedlichen (unmarkierten) Poisson-Prozessen. Dabei vereinbaren wir die für die gesamte Arbeit verbindliche Notation von $|B|_d$ für das Lebesgue-Maß einer Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

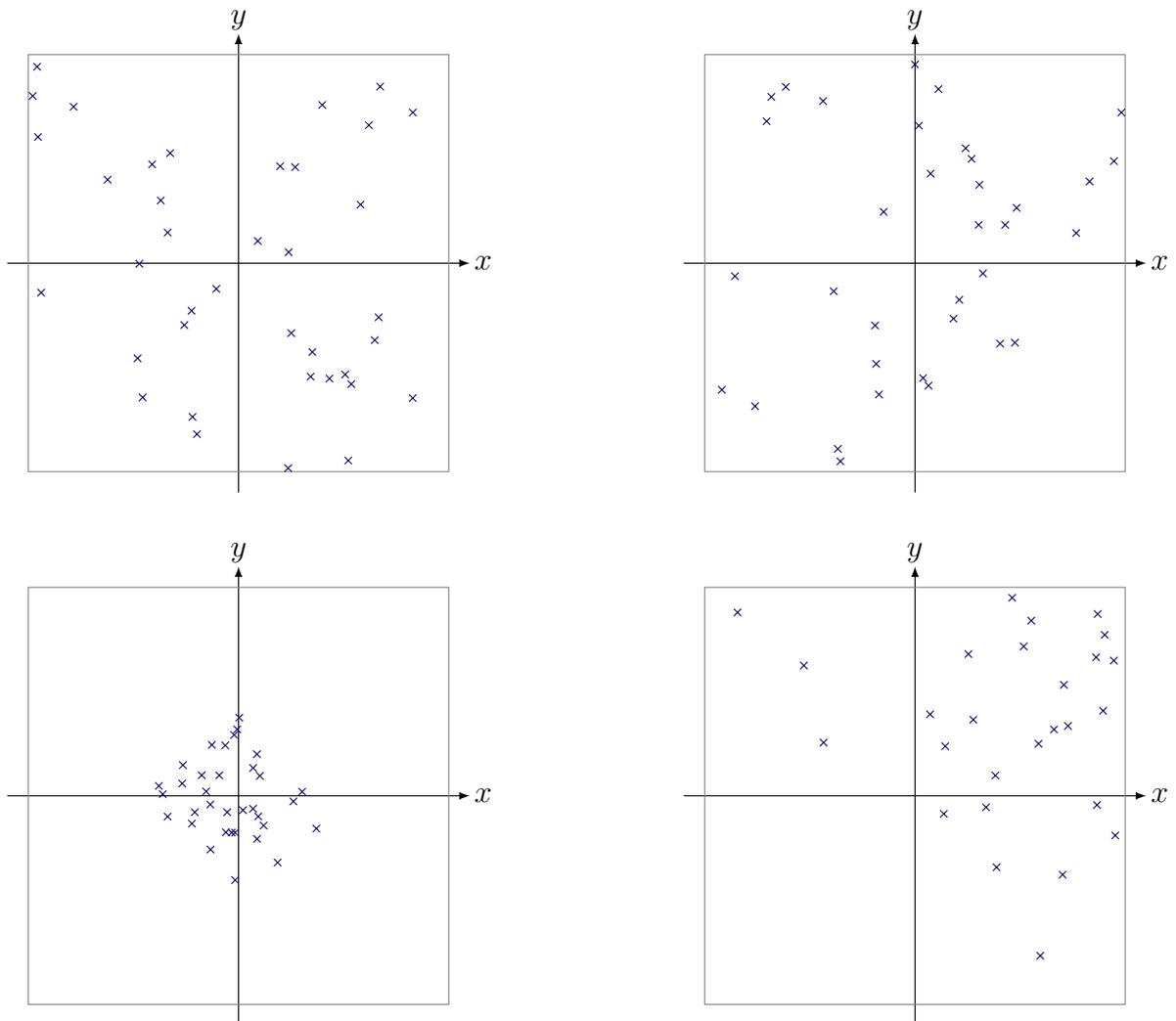


Abbildung 2.4: Realisierungen von unmarkierten Poisson-Prozessen Ψ mit verschiedenen Intensitätsmaßen Λ im Beobachtungsfenster $[-1, 1]^2$ (grau umrandet). Bei den beiden Realisierungen oben ist $\Lambda(A) = 30 |A|_2 / 4$, der Prozess ist stationär und isotrop. Unten links hat Λ die Dichte $f(x, y) = 750 \exp(-25(x^2 + y^2)/2) / (2\pi)$, der Prozess ist also nur isotrop. Unten rechts hat Λ die Dichte $f(x, y) = 30(1 + x)(1 + y)/4$, der Prozess ist also weder stationär noch isotrop.

Obwohl all diese beispielhaften Muster Realisierungen von Poisson-Prozessen sind, zeigen sie ein komplett unterschiedliches Verhalten. Erklären lässt sich das durch die unterschiedlichen Intensitätsmaße, die uns zu den folgenden Invarianzeigenschaften (bezüglich der Gleichheit in Verteilung, notiert mit $\stackrel{d}{=}$) von markierten Punktprozessen führen. Dazu bezeichnen wir die Menge der Drehmatrizen in $\mathbb{R}^{d \times d}$ mit SO_d .

Definition 2.5 (Invarianzeigenschaften): *Ein markierter Punktprozess $\Psi_{\mathcal{M}}$ heißt*

(i) *stationär, falls für alle $s \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i + s, M_i)} \stackrel{d}{=} \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)}.$$

(ii) *isotrop, falls für alle $U \in SO_d$ gilt*

$$\sum_{i \geq 1} \delta_{(UX_i, M_i)} \stackrel{d}{=} \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)}.$$

Grob gesagt kann man also bei einem stationären bzw. isotropen Punktprozess statistisch nicht zwischen dem um s verschobenen bzw. dem mit der zu U gehörenden Transformation gedrehtem Bild unterscheiden. Diese Eigenschaften lassen sich in Abbildung 2.4 zumindest erahnen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir diese Invarianzeigenschaften in expliziten Rechnungen verwenden, um diese zu vereinfachen.

Aus Definition 2.2 folgt, dass ein Poisson-Prozess genau dann stationär bzw. isotrop ist, wenn sein Intensitätsmaß Λ stationär bzw. isotrop ist. Im stationären Fall ist das Intensitätsmaß verschiebungsinvariant und damit gibt es eine Konstante $\lambda > 0$ (die sogenannte *Intensität*) und ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf \mathcal{M} (die sogenannte *typische Markenverteilung*), sodass $\Lambda = \lambda |\cdot|_d \otimes Q$. Wir vereinbaren daher die Notation $\Psi_{\mathcal{M}} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ für einen stationären Poisson-Prozess. Bei einem stationären Poisson-Prozess ist die Markenfolge $(M_i)_{i \geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt (abgekürzt i.i.d.) mit $M_1 \sim Q$ und unabhängig von der Punktfolge $(X_i)_{i \geq 1}$. Diese Art der Markierung nennen wir *unabhängige Markierung*.

Im Rahmen von expliziten Rechnungen, wird oft das prozesstheoretische Analogon zur erzeugenden Funktion, das sogenannte erzeugende Funktional, auftauchen.

Definition 2.6 (Erzeugendes Funktional): *Sei $\Psi_{\mathcal{M}}$ ein markierter Punktprozess mit Intensitätsmaß Λ . Weiter sei $v : \mathbb{R}^d \times \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ messbar mit*

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}} 1 - v(x, m) \Lambda(d(x, m)) < \infty. \quad (2.6.1)$$

Dann heißt die Abbildung definiert durch

$$G_{\Psi_{\mathcal{M}}}[v] := \mathbb{E} \left[\prod_{i \geq 1} v(X_i, M_i) \right]$$

das erzeugende Funktional von $\Psi_{\mathcal{M}}$.

Dabei sichert die Voraussetzung 2.6.1 die Endlichkeit von $G_{\Psi_{\mathcal{M}}}[v]$. Ist $\Psi_{\mathcal{M}} \sim \Pi_{\Lambda}$ ein Poisson-Prozess, so lässt sich mit Hilfe von algebraischer Induktion zeigen, dass

$$G_{\Psi_{\mathcal{M}}}[v] = \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}} 1 - v(x, m) \Lambda(d(x, m)) \right). \quad (2.6.2)$$

Wir sehen also, dass das Intensitätsmaß oft in Rechnungen auftaucht. Darüber hinaus spielen für uns noch weitere Maße eine wichtige Rolle. Da wir diese Maße nur für Punktprozesse benötigen, verzichten wir auf die allgemeinere Definition für markierte Punktprozesse. Fortan notieren wir Summation über paarweise verschiedene Indizes kurz mit einem hochgestellten \neq .

Definition 2.7 (Faktorielles Momentenmaß): *Sei Ψ ein einfacher Punktprozess und $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt das Maß $\alpha^{(k)}$ definiert durch*

$$\alpha^{(k)} \left(\bigtimes_{j=1}^k B_j \right) := \mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1}^{\neq} \mathbb{1}_{B_1}(X_{i_1}) \cdots \mathbb{1}_{B_k}(X_{i_k}) \right]$$

das k -te faktorielle Momentenmaß von Ψ .

Beispielsweise gilt für einen Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ , dass $\alpha^{(k)} = \Lambda \otimes \cdots \otimes \Lambda$. Es gibt das folgende Analogon zur Campbell Formel:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1}^{\neq} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \right] = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_k) \alpha^{(k)}(d(x_1, \dots, x_k)).$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, dass $\alpha^{(k)}$ eine Lebesgue-Dichte besitzt:

Definition 2.8 (Produktdichte k -ter Ordnung): *Sei Ψ ein einfacher Punktprozess mit lokal endlichem faktoriellen Momentenmaß $\alpha^{(k)}$ und $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt die Funktion $\varrho^{(k)} : (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch*

$$\alpha^{(k)} \left(\bigtimes_{j=1}^k B_j \right) = \int_{B_k} \cdots \int_{B_1} \varrho^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_k$$

die Produktdichte k -ter Ordnung von Ψ .

Ist Ψ ein stationärer Poisson-Prozess, so ist $\varrho^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \lambda^k$. Im Fall eines stationären Punktprozesses lässt sich aus dem k -ten faktoriellen Momentenmaß durch Desintegration das sogenannte k -te reduzierte faktorielle Momentenmaß definieren:

Definition 2.9 (Reduziertes faktorielles Momentenmaß): *Sei Ψ ein einfacher stationärer Punktprozess mit Intensität λ und $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt das Maß $\alpha_{\text{red}}^{(k)}$ definiert durch*

$$\alpha^{(k)} \left(\bigtimes_{j=1}^k B_j \right) = \lambda \int_{B_1} \alpha_{\text{red}}^{(k)} \left(\bigtimes_{j=2}^k (B_j - x) \right) dx$$

das k -te reduzierte faktorielle Momentenmaß von Ψ .

Wir notieren Vereinigungen von nichtleeren und disjunkten Mengen durch \sqcup und definieren damit aus den faktoriellen Momentenmaßen das folgende signierte Maß:

Definition 2.10 (Faktorielles Kumulantenmaß): Sei Ψ ein einfacher Punktprozess und $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt das signierte Maß $\gamma^{(k)}$ definiert durch

$$\gamma^{(k)} \left(\bigtimes_{j=1}^k B_j \right) := \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (j-1)! \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j \\ = \{1, \dots, k\}}} \prod_{r=1}^j \alpha^{(\#I_r)} \left(\bigtimes_{i \in I_r} B_i \right)$$

das k -te faktorielle Kumulantenmaß von Ψ .

Für einen Poisson-Prozess verschwinden die faktoriellen Kumulantenmaße der Ordnung $k \geq 2$. Für stationäre Punktprozesse gilt $\alpha^{(1)} = \gamma^{(1)} = \lambda | \cdot |_d$ und

$$\gamma^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) - \lambda^2 |B_1|_d |B_2|_d$$

für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$.

Analog zu den Definitionen der Produktdichte $\varrho^{(k)}$ bzw. des reduzierten Momentenmaßes $\alpha_{\text{red}}^{(k)}$ lässt sich auch die sogenannte Kumulandendichte $c^{(k)}$ gemäß

$$\gamma^{(k)} \left(\bigtimes_{j=1}^k B_j \right) = \int_{B_k} \dots \int_{B_1} c^{(k)}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

bzw. das reduzierte faktorielle Kumulantenmaß $\gamma_{\text{red}}^{(k)}$ (bei dem es sich um ein signiertes Maß handelt) gemäß

$$\gamma^{(k)} \left(\bigtimes_{j=1}^k B_j \right) = \lambda \int_{B_1} \gamma_{\text{red}}^{(k)} \left(\bigtimes_{j=2}^k (B_j - x) \right) dx$$

definieren. Wir können mit Hilfe von Definition 2.10 sogar jeweils eine Umrechnung angeben.

2.2 ZUFÄLLIGE ABGESCHLOSSENE MENGEN

In \mathbb{R}^d (versehen mit dem Standardskalarprodukt) definieren wir zunächst für uns wichtige Mengensysteme, nämlich die Menge der kompakten Mengen $\mathcal{C}^d := \{C \subset \mathbb{R}^d \mid C \text{ ist kompakt}\}$ (versehen mit der Hausdorff-Metrik) und die Menge der abgeschlossenen Mengen $\mathcal{F}^d := \{F \subset \mathbb{R}^d \mid F \text{ ist abgeschlossen}\}$. Damit definieren wir für $C \in \mathcal{C}^d$ die sogenannten hitting sets $\mathcal{F}_C^d := \{F \in \mathcal{F}^d \mid F \cap C \neq \emptyset\}$ und daraus die Matheronsche σ -Algebra $\sigma_f := \sigma(\mathcal{F}_C^d : C \in \mathcal{C}^d)$. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ können wir damit zufällige abgeschlossene Mengen definieren:

Definition 2.11 (Zufällige abgeschlossene Menge): *Eine (\mathcal{A}, σ_f) messbare Abbildung $\Xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{F}^d, \sigma_f)$ heißt zufällige abgeschlossene Menge.*

Die Verteilung von Ξ definieren wir abermals mit Hilfe des Bildmaßes durch $P_\Xi(\cdot) = \mathbb{P}(\Xi \in \cdot)$. Eine wichtige charakterisierende Abbildung für zufällige abgeschlossene Mengen ist das sogenannte Kapazitätsfunktional.

Definition 2.12 (Kapazitätsfunktional): *Sei Ξ eine zufällige abgeschlossene Menge. Dann heißt die Abbildung $T_\Xi : \mathcal{C}^d \rightarrow [0, 1]$ definiert durch*

$$T_\Xi(C) := \mathbb{P}(\Xi \cap C \neq \emptyset)$$

das Kapazitätsfunktional von Ξ .

Die Verteilung von Ξ wird eindeutig durch das Kapazitätsfunktional festgelegt. Für zufällige abgeschlossene Mengen ist das Kapazitätsfunktional also das Analogon zur Verteilungsfunktion für Zufallsgrößen. Wir interessieren uns im Folgenden für spezielle zufällige Mengen:

Definition 2.13 (Keim-Korn-Modell): *Sei $\Psi_{\mathcal{C}^d}$ ein unabhängig markierter Punktprozess mit*

$$\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}((X_i + \Xi_i) \cap C \neq \emptyset) < \infty \quad (2.13.1)$$

für alle $C \in \mathcal{C}^d$. Dann heißt

$$\Xi = \bigcup_{i \geq 1} (X_i + \Xi_i)$$

das von $\Psi_{\mathcal{C}^d}$ erzeugte Keim-Korn-Modell.

Die Zufallsgrößen $(X_i)_{i \geq 1}$ bzw. $(\Xi_i)_{i \geq 1}$ nennen wir *Keime* bzw. *Körner*, den Prozess $\Psi_{\mathcal{C}^d}$ nennen wir *Keim-Korn-Prozess* und ein Korn $\Xi_0 \sim P_{\Xi_1}$ heißt *typisches Korn*. Bedingung 2.13.1 sichert, dass Ξ mit Wahrscheinlichkeit 1 abgeschlossen ist. Ein Keim-Korn-Modell ist damit eine spezielle zufällige abgeschlossene Menge. Bedingung 2.13.1 lässt sich unter zusätzlichen Annahmen an den Keim-Prozess noch expliziter fassen. Falls der Keim-Prozess stationär ist und eine endliche Intensität besitzt, so folgt mit Hilfe des Campbell-Theorems Bedingung 2.13.1 aus der Bedingung $\mathbb{E}[\|\Xi_0 \oplus C\|_d] < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}^d$, wobei wir mit $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ die Minkowski-Summe der Mengen A und B bezeichnen. Für Keim-Korn-Modelle Ξ lässt sich das Kapazitätsfunktional mit Hilfe des erzeugenden Funktionals des Keim-Prozesses Ψ angeben

$$T_\Xi(C) = 1 - G_\Psi[1 - T_{\Xi_0}(C - \cdot)].$$

Ein Beispiel für die Realisierung eines Keim-Korn-Modells bildet die Kraterlandschaft auf dem Mond. Eines der wichtigsten Keim-Korn-Modelle ist das Boolesche Modell, dessen Bedeutung sich ähnlich wie beim Poisson-Prozess damit erklären lässt, dass sich viele Rechnungen explizit durchführen lassen. Als Boolesches Modell bezeichnen wir ein Keim-Korn-Modell, bei dem der Keim-Prozess ein Poisson-Prozess ist.

Definition 2.14 (Boolesches Modell): *Sei $\Psi_{C^d} \sim \Pi_\Lambda$ ein markierter Punktprozess der Bedingung 2.13.1 erfüllt. Dann heißt das von Ψ_{C^d} erzeugte Keim-Korn-Modell Boolesches Modell.*

Ist Ξ ein Boolesches Modell, so gilt

$$T_\Xi(C) = 1 - \exp(-\mathbb{E}[\Lambda((-\Xi_0) \oplus C)])$$

und ist Ξ ein Boolesches Modell, dass von einem stationären Poisson-Prozess erzeugt wird, so gilt insbesondere

$$T_\Xi(C) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-C)|_d]).$$

Analog zu markierten Punktprozessen nennen wir eine zufällige abgeschlossene Menge Ξ stationär bzw. isotrop, falls $\Xi + s \stackrel{d}{=} \Xi$ für alle $s \in \mathbb{R}^d$ bzw. $U\Xi \stackrel{d}{=} \Xi$ für alle $U \in SO_d$. Dabei verschiebt bzw. dreht eine Translation bzw. Rotation die komplette Menge gemäß $\Xi + s = \{s + \xi \mid \xi \in \Xi\}$ bzw. $U\Xi = \{U\xi \mid \xi \in \Xi\}$.

Da das Kapazitätsfunktional die Verteilung von Ξ eindeutig festlegt, lässt sich leicht folgern, dass das von einem stationären Poisson-Prozess erzeugte Boolesche Modell stationär ist. Außerdem ist ein Boolesches Modell isotrop, wenn die Verteilung der typischen Marke Q isotrop ist.

Eine wichtige Kenngröße für stationäre zufällige abgeschlossene Mengen ist der Volumenanteil.

Definition 2.15 (Volumenanteil): *Sei Ξ eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge und $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ mit $|B|_d > 0$. Dann heißt die Zahl*

$$p := \frac{\mathbb{E}[|\Xi \cap B|_d]}{|B|_d}$$

der Volumenanteil von Ξ .

Für eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$p = \mathbb{P}(o \in \Xi),$$

wobei wir mit $o \in \mathbb{R}^d$ den Nullvektor bezeichnen. Für ein stationäres Boolesches Modell gilt insbesondere

$$p = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_d]). \tag{2.15.1}$$

Ähnlich definieren wir für $B \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ mit $|B|_d > 0$ die Kovarianzfunktion $C : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ einer zufälligen abgeschlossenen Menge Ξ durch

$$C(x) := \frac{\mathbb{E}[|\Xi \cap (\Xi - x) \cap B|_d]}{|B|_d}.$$

Auch für die Kovarianzfunktion gilt wieder wegen Fubini

$$C(x) = \mathbb{P}(o \in \Xi, x \in \Xi).$$

Außerdem besteht eine Verbindung zum Volumenanteil gemäß

$$C(x) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp(\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0 \cap (\Xi_0 + x)|_d]). \quad (2.15.2)$$

3 DIE EULER-POINCARÉ-CHARAKTERISTIK

Die Euler-Poincaré-Charakteristik (abgekürzt EPC), die im Zentrum dieser Arbeit stehen wird, ist eine ganzzahlige topologische Invariante und gibt an, wie porös ein Menge ist. In Dimension $d = 2$ entspricht sie der Differenz aus der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten (0-te Betti-Zahl) und der Anzahl der Löcher (1-te Betti-Zahl). In Dimension $d = 3$ entspricht sie der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten minus der Anzahl der zweidimensionalen Löcher plus der Anzahl der eingeschlossenen Hohlräume (2-te Betti-Zahl). Grundsätzliches Ziel ist es nun, einen sinnvollen Schätzer für die EPC zu finden und seine Eigenschaften zu untersuchen. Basierend auf der anschaulichen Definition der alternierenden Betti-Zahlen lassen sich bereits solche Schätzer auf naive Art konstruieren (siehe z.B. [26]).

Über die topologische Information hinaus ist die EPC in der Integralgeometrie als eines der sogenannten inneren Volumina (oder Minkowski-Funktionale) wichtig. Die anderen inneren Volumina Fläche und Randlänge stehen untereinander über die sphärische Kontaktverteilung [4] oder über die Crofton-Formel auch mit der EPC in Beziehung. Innere Volumina tauchen darüber hinaus in vielen zentralen Sätzen der Integralgeometrie auf. Dementsprechend ist es auch nicht verwunderlich, dass es (gemeinsame) Schätzer für die inneren Volumina (und damit insbesondere für die EPC) gibt, die einen integralgeometrischen Hintergrund haben. Beispielsweise kann man die Steinersche Formel [28], [33], [38] oder die Kinematische Hauptformel [43] als Ausgangspunkt für die Konstruktion von Schätzern verwenden (siehe auch [36], [37]). Für diese Schätzer lassen sich für Keim-Korn-Modelle unter entsprechenden Voraussetzungen auch erstrebenswerte Eigenschaften wie asymptotische Erwartungstreue und asymptotische Normalität nachweisen. Die Anwendung dieser Schätzer ist dabei keinesfalls auf Keim-Korn-Modelle beschränkt und erstreckt sich beispielsweise auch auf Exkursionsmengen [3].

Wir wollen allerdings einen punktprozess-theoretischen Zugang wählen um die EPC zu schätzen. Dies hat den offenkundigen Vorteil, dass bei einer gegebenen Realisierung nur spezielle Punkte gezählt werden müssen. Diese Aufgabe sollte mit Hilfe von Bildverarbeitungssoftware gut automatisierbar sein. Dieses Kapitel widmet sich im Folgenden der Definition dieser speziellen Punktprozesse, den sogenannten positiven und negativen Tangentenpunkten.

Die Definition dieser Punkte wird durch eine Schnittekursion von Hadwiger [10], [11], [12] motiviert. Ihm gelang damit ein Nachweis der Existenz der EPC in einem speziellen Mengensystem, dem sogenannten Konvexring, mit nicht topologischen Methoden. Das Ergebnis verwendete er, um topologische Aussagen für Mengen im Konvexring mit nicht topologischen Mitteln zu beweisen. Wir müssen also zunächst klären, auf welchen Mengensystemen wir die EPC bestimmen wollen.

Definition 3.1 (Menge der konvexen Körper): *Das Mengensystem*

$$\mathcal{K}^d := \{K \subset \mathbb{R}^d \mid K \text{ konvex und kompakt, } K \neq \emptyset\}$$

heißt Menge der konvexen Körper.

Über der Menge der konvexen Körper definieren wir das folgende Mengensystem.

Definition 3.2 (Konvexring): *Das Mengensystem*

$$\mathcal{R}^d := \left\{ \bigcup_{j=1}^n K_j \mid K_j \in \mathcal{K}^d, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

heißt *Konvexring*.

Der Konvexring ist das kleinste schnitt- und vereinigungsstabile Mengensystem über der Menge der konvexen Körper. Auf dem Konvexring lässt sich die folgende Abbildung definieren.

Definition 3.3 (Euler-Poincaré-Charakteristik): *Die Abbildung $\chi : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch*

$$\chi(K) := \begin{cases} 1, & K \in \mathcal{K}^d \\ 0, & K = \emptyset \end{cases} \quad (3.3.1)$$

und

$$\chi\left(\bigcup_{j=1}^n K_j\right) := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \chi(K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_j}) \quad (3.3.2)$$

heißt *Euler-Poincaré-Charakteristik*.

Da alle Schnitte $K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_j}$ in Gleichung 3.3.2 als Schnitt konvexer kompakter Mengen wieder konvex und kompakt sind, lässt sich die Summe mit Hilfe von Gleichung 3.3.1 auswerten.

Auch wenn die EPC grundsätzlich unbeschränkt ist, kann ihr Wert für ein $A \in \mathcal{K}^d$, das eine Vereinigung aus $N \geq 2d$ konvexen Körpern ist, durch

$$\binom{N-1}{2 \lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \leq \chi(A) \leq \binom{N-1}{2 \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1}$$

abgeschätzt werden [8].

Die Berechnung der EPC mit Hilfe von Gleichung 3.3.2 ist allerdings umständlich, falls die betrachtete Menge eine Vereinigung einer großen Anzahl an konvexen Mengen ist. Wir wollen daher einen anderen Zugang zur Berechnung von $\chi(A)$ für $A \in \mathcal{K}^d$ basierend auf einer Schnittrückursion wählen. Dabei folgen wir der Darstellung von Adler [2]. Fortan sprechen wir im Zusammenhang mit einem Vektor $u \in \mathbb{R}^d$ von einer *Richtung*, wenn $\langle u, u \rangle = 1$. Wählen wir nun eine feste Richtung $u \in \mathbb{R}^d$, so werden dadurch $(d-1)$ -dimensionale Hyperebenen $E(r)$ festgelegt, wobei sich der Betrag des Parameters $r \in \mathbb{R}$ als Abstand der Ebene vom Ursprung auffassen lässt. Von Interesse ist für uns die Differenz von $\chi(A \cap E(r))$ und $\chi(A \cap E(\rho))$ für $\rho < r$. Mit diesen Definitionen und

$$R = \{r \in \mathbb{R} \mid \chi(A \cap E(r)) - \lim_{\rho \nearrow r} \chi(A \cap E(\rho)) \neq 0\}$$

gilt

$$\chi(A) = \sum_{r \in R} \left(\chi(A \cap E(r)) - \lim_{\rho \nearrow r} \chi(A \cap E(\rho)) \right).$$

Wir wollen dieses Vorgehen nun anhand von zwei Beispielen verdeutlichen. Eine beispielhafte Situation in $d = 1$ ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Das Ergebnis $\chi(A) = 3$ ist auch aus der Definition ersichtlich, da es sich bei A um die Vereinigung von drei disjunkten, konvexen und kompakten Mengen handelt.

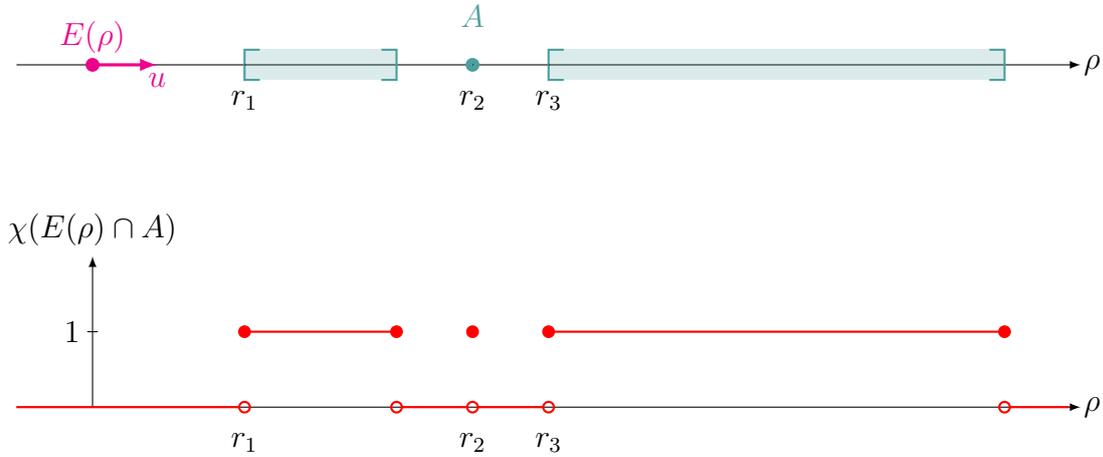


Abbildung 3.4: Berechnung von $\chi(A)$ für ein $A \in \mathcal{R}^1$ mit Schnittebenen (d.h. Punkten auf der Achse) $E(\rho) = \{\rho\}$. Ist $\rho \notin A$, so ist $A \cap E(\rho) = \emptyset$, also ist $\chi(A \cap E(\rho)) = 0$. Ist $\rho \in A$, folgt $A \cap E(\rho) = \{\rho\}$, also $\chi(A \cap E(\rho)) = 1$. Aufgrund der Kompaktheit von A folgt also für $r \in R = \{r_1, r_2, r_3\}$, dass $\chi(A \cap E(r)) - \lim_{\rho \nearrow r} \chi(A \cap E(\rho)) = 1 - 0 = 1$. Für $r \notin R$ ist $\chi(A \cap E(r)) - \lim_{\rho \nearrow r} \chi(A \cap E(\rho)) = 0$, insgesamt folgt also $\chi(A) = 3$.

In $d = 2$ ist jede Menge $A \cap E(r)$ wieder eindimensional, wir können uns also auf die bekannte Zählung von disjunkten Intervallen (bzw. Punkten) berufen um $\chi(A \cap E(r))$ zu berechnen. Das Vorgehen ist beispielhaft in Abbildung 3.5 dargestellt.

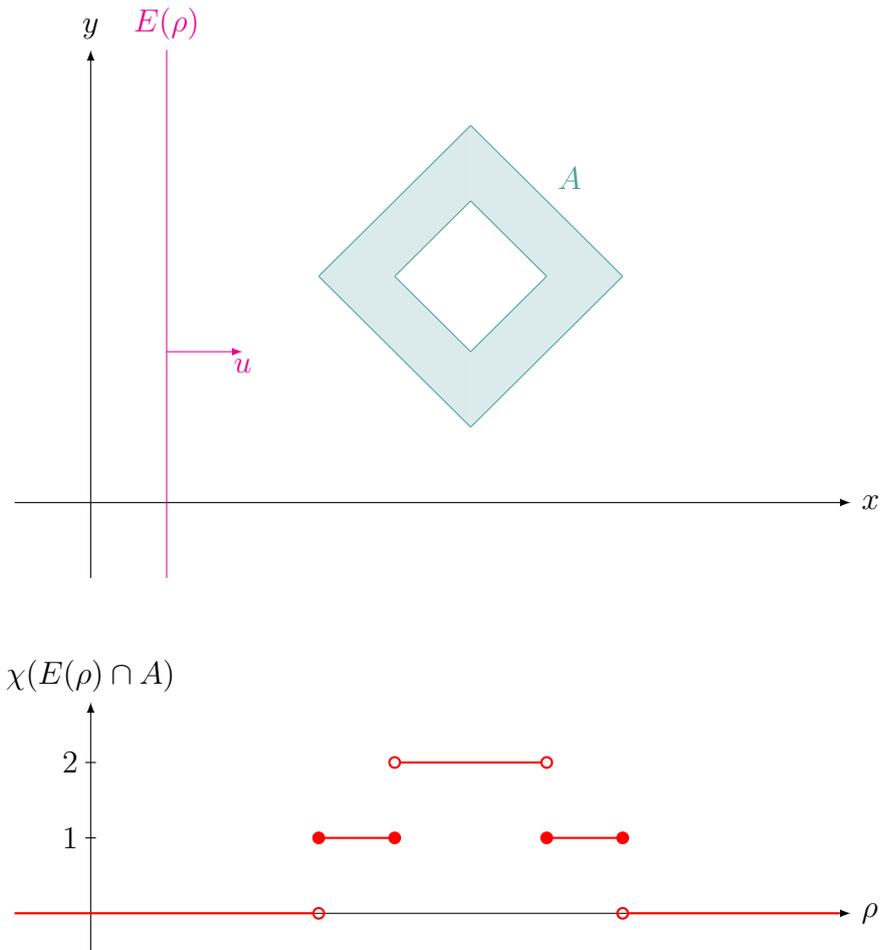


Abbildung 3.5: Berechnung von $\chi(A)$ für $A \in \mathcal{R}^2$ mit Schnittebenen (d.h. Geraden) $E(\rho)$. Die Schnitte $A \cap E(\rho)$ sind eindimensionale Objekte, von denen wir jeweils mit bekannten Methoden $\chi(A \cap E(\rho))$ bestimmen können. Die Methode liefert $\chi(A) = 0$. Insgesamt gibt es einen positiven und einen negativen Tangentenpunkt.

Die Erweiterung auf höhere Dimensionen $d \in \mathbb{N}$ geschieht durch sukzessives Anwenden der Schnittrekursion.

Zu bemerken bleibt, dass die Wahl Richtung u keine Auswirkung auf das Ergebnis hat. Interessant ist außerdem, dass $\chi(A \cap E(r)) - \lim_{\rho \nearrow r} \chi(A \cap E(\rho))$ für $d \geq 2$ sowohl positiv als auch negativ sein kann. Dies führt zur Unterscheidung in sogenannte positive und negative Tangentenpunkte.

Um aufbauend auf diesem Kapitel positive und negative Tangentenpunkte einführen zu können, betrachten wir für den Rest der Arbeit markierte Punktprozesse $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ mit Markenraum \mathcal{K}^d . Dies führt dazu, dass Realisierungen von den zugehörigen Keim-Korn-Modellen in einem Beobachtungsfenster immer Elemente des Konvexrings sind und wir die bisher gewonnenen Erkenntnisse anwenden können.

3.1 POSITIVE TANGENTENPUNKTE

Aufbauend auf den Überlegungen und Definitionen des vorhergehenden Kapitels wollen wir nun zunächst den positiven Tangentenpunkt für eine beliebige Menge $K \in \mathcal{K}^d$ definieren. Wir suchen den positiven Tangentenpunkt in der Schnittebene $E(r)$, für die der Zuwachs positiv ist, d.h. es muss

$$\chi(K \cap E(r)) - \lim_{\rho \nearrow r} \chi(K \cap E(\rho)) > 0$$

gelten. Die Forderung nach positivem Zuwachs bedingt, dass notwendigerweise $K \cap E(r) \neq \emptyset$ ist. Den positiven Tangentenpunkt definieren wir als lexikographisches Minimum dieser Menge. Für die präzise Definition des positiven Tangentenpunkts verwenden wir die sogenannte Stützfunktion $h(u, K) := \sup\{\langle u, y \rangle \mid y \in K\}$ von $K \in \mathcal{K}^d$ in Richtung von u .

Definition 3.6 (Positiver Tangentenpunkt): *Sei u eine feste Richtung und $K \in \mathcal{K}^d$. Dann heißt*

$$\ell_u(K) := \text{lexmin}\{x \in \partial K \mid \langle u, x \rangle = h(-u, K)\}$$

der positive Tangentenpunkt von K in Richtung u .

Für festes u ist die Abbildung $\ell_u : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Zentrumsfunktion, d.h. es gilt $\ell_u(x+K) = x + \ell_u(K)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $K \in \mathcal{K}^d$. Um den Prozess der positiven Tangentenpunkte verstehen zu können betrachten wir abermals eine beispielhafte Abbildung mit mehreren Mengen $K_1, \dots, K_5 \in \mathcal{K}^2$:

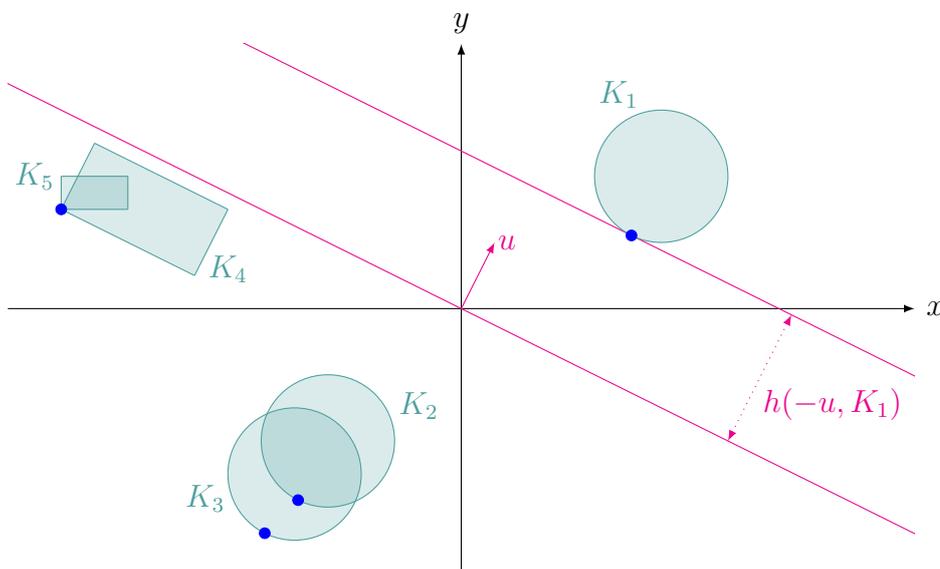


Abbildung 3.7: Positive Tangentenpunkte (blau) in Richtung von u . Der positive Tangentenpunkt von K_2 wird nicht vom Zählprozess Ψ_u^+ gezählt, da er von K_3 verdeckt wird. Der positive Tangentenpunkt von K_4 und K_5 ist identisch und wird daher nie von Ψ_u^+ gezählt. In dieser Situation zählt Ψ_u^+ anstatt 3 fälschlicherweise 2 positive Tangentenpunkte. Wir benötigen also eine zusätzliche Bedingung, um bei Keim-Korn-Modellen die Lage der Mengen K_4 und K_5 auszuschließen (siehe Bedingung 3.7.1).

Realisieren wir nun ein Keim-Korn-Modell, so kann der positive Tangentenpunkt von einem anderen Korn verdeckt werden (siehe beispielsweise in Abbildung 3.7 die Mengen K_2 bzw. K_3). Wollen wir also mit unserer Methode die EPC eines Keim-Korn-Modells bestimmen, müssen wir beachten, dass Tangentenpunkte nur gezählt werden dürfen, wenn sie nicht von anderen Mengen des Keim-Korn-Modells verdeckt werden. Außerdem wollen wir die Lage der Mengen K_4 bzw. K_5 in Abbildung 3.7 ausschließen. Dafür ist die Bedingung

$$\mathbb{P}(\forall i, j \geq 1, i \neq j : \ell_u(X_i + \Xi_i) \notin X_j + \partial\Xi_j) = 1$$

hinreichend. Diese Bedingung ist aufgrund von

$$\ell_u(X_i + \Xi_i) \notin X_j + \partial\Xi_j \Leftrightarrow X_i - X_j \notin \partial\Xi_j - \ell_u(\Xi_i)$$

äquivalent zu

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{\partial\Xi_j - \ell_u(\Xi_i)}(X_i - X_j) \geq 1\right) = 0. \quad (3.7.1)$$

Bedingung 3.7.1 ist erfüllt, wenn der Keim-Prozesses eine Produktdichte 2-ter Ordnung besitzt. Damit ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.8 (Prozess der positiven Tangentenpunkte): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ ein Keim-Korn-Prozess dessen Keim-Prozess eine Produktdichte 2-ter Ordnung besitzt. Dann ist*

$$\Psi_u^+(\cdot) := \sum_{i \geq 1} \delta_{X_i + \ell_u(\Xi_i)}(\cdot) \prod_{k \neq i} (1 - \mathbf{1}_{\Xi_k + X_k}(X_i + \ell_u(\Xi_i)))$$

der Punktprozess der positiven Tangentenpunkte in Richtung u des zugehörigen Keim-Korn-Modells.

Durch die Bedingung 3.7.1 tritt die Situation aus Abbildung 3.7, dass Ψ_u^+ nur 2 (von K_1 und K_3) anstatt 3 (von K_1 , K_3 und den gemeinsamen von K_4 und K_5) positive Tangentenpunkte registriert, mit Wahrscheinlichkeit 0 auf.

Der Prozess der positiven Tangentenpunkte Ψ_u^+ ist einfach und stationär, falls der Keim-Prozess einfach und stationär ist. Man kann Ψ_u^+ als eine abhängige Ausdünnung von $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ verstehen. Aus einer Realisierung von $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ nehmen wir alle Punkte X_i heraus, für die $X_i + \ell_u(\Xi_i) \in \cup_{k \neq i} (X_k + \Xi_k)$ ist.

Positive Tangentenpunkte sind selbst bereits interessant und für diverse Fragestellungen in der Stochastik wichtig. Im Fall eines Booleschen Modells in \mathbb{R} sind die positiven Tangentenpunkte die Zeitpunkte, zu denen eine Arbeitsperiode in einem $M/G/\infty$ Warteschlangensystem beginnt. Mit Hilfe von positiven Tangentenpunkten lassen sich Informationen über die unbekanntene Bedienungszeitverteilung gewinnen. In höheren Dimensionen finden positive Tangentenpunkte z.B. bei der Behandlung des sogenannten Wicksell'schen Korpuskelproblems Anwendung [24]. Außerdem lässt sich mit Hilfe der positiven Tangentenpunkte nicht nur die Intensität des dem Booleschen Modells zugrundeliegenden Poisson-Prozesses schätzen [31], sondern auch z.B. der erwartete Umfang des typischen Kornes [32]. Um die EPC zu behandeln, müssen wir noch den Prozess der negativen Tangentenpunkte verstehen.

3.2 NEGATIVE TANGENTENPUNKTE

Negative Tangentenpunkte definieren wir ähnlich wie positive Tangentenpunkte. Wir suchen einen negativen Tangentenpunkt in der Schnittmenge von $K_1 \cap \dots \cap K_m \in \mathcal{K}^d$ mit der Schnittebene $E(r)$, für die der Zuwachs ungleich 0 ist. Im Gegensatz zur Definition von positiven Tangentenpunkten, die in jeder Dimension das gewünschte Ergebnis liefert, ist die Definition des negativen Tangentenpunktes von der Dimension abhängig. Wir müssen uns fragen, wann für typische konvexe und kompakte Körner negative Tangentenpunkte auftreten können. In $d = 2$ können wir dazu wieder eine beispielhafte Abbildung betrachten.

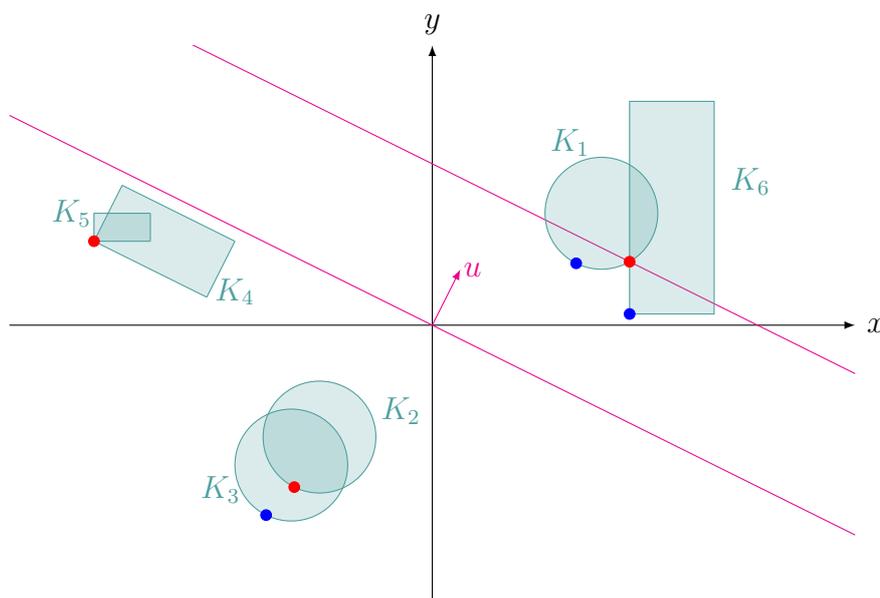


Abbildung 3.9: Positive bzw. negative Tangentenpunkte (blau bzw. rot) in Richtung von u . Die negativen Tangentenpunkte von $K_2 \cap K_3$ bzw. $K_4 \cap K_5$ sind zugleich die positiven Tangentenpunkte von K_2 bzw. K_4 und K_5 (siehe Abbildung 3.7). Da der negative Tangentenpunkt von $K_2 \cap K_3$ im Inneren von K_3 liegt wird er von Ψ_u^- nicht gezählt. Anders verhält es sich bei den negativen Tangentenpunkten von $K_1 \cap K_6$ bzw. $K_4 \cap K_5$, letzterer jedoch fälschlicherweise. Insgesamt liefert die Zählung der Tangentenpunkte fälschlicherweise $3 - 2 = 1$. Diese Situation tritt für ein Keim-Korn-Modell, das Bedingung 3.7.1 gehorcht, allerdings mit Wahrscheinlichkeit 0 auf.

Offenbar ist eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines negativen Tangentenpunktes, dass die Menge $\Xi_{ij} := (X_i + \Xi_i) \cap (X_j + \Xi_j)$ für $i \neq j$ nicht leer ist. Außerdem darf der Tangentenpunkt wieder nicht von anderen Mengen verdeckt werden. Zusätzlich darf er nicht von $X_i + \Xi_i$ oder $X_j + \Xi_j$ selbst verdeckt werden, d.h. ein negativer Tangentenpunkt darf weder in $X_i + \Xi_i^\circ$ noch in $X_j + \Xi_j^\circ$ liegen, wobei wir mit A° die Menge der inneren Punkte von A bezeichnen. Außerdem darf ein negativer Tangentenpunkt nicht

gleichzeitig auch ein positiver Tangentenpunkt sein. Dies wird bereits durch Bedingung 3.7.1 ausgeschlossen. Damit zählt der Prozess

$$\Psi_u^-(\cdot) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \delta_{\ell_u(\Xi_{ij})}(\cdot) \prod_{k \neq i,j} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u(\Xi_{ij}))) \mathbb{1}_{\{\Xi_{ij} \neq \emptyset\}} \\ \times (1 - \mathbb{1}_{X_i + \Xi_i^\circ}(\ell_u(\Xi_{ij}))) (1 - \mathbb{1}_{X_j + \Xi_j^\circ}(\ell_u(\Xi_{ij})))$$

die negativen Tangentenpunkte. Offenbar gilt nun sowohl

$$\Xi_{ij} \neq \emptyset \Leftrightarrow X_j - X_i \in \Xi_i \oplus (-\Xi_j)$$

als auch

$$\ell_u(\Xi_{ij}) \in X_i + \Xi_i^\circ \Leftrightarrow \ell_u(X_j + \Xi_j) \in X_i + \Xi_i^\circ \Rightarrow \Xi_{ij} \neq \emptyset.$$

Das führt zur folgenden Definition:

Definition 3.10 (Prozess der negativen Tangentenpunkte in $d = 2$): Sei $\Psi_{\mathcal{K}^2}$ ein Keim-Korn-Prozess dessen Keim-Prozess eine Produktdichte 2-ter Ordnung besitzt. Dann ist

$$\Psi_u^-(\cdot) := \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \delta_{\ell_u(\Xi_{ij})}(\cdot) \prod_{k \neq i,j} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u(\Xi_{ij}))) \\ \times \left(\mathbb{1}_{\Xi_i \oplus (-\Xi_j)}(X_j - X_i) - \mathbb{1}_{X_i + \Xi_i^\circ}(\ell_u(X_j + \Xi_j)) - \mathbb{1}_{X_j + \Xi_j^\circ}(\ell_u(X_i + \Xi_i)) \right)$$

der Punktprozess der negativen Tangentenpunkte in Richtung u des zugehörigen Keim-Korn-Modells.

Auch der Prozess der negativen Tangentenpunkte Ψ_u^- ist einfach und stationär, falls der Keim-Prozess einfach und stationär ist.

In $d = 3$ ist das Auftreten von negativen Tangentenpunkten komplexer und nicht so leicht visualisierbar. Das Prinzip, sukzessive Schnittrekursionen anzuwenden, bleibt aber das gleiche. In Abbildung 3.9 erkennt man, dass negative Tangentenpunkte in $d = 2$ entstehen, wenn sich zwei konvexe Mengen schneiden. Dies führt auch in $d = 3$ zu einem negativen Tangentenpunkt. Zusätzlich können aber auch Schnitte von drei konvexen Mengen Tangentenpunkte erzeugen. Obwohl letztere einen positiven Beitrag zur EPC leisten, werden wir sie trotzdem als negative Tangentenpunkte führen.

Wir erhalten in $d = 3$ also zwei Prozesse, zum einen $\Psi_{u,1}^- = \Psi_u^-$ wie in $d = 2$ und zum anderen

$$\Psi_{u,2}^-(\cdot) = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k \geq 1}^{\neq} \delta_{\ell_u(\Xi_{ijk})}(\cdot) \prod_{l \neq i,j,k} (1 - \mathbb{1}_{X_l + \Xi_l}(\ell_u(\Xi_{ijk}))) \mathbb{1}_{\{\Xi_{ijk} \neq \emptyset\}} \\ \times (1 - \mathbb{1}_{X_i + \Xi_i^\circ}(\ell_u(\Xi_{ijk}))) (1 - \mathbb{1}_{X_j + \Xi_j^\circ}(\ell_u(\Xi_{ijk}))) (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k^\circ}(\ell_u(\Xi_{ijk}))),$$

wobei $\Xi_{ijk} = (X_i + \Xi_i) \cap (X_j + \Xi_j) \cap (X_k + \Xi_k)$. Da sowohl

$$\Xi_{ijk} \neq \emptyset \Leftrightarrow X_j - X_i \in [\Xi_i \cap (X_k - X_i + \Xi_k)] \oplus (-\Xi_j)$$

und

$$\ell_u(\Xi_{ijk}) \notin (X_i + \Xi_i^\circ) \cap (X_j + \Xi_j^\circ) \cap (X_k + \Xi_k^\circ)$$

als auch jeweils exemplarisch

$$\ell_u(\Xi_{ijk}) \in X_i + \Xi_i^\circ \Leftrightarrow \ell_u(\Xi_{jk}) \in X_i + \Xi_i^\circ \Rightarrow \Xi_{ijk} \neq \emptyset,$$

sowie

$$\ell_u(\Xi_{ijk}) \in (X_i + \Xi_i^\circ) \cap (X_j + \Xi_j^\circ) \Leftrightarrow \ell_u(X_k + \Xi_k) \in \Xi_{ij}^\circ \Rightarrow \Xi_{ijk} \neq \emptyset,$$

gilt schließlic

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{\{\Xi_{ijk} \neq \emptyset\}} (1 - \mathbb{1}_{X_i + \Xi_i^\circ}(\ell_u(\Xi_{ijk}))) (1 - \mathbb{1}_{X_j + \Xi_j^\circ}(\ell_u(\Xi_{ijk}))) (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k^\circ}(\ell_u(\Xi_{ijk}))) \\ &= \mathbb{1}_{\Xi_{ij}^\circ}(\ell_u(X_k + \Xi_k)) + \mathbb{1}_{\Xi_{ik}^\circ}(\ell_u(X_j + \Xi_j)) + \mathbb{1}_{\Xi_{jk}^\circ}(\ell_u(X_i + \Xi_i)) \\ &\quad - \mathbb{1}_{X_i + \Xi_i^\circ}(\ell_u(\Xi_{jk})) - \mathbb{1}_{X_j + \Xi_j^\circ}(\ell_u(\Xi_{ik})) - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k^\circ}(\ell_u(\Xi_{ij})) \\ &\quad + \mathbb{1}_{[\Xi_i \cap (X_k - X_i + \Xi_k)] \oplus (-\Xi_j)}(X_j - X_i). \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

Damit definieren wir:

Definition 3.11 (Prozesse der negativen Tangentenpunkte in $d = 3$): Sei $\Psi_{\mathcal{K}^3}$ ein Keim-Korn-Prozess dessen Keim-Prozess eine Produktdichte 2-ter Ordnung besitzt. Dann sind

$$\begin{aligned} \Psi_{u,1}^-(\cdot) &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \delta_{\ell_u(\Xi_{ij})}(\cdot) \prod_{k \neq i,j} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u(\Xi_{ij}))) \\ &\quad \times \left(\mathbb{1}_{\Xi_i \oplus (-\Xi_j)}(X_j - X_i) - \mathbb{1}_{X_i + \Xi_i^\circ}(\ell_u(X_j + \Xi_j)) - \mathbb{1}_{X_j + \Xi_j^\circ}(\ell_u(X_i + \Xi_i)) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_{u,2}^-(\cdot) &:= \frac{1}{6} \sum_{i,j,k \geq 1}^{\neq} \delta_{\ell_u(\Xi_{ijk})}(\cdot) \prod_{l \neq i,j,k} (1 - \mathbb{1}_{X_l + \Xi_l}(\ell_u(\Xi_{ijk}))) \\ &\quad \times \left[\mathbb{1}_{\Xi_{ij}^\circ}(\ell_u(X_k + \Xi_k)) + \mathbb{1}_{\Xi_{ik}^\circ}(\ell_u(X_j + \Xi_j)) + \mathbb{1}_{\Xi_{jk}^\circ}(\ell_u(X_i + \Xi_i)) \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{1}_{X_i + \Xi_i^\circ}(\ell_u(\Xi_{jk})) - \mathbb{1}_{X_j + \Xi_j^\circ}(\ell_u(\Xi_{ik})) - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k^\circ}(\ell_u(\Xi_{ij})) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{[\Xi_i \cap (X_k - X_i + \Xi_k)] \oplus (-\Xi_j)}(X_j - X_i) \right] \end{aligned}$$

die Punktprozesse der negativen Tangentenpunkte in Richtung u des zugehörigen Keim-Korn-Modells.

Auch diese Prozesse sind einfach und stationär, falls der Keim-Prozess einfach und stationär ist. Mit Hilfe der Tangentenpunktprozesse wollen wir im Folgenden die EPC eines Keim-Korn-Modells schätzen.

3.3 SCHÄTZUNG DER EULER-POINCARÉ-CHARAKTERISTIK

Wir wollen nun ausgehend von einer gegebenen Realisierung eines Keim-Korn-Modells, dessen typisches Korn nur Werte in \mathcal{K}^d annimmt, die EPC schätzen. Dabei liegen die Daten grundsätzlich nur in einem gegebenen Bereich, dem sogenannten Beobachtungsfenster W_n , vor. Für alle $s \in \{1, \dots, d\}$ betrachten wir unbeschränkte, monoton wachsende Folgen $(a_n^{(s)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n^{(s)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ und definieren

$$W_n := [-a_n^{(1)}, b_n^{(1)}] \times \dots \times [-a_n^{(d)}, b_n^{(d)}].$$

Diese Definition lässt sich verallgemeinern, wir betrachten jedoch nur solche speziellen Hyperquader als Beobachtungsfenster. Um den Einfluss der Größe des Beobachtungsfensters zu eliminieren, betrachten wir die sogenannte spezifische EPC:

Definition 3.12 (Schätzung der spezifischen EPC): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ ein Keim-Korn-Prozess, dessen Keim-Prozess eine Produktdichte 2-ter Ordnung besitzt, und W_n ein Beobachtungsfenster. Dann ist*

$$\hat{N}_{A,n}(u) := \frac{\Psi_u^+(W_n) - \Psi_u^-(W_n)}{|W_n|_2}$$

bzw.

$$\hat{N}_{V,n}(u) := \frac{\Psi_u^+(W_n) - \Psi_{u,1}^-(W_n) + \Psi_{u,2}^-(W_n)}{|W_n|_3}$$

der Schätzer der spezifischen EPC in $d = 2$ bzw. $d = 3$ des zugehörigen Keim-Korn-Modells.

Fortan benutzen wir $\hat{N}_{2,n}(u)$ bzw. $\hat{N}_{3,n}(u)$ synonym für die stereologische Notation $\hat{N}_{A,n}(u)$ bzw. $\hat{N}_{V,n}(u)$. Analog wollen für die Erwartungswerte $N_d := \mathbb{E}[\hat{N}_{d,n}(u)]$ der definierten Schätzer N_2 bzw. N_3 synonym für N_A bzw. N_V verwenden.

Unser Schätzer ist in gewisser Weise das kontinuierliche Analogon zu dem Schätzer in [35]. Dort wird die EPC mit Hilfe von Ebenen $E(r)$ und $E(r+t)$ bestimmt. Die betrachteten Ebenen haben also den kleinen, aber endlichen Abstand $t > 0$ zueinander. Bei unserer Schätzung handelt es sich um eine assoziierte Punktmethode. Wir assoziieren mit jeder Menge ihre Tangentenpunkte und zählen diese mit Vorzeichen. Verbessern kann man die Schätzung, indem man mehrere Punkte mit einer Menge assoziiert, d.h. in unserem Fall Tangentenpunkte mehrerer Richtungen u zählt, und dann über alle Zählungen mittelt [42].

Wir wollen nun für eine große Klasse von Keim-Prozessen ein Gesetz der Große Zahlen etablieren. Dazu definieren wir:

Definition 3.13 (Ergodizität): *Ein stationärer Punktprozess Ψ mit Verteilung P_Ψ heißt ergodisch, wenn aus $P_\Psi((Y+x) \cap Y) = P_\Psi(Y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ schon $P_\Psi(Y) \in \{0, 1\}$ folgt.*

Um damit die starke Konsistenz von $\hat{N}_{d,n}(u)$ zu erhalten, benötigen wir noch eine zusätzliche Voraussetzung an den Keim-Prozess. Diese wollen wir mit Hilfe seines reduzierten faktoriellen Kumulantenmaßes $\gamma_{\text{red}}^{(k)}$ formulieren. Wir betrachten dazu die Hahn-Jordan-Zerlegung

$$\gamma_{\text{red}}^{(k)} = \gamma_{\text{red}}^{(k)+} - \gamma_{\text{red}}^{(k)-}$$

des signierten Maßes $\gamma_{\text{red}}^{(k)}$ und definieren die Totalvariation durch

$$\|\gamma_{\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} := \gamma_{\text{red}}^{(k)+}((\mathbb{R}^d)^{k-1}) + \gamma_{\text{red}}^{(k)-}((\mathbb{R}^d)^{k-1}).$$

Mit diesen Vorarbeiten erhalten wir:

Satz 3.14 (Starke Konsistenz von $\hat{N}_{d,n}(u)$): *Sei der Keim-Prozess stationär und ergodisch mit $\|\gamma_{\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$ für $k \in \{2, d\}$. Dann gilt*

$$\hat{N}_{d,n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-f.s.}} N_d.$$

Beweis. Die Ergodizität des Keim-Prozesses zusammen mit Bedingung 2.13.1 impliziert die Ergodizität des Keim-Korn-Modells (siehe Theorem 3 in [17]). Damit ist auch das für $F \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ durch

$$\nu_2(F) := \Psi_u^+(F) - \Psi_u^-(F)$$

in $d = 2$ bzw.

$$\nu_3(F) := \Psi_u^+(F) - \Psi_{u,1}^-(F) + \Psi_{u,2}^-(F)$$

in $d = 3$ definierte zufällige signierte Maß ergodisch. Außerdem ist ν_d additiv. Um nun Korollar 4.20 aus [34] anwenden zu können, müssen wir für $F \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $F \subset [0, 1]^d$, eine von F unabhängige und integrierbare Zufallsgröße Y_d finden, sodass

$$|\nu_d(F)| \leq Y_d.$$

Wie können wir solche Zufallsgrößen finden? Positive Tangentenpunkte können nur entstehen, wenn Mengen $X_i + \Xi_i$ die Menge $[0, 1]^d$ schneiden. Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Auftreten von negativen Tangentenpunkten in $d = 2$ ist, dass ein Paar von zwei Mengen $X_i + \Xi_i$ und $X_j + \Xi_j$ die Menge $[0, 1]^2$ schneidet. Damit ist eine sinnvolle Definition für Y_2 z.B. durch

$$Y_2 := \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{[0,1]^2}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset} \mathbf{1}_{(X_j + \Xi_j) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset}$$

gegeben. Wegen des Campbell-Theorems gilt

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{[0,1]^2}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \right] = \lambda$$

und außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset} \mathbf{1}_{(X_j + \Xi_j) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset} \right] \\ &= \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[0,1]^2 \oplus (-K_1)}(x_1) \mathbf{1}_{[0,1]^2 \oplus (-K_2)}(x_2) \alpha^{(2)}(d(x_1, x_2)) Q(dK_1) Q(dK_2). \end{aligned}$$

Wegen $\gamma^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) - \lambda^2 |B_1|_2 |B_2|_2$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset} \mathbf{1}_{(X_j + \Xi_j) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset} \right] \\ &= \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[0,1]^2 \oplus (-K_1)}(x_1) \mathbf{1}_{[0,1]^2 \oplus (-K_2)}(x_2) \gamma^{(2)}(d(x_1, x_2)) Q(dK_1) Q(dK_2) \\ &+ \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[0,1]^2 \oplus (-K_1)}(x_1) \mathbf{1}_{[0,1]^2 \oplus (-K_2)}(x_2) dx_2 dx_1 Q(dK_1) Q(dK_2). \end{aligned}$$

Den ersten Summanden können wir nach Desintegration durch das reduzierte faktorielle Kumulantenmaß abschätzen und die Integrale im zweiten Summanden können wir direkt lösen. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset} \mathbf{1}_{(X_j + \Xi_j) \cap [0,1]^2 \neq \emptyset} \right] \\ & \leq \lambda \mathbb{E} [|\Xi_0 \oplus [-1, 0]^2|_2] \|\gamma_{\text{red}}^{(2)}\|_{\text{TV}} + \lambda^2 \mathbb{E} [|\Xi_0 \oplus [-1, 0]^2|_2]^2, \end{aligned}$$

und somit ist mit Hilfe von Bedingung 2.13.1

$$\mathbb{E}[Y_2] < \infty.$$

In $d = 3$ betrachten wir analog die Zufallsgröße

$$\begin{aligned} Y_3 &:= \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{[0,1]^3}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0,1]^3 \neq \emptyset} \mathbf{1}_{(X_j + \Xi_j) \cap [0,1]^3 \neq \emptyset} \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0,1]^3 \neq \emptyset} \mathbf{1}_{(X_j + \Xi_j) \cap [0,1]^3 \neq \emptyset} \mathbf{1}_{(X_k + \Xi_k) \cap [0,1]^3 \neq \emptyset}, \end{aligned}$$

wobei die ersten beiden Terme wegen den Rechnungen im $d = 2$ Fall einen endlichen Erwartungswert haben. Eine analoge Rechnung mit Hilfe von 2.10 ergibt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_{i_1} + \Xi_{i_1}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \cdots \mathbf{1}_{(X_{i_n} + \Xi_{i_n}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \right] \\ &= \int_{\mathcal{K}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{(x_1 + K_1) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \cdots \mathbf{1}_{(x_n + K_n) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \alpha^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) Q(dK_1) \cdots Q(dK_n) \\ &= \int_{\mathcal{K}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[0,1]^d \oplus (-K_1)}(x_1) \cdots \mathbf{1}_{[0,1]^d \oplus (-K_n)}(x_n) \gamma^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) Q(dK_1) \cdots Q(dK_n) \\ &+ \sum_{j=2}^n (-1)^j (j-1)! \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j \\ = \{1, \dots, n\}}} \prod_{r=1}^j \mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_{\#I_r} \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{(X_{i_1} + \Xi_{i_1}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \cdots \mathbf{1}_{(X_{i_{\#I_r}} + \Xi_{i_{\#I_r}}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \right] \end{aligned}$$

Den ersten Summanden können wir wieder desintegrieren und erhalten

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 1}^{\neq} \mathbb{1}_{(X_{i_1} + \Xi_{i_1}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \cdots \mathbb{1}_{(X_{i_n} + \Xi_{i_n}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \right] \\
& \leq \lambda \mathbb{E} \left[|\Xi_0 \oplus [-1, 0]^d|_3 \right] \|\gamma_{\text{red}}^{(n)}\|_{\text{TV}} \\
& \quad + \sum_{j=2}^n (-1)^j (j-1)! \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j \\ = \{1, \dots, n\}}} \prod_{r=1}^j \mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_{\#I_r} \geq 1}^{\neq} \mathbb{1}_{(X_{i_1} + \Xi_{i_1}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \cdots \mathbb{1}_{(X_{i_{\#I_r}} + \Xi_{i_{\#I_r}}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \right],
\end{aligned} \tag{3.14.1}$$

d.h. wir können unter der Voraussetzung $\|\gamma_{\text{red}}^{(3)}\|_{\text{TV}} < \infty$ induktiv $\mathbb{E}[Y_3] < \infty$ schließen. Insgesamt ist $\mathbb{E}[Y_d] < \infty$ und damit liefert Korollar 4.20 aus [34] die gewünschte Aussage. \square

Die Bedingung $\|\gamma_{\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$ für $k \in \{2, d\}$ ist also relevant für die Existenz einer Majorante für die EPC. Aus der Rechnung 3.14.1 lässt sich auch direkt eine weitere Aussage folgern:

Korollar 3.15: *Sei der Keim-Prozess stationär mit $\|\gamma_{\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$ für $k \in \{2, 3, \dots\}$. Dann gilt für alle $r \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Psi_u^+([0, 1]^d)^r] &< \infty, \\
\mathbb{E}[\Psi_u^-([0, 1]^2)^r] &< \infty, \\
\mathbb{E}[\Psi_{u,1}^-([0, 1]^3)^r] &< \infty, \\
\mathbb{E}[\Psi_{u,2}^-([0, 1]^3)^r] &< \infty.
\end{aligned}$$

Beweis. Offenbar kann nach 3.14.1 jedes dieser Momente durch die Totalvariation eines entsprechend hohen reduzierten faktoriellen Kumulantenmaßes und einer endlichen Linearkombination von Erwartungswerten der Form

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 1}^{\neq} \mathbb{1}_{(X_{i_1} + \Xi_{i_1}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \cdots \mathbb{1}_{(X_{i_n} + \Xi_{i_n}) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \right]$$

abgeschätzt werden. Die Anzahl solcher Erwartungswerte hängt natürlich vom jeweils betrachteten Prozess sowie von d und r ab. Damit folgt induktiv die gewünschte Aussage. \square

Die Bedingung $\|\gamma_{\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$ für $k \in \{2, 3, \dots\}$ nennt man Brillinger Mischungsbedingung. Wir werden sie in Kapitel 6 wieder aufgreifen und detaillierter betrachten. Diese strengere Bedingung ersetzt die Forderung der Ergodizität nicht, um die Konsistenz von $\hat{N}_{d,n}(u)$ nachzuweisen (siehe [20]).

4 KENNZAHLEN DER TANGENTENPUNKTPROZESSE

Wir haben in Korollar 3.15 unter relativ milden Voraussetzungen die Endlichkeit aller Momente der Tangentenpunktanzahl in einem beschränkten Gebiet bewiesen. In diesem Kapitel wollen wir uns expliziten Berechnungen für Kennzahlen der Tangentenpunktprozesse zuwenden. Bei unseren Rechnungen beschränken wir uns auf die Betrachtung stationärer Boolescher Modelle. Das hat den Vorteil, dass sich halbwegs explizite Formeln gewinnen lassen. Der Ausgangspunkt für alle diese Rechnungen wird die Slivnyak-Mecke Formel (siehe [41], Korollar 3.2.3) sein:

Satz 4.1 (Slivnyak-Mecke Formel): *Sei $\Psi_{\mathcal{M}} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ und $f : (\mathbb{R}^d \times \mathcal{M})^k \times N_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht negativ und messbar oder integrierbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1}^{\neq} f \left(X_{i_1}, M_{i_1}, \dots, X_{i_k}, M_{i_k}, \Psi_{\mathcal{M}} - \sum_{j=1}^k \delta_{(X_{i_j}, M_{i_j})} \right) \right] \\ = \lambda^k \int_{\mathcal{M}} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[f(x_1, m_1, \dots, x_k, m_k, \Psi_{\mathcal{M}})] dx_1 \cdots Q(dm_k). \end{aligned}$$

Dabei müssen wir beachten, dass im Gegensatz zu der Definition der positiven Tangentenpunkte die Definition der negativen Tangentenpunkte dimensionsabhängig ist. Während wir also alle Aussagen, die nur Ψ_u^+ beinhalten, in \mathbb{R}^d formulieren können, ist dies geschlossen für die negativen Tangentenpunkte nicht möglich. Die betrachtete Dimension ist dabei jedoch stets offensichtlich.

Die einfachste Kennzahl für die Tangentenpunktprozesse ist die Intensität. Dabei werden wir das $(d-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß mit \mathcal{H}^{d-1} und das Integral der mittleren Krümmung mit M bezeichnen.

Satz 4.2 (Intensitäten der Tangentenpunktprozesse): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ ein Keim-Korn-Prozess und Ξ_0, Ξ'_0 unabhängig gemäß Q verteilt.*

(i) *Für $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$\mathbb{E}[\Psi_u^+(W)] = \lambda(1-p) |W|_d.$$

(ii) *Für $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt*

$$\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)}{2} |W|_2 (\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_2] - 2\mathbb{E}[|\Xi_0|_2]).$$

(iii) *Ist die Verteilung von Ξ_0 zusätzlich rotationsinvariant, so gilt für $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*

$$\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)}{4\pi} |W|_2 \mathbb{E}[\mathcal{H}^1(\partial\Xi_0)]^2.$$

(iv) *Ist die Verteilung von Ξ_0 rotationsinvariant, so gilt für $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$*

$$\mathbb{E}[\Psi_{u,1}^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)}{4\pi} |W|_3 \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial\Xi_0)] \mathbb{E}[M(\Xi_0)]$$

und

$$\mathbb{E}[\Psi_{u,2}^-(W)] = \frac{\lambda^3 \pi (1-p)}{384} |W|_3 \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial \Xi_0)]^3.$$

Beweis. Zunächst rechnen wir mit der Slivnyak-Mecke Formel (i) nach. Es gilt

$$\mathbb{E}[\Psi_u^+(W)] = \lambda \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_W(x + \ell_u(K)) \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(x + \ell_u(K))) \right] dx Q(dK)$$

Betrachten wir nun den Erwartungswert auf der rechten Seite genauer. Aufgrund der Stationarität gilt für alle x, K

$$\mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(x + \ell_u(K))) \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(o)) \right]$$

und mit Hilfe der Darstellung des erzeugenden Funktionals für das Boolesche Modell (siehe 2.6.2) gilt

$$\mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(o)) \right] = \exp \left(-\lambda \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{x+K}(o) dx Q(dK) \right).$$

Nun lassen sich nacheinander die Integration im Raum und die Integration bezüglich Q ausführen und es folgt mit Hilfe der Darstellung des Volumenanteils p im Booleschen Modell (siehe 2.15.1)

$$\exp \left(-\lambda \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{x+K}(o) dx Q(dK) \right) = \exp(-\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_d]) = 1 - p.$$

Als Zwischenergebnis erhalten wir also

$$\mathbb{E}[\Psi_u^+(W)] = \lambda(1-p) \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_W(x + \ell_u(K)) dx Q(dK).$$

Für die restlichen Integrale folgt analog unter Verwendung der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_W(x + \ell_u(K)) dx Q(dK) = \int_{\mathcal{K}^d} |W - \ell_u(K)|_d Q(dK) = |W|_d,$$

und somit gilt insgesamt wie gefordert

$$\mathbb{E}[\Psi_u^+(W)] = \lambda(1-p) |W|_d.$$

Analog berechnen wir auch (ii). Aus der Slivnyak-Mecke Formel folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_W(\ell_u((x_1 + K_1) \cap (x_2 + K_2))) \\ &\quad \times \left(\mathbf{1}_{K_1 \oplus (-K_2)}(x_2 - x_1) - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_2)}(x_2 - x_1) - \mathbf{1}_{K_2 - \ell_u(K_1)}(x_1 - x_2) \right) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u((x_1 + K_1) \cap (x_2 + K_2)))) \right] dx_1 \cdots Q(dK_2)\end{aligned}$$

und nach der naheliegenden Transformation $y_2 = x_2 - x_1$, $dy_2 = dx_2$, folgt unter Ausnutzung der Stationarität

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_W(y_1 + \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2))) \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(o)) \right] \\ &\quad \times \left(\mathbf{1}_{K_1 \oplus (-K_2)}(y_2) - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_2)}(y_2) - \mathbf{1}_{K_2 - \ell_u(K_1)}(-y_2) \right) dy_1 \cdots Q(dK_2).\end{aligned}$$

Nun können wir sowohl das dy_1 Integral als auch den Erwartungswert (dieser ist $1 - p$, siehe die Rechnung in (i)) berechnen und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |W - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y))|_2 (1 - p) \\ &\quad \times \left(\mathbf{1}_{K_1 \oplus (-K_2)}(y) - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_2)}(y) - \mathbf{1}_{K_2 - \ell_u(K_1)}(-y) \right) dy Q(dK_1) Q(dK_2).\end{aligned}$$

Nach Ausnutzung der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes können wir das dy Integral berechnen und erhalten

$$\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)}{2} |W|_2 \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} |K_1 \oplus (-K_2)|_2 - |K_1|_2 - |K_2|_2 Q(dK_1) Q(dK_2).$$

Mit Hilfe von unabhängigen gemäß Q verteilten typischen Körnern Ξ_0 bzw. Ξ'_0 erhalten wir schließlich

$$\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)}{2} |W|_2 (\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_2] - 2\mathbb{E}[|\Xi_0|_2]), \quad (4.2.1)$$

was genau der in (ii) geforderten Form entspricht.

Ist Ξ_0 zusätzlich isotrop lässt sich die Formel noch weiter auswerten. Es gilt $x \in \Xi_0 \oplus (-\Xi'_0) \Leftrightarrow \Xi_0 \cap (\Xi'_0 + x) \neq \emptyset$, also gilt

$$\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_2] = \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{\Xi_0 \cap (\Xi'_0 + x) \neq \emptyset\}} dx \right]$$

und mit der Isotropie von Ξ'_0

$$\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_2] = \mathbb{E} \left[\int_{SO_2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{\Xi_0 \cap (U\Xi'_0 + x) \neq \emptyset\}} dx \nu(dU) \right],$$

wobei wir mit ν das normierte Haarsche Maß über SO_2 bezeichnen. Da

$$\mathbb{1}_{\{\Xi_0 \cap (U\Xi'_0 + x) \neq \emptyset\}} = \chi(\Xi_0 \cap (U\Xi'_0 + x)),$$

folgt aus der Kinematischen Hauptformel (siehe z.B. [40] Satz 7.1.1)

$$\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_2] = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}[\mathcal{H}^1(\partial\Xi_0)]^2 + 2\mathbb{E}[|\Xi_0|_2], \quad (4.2.2)$$

wobei wir nutzen, dass Ξ_0 und Ξ'_0 unabhängig und identisch verteilt sind. Insgesamt erhalten wir im Fall von isotropen Körnern also

$$\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)}{4\pi} |W|_2 \mathbb{E}[\mathcal{H}^1(\partial\Xi_0)]^2,$$

was der in (iii) geforderten Form entspricht.

Kümmern wir uns nun um (iv). Analog zu 4.2.1 gilt zunächst

$$\mathbb{E}[\Psi_{u,1}^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)|W|_3}{2} (\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_3] - 2\mathbb{E}[|\Xi_0|_3]).$$

Im Fall eines isotropen typischen Kornes folgt ähnlich wie in 4.2.2 mit Hilfe der Kinematischen Hauptformel

$$\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_3] = 2\mathbb{E}[|\Xi_0|_3] + \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial\Xi_0)] \mathbb{E}[M(\Xi_0)], \quad (4.2.3)$$

also insgesamt wie gefordert

$$\mathbb{E}[\Psi_{u,1}^-(W)] = \frac{\lambda^2(1-p)|W|_3}{4\pi} \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial\Xi_0)] \mathbb{E}[M(\Xi_0)].$$

Für $\Psi_{u,2}^-$ arbeiten wir wieder mit der Slivnyak-Mecke Formel und mit der Darstellung des erzeugenden Funktionals im Booleschen Modell

$$\mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u((x_1 + K_1) \cap (x_2 + K_2) \cap (x_3 + K_3)))) \right] = 1 - p.$$

Offenbar ist damit

$$\mathbb{E}[\Psi_{u,2}^-(W)] = \frac{\lambda^3(1-p)}{6} (I_1 + I_2 + I_3),$$

wobei die drei Summanden I_1, I_2, I_3 die Beiträge der gleichartigen Summanden in 3.10.1 zusammenfassen.

Der erste Summand setzt sich aus drei Integralen zusammen, die aufgrund der Symmetrie in den Indizes alle den gleichen Wert haben. Nach der Substitution $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_3 - x_1$ gilt

$$I_1 = 3 \int_{\mathcal{K}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{W - \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2) \cap (y_3 + K_3))}(y_1) \mathbb{1}_{(y_2 + K_2) \cap (y_3 + K_3)}(\ell_u(K_1)) dy_1 \cdots Q(dK_3).$$

Nach dem Lösen des y_1 Integrals erhalten wir nach der Substitution $z_3 = y_3 - y_2$

$$I_1 = 3 |W|_3 \int_{\mathcal{K}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{K_2 \cap (z_3 + K_3) - \ell_u(K_1)}(z_2) dz_2 \cdots Q(dK_3).$$

Da $\mathbb{1}_{K_2 \cap (z_3 + K_3) - \ell_u(K_1)}(z_2) = \mathbb{1}_{K_2 - \ell_u(K_1)}(z_2) \mathbb{1}_{z_3 + K_3 - \ell_u(K_1)}(z_2)$, lassen sich die Integrale bezüglich z_3 und z_2 in dieser Reihenfolge lösen und wir erhalten schließlich

$$I_1 = 3 |W|_3 \mathbb{E}[|\Xi_0|_3]^2.$$

Auch der zweite Summand besteht wieder aus drei gleichwertigen Integralen, sodass nach der Substitution $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_3 - x_1$

$$I_2 = 3 \int_{\mathcal{K}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{W - \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2) \cap (y_3 + K_3))}(y_1) \mathbb{1}_{K_1}(\ell_u((y_2 + K_2) \cap (y_3 + K_3))) dy_1 \cdots Q(dK_3)$$

gilt. Analog zur Rechnung in I_1 lässt sich wieder das y_1 Integral lösen und wir erhalten nach der Substitution $z_3 = y_3 - y_2$

$$I_2 = 3 |W|_3 \int_{\mathcal{K}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{K_1}(z_2 + \ell_u(K_2 \cap (z_3 + K_3))) dz_2 \cdots Q(dK_3).$$

Ist der Schnitt $K_2 \cap (z_3 + K_3) \neq \emptyset$, so lassen sich die Integrale bezüglich z_2 und z_3 nacheinander lösen und wir erhalten

$$I_2 = 3 |W|_3 \mathbb{E}[|\Xi_0|_3] \mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_3].$$

Im Fall eines isotropen typischen Korns folgt insgesamt mit 4.2.3, dass

$$I_2 = |W|_3 \left(6 \mathbb{E}[|\Xi_0|_3]^2 + \frac{3}{2\pi} \mathbb{E}[|\Xi_0|_3] \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial \Xi_0)] \mathbb{E}[M(\Xi_0)] \right).$$

Der dritte Summand hat nach der gleichen Substitution wie bei I_1 den Wert

$$I_3 = \int_{\mathcal{K}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{W - \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2) \cap (y_3 + K_3))}(y_1) \mathbb{1}_{[K_1 \cap (y_3 + K_3)] \oplus (-K_2)}(y_2) dy_1 \cdots Q(dK_3).$$

Das y_1 Integral lässt sich abermals lösen und wir erhalten mit Hilfe der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$I_3 = |W|_3 \int_{\mathcal{K}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{[K_1 \cap (y_3 + K_3)] \oplus (-K_2)}(y_2) dy_2 \cdots Q(dK_3)$$

und nach Lösen des dy_2 Integrals schließlich

$$I_3 = |W|_3 \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |[\Xi_0 \cap (y + \Xi'_0)] \oplus (-\Xi''_0)|_3 dy \right].$$

Im Fall eines isotropen typischen Korns folgt wieder mit Hilfe der Kinematischen Hauptformel

$$I_3 = |W|_3 \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \chi(\Xi_0 \cap (x + \Xi'_0)) |\Xi''_0|_3 + \frac{1}{4\pi} M(\Xi_0 \cap (x + \Xi'_0)) \mathcal{H}^2(\partial \Xi''_0) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \mathcal{H}^2(\partial(\Xi_0 \cap (x + \Xi'_0))) M(\Xi''_0) + |\Xi_0 \cap (x + \Xi'_0)|_3 dx \right].$$

Nach erneuter Anwendung der Kinematischen Hauptformel folgt

$$I_3 = |W|_3 \left(\frac{\pi}{64} \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial \Xi_0)]^3 + \frac{3}{2\pi} \mathbb{E}[|\Xi_0|_3] \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial \Xi_0)] \mathbb{E}[M(\Xi_0)] + 3\mathbb{E}[|\Xi_0|_3]^2 \right).$$

Insgesamt folgt wie gefordert

$$\mathbb{E}[\Psi_{u,2}^-(W)] = \frac{\lambda^3 \pi (1-p)}{384} |W|_3 \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial \Xi_0)]^3.$$

□

Das Ergebnis $\mathbb{E}[\Psi_u^+(W)] = \lambda(1-p)|W|_d$ ist intuitiv ersichtlich: Die Anzahl der Punkte einer Realisierung des $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ zugrundeliegenden Punktprozesses in W ist im Mittel $\lambda|W|_d$. Nun nehmen wir gemäß der Verdünnungsregel aus dieser Realisierung Punkte heraus. Diese Entfernung geschieht offenbar mit Wahrscheinlichkeit $1-p$, also bleiben im Mittel $\lambda(1-p)|W|_d$ Punkte in der Verdünnung übrig.

Interessant ist weiter, dass die Intensität nicht mehr von der gewählten Richtung u abhängt.

Mit Hilfe von Satz 4.2 sind wir bereits in der Lage eine Eigenschaft des Schätzers $\hat{N}_{d,n}(u)$ zu beweisen.

Korollar 4.3 (Erwartungstreue von $\hat{N}_{d,n}(u)$): *Im stationären Booleschen Modell mit Intensität λ und typischem Korn Ξ_0 gilt in $d=2$*

$$\mathbb{E}[\hat{N}_{A,n}(u)] = (1-p) \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} (\mathbb{E}[|\Xi_0 \oplus (-\Xi'_0)|_2] - 2\mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) \right)$$

und falls Ξ_0 zudem isotrop ist, so gilt

$$\mathbb{E}[\hat{N}_{A,n}(u)] = (1-p) \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{4\pi} \mathbb{E}[\mathcal{H}^1(\partial\Xi_0)]^2 \right).$$

In $d = 3$ gilt für isotrope Ξ_0

$$\mathbb{E}[\hat{N}_{V,n}(u)] = (1-p) \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{4\pi} \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial\Xi_0)] \mathbb{E}[M(\Xi_0)] + \frac{\lambda^3 \pi}{384} \mathbb{E}[\mathcal{H}^2(\partial\Xi_0)]^3 \right).$$

Insbesondere ist $\hat{N}_{d,n}(u)$ in diesen Fällen erwartungstreu.

Beweis. Die Formeln für die Erwartungswerte folgen unmittelbar aus der Definition und den Rechnungen in Satz 4.2. Die Erwartungstreue ergibt sich aus dem Vergleich mit bekannten Formeln für das Boolesche Modell, siehe z.B. [41] auf Seite 389 und 391. \square

Neben der Intensität benötigen wir zusätzlich die asymptotische Varianz von $\hat{N}_{d,n}(u)$. Dabei beschränken wir uns in der folgenden Rechnung auf den Fall $d = 2$:

Definition 4.4 (Asymptotische Varianz von $\hat{N}_{A,n}(u)$): Seien Ψ_u^+ bzw. Ψ_u^- die Prozesse der positiven bzw. negativen Tangentialpunkte des Keim-Korn-Modells. Dann heißt

$$\sigma_A^2(u) := \sigma_+^2(u) + \sigma_-^2(u) - 2\rho(u)$$

die asymptotische Varianz von $\hat{N}_{A,n}(u)$. Dabei kürzen wir die Beiträge mit

$$\begin{aligned} \sigma_+^2(u) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\Psi_u^+(W_n))}{|W_n|_2}, \\ \sigma_-^2(u) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\Psi_u^-(W_n))}{|W_n|_2}, \\ \rho(u) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(\Psi_u^+(W_n), \Psi_u^-(W_n))}{|W_n|_2} \end{aligned}$$

ab.

Bevor wir $\sigma_A^2(u)$ für stationäre Boolesche Modelle berechnen, wollen wir noch eine weitere Notation festlegen. Im Laufe der Rechnungen haben wir es aufgrund der Struktur von Ψ_u^+ bzw. Ψ_u^- mit Summen der Form

$$\sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathcal{Y}_{ij} \sum_{k,l \geq 1}^{\neq} \mathcal{Z}_{kl} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \neq i} \mathcal{Y}_{ij} \sum_{k \geq 1} \sum_{l \neq k} \mathcal{Z}_{kl}$$

zu tun. Zerlegen wir die Summe über k , so erhalten wir

$$\sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathcal{Y}_{ij} \sum_{k,l \geq 1}^{\neq} \mathcal{Z}_{kl} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \neq i} \mathcal{Y}_{ij} \left(\sum_{k \neq i,j} \sum_{l \neq k} \mathcal{Z}_{kl} + \sum_{l \neq i} \mathcal{Z}_{il} + \sum_{l \neq j} \mathcal{Z}_{jl} \right).$$

Zerlegen wir analog die Summe über l , so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathcal{Y}_{ij} \sum_{k,l \geq 1}^{\neq} \mathcal{Z}_{kl} \\ &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \neq i} \mathcal{Y}_{ij} \left(\sum_{k \neq i,j} \sum_{l \neq k,i,j} \mathcal{Z}_{kl} + \sum_{k \neq i,j} \mathcal{Z}_{ki} + \sum_{k \neq i,j} \mathcal{Z}_{kj} + \sum_{l \neq i,j} \mathcal{Z}_{il} + \mathcal{Z}_{ij} + \sum_{l \neq i,j} \mathcal{Z}_{jl} + \mathcal{Z}_{ji} \right). \end{aligned}$$

Wir werden mit Hilfe der Slivnyak-Mecke Formel die drei Zahlen

$$\begin{aligned} s_0 &:= \mathbb{E} \left[\sum_{i,j,k,l \geq 1}^{\neq} \mathcal{Y}_{ij} \mathcal{Z}_{kl} \right] \\ s_1 &:= \mathbb{E} \left[\sum_{i,j,k \geq 1}^{\neq} \mathcal{Y}_{ij} (\mathcal{Z}_{ki} + \mathcal{Z}_{kj} + \mathcal{Z}_{ik} + \mathcal{Z}_{jk}) \right] \\ s_2 &:= \mathbb{E} \left[\sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathcal{Y}_{ij} (\mathcal{Z}_{ij} + \mathcal{Z}_{ji}) \right] \end{aligned}$$

berechnen, wobei wir die Indizes als Wert von $\#\(\{i, j\} \cap \{k, l\})$ festlegen (d.h. in s_0 ist $\#\(\{i, j\} \cap \{k, l\}) = 0$ usw.).

Damit können wir nun im stationären Booleschen Modell die asymptotische Varianz von $\hat{N}_{A,n}(u)$ berechnen. Zentral wird dabei wieder die Slivnyak-Mecke Formel sein. Die zusätzlichen Rechenschritte sind im Wesentlichen die gleichen wie in Satz 4.2. Schlussendlich stützen wir uns bei der Berechnung der Limiten auf den Satz von der majorisierten Konvergenz. Dafür benötigen wir weitere technische Bedingungen an das typische Korn.

Satz 4.5 (Asymptotische Varianz von $\hat{N}_{A,n}(u)$): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^2} \sim \Pi_{\lambda,Q}$ ein Keim-Korn-Prozess und Ξ_0, Ξ'_0 unabhängig gemäß Q verteilt. Mit den Abkürzungen*

$$\begin{aligned} U(x, \Xi_0) &:= |\Xi_0 \cup (x + \Xi_0)|_2, \\ F(x) &:= \mathbb{P}(x \in \Xi_0 - \ell_u(\Xi_0)), \\ D_u(K, L) &:= K \oplus (-L) \setminus ((K^\circ - \ell_u(L)) \cup (-L^\circ + \ell_u(K))), \\ H(x, y) &:= \mathbb{P}(x \in \Xi_0 \cup (\Xi'_0 + y) - \ell_u(\Xi_0 \cap (y + \Xi'_0)), y \in D_u(\Xi_0, \Xi'_0)) \end{aligned}$$

und unter den Bedingungen $\mathbb{E}[|\Xi_0|_2^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2^2] < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_+^2(u) &= \lambda(1-p) + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) - \exp(-2\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) dx \\ &\quad - \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) (2 - F(-x)) F(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_-^2(u) &= \frac{\lambda^2(1-p)}{2} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2] \\
&+ \lambda^3 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1 \cap (x + K_2)) - \ell_u(K_1 \cap (y + K_3)), \Xi_0)]) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{y+K_3}(\ell_u(K_1 \cap (x + K_2))))(1 - \mathbf{1}_{x+K_2}(\ell_u(K_1 \cap (y + K_3)))) \\
&\quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_3)}(y) dx dy Q(dK_1) Q(dK_2) Q(dK_3) \\
&+ \frac{\lambda^4}{4} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2]^2 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) - \exp(-2\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) dx \\
&+ \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) H(-x, y) H(x, z) dx dy dz \\
&- \frac{\lambda^4}{2} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2] \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) H(x, y) dx dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(u) &= -\frac{\lambda^3}{2} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2] \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) F(x) dx \\
&+ \frac{\lambda^3}{2} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2] \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) - \exp(-2\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) dx \\
&- \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) (1 - F(-x)) H(x, y) dx dy \\
&+ \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x)), \Xi_0)]) \\
&\quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x) dx Q(dK_1) Q(dK_2).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbb{E}[|\Xi_0|_2^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2^2] < \infty$ hinreichend für $\sigma_A^2(u) < \infty$.

Beweis. Um $\sigma_+^2(u)$ zu berechnen, benötigen wir $\mathbb{E}[\Psi_u^+(W)^2]$. Wir müssen also zunächst die Summen richtig ordnen, um die Slivnyak-Mecke Formel anwenden zu können. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Psi_u^+(W)^2 &= \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_W(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \prod_{k \neq i} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(X_i + \ell_u(\Xi_i))) \\
&+ \sum_{i, j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_W(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \mathbf{1}_W(X_j + \ell_u(\Xi_j)) \\
&\quad \times \prod_{k \neq i, j} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(X_i + \ell_u(\Xi_i)))(1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(X_j + \ell_u(\Xi_j))) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{X_j + \Xi_j}(X_i + \ell_u(\Xi_i)))(1 - \mathbf{1}_{X_i + \Xi_i}(X_j + \ell_u(\Xi_j))),
\end{aligned}$$

wobei der erste Teil in Satz 4.2 (i) betrachtet wurde. Den Erwartungswert der restlichen Summen bezeichnen wir gemäß der von uns eingeführten Notation mit s_1 . Diese hat aufgrund der Slivnyak-Mecke Formel den Wert

$$\begin{aligned} s_1 &= \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_W(x_1 + \ell_u(K_1)) \mathbb{1}_W(x_2 + \ell_u(K_2)) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(x_1 + \ell_u(K_1))) (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(x_2 + \ell_u(K_2))) \right] \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2 + K_2}(x_1 + \ell_u(K_1))) (1 - \mathbb{1}_{x_1 + K_1}(x_2 + \ell_u(K_2))) dx_1 \cdots Q(dK_2). \end{aligned}$$

Mit der Substitution von $y_2 = x_2 - x_1$ folgt

$$\begin{aligned} s_1 &= \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_W(y_1 + \ell_u(K_1)) \mathbb{1}_W(y_1 + y_2 + \ell_u(K_2)) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + \ell_u(K_1))) (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + y_2 + \ell_u(K_2))) \right] \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{K_2}(-y_2 + \ell_u(K_1))) (1 - \mathbb{1}_{K_1}(y_2 + \ell_u(K_2))) dy_1 \cdots Q(dK_2). \end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} 1 - (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + \ell_u(K_1))) (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + y_2 + \ell_u(K_2))) \\ = \mathbb{1}_{(\Xi_k - y_1 - \ell_u(K_1)) \cup (\Xi_k - y_1 - y_2 - \ell_u(K_2))}(-X_k) \end{aligned}$$

und mit der Darstellung des erzeugenden Funktionalis im Boolesches Modell folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + \ell_u(K_1))) (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + y_2 + \ell_u(K_2))) \right] \\ = \exp \left(-\lambda \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(M - y_1 - \ell_u(K_1)) \cup (M - y_1 - y_2 - \ell_u(K_2))}(-z) dz Q(dM) \right). \end{aligned}$$

Die Integration bezüglich dz lässt sich durchführen und wir erhalten mit Hilfe der Translations- und Spiegelungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{k \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + \ell_u(K_1))) (1 - \mathbb{1}_{X_k + \Xi_k}(y_1 + y_2 + \ell_u(K_2))) \right] \\ = \exp \left(-\lambda \int_{\mathcal{K}^d} |(M - \ell_u(K_1)) \cup (M - y_2 - \ell_u(K_2))|_2 Q(dM) \right) \\ = \exp(-\lambda \mathbb{E}[|(\Xi_0 - \ell_u(K_1)) \cup (\Xi_0 - \ell_u(K_2) - y_2)|_2]). \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Dieser Term ist nicht mehr von y_1 abhängig, wir können also das entsprechende Integral berechnen und es gilt

$$s_1 = \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |(W - \ell_u(K_1)) \cap (W - y - \ell_u(K_2))|_2 \\ \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[|(\Xi_0 + y + \ell_u(K_2) - \ell_u(K_1)) \cup \Xi_0|_2]) \\ \times (1 - \mathbf{1}_{K_2}(-y + \ell_u(K_1)))(1 - \mathbf{1}_{K_1}(y + \ell_u(K_2))) dy Q(dK_1) Q(dK_2).$$

Substituieren wir nun $x = y + \ell_u(K_2) - \ell_u(K_1)$, so erhalten wir wieder mit Hilfe der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$s_1 = \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathcal{K}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0 \cup (\Xi_0 + x)|_2]) \\ \times (1 - \mathbf{1}_{K_2}(\ell_u(K_2) - x))(1 - \mathbf{1}_{K_1}(x + \ell_u(K_1))) dx Q(dK_1) Q(dK_2),$$

wobei wir von nun an die Abkürzung $U(x, \Xi_0) = |\Xi_0 \cup (\Xi_0 + x)|_2$ verwenden. Nun lassen sich die Integrale bezüglich $Q(dK_1)$ und $Q(dK_2)$ lösen und wir erhalten mit der Abkürzung $F(x) = \mathbb{P}(x \in \Xi_0 - \ell_u(\Xi_0))$

$$s_1 = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) \\ \times (1 - F(-x) - F(x) + F(x)F(-x)) dx.$$

Durch die Transformation von $y = -x$ lässt sich unter Ausnutzung der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes der Summand mit $F(-x)$ umschreiben und wir erhalten schließlich

$$s_1 = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) (1 - 2F(x) + F(x)F(-x)) dx.$$

Wir erhalten also

$$\frac{\text{Var}(\Psi_u^+(W_n))}{|W_n|_2} = \lambda(1 - p) \\ + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|W_n \cap (W_n + x)|_2}{|W_n|_2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) - \exp(-2\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) \mathbf{1}_{W_n}(x) dx \\ - \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|W_n \cap (W_n + x)|_2}{|W_n|_2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) (2 - F(-x)) F(x) dx$$

und müssen nun davon den Limes für $n \rightarrow \infty$ berechnen. Dafür werden wir den Satz der majorisierten Konvergenz bemühen. Für das zweite Integral ist eine Majorante durch

$$g(x) = 2(1 - p) \mathbb{P}(x \in \Xi_0 - \ell_u(\Xi_0))$$

gegeben. Aufgrund des Satzes von Fubini und wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 2(1-p) \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\Xi_0 - \ell_u(\Xi_0)}(x) dx \right] = 2(1-p) \mathbb{E}[|\Xi_0|_2],$$

die Majorante ist also integrierbar. Das erste Integral lässt sich mit Hilfe der Kovarianzfunktion C (siehe 2.15.2) als

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|W_n \cap (W_n + x)|_2}{|W_n|_2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) - \exp(-2\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) \mathbb{1}_{W_n}(x) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|W_n \cap (W_n + x)|_2}{|W_n|_2} (C(x) - p^2) dx \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

schreiben, wobei wir ausnutzen, dass aufgrund von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|W_n \cap (W_n + x)|_2}{|W_n|_2} - \mathbb{1}_{W_n}(x) dx \\ = \frac{1}{|W_n|_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{W_n}(y) \mathbb{1}_{W_n - y}(-x) - \mathbb{1}_{W_n}(x) \mathbb{1}_{W_n}(y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Da erneut aufgrund von Fubini und Translationsinvarianz

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[|\Xi_0 \cap (\Xi_0 + x)|_2] dx = \mathbb{E}[|\Xi_0|_2^2]$$

und wegen $0 \leq C(x) - p^2 \leq \mathbb{E}[|\Xi_0 \cap (\Xi_0 + x)|_2]$, haben wir eine integrierbare Majorante gefunden. Weil

$$C(x) - p^2 = \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) - \exp(-2\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2])$$

liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |W_n \cap (W_n + x)|_2 / |W_n|_2 = 1$ schließlich die geforderte Formel für $\sigma_+^2(u)$.

Um $\sigma_-^2(u)$ zu berechnen, müssen wir $\Psi_u^-(W)$ quadrieren. Betrachten wir zunächst den

Beitrag der Summanden mit $\#\{\{i, j\} \cap \{k, l\}\} = 0$. Analog zum bisherigen Vorgehen haben diese Summen nach der Slivnyak-Mecke Formel den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_W(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2))) \mathbb{1}_W(x_3 + \ell_u(K_3 \cap (x_4 - x_3 + K_4))) \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\prod_{n \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2)))) \right. \\
&\quad \quad \left. \times (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(x_3 + \ell_u(K_3 \cap (x_4 - x_3 + K_4)))) \right] \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_1 + K_1}(x_3 + \ell_u(K_3 \cap (x_4 - x_3 + K_4)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2 + K_2}(x_3 + \ell_u(K_3 \cap (x_4 - x_3 + K_4)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_3 + K_3}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_4 + K_4}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2)))) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{D_u(K_3, K_4)}(x_4 - x_3) dx_1 \cdots Q(dK_4).
\end{aligned}$$

Nach der Transformation $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4 - x_3$ mit $dx_1 \cdots dx_4 = dy_1 \cdots dy_4$ folgt

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_W(y_1 + \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2))) \mathbb{1}_W(y_3 + \ell_u(K_3 \cap (y_4 + K_4))) \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\prod_{n \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(y_1 + \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2)))) \right. \\
&\quad \quad \left. \times (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(y_3 + \ell_u(K_3 \cap (y_4 + K_4)))) \right] \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{y_1 + K_1}(y_3 + \ell_u(K_3 \cap (y_4 + K_4)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{y_2 + K_2}(y_3 - y_1 + \ell_u(K_3 \cap (y_4 + K_4)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{y_3 + K_3}(y_1 + \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{y_4 + K_4}(y_1 - y_3 + \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2)))) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) \mathbb{1}_{D_u(K_3, K_4)}(y_4) dy_1 \cdots Q(dK_4).
\end{aligned}$$

Für das erzeugende Funktional können wir analog zu 4.5.1 wieder

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\prod_{n \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(y_1 + \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2)))) (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(y_3 + \ell_u(K_3 \cap (y_4 + K_4)))) \right] \\
&= \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2)) - \ell_u(K_3 \cap (y_4 + K_4)) - y_3 + y_1, \Xi_0)])
\end{aligned}$$

schreiben. Nach der Transformation $z_3 = y_3 - y_1$ folgt

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{W - \ell_u(K_1 \cap (z_2 + K_2))}(z_1) \mathbf{1}_{W - \ell_u(K_3 \cap (z_4 + K_4)) - z_3}(z_1) \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1 \cap (z_2 + K_2)) - \ell_u(K_3 \cap (z_4 + K_4)) - z_3, \Xi_0)]) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_3 \cap (z_4 + K_4))}(z_3))(1 - \mathbf{1}_{K_2 - \ell_u(K_3 \cap (z_4 + K_4))}(z_3 - z_2)) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_3 - \ell_u(K_1 \cap (z_2 + K_2))}(-z_3))(1 - \mathbf{1}_{K_4 - \ell_u(K_1 \cap (z_2 + K_2))}(-z_3 - z_4)) \\
&\quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(z_2) \mathbf{1}_{D_u(K_3, K_4)}(z_4) dz_1 \cdots Q(dK_4).
\end{aligned}$$

Nun lässt sich das dz_1 Integral berechnen und wir erhalten dann nach der Transformation $y = z_2$, $x = \ell_u(K_1 \cap (z_2 + K_2)) - \ell_u(K_3 \cap (z_4 + K_4)) - z_3$, $z = z_4$

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_1 \cap (y + K_2))}(-x))(1 - \mathbf{1}_{K_2 - \ell_u(K_1 \cap (y + K_2))}(-x - y)) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_3 - \ell_u(K_3 \cap (z + K_4))}(x))(1 - \mathbf{1}_{K_4 - \ell_u(K_3 \cap (z + K_4))}(x - z)) \\
&\quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y) \mathbf{1}_{D_u(K_3, K_4)}(z) dx \cdots Q(dK_4).
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $H(x, y) = \mathbb{P}(x \in \Xi_0 \cup (\Xi'_0 + y) - \ell_u(\Xi_0 \cap (y + \Xi'_0)), y \in D_u(\Xi_0, \Xi'_0))$ und $\prod_n (1 - \mathbf{1}_{A_n}) = 1 - \mathbf{1}_{\cup_n A_n}$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\lambda^4}{4} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2]^2 \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) dx \\
&\quad + \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) H(-x, y) H(x, z) dx dy dz \\
&\quad - \frac{\lambda^4}{2} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2] \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) H(x, y) dx dy,
\end{aligned}$$

wobei wir noch eine einfache Substitution durchführen und die Invarianz des Lebesgue-Maßes nutzen, um den letzten Summanden auf die angegebene Form zu bringen.

Dividieren wir das nun durch $|W|_2$, so müssen wir wieder für jeden Integranden eine von W unabhängige integrierbare Majorante finden. Dabei kürzen wir die Argumente aber etwas ab. Das erste so entstandene Integral in $s_0/|W|_2$ wird gemeinsam mit $\mathbb{E}[\Psi_u^-(W)]^2/|W|_2$ genauso majorisiert wie in 4.5.2. Das zweite fragliche Integral wird durch

$$\begin{aligned}
&g(x, y, z) \\
&= (1 - p) \mathbb{P}(y \in D_u(\Xi_0, \Xi'_0)) \mathbb{P}(x \in \Xi_0 \cup (\Xi'_0 + z) - \ell_u(\Xi_0 \cap (z + \Xi'_0)), z \in D_u(\Xi_0, \Xi'_0))
\end{aligned}$$

majorisiert. Auch das ist aufgrund ähnlicher Argumente wie bei der Berechnung von $\sigma_+^2(u)$ integrierbar, genauso wie

$$g(x, y) = (1 - p) \mathbb{P}(x \in \Xi_0 \cup (\Xi'_0 + y) - \ell_u(\Xi_0 \cap (y + \Xi'_0)), y \in D_u(\Xi_0, \Xi'_0)),$$

was eine Majorante des dritten Integrals darstellt.

Betrachten wir nun den Fall $\#\{i, j\} \cap \{k, l\} = 1$. Dabei ergeben sich vier Summanden, die alle den gleichen Beitrag liefern. Insgesamt ist dieser wieder wegen der Slivnyak-Mecke Formel

$$\begin{aligned}
s_1 &= 4 \frac{\lambda^3}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_W(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2))) \mathbb{1}_W(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_3 - x_1 + K_3))) \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\prod_{n \geq 1} (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2)))) \right. \\
&\quad \quad \left. \times (1 - \mathbb{1}_{X_n + \Xi_n}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_3 - x_1 + K_3)))) \right] \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_3 + K_3}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2 + K_2}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (x_3 - x_1 + K_3)))) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_3)}(x_3 - x_1) dx_1 \cdots Q(dK_3).
\end{aligned}$$

Auch hier transformieren wir wieder $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_3 - x_1$, $dx_1 dx_2 dx_3 = dy_1 dy_2 dy_3$ und erhalten, nachdem wir abermals analog zu 4.5.1 die spezielle Form des erzeugenden Funktionals im Booleschen Modell verwenden,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \lambda^3 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{W - \ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2))}(y_1) \mathbb{1}_{W - \ell_u(K_1 \cap (y_3 + K_3))}(y_1) \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2))) - \ell_u(K_1 \cap (y_3 + K_3))], \Xi_0)) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{y_3 + K_3}(\ell_u(K_1 \cap (y_2 + K_2)))) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{y_2 + K_2}(\ell_u(K_1 \cap (y_3 + K_3)))) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_3)}(y_3) dy_1 \cdots Q(dK_3).
\end{aligned}$$

Nun können wir das dy_1 Integral berechnen und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
s_1 &= \lambda^3 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + \ell_u(K_1 \cap (x + K_2)) - \ell_u(K_1 \cap (y + K_3)))|_2 \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1 \cap (x + K_2))) - \ell_u(K_1 \cap (y + K_3))], \Xi_0)) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{y + K_3}(\ell_u(K_1 \cap (x + K_2)))) (1 - \mathbb{1}_{x + K_2}(\ell_u(K_1 \cap (y + K_3)))) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_3)}(y) dx dy Q(dK_1) Q(dK_2) Q(dK_3).
\end{aligned}$$

Der Integrand von $s_1/|W|_2$ wird majorisiert von $(1-p)\mathbb{1}_{D_u(K_1,K_2)}(x)\mathbb{1}_{D_u(K_1,K_3)}(y)$. Aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1-p)\mathbb{1}_{D_u(K_1,K_2)}(x)\mathbb{1}_{D_u(K_1,K_3)}(y) dx dy Q(dK_1)Q(dK_2)Q(dK_3) \\ &= (1-p) \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} |D_u(K_1, K_2)|_2 |D_u(K_1, K_3)|_2 Q(dK_1)Q(dK_2)Q(dK_3) \\ &\leq (1-p)\mathbb{E}\left[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2^2\right], \end{aligned}$$

also ist die Majorante integrierbar.

Zu guter Letzt betrachten wir den Fall, dass $\#\(\{i, j\} \cap \{k, l\}) = 2$. In diesem Fall erhalten wir

$$s_2 = \mathbb{E}[\Psi_u^-(W)],$$

den wir schon in Satz 4.2 (ii) berechnet haben. Zusammengesetzt können wir daraus mit Hilfe des Satzes der majorisierten Konvergenz die Richtigkeit der angegebenen Formel für $\sigma_-^2(u)$ folgern.

Bei der Berechnung von $\rho(u)$ betrachten wir wieder die verschiedenen Beiträge der Summen. Der Term mit $\#\(\{i, j\} \cap \{k\}) = 1$ hat aufgrund der Slivnyak-Mecke Formel den Beitrag

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{W-\ell_u(K_1 \cap (K_2+x_2-x_1))}(x_1) \mathbb{1}_{W-\ell_u(K_1)}(x_1) \\ &\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1))), \Xi_0]) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{K_2-\ell_u(K_1)}(x_1 - x_2)) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 Q(dK_1)Q(dK_2) \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{W-\ell_u(K_1 \cap (K_2+x_2-x_1))}(x_1) \mathbb{1}_{W-\ell_u(K_2)}(x_2) \\ &\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x_2 - x_1 + \ell_u(K_2) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1))), \Xi_0]) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{K_1-\ell_u(K_2)}(x_2 - x_1)) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 Q(dK_1)Q(dK_2). \end{aligned}$$

Transformieren wir diese Integrale jeweils gemäß $y_2 = x_2 - x_1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{(W-\ell_u(K_1 \cap (K_2+y_2))) \cap (W-\ell_u(K_1))}(y_1) \\ &\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2))), \Xi_0]) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{K_2-\ell_u(K_1)}(-y_2)) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) dy_1 dy_2 Q(dK_1)Q(dK_2) \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{(W-\ell_u(K_1 \cap (K_2+y_2))) \cap (W-y_2-\ell_u(K_2))}(y_1) \\ &\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(y_2 + \ell_u(K_2) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2))), \Xi_0]) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{K_1-\ell_u(K_2)}(y_2)) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) dy_1 dy_2 Q(dK_1)Q(dK_2). \end{aligned}$$

Nun können wir jeweils das dy_1 Integral lösen und erhalten mit Hilfe der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + \ell_u(K_1) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x)))|_2 \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x))), \Xi_0]) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{-K_2 + \ell_u(K_1)}(x)) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x) dx Q(dK_1) Q(dK_2) \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x + \ell_u(K_2) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x)))|_2 \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x + \ell_u(K_2) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x))), \Xi_0]) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_2)}(x)) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x) dx Q(dK_1) Q(dK_2).
\end{aligned}$$

Die Integrale in $s_1/|W|_2$ sind jeweils majorisiert durch $(1-p)\mathbf{1}_{D_u(K_1, K_1)}(x)$. Da aufgrund der Definition von D_u sowohl $(K_1 - \ell_u(K_2)) \cap D_u(K_1, K_2)$ als auch $(-K_2 + \ell_u(K_1)) \cap D_u(K_1, K_2)$ Nullmengen sind, lassen sich wegen $-x \in D_u(K_1, K_2) \Leftrightarrow x \in D_u(K_2, K_1)$ die asymptotischen Beiträge der Integrale nach der Transformation $x = -x$ zusammenführen und wir erhalten daraus insgesamt als asymptotischen Beitrag

$$\begin{aligned}
\lim_{W \rightarrow \mathbb{R}^2} \frac{s_1}{|W|_2} &= \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(\ell_u(K_1) - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x))), \Xi_0]) \\
&\quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x) dx Q(dK_1) Q(dK_2).
\end{aligned}$$

Der Term mit $\#(\{i, j\} \cap \{k\}) = 0$ hat aufgrund der Slivnyak-Mecke Formel den Beitrag

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{W - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1))}(x_1) \mathbf{1}_{W - \ell_u(K_3)}(x_3) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x_3 - x_1 - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + \ell_u(K_3)), \Xi_0]) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_3)}(x_3 - x_1)) (1 - \mathbf{1}_{K_2 - \ell_u(K_3)}(x_3 - x_2)) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_3 - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1))}(x_1 - x_3)) dx_1 \cdots Q(dK_3).
\end{aligned}$$

Wir transformieren wieder $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_3 - x_1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{(W - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2))) \cap (W - y_3 - \ell_u(K_3))}(y_1) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(y_3 - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + \ell_u(K_3)), \Xi_0]) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_1 - \ell_u(K_3)}(y_3)) (1 - \mathbf{1}_{K_2 - \ell_u(K_3)}(y_3 - y_2)) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{K_3 - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2))}(-y_3)) dy_1 \cdots Q(dK_3).
\end{aligned}$$

Nun können wir das dy_1 Integral berechnen und erhalten nach der Transformation $y = y_2$, $x = y_3 - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + \ell_u(K_3)$

$$s_0 = \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y) \\ \times (1 - \mathbb{1}_{K_1 - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y))}(x)) (1 - \mathbb{1}_{K_2 + y - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + y))}(x)) \\ \times (1 - \mathbb{1}_{K_3 - \ell_u(K_3)}(-x)) dy dx Q(dK_1) Q(dK_2) Q(dK_3).$$

Daraus erhalten wir wieder mit $\prod_n (1 - \mathbb{1}_{A_n}) = 1 - \mathbb{1}_{\cup_n A_n}$

$$s_0 = \frac{\lambda^3}{2} \mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2] \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) (1 - F(-x)) dx \\ - \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |W \cap (W + x)|_2 \exp(-\lambda \mathbb{E}[U(x, \Xi_0)]) (1 - F(-x)) H(x, y) dx dy.$$

Der Integrand des zweiten Integrals in $s_0/|W|_2$ wird majorisiert von

$$(1 - p) \mathbb{P}(x \in \Xi_0 \cup (\Xi'_0 + y) - \ell_u(\Xi_0 \cap (\Xi'_0 + y))), y \in D_u(\Xi_0, \Xi'_0),$$

was erneut aufgrund von Fubini integrierbar ist. Der Integrand des ersten Integrals wird zusammen mit $\mathbb{E}[\Psi_u^+(W_n)] \mathbb{E}[\Psi_u^-(W_n)]$ analog zu 4.5.2 majorisiert. Insgesamt können wir aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz die geforderte Form von $\rho(u)$ folgern.

Außerdem folgt aus $\mathbb{E}[|\Xi_0|_2^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2^2] < \infty$ auch direkt die Endlichkeit von $\sigma_A^2(u)$. \square

Betrachten wir $D_u(K, L)$ etwas genauer. Da $(K^\circ - \ell_u(L)) \cup (-L^\circ + \ell_u(K)) \subset K \oplus (-L)$ und $(K^\circ - \ell_u(L)) \cap (-L^\circ + \ell_u(K)) = \emptyset$, entspricht $|D_u(K, L)|_2/2$ dem sogenannten gemischten Flächeninhalt von K und $-L$. Außerdem ist $D_u(K, L)$ nicht von u abhängig. Wegen $|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2 \leq \mathcal{H}^1(\partial \Xi_0) \mathcal{H}^1(\partial \Xi'_0)/8$ (siehe Seite 321 in [39]) und aufgrund der Unabhängigkeit von Ξ_0 und Ξ'_0 ist $\mathbb{E}[\mathcal{H}^1(\partial \Xi_0)^2] < \infty$ für die Erfüllung der Bedingung $\mathbb{E}[|D_u(\Xi_0, \Xi'_0)|_2^2] < \infty$ hinreichend.

Die semi-explizite Formel aus Satz 4.5 für $\sigma_A^2(u)$ lässt sich für spezielle Markenverteilungen wie z.B. $Q([0, 1]^2) = 1$ explizit auswerten. Insbesondere für Boolesche Modelle mit Bällen deterministischer Größe als typischem Korn wäre eine Formel für $\sigma_A^2(u)$ sicher erstrebenswert. Allgemein scheint eine Auswertung aber aufwendig und der Informationsgewinn gering, zumal es gute Schätzer für $\sigma_A^2(u)$ gibt (siehe Kapitel 6).

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} |W_n|_2 = \infty$, impliziert Satz 4.5, dass $\hat{N}_{A,n}(u)$ nicht nur erwartungstreu, sondern auch L^2 -konsistent ist. Für den Rest der Arbeit werden wir $\sigma_A^2(u) > 0$ bedingungslos voraussetzen.

5 VERTEILUNGSASYMPTOTIK DER EULER-POINCARÉ-CHARAKTERISTIK

Die Problemstellung bei der Untersuchung der Verteilungsasymptotik der EPC eines Keim-Korn-Modells ist die Folgende: Unter welchen Abhängigkeitsbedingungen an den Keim-Prozess und unter welchen Momentenbedingungen an Funktionale des typischen Kornes gilt

$$\sqrt{|W_n|_d} \left(\hat{N}_{d,n}(u) - N_d \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_d^2(u))?$$

Dabei konkurrieren die Abhängigkeitsbedingung und die Momentenbedingung miteinander. Je expliziter die Abhängigkeitsstruktur des Keim-Prozesses ist, desto weniger strenge Bedingungen müssen wir an das typische Korn stellen. Ist jedoch die Abhängigkeitsstruktur des Keim-Prozesses allgemeiner, müssen auch strengere Bedingungen an das typische Korn gestellt werden. Dies wird in den folgenden Grenzwertsätzen auch ersichtlich sein.

In diesem Kapitel werden wir zunächst das stationäre Boolesche Modell behandeln. Dabei wollen wir zunächst zusätzlich beschränkte Körner voraussetzen. Diese starke Einschränkung wird zu einer sehr konkreten Abhängigkeitsstruktur, der sogenannten m -Abhängigkeit, führen. Entsprechend stark werden auch die Aussagen sein, insbesondere erhalten wir in unseren Grenzwertsätzen Konvergenzgeschwindigkeiten. Dies wird für den Fall von unbeschränkten Körnern nicht mehr der Fall sein. Um eine entsprechende Aussage beweisen zu können, werden wir jedoch auf eine Approximationstechnik mit m -abhängigen Feldern zurückgreifen.

Im zweiten Unterkapitel wollen wir dann allgemeinere Keim-Prozesse zulassen. Dabei werden wir für β -mischende Keim-Prozesse Grenzwertsätze formulieren. Da der Keim-Prozess allgemeiner ist als im Booleschen Modell, ist klar, dass wir strengere Bedingungen an das typische Korn stellen müssen.

Wir werden versuchen, die Aussagen parallel für $d = 2$ und $d = 3$ zu formulieren und zu beweisen. Damit wollen wir die Gemeinsamkeiten hervorheben, wir werden an entsprechender Stelle aber auch auf Unterschiede in der Behandlung hinweisen.

5.1 DAS STATIONÄRE BOOLESCHE MODELL

In diesem Unterkapitel wollen wir Grenzwertsätze für die EPC von stationären Booleschen Modellen beweisen. Dabei betrachten wir zunächst beschränkte Körner, d.h. wir setzen zunächst voraus, dass das typische Korn Ξ_0 der Bedingung

$$\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$$

für ein $R > 0$ genügt, wobei wir mit $B(x, R)$ den abgeschlossenen Ball mit Radius R um x bezeichnen. Wir stellen also strenge Bedingungen sowohl an den Keim-Prozess als auch an das typische Korn. Diese strengen Bedingungen führt zu einer sehr speziellen Abhängigkeitsstruktur der Tangentenpunktprozesse, die es zulässt, dass wir sogar Konvergenzgeschwindigkeiten in den Grenzwertsätzen angeben können.

Um nun bekannte Grenzwertsätze verwenden zu können, müssen wir Vorarbeiten leisten. Wir betrachten Beobachtungsfenster der Form

$$W_n = [0, Rn)^d.$$

Mit dieser speziellen Wahl liegt es nahe, das Beobachtungsfenster W_n in Quadrate bzw. Würfel der Kantenlänge R zu zerlegen. Dazu definieren wir

$$E_{\mathbf{j}} := \prod_{s=1}^d [j_s - 1, j_s)$$

für $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ und

$$W_n = \bigcup_{\mathbf{j} \in V_n} RE_{\mathbf{j}}$$

mit $V_n := \{1, \dots, n\}^d$. Dabei beschließen wir direkt die Konvention, die Multiindizes $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ mit fetten Buchstaben zu benennen. Den Raum der Multiindizes versehen wir mit der Maximumsnorm $|\mathbf{j}| := \max_{s \in \{1, \dots, d\}} |j_s|$. Mit diesen Vorarbeiten definieren wir das stochastische Feld $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ gemäß

$$\xi_{\mathbf{j}} := \Psi_u^+(RE_{\mathbf{j}}) - \Psi_u^-(RE_{\mathbf{j}}) \quad (5.0.1)$$

in $d = 2$ bzw.

$$\xi_{\mathbf{j}} := \Psi_u^+(RE_{\mathbf{j}}) - \Psi_{u,1}^-(RE_{\mathbf{j}}) + \Psi_{u,2}^-(RE_{\mathbf{j}}) \quad (5.0.2)$$

in $d = 3$. Offenbar gilt

$$\hat{N}_{d,n}(u) = \frac{1}{|W_n|_d} \sum_{\mathbf{j} \in V_n} \xi_{\mathbf{j}},$$

anstatt also die Tangentenpunktprozesse zu betrachten, untersuchen wir nun das Feld $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$. Der Vorteil davon ist, dass dieses Feld nicht nur die Stationarität erbt, sondern auch eine spezielle Abhängigkeitsstruktur besitzt.

Definition 5.1 (*m*-Abhängigkeit): *Ein stochastisches Feld $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ heißt *m*-abhängig, falls für alle endlichen Mengen $U, V \subset \mathbb{Z}^d$ mit*

$$\min_{u \in U, v \in V} |u_l - v_l| > m$$

für eine Komponente $l \in \{1, \dots, d\}$ die Vektoren $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in U}$ und $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in V}$ unabhängig sind.

Wir konzentrieren uns auf spezielle *m*-abhängige Felder, nämlich solche, die eine Blockdarstellung besitzen.

Definition 5.2 (Blockdarstellung): *Ein *m*-abhängiges stochastisches Feld $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ hat eine Blockdarstellung, falls es eine Funktion f und Zufallselemente $(\Psi_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ gibt, sodass*

$$\xi_{\mathbf{j}} = f(\Psi_{\mathbf{k}}^*; \mathbf{k} \in V_{\mathbf{j}}(m))$$

*für eine von *m* abhängige Menge $V_{\mathbf{j}}(m) \subset \mathbb{Z}^d$.*

Nicht jedes m -abhängige Feld besitzt automatisch eine Blockdarstellung (siehe [1]). Im Fall von beschränkten Körnern gilt für uns allerdings:

Lemma 5.3: *Im stationären Booleschen Modell mit Intensität λ und typischem Korn Ξ_0 , das $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$ erfüllt, besitzen die Felder $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ aus 5.0.1 und 5.0.2 eine Blockdarstellung und sind insbesondere 2-abhängig.*

Beweis. In unserem speziellen Fall können Tangentenpunkte in einem fixierten Quadrat bzw. Würfel $RE_{\mathbf{j}}$ aufgrund der Bedingung $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ nur von Körnern herrühren oder überdeckt werden, deren Keim nicht weiter als R von dem fixierten Quadrat bzw. Würfel entfernt liegt. Damit ist es nicht notwendig, für die Berechnung von $\xi_{\mathbf{j}}$ den kompletten markierten Punktprozess $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ zu betrachten. Ausreichend ist es, den eingeschränkten Punktprozess

$$\Psi_{\mathbf{k}}^*(\cdot) := \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{RE_{\mathbf{k}}}(X_i) \delta_{(X_i, \Xi_i)}(\cdot) \quad (5.3.1)$$

für $|\mathbf{k} - \mathbf{j}| \leq 1$ zu betrachten. Da die eingeschränkten Prozesse $(\Psi_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ eine i.i.d. Folge bilden ist das Feld $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ 2-abhängig. \square

Die daraus entstehende Blockdarstellung lässt sich in $d = 2$ visualisieren, insbesondere wird auch die 2-Abhängigkeit von $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2}$ klar.

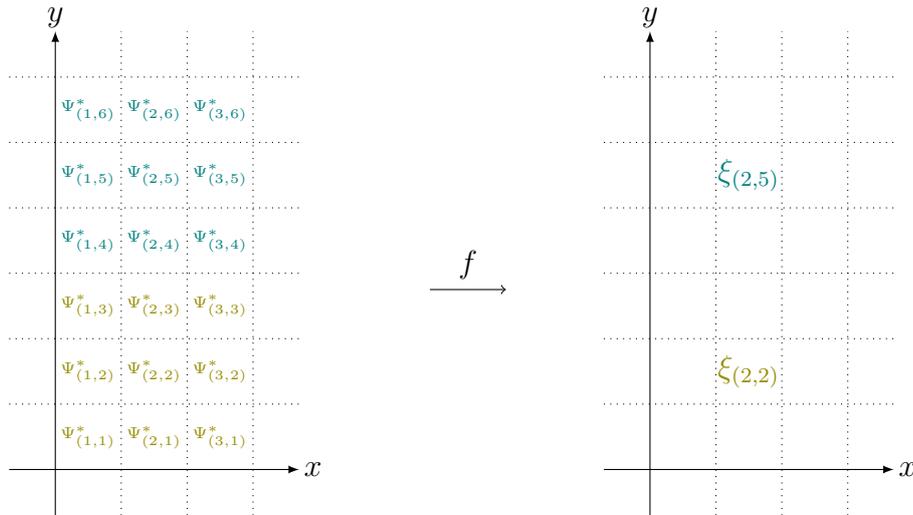


Abbildung 5.4: Farbliche Visualisierung der Blockdarstellung von $(\xi_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2}$. Die Abbildung f bildet die farblich gleich gekennzeichneten $\Psi_{\mathbf{k}}^*$ auf die in der gleichen Farbe gekennzeichneten $\xi_{\mathbf{j}}$ ab. Da die eingeschränkten Prozesse $(\Psi_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}$ eine i.i.d. Folge bilden, sind die beispielhaft gewählten Zufallsgrößen $\xi_{(2,2)}$ und $\xi_{(2,5)}$ unabhängig.

Nach diesen Vorarbeiten wenden wir uns der Formulierung von Grenzwertsätzen zu. Dies ist möglich, da für m -abhängigen Felder (insbesondere jene mit Blockdarstellung) die Verteilungasymptotik gut verstanden ist (siehe z.B. [6], [9], [13], [14], [15]). Wir notieren im Folgenden die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung mit Φ und definieren den sogenannten r -Rand von $V \subset \mathbb{Z}^d$ durch $\partial^{(r)}V := \{z \in V \mid \text{dist}(z, \mathbb{Z}^d \setminus V) \leq r\}$.

Außerdem nennen wir zwei Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ Hardy-Littlewood äquivalent (notiert $a_n \asymp b_n$), falls

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Speziell wollen wir im Folgenden Theorem 6 aus [13] verwenden:

Satz 5.5 (Grenzwertsatz für m -abhängige Felder): *Sei $(Y_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ ein stationäres m -abhängiges Feld mit Blockdarstellung und $\mathbb{E}[Y_{\mathbf{0}}] = 0$ sowie $\mathbb{E}[|Y_{\mathbf{0}}|^3] < \infty$. Weiter sei*

$$S_n = \sum_{\mathbf{j} \in V_n} Y_{\mathbf{j}}$$

für $V_n \subset \mathbb{Z}^d$ mit $\text{Var}(S_n) \asymp \#V_n$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial^{(r)}V_n}{\#V_n} = 0$$

für alle $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(S_n \leq x \sqrt{\text{Var}(S_n)}\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\#V_n}}.$$

In [13] ist Satz 5.5 nur für Felder formuliert, die von reellwertigen Zufallsgrößen erzeugt werden. Die Aussage gilt aber analog im Fall von Zufallsgrößen mit Werten in einem messbaren Raum. Damit gilt für uns:

Satz 5.6 (Grenzwertsatz für $\hat{N}_{d,n}(u)$): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ ein Keim-Korn-Prozess mit $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$. Weiter sei $W_n = [0, Rn]^d$ und $\sigma_d^2(u) > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\sqrt{|W_n|_d}(\hat{N}_{d,n}(u) - N_d) \leq x \sqrt{\frac{\text{Var}\left(|W_n|_d \hat{N}_{d,n}(u)\right)}{|W_n|_d}}\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{|W_n|_d}}.$$

Beweis. Wir betrachten das stationäre 2-abhängige Feld $(Y_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ definiert durch

$$Y_{\mathbf{j}} := \xi_{\mathbf{j}} - \mathbb{E}[\xi_{\mathbf{j}}].$$

mit $\xi_{\mathbf{j}}$ wie in 5.0.1 bzw. 5.0.2. Dieses Feld besitzt nach Lemma 5.3 eine Blockdarstellung. Wegen

$$S_n := \sum_{\mathbf{j} \in V_n} Y_{\mathbf{j}} = |W_n|_d (\hat{N}_{d,n}(u) - N_d),$$

$V_n = \{1, \dots, n\}^d$, besteht eine Verbindung zu unserem Problem. Um Satz 5.5 anwenden zu können, müssen wir die dort aufgeführten Voraussetzungen nachrechnen. Da für einen Poissonschen Keim-Prozess $\gamma_{\text{red}}^{(k)} = 0$ für $k \geq 2$, ist $\mathbb{E}[Y_{\mathbf{0}}] = 0$ und $\mathbb{E}[|Y_{\mathbf{0}}|^3] < \infty$ wegen Korollar 3.15.

Außerdem ist wegen

$$\#\partial^{(r)}V_n = n^d - (n - 2r)^d$$

für n groß genug

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial^{(r)}V_n}{\#V_n} = 0$$

für alle $r \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Betrachten wir nun die Varianz von S_n mit Hilfe der 2-Abhängigkeit von $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ genauer:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{j \in V_n} \xi_j \right) &= \sum_{j \in V_n} \sum_{l \in V_n} \text{Cov}(\xi_j, \xi_l) \\ &= \sum_{j \in V_n \setminus \partial^{(2)}V_n} \sum_{l \in V_n} \text{Cov}(\xi_j, \xi_l) + \sum_{j \in \partial^{(2)}V_n} \sum_{l \in V_n} \text{Cov}(\xi_j, \xi_l) \\ &= \#(V_n \setminus \partial^{(2)}V_n) \sum_{l: |l| \leq 2} \text{Cov}(\xi_0, \xi_l) + \sum_{j \in \partial^{(2)}V_n} \sum_{\substack{l \in V_n \\ |l-j| \leq 2}} \text{Cov}(\xi_j, \xi_l), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Stationarität und 2-Abhängigkeit verwenden. Identifizieren wir $\sigma_d^2(u) = \sum_{l: |l| \leq 2} \text{Cov}(\xi_0, \xi_l)/R^d$, so gilt wegen $|W_n|_d = R^d \#V_n$

$$\left| \frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d} - \sigma_d^2(u) \right| \leq \frac{C}{|W_n|_d^{1/d}}, \quad (5.6.1)$$

wobei sich die Geschwindigkeit aus dem Verhältnis von Oberfläche und Volumen des Fensters W_n ergibt. Damit ist $\text{Var}(S_n) \asymp \#V_n$, wobei hier $\sigma_d^2(u) > 0$ wichtig ist.

Insgesamt sind alle Voraussetzungen von Satz 5.5 erfüllt und damit folgt die gewünschte Aussage. \square

An dieser Stelle lohnt sich ein Vergleich mit den Ergebnissen aus [25]. Dort wurde in Kapitel 9 die Verteilung asymptotik des gemeinsamen Vektors von Geometrischen Funktionalen (wie die EPC eines ist) des Booleschen Modells betrachtet und Konvergenzgeschwindigkeiten bezüglich der Wasserstein-Metrik und des Kolmogorov-Abstands angegeben. Letztere können wir mit unseren Resultaten vergleichen. In [25] weist die EPC bezüglich des Kolmogorov-Abstands eine Konvergenzgeschwindigkeit von höchstens $\mathcal{O}(|W_n|_d^{-1/4})$ auf, während wir in Satz 5.6 eine Konvergenzgeschwindigkeit von $\mathcal{O}(|W_n|_d^{-1/2})$ erhalten haben. Allerdings setzen wir für unser Ergebnis Boolesche Modelle mit beschränkten Körnern voraus, was in [25] nicht der Fall ist. Ein weiterer Unterschied besteht in der Bestimmung der EPC. Während wir Tangentenpunkte im Beobachtungsfenster W_n zählen, wird in [25] die Größe $\chi(\Xi \cap W_n)$ betrachtet.

Anstatt mit der uns gänzlich unzugänglichen Varianz $\text{Var}(|W_n|_d \hat{N}_{d,n}(u))$ zu standardisieren, wollen wir nun mit dem asymptotisch äquivalenten $\sigma_d^2(u) |W_n|_d$ standardisieren und einen analogen Grenzwertsatz beweisen. Dabei ändert sich aber in $d = 3$ die Konvergenzgeschwindigkeit:

Satz 5.7 (Grenzwertsatz für $\hat{N}_{d,n}(u)$): Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d} \sim \Pi_{\lambda, \mathcal{Q}}$ ein Keim-Korn-Prozess mit $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$. Weiter sei $W_n = [0, Rn]^d$ und $\sigma_d^2(u) > 0$. Dann gibt es eine von R und $\sigma_d^2(u)$ abhängige Konstante $C > 0$, sodass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\sqrt{|W_n|_d} (\hat{N}_{d,n}(u) - N_d) \leq x \sigma_d(u) \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{|W_n|_d^{1/d}}.$$

Beweis. Wir wollen die Konvergenzgeschwindigkeit aus 5.6.1 verwenden. Dazu betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\sqrt{|W_n|_d} (\hat{N}_{d,n}(u) - N_d) \leq x \sigma_d(u) \right) - \Phi(x) \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{\sqrt{|W_n|_d}} \leq x \sqrt{\frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d}} \right) - \Phi \left(x \sqrt{\frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d \sigma_d^2(u)}} \right) - \Phi(x) + \Phi(x) \right| \\ &\leq \frac{C_1}{\sqrt{|W_n|_d}} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \Phi(x) - \Phi \left(x \sqrt{\frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d \sigma_d^2(u)}} \right) \right|, \end{aligned}$$

wobei wir Satz 5.6 ausnutzen und die dort gewählte Bezeichnung von S_n übernehmen. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes lässt sich zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \Phi(x) - \Phi \left(x \sqrt{\frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d \sigma_d^2(u)}} \right) \right| \\ &\leq C_2 \left| 1 - \sqrt{\frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d \sigma_d^2(u)}} \right| = \frac{C_2}{1 + \sqrt{\frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d \sigma_d^2(u)}}} \left| 1 - \frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d \sigma_d^2(u)} \right|, \end{aligned}$$

also folgt mit Hilfe von 5.6.1 insgesamt wie gefordert

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \Phi(x) - \Phi \left(x \sqrt{\frac{\text{Var}(S_n)}{|W_n|_d \sigma_d^2(u)}} \right) \right| \leq \frac{C}{|W_n|_d^{1/d}}.$$

□

Da die EPC eine ganzzahlige Größe ist, können wir auch lokale Grenzwertsätze beweisen. Dazu definieren wir die k -te Kumulante einer Zufallsgröße Z als

$$\text{Cum}_k(Z) := \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \ln(\mathbb{E}[e^{itZ}]) \Big|_{t=0}.$$

Dazu betrachten wir

$$S_n = \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, n\}^d} \xi_{\mathbf{j}}$$

mit ξ_j wie in 5.0.1 bzw. 5.0.2 und definieren mit der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung φ für $k \in \mathbb{N}$

$$q_{k,n}(x) := \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^{k+2l}}{l! \text{Var}(S_n)^{(k+2l)/2}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_l=k \\ k_j \geq 1}} \prod_{i=1}^l \frac{\text{Cum}_{k_i+2}(S_n)}{(k_i+2)!} \frac{d^{k+2l}}{dx^{k+2l}} \varphi(x). \quad (5.7.1)$$

Die Funktionen $q_{k,n}$ sind Polynome vom Grad $3k$, deren Koeffizienten von den Kumulanten von S_n bis zum Grad $k+2$ abhängen.

Wir benötigen im Folgenden den Spezialfall von Theorem 3 aus [15] für 2-abhängige Felder:

Satz 5.8 (Lokaler Grenzwertsatz für 2-abhängige Felder): *Sei $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ ein Feld mit $Y_j = f(\Psi_{\mathbf{k}}^*; |\mathbf{k} - \mathbf{j}| \leq 1)$ für i.i.d. Zufallselemente $(\Psi_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ und $\mathbb{E}[|Y_{\mathbf{0}}|^{r+2}] < \infty$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Für $V_n \subset \mathbb{Z}^d$ und*

$$S_n = \sum_{\mathbf{j} \in V_n} Y_{\mathbf{j}}$$

gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(S_n)}{\#V_n} > 0.$$

Weiter fordern wir, dass es ein $B \in \sigma(\Psi_{\mathbf{k}}^*; 1 \leq |\mathbf{k}| \leq 2)$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ gibt, sodass die Zufallsgröße

$$\zeta := \sum_{|\mathbf{j}| \leq 1} f(\Psi_{\mathbf{k}}^*; |\mathbf{k} - \mathbf{j}| \leq 1)$$

bedingt auf B auf einem Gitter mit maximaler Schrittweite 1 konzentriert ist. Dann gilt

$$\left(\#V_n \right)^{r/2} \sup_{N \in \mathbb{Z}} (1 + |x_n(N)|)^{r+2} \left| \sqrt{\text{Var}(S_n)} \mathbb{P}(S_n = N) - \varphi(x_n(N)) \left(1 + \sum_{k=1}^r q_{k,n}(x_n(N)) \right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

wobei $q_{k,n}$ wie in 5.7.1 und

$$x_n(N) = \frac{N - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}.$$

Um lokale Grenzwertsätze formulieren zu können, müssen wir also noch weitere Bedingungen an die Struktur des Feldes stellen. Die an die Zufallsgröße ζ gestellte Bedingung entspricht der in Lemma 5 aus [15] an das dort definierte Feld gestellten Bedingung mit $p = 1$. Damit gilt für uns:

Satz 5.9 (Edgeworth-Entwicklung im lokalen Grenzwertsatz): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ ein Keim-Korn-Prozess mit $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$. Weiter sei $W_n = [0, Rn]^d$ und $\sigma_d^2(u) > 0$. Dann gilt für*

$$S_n = \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, n\}^d} \xi_{\mathbf{j}}$$

mit ξ_j wie in 5.0.1 bzw. 5.0.2 und festes $r, N \in \mathbb{N}$

$$|W_n|_d^{r/2} \sup_{N \in \mathbb{Z}} (1 + |x_n(N)|)^{r+2} \left| \sqrt{\text{Var}(S_n)} \mathbb{P}(S_n = N) - \varphi(x_n(N)) \left(1 + \sum_{k=1}^r q_{k,n}(x_n(N)) \right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

wobei $q_{k,n}$ wie in 5.7.1 und

$$x_n(N) = \frac{N - N_d |W_n|_d}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}.$$

Beweis. Wir betrachten wieder das stationäre 2-abhängige Feld $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ definiert durch

$$Y_j := \xi_j.$$

Um Satz 5.8 anwenden zu können, müssen wir seine Voraussetzungen nachrechnen. Offensichtlich sind wegen Korollar 3.15 die geforderten Integritätsbedingungen erfüllt. Mit Blick auf die Zufallsgröße ζ betrachten wir

$$\zeta := \sum_{j: |j| \leq 1} \xi_j$$

bedingt auf das Ereignis

$$B = \bigcap_{\mathbf{k}: 1 \leq |\mathbf{k}| \leq 2} \{ \Psi_{\mathbf{k}}^* ((RE_{\mathbf{k}}) \times \mathcal{K}^d) = 0 \}$$

mit $(\Psi_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ wie in 5.3.1. Dafür gilt

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{\mathbf{k}: 1 \leq |\mathbf{k}| \leq 2} \{ \Psi_{\mathbf{k}}^* ((RE_{\mathbf{k}}) \times \mathcal{K}^d) = 0 \} \right) = \exp(-\lambda(5^d - 1)R^d) > 0$$

und sowohl

$$\mathbb{P}(\zeta = 0 \mid B) \geq \mathbb{P}(\Psi_{\mathbf{0}}^* ((RE_{\mathbf{0}}) \times \mathcal{K}^d) = 0) = \exp(-\lambda R^d) > 0$$

als auch

$$\mathbb{P}(\zeta = 1 \mid B) \geq \mathbb{P}(\Psi_{\mathbf{0}}^* ((RE_{\mathbf{0}}) \times \mathcal{K}^d) = 1) = \lambda R^d \exp(-\lambda R^d) > 0,$$

d.h. ζ ist bedingt auf B auf einem Gitter mit maximaler Schrittweite 1 konzentriert und somit 5.8 die gewünschte Aussage. \square

Damit können wir auch eine Berry-Esseen Schranke bestimmen:

Korollar 5.10 (Berry-Esseen Schranke im lokalen Grenzwertsatz): Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ ein Keim-Korn-Prozess mit $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$. Weiter sei $W_n = [0, Rn]^d$ und $\sigma_d^2(u) > 0$. Dann gibt es ein $C > 0$, sodass für

$$S_n = \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, n\}^d} \xi_{\mathbf{j}}$$

mit $\xi_{\mathbf{j}}$ wie in 5.0.1 bzw. 5.0.2

$$\left| \sqrt{\text{Var}(S_n)} \mathbb{P}(S_n = N) - \varphi(x_n(N)) \right| \leq \frac{C}{(1 + |x_n(N)|)^3 |W_n|_d^{1/2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{Z}$, wobei

$$x_n(N) = \frac{N - N_d |W_n|_d}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}}.$$

Beweis. Wir folgern die Aussage aus Satz 5.9 mit $r = 1$. Dazu fixieren wir $n \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{Z}$ und erhalten aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{\text{Var}(S_n)} \mathbb{P}(S_n = N) - \varphi(x_n(N)) \right| \\ & \leq \left| \sqrt{\text{Var}(S_n)} \mathbb{P}(S_n = N) - \varphi(x_n(N)) (1 + q_{1,n}(x_n(N))) \right| + |\varphi(x_n(N)) q_{1,n}(x_n(N))|. \end{aligned} \quad (5.10.1)$$

Betrachten wir den ersten Summanden in 5.10.1, so erhalten wir wegen Satz 5.9

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{\text{Var}(S_n)} \mathbb{P}(S_n = N) - \varphi(x_n(N)) (1 + q_{1,n}(x_n(N))) \right| \\ & \leq \frac{|W_n|_d^{1/2} \sup_{N \in \mathbb{Z}} (1 + |x_n(N)|)^3 \left| \sqrt{\text{Var}(S_n)} \mathbb{P}(S_n = N) - \varphi(x_n(N)) (1 + q_{1,n}(x_n(N))) \right|}{(1 + |x_n(N)|)^3 |W_n|_d^{1/2}} \\ & \leq \frac{C_1}{(1 + |x_n(N)|)^3 |W_n|_d^{1/2}} \end{aligned}$$

für ein $C_1 > 0$.

Um den zweiten Summanden in 5.10.1 abzuschätzen, stellen wir fest, dass

$$q_{1,n}(x) = \frac{\text{Cum}_3(S_n)}{6 \text{Var}(S_n)^{3/2}} (x^3 - 3x).$$

Also existiert ein $C_2 > 0$, sodass

$$|\varphi(x) q_{1,n}(x)| \leq \frac{C_2}{(1 + |x|)^3 |W_n|_d^{1/2}},$$

siehe z.B. im Beweis von Theorem 2 in [15]. Insgesamt folgt die geforderte Aussage. \square

Die m -Abhängigkeit eignet sich auch, um Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen zu betrachten. Diese Theorie stammt von Harald Cramér [7], der sie für versicherungsmathematische Fragestellungen entwickelt hat.

Um mit Hilfe der m -Abhängigkeit eine Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen beweisen zu können, benötigen wir eine stärkere Bedingung an die Momente des Feldes $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$. Diese wird die Bedingung (C1) aus [16] sein. Für das stationäre Boolesche Modell mit beschränkten Körnern gilt:

Lemma 5.11 (Bedingung (C1) aus [16]): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ ein Keim-Korn-Prozess mit $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$. Weiter sei $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ definiert durch*

$$Y_j = \xi_j - \mathbb{E}[\xi_j]$$

mit ξ_j wie in 5.0.1 bzw. 5.0.2. Dann gilt

$$\mathbb{E}[|Y_0|^p] \leq H^p(p!)^{1+\gamma}$$

mit $\gamma := d - 1$ und

$$H := (d + 1)^2 \left(\frac{ed}{\ln \left(\frac{d}{\lambda(3R)^d} + 1 \right)} \right)^d$$

für alle $p \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sowohl positive als auch negative Tangentenpunkte in RE_0 , egal ob überdeckt oder nicht, können nur dann entstehen, wenn sich Mengen in dem entsprechenden Bereich befinden. Die Anzahl der Mengen in RE_0 lässt sich durch die Anzahl der Keime in der Nachbarschaft von RE_0 abschätzen. Wir erhalten also mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_0|^p] &\leq (d + 1)^{p-1} (\mathbb{E}[Z^p] + \dots + \mathbb{E}[Z^{dp}] + d^{p-1} (\mathbb{E}[Z^p] + \dots + \mathbb{E}[Z^{dp}])) \\ &\leq 2d(d + 1)^{2(p-1)} \mathbb{E}[Z^{dp}] \end{aligned}$$

mit einer gemäß dem Parameter $\lambda' := \lambda 3^d R^d$ Poisson-verteilten Zufallsgröße Z . Für die Momente der Poisson-Verteilung gilt die elementare Ungleichung

$$\mathbb{E}[Z^{dp}] \leq \left(\frac{dp}{\ln \left(\frac{dp}{\lambda'} + 1 \right)} \right)^{dp},$$

wir müssen also zeigen, dass

$$\left(\frac{dp}{\ln \left(\frac{dp}{\lambda'} + 1 \right)} \right)^{dp} \leq H^p(p!)^{1+\gamma}$$

für ein $H > 0$ und ein $\gamma \geq 0$. Da $e(n/e)^n \leq n!$ folgt

$$\left(\frac{dp}{\ln \left(\frac{dp}{\lambda'} + 1 \right)} \right)^{dp} = \frac{1}{e^d} \left(\frac{ed}{\ln \left(\frac{dp}{\lambda'} + 1 \right)} \right)^{dp} \left(e \left(\frac{p}{e} \right)^p \right)^d \leq \frac{1}{e^d} \left(\frac{ed}{\ln \left(\frac{dp}{\lambda'} + 1 \right)} \right)^{dp} (p!)^d.$$

Mit dem Vorfaktor $2d(d+1)^{2(p-1)}$ können wir z.B.

$$H := (d+1)^2 \left(\frac{ed}{\ln\left(\frac{d}{\lambda} + 1\right)} \right)^d$$

und $\gamma := d - 1$ wählen. □

Mit diesen Vorarbeiten können wir ohne weitere Arbeiten Theorem 2 aus [16] verwenden:

Satz 5.12 (Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen für $\hat{N}_{d,n}(u)$): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ ein Keim-Korn-Prozess mit $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$. Weiter sei $W_n = [0, Rn)^d$ und $\sigma_d^2(u) > 0$. Dann gilt mit den Zahlen γ und H aus Lemma 5.11 sowie den Abkürzungen*

$$\begin{aligned} B_n &= \text{Var}\left(|W_n|_d \hat{N}_{d,n}(u)\right)^{1/2}, \\ \delta &= \gamma + \frac{d-1}{2}, \\ L &= 2^\gamma 4^{d+3} H, \\ \Delta &= B_n L \max\{2^{-d}, 2^d L^2 B_n^{-2}\}, \\ \Delta_\delta &= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{2}\Delta}{6} \right)^{1/(1+2\delta)}, \end{aligned}$$

$$c_k = \frac{1}{B_n^{k-2} k(k-1)} \sum_{l=1}^{k-2} (-1)^{l-1} \binom{k+l-2}{l} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_l=k-2 \\ k_i \geq 1}} \prod_{i=1}^l \frac{\text{Cum}_{k_i+2}(S_n)}{B_n^2(k_i+1)!}$$

$$L_\delta(x) = \sum_{3 \leq k < 2+1/\delta} c_k x^k$$

und

$$f(x) = \frac{60(1 + 10\Delta_\delta^2(1 + 2(x/\Delta_\delta)^2) \exp(-(1 - x/\Delta_\delta)\sqrt{\Delta_\delta}))}{1 - x/\Delta_\delta},$$

gilt für $|\theta_1| \leq 1$, $|\theta_2| \leq 1$ und $0 \leq x \leq \Delta_\delta$

$$\frac{\mathbb{P}\left(|W_n|_d (\hat{N}_{d,n}(u) - N_d) \geq x B_n\right)}{1 - \Phi(x)} = \exp(L_\delta(x)) \left(1 + \theta_1 f(x) \frac{x+1}{\Delta_\delta}\right)$$

und

$$\frac{\mathbb{P}\left(|W_n|_d (\hat{N}_{d,n}(u) - N_d) < x B_n\right)}{\Phi(-x)} = \exp(L_\delta(-x)) \left(1 + \theta_2 f(x) \frac{x+1}{\Delta_\delta}\right).$$

Beweis. Wir betrachten das Feld $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$, $d \in \{2, 3\}$, definiert durch

$$Y_j = \xi_j - \mathbb{E}[\xi_j]$$

mit ξ_j wie in 5.0.1 bzw. 5.0.2. Unser Feld ist also 2-abhängig. Weiter betrachten wir die Summe

$$S_n = \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, n\}^d} Y_{\mathbf{j}} = |W_n|_d (\hat{N}_{d,n}(u) - N_d).$$

Wegen Lemma 5.11 können wir Theorem 2 aus [16] anwenden und erhalten daraus die geforderte Aussage. \square

Bisher beruhen alle Argumente in diesem Kapitel auf der m -Abhängigkeit, die wir aus dem stationären Booleschen Modell mit beschränkten Körnern gewinnen. Aber auch andere Keim-Korn-Modelle mit beschränkten Körnern erzeugen die gleiche m -Abhängigkeit. Dies sind z.B. solche mit Poissonschen Hard- bzw. Soft-core-Prozessen oder Poissonschen Cluster-Prozessen (mit beschränktem Cluster) als Keim-Prozess.

Wir wollen nun die Beschränktheit des typischen Korns fallen lassen. Mit Hilfe einer Approximation durch ein m -abhängiges Feld können wir auch unter allgemeineren Bedingungen einen Grenzwertsatz beweisen:

Satz 5.13 (Grenzwertsatz für $\hat{N}_{d,n}(u)$ mit unbeschränkten Körnern): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^2} \sim \Pi_{\lambda, Q}$ ein Keim-Korn-Prozess und $\Xi_0 \sim Q$ mit*

$$\mathbb{E}[|\Xi_0|_2^2] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[\mathcal{H}^1(\partial\Xi_0)^2] < \infty.$$

Weiter sei $W_n = [-n, n]^2$ und $\sigma_A^2(u) > 0$. Dann gilt

$$\sqrt{|W_n|_2} \left(\hat{N}_A(u) - N_A \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_A^2(u)).$$

Beweis. Wir lehnen uns bei der Beweisführung an den Beweis von Theorem 7.1. in [21] an. Dazu definieren wir $E_{\mathbf{j}} = \mathbf{j} + [0, 1]^2$ und $F_{\mathbf{j}, m} = E_{\mathbf{j}} \oplus W_m$ für $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2$ und betrachten für $V_n = \{-n, \dots, n-1\}^2$

$$S_n = |W_n|_2^{-1/2} \sum_{\mathbf{j} \in V_n} [\xi_{\mathbf{j}} - N_A].$$

Wir zerlegen nun die Zufallsgrößen $\xi_{\mathbf{j}}$ in die drei Teile

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{j}}^{(m)} &:= \eta_{\mathbf{j},+}^{(m)} - \eta_{\mathbf{j},-}^{(m)}, \\ \xi_{\mathbf{j},1}^{(m)} &:= \eta_{\mathbf{j},1,+}^{(m)} - \eta_{\mathbf{j},1,-}^{(m)}, \\ \xi_{\mathbf{j},2}^{(m)} &:= \eta_{\mathbf{j},2,+}^{(m)} - \eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{j},+}^{(m)} &:= \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{F_{\mathbf{j},m}}(X_i) \mathbf{1}_{E_{\mathbf{j}}}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \prod_{k \neq i} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{j},m}}(X_k)), \\ \eta_{\mathbf{j},-}^{(m)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{F_{\mathbf{j},m}}(X_i) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{j},m}}(X_j) \mathbf{1}_{E_{\mathbf{j}}}(\ell_u(\Xi_{ij})) \prod_{k \neq i,j} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u(\Xi_{ij})) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{j},m}}(X_k)) \\ &\quad \times \left(\mathbf{1}_{\Xi_i \oplus (-\Xi_j)}(X_j - X_i) - \mathbf{1}_{X_i + \Xi_i^{\circ}}(X_j + \ell_u(\Xi_j)) - \mathbf{1}_{X_j + \Xi_j^{\circ}}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \right), \end{aligned}$$

die Anzahl der Tangentenpunkte in E_j sind, die nur von Körnern in $F_{j,m}$ herrühren oder überdeckt werden,

$$\begin{aligned}\eta_{j,1,+}^{(m)} &:= \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{F_{j,m}^c}(X_i) \mathbf{1}_{E_j}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \prod_{k \neq i} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \mathbf{1}_{F_{j,m}}(X_k)), \\ \eta_{j,1,-}^{(m)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} (1 - \mathbf{1}_{F_{j,m}}(X_i) \mathbf{1}_{F_{j,m}}(X_j)) \mathbf{1}_{E_j}(\ell_u(\Xi_{ij})) \prod_{k \neq i,j} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u(\Xi_{ij})) \mathbf{1}_{F_{j,m}}(X_k)) \\ &\quad \times \left(\mathbf{1}_{\Xi_i \oplus (-\Xi_j)}(X_j - X_i) - \mathbf{1}_{X_i + \Xi_i^{\circ}}(X_j + \ell_u(\Xi_j)) - \mathbf{1}_{X_j + \Xi_j^{\circ}}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \right),\end{aligned}$$

die Anzahl der Tangentenpunkte in E_j sind, die nur von Körnern außerhalb von $F_{j,m}$ herrühren, jedoch nicht von den Körnern aus $F_{j,m}$ überdeckt werden und

$$\begin{aligned}\eta_{j,2,+}^{(m)} &:= \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{E_j}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \\ &\quad \times \left(\prod_{k \neq i} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(X_i + \ell_u(\Xi_i))) - \prod_{k \neq i} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \mathbf{1}_{F_{j,m}}(X_k)) \right), \\ \eta_{j,2,-}^{(m)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1}^{\neq} \mathbf{1}_{E_j}(\ell_u(\Xi_{ij})) \\ &\quad \times \left(\prod_{k \neq i,j} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u(\Xi_{ij}))) - \prod_{k \neq i,j} (1 - \mathbf{1}_{X_k + \Xi_k}(\ell_u(\Xi_{ij})) \mathbf{1}_{F_{j,m}}(X_k)) \right) \\ &\quad \times \left(\mathbf{1}_{\Xi_i \oplus (-\Xi_j)}(X_j - X_i) - \mathbf{1}_{X_i + \Xi_i^{\circ}}(X_j + \ell_u(\Xi_j)) - \mathbf{1}_{X_j + \Xi_j^{\circ}}(X_i + \ell_u(\Xi_i)) \right).\end{aligned}$$

Das erlaubt es uns im Folgenden die entsprechende Zerlegungen der Summe $S_n = S_n^{(m)} + S_{n,1}^{(m)} + S_{n,2}^{(m)}$ nacheinander zu betrachten.

Beginnen wollen wir mit der Betrachtung von $S_n^{(m)}$. Da $\xi_j^{(m)}$ analog zu Lemma 5.3 eine Blockdarstellung besitzt, ist das Feld $(\xi_j^{(m)})_{j \in \mathbb{Z}^2}$ insbesondere $2m$ -abhängig. Damit konvergiert $S_n^{(m)}$ für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen eine zentrierte Normalverteilung mit Varianz

$$\sigma_m^2 = \sum_{\mathbf{j} \in \{-m, \dots, m\}^2} \text{Cov}\left(\xi_{\mathbf{0}}^{(m)}, \xi_{\mathbf{j}}^{(m)}\right).$$

Die Varianz σ_m^2 ist dabei für alle $m \in \mathbb{N}$ endlich, falls $\mathbb{E}\left[\left(\xi_{\mathbf{0}}^{(m)}\right)^2\right] < \infty$, was wiederum wegen Satz 4.5 der Fall ist, wenn $\mathbb{E}[|\Xi_0|_2^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[\mathcal{H}^1(\partial\Xi_0)^2] < \infty$.

Um nun wie gewünscht die asymptotische Normalität von S_n folgern zu können, müssen wir noch

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\left(S_{n,i}^{(m)}\right)^2\right] \leq \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov}\left(\xi_{\mathbf{0},i}^{(m)}, \xi_{\mathbf{j},i}^{(m)}\right) \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

für $i \in \{1, 2\}$ nachrechnen. Dabei lassen sich längliche, aber elementare Rechnungen ähnlich zu denen im Beweis von Satz 4.5 nicht vermeiden.

Betrachten wir zunächst den Fall $i = 1$. Wir werden hier mit den Feldern $\eta_{j,1,+}^{(m)}$ und $\eta_{j,1,-}^{(m)}$ argumentieren. Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}\left[\eta_{j,1,+}^{(m)}\right] = \lambda \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{F_{j,m}^c \cap (E_j - \ell_u(K))}(x) \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[|A(F_{j,m}, x, K)|_2\right]\right) dx Q(dK)$$

mit der zufälligen Menge $A(F_{j,m}, x, K) := F_{j,m} \cap (x + \ell_u(K) - \Xi_0)$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\eta_{j,1,-}^{(m)}\right] &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_2)) \mathbb{1}_{E_j - \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1))}(x_1) \\ &\quad \times \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[|B(F_{j,m}, x_1, x_2, K_1, K_2)|_2\right]\right) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \end{aligned}$$

mit der zufälligen Menge $B(F_{j,m}, x_1, x_2, K_1, K_2) := F_{j,m} \cap (\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1 - \Xi_0)$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\eta_{0,1,+}^{(m)} \eta_{j,1,-}^{(m)}\right] &= \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{F_{0,m}^c}(x_1) \mathbb{1}_{E_0}(x_1 + \ell_u(K_1)) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_2)) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \\ &\quad \times \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[|A(F_{0,m}, x_1, K_1) \cup B(F_{j,m}, x_1, x_2, K_1, K_2)|_2\right]\right) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2 + K_2}(x_1 + \ell_u(K_1)) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_2)) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \\ &+ \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{F_{0,m}^c}(x_3) \mathbb{1}_{E_0}(x_3 + \ell_u(K_3)) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_2)) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2)) + x_1) \\ &\quad \times \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[|A(F_{0,m}, x_3, K_3) \cup B_j(x_1, x_2, K_1, K_2)|_2\right]\right) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_1 + K_1}(x_3 + \ell_u(K_3)) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_1)) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2 + K_2}(x_3 + \ell_u(K_3)) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_2)) \\ &\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_3 + K_3}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_3)) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) dx_1 \cdots Q(dK_3). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution $y_2 = x_2 - x_1$ und elementaren Abschätzungen folgt

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,-}^{(m)} \right) \right| \\
& \leq \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{F_{\mathbf{0},m}^c \cap (E_{\mathbf{0}} - \ell_u(K_1))}(y_1) \mathbb{1}_{E_{\mathbf{j}}}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) dy_1 \cdots Q(dK_2) \\
& + \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{F_{\mathbf{0},m}^c \cap (E_{\mathbf{0}} - \ell_u(K_3))}(y_3) \mathbb{1}_{E_{\mathbf{j}}}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \left(\mathbb{1}_{y_1 + K_1}(y_3 + \ell_u(K_3)) + \mathbb{1}_{y_2 + K_2}(-y_1 + y_3 + \ell_u(K_3)) \right. \\
& \quad \quad + \mathbb{1}_{y_3 + K_3}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) + 1 \\
& \quad \quad \left. - \exp \left(-\lambda \mathbb{E} \left[|\mathbb{R}^2 \cap (y_3 + \ell_u(K_3) - \Xi_{\mathbf{0}}) \cap \mathbb{R}^2 \cap (\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1 - \Xi_{\mathbf{0}})|_2 \right] \right) \right) \\
& \quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) dy_1 \cdots Q(dK_3).
\end{aligned}$$

Mit $1 - e^{-x} \leq x$, weiteren Abschätzungen und nach der Summation lassen sich angefangen mit dy_1 die Integrale auf der rechten Seite berechnen und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,-}^{(m)} \right) \right| \\
& \leq \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} |F_{\mathbf{0},m}^c \cap (E_{\mathbf{0}} - \ell_u(K_1))|_2 |D_u(K_1, K_2)|_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \\
& \quad + \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathcal{K}^2} |F_{\mathbf{0},m}^c \cap (E_{\mathbf{0}} - \ell_u(K_3))|_2 (|K_1|_2 + |K_2|_2 + |K_3|_2 + \lambda \mathbb{E} [|\Xi_{\mathbf{0}}|_2^2]) \\
& \quad \quad \times |D_u(K_1, K_2)|_2 Q(dK_1) Q(dK_2) Q(dK_3).
\end{aligned}$$

Unter den von uns für diesen Satz festgelegten Voraussetzungen können wir den Satz der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten schließlich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,-}^{(m)} \right) \right| = 0. \quad (5.13.1)$$

Wegen der Stationarität folgt auch direkt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,+}^{(m)} \right) \right| = 0. \quad (5.13.2)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\eta_{0,1,-}^{(m)} \eta_{j,1,-}^{(m)} \right] \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_2)) \mathbb{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_2)) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) G_2(x_1, x_2, K_1, K_2) dx_1 dx_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \\
&+ \lambda^3 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_2)) \mathbb{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_3)) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_3 + x_3 - x_1)) + x_1) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_3)}(x_3 - x_1) \\
&\quad \times G_1(x_1, x_2, x_3, K_1, K_2, K_3) dx_1 \cdots Q(dK_3) \\
&+ \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_1) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_2)) \mathbb{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_3) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_4)) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_3 \cap (K_4 + x_4 - x_3)) + x_3) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_3+K_3}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_3)) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_4+K_4}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \mathbb{1}_{F_{0,m}}(x_4)) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_1+K_1}(\ell_u(K_3 \cap (K_4 + x_4 - x_3)) + x_3) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_1)) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2+K_2}(\ell_u(K_3 \cap (K_4 + x_4 - x_3)) + x_3) \mathbb{1}_{F_{j,m}}(x_2)) \\
&\quad \times \exp(-\lambda \mathbb{E}[|B(F_{0,m}, x_1, x_2, K_1, K_2) \cup B(F_{j,m}, x_3, x_4, K_3, K_4)|_2]) \\
&\quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{D_u(K_3, K_4)}(x_4 - x_3) dx_1 \cdots Q(dK_4),
\end{aligned}$$

wobei wir mit G_1 bzw. G_2 die entsprechenden erzeugenden Funktionale bezeichnen. Mit $|G_1| \leq 1$ bzw. $|G_2| \leq 1$ gilt nach Substitutionen

$$\begin{aligned}
& \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,-}^{(m)} \right) \right| \\
& \leq \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_1) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_2 + y_1)) \mathbf{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \mathbf{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) dy_1 dy_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \\
& + \lambda^3 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_1) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_2 + y_1)) \mathbf{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \mathbf{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_3 + y_3)) + y_1) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_3)}(y_3) \\
& \quad \times dy_1 \cdots Q(dK_3) \\
& + \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_1) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_2 + y_1)) \mathbf{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \mathbf{1}_{E_j}(\ell_u(K_3 \cap (K_4 + y_4)) + y_3) \\
& \quad \times \left(\mathbf{1}_{y_3+K_3}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \right. \\
& \quad + \mathbf{1}_{y_4+y_3+K_4}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad + \mathbf{1}_{y_1+K_1}(\ell_u(K_3 \cap (K_4 + y_4)) + y_3) \\
& \quad + \mathbf{1}_{y_2+y_1+K_2}(\ell_u(K_3 \cap (K_4 + y_4)) + y_3) \\
& \quad \left. + \lambda \mathbb{E} [|B(\mathbb{R}^2, y_1, y_2 + y_1, K_1, K_2) \cap B(\mathbb{R}^2, y_3, y_4 + y_3, K_3, K_4)|_2] \right) \\
& \quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) \mathbf{1}_{D_u(K_3, K_4)}(y_4) dy_1 \cdots Q(dK_4).
\end{aligned}$$

Nach Summation lassen sich die Integrale teilweise berechnen und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,-}^{(m)} \right) \right| \\
& \leq \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_1) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_2 + y_1)) \mathbf{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) dy_1 \cdots Q(dK_2) \\
& + \lambda^3 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_1) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_2 + y_1)) \mathbf{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_3)}(y_3) dy_1 \cdots Q(dK_3) \\
& + \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_1) \mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(y_2 + y_1)) \mathbf{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + y_2)) + y_1) \\
& \quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(y_2) \mathbf{1}_{D_u(K_3, K_4)}(y_4) \\
& \quad \times (|K_3|_2 + |K_4|_2 + |K_1|_2 + |K_2|_2 + \lambda \mathbb{E} [|\Xi_0|_2^2]) dy_1 \cdots Q(dK_4).
\end{aligned}$$

Unter den von uns für diesen Satz festgelegten Voraussetzungen können wir den Satz der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten schließlich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,-}^{(m)} \right) \right| = 0. \quad (5.13.3)$$

Wählt man in Theorem 7.1. in [21]

$$H_K(\{u\}, W) = \mathbf{1}_W(\ell_u(K)),$$

wurde bereits

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},1,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},1,+}^{(m)} \right) \right| = 0$$

nachgerechnet. Daraus folgt mit 5.13.1, 5.13.2, 5.13.3, dass wie gewünscht

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\xi_{\mathbf{0},1}^{(m)}, \xi_{\mathbf{j},1}^{(m)} \right) \right| = 0.$$

Analog gehen wir im Fall $i = 2$ vor. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\eta_{\mathbf{j},2,+}^{(m)} \right] \\ &= \lambda \int_{\mathcal{K}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{E_{\mathbf{j}}}(x + \ell_u(K)) \left(\exp(-\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) - \exp(-\lambda \mathbb{E}[|A(F_{\mathbf{j},m}, x, K)|_2]) \right) dx Q(dK) \end{aligned}$$

mit der zufälligen Menge $A(F_{\mathbf{j},m}, x, K) = F_{\mathbf{j},m} \cap (x + \ell_u(K) - \Xi_0)$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)} \right] &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{E_{\mathbf{j}}}(x_1 + \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1))) \\ &\quad \times \left(\exp(-\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) - \exp(-\lambda \mathbb{E}[|B(F_{\mathbf{j},m}, x_1, x_2, K_1, K_2)|_2]) \right) \\ &\quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \end{aligned}$$

mit der zufälligen Menge $B(F_{\mathbf{j},m}, x_1, x_2, K_1, K_2) = F_{\mathbf{j},m} \cap (\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1 - \Xi_0)$.

Damit ist

$$\begin{aligned} & \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)} \right) \right| \\ & \leq \lambda^2 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{E_0}(x_1 + \ell_u(K_1)) \mathbf{1}_{E_{\mathbf{j}}}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \\ & \quad \times \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) |G_1(x_1, x_2, K_1, K_2)| dx_1 dx_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \\ & + \frac{\lambda^3}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{E_0}(x_3 + \ell_u(K_3)) \mathbf{1}_{E_{\mathbf{j}}}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \mathbf{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \\ & \quad \times |I(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) - I(\mathbb{R}^2, F_{\mathbf{j},m}) - I(F_{\mathbf{0},m}, \mathbb{R}^2) + I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})| dx_1 \cdots Q(dK_3). \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
G_1(x_1, x_2, K_1, K_2) &= \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|A(\mathbb{R}^2, x_1, K_1) \cup B(\mathbb{R}^2, x_1, x_2, K_1, K_2)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2+K_2}(x_1 + \ell_u(K_1))) \\
&- \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|A(\mathbb{R}^2, x_1, K_1) \cup B(F_{\mathbf{j},m}, x_1, x_2, K_1, K_2)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2+K_2}(x_1 + \ell_u(K_1))) \\
&- \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|A(F_{\mathbf{0},m}, x_1, K_1) \cup B(\mathbb{R}^2, x_1, x_2, K_1, K_2)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2+K_2}(x_1 + \ell_u(K_1))) \mathbb{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(x_2) \\
&+ \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|A(F_{\mathbf{0},m}, x_1, K_1) \cup B(F_{\mathbf{j},m}, x_1, x_2, K_1, K_2)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbb{1}_{x_2+K_2}(x_1 + \ell_u(K_1))) \mathbb{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(x_2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}) &= \exp\left(-\left(u(F_{\mathbf{0},m}) + v(F_{\mathbf{j},m})\right)\right) \left[(1 - a(F_{\mathbf{0},m}))(1 - b(F_{\mathbf{j},m})) \exp(\omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})) - 1\right],
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
u(F_{\mathbf{0},m}) &= \lambda \mathbb{E}\left[\left|F_{\mathbf{0},m} \cap (x_3 + \ell_u(K_3) - \Xi_0)\right|_2\right], \\
v(F_{\mathbf{j},m}) &= \lambda \mathbb{E}\left[\left|F_{\mathbf{j},m} \cap (\ell_u(\xi_{12}) - \Xi_0)\right|_2\right], \\
\ell_u(\xi_{12}) &= \ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1, \\
a(F_{\mathbf{0},m}) &= \mathbb{1}_{[(x_1+K_1) \cap (F_{\mathbf{0},m}-x_1+x_3+\ell_u(K_3))] \cup [(x_2+K_2) \cap (F_{\mathbf{0},m}-x_2+x_3+\ell_u(K_3))]}(x_3 + \ell_u(K_3)), \\
b(F_{\mathbf{j},m}) &= \mathbb{1}_{F_{\mathbf{j},m} \cap (\ell_u(\xi_{12}) - K_3)}(x_3), \\
\omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}) &= \lambda \mathbb{E}\left[\left|F_{\mathbf{0},m} \cap (x_3 + \ell_u(K_3) - \Xi_0) \cap F_{\mathbf{j},m} \cap (\ell_u(\xi_{12}) - \Xi_0)\right|_2\right].
\end{aligned}$$

Analog zur Behandlung des Terms $s_2^{(m)}$ in [21] im Beweis des dort aufgeführten Theorems 7.1 gilt für uns

$$\begin{aligned}
&|I(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) - I(\mathbb{R}^2, F_{\mathbf{j},m}) - I(F_{\mathbf{0},m}, \mathbb{R}^2) + I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})| \\
&\leq u(F_{\mathbf{0},m}^c) v(F_{\mathbf{j},m}^c) [\omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}) + a(F_{\mathbf{0},m}) + b(F_{\mathbf{j},m})] + \omega(F_{\mathbf{0},m}^c, F_{\mathbf{j},m}^c) \\
&\quad + [a(F_{\mathbf{0},m}^c) + \omega(F_{\mathbf{0},m}^c, F_{\mathbf{j},m})] [b(F_{\mathbf{j},m}^c) + v(F_{\mathbf{j},m}^c) + \omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}^c)] \\
&\quad + u(F_{\mathbf{0},m}^c) [b(F_{\mathbf{j},m}^c) + \omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}^c)].
\end{aligned}$$

Daraus folgt offenbar

$$\begin{aligned}
&|I(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) - I(\mathbb{R}^2, F_{\mathbf{j},m}) - I(F_{\mathbf{0},m}, \mathbb{R}^2) + I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})| \\
&\leq (\lambda \mathbb{E}[\left|\Xi_0\right|_2])^2 [\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) + \tilde{a} + \tilde{b}] + \omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \\
&\quad + [\tilde{a} + \omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)] [1 + 2\lambda \mathbb{E}[\left|\Xi_0\right|_2]] + \lambda \mathbb{E}[\left|\Xi_0\right|_2] [\tilde{b} + \omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)],
\end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{a} = \mathbb{1}_{(x_3+\ell_u(K_3)-K_1) \cup (x_3+\ell_u(K_3)-(x_2-x_1+K_2))}(x_1)$$

und

$$\tilde{b} = \mathbb{1}_{x_3 + K_3 - \ell_u(K_1 \cap (x_2 - x_1 + K_2))}(x_1).$$

Insbesondere haben wir für den Integranden im zweiten Integral in

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)} \right) \right|$$

eine integrierbare Majorante gefunden, indem wir zunächst die Summe über \mathbf{j} berechnen und dann die Integrale (angefangen mit dx_1) nacheinander lösen. Da auch der Integrand des ersten Integrals eine integrierbare Majorante besitzt, folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)} \right) \right| = 0. \quad (5.13.4)$$

Wegen der Stationarität folgt auch direkt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,+}^{(m)} \right) \right| = 0. \quad (5.13.5)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)} \right) \right| \\ & \leq \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \\ & \quad \times \left(\exp(-\lambda \mathbb{E}[|B(F_{\mathbf{0},m}, x_1, x_2, K_1, K_2) \cup B(F_{\mathbf{j},m}, x_1, x_2, K_1, K_2)|_2]) \right. \\ & \quad \left. - \exp(-\lambda \mathbb{E}[|\Xi_0|_2]) \right) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 Q(dK_1) Q(dK_2) \\ & + \lambda^3 \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_1 \cap (K_3 + x_3 - x_1)) + x_1) \\ & \quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_3)}(x_3 - x_1) \\ & \quad \times |G_1(x_1, x_2, x_3, K_1, K_2, K_3)| dx_1 \cdots Q(dK_3) \\ & + \frac{\lambda^4}{4} \int_{\mathcal{K}^2} \cdots \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{E_0}(\ell_u(K_1 \cap (K_2 + x_2 - x_1)) + x_1) \mathbb{1}_{E_j}(\ell_u(K_3 \cap (K_4 + x_4 - x_3)) + x_3) \\ & \quad \times |I(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) - I(\mathbb{R}^2, F_{\mathbf{j},m}) - I(F_{\mathbf{0},m}, \mathbb{R}^2) + I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})| \\ & \quad \times \mathbb{1}_{D_u(K_1, K_2)}(x_2 - x_1) \mathbb{1}_{D_u(K_3, K_4)}(x_4 - x_3) dx_1 \cdots Q(dK_4), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
G_1(x_1, x_2, x_3, K_1, K_2, K_3) &= \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|B(\mathbb{R}^2, x_1, x_2, K_1, K_2) \cup B(\mathbb{R}^2, x_1, x_3, K_1, K_3)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{x_3+K_3}(\ell_u(\xi_{12}))(1 - \mathbf{1}_{x_2+K_2}(\ell_u(\xi_{13}))) \\
&- \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|B(\mathbb{R}^2, x_1, x_2, K_1, K_2) \cup B(F_{\mathbf{j},m}, x_1, x_3, K_1, K_3)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{x_3+K_3}(\ell_u(\xi_{12}))(1 - \mathbf{1}_{x_2+K_2}(\ell_u(\xi_{13}))\mathbf{1}_{F_{\mathbf{j},m}}(x_2)) \\
&- \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|B(F_{\mathbf{0},m}, x_1, x_2, K_1, K_2) \cup B(\mathbb{R}^2, x_1, x_3, K_1, K_3)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{x_3+K_3}(\ell_u(\xi_{12}))\mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(x_3))(1 - \mathbf{1}_{x_2+K_2}(\ell_u(\xi_{13}))) \\
&+ \exp\left(-\lambda \mathbb{E}\left[\left|B(F_{\mathbf{0},m}, x_1, x_2, K_1, K_2) \cup B(F_{\mathbf{j},m}, x_1, x_3, K_1, K_3)\right|_2\right]\right) \\
&\quad \times (1 - \mathbf{1}_{x_3+K_3}(\ell_u(\xi_{12}))\mathbf{1}_{F_{\mathbf{0},m}}(x_3))(1 - \mathbf{1}_{x_2+K_2}(\ell_u(\xi_{13}))\mathbf{1}_{F_{\mathbf{j},m}}(x_2))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}) &= \exp\left(-\left(u(F_{\mathbf{0},m}) + v(F_{\mathbf{j},m})\right)\right)\left[\left(1 - a(F_{\mathbf{0},m})\right)\left(1 - b(F_{\mathbf{j},m})\right) \exp\left(\omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})\right) - 1\right],
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
u(F_{\mathbf{0},m}) &= \lambda \mathbb{E}\left[\left|F_{\mathbf{0},m} \cap (\ell_u(\xi_{12}) - \Xi_0)\right|_2\right], \\
v(F_{\mathbf{j},m}) &= \lambda \mathbb{E}\left[\left|F_{\mathbf{j},m} \cap (\ell_u(\xi_{34}) - \Xi_0)\right|_2\right], \\
\omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}) &= \lambda \mathbb{E}\left[\left|F_{\mathbf{0},m} \cap (\ell_u(\xi_{12}) - \Xi_0) \cap F_{\mathbf{j},m} \cap (\ell_u(\xi_{34}) - \Xi_0)\right|_2\right], \\
a(F_{\mathbf{0},m}) &= \mathbf{1}_{[(x_3+K_3) \cap (F_{\mathbf{0},m} - x_3 + \ell_u(\xi_{12}))] \cup [(x_4+K_4) \cap (F_{\mathbf{0},m} - x_4 + \ell_u(\xi_{12}))]}(\ell_u(\xi_{12})), \\
b(F_{\mathbf{j},m}) &= \mathbf{1}_{[(x_1+K_1) \cap (F_{\mathbf{j},m} - x_1 + \ell_u(\xi_{34}))] \cup [(x_2+K_2) \cap (F_{\mathbf{j},m} - x_2 + \ell_u(\xi_{34}))]}(\ell_u(\xi_{34})).
\end{aligned}$$

Analog zur Behandlung des Terms $s_2^{(m)}$ in [21] im Beweis des dort aufgeführten Theorem 7.1 gilt für uns

$$\begin{aligned}
&\left|I(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) - I(\mathbb{R}^2, F_{\mathbf{j},m}) - I(F_{\mathbf{0},m}, \mathbb{R}^2) + I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})\right| \\
&\leq u(F_{\mathbf{0},m}^c)v(F_{\mathbf{j},m}^c)[\omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}) + a(F_{\mathbf{0},m}) + b(F_{\mathbf{j},m})] + \omega(F_{\mathbf{0},m}^c, F_{\mathbf{j},m}^c) \\
&\quad + [a(F_{\mathbf{0},m}^c) + \omega(F_{\mathbf{0},m}^c, F_{\mathbf{j},m})][b(F_{\mathbf{j},m}^c) + v(F_{\mathbf{j},m}^c) + \omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}^c)] \\
&\quad + u(F_{\mathbf{0},m}^c)[b(F_{\mathbf{j},m}^c) + \omega(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m}^c)].
\end{aligned}$$

Daraus folgt offenbar

$$\begin{aligned}
&\left|I(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) - I(\mathbb{R}^2, F_{\mathbf{j},m}) - I(F_{\mathbf{0},m}, \mathbb{R}^2) + I(F_{\mathbf{0},m}, F_{\mathbf{j},m})\right| \\
&\leq (\lambda \mathbb{E}[\left|\Xi_0\right|_2])^2[\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) + \tilde{a} + \tilde{b}] + \omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \\
&\quad + [\tilde{a} + \omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)][1 + 2\lambda \mathbb{E}[\left|\Xi_0\right|_2]] + \lambda \mathbb{E}[\left|\Xi_0\right|_2][\tilde{b} + \omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)],
\end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{a} = \mathbf{1}_{(x_3+K_3) \cup (x_4+K_4)}(\ell_u(\xi_{12}))$$

und

$$\tilde{b} = \mathbf{1}_{(x_1+K_1) \cup (x_2+K_2)}(\ell_u(\xi_{34})).$$

Insbesondere haben wir für den Integranden im dritten Integral in

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)} \right) \right|$$

eine integrierbare Majorante gefunden, indem wir zunächst die Summe über \mathbf{j} berechnen und dann die Integrale (angefangen mit dx_3) nacheinander lösen. Da auch die Integranden der anderen beiden Integrale eine integrierbare Majorante besitzen, folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,-}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,-}^{(m)} \right) \right| = 0. \quad (5.13.6)$$

Wählt man in Theorem 7.1. in [21]

$$H_K(\{u\}, W) = \mathbf{1}_W(\ell_u(K)),$$

wurde bereits

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\eta_{\mathbf{0},2,+}^{(m)}, \eta_{\mathbf{j},2,+}^{(m)} \right) \right| = 0$$

nachgerechnet. Daraus folgt mit 5.13.4, 5.13.5, 5.13.6, dass wie gewünscht

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2} \left| \text{Cov} \left(\xi_{\mathbf{0},2}^{(m)}, \xi_{\mathbf{j},2}^{(m)} \right) \right| = 0.$$

□

Einen analogen Satz sollte es auch in $d = 3$ geben, der sowieso schon längliche Beweis würde dadurch allerdings nicht kürzer werden.

Satz 5.6 und Satz 5.13 besagen beide, dass im stationären Booleschen Modell

$$\sqrt{|W_n|_2} \left(\hat{N}_A(u) - N_A \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_A^2(u)).$$

Die beiden Sätze unterscheiden sich jedoch in den Voraussetzungen: Während Satz 5.6 beschränkte Körner voraussetzt, ist dies bei Satz 5.13 nicht mehr der Fall. Satz 5.13 ist also allgemeiner, dafür ist die Aussage von Satz 5.6 präziser, da wir dort auch Konvergenzgeschwindigkeiten angeben können.

5.2 KEIM-KORN-MODELLE MIT β -MISCHENDEN KEIM-PROZESSEN

Bisher haben wir in diesem Kapitel die Verteilungsasymptotik von $\hat{N}_{d,n}(u)$ für stationäre Boolesche Modelle betrachtet. Dies war möglich, da der Poissonsche Keim-Prozess zu einer einfachen Abhängigkeitsstruktur der Tangentenpunktprozesse führt. In diesem Unterkapitel wollen wir eine größere Klasse von Keim-Prozessen betrachten. Dabei lehnen wir uns an die Darstellung in [21] an. Der zentrale Mischungsbegriff dieses Unterkapitels, der von Volkonskii und Rozanov [44] eingeführt wurde, um die Verteilungsasymptotik von schwach abhängigen Zufallsgrößen zu studieren, wird durch den β -Mischungskoeffizienten quantifiziert:

Definition 5.14 (β -Mischungskoeffizient): *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' zwei Teil- σ -Algebra von \mathcal{A} . Dann heißt die Zahl*

$$\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') := \frac{1}{2} \sup \sum_{i,j} |\mathbb{P}(A_i \cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)|$$

der β -Mischungskoeffizient von \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' , wobei das Supremum über alle endlichen Zerlegungen $A_1, \dots, A_I \in \mathfrak{A}$ und $B_1, \dots, B_J \in \mathfrak{A}'$ von Ω genommen wird.

Offensichtlich ist $\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \leq 1$. Wegen des monotonen Klassensatzes ändert sich der Wert $\beta(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ nicht, wenn man bei der Berechnung des Supremums nur Zerlegungen von Halbalgebren \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{E}' mit $\sigma(\mathfrak{E}) = \mathfrak{A}$ bzw. $\sigma(\mathfrak{E}') = \mathfrak{A}'$ betrachtet. Wir interessieren uns speziell dafür, wie

$$\mathfrak{A}_{\Xi}(F) := \sigma(\{\Xi \cap F \cap C \neq \emptyset\} : C \in \mathcal{C}^d)$$

und

$$\mathfrak{A}_{\Psi}(F) := \sigma(\{\Psi(F \cap C) = j\} : C \in \mathcal{C}^d, j \in \mathbb{N}_0)$$

miteinander zusammenhängen. Mit Hilfe des eingeschränkten Keim-Korn-Modells

$$\Xi(B) := \bigcup_{i: X_i \in B} (X_i + \Xi_i),$$

dessen Körner in B liegen, können wir eine Verbindung zwischen den β -Mischungskoeffizienten diesen σ -Algebren schaffen:

Lemma 5.15: *Seien $F, \tilde{F}, G, \tilde{G} \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ mit $F \subset \tilde{F}$, $G \subset \tilde{G}$ und $\tilde{F} \cap \tilde{G} = \emptyset$. Dann gilt*

$$\beta(\mathfrak{A}_{\Xi}(F), \mathfrak{A}_{\Xi}(G)) \leq \beta(\mathfrak{A}_{\Psi}(\tilde{F}), \mathfrak{A}_{\Psi}(\tilde{G})) + 2\mathbb{P}(\Xi(\tilde{F}^c) \cap F \neq \emptyset) + 2\mathbb{P}(\Xi(\tilde{G}^c) \cap G \neq \emptyset).$$

Beweis. Unsere Argumente orientieren sich am Beweis von Lemma 5.1. aus [21]. Wir betrachten das Mengensystem $\tilde{\sigma}_f$, bestehend aus allen endlichen Vereinigungen disjunkter Mengen der Form

$$\mathcal{F}_{V_1, \dots, V_n}^{V_0} = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap V_0 = \emptyset, F \cap V_1 \neq \emptyset, \dots, F \cap V_n \neq \emptyset\} \quad (5.15.1)$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $V_i = C_i \cup D_i$, wobei $C_i \in \mathcal{C}^d$ und $D_i \subset \mathbb{R}^d$ offen. Das System $\tilde{\sigma}_f$ formt eine Halbalgebra, die die Matheronsche σ -Algebra σ_f erzeugt [30]. Für zwei beliebige

Zerlegungen von \mathcal{F} in endlich viele disjunkte Mengen der Form 5.15.1 betrachten wir die Mengen

$$A_i = \left\{ \Xi \cap F \in \mathcal{F}_{V_{k_1}^{(i)}, \dots, V_{k_{n_i}}^{(i)}}^{V_{k_0}^{(i)}} \right\}$$

für $i \in \{1, \dots, I\}$ und

$$B_j = \left\{ \Xi \cap G \in \mathcal{F}_{W_{l_1}^{(j)}, \dots, W_{l_{m_j}}^{(j)}}^{W_{l_0}^{(j)}} \right\}$$

für $j \in \{1, \dots, J\}$. Die Ereignisse $(A_i)_{i \in \{1, \dots, I\}}$ bzw. $(B_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}$ erzeugen die σ -Algebren $\mathfrak{A}_\Xi(F)$ bzw. $\mathfrak{A}_\Xi(G)$. Damit ist

$$\beta(\mathfrak{A}_\Xi(F), \mathfrak{A}_\Xi(G)) = \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum |\mathbb{P}(A_i \cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)|,$$

wobei wir nun das Supremum über möglichen A_i und B_j nehmen. Dieses Supremum berechnen wir durch den Vergleich mit den von den abgeschnittenen Mengen erzeugten Ereignissen

$$\tilde{A}_i = \left\{ \Xi(\tilde{F}) \cap F \in \mathcal{F}_{V_{k_1}^{(i)}, \dots, V_{k_{n_i}}^{(i)}}^{V_{k_0}^{(i)}} \right\}$$

für $i \in \{1, \dots, I\}$ und

$$\tilde{B}_j = \left\{ \Xi(\tilde{G}) \cap G \in \mathcal{F}_{W_{l_1}^{(j)}, \dots, W_{l_{m_j}}^{(j)}}^{W_{l_0}^{(j)}} \right\}$$

für $j \in \{1, \dots, J\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i,j} |\mathbb{P}(A_i \cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)| \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left| \mathbb{P}(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j) - \mathbb{P}(\tilde{A}_i)\mathbb{P}(\tilde{B}_j) \right| \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left| \mathbb{P}(A_i \cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j) - \left(\mathbb{P}(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j) - \mathbb{P}(\tilde{A}_i)\mathbb{P}(\tilde{B}_j) \right) \right|. \end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\{\Xi(\tilde{F}^c) \cap F = \emptyset\} \cap A_i \subset \tilde{A}_i \text{ und } \{\Xi(\tilde{F}^c) \cap F = \emptyset\} \cap \tilde{A}_i \subset A_i.$$

Daher folgt

$$A_i \Delta \tilde{A}_i \subset \{\Xi(\tilde{F}^c) \cap F \neq \emptyset\} \cap (A_i \cup \tilde{A}_i),$$

wobei wir mit $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ die symmetrische Differenz der Mengen A und B bezeichnen. Es folgt

$$\sum_i \mathbb{P}(A_i \Delta \tilde{A}_i) \leq 2\mathbb{P}(\Xi(\tilde{F}^c) \cap F \neq \emptyset)$$

und analog

$$\sum_j \mathbb{P}(B_j \Delta \tilde{B}_j) \leq 2\mathbb{P}(\Xi(\tilde{G}^c) \cap G \neq \emptyset).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left| \mathbb{P}(A_i \cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j) - \left(\mathbb{P}(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j) - \mathbb{P}(\tilde{A}_i)\mathbb{P}(\tilde{B}_j) \right) \right| \\ \leq 2 \sum_i \mathbb{P}(A_i \Delta \tilde{A}_i) + 2 \sum_j \mathbb{P}(B_j \Delta \tilde{B}_j) \\ \leq 4\mathbb{P}(\Xi(\tilde{F}^c) \cap F \neq \emptyset) + 4\mathbb{P}(\Xi(\tilde{G}^c) \cap G \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Mit ähnlichen Argumenten wie in [45] und Formel (4.6) aus [18] folgt

$$\sum_{i,j} \left| \mathbb{P}(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_j) - \mathbb{P}(\tilde{A}_i)\mathbb{P}(\tilde{B}_j) \right| \leq 2\beta(\mathfrak{A}_\Psi(\tilde{F}), \mathfrak{A}_\Psi(\tilde{G})),$$

woraus schließlich die geforderte Aussage folgt. \square

Laut Lemma 5.15 lässt sich der β -Mischungskoeffizient eines Keim-Korn-Modells abschätzen durch zwei Teile: ein Teil rührt vom Keim-Prozess Ψ her und ein Teil von den Körnern. Letzteren werden wir im folgenden Lemma für spezielle unbeschränkte Mengen quantifizieren. Die Richtigkeit der Aussage aus Lemma 5.15 für unbeschränkte Mengen G, \tilde{G} folgt dabei aus einem einfachen Approximationsargument. Wir notieren noch $\|A\| := \sup_{a \in A} |a|$ für $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ und erhalten Lemma 5.2. aus [21]:

Lemma 5.16: *Sei $0 < a < b < \infty$, $\Delta = (b - a)/4$ sowie*

$$F = [-a, a]^d, \quad G = \mathbb{R}^d \setminus [-b, b]^d,$$

$$\tilde{F} = [-(a + \Delta), a + \Delta]^d, \quad \tilde{G} = \mathbb{R}^d \setminus [-(b - \Delta), b - \Delta]^d.$$

Weiter sei der Keim-Prozess Ψ stationär mit Intensität $\lambda > 0$ sowie $\mathbb{E}[\|\Xi_0\|^d] < \infty$ und $D(x) := \mathbb{P}(\|\Xi_0\| \leq x)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\Xi(\tilde{F}^c) \cap F \neq \emptyset) \leq \lambda d 2^d \left(1 + \frac{a}{\Delta}\right)^{d-1} \int_{\Delta}^{\infty} x^d dD(x)$$

und

$$\mathbb{P}(\Xi(\tilde{G}^c) \cap G \neq \emptyset) \leq \lambda d 2^d \left(3 + \frac{a}{\Delta}\right)^{d-1} \int_{\Delta}^{\infty} x^d dD(x).$$

Wir benötigen im Folgenden Theorem 6.1. aus [18]:

Satz 5.17 (Grenzwertsatz unter β -Mischungsbedingungen): *Sei $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ ein stationäres Feld mit $\mathbb{E}[Y_0] = 0$. Weiter gebe es ein $\delta > 0$, sodass $\mathbb{E}[|Y_0|^{2+\delta}] < \infty$ und*

$$\beta(\mathfrak{A}(\{Y_j \mid |j| \leq p\}), \mathfrak{A}(\{Y_j \mid |j| \geq p + q\})) \leq \begin{cases} \beta_Y^{(1)}(q) & \text{für } 0 = p < q \\ p^{d-1} \beta_Y^{(2)}(q) & \text{für } 1 \leq q \leq p \end{cases}$$

mit

$$\sum_{q \geq 1} q^{d-1} \beta_Y^{(1)}(q)^{\delta/(2+\delta)} < \infty \quad (5.17.1)$$

und

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q^{2d-1} \beta_Y^{(2)}(q) = 0. \quad (5.17.2)$$

Dann existiert die asymptotische Varianz $\sigma^2 < \infty$ der Summe

$$S_n = \sum_{j \in V_n} Y_j$$

für $V_n = \{-n, \dots, n\}^d$ und es gilt

$$(\#V_n)^{-d/2} S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Um nun diesen Satz verwenden zu können, müssen wir noch weitere Bedingungen an den β -Mischungskoeffizienten des Keim-Prozesses Ψ stellen. Wir fordern, dass es eine nicht wachsende Funktion β_Ψ auf $[0, \infty)$ gibt, sodass

$$\beta(\mathfrak{A}_\Psi([-a, a]^d), \mathfrak{A}_\Psi(\mathbb{R}^d \setminus [-(a+r), a+r]^d)) \leq \max\left(1, \frac{a}{r}\right)^{d-1} \beta_\Psi(r) \quad (5.17.3)$$

für alle $a, r \geq 1/2$. Diese Bedingung quantifiziert die Wechselwirkung des Punktprozesses Ψ in den Gebieten $[-a, a]^d$ und $\mathbb{R}^d \setminus [-(a+r), a+r]^d$.

Mit diesen Vorarbeiten können wir Grenzwertsätze für die EPC für β -mischende Keim-Prozesse formulieren:

Satz 5.18 (Grenzwertsatz im Fall von β -mischenden Keim-Prozessen): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ ein stationärer Keim-Korn-Prozess, dessen Keim-Prozess Ψ Bedingung 5.17.3 erfüllt. Weiter gebe es ein $\delta > 0$, sodass*

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0,1]^d \neq \emptyset} \right)^{d(2+\delta)} \right] < \infty \quad (5.18.1)$$

und

$$\mathbb{E} [\|\Xi_0\|^{2d(1+\delta)/\delta+\varepsilon}] < \infty \text{ für ein } \varepsilon > 0$$

sowie

$$\sum_{q \geq 1} q^{d-1} \beta_\Psi(q)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty. \quad (5.18.2)$$

Dann ist $\sigma_d^2(u) < \infty$ und es gilt für $W_n = [-(n+1/2), n+1/2]^d$

$$\sqrt{|W_n|_d} \left(\hat{N}_d(u) - N_d \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_d^2(u)).$$

Beweis. Wir definieren für $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$

$$E_{\mathbf{j}} := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^d + \mathbf{j}$$

und betrachten das Feld $(Y_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ definiert durch

$$Y_{\mathbf{j}} = \Psi_u^+(E_{\mathbf{j}}) - \Psi_u^-(E_{\mathbf{j}}) - N_A$$

in $d = 2$ bzw.

$$Y_{\mathbf{j}} = \Psi_u^+(E_{\mathbf{j}}) - \Psi_{u,1}^-(E_{\mathbf{j}}) + \Psi_{u,2}^-(E_{\mathbf{j}}) - N_V$$

in $d = 3$. Dann ist $(Y_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d}$ stationär mit $\mathbb{E}[Y_{\mathbf{0}}] = 0$ und wegen Bedingung 5.18.1 ist jeweils $\mathbb{E}[|Y_{\mathbf{0}}|^{2+\delta}] < \infty$. Wir müssen also noch die Bedingungen 5.17.1 und 5.17.2 nachrechnen.

Zunächst gilt $\mathfrak{A}_Y(F) \subset \mathfrak{A}_{\Xi}(F)$ wegen der Struktur unseres Feldes und damit

$$\begin{aligned} & \beta(\mathfrak{A}(\{Y_{\mathbf{j}} \mid |\mathbf{j}| \leq p\}), \mathfrak{A}(\{Y_{\mathbf{j}} \mid |\mathbf{j}| \geq p+q\})) \\ & \leq \beta \left(\mathfrak{A}_{\Xi} \left(\left[-\frac{2p+1}{2}, \frac{2p+1}{2} \right]^d \right), \mathfrak{A}_{\Xi} \left(\mathbb{R}^d \setminus \left[-\frac{2(p+q)-1}{2}, \frac{2(p+q)-1}{2} \right]^d \right) \right). \end{aligned}$$

Für $q \geq 2$ gilt mit Hilfe von Lemma 5.15 und Lemma 5.16

$$\begin{aligned} & \beta(\mathfrak{A}(\{Y_{\mathbf{j}} \mid |\mathbf{j}| \leq p\}), \mathfrak{A}(\{Y_{\mathbf{j}} \mid |\mathbf{j}| \geq p+q\})) \\ & \leq \beta \left(\mathfrak{A}_{\Psi} \left(\left[-\frac{4p+q+1}{4}, \frac{4p+q+1}{4} \right]^d \right), \mathfrak{A}_{\Psi} \left(\mathbb{R}^d \setminus \left[-\frac{4p+3q-1}{4}, \frac{4p+3q-1}{4} \right]^d \right) \right) \\ & \quad + \lambda d 2^{d+2} \left(3 + \frac{4p+2}{q-1} \right)^{d-1} \int_{\frac{q-1}{4}}^{\infty} x^d dD(x). \end{aligned}$$

Wegen Bedingung 5.17.3 gilt schließlich

$$\begin{aligned} & \beta(\mathfrak{A}(\{Y_{\mathbf{j}} \mid |\mathbf{j}| \leq p\}), \mathfrak{A}(\{Y_{\mathbf{j}} \mid |\mathbf{j}| \geq p+q\})) \\ & \leq \left(\frac{\frac{4p+q+1}{4}}{\min\left(\frac{4p+q+1}{4}, \frac{q-1}{2}\right)} \right)^{d-1} \beta_{\Psi} \left(\frac{q-1}{2} \right) + \lambda d 2^{d+2} \left(3 + \frac{4p+2}{q-1} \right)^{d-1} \int_{\frac{q-1}{4}}^{\infty} x^d dD(x). \end{aligned} \tag{5.18.3}$$

Aus Gleichung 5.18.3 erhalten wir mit $p = 0$ und $q \geq 3$ die in Bedingungen 5.17.1 geforderte Funktion

$$\beta_Y^{(1)}(q) = \beta_{\Psi} \left(\frac{q-1}{2} \right) + c_1 \int_{\frac{q-1}{4}}^{\infty} x^d dD(x),$$

mit einer von d abhängigen Konstante $c_1 > 0$. Um nun die geforderte Summierbarkeit von $\beta_Y^{(1)}(n)^{\delta/(2+\delta)}$ folgern zu können verwenden wir die Ungleichung

$$(x + y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha.$$

für $\alpha = \delta/(2 + \delta) < 1$ und bemerken, dass für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_H^\infty x^d dD(x) &= \frac{1}{H^{d(2+\delta)/\delta+\varepsilon}} \int_H^\infty x^d H^{d(2+\delta)/\delta+\varepsilon} dD(x) \\ &\leq \frac{1}{H^{d(2+\delta)/\delta+\varepsilon}} \int_0^\infty x^{2d(1+\delta)/\delta+\varepsilon} dD(x) = \frac{\mathbb{E}[\|\Xi_0\|^{2d(1+\delta)/\delta+\varepsilon}]}{H^{d(2+\delta)/\delta+\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (5.18.4)$$

Damit ist

$$\sum_{q \geq 3} q^{d-1} \beta_Y^{(1)}(q)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \sum_{q \geq 3} q^{d-1} \beta_\Psi \left(\frac{q-1}{2} \right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} + c_2 \sum_{q \geq 3} q^{d-1} \frac{1}{\left(\frac{q-1}{4} \right)^{d+\varepsilon'}}$$

mit $\varepsilon' = \varepsilon\delta/(2 + \delta) > 0$ und $c_2 = (c_1 \mathbb{E}[\|\Xi_0\|^{2d(1+\delta)/\delta+\varepsilon}])^{\delta/(2+\delta)} < \infty$. Unter den von uns an β_Ψ gestellten Bedingungen gilt also auch Bedingung 5.17.1.

Aus Gleichung 5.18.3 erhalten wir die in Bedingungen 5.17.2 geforderte Funktion

$$\beta_Y^{(2)}(q) = \frac{c_3}{(q-1)^{d-1}} \left(\beta_\Psi \left(\frac{q-1}{2} \right) + \int_{\frac{q-1}{4}}^\infty x^d dD(x) \right)$$

mit einer von d abhängigen Konstante $c_3 > 0$. Unter der von uns an β_Ψ gestellten Summierbarkeitsbedingungen und mit 5.18.4 gilt also auch Bedingung 5.17.2. Insgesamt folgt die geforderte Aussage. \square

Die Integrabilitätsbedingung 5.18.1 ist das Analogon zur Bedingung (6.4) in Theorem 6.2. aus [21]. Wünschenswert wäre, anstatt dieser gemeinsamen Bedingung an den Keim-Korn-Prozess zwei getrennte Bedingungen an den Keim-Prozess und das typische Korn zu stellen. Dies geht z.B. mit Hilfe von Korollar 3.15 über entsprechende Mischungsbedingungen. Beispielsweise wäre eine für die Erfüllung von 5.18.1 hinreichende Bedingung

$$\|\gamma_{\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$$

für $k \in \{2, \dots, 2d + \lceil d\delta \rceil\}$, wobei $\gamma_{\text{red}}^{(k)}$ das reduzierte faktorielle Kumulantenmaß des Keim-Prozesses bezeichnet.

Inwiefern Satz 5.18 die Ergebnisse von Satz 5.13 verallgemeinert sieht man an Bedingung 5.18.2. Offenbar erfüllt der Poisson-Prozess diese Bedingung. Darüber hinaus gibt es aber noch weitere Prozesse, die diese Bedingung erfüllen. Dazu zählen beispielsweise die Folgenden: poissonische Cluster und Soft- bzw. Hardcore Prozesse, wie sie von Matérn definiert wurden, Gibbs Prozesse, die der Dobrushin Bedingung gehorchen, Eckpunkte von Poisson-Voronoi-Mosaiken (siehe [18]) und spezielle Cox-Prozesse. Bei Cox-Prozessen

Ψ mit (zufälligem) Leitmaß Λ lässt sich der β -Mischungskoeffizient abschätzen durch den des Leitmaßes:

$$\beta(\mathfrak{A}_\Psi(F), \mathfrak{A}_\Psi(G)) \leq \beta(\mathfrak{A}_\Lambda(F), \mathfrak{A}_\Lambda(G)).$$

Beliebte Leitmaße lassen sich für messbare $f \geq 0$ beispielsweise durch

$$\Lambda(B) = \int_B f(\xi(x)) dx$$

mit einem Gaußschen Feld $(\xi(x))$ oder aus einem stationären Booleschen Modell Z durch

$$\Lambda(B) = \int_B \mathbf{1}_Z(x) dx$$

definieren. Wir haben also Grenzwertsätze für eine größere Klasse von Keim-Prozessen als den Poisson-Prozess gefunden. Dafür müssen wir aber auch strengere Bedingungen an das typische Korn Ξ_0 stellen.

Im Gegensatz zu den Grenzwertsätzen für poissonische Keim-Prozesse haben die Ergebnisse dieses Kapitels aber auch einen Nachteil: Wir kennen keine explizite Formel für die Asymptotische Varianz $\sigma_A^2(u)$. Da die Formel aus Satz 4.5 für poissonische Keim-Prozesse allerdings nur semi-explizit (d.h. höchstens in ganz einfachen Spezialfällen berechenbar) ist, sind beide Ergebnisse nicht dazu geeignet beispielsweise Konfidenzintervalle für die unbekannte Zahl N_A anzugeben.

Wünschenswert wäre also eine Schätzung $\hat{\sigma}_{A,n}^2(u)$ der Asymptotischen Varianz mit guten stochastischen Eigenschaften.

6 SCHÄTZUNG DER ASYMPTOTISCHEN VARIANZ

Um die Grenzwertsätze aus Kapitel 5 für die Bestimmung von asymptotischen Konfidenzintervallen oder die Durchführung von Hypothesentests nutzbar machen zu können, müssen wir die asymptotische Varianz schätzen. Diese Schätzung muss dabei sinnvolle Eigenschaften erfüllen. Sie sollte zumindest asymptotisch erwartungstreu und L^2 -konsistent sein.

Einen solchen Schätzer konstruieren wir mit Hilfe einer Funktion $K : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, der sogenannten *Kernfunktion*. Von dieser verlangen wir, dass sie eine symmetrische, beschränkte Funktion mit beschränktem Träger ist und $\lim_{x \rightarrow o} K(x) = K(o) = 1$ erfüllt. Außerdem betrachten wir eine monoton fallende Nullfolge $(b_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$, die sogenannte *Bandbreitenfolge*, für die wir zusätzlich fordern, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nb_n^2 = 0.$$

Damit definieren wir die folgenden Schätzer:

Definition 6.1 (Schätzer der asymptotischen Varianz): *Sei K eine Kernfunktion und $(b_n)_{n \geq 1}$ eine Bandbreitenfolge. Dann ist*

$$\hat{\sigma}_{A,n}^2(u) := \left(\sum_{x,y \in \Psi_u^+} + \sum_{x,y \in \Psi_u^-} - 2 \sum_{\substack{x \in \Psi_u^+ \\ y \in \Psi_u^-}} \right) \frac{\mathbb{1}_{W_n}(x) \mathbb{1}_{W_n}(y) K\left(\frac{y-x}{nb_n}\right)}{|(W_n - x) \cap (W_n - y)|_2} - (nb_n)^2 \int_{\mathbb{R}^2} K(x) dx \frac{(\Psi_u^+(W_n) - \Psi_u^-(W_n))^2}{|W_n|_2^2}$$

ein Schätzer für die asymptotische Varianz $\sigma_A^2(u)$ und

$$\hat{\sigma}_{V,n}^2(u) := \left(\sum_{x,y \in \Psi_u^+} + \sum_{x,y \in \Psi_{u,1}^-} + \sum_{x,y \in \Psi_{u,2}^-} - 2 \sum_{\substack{x \in \Psi_u^+ \\ y \in \Psi_{u,1}^-}} + 2 \sum_{\substack{x \in \Psi_u^+ \\ y \in \Psi_{u,2}^-}} - 2 \sum_{\substack{x \in \Psi_{u,1}^- \\ y \in \Psi_{u,2}^-}} \right) \frac{\mathbb{1}_{W_n}(x) \mathbb{1}_{W_n}(y) K\left(\frac{y-x}{nb_n}\right)}{|(W_n - x) \cap (W_n - y)|_3} - (nb_n)^3 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) dx \frac{(\Psi_u^+(W_n) - \Psi_{u,1}^-(W_n) + \Psi_{u,2}^-(W_n))^2}{|W_n|_3^2}$$

ein Schätzer für die asymptotische Varianz $\sigma_V^2(u)$.

Auch hier verwenden wir wieder $\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)$ in $d = 2$ bzw. $d = 3$ synonym für $\hat{\sigma}_{A,n}^2(u)$ bzw. $\hat{\sigma}_{V,n}^2(u)$. Um die asymptotischen Eigenschaften dieser Schätzer zu untersuchen, wollen wir Theorem 1 aus [23] verwenden (siehe auch Lemma 4.2. in [18]). Wir werden dafür Voraussetzungen an die Totalvariation $\|\cdot\|_{TV}$ des reduzierten faktoriellen Kumulantenmaßes stellen:

Satz 6.2: Sei Ψ ein stationärer Punktprozess der $\|\gamma_{\Psi,\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$ für $k \in \{2, 3, 4\}$ erfüllt. Weiter sei

$$\hat{\sigma}_n^2 = \sum_{x,y \in \Psi} \frac{\mathbb{1}_{W_n}(x)\mathbb{1}_{W_n}(y)K\left(\frac{y-x}{nb_n}\right)}{|(W_n - x) \cap (W_n - y)|_d} - (nb_n)^d \int_{\mathbb{R}^d} K(x)dx \frac{\Psi(W_n)^2}{|W_n|_d^2}$$

der Schätzer seiner asymptotischen Varianz σ^2 mit Kernfunktion K und Bandbreitenfolge $(b_n)_{n \geq 1}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \sigma^2$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)^2] = 0.$$

Es ist keineswegs verwunderlich, dass wir Bedingungen wie $\|\gamma_{\Psi,\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$ für bestimmte k an das reduzierte faktorielle Kumulatenmaß des Punktprozesses stellen müssen. Wir hatten bereits ähnliche Bedingungen in Korollar 3.15 gefordert, um die Endlichkeit entsprechender Momente der Tangentenpunktanzahl zu zeigen.

Um die Schätzer aus Definition 6.1 besser untersuchen zu können, definieren wir zunächst noch einen von Brillinger [5] eingeführten Mischungsbeffriff:

Definition 6.3 (Brillinger mischend): Ein Punktprozess Ψ heißt Brillinger mischend, falls für alle $k \in \{2, 3, \dots\}$ gilt

$$\|\gamma_{\Psi,\text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty.$$

Es ist einfach zu sehen, dass der Poisson-Prozess ein Brillinger mischender Prozess ist. Allgemein lässt sich die Bedingung als asymptotische Unkorreliertheit deuten. Für uns wichtig sind die Tangentenpunktprozesse, und auch für diese gilt:

Lemma 6.4: Im stationären Booleschen Modell mit Intensität λ , dessen typisches Korn $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$ erfüllt, sind sämtliche Tangentenpunktprozesse in $d \in \{2, 3\}$ Brillinger mischend.

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen Tangentenpunktprozess und nennen diesen in diesem Beweis ζ . Dann ist ζ ein Punktprozess in \mathbb{R}^d für $d \in \{2, 3\}$ mit der Eigenschaft, dass $\zeta(B(x_1, \varepsilon_1))$ und $\zeta(B(x_2, \varepsilon_2))$ unabhängig sind, falls $\|x_1 - x_2\| > 3R$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ klein genug. Die Abhängigkeitsstruktur lässt sich in der folgenden Abbildung visualisieren:

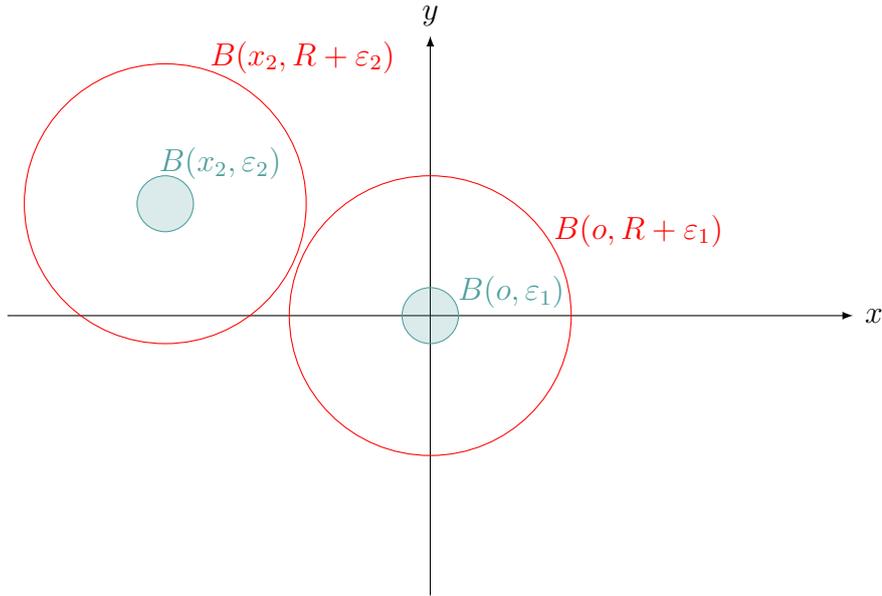


Abbildung 6.5: Im Booleschen Modell mit $\mathbb{P}(\Xi_0 \subset B(o, R)) = 1$ für ein $R > 0$ lässt sich die Reichweite der Abhängigkeit zwischen Tangentenpunkten analog zu Lemma 5.3 scharf abgrenzen. Die Anzahl der Tangentenpunkte (egal ob positiv oder negativ) in $B(o, \varepsilon_1)$ bzw. $B(x_2, \varepsilon_2)$ wird bestimmt durch das Keim-Korn-Modell mit Keimen in $B(o, R + \varepsilon_1)$ bzw. $B(x_2, R + \varepsilon_2)$. Wegen der räumlichen Unabhängigkeit des Poisson-Prozesses ist im Fall eines Booleschen Modells die Anzahl der Tangentenpunkte in $B(o, \varepsilon_1)$ bzw. $B(x_2, \varepsilon_2)$ unabhängig voneinander, falls x_2 und o weit genug voneinander entfernt sind. Dies ist für ε_1 und ε_2 klein genug der Fall, wenn $\|x_2\| > 3R$ (dies ist hinreichend dafür, dass sich die beiden roten Kreise nicht schneiden).

Für einen solchen Punktprozess ζ rechnen wir nach, dass für sein reduziertes faktorielles Kumulantenmaß $\|\gamma_{\zeta, \text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$ für alle $k \in \{2, 3, \dots\}$ gilt. Dazu verwenden wir in unserem Beweis die zugehörigen Kumulantendichten $c^{(k)}$. Diese existieren für die für uns relevanten Tangentenpunktprozesse, da auch alle Produktdichten existieren. In der Tat könnten wir mit Hilfe der Slivnyak-Mecke Formel sogar semi-explizite Darstellungen für die Produktdichten finden. Man kann aus der semi-expliziten Darstellung leicht folgern, dass $c^{(k)}$ beschränkt ist. Für ein fixiertes $k \in \{2, 3, \dots\}$ betrachten wir nun also

$$\|\gamma_{\zeta, \text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} |c^{(k)}(o, x_2, \dots, x_k)| dx_2 \cdots dx_k.$$

Wegen der Darstellung

$$\lambda_{\varrho}^{(k)}(o, x_2, \dots, x_k) = \lim_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \searrow 0} \frac{\mathbb{E}[\zeta(B(o, \varepsilon_1))\zeta(B(x_2, \varepsilon_2)) \cdots \zeta(B(x_k, \varepsilon_k))]}{|B(o, \varepsilon_1)|_d |B(x_2, \varepsilon_2)|_d \cdots |B(x_k, \varepsilon_k)|_d}$$

der Produktdichte sowie Definition 2.10 hat $c^{(k)}$ die Form einer multivariaten Kumulante (genauer gesagt handelt es sich um den Limes der multivariaten Kumulante der Zufallsgrößen $\zeta(B(x_j, \varepsilon_j))/|B(x_j, \varepsilon_j)|_d$, $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $x_1 = o$). Elementare Eigenschaften

der multivariaten Kumulante sagen nun, dass sie verschwindet sobald, sich unter den betrachteten Zufallsgrößen unabhängige Blöcke bilden lassen. Dies ist für uns der Fall, sobald es einen $j \in \{1, \dots, k\}$ gibt, sodass $\|x_j - x_i\| > 3R$ für alle $i \neq j$.

Somit ist der Träger der Kumulantendichte $c^{(k)}$ auf jeden Fall eine Teilmenge von $B(o, 3(k-1)R)^{k-1}$ und wir erhalten

$$\|\gamma_{\zeta, \text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} = \int_{B(o, 3(k-1)R)} \cdots \int_{B(o, 3(k-1)R)} |c^{(k)}(o, x_2, \dots, x_k)| dx_2 \cdots dx_k.$$

Da $c^{(k)}$ beschränkt ist, folgt schließlich wie gewünscht

$$\|\gamma_{\zeta, \text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty.$$

□

Der Beweis des vorangegangenen Satzes ist im Fall eines beschränkten typischen Korns relativ elementar und anschaulich. Aber auch im Booleschen Modell mit unbeschränkten Körnern sind die Tangentenpunktprozesse unter der zusätzlichen Bedingung $\mathbb{E}[\|\Xi_0\|^k] < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ Brillinger mischend. Dazu brauchen wir Theorem 2 in [22]:

Satz 6.6: *Sei Ψ ein stationärer Punktprozess in \mathbb{R}^d , der Bedingung 5.17.3 erfülle. Weiter gebe es ein $\delta > 0$, sodass $\mathbb{E}[\Psi([0, 1]^d)^{k+\delta}] < \infty$ und*

$$\sum_{r \geq 1} r^{(k-1)d-1} \beta_{\Psi}(r)^{\frac{\delta}{k+\delta}} < \infty.$$

Dann gilt

$$\|\gamma_{\Psi, \text{red}}^{(j)}\|_{\text{TV}} < \infty$$

für $j \in \{2, \dots, k\}$.

Mit dieser Vorarbeit können wir uns der Untersuchung des Schätzers $\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)$ zuwenden. Es gilt:

Lemma 6.7 (Asymptotische Eigenschaften von $\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)$): *Sei $\Psi_{\mathcal{K}^d}$ ein Keim-Korn-Prozess und es gelten entweder*

(i) *die Voraussetzungen von Satz 5.6.*

(ii) *die Voraussetzungen von Satz 5.13 und zusätzlich gebe es ein $\delta > 0$, sodass*

$$\mathbb{E}[\|\Xi_0\|^{8(3+\delta)/\delta+\varepsilon}] < \infty \text{ für ein } \varepsilon > 0. \quad (6.7.1)$$

(iii) *die Voraussetzungen von Satz 5.18 und zusätzlich gebe es ein $\delta > 0$, sodass*

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{(X_i + \Xi_i) \cap [0, 1]^d \neq \emptyset} \right)^{d(4+\delta)} \right] < \infty \quad (6.7.2)$$

und

$$\mathbb{E}[\|\Xi_0\|^{4d(3+\delta)/\delta+\varepsilon}] < \infty \text{ für ein } \varepsilon > 0$$

sowie

$$\sum_{r \geq 1} r^{3d-1} \beta_{\Psi}(r)^{\frac{\delta}{4+\delta}} < \infty. \quad (6.7.3)$$

Dann gilt im jeweiligen Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{\sigma}_{A,n}^2(u)] = \sigma_A^2(u)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[(\hat{\sigma}_{A,n}^2(u) - \sigma_A^2(u))^2\right] = 0.$$

Beweis. Wir werden Satz 6.2 verwenden um die Aussage zu folgern. Dazu müssen wir unsere Prozesse in die entsprechende Form bringen. In $d = 2$ definieren wir die Prozesse

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(2)} &:= \Psi_u^+, \\ \zeta_2^{(2)} &:= \Psi_u^-, \\ \zeta_3^{(2)} &:= \Psi_u^+ + \Psi_u^- \end{aligned}$$

und in $d = 3$ definieren wir analog

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(3)} &:= \Psi_u^+, \\ \zeta_2^{(3)} &:= \Psi_{u,1}^-, \\ \zeta_3^{(3)} &:= \Psi_{u,2}^-, \\ \zeta_4^{(3)} &:= \Psi_u^+ + \Psi_{u,1}^-, \\ \zeta_5^{(3)} &:= \Psi_u^+ + \Psi_{u,2}^-, \\ \zeta_6^{(3)} &:= \Psi_{u,1}^- + \Psi_{u,2}^-. \end{aligned}$$

Damit betrachten wir die sehr ähnlichen Teile

$$\hat{\sigma}_{d,n,i}^2 := \sum_{x,y \in \zeta_i^{(d)}} \frac{\mathbb{1}_{W_n}(x) \mathbb{1}_{W_n}(y) K\left(\frac{y-x}{nb_n}\right)}{|(W_n - x) \cap (W_n - y)|_d} - (nb_n)^d \int_{\mathbb{R}^d} K(x) dx \frac{\zeta_i^{(d)}(W_n)^2}{|W_n|_d^2}.$$

Daraus erhalten wir eine Zerlegung

$$\hat{\sigma}_{A,n}^2(u) = 2\hat{\sigma}_{A,n,1}^2 + 2\hat{\sigma}_{A,n,2}^2 - \hat{\sigma}_{A,n,3}^2$$

und

$$\hat{\sigma}_{V,n}^2(u) = \hat{\sigma}_{V,n,1}^2 + 3\hat{\sigma}_{V,n,2}^2 + \hat{\sigma}_{V,n,3}^2 - \hat{\sigma}_{V,n,4}^2 + \hat{\sigma}_{V,n,5}^2 - \hat{\sigma}_{V,n,6}^2.$$

Um Satz 6.2 verwenden zu können, müssen wir unter den Voraussetzungen in (i), (ii) und (iii) nachweisen, dass alle reduzierten faktoriellen Kumulantenmaße von $\zeta_i^{(d)}$ bis zur Ordnung 4 endliche Totalvariation haben.

Im Fall (i) sind wegen Lemma 6.4 alle $\zeta_i^{(d)}$ sogar Brillinger mischend, wobei zu beachten ist, dass sich die Argumentation im Beweis von Lemma 6.4 auch auf die Prozesse $\zeta_3^{(2)}$ und $\zeta_i^{(3)}$, $i \in \{4, 5, 6\}$ übertragen lässt.

Im Fall (ii) verwenden wir Satz 6.6. Da wir einen Poissonschen Keim-Prozess betrachten, gilt in diesem Fall wegen Korollar 3.15

$$\mathbb{E} \left[\zeta_i^{(d)}([0, 1]^d)^k \right] < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt wegen 5.15 und 5.16 sowie mit Hilfe der zusätzlichen Voraussetzung 6.7.1 und einer analogen Rechnung wie in 5.18.4, dass

$$\sum_{r \geq 1} r^{3d-1} \beta_{\zeta_i^{(d)}}(r)^{\frac{\delta}{4+\delta}} < \infty$$

für ein $\delta > 0$. Alle unsere Prozesse $\zeta_i^{(d)}$ erfüllen also die Voraussetzungen in Satz 6.6 und somit haben alle reduzierten faktoriellen Kumulantenmaße von $\zeta_i^{(d)}$ bis zur Ordnung 4 endliche Totalvariation.

Auch im Fall (iii) wollen wir Satz 6.6 verwenden. Wir müssen hier aber zusätzlich 6.7.2 und 6.7.3 fordern, da wir uns im Gegensatz zu Fall (ii) nicht auf einen Poissonschen Keim-Prozess beschränken. Die Argumente sind aber sonst die gleichen wie in Fall (ii).

Insgesamt haben in den Fällen (i), (ii) und (iii) tatsächlich alle reduzierten faktoriellen Kumulantenmaße der Prozesse $\zeta_i^{(d)}$ bis zur Ordnung 4 endliche Totalvariation.

Wegen Satz 6.2 gilt also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_{A,n,1}^2] &= \sigma_+^2(u), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_{A,n,2}^2] &= \sigma_-^2(u), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_{A,n,3}^2] &= \sigma_+^2(u) + \sigma_-^2(u) + 2\rho(u) \end{aligned}$$

und damit folgt insgesamt wie gefordert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\hat{\sigma}_{A,n}^2(u)] = \sigma_A^2(u).$$

Die Rechnung in $d = 3$ verläuft genauso.

Mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung folgt auch die L^2 -Konsistenz von $\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)$ aus der L^2 -Konsistenz der jeweiligen $\hat{\sigma}_{d,n,i}^2$. \square

Die Bedingung 6.7.2 sichert die Endlichkeit des $(4 + \delta)$ -sten Moments der Anzahl der Tangentenpunkte in $[0, 1]^d$. Wegen Korollar 3.15 ist für die Erfüllung dieser Forderung

$$\|\gamma_{\Psi, \text{red}}^{(k)}\|_{\text{TV}} < \infty$$

für $k \in \{2, \dots, 4d + \lceil d\delta \rceil\}$ hinreichend, wobei $\gamma_{\Psi, \text{red}}^{(k)}$ das reduzierte faktorielle Kumulantenmaß des Keim-Prozesses bezeichnet.

Auch die Wahl der optimalen Bandbreitenfolge (im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers von $\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)$) ist für verschiedene Schwanzverhalten von $\gamma_{\Psi, \text{red}}^{(2)}$ (wie wir es z.B. in Lemma 6.4 etabliert haben) in Theorem 3 in [23] behandelt. Insgesamt erhalten wir das praktisch relevante Resultat:

Lemma 6.8 (Grenzwertsätze mit geschätzter asymptotischer Varianz): *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.7 gilt im jeweiligen Fall*

$$\sqrt{\frac{|W_n|_d}{\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)}} \left(\hat{N}_{d,n}(u) - N_d \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 6.7 und dem entsprechenden Grenzwertsatz mit Hilfe des Lemmas von Slutsky. \square

Mit Hilfe dieses Ergebnisses lassen sich asymptotische Konfidenzintervalle bestimmen. Wir bezeichnen mit $z_{1-\alpha/2}$ das $(1 - \alpha/2)$ -Quantil der $\mathcal{N}(0, 1)$ Verteilung. Dann gilt wegen Lemma 6.8, dass der unbekannte Erwartungswert N_d der spezifischen EPC der Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\hat{N}_{d,n}(u) - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)}{|W_n|_d}} z_{1-\alpha/2} \leq N_d \leq \hat{N}_{d,n}(u) + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)}{|W_n|_d}} z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

genügt.

7 SIMULATIONSSTUDIEN

Zum Abschluss dieser Arbeit wollen wir die Ergebnisse noch anhand von Simulationsstudien veranschaulichen. Dabei wollen wir für verschiedene Boolesche Modelle die asymptotische Verteilung von $\hat{N}_{A,n}(u)$ mit der einer Normalverteilung vergleichen. Außerdem wollen wir für ein nicht boolesches Keim-Korn-Modell ein asymptotische Konfidenzintervall für N_A angeben.

Beginnen wir mit der Betrachtung von Booleschen Modellen. Solche realisieren wir in zwei Schritten: Zunächst erzeugen wir eine Poisson-verteilte Zufallszahl. Dabei sollte der Parameter der Poisson-Verteilung nicht $\lambda |W_n|_2$ sein, sondern $\lambda |W_n \oplus [-R, R]^2|_2$ für ein geeignetes $R > 0$. Dies trägt Randeffekten durch Körner Rechnung, deren Keim „nahe“ am Rand des Beobachtungsfensters liegt. Entsprechend dieser Zahl erzeugen wir gleichverteilte Zufallsvektoren im festgelegten Gebiet $W_n \oplus [-R, R]^2$. Diese Zufallsvektoren dienen uns als Keime unseres Booleschen Modells. Die Keime markieren wir unabhängig mit gemäß Q verteilten, konvexen und kompakten Mengen, wobei wir verschiedene Verteilungen Q betrachten werden. Die Vereinigung all dieser Mengen bildet die Realisierung eines Booleschen Modells im Beobachtungsfenster.

Für jede so entstandene Realisierung berechnen wir die Zahl

$$Z_n := \sqrt{\frac{|W_n|_2}{\hat{\sigma}_{A,n}^2(u)}} \left(\hat{N}_{A,n}(u) - N_A \right).$$

Diese Zahl ist gemäß Satz 6.8 asymptotisch standardnormalverteilt. Bestimmen wir also für ein hinreichend großes Beobachtungsfenster genug solcher Zahlen, sollte ein Vergleich mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung möglich sein.

Wir fixieren in unserem Programm die Eingangsparameter $u = e_2$ und $W_n = [0, n]^2$. Für die Schätzung der asymptotischen Varianz benötigen wir außerdem die Kernfunktion

$$K(x) = (1 - \|x\|^2) \mathbb{1}_{B(0,1)}(x)$$

und die Bandbreitenfolge $b_n = n^{-2/3}$. Der zur Erzeugung der nachfolgenden Daten verwendete Python-Code steht unter dem Link <https://bit.ly/3hgKfEh> zum Download bereit.

Zunächst untersuchen wir das relativ einfache Boolesche Modell mit dem typischem Korn Ξ_0 in der Form

$$\mathbb{P}(\Xi_0 = [0, U] \times \{0\}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\Xi_0 = \{0\} \times [0, U]),$$

wobei U auf $[0, 2]$ gleichverteilt sein soll (siehe Abbildung 7.1). In diesem Modell gilt

$$N_A = \lambda - \frac{\lambda^2}{4}.$$

Schön an dieser sehr einfachen Markenverteilung ist, dass wir die asymptotische Varianz

$$\sigma_A^2(u) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{3}$$

mit Hilfe von Satz 4.5 explizit berechnen können. Wir können also exemplarisch untersuchen, wie gut die Schätzung ist, indem wir die Schätzwerte (siehe Tabelle, die angegebenen Werte zum jeweiligen λ und n sind der Mittelwert aus 50 Realisierungen) mit dem exakten Werten vergleichen:

n	$\lambda=1/8$ $\sigma_A^2(u) \approx 0,1139$	$\lambda=1/4$ $\sigma_A^2(u) \approx 0,2083$	$\lambda=1/2$ $\sigma_A^2(u) \approx 0,3542$
10	0,0966	0,1841	0,3716
20	0,1126	0,2003	0,3449
30	0,1164	0,2135	0,3720
40	0,1153	0,2106	0,3723
50	0,1157	0,2105	0,3647

Dabei lassen sich die folgenden Trends erkennen: Grundsätzlich verhält sich die Schätzung schon für relativ kleine Fenster ($n \geq 20$) sehr gut, erwartungsgemäß wird die Schätzung aber mit zunehmender Fenstergröße besser. Je größer die Intensität λ , desto schlechter ist die Schätzung. Außerdem scheint der Schätzer den wahren Wert $\sigma_A^2(u)$ zu überschätzen.

Als nächstes betrachten wir ein Boolesches Modell mit typischem Korn

$$\Xi_0 = B(Re_1, R),$$

wobei R auf $[0, 1]$ gleichverteilt sein soll (siehe Abbildung 7.2). Dann gilt

$$N_A = \lambda \left(1 - \frac{\lambda\pi}{4} \right) e^{-\lambda\pi/3}.$$

Zum Abschluss betrachten wir ein Boolesches Modell mit typischem Korn

$$\Xi_0 = [0, A] \times [0, B],$$

wobei A, B i.i.d. auf $[0, 1]$ gleichverteilt sein sollen (siehe Abbildung 7.3). Dann gilt

$$N_A = \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{4} \right) e^{-\lambda/4}.$$

Alles in allem lässt sich festhalten, dass sich die Normalverteiltheit bei kleinem λ bei den verwendeten Fenstern gut nachweisen lässt. Das lässt den Schluss zu, dass in diesen Fällen auch die Schätzung der asymptotischen Varianz schnell konvergiert. Je größer jedoch λ ist, desto langsamer sind diese beiden Konvergenzen.

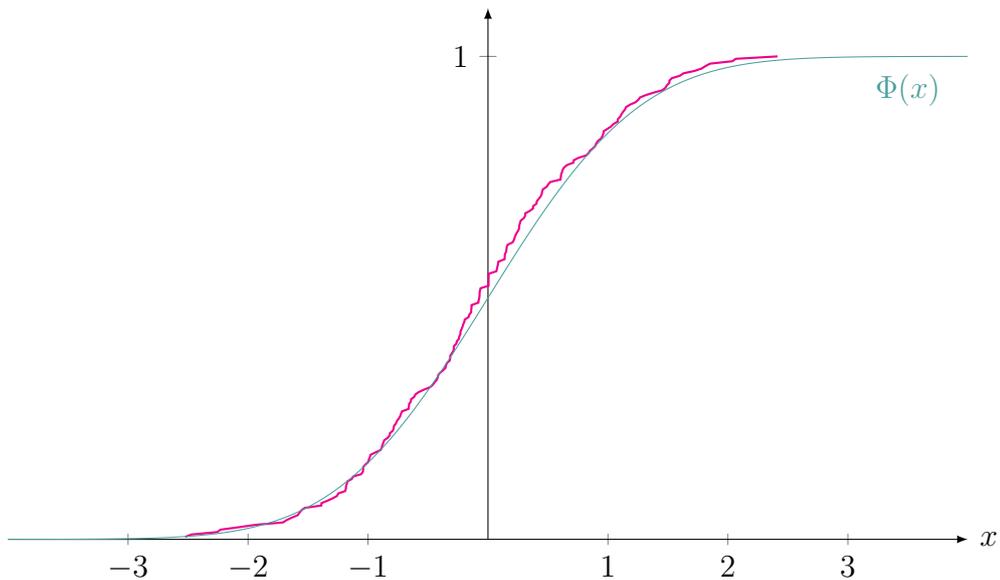
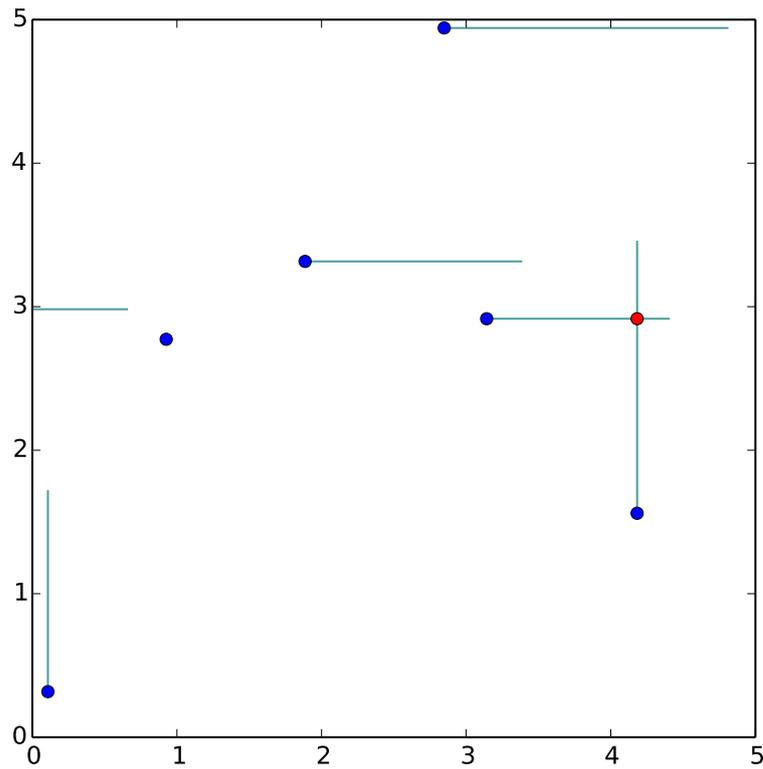


Abbildung 7.1: Untersuchung des Booleschen Modells mit $\lambda = 1/4$ und typischem Korn der Form $\mathbb{P}(\Xi_0 = [0, U] \times \{0\}) = 1/2 = \mathbb{P}(\Xi_0 = \{0\} \times [0, U])$, U gleichverteilt auf $[0, 2]$. Dargestellt ist eine beispielhafte Realisierung (oben). Aus den positiven Tangentenpunkten (blau) und negativen Tangentenpunkten (rot) in Richtung von $u = e_2$ lässt sich die spezifische EPC schätzen. Damit lässt sich die empirische Verteilungsfunktion (unten) aus $N = 200$ Realisierungen im Beobachtungsfenster $W_{30} = [0, 30]^2$ mit der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung vergleichen. Die Kolmogorov-Teststatistik hat den Wert 0,0529, man würde also den Test auf Normalverteiltheit nicht ablehnen können.

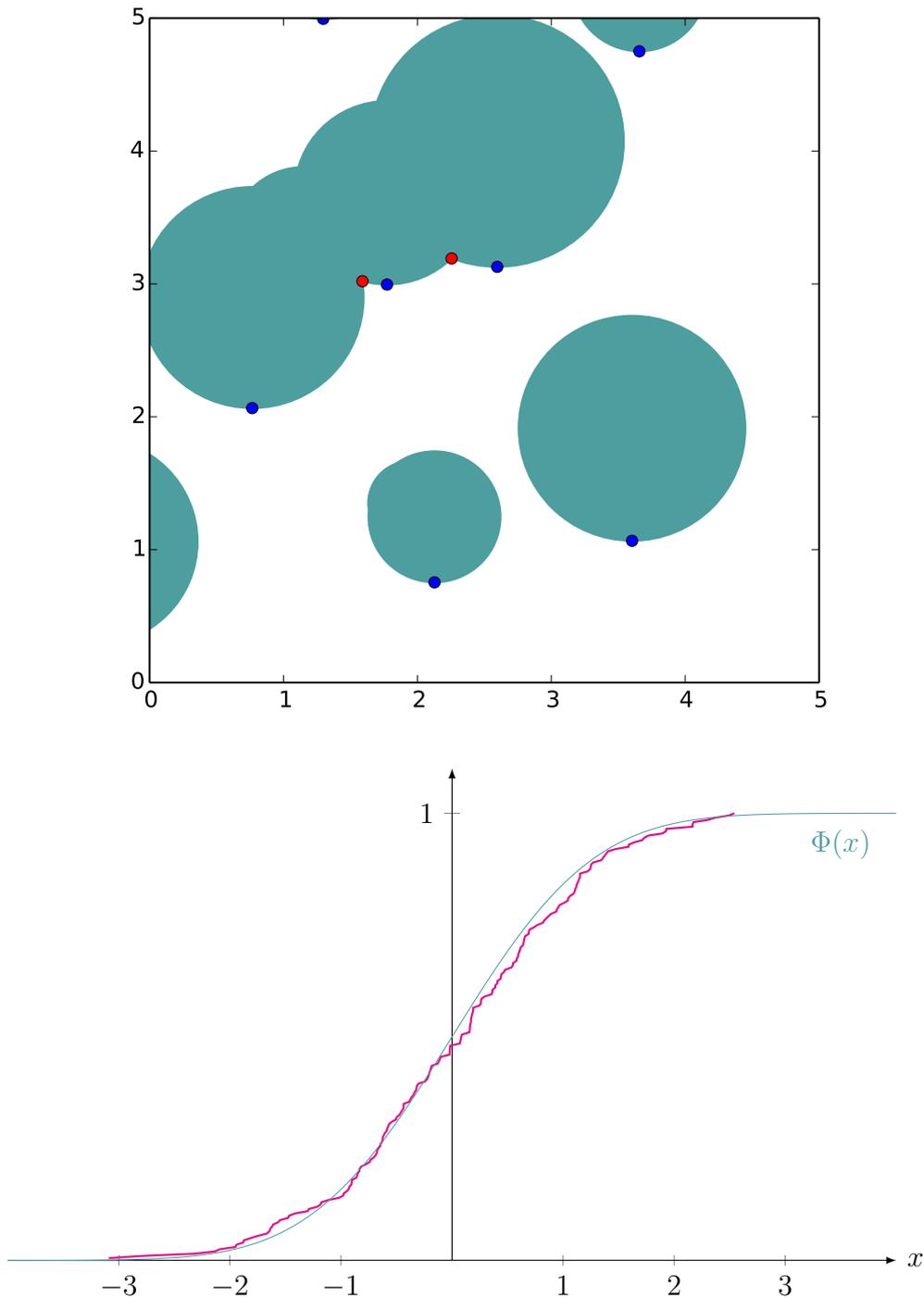


Abbildung 7.2: Untersuchung des Booleschen Modells mit $\lambda = 1/3$ und typischem Korn $\Xi_0 = B(Re_1, R)$, R gleichverteilt auf $[0, 1]$. Dargestellt ist eine beispielhafte Realisierung (oben). Aus den positiven Tangentenpunkten (blau) und negativen Tangentenpunkten (rot) in Richtung von $u = e_2$ lässt sich die spezifische EPC schätzen. Damit lässt sich die empirische Verteilungsfunktion (unten) aus $N = 200$ Realisierungen im Beobachtungsfenster $W_{30} = [0, 30]^2$ mit der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung vergleichen. Die Kolmogorov-Teststatistik hat den Wert 0,0567, man würde also den Test auf Normalverteiltheit nicht ablehnen können.

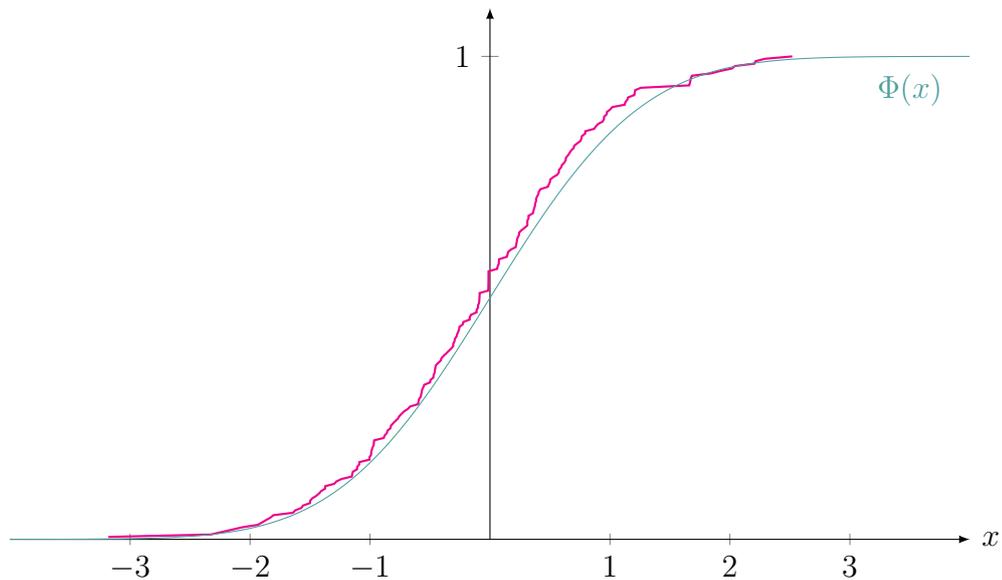
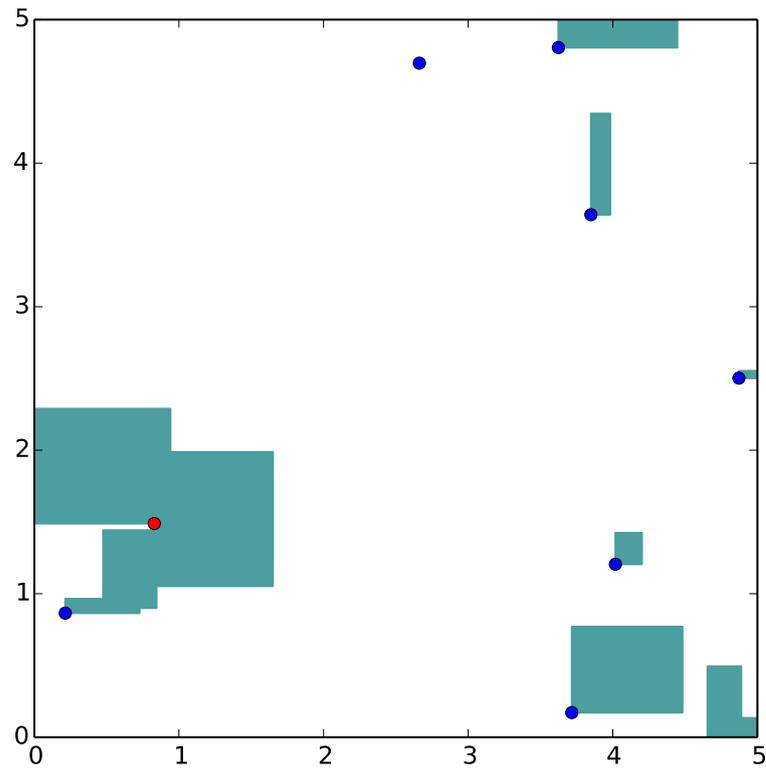


Abbildung 7.3: Untersuchung des Booleschen Modells mit $\lambda = 1/4$ und typischem Korn $\Xi_0 = [0, A] \times [0, B]$, A, B i.i.d. gleichverteilt auf $[0, 1]$. Dargestellt ist eine beispielhafte Realisierung (oben). Aus den positiven Tangentenpunkten (blau) und negativen Tangentenpunkten (rot) in Richtung von $u = e_2$ lässt sich die spezifische EPC schätzen. Damit lässt sich die empirische Verteilungsfunktion (unten) aus $N = 200$ Realisierungen im Beobachtungsfenster $W_{30} = [0, 30]^2$ mit der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung vergleichen. Die Kolmogorov-Teststatistik hat den Wert 0,0621, man würde also den Test auf Normalverteiltheit nicht ablehnen können.

Zum Abschluss wollen wir noch ein Keim-Korn-Modell mit nicht poissonischem Keim-Prozess untersuchen. Wir können hier leider keinen direkten Vergleich mehr mit der Standardnormalverteilung anstellen. Dies liegt daran, dass wir den Wert N_A nicht berechnen können. Satz 6.8 ist allerdings trotzdem wertvoll, da wir gemäß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\hat{N}_{A,n}(u) - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{A,n}^2(u)}{|W_n|_d}} z_{1-\alpha/2} \leq N_A \leq \hat{N}_{A,n}(u) + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{A,n}^2(u)}{|W_n|_d}} z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

Konfidenzintervalle konstruieren können.

Betrachten wir dazu exemplarisch einen Matérn-Prozess. Dabei handelt es sich um einen poissonischen Cluster-Prozess, der wie folgt entsteht: Zunächst erzeugen wir einen homogenen Poisson-Prozess mit Intensität λ , den sogenannten Primärprozess. Um jeden der so entstandenen Punkte legen wir einen Kreis mit Radius $r > 0$. In diesem Kreis erzeugen wir zufällig viele gleichverteilte Punkte. Die Anzahl der Punkte bestimmen wir jeweils durch die Realisierung einer poissonischen Zufallszahl mit Intensität μ . Alle so entstandenen Punkte (ohne die Primärpunkte) bilden die Realisierung eines Matérn-Prozesses. Diesen markieren wir unabhängig, um ein Keim-Korn-Modell zu erhalten (siehe Abbildung 7.4).

Zukünftige Arbeiten könnten den von uns konstruierten Schätzer mit den Schätzern aus [28], [33], [43] vergleichen. Im Gegensatz zu den Untersuchungen in diesem Kapitel, bei denen wir aus den konkreten Markenverteilungen exakt die Tangentenpunkte berechnen konnten, ist dies in der Praxis oft nicht der Fall. Dort liegen Bilder häufig nur digital vor, was bei der Anwendung zu zusätzlichen Randeffekten führt, denen gegebenenfalls Beachtung bei der Zählung geschenkt werden muss [27].

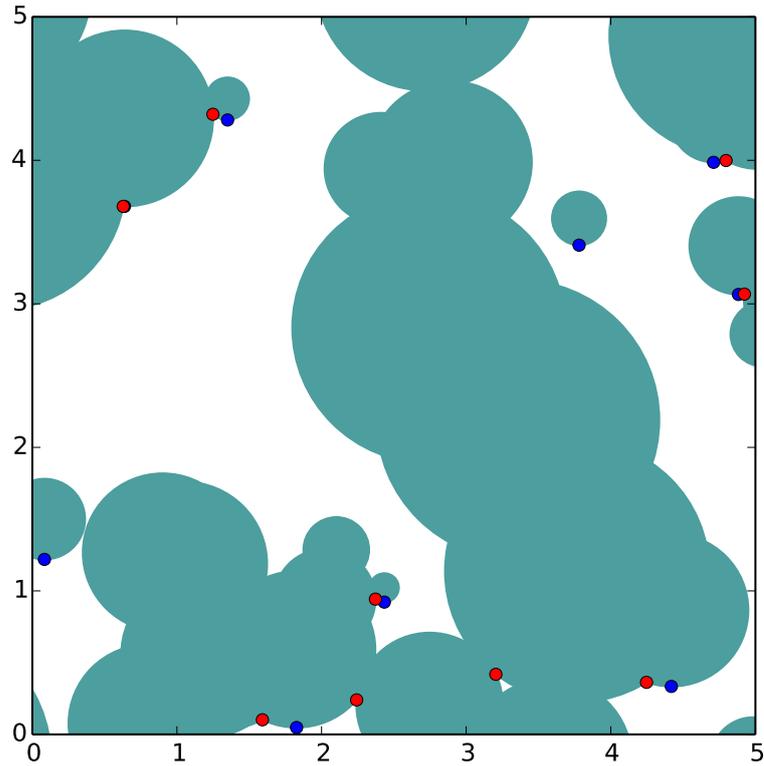


Abbildung 7.4: Untersuchung des aus einem Matérn-Prozess mit $\lambda = 1/3$, $r = 1$ und $\mu = 3$ entstandenen Keim-Korn-Modells mit typischem Korn $\Xi_0 = B(Re_1, R)$, R gleichverteilt auf $[0, 1]$. Die Zahl N_A lässt sich nicht mehr berechnen, wir können aber aus einer Realisierung ein asymptotisches Konfidenzintervall angeben. Im Fenster $W_{30} = [0, 30)^2$ erhalten wir in diesem Fall beispielhaft, dass asymptotisch $0,0404 \leq N_A \leq 0,1018$ mit Wahrscheinlichkeit $0,95$.

SYMBOLVERZEICHNIS

Symbol	Beschreibung	Seite
$\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$	Beschränkte Borel-Mengen des \mathbb{R}^d	3
Π_Λ	Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß Λ . Speziell $\Pi_{\lambda,Q}$: stationärer Poisson-Prozess mit Intensität λ und typischer Markenverteilung Q	4
$ B _d$	d -dimensionales Lebesgue-Maß der Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	5
\sum_{\neq}	Summation über paarweise verschiedene Indizes	7
$\gamma_{\text{red}}^{(k)}$	Reduziertes faktorielles Kumulantenmaß der Ordnung k	8
\mathcal{C}^d	Menge der kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d	9
\mathcal{F}^d	Menge der abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^d	9
\oplus	Minkowski-Summe	9
p	Volumenanteil	10
\mathcal{K}^d	Menge der nichtleeren, konvexen und kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d	12
\mathcal{R}^d	Konvexring	13
χ	Euler-Poincaré-Charakteristik	13
$\ell_u(K)$	Positiver Tangentenpunkt der Menge K in Richtung u	16
Ψ_u^+	Prozess der positiven Tangentenpunkte in Richtung u	17
Ξ_{ij}	$:= (X_i + \Xi_i) \cap (X_j + \Xi_j)$, analog Ξ_{ijk}	18
Ψ_u^-	Prozess der negativen Tangentenpunkte in Richtung u	19
$\Psi_{u,1}^-$	Erster Prozess der negativen Tangentenpunkte in Richtung u	20
$\Psi_{u,2}^-$	Zweiter Prozess der negativen Tangentenpunkte in Richtung u	20
W_n	Beobachtungsfenster	21
N_d	Intensität von $\hat{N}_{d,n}(u)$	21
$\hat{N}_{d,n}(u)$	Schätzer der spezifischen EPC in Dimension d	21
\mathcal{H}^{d-1}	$(d-1)$ -dimensionales Hausdorff-Maß	25
$\sigma_A^2(u)$	Asymptotische Varianz von $\hat{N}_{A,n}(u)$	31
$\sigma_+^2(u)$	Asymptotische Varianz von Ψ_u^+	31
$\sigma_-^2(u)$	Asymptotische Varianz von Ψ_u^-	31
$\rho(u)$	Asymptotische Kovarianz von Ψ_u^+ und Ψ_u^-	31
$U(x, \Xi_0)$	$:= \Xi_0 \cup (x + \Xi_0) _d$	32
$D_u(K, L)$	$:= K \oplus (-L) \setminus ((K^\circ - \ell_u(L)) \cup (-L^\circ + \ell_u(K)))$	32
$B(x, R)$	Abgeschlossener Ball mit Radius R um x	43
Φ	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	45
φ	Dichtefunktion der Standardnormalverteilung	49
$\ A\ $	$:= \sup_{a \in A} a $	67
$\hat{\sigma}_{d,n}^2(u)$	Schätzer der asymptotischen Varianz $\sigma_d^2(u)$	72

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aaronson, J.; Gilat, D.; Keane, M. und de Valk, V. (1989). An algebraic construction of a class of one-dependent processes. *The Annals of Probability*, 17(1), S. 128 – 143.
- [2] Adler, R. J. (1981). *The Geometry of Random Fields*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [3] Adler, R. J. (2000). On excursion sets, tube formulas and maxima of random fields. *The Annals of Applied Probability*, 10(1), S. 1 – 74.
- [4] Ballani, F. (2006). On second-order characteristics of germ-grain models with convex grains. *Mathematika*, 53(2), S. 255 – 285.
- [5] Brillinger, D. R. (1975). Statistical inference for stationary point processes. *Stochastic Processes and Related Topics*, 1, S. 55 – 99.
- [6] Chen, L. H. Y. und Shao, Q.-M. (2004). Normal approximation under local dependence. *The Annals of Probability*, 32(3), S. 1985 – 2028.
- [7] Cramér, H. (1938). Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. *Actualités scientifiques et industrielles*, 736, S. 5 – 23.
- [8] Eckhoff, J. (1980). Die Euler-Charakteristik von Vereinigungen konvexer Mengen im \mathbb{R}^d . *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 50(1), S. 135 – 146.
- [9] Götze, F. und Hipp, C. (1990). Local limit theorems for sums of finite range potentials of a Gibbsian random field. *The Annals of Probability*, 18(2), S. 810 – 828.
- [10] Hadwiger, H. (1955). Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 194, S. 101 – 110.
- [11] Hadwiger, H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer.
- [12] Hadwiger, H. (1968). Eine Schnittrekursion für die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder mit Anwendungen innerhalb der kombinatorischen Geometrie. *Elemente der Mathematik*, 23, S. 121 – 132.
- [13] Heinrich, L. (1986). Stable limit theorems for sums of multiply indexed m -dependent random fields. *Mathematische Nachrichten*, 127(1), S. 193 – 210.
- [14] Heinrich, L. (1987). Asymptotic expansions in the central limit theorem for a special class of m -dependent random fields. I. *Mathematische Nachrichten*, 134(1), S. 83 – 106.
- [15] Heinrich, L. (1990). Asymptotic expansions in the central limit theorem for a special class of m -dependent random fields II - Lattice case. *Mathematische Nachrichten*, 145(1), S. 309 – 327.

- [16] Heinrich, L. (1990). Some bounds of cumulants of m -dependent random fields. *Mathematische Nachrichten*, 149(1), S. 303 – 317.
- [17] Heinrich, L. (1992). On existence and mixing properties of germ-grain models. *Statistics*, 23(3), S. 271 – 286.
- [18] Heinrich, L. (1994). Normal approximation for some mean-value estimates of absolutely regular tessellations. *Mathematical Methods of Statistics*, 3(1), S. 1 – 24.
- [19] Heinrich, L. (2013). Asymptotic methods in statistics of random point processes. *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*, S. 115 – 150.
- [20] Heinrich, L. (2018). Brillinger-mixing point processes need not to be ergodic. *Statistics & Probability Letters*, 138, S. 31 – 35.
- [21] Heinrich, L. und Molchanov, I. (1999). Central limit theorem for a class of random measures associated with germ-grain models. *Advances in Applied Probability*, 31(2), S. 283 – 314.
- [22] Heinrich, L. und Pawlas, Z. (2013). Absolute regularity and Brillinger-mixing of stationary point processes. *Lithuanian Mathematical Journal*, 53(3), S. 293 – 310.
- [23] Heinrich, L. und Prokešová, M. (2010). On estimating the asymptotic variance of stationary point processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 12(3), S. 451 – 471.
- [24] Heinrich, L. und Werner, M. (2010). Strongly consistent estimation in Wicksell's corpuscle problem in case of occluded spheres. *Advances and Applications in Statistical Sciences*, 4(2), S. 89 – 119.
- [25] Hug, D.; Last, G. und Schulte, M. (2016). Second-order properties and central limit theorems for geometric functionals of Boolean models. *The Annals of Applied Probability*, 26(1), S. 73 – 135.
- [26] Jernot, J.-P.; Jouannot, P. und Lantuéjoul, C. (2007). Unbiased estimators of specific connectivity. *Image Analysis & Stereology*, 26(3), S. 129 – 136.
- [27] Kellerer, A. M. (1985). Counting figures in planar random configurations. *Journal of Applied Probability*, 22(1), S. 68 – 81.
- [28] Klenk, S.; Schmidt, V. und Spodarev, E. (2006). A new algorithmic approach to the computation of Minkowski functionals of polyconvex sets. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 34(3), S. 127 – 148.
- [29] König, D. und Schmidt, V. (1992). *Zufällige Punktprozesse: Eine Einführung mit Anwendungsbeispielen*. Teubner-Skripten zur Mathematischen Stochastik. Teubner.
- [30] Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons.
- [31] Molchanov, I. (1995). Statistics of the Boolean model: from the estimation of means to the estimation of distributions. *Advances in Applied Probability*, 27(1), S. 63 – 86.

- [32] Molchanov, I. und Stoyan, D. (1994). Asymptotic properties of estimators for parameters of the Boolean model. *Advances in Applied Probability*, 26(2), S. 301 – 323.
- [33] Mrkvička, T. und Rataj, J. (2008). On the estimation of intrinsic volume densities of stationary random closed sets. *Stochastic Processes and their Applications*, 118(2), S. 213 – 231.
- [34] Nguyen, X. X. und Zessin, H. (1979). Ergodic theorems for spatial processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 48(2), S. 133 – 158.
- [35] Ohser, J. und Nagel, W. (1996). The estimation of the Euler-Poincare characteristic from observations on parallel sections. *Journal of Microscopy*, 184(2), S. 117 – 126.
- [36] Pantle, U.; Schmidt, V. und Spodarev, E. (2006). Central limit theorems for functionals of stationary germ-grain models. *Advances in Applied Probability*, 38(1), S. 76 – 94.
- [37] Pantle, U.; Schmidt, V. und Spodarev, E. (2010). On the estimation of integrated covariance functions of stationary random fields. *Scandinavian Journal of Statistics*, 37(1), S. 47 – 66.
- [38] Schmidt, V. und Spodarev, E. (2005). Joint estimators for the specific intrinsic volumes of stationary random sets. *Stochastic Processes and their Applications*, 115(6), S. 959 – 981.
- [39] Schneider, R. (1993). *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.
- [40] Schneider, R. und Weil, W. (2000). *Stochastische Geometrie*. Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik. Vieweg+Teubner Verlag.
- [41] Schneider, R. und Weil, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Probability and Its Applications. Springer.
- [42] Schwandtke, A.; Ohser, J. und Stoyan, D. (1987). Improved estimation in planar sampling. *Acta Stereol*, 6(2), S. 325 – 334.
- [43] Spodarev, E. und Schmidt, V. (2005). On the local connectivity number of stationary random closed sets. *Mathematical Morphology: 40 Years On*, S. 343 – 354.
- [44] Volkonskii, V. und Rozanov, Y. A. (1959). Some limit theorems for random functions. I. *Theory of Probability & Its Applications*, 4(2), S. 178 – 197.
- [45] Yoshihara, K.-I. (1976). Limiting behavior of U-statistics for stationary, absolutely regular processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 35(3), S. 237 – 252.