Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Sabrina Bersch

Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht

Explorative Studien zu Herausforderungen und Lösungsansätzen aus der Perspektive von Lehrkräften

MOREMEDIA

Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Sabrina Bersch

Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht

Explorative Studien zu Herausforderungen und Lösungsansätzen aus der Perspektive von Lehrkräften

Springer Spektrum

Sabrina Bersch
Universität Augsburg
Augsburg, Deutschland

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr. rer. nat., eingereicht an der Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Universität Augsburg im Mai 2022
Erstgutachter: Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Zweitgutachter: Prof. Dr. Hans-Stefan Siller
Datum der mündlichen Prüfung: 13. Oktober 2022

ISSN 2523-8604 ISSN 2523-8612 (electronic)
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-40968-5 ISBN 978-3-658-40969-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort des Erstgutachters

Sowohl aus der Perspektive der Allgemeinbildung wie aus derjenigen der Propädeutik für ein Mathematikstudium stellt Argumentieren eine zentrale Kompetenz dar, die der Mathematikunterricht vermitteln soll. Folgerichtig messen die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz und die Lehrpläne der Bundesländer dem Argumentieren große Bedeutung bei. Trotzdem zeigt ein Blick in die unterrichtliche Praxis, dass das Argumentieren insbesondere gegenüber dem Rechnen oft recht kurz kommt. Woran liegt das und welche Ansätze könnten helfen, mögliche Schwierigkeiten zu überwinden? Genau diesen Fragen widmet sich Frau Bersch in ihrer Arbeit.

Nach der gründlichen Darstellung der theoretischen und methodischen Grundlagen gliedert sich die empirische Arbeit in zwei Phasen: In der ersten Phase wird durch Lehrer*innen-Interviews ergründet, wie Lehrer*innen zum Argumentieren stehen, welchen Wert sie ihm beimessen und welche Schwierigkeiten sie dabei erleben. Aus den Ergebnissen dieser ersten Phase werden Hauptschwierigkeiten isoliert und in einer zweiten Phase eine Unterrichtseinheit in mehreren Varianten erstellt, die helfen soll, diese zentralen Schwierigkeiten zu überwinden. In einer zweiten Runde von Lehrer*innen-Interviews werden dann die Erfahrungen mit dieser Lerneinheit analysiert.

Dieses Vorgehen ist methodisch innovativ und interessant, weil es einen Weg darstellt, das Praxiswissen der Lehrkräfte für die didaktische Forschung nutzbar zu machen. Auf diese Weise kann eine größere Anzahl von Mathematikkursen in den Erkenntnisprozess eingehen, als wenn man auf der Ebene der Schüler*innen forschen würde. Die Lehrer*innen als Experten ihres Unterrichts reflektieren ihre Erfahrungen und diese prägen künftigen Unterricht. Um Veränderungen anzustoßen, ist es daher richtig, bei den Lehrkräften anzusetzen.

Die erzielten Ergebnisse beleuchten die Schwierigkeiten des Argumentierens in der Praxis sehr breit: obwohl viele Lehrkräfte dem Argumentieren einen großen Wert beimessen, berichten sie auch von Schwierigkeiten auf vielen Ebenen. Insbesondere die sprachlichen Herausforderungen, gerade auch beim schriftlichen Argumentieren werden als sehr großes Hindernis empfunden. Entsprechend setzt Frau Bersch mit der von ihr konzipierten und in mehreren Varianten ausgestalteten Lernumgebung an diesem Punkt an, indem sie Unterstützung bei der Versprachlichung anbietet. Außerdem wird besonderes Augenmerk auf die Differenzierungsmöglichkeiten gelegt. Die Rückmeldungen der Lehrkräfte in den Interviews der zweiten Phase bestätigen, dass diese konkreten Materialien hilfreich sind.

Es bleibt zu wünschen, dass diese Erkenntnisse in Zukunft genutzt werden, um das Argumentieren in weiteren Inhaltsbereichen, nicht nur in der Analysis, zu stärken. In diesem Sinne wünsche ich Leserinnen und Lesern dieses Bandes eine erkenntnisreiche Lektüre.

Augsburg
im Dezember 2022

Reinhard Oldenburg

Geleitwort des Zweitgutachters

Im (Unterrichts-)Fach Mathematik werden Begriffe wie Argumentieren, Begründen, Beweisen etc. selbstverständlich eingesetzt und auch ihre Beziehung zueinander wenig hinterfragt. Die Arbeit von Frau Bersch widmet sich einem Thema der Mathematikdidaktik, welches auf eine lange Tradition zurückblicken kann. Mitnichten bedeutet das aber, dass das Thema schon ausreichend forschungsspezifisch beleuchtet ist. Genau diesem Ansinnen widmet sich die vorliegende Dissertation von Frau Bersch, aus Perspektive der Lehrerprofessionalisierung.

Frau Bersch wählt dafür den Ansatz einer explorativen Interviewstudie. Die mit Lehrkräften durchgeführte Interviewstudie greift Inhalte des Analysisunterrichts auf und greift dabei auf das Verstehen von Lehrkräften zurück. Die so gewonnenen Einsichten werden genutzt, um einen theoretisch fundierten Unterrichtsvorschlag zu erstellen und diesen in der Praxis zu evaluieren. Damit ist die vorliegende Arbeit eng mit der Theorie-Praxis-Verzahnung im Bereich der Lehrkräftebildung verankert und leistet einen wichtigen Beitrag zum Schließen des Theorie-Praxis-Gaps, indem implizites Wissen von Lehrkräften wissenschaftlich nutzbar gemacht wird.

Durch das gewählte Vorgehen wird von Frau Bersch in den Abschnitten des Theoretischen Hintergrunds und des Forschungsstands zum Argumentieren zunächst der notwendige (wissenschaftliche) Hintergrund aufgearbeitet, um im zweiten Teil der Arbeit die Interviewstudie durchzuführen und ausführlich zu beschreiben und im dritten Teil die Entwicklung und Evaluation der Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht zu berichten, welche hier abschließend auch evidenzbasiert evaluiert wird.

Die Arbeit ist aus meiner Sicht auf einen ersten Blick ungewöhnlich aufgebaut, da er nicht notwendigerweise einer klassischen Gliederung entspricht. In den einzelnen Abschnitten wird dieser Eindruck jedoch deutlich relativiert und interessierte LeserInnen werden feststellen, dass es sich um eine kohärente Ausarbeitung in der Mathematikdidaktik handelt, die sich einer begründeten wissenschaftlichen Freiheit bedient.

Die vorliegende Promotionsarbeit von Frau Bersch leistet einen wesentlichen Beitrag zur Beforschung von Argumentationsprozessen im Analysisunterricht aus Perspektive von Lehrkräften. So eine Arbeit gab es bislang – zumindest meines Wissens – nicht und stellt einen neuartigen und interessanten Ansatz dar.

Es ist zu wünschen, dass dieses Buch nachhaltige Impulse für fachdidaktische Theoriebildung und fachdidaktische empirische Forschung zum mathematischen Argumentieren im Analysisunterricht entfaltet, sodass eine zukünftig gestärkte Förderung in der Schulpraxis stattfindet.

Würzburg
im Januar 2023

Hans-Stefan Siller

Danksagung

Auf der langen Reise vom ersten Kontakt mit der Mathematikdidaktik bis zum Abschluss meiner Promotion wurde ich von vielen Menschen inspiriert, begeistert, begleitet und unterstützt. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken. Es ist nicht möglich, all diese Menschen namentlich zu nennen und doch möchte ich ein paar von ihnen besonders hervorheben.

Der größte Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, von dem die Idee für diese Arbeit stammt, der ihre Entstehung begleitete und mir gleichzeitig alle Freiheiten ließ, die ich mir wünschen konnte, sodass aus dem Thema *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht* **mein** Thema wurde. So konnte ich unvoreingenommen meine explorativen Studien durchführen und meine eigene Sichtweise auf das mathematische Argumentieren über die Jahre hinweg entwickeln. Vielen Dank für die immer konstruktive, angenehme Zusammenarbeit, das regelmäßige Feedback und die großartige Unterstützung in vielerlei Hinsicht, nicht nur was die Promotion betrifft. Ich freue mich sehr, dass ich auch weiterhin mit dir zusammenarbeiten darf.

Außerdem danke ich Prof. Dr. Hans-Stefan Siller, der die Zweitbetreuung meiner Arbeit übernahm, mich aus der Ferne unterstützte, mich zum Oberseminar nach Würzburg einlud und zu meiner Prüfung nach Augsburg kam. Ebenso gilt mein Dank Prof. Dr. Wolfgang Schneider, der die Prüfungskommission komplettierte, großes Interesse an meiner Arbeit zeigte und mir ein Wiederentdecken der Linearen Algebra aus seiner eigenen Perspektive ermöglichte.

Meine Begeisterung für die Mathematikdidaktik entstand schon während meines Studiums in den Lehrveranstaltungen von Prof. Dr. Volker Ulm und Andreas Merkel. Der Gedanke an eine Promotion entwickelte sich dann während des Verfassens meiner Zulassungsarbeit zum Pascal'schen Dreieck, die durch Andreas

Merkel ermöglicht und begleitet wurde. Vielen Dank dafür und auch für viel konstruktiven Austausch während der gesamten Promotionszeit (und hoffentlich auch weiterhin), sowohl über mathematikdidaktische als auch über (fach-)sprachliche Themen.

Ein großer Dank gilt auch dem kompletten Team des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik für viele Gespräche, Gedanken, Denkanstöße und Einblicke in verschiedenste Bereiche der Mathematik(-didaktik) sowie für die Aufnahme in ein Team, in dem ich mich sehr wohl fühle. Ganz herzlich bedanke ich mich insbesondere bei Barbara Adleff für die gemeinsame Promotionszeit mit vielen Telefonaten und den stets konstruktiven, motivierenden und auch privaten Austausch. Du bist für mich von einer Kollegin zu einer echten Freundin geworden und ich freue mich schon, wenn ich mit dir auch deine Promotion feiern darf.

Ich bedanke mich auch bei den Lehrkräften, die an meinen beiden Studien teilnahmen und mit mir ihre wertvollen Unterrichtserfahrungen teilten, bei Jana für die ausdauernde Transkriptionsarbeit sowie bei Tanja, David und Rosalie für die wertvolle Unterstützung in vielerlei Hinsicht und das kritische Korrekturlesen meiner Arbeit.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meinem Mann Dominik und meinem Sohn Elias, die mich immer daran erinnern, dass es noch ein Leben abseits des Schreibtisches gibt, mir helfen, Energie zu tanken und auf andere Gedanken zu kommen, und gleichzeitig viele Stunden auf mich verzichteten, damit ich diese Arbeit schreiben konnte. Meinen Eltern danke ich dafür, dass sie schon mein ganzes Leben an mich glauben, mich unterstützen und – genauso wie meine Schwiegereltern – viel Oma- und Opa-Zeit mit Elias verbrachten, um mir so den Rücken freizuhalten.

Ohne euch alle wäre diese Arbeit nicht zu dem geworden, was ich nun in Händen halten und in mein Regal stellen darf. Vielen herzlichen Dank!

Sabrina Bersch

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden zunächst die Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* geklärt und in einem Modell zueinander in Beziehung gesetzt. Das mathematische Argumentieren wird dabei in einem weiten Sinne als Oberbegriff, das Begründen als spezielle Form des Argumentierens und das Beweisen als spezielle Form des Begründens verstanden. Auf dieser Grundlage werden zwei aufeinander aufbauende Studien vorgestellt, in denen das mathematische Argumentieren im Analysisunterricht aus der Perspektive von Lehrkräften untersucht wurde. Die erste ist eine explorative Interviewstudie mit Lehrkräften zur gegenwärtigen Situation des Argumentierens im Analysisunterricht. In dieser wurde das Begriffsverständnis der Lehrkräfte, ihre konkreten Unterrichtserfahrungen mit Blick auf das Argumentieren sowie ihre Haltung gegenüber dem Argumentieren analysiert. Der Fokus lag insbesondere auf Herausforderungen, denen Lehrkräfte und Lernende beim Argumentieren im Analysisunterricht begegnen. Die Heterogenität innerhalb von Lerngruppen und sprachliche Schwierigkeiten bei den Schülerinnen und Schülern stellten sich dabei als dominante Problemfelder heraus. Daran ansetzend wurden für die zweite Studie theoretische Grundlagen zur Differenzierung und Sprachförderung im Mathematikunterricht gelegt und eine differenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen in verschiedenen Versionen ausgearbeitet. Dafür wurden Aufgaben, Lösungsbeispiele und Formulierungshilfen entwickelt. In einer Evaluationsstudie wurde die Lernumgebung von Lehrkräften im Unterricht eingesetzt, mit anschließender Rückmeldung der Erfahrungen in schriftlichen Interviews. Dadurch konnten die Qualität der Lernumgebung sowie die Akzeptanz der Lehrkräfte für die entwickelten Materialien nachgewiesen werden.

Abstract

In this thesis, the German terms *Argumentieren, Begründen,* and *Beweisen* (in English approximately *argumentation, reasoning/justifying,* and *proving*) are elucidated and related to each other in a theoretical model. Thereby, mathematical argumentation is understood in a broad sense and functions as an umbrella term. Based on these considerations, mathematical argumentation in calculus classrooms was investigated from a teachers' perspective in two studies which are based on one another. The first study was an explorative interview study with teachers on the current situation of argumentation in calculus classrooms. The understanding of terms by the teachers, their teaching experiences related to argumentation, and their attitude towards argumentation were subjects of discussion. In particular, challenges teachers and students face concerning argumentation in calculus teaching and learning were analysed. Heterogeneity and language difficulties of students were found to be dominant problem areas. For this reason, theoretical considerations of differentiation and language support in mathematics teaching were implemented in a learning environment which is task-based, differentiating, and language supportive. Therefore, argumentation tasks with polynomial functions, worked-out examples, and writing assistance were designed. In a subsequent evaluative study, teachers used the learning environment in class and reported back on their experiences. Thus, the quality and teachers' acceptance of the learning environment could be proven.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Der, die, das.
Wer, wie, was?
Wieso, weshalb, warum?
Wer nicht fragt, bleibt dumm!
Tausend tolle Sachen, die gibt es überall zu seh'n.
Manchmal muss man fragen, um sie zu versteh'n.

(Intro der Sesamstraße)

Proof is respectability. Proof is the seal of authority. […] Proof is mathematical power, the electric voltage of the subject which vitalizes the static assertions of the theorems. Finally, proof is ritual, and a celebration of the power of pure reason.

(Davis et al. 2012, S. 167)

Warum beginnt die vorliegende Arbeit gerade mit diesen beiden Zitaten? Das Intro der Sesamstraße verdeutlicht eine fragende Grundhaltung, die Kinder im Zuge des Entdeckens der Welt und insbesondere kausaler Zusammenhänge irgendwann entwickeln (z. B. Oskar 2021, S. 267). Davis und Hersh beschreiben und rühmen eindrucksvoll das Konzept des Beweisens, das die Mathematik von anderen Wissenschaften unterscheidet. Was haben diese beiden so unterschiedlichen Zitate gemeinsam? Beide machen auf ihre ganz eigene Art und Weise auf die Bedeutung von Argumentationsprozessen aufmerksam. Die Beschäftigung mit **Warum**-Fragen ist schon für kleine Kinder wesentlich, um Zusammenhänge in unserer Welt zu hinterfragen und zu verstehen. Beweise in der wissenschaftlichen Disziplin der Mathematik stellen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Bausteinen mathematischer Theorie her und geben damit in ganz spezifischer Form Antwort auf Fragen nach dem **Warum**. Dazwischen liegt die Schulzeit mit

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_1

sehr vielen Mathematikstunden, in denen Schüler[1] die Welt der Mathematik kennenlernen und sich dabei im Idealfall häufig mit verschiedenen **Warum**-Fragen auseinandersetzen. Kannst du mir erklären, **warum** die Ableitung einer Funktion an einer lokalen Extremstelle immer gleich Null ist? **Warum** kann ich aber von einer Nullstelle der Ableitungsfunktion noch nicht sicher auf eine Extremstelle schließen? Auch wenn die Schüler dazu aufgefordert werden, selbst Fragen zu stellen, wird gezielt aktives Argumentieren gefördert (Storz 2018, S. 56 f.). Die Förderung der Kompetenz des (mathematischen) Argumentierens im weiten Sinne[2] ist ein ausdrückliches Ziel des Mathematikunterrichts. **Warum?** Dazu sollte der Leser spätestens nach der Lektüre dieser Arbeit und insbesondere des Abschnitts 2.3 mehrere gute Gründe anführen können.

Subjektive und unsystematische Unterrichtsbeobachtungen, Gespräche mit Lehrkräften und Mathematikdidaktikern sowie die Lektüre wissenschaftlicher Arbeiten ließen die Vermutung entstehen, dass das Argumentieren im Mathematik- und insbesondere im Analysisunterricht noch nicht in dem Maße und Umfang gefördert wird, wie es wünschenswert wäre. Beispielhaft ist hier die Aufforderung von Stylianides und Kollegen (2016) zu mehr Forschung diesbezüglich anzuführen:

> *[P]roof currently has a marginal place in ordinary mathematics classrooms. More research is needed on how to elevate the role of proof in ordinary classrooms and how to support teachers' work in enhancing students' understanding of proof. We thus argue that more intervention-oriented studies in the area of proof are sorely needed.*
>
> (Stylianides et al. 2016, S. 237)

Bevor jedoch Änderungen angestrebt werden können, ist es wichtig, die aktuelle Situation im Mathematikunterricht in Bezug auf das Argumentieren zu untersuchen und besser zu verstehen, **warum** Lehrkräfte das Argumentieren so in ihren Unterricht integrieren, wie sie es tun oder **warum** sie dies vielleicht nicht tun. Reid und Knipping (2010) formulieren diesbezüglich[3]:

---

[1] Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird in dieser Arbeit das generische Maskulinum verwendet, wenn andere Formulierungen keine gute Alternative darstellen. Gemeint sind immer alle Geschlechter.

[2] Der Begriff des *mathematischen Argumentierens* wird in dieser Arbeit in einem weiten Sinne gebraucht, der auch das Begründen und Beweisen umfasst (siehe Abschnitt 2.1.4).

[3] Da Reid und Knipping (2010, S. 28, S. 33) den Begriff *proof* für das Konzept des Beweisens als Oberbegriff verwenden, ist damit ein weites Beweisverständnis verbunden, sodass er im Zusammenhang dieser Arbeit auch mit *Argumentieren* übersetzt werden könnte.

> *Changes to how teachers teach proof must be based on a detailed understanding of how teachers now teach proof, and the context of that teaching, for that is where the process of change must begin.*
>
> (Reid/Knipping 2010, S. 217)

Deshalb besteht der Kern dieser Arbeit aus zwei aufeinander aufbauenden Teilen, deren Aufbau und Inhalt in Abschnitt 1.2 beschrieben wird. Zuvor werden in Abschnitt 1.1 der Fokus und verschiedene Ziele dieser Arbeit ausgeführt.

1.1 Fokus und Ziele der Arbeit

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf das mathematische Argumentieren als weit gefassten Kompetenzbereich, der auch das Begründen und Beweisen umfasst und im Mathematikunterricht gefördert werden soll. Hauptziel ist es dabei, durch eine explorative Interviewstudie mit Lehrkräften die aktuelle Situation rund um das mathematische Argumentieren im Analysisunterricht besser zu verstehen und die gewonnenen Einsichten anschließend zu nutzen, um einen theoretisch fundierten Unterrichtsvorschlag zu entwickeln und diesen wiederum von Lehrkräften in der Praxis testen und beurteilen zu lassen. So wird die Expertise von Lehrkräften in zweifacher Hinsicht genutzt. Erstens werden ihre alltäglichen Erfahrungen expliziert, um einen Einblick in die aktuelle Unterrichtspraxis mit Schwerpunkt auf Herausforderungen beim Argumentieren zu gewinnen. Zweitens wird ein theoriebasiert entwickeltes Unterrichtskonzept einem Praxistest unterzogen und dabei auch die Akzeptanz der Lehrkräfte für das Konzept untersucht. Die Interviews wurden zwischen Mai und August 2016 geführt, anschließend ausgewertet und als Grundlage für die Entwicklung einer Lernumgebung verwendet. Diese wurde im ersten Halbjahr des Schuljahres 2017/2018 von Lehrkräften im Unterricht eingesetzt. Der Einsatz wurde direkt im Anschluss durch schriftliche Interviews evaluiert.

Die beiden Studien sollen gleichzeitig beispielhaft aufzeigen, wie ein Austausch zwischen fachdidaktischer Forschung und unterrichtspraktischer Umsetzung in beide Richtungen gelingen kann. Dazu ist erstens eine klare, verständliche theoretische Grundlage nötig, die von beiden Seiten akzeptiert wird, zweitens eine Wertschätzung der Expertise der Lehrkräfte durch die Fachdidaktik, und drittens eine Akzeptanz und Bereitschaft zur Umsetzung von Ideen der Fachdidaktik seitens der Lehrkräfte.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es deshalb, eine theoretische Grundlage zum Begriffsfeld rund um *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* zu schaffen, indem verschiedene mögliche Verständnisse aus der Literatur zusammengestellt werden und das verwendete Verständnis für diese Arbeit begründet wird. Durch die Interviewstudie wird dieses mit dem Verständnis von Lehrkräften abgeglichen. Dies soll auch eine mögliche Grundlage für künftige wissenschaftliche Arbeiten darstellen und so die Kommunikation zwischen Fachdidaktikern und praktizierenden Lehrkräften im Bereich des mathematischen Argumentierens erleichtern.

Die theoretischen Auseinandersetzungen konzentrieren sich auf deutschsprachige Literatur mit gelegentlichen Ausblicken und Verweisen auf weiterführende englischsprachige Abhandlungen. Diese Einschränkung basiert auf mehreren Gründen. Beim Argumentieren handelt es sich um ein großes Forschungsfeld, das zurecht immer mehr an Bedeutung gewinnt, sodass eine internationale, umfassende Recherche die Möglichkeiten einer empirisch ausgerichteten Dissertation übersteigen würde. Außerdem haben regionale Besonderheiten, aktuelle bildungspolitische Vorgaben (und hoffentlich auch aktuelle didaktische Forschungsergebnisse) sowie kulturelle Prägungen großen Einfluss auf den zu untersuchenden Unterricht, sodass auch dadurch eine regionale Beschränkung ihre Berechtigung hat. Ein weiterer Grund für den Fokus auf deutschsprachige Literatur ergibt sich daraus, dass bei der Betrachtung der im Deutschen häufig gemeinsam genannten Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* und der im Englischen häufig gemeinsam genannten Begriffe *argumentation, reasoning* und *proof* viele kleine Feinheiten und Unterschiede in der Wortbedeutung, den Konnotationen und der Verwendung auffallen. Diese müssten erst aufgearbeitet werden, um Theorien zu diesen Begriffen überhaupt substantiell miteinander vergleichen zu können. Auch die klar erscheinende Entsprechung von *Beweis* und *proof* zeigt beim genaueren Lesen Unstimmigkeiten. Noch diffiziler wird es, wenn Konnotationen mit einbezogen werden. So scheint im Deutschen das enge Begriffsfeld rund um *Beweis* – im Gegensatz zu *Argumentieren* – teilweise negative Konnotationen bei Studierenden und Lehrkräften mit sich zu bringen, was sich beispielsweise in der vorliegenden Interviewstudie mit Lehrkräften zeigt (siehe Abschnitt 5.2) und im Begriffsverständnis von *Beweis* als strenge Form des Argumentierens begründet liegen könnte. Eine ähnliche Problematik ist im englischsprachigen Raum weniger zu vermuten, da dort *proof* häufig als Oberbegriff für das gesamte Feld des Argumentierens, Begründens und Beweisens verwendet wird, was sich beispielsweise schon am Titel des Überblickswerkes *Proof in Mathematics Education* von Reid und Knipping (2010) zeigt, das sich mit dem gesamten Feld des Argumentierens, Begründens und Beweisens im Bereich der Mathematikdidaktik beschäftigt, auch viele historische Arbeiten aufgreift und einen wichtigen Beitrag vor allem zur englischsprachigen Diskussion der Thematik bietet. Die Unterschiede in der Bedeutung der Begriffe in unterschiedlichen

Sprachen sowie zugehörige Konnotationen wären ein spannendes Feld für weitere Forschungen, das aus der vorliegenden Arbeit aus Kapazitätsgründen leider ausgeschlossen werden muss.

In den beiden theoretischen Abschnitten dieser Arbeit werden auf Grundlage dieser Gedanken alle für die beiden durchgeführten Studien als zentral betrachteten Überlegungen dargestellt und zumindest versucht, das Vorhandensein einer Forschungslücke zu begründen. Wer über mathematisches Argumentieren schreibt, dem muss klar sein, dass die Nicht-Existenz eines Objektes mit bestimmten Eigenschaften nicht mit Hilfe von Beispielen stichhaltig begründet werden kann. Vielmehr müsste mit einer All-Aussage argumentiert werden, wofür theoretisch alle in Frage kommenden Objekte überprüft werden müssten. Übertragen auf die vorliegende Arbeit heißt das, dass alle publizierten (und auch die noch nicht publizierten) Arbeiten gelesen und miteinbezogen werden müssten, um mit absoluter Sicherheit eine Forschungslücke aufzeigen zu können. Sollten dem Leser dieser Arbeit also wissenschaftliche Bemühungen bekannt sein, die er als relevant für die Arbeit einschätzt und trotzdem hier nicht wiederfindet, so bitte ich diesen Leser, mich darauf aufmerksam zu machen. Der Abschluss der Arbeit bedeutet nicht den Abschluss der Forschung an diesem umfassenden Thema, sondern vielmehr eine systematische Dokumentation der bisherigen Forschungsbemühungen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Für die vorliegende Arbeit wurde ein nicht ganz klassischer Aufbau gewählt, um den Charakter der beiden aufeinanderfolgenden Studien geeignet darstellen zu können (siehe Abb. 1.1).

Ein erster theoretischer Teil zum mathematischen Argumentieren und zum Forschungsstand ist Grundlage für beide Studien. Der zweite Teil umfasst die erste Studie, eine explorative Interviewstudie. Diese Studie ist Ausgangspunkt für den dritten Teil, der als Reaktion auf die Ergebnisse der Interviewstudie entstand. Ausgehend von diesen Ergebnissen ist deshalb ein weiterer Theorieteil nötig, der zwei Problembereiche theoretisch aufgreift, die sich in der Interviewstudie zeigten, und zusammen mit dem ersten Theorieteil die Grundlage für die zweite Studie darstellt. Im vierten Teil werden abschließend beide Studien zusammengeführt.

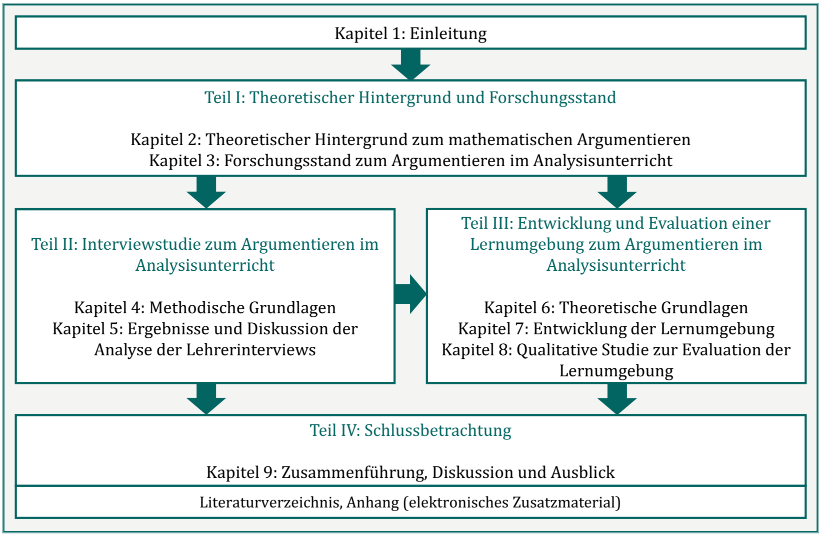


Abbildung 1.1 Aufbau der Arbeit

In **Kapitel 2** werden theoretische Grundlagen zu den Begriffen *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* zusammengestellt, das Begriffsverständnis für die vorliegende Arbeit aufgezeigt und daraus ein Modell entwickelt, das den Zusammenhang zwischen diesen Konzepten beschreibt. Des Weiteren wird das mathematische Argumentieren aus der Perspektive der Kompetenzorientierung betrachtet und seine Funktionen und seine Bedeutung in der mathematischen Disziplin sowie für Lernende im Mathematikunterricht herausgearbeitet. So ist das Argumentieren ein Bestandteil eines adäquaten Bildes von Mathematik, fördert den Erwerb mathematisch-inhaltlicher und überfachlicher Kompetenzen und bietet gleichzeitig Möglichkeiten zur Lernstandseinschätzung.

Kapitel 3 stellt den Forschungsstand zum Thema Argumentieren im Analysisunterricht mit Fokus auf der Perspektive von Lehrkräften dar. Dazu werden vier Studien mit unterschiedlichen Schwerpunkten präsentiert, eine US-amerikanische Studie zum formalen Beweisen aus der Perspektive von Lehrkräften (Knuth 2002a,b), eine italienische Studie zum Umgang von Lehrkräften mit dem Beweisen im Unterricht und dem zugehörigen *practical knowledge* (Furinghetti/Morselli 2011), eine deutsch-kanadische Studie zu Beweisprozessen in weiterem Sinne im

Bereich der Analysis (Grundey 2015) und eine Studie zu *beliefs* deutscher Lehrkräfte zum Analysisunterricht (Erens/Eichler 2013a,b; 2014; 2019; Eichler/Erens 2014; 2015). Aus der Zusammenschau dieser Studien wird eine Forschungslücke abgeleitet, welche die vorliegende Arbeit zu füllen versucht.

In **Kapitel 4** werden das Forschungsinteresse, der Forschungsgegenstand und die Forschungsfragen für die Interviewstudie mit Lehrkräften formuliert. Außerdem werden die genaue Interviewform und die Teilnehmer der Studie vorgestellt und die konkrete Durchführung und Transkription der Interviews beleuchtet. Das Kapitel zeigt zudem auf, wie die spezifische Form der qualitativen Inhaltsanalyse zur Auswertung der Interviewstudie in dieser Arbeit als Synthese aus den Theorien von Mayring und Kuckartz entwickelt wurde. Abschließend sind in Kapitel 4 Überlegungen zur Qualitätssicherung in der qualitativen Forschung enthalten und es wird aufgezeigt, welche Maßnahmen zur Qualitätssicherung der vorliegenden Interviewstudie getroffen wurden.

Kapitel 5 enthält die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse der Lehrerinterviews. Darin wird zuerst aufgezeigt, wie sich die befragten Lehrkräfte zu vorgelegten Schulbuchaufgaben äußerten. Des Weiteren wird das Begriffsverständnis der Lehrkräfte zum Argumentieren präsentiert, das sich in verschiedenen genannten Gegenständen, Auslösern und Ausgestaltungen des Argumentierens sowie in Aussagen zum Zusammenhang der Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* zeigt. Außerdem werden aus den Interviews übergreifende Tendenzen zur konkreten Umsetzung des Argumentierens im Unterricht der Befragten abgeleitet. Durch eine Vielfalt von genannten Gründen wird zudem aufgezeigt, dass die Lehrkräfte dem Argumentieren eine große Bedeutung beimessen. Trotzdem wurden zahlreiche verschiedene Herausforderungen beim mathematischen Argumentieren im Analysisunterricht genannt. Diese beziehen sich auf Rahmenbedingungen, das Unterrichten und Schwierigkeiten der Schüler sowie Probleme in Bezug auf die Schüler. Zwei herausragende Problemfelder sind hierbei die Heterogenität der Schüler und sprachliche Schwierigkeiten der Schüler. Das Kapitel enthält abschließend ein Zwischenfazit der Arbeit.

Kapitel 6 greift die beiden herausragenden Problemfelder aus Kapitel 5 auf und beleuchtet theoretisch die Konzepte der Differenzierung und der Sprachförderung im Mathematikunterricht. Dadurch wird die Grundlage gelegt, um auf die herausgearbeiteten Problemfelder zu reagieren. Die beiden zugehörigen Abschnitte 6.2 und 6.3 beginnen jeweils mit einer allgemeinen Darstellung der Theorie und werden dann enger, um auf die spezifischen Konzepte hinzuarbeiten, die für die Entwicklung der Lernumgebung in Kapitel 7 verwendet werden, nämlich Blütenaufgaben zur Differenzierung und Formulierungshilfen in Form von Wortspeichern und Satzbausteinen zur fokussierten Sprachförderung. Zudem wird in Kapitel 6 der Begriff der *Lernumgebung* theoretisch vorgestellt und die Idee des Arbeitens mit Lösungsbeispielen präsentiert, die ebenfalls in der Lernumgebung in Kapitel 7 Anwendung findet.

In **Kapitel 7** wird aufbauend auf den theoretischen Überlegungen in Kapitel 6 eine differenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen entwickelt, die in sechs konkret ausgearbeiteten Versionen vorliegt. Dazu werden drei Aufgaben zum Themengebiet *Ableitung ganzrationaler Funktionen* basierend auf einer überblicksartigen Schulbuchanalyse entwickelt und durch jeweils zwei Arten von Formulierungshilfen (Wortspeicher und Satzbausteine) ergänzt. Zudem werden zu jeder Version ein passendes vorangestelltes Lösungsbeispiel entwickelt und allgemeine Vorschläge zum Einsatz der Lernumgebung gemacht.

Eine qualitative Studie zur Evaluation der entwickelten Lernumgebung wird in **Kapitel 8** dargestellt. Es werden die Teilnehmer und die Methodik zur Datenerhebung und -auswertung beschrieben sowie anschließend die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse dargestellt und diskutiert. So wird untersucht, welche Versionen der Lernumgebung gewählt wurden, wie diese eingesetzt wurden und welche Erfahrungen die teilnehmenden Lehrkräfte mit den Aufgaben, dem Lösungsbeispiel, dem Differenzierungspotenzial und den Formulierungshilfen machten. Dadurch wird die Qualität der entwickelten Lernumgebung nachgewiesen und gleichzeitig eine Akzeptanz der entwickelten Unterrichtsvorschläge seitens der Lehrkräfte aufgezeigt.

In **Kapitel 9** werden schließlich die Ergebnisse beider Studien zusammengebracht und die wesentlichen Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zusammenfassend dargestellt und diskutiert. Dabei werden auch Grenzen der dargestellten Studien aufgezeigt. Zum Abschluss werden Anregungen für mögliche anschließende Untersuchungen gegeben.

Teil I

Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand

2 Theoretischer Hintergrund zum mathematischen Argumentieren

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen für die Konzeption einer Interviewstudie mit Lehrkräften (siehe Teil II) gelegt. Dazu werden erst die Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* geklärt und in einem Modell zueinander in Beziehung gesetzt. Anschließend wird das mathematische Argumentieren aus der Perspektive der Kompetenzorientierung betrachtet und die Bedeutung des Argumentierens aufgezeigt. Daraus werden schließlich Gründe abgeleitet, das mathematische Argumentieren als Kompetenz im Mathematikunterricht zu fördern.

2.1 Argumentieren, Begründen, Beweisen – Begriffsklärungen

Die Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* werden in der mathematikdidaktischen Literatur (und auch darüber hinaus) nicht einheitlich verwendet. Trotzdem wird die jeweilige Verwendung der Begriffe in wissenschaftlichen Arbeiten teilweise nicht grundlegend geklärt (Reid/Knipping 2010, S. xiii). Da dies das Verständnis theoretischer und empirischer Arbeiten und den Vergleich von Erkenntnissen erschwert (z. B. Stylianides et al. 2016, S. 238), soll in dieser Arbeit zunächst eine Begriffsklärung angestrebt und die für diese Arbeit eingenommene Position abschließend dargestellt werden. Dazu werden unterschiedliche theoretische Perspektiven vorgestellt und daraus abgeleitet, dass es sinnvoll ist, das mathematische Argumentieren im weiten Sinne als ein breites Feld von Aktivitäten zu verstehen und das Begründen als eine spezielle Form des Argumentierens in diesem Feld. Das Beweisen kann dann sinnvollerweise als ein Begründen mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften verstanden werden. Daraus ergibt sich das in der weiteren Arbeit verwendete Begriffsverständnis.

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_2

2.1.1 Argumentieren

Im Folgenden wird aufgezeigt, wie breit der Begriff des *Argumentierens* gebraucht wird und dass es demzufolge sinnvoll ist, diesen als Oberbegriff zum *Begründen* und *Beweisen* zu verwenden. Das Argumentieren ist prinzipiell keine mathematikspezifische Tätigkeit, sondern tritt auch in vielen anderen Kontexten und alltäglichen Situationen auf. Laut Brunner (2013, S. 99) geht der heute gebräuchliche Argumentationsbegriff auf Habermas (1999) zurück:

> Argumentation *nennen wir den Typus von Rede, in dem die Teilnehmer strittige Geltungsansprüche thematisieren und versuchen, diese mit Argumenten einzulösen oder zu kritisieren. Ein* Argument *enthält Gründe, die in systematischer Weise mit dem* Geltungsanspruch *einer problematischen Äußerung verknüpft sind.*
>
> (Habermas 1999, S. 38, Hervorhebungen im Original)

Zur expliziten Einschränkung des allgemeinen Argumentierens auf die spezielle Form des Argumentierens im Bereich der Mathematik kann der Begriff *mathematisches Argumentieren* verwendet werden. Wird das Argumentieren auf den Bereich der Mathematik eingegrenzt, so wirken sich Spezifika der Disziplin auf die Ausgestaltung des Argumentierens aus:

> *Mathematisches Argumentieren als besondere Form des Argumentierens bezieht sich auf Argumentieren innerhalb einer Domäne, die durch eine symbolische Sprache und innere Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten gekennzeichnet ist. Argumentieren innerhalb der Mathematik kann ausgestaltet sein als alltagsnahes Argumentieren durch die Verwendung von vorwissenschaftlichen Begriffen und bedeutet dann primär schlussfolgernde Spracharbeit […]. Argumentieren, das sich mathematischer Begrifflichkeiten […] und der entsprechenden mathematischen Fachsprache bedient […], wird hier als mathematisches Argumentieren bezeichnet.*
>
> (Brunner 2013, S. 109)

Das spezifisch mathematische am *mathematischen Argumentieren* ist bei Brunner also vor allem auf sprachliche Aspekte bezogen. Eine mehr inhaltsbezogene Klärung von (mathematischem) Argumentieren findet sich bei Bruder und Pinkernell (2011). Sie verstehen darunter „jegliche Aktivitäten des Suchens, Auswählens, Verwendens und des Beurteilens von Argumenten und deren Verknüpfungen in vielfältigen inner- und außermathematischen Zusammenhängen“ (ebd., S. 2 f.).

Bei Schwarzkopf (2000) bezieht sich das Argumentieren immer auf eine (begründungsbedürftige) mathematische Aussage, wobei „[u]nter einer Argumentation […] ein Kommunikationsprozeß verstanden [wird], in dem die Beteiligten einen Begründungsbedarf explizit anzeigen und zu befriedigen versuchen“ (ebd.,

S. 233). Wichtig im Verständnis von Schwarzkopf ist, dass der angezeigte Begründungsbedarf nicht durch eine Strittigkeit ausgelöst und die fokussierte Aussage nicht subjektiv begründungsbedürftig sein muss. Es ist ausreichend, wenn einer der Beteiligten eine Begründung explizit einfordert und dadurch eine Argumentation initiiert (ebd., S. 238). Somit kann auch die Richtigkeit einer Aussage, beispielsweise durch die Lehrkraft, gesichert sein, bevor eine Begründung eingefordert wird. „Man kann sagen, daß i. a. nicht *über* die Richtigkeit einer Aussage, sondern *für* die Richtigkeit einer Aussage argumentiert wird“ (ebd., S. 240, Hervorhebungen im Original).

Im Gegensatz dazu beziehen Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2011, S. 94 f.) auch die Argumentation *gegen* eine Aussage und in Ergänzung zu Aussagen als fokussierten Objekten auch Normen mit in ihre an Mittelstraß (2005, S. 201 f.) angelehnte Definition ein:

> *Infragestellen, Überprüfen und Begründen vollziehen sich auf dem Wege der Argumentation. Darunter verstehen wir eine Rede für oder gegen die Wahrheit einer Aussage bzw. für oder gegen die Gültigkeit einer Norm mit dem Ziel, die Zustimmung oder den Widerspruch wirklicher oder fiktiver Gesprächspartner zu dieser Aussage bzw. Norm zu erlangen. Dabei wird schrittweise und möglichst lückenlos auf bereits gemeinsam anerkannte Aussagen bzw. Normen zurückgegangen.*
>
> (Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 94 f.)

Damit ist diese Definition zum einen weiter gefasst als die von Schwarzkopf, da die Richtung der Argumentation für oder gegen eine Aussage noch nicht vorgegeben sein muss. Zum anderen wird sie aber eingeengt durch den Verweis auf eine schrittweise und möglichst lückenlose Vorgehensweise, die sich so bei Schwarzkopf nicht findet. Noch weiter ausgedehnt wird der Begriff des Argumentierens, wenn nicht nur Aussagen begründet oder widerlegt werden, sondern auch eine argumentative Untersuchung offener Fragen und das Bilden von Hypothesen eingeschlossen werden, wie bei Reiss und Ufer (2009):

> *Mathematisches Argumentieren ist dabei weit gefasst als eine Tätigkeit, die auf die Untersuchung und Absicherung von Hypothesen und offenen Fragen ausgerichtet ist. Insbesondere sind durchaus auch nicht-deduktive Formen der Argumentation miteingeschlossen wie Schlüsse durch Analogie, Metaphern, durch Abduktion oder durch Induktion. In dieser Form kann mathematisches Argumentieren ergebnisoffen sein in dem Sinne, dass in einer bestimmten mathematischen Situation eine als (plausible) Vermutung zu formulierende Regelmäßigkeit gesucht oder eine vorgegebene Vermutung auf ihre Plausibilität hin geprüft und gegebenenfalls angepasst bzw. korrigiert wird.*
>
> (Reiss/Ufer 2009, S. 157)

Das Argumentieren kann sich zudem nicht nur auf inner- sondern explizit auch auf außermathematische Zusammenhänge beziehen:

> *Beim Argumentieren in **außermathematischen Situationen** geht es vor allem um normative und um sinnstiftende Argumentationsprozesse, um das Rechtfertigen von Modellannahmen, das Interpretieren von Ergebnissen, das Bewerten der Gültigkeit oder Nützlichkeit eines Modells als Ganzem und das Treffen von Entscheidungen mit Hilfe des Modells.*
>
> (Büchter/Leuders 2005, S. 45, Hervorhebung im Original)

Der aus dem Kontext ersichtliche mathematische Hintergrund ermöglicht auch hier, das Argumentieren als *mathematisches* Argumentieren zu bezeichnen, auch wenn die verwendeten Argumente möglicherweise nicht nur rein mathematischer Natur sind.

In der bisherigen Darstellung wurden die Begriffe *Argumentieren*, *Argumentation* und *Argumentationsprozess* nicht voneinander abgegrenzt und gemäß den jeweiligen Autoren verwendet. Douek (2002, S. 304) unterscheidet in Anlehnung an das Webster Dictionary beim Begriffsverständnis des englischen Begriffs *argumentation* zwei Dinge: „The act of forming reasons, making induction, drawing conclusions, and applying them to the case under discussion“, also ein Prozessverständnis, und „the text produced through that process“, also ein Produktverständnis. Im Englischen ist es schwierig, unterschiedliche Begriffe für diese Unterscheidung heranzuziehen, im Deutschen aber ist das möglich: Im Folgenden soll das substantivierte Verb *Argumentieren* zur Beschreibung des Prozesses herangezogen werden und der Begriff der *Argumentation* soll sich auf das Produkt dieses Prozesses beziehen. Zur Beschreibung des Prozesses kann auch der Begriff *Argumentationsprozess* verwendet werden. Während dieses Prozesses und als Bestandteil des Produktes werden *Argumente* verwendet. Die obige Begriffsklärung des *Argumentierens* von Bruder und Pinkernell (2011) besteht sogar im Wesentlichen aus einem bloßen Rückbezug auf den Begriff des *Arguments*. Aber auch dieser wird nicht einheitlich verwendet, wie im Folgenden dargestellt wird.

Bei Toulmin (1996, 2003) ist der Begriff des Arguments durch seine logische Struktur bestimmt (siehe Abb. 2.1). Diese besteht erstens aus einer Behauptung (*Claim; Konklusion; K*), zweitens den Tatsachen, die als Grundlage für die Behauptung fungieren (*Datum; D*) und drittens einer Schlussregel (*Warrant; Regel; R*), die den Grund für den erlaubten Schluss von D auf K liefert (Toulmin 2003, S. 90 ff.; 1996, S. 88 f.)[1].

[1] Dieses sogenannte Toulmin-Schema hat sich in der Mathematikdidaktik häufig als hilfreich bei der Analyse von Argumenten erwiesen (z. B. Knipping 2003; Schwarzkopf 2000; Meyer 2007a).

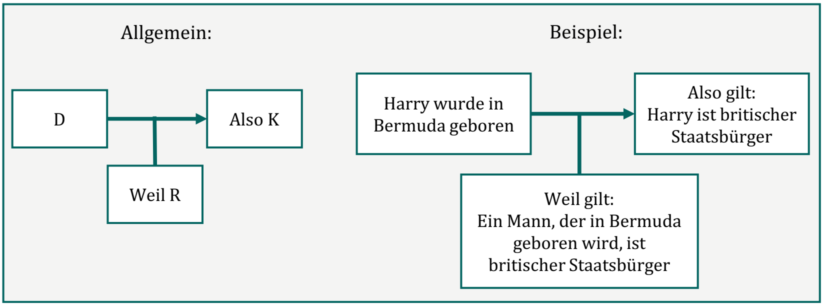
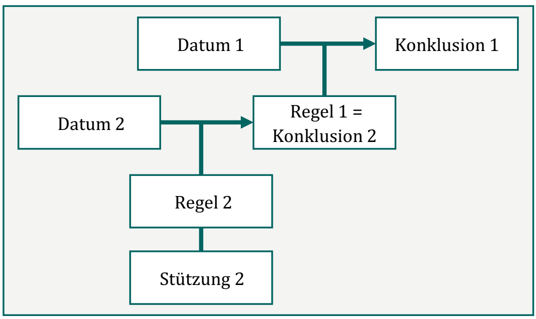


Abbildung 2.1 Toulmin-Schema (nach Toulmin 2003, S. 92)

In Ergänzung zu diesem Grundgerüst können außerdem modale Operatoren (*Qualifier*, z. B. „wahrscheinlich“, „vermutlich“) auftreten, die die Sicherheit des Schlusses relativieren können, und Ausnahmebedingungen (*Rebuttal*), die angeben, unter welchen Umständen das Argument nicht gültig ist. Außerdem kann die Schlussregel durch eine zusätzliche Stützung (*Backing*) abgesichert werden. Bedarf eine Schlussregel trotz Stützung einer weiteren Absicherung, so kann die Schlussregel selbst Konklusion eines weiteren Arguments sein, das ein eigenes Datum und eine eigene Schlussregel besitzt. Das komplette Argument wird dann von Meyer (2007a, S. 90) als *mehrschichtiges Argument* bezeichnet (siehe Abb. 2.2).

Abbildung 2.2 Mehrschichtiges Argument (nach Meyer 2007a, S. 90)



Fungiert die Konklusion eines Arguments als Datum für ein weiteres Argument, so werden beide Argumente zusammen von Meyer (2007a, S. 88 f.) als *mehrgliedriges Argument* mit zwei *Begründungsschritten* bezeichnet. Da gerade eine solch logische Aneinanderreihung von Argumenten eine komplette Argumentation, eine Begründung oder sogar einen Beweis (siehe Abschnitt 2.1.3 & 2.1.4) ergeben kann, werden solche Konstrukte in dieser Arbeit nicht als einzelne Argumente, sondern als *Ketten von Argumenten* bezeichnet. Dies steht auch in Einklang mit dem Begriffsverständnis von Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2011, S. 94 f.), die die einzelnen Schritte einer Argumentation als *Argumente* bezeichnen[2].

In der vorliegenden Arbeit wird das mathematische Argumentieren im weiten Sinne als eine Tätigkeit (aus der Perspektive der handelnden Person) oder ein Prozess (aus der Perspektive eines außenstehenden Beobachters) im Bereich der Mathematik verstanden. Dabei werden mit Hilfe logischer Schlüsse Argumente und damit Gründe für oder gegen Aussagen, Hypothesen, Zusammenhänge oder Meinungen gesucht, konstruiert, verwendet, zusammengestellt, verknüpft, rezipiert oder beurteilt. Dieser Prozess kann mündlich oder schriftlich ablaufen. Die betrachteten Inhalte können strittig sein oder das Argumentieren kann anderweitig aktiv initiiert werden (vgl. Schwarzkopf 2000). Die Position der agierenden Personen muss dabei nicht vorab geklärt sein, es können auch während des Prozesses erst Hypothesen gebildet oder untersucht werden. Welche Schlussregeln verwendet werden, ist nicht vorgeschrieben. So kommen Abduktion, Induktion oder Deduktion in Frage, aber beispielsweise auch Analogieschlüsse (vgl. Reiss/Ufer 2009). Um von einem *mathematischen* Argumentieren sprechen zu können, müssen die verwendeten Argumente mathematischen Ursprungs sein oder die zugrunde liegenden Inhalte in Zusammenhang zur Mathematik stehen. Ziel des Argumentierens kann es sein, sich selbst oder einen (möglicherweise fiktiven) Gesprächspartner von einer Position zu überzeugen oder die Wahrheit bzw. Rationalität einer mathematischen Aussage bzw. Entscheidung abzusichern. Die Produkte des Argumentierens werden als *Argumentationen* bezeichnet. In diesem breit angelegten Begriffsverständnis von Argumentieren im weiten Sinne kann das Argumentieren unterschiedlich ausgestaltet sein, verschiedene Gegenstände betreffen und verschiedene Auslöser haben. Im engeren Sinne, wenn bereits eine (als wahr vermutete) Hypothese gefunden ist, wird Argumentieren

[2] In der Literatur findet sich keine eindeutige Sichtweise, ob eine Argumentation (und damit auch eine Begründung und ein Beweis (siehe Abschnitt 2.1.4) immer aus einem Argument besteht oder sich aus mehreren Argumenten zusammensetzen kann. Teils verwenden Autoren sogar beide Verständnisse in ihren Ausführungen (z. B. Sill 2019, S. 210; Cramer 2018, S. 37, 42, 45).

in Anlehnung an Schwarzkopf (2000) als sozialer Prozess verstanden „bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diesen Begründungsbedarf zu befriedigen“ (ebd., S. 240).

Mögliche Ausgestaltung des Argumentierens
Die Ausgestaltung des Argumentierens im weiten Sinne kann unterschiedlich aussehen. Dies betrifft sowohl die Art des Argumentierens als Prozess als auch die Gestalt der Argumentation als Produkt (siehe Tabelle 2.1).

Tabelle 2.1 Arten des Argumentierens und Gestaltungsmöglichkeiten der Argumentation

Art des Argumentierens	Gestalt der Argumentation
Begründen (Wittmann 1974, S. 36; 1981, S. 55; Storz 2018, S. 27, S. 56; Sälzer et al. 2013, S. 54; Bürger 2000, S. 31; Wittmann 2018, S. 35)	Formal, axiomatisch (z. B. Beweis, Herleitung) (KMK 2012, S. 14; Storz 2018, S. 27, S. 56; Wittmann 2018, S. 35)
Beweisen (KMK 2012, S. 14; Wittmann 1981, S. 55; Storz 2018, S. 27, S. 56; Bürger 2000, S. 31; Wittmann 2018, S. 25)	Inhaltlich-anschaulich(e Begründung) (KMK 2012, S. 14; Wittmann 2018, S. 35)
Herleiten (Storz 2018, S. 56)	Ikonisch, mit Hilfe von Skizzen, Zeichnungen, Visualisierungen (Storz 2018, S. 27, S. 56, S. 61; Wittmann 2018, S. 35)
Erklären/Erläutern (Bürger 2000, S. 31; Wittmann 2018, S. 35)	Verbal, (umgangs-)sprachlich, mündlich (Storz 2018, S. 56, 61; Wittmann 2018, S. 35, Brunner 2013, S. 109; Schwarzkopf 2000, S. 240)
Folgern, Logisches Schließen (KMK 2012, S. 14; Wittmann 1974, S. 36; 1981, S. 55; Brunner 2013, S. 109; Reiss/Ufer 2009, S. 157; Jeannotte/Kieran 2017, S. 7)	Durch eine Rechnung (KMK 2012, S. 14; Schwarzkopf 2000, S. 237 f.)
Diskutieren (Schmidt-Thieme 2006, S. 81)	Mit Hilfe von Beispielen und Gegenbeispielen (Wittmann 1981, S. 55; Storz 2018, S. 56, S. 61; Bürger 2000, S. 31; Wittmann 2018, S. 35; KMK 2012, S. 14)

(Fortsetzung)

Tabelle 2.1 (Fortsetzung)

Art des Argumentierens	Gestalt der Argumentation
Gründe angeben (Bürger 2000, S. 31)	Schrittweise, lückenlos, vollständig (Storz 2018, S. 28; Wittmann 2018, S. 36; Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 94 f.)
Logisch einordnen (Wittmann 1974, S. 36)	Plausibilitätsbetrachtungen (Storz 2018, S. 56)
Rechtfertigen (Reiss/Ufer 2009, S. 158; Jahnke/Krömer 2020; Büchter/Leuders 2005, S. 45)	

Dabei sind stets verschiedene aktive und passive Aktivitäten im Zusammenhang mit Argumenten möglich wie das Nachvollziehen, Einsehen, Verstehen, Wiedergeben, Erläutern, Suchen, Auswählen, Entwickeln, Konstruieren, Nutzen, Verwenden, Anwenden, Prüfen, Bewerten, Beurteilen und Akzeptieren (KMK 2012, S. 14; Wittmann 1974, S. 36; 1981, S. 55; Ufer/Kramer 2015, S. 83; Storz 2018, S. 56; Bruder/Pinkernell 2011, S. 2 f.). Tabelle 2.1 zeigt die Breite des Spektrums auf, stellt aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Außerdem sind die einzelnen Kategorien nicht als disjunkt anzusehen. So können beispielsweise innerhalb von Begründungen logische Schlussfolgerungen gezogen werden oder es können Sachverhalte mit Hilfe einer Herleitung erklärt werden. Des Weiteren könnten manche Einträge durch leichte Modifikation in die andere Spalte aufgenommen werden. So kann das Herleiten als eine Art des Argumentierens angesehen werden und eine Herleitung ist eine Möglichkeit, wie eine Argumentation gestaltet werden kann. Nähere Ausführungen zu den verschiedenen Arten des Argumentierens finden sich in den nächsten Abschnitten dieser Arbeit.

Gegenstände und Auslöser des Argumentierens

Argumentationsprozesse können sich mit verschiedenen Gegenständen befassen und unterschiedliche Auslöser haben. Um die Breite dieses Spektrums aufzuzeigen, folgen nun einige Beispiele, wobei die Aufzählung keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Die Beispiele müssen sich auch nicht gegenseitig ausschließen, da beispielsweise verschieden starke Konkretisierungen möglich sind.

Argumentieren kann dadurch initiiert werden, dass mathematische Sätze, Formeln, Aussagen oder (inner-)mathematische Zusammenhänge hergeleitet oder begründet werden (Schwarzkopf 2000, S. 233; Reiss/Ufer 2009, S. 158; Bruder/Pinkernell 2011, S. 2 f.). Somit ist Argumentieren in den verschiedenen mathematischen Teilbereichen möglich und kann verschiedenste konkrete Inhalte betreffen. Das Argumentieren kann insbesondere auch dadurch ausgelöst werden, dass Vermutungen und Hypothesen aufgestellt und für die Mathematik charakteristische Fragen (z. B. „Gibt es…?“, „Wie verändert sich…“, „Ist das immer so?“) gestellt und untersucht werden (KMK 2004, S. 8; Storz 2018, S. 61; Reiss/Ufer 2009, S. 157).

Das Argumentieren kann auch im Rahmen der Lösung inner- und außermathematischer Probleme stattfinden, beispielsweise wenn die gefundene Lösung oder gezogene Schlüsse begründet werden (Ufer/Kramer 2015, S. 83; Sälzer et al. 2013, S. 54). Auch bei mathematischen Aufgaben, die nicht zwingend Problemstellungen sein müssen, kann bei der Präsentation von Lösungswegen argumentiert werden, wenn diese und die zugehörigen Lösungsstrategien beschrieben, erläutert, gerechtfertigt, reflektiert oder bewertet werden (Storz 2018, S. 56, S. 61; Wittmann 2018, S. 35; Reiss/Ufer 2009, S. 158; KMK 2004, S. 8). So kann auch das „Vorrechnen einer Aufgabe eine Argumentation dar[stellen], wenn es im Unterricht eine Funktion als Befriedigung eines Begründungsbedarfs erhält“ (Schwarzkopf 2000, S. 237).

Auch im Bereich des mathematischen Modellierens kann in vielfältiger Weise argumentiert werden. Dies kann unterschiedliche Bereiche des Modellierungskreislaufes betreffen, wie das Rechtfertigen rational getroffener Modellannahmen, das Zurückführen von Ergebnissen auf außermathematische Gründe oder Modellannahmen, das (begründete) Interpretieren von Ergebnissen, das (begründete) Bewerten der Gültigkeit und Nützlichkeit eines Modells als Ganzem, das Treffen von (begründeten) Entscheidungen mit Hilfe des Modells und das Vergleichen von Modellen mit Bewertung von Vor- und Nachteilen (Büchter/Leuders 2005, S. 45 f.).

Der Umgang mit im Unterricht auftretenden Fehlern bietet auch Potenzial für Argumentationsprozesse, „wenn jeweils begründet wird, worin genau der Fehler besteht und weshalb der Fehler ein Fehler ist“ (Storz 2018, S. 27). Auch nicht überzeugende Argumente beim Argumentieren können so wiederum Anlass für erneutes Argumentieren bieten (ebd., S. 28).

Schmidt-Thieme (2006) zeigt auf, dass auch „strittige Angelegenheiten in der Mathematik als Thema“ (ebd., S. 81) Ausgangspunkt für das Argumentieren sein können. Als Beispiele werden Diskussionen „über Rechenstrategien, über gelungene Erklärprozesse oder die Gültigkeit von Beweisen, über Vor- und Nachteile verschiedener Repräsentationen oder Symbolsysteme für unterschiedliche mathematische Handlungen“ (ebd.) genannt. Solche Situationen können unter anderem durch Gruppenarbeit oder Rechenkonferenzen initiiert werden (ebd.).

2.1.2 Begründen

In der Wissenschaftstheorie wird unter *Begründung* allgemein das „Angeben von Gründen als Antwort auf eine Warum-Frage“ (Apel 1989, S. 15) verstanden, dem auch der logisch-mathematische Beweis zugeordnet wird. Dabei gilt die Abgrenzung von Begründen und mathematischem Beweisen als schwierig. „Eine theoretische Behauptung (Aussage) oder praktische (normative) Orientierung heißt *begründet* genau dann, wenn sie gegenüber vernünftig argumentierenden Gesprächspartnern (Vernunft) zur Zustimmung gebracht werden kann“ (Mittelstraß 2005, S. 392). Das Begründen steht also sowohl im Zusammenhang zum Argumentieren als auch zum Beweisen.

Im Vergleich zu *Argumentieren* und *Beweisen* wird für den Begriff des *Begründens* in der mathematikdidaktischen Literatur jedoch selten direkt eine Begriffsbestimmung angestrebt. Wenn überhaupt wird das Begründen zum Argumentieren und Beweisen in Beziehung gesetzt oder mit Hilfe dieser Begriffe definiert (siehe auch Abschnitt 2.1.4). Dabei ist die Verwendung des Begriffs *Begründen*, wie auch bei den beiden anderen Begriffen, nicht einheitlich. Durch genaue Analyse der Formulierungen einzelner Autoren und deren Beispiele für Begründungsarten, -formen oder -typen lassen sich drei unterschiedliche Verwendungsarten herausarbeiten: das Begründen als „Zwischenform“, die eine spezielle Form des Argumentierens darstellt, während das Beweisen eine spezielle Form des Begründens ist; das Begründen als Tätigkeit beim Argumentieren und Beweisen, wobei Begründungen die Rolle von Argumenten übernehmen; und das Begründen als Oberbegriff zu *Argumentieren* und *Beweisen*, wobei das Begründen im Sinne von logischem Schließen verstanden wird.

Das Begründen als eine spezielle Form des Argumentierens und das Beweisen wiederum als spezielles Begründen zu sehen, stellt ein verbreitetes Verständnis des Zusammenhangs der Begriffe dar und wird für die vorliegende Arbeit übernommen (siehe Abschnitt 2.1.4). Die Abgrenzungen zwischen den Begriffen sind dabei überwiegend nicht strikt, sondern eher fließend und bei verschiedenen Autoren nicht einheitlich:

> *Auch das Begründen passt in diesen Zusammenhang [des Argumentierens und Beweisens]. Begründungen werden in der Regel weniger mit einer argumentativen Auseinandersetzung als mit der fundierten Darlegung einer Position verbunden. Dennoch kann das Begründen als ein Teilaspekt des Argumentierens gesehen werden. Begründungen haben nicht selten einen lokalen Charakter und/oder sind durch einen eher begrenzten Grad der Allgemeinheit gekennzeichnet.*
>
> (Reiss/Ufer 2009, S. 156)

> *Da der Begriff Beweisen häufig eng mit axiomatisch-deduktiver Erkenntnissicherung, mit formalem Charakter und mit Strenge der Schlussfolgerung verbunden ist, wird er oft ergänzt durch den breiteren Begriff* Begründen*, wenn auch andere Begründungsformen wie das inhaltlich-anschauliche Begründen mitgedacht sind. Die Abgrenzung zwischen Beweisen und Begründen verstehen wir dabei als graduell und nicht dichotom. Die soziale und kommunikative Dimension des Begründens wird mit dem Begriff des* Argumentierens *noch deutlicher akzentuiert.*
>
> (Meyer/Prediger 2009, S. 3)
>
> *Eine schlüssige Argumentation für eine Aussage bzw. Norm heißt eine Begründung derselben, im Falle einer Aussage auch ein* Beweis.
>
> (Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 95, Hervorhebung im Original)
>
> *Beim Argumentieren in* ***innermathematischen Situationen*** *[in Abgrenzung zum Argumentieren in* ***außermathematischen Situationen****] spricht man allgemein vom Begründen und je nach Strenge auch vom Beweisen, eine scharfe Grenze gibt es hier nicht.*
>
> (Büchter/Leuders 2005, S. 45, Hervorhebungen im Original)

Büchter und Leuders ziehen die Grenze zwischen Argumentieren und dem spezielleren Begründen an der Grenze zwischen inner- und außermathematischem Argumentieren. Bruder und Pinkernell (2011, S. 3) hingegen merken an, dass im Sinne der Bildungsstandards auch im Rahmen des Modellierens mathematisch *begründet* werden kann. Tietze (2000, S. 158 f.), der das Begründen unter Rückgriff der Definition von Mittelstraß (siehe oben) allgemein für unterschiedliche Wissenschaftsbereiche fasst, sieht das Beweisen im Mathematikunterricht als spezifisch mathematisches Begründen, das aus dem allgemeinen Begründen entwickelt werden soll.

Ein anderes Verständnis von *Begründen* zeigt sich bei Brunner (2014a, S. 29 ff.). Sie bezieht sich auf Duval (1991, S. 233), der im englischen Abstract seines Artikels *reasoning* als Oberbegriff für *deductive thinking* und *argumentation* verwendet, und übersetzt *reasoning* mit *Begründen*. Demzufolge ist in ihrem Modell das Begründen der Oberbegriff eines Kontinuums vom alltagsbezogenen Argumentieren über das Argumentieren mit mathematischen Mitteln und das logische Argumentieren mit mathematischen Mitteln hin zum formalen Beweisen. Auch in Brunners Darstellung des Argumentierens, Begründens und Beweisens in der Konzeption der TIMSS-Studie übersetzt sie den dort verwendeten Begriff *reasoning* mit *Begründen* (Brunner 2014a, S. 34). Laut der zugrunde liegenden Beschreibung in der Konzeption bei TIMSS beinhaltet *reasoning* „the capacity for logical, systematic thinking“ (Mullis et al. 2009, S. 45), was den Gebrauch als Oberbegriff für Argumentieren und Beweisen rechtfertigt, da beide

Tätigkeiten, genauso wie das Begründen, systematisches, logisches Denken beinhalten. Im Deutschen bietet sich jedoch eher die Übersetzung von *reasoning* mit *logischem Schließen* oder *logischem Denken* an[3] (vgl. Cramer 2018, S. 34). Als verschiedene Arten des Begründens führt Brunner (2014a, S. 41 ff.) Deduktion, Induktion und Abduktion an, sowie weitere Begründungsarten, wie das Berufen auf eine Autorität, den Analogieschluss und die Wahrscheinlichkeitsaussage. Auch dadurch wird ihre Interpretation von *Begründen* im Sinne eines logischen Schließens deutlich. Beispielsweise werden Deduktion, Induktion und Abduktion von anderen Autoren als *Schlussformen* bezeichnet (z. B. Meyer 2007a, S. 31). Das Verständnis des Begründens als logisches Schließen bei Brunner (2014a) legt somit die Verwendung von *Begründen* als Oberbegriff zu *Argumentieren* und *Beweisen* nahe.

Im Gegensatz dazu werden von manchen Autoren *Begründungen* oder *Begründen* als *Argumente* verstanden, was zu den verschiedenen Verständnissen von *Argument* zurückführt (siehe Abschnitt 2.1.1). So formuliert beispielsweise Sill (2019):

> *Begründen wird analog zum Beweisen in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Im weiteren Sinne steht es für die Angabe von Gründen, die sowohl als deduktive Argumente stichhaltig sein können als auch als nichtdeduktive Argumente nur für etwas sprechen, ohne es mit Sicherheit belegen zu können. Im engeren Sinne, insbesondere in der Mathematik, wird unter* begründen *[sic.] ein* deduktives Argument *verstanden.*
>
> (Sill 2019, S. 211, Hervorhebungen im Original)

Im ersten Teil dieser Begriffsklärung werden Argumente als Gründe verstanden, die beim Begründen angegeben werden. Im zweiten Teil ist das Begründen einem deduktiven Argument gleichgesetzt. Dies spricht entweder für zwei unterschiedliche Verwendungen des Begriffs *Argument* oder aber das Begründen ist im zweiten Fall nur ein Teilschritt einer Argumentation (oder eines Beweises), also die Realisierung eines Arguments, verstanden als logischer Schluss. Auch Storz (2018, S. 58) der Argumente als Teil einer Argumentationskette versteht, sieht Begründungen als spezielle, überzeugende Argumente und das Begründen als „Teilschritt des Argumentierens wie des mathematischen Beweisens" (ebd., S. 27). Er ist in dieser begrifflichen Verwendung aber nicht konsistent, da an anderer Stelle ein Beweis als eine spezielle Begründung beschrieben wird (ebd., S. 28). Das Begründen grenzt er vom Argumentieren dadurch ab, dass das Begründen, wie auch das

[3] In (Brunner 2013, S. 105) wird *reasoning* einmal mit *Argumentieren* und einmal mit *Schluss* übersetzt. Dies hat sich zu (Brunner 2014a, S. 29 ff., S. 34) hin geändert.

Beweisen, die Perspektive der Rückschau erfordert, während das Argumentieren für Lernende in der Perspektive der Vorschau möglich ist (Storz 2018, S. 57 f.).

Bruder und Müller (1983, S. 886 ff.) sehen das Begründen als einfachste Form des Beweisens, die das „mehrere Begründungsschritte umfassende Beweisen *vorbereiten* muß“ (ebd., S. 886, Hervorhebung im Original) und „*fester Bestandteil* und *ständiger Begleiter* des Beweisens in allen Klassenstufen bleibt“ (ebd., Hervorhebungen im Original). Somit besteht das Begründen aus dem Verfassen eines solchen Begründungsschrittes, was sich auch in den sogenannten *Grundtypen für Begründungen* äußert, die innerhalb von Beweisen die Rolle von *Grundbausteinen* übernehmen (ebd.).

Für Bruder und Pinkernell (2011, S. 3), die diese Grundtypen nach eigenen Angaben „vereinfachen“ ist das Begründen ein Bestandteil eines „Argumentierenkönnens“ und „komplexere, mehrschrittige Argumentationen“ können sich aus den Grundtypen zusammensetzen (ebd.). Ihr Verständnis von *Begründen* ist also ähnlich dem von Bruder und Müller (1983).

Bei den dargestellten expliziten Begriffsklärungen oder impliziten Begriffsverständnissen der unterschiedlichen Autoren wird nicht konsequent zwischen *Begründen* und *Begründung* unterschieden, teils wird einer der Begriffe, teils beide verwendet. So definiert beispielsweise Apel (1989, S. 15) *Begründung* als „Angeben von Gründen“, also als Tätigkeit, während Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2011, S. 95) eine *Begründung* als eine *Argumentation* und einen *Beweis* als eine *Begründung* beschreiben, sodass eine *Begründung* eher ein Objekt oder Produkt darstellt. Büchter und Leuders (2005, S. 45) setzen das *Begründen* zum *Argumentieren* und zum *Beweisen* ins Verhältnis, was für ein Verständnis als Aktivität oder Prozess spricht. Auch das Verständnis von *Begründen* im Sinne eines *logischen Schließens* bei Brunner (2014a, S. 29 ff.) legt eine Konzeption als Tätigkeit oder Prozess nahe. Im Gegensatz dazu versteht Sill (2019, S. 211) *Begründen* als *deduktives Argument*, also als Objekt oder Produkt.

In dieser Arbeit wird aufgrund der sprachlichen Form das *Begründen*, ein substantiviertes Verb, als Aktivität, Tätigkeit oder Prozess und die *Begründung*, ein Substantiv, als Produkt dieser Aktivität, dieser Tätigkeit oder dieses Prozesses verstanden, also im Sinne eines Objektes. Das *Begründen* wird im Einklang unter anderem mit Reiss und Ufer (2009), Meyer und Prediger (2009), Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2011) sowie Büchter und Leuders (2005) als „Zwischenform“ zwischen Argumentieren und Beweisen verstanden. Es stellt also eine spezielle Form des Argumentierens dar und fungiert als Oberbegriff zum Beweisen neben anderen Arten des Begründens. Auf die Abgrenzung zwischen Formen des Argumentierens, die ein Begründen darstellen, und anderen Formen, sowie auf die Abgrenzung zwischen dem Beweisen und anderen Begründungsformen wird in Abschnitt 2.1.4 näher eingegangen.

2.1.3 Beweisen

Im Gegensatz zum Begriff *Argumentieren* ist das Verständnis des Beweisbegriffs viel einheitlicher. Dennoch gibt es Unterschiede, vor allem in Bezug auf die Perspektive, aus der auf das Beweisen geblickt wird. Dies wird an den nachfolgend gelisteten Definitionen deutlich. Hanna (1990) gibt sogar drei unterschiedliche Definitionen bzw. Beschreibungen je nach Auffassung des Beweisens an:

> *1. Formal proof: proof as a theoretical concept in formal logic (or metalogic), which may be thought of as the ideal which actual mathematical practice only approximates.*
> *2. Acceptable proof: proof as a normative concept that defines what is acceptable to qualified mathematicians.*
> *3. The teaching of proof: proof as an activity in mathematics education which serves to elucidate ideas worth conveying to the student. […]*
> *A formal proof of a given sentence is a finite sequence such that the first sentence is an axiom, each of the following sentences is either an axiom or has been derived from preceding sentences by applying rules of inference, and the last sentence is the one to be proved. Such a proof is, in principle, mechanizable, and eliminates the psychological aspects of proof.*
>
> (Hanna 1990, S. 6)

> *Beweisen bedeutet, eine mathematische Aussage auf andere Aussagen zurückzuführen, und das können bereits bewiesene Sätze oder auch Axiome sein.*
>
> (Reiss/Hammer 2013, S. 47)

> *Unter dem Begriff „Beweisen" wird im mathematischen Sinne gemeinhin ein Vorgang verstanden, bei dem eine Behauptung in gültiger Weise Schritt für Schritt formal deduktiv aus als bekannt voraus gesetzten Sätzen und Definitionen gefolgert wird. Hierbei wird stillschweigend angenommen, dass dieser Vorgang bis zu den Grundlagen der betreffenden Theorie (etwa den Axiomen) zurückgeführt werden könnte, um somit letztlich die Richtigkeit einer Behauptung zu sichern.*
>
> (Meyer 2007a, S. 21)

> *Beweisen stellt hier den Anspruch, nach Kriterien der mathematischen Community letztendlich die Gültigkeit einer Behauptung abzusichern. Entsprechend zeichnet sich das Beweisen durch die bekannten Spezifika wie die ausschließliche Akzeptanz deduktiver Schlüsse und den expliziten Bezug auf eine Rahmentheorie aus. Letztere beinhaltet die verwendeten mathematischen Konzepte sowie deren genaue axiomatische Definition genauso wie daraus abgeleitete und akzeptierte Aussagen. Um die Erfüllung dieser Anforderungen im Beweistext transparent zu machen, wird in der Regel ein gewisser Grad an formaler Abfassung verlangt. Allgemein anerkannt ist dabei, dass eine vollständige Formalisierung eines Beweises auf streng axiomatischer Ebene meist nicht erreicht wird (Thurston, 1994). Weiterhin basiert die Akzeptanz eines Beweises in diesem Sinne gerade nicht auf festgeschriebenen Kriterien, sondern geschieht in einem sozialen Prozess, der beispielsweise im Peer-Review institutionalisiert sein kann.*
>
> (Reiss/Ufer 2009, S. 157 f.)

Unter einem Beweis soll in der vorliegenden Arbeit eine Folge von öffentlichen Geltungsansprüchen verstanden werden, in der schrittweise die Gültigkeit von mathematischen Aussagen begründet wird. Dieses Verständnis von Beweisen enthält drei wesentliche Aspekte: (1) Die Gültigkeit, d.h. die Wahrheit einer Aussage wird in einer Folge von Schritten begründet und dadurch wird bei jedem einzelnen Schritt ein Geltungsanspruch formuliert und begründet. (2) Geltungsansprüche sind eine öffentliche Angelegenheit, die Gültigkeit von Begründungen wird sozial ausgehandelt und ist durch eine soziale Gemeinschaft bestimmt. Was als Beweis akzeptiert bzw. nicht als Beweis akzeptiert wird, ist auch abhängig von der jeweiligen Gemeinschaft, in der ein Beweis formuliert wird. (3) Die Gültigkeit von Aussagen wird in mathematischen Beweisen nicht ausschließlich durch formale Deduktionen begründet. […]
So sind Beweise Begründungen mathematischer Inhalte, die an eine existierende wissenschaftliche Gemeinde adressiert und von dieser aufgenommen oder zurückgewiesen werden. Die Frage, was ein Beweis ist, lässt sich daher nicht trennen von der Frage, was zu einem gegebenen Zeitpunkt bezogen auf einen mathematischen Gegenstand sozial als Beweis gilt.

(Knipping 2003, S. 19; S. 29)

A proof only becomes a proof after the social act of "accepting it as a proof."

(Manin 1977, S. 48)

Weil das Beweisen eng mit der Disziplin der Mathematik, die sich als beweisende Wissenschaft versteht, verbunden ist, werden die Begriffe „Beweisen" und „Beweis" recht konsistent definiert und gemeinhin als deduktiver Vorgang interpretiert. Gerade weil der Begriff „Beweisen" eng mit dem formal-deduktiven Vorgehen verbunden und damit durch formale Strenge gekennzeichnet ist, wird in schulischen Kontexten häufig auf die Verwendung des Begriffs verzichtet und an dessen Stelle von „Begründen" oder „Argumentieren" gesprochen, ohne sich allerdings darüber im Klaren zu sein, wie sich diese drei Begriffe zueinander verhalten.

(Brunner 2014a, S. 29)

Proof *is a* mathematical argument, *a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:*
*1. It uses statements accepted by the classroom community (*set of accepted statements*) that are true and available without further justification;*
*2. It employs forms of reasoning (*modes of argumentation*) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and*
*3. It is communicated with forms of expression (*modes of argument representation*) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community.*

(Stylianides 2007, S. 291, Hervorhebungen im Original)

> *Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln. […]*
>
> *Es besteht weitgehender Konsens, dass sich ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht verbietet. Vom Beweisen bleibt dann der Anspruch übrig, dass Aussagen auf Gründe zurückgeführt werden sollen. Welche Gründe als akzeptabel gelten, hängt vom Entwicklungsniveau der Schülerinnen und Schüler ab und ist letztlich Sache des in einer Lerngemeinschaft vorgefundenen „geteilten Wissens" („shared knowledge"). Für didaktische Zwecke benutzt man daher einen offenen Begriff des Beweisens, bei dem nicht mehr auf den axiomatischen Aufbau rekurriert wird. […] Zur Beschreibung dieses Sachverhalts kann man den Begriff einer „Argumentationsbasis" heranziehen und darunter jene Annahmen verstehen, die einem Argument zugrunde liegen und die zum geteilten Wissen einer Lerngruppe gehören.*
>
> (Jahnke/Ufer 2015, S. 331; S. 333 f.)

An diesen ausgewählten Definitionen werden folgende Aspekte deutlich: Je nach Blickrichtung geht es beim Beweisen um eine Rückführung (z. B. Reiss/Hammer 2013) oder Folgerung/Herleitung (z. B. Meyer 2007a; Jahnke/Ufer 2015) einer zu beweisenden Aussage auf bzw. aus als wahr anerkannte(n) Aussagen. Dabei kann eine Prozess- oder eine Produktperspektive eingenommen werden (z. B. Reiss/Ufer 2009). Aus der Perspektive der wissenschaftlichen Mathematik gelten relativ einheitliche, streng-formale Kriterien für die Beweisprodukte (z. B. Meyer 2007a; Brunner 2014a). Außerdem spielt die sogenannte mathematische *community*, die Beweise als gültig akzeptieren muss, eine wichtige Rolle (z. B. Manin 1977; Hanna 1990; Knipping 2003). Das Beweisen ist eng mit dem Argumentieren und Begründen verwandt (z. B. Brunner 2014a, Knipping 2003), wobei das Verhältnis der Begriffe zueinander zu klären ist (siehe Abschnitt 2.1.4). Dieser Zusammenhang spielt vor allem im Kontext des Beweisens im schulischen Mathematikunterricht eine Rolle. Es besteht kein Konsens darüber, ob für das „Beweisen" in der Schule die breiteren Begriffe *Begründen* und *Argumentieren* verwendet (z. B. Brunner 2014a) oder andere Maßstäbe an den Beweisbegriff angelegt werden sollen (z. B. Stylianides 2007; Jahnke/Ufer 2015). Besonders in diesem Zusammenhang werden die Begriffe des *geteilten Wissens* und der *Argumentationsbasis* wichtig (z. B. Jahnke/Ufer 2015). Diese angesprochenen Aspekte sollen nun im Weiteren auch im Rückgriff auf weitere Autoren ausgeführt werden.

Prozess- und Produktperspektive
Von den meisten Autoren wird explizit oder implizit der Begriff *Beweisen* als Prozess, der Begriff *Beweis* als Produkt dieses Prozesses verstanden. Linneweber-Lammerskitten (2014) bezeichnet das Produkt beispielsweise als „spezifisch mathematische[…] Textsorte" (ebd., S. 186) und grenzt diese vom „Beweisen (als einem Prozess)" (ebd.) ab. Wittmann (2018) unterscheidet explizit zwischen „*Beweisfindung*, einem kreativen und problemlösenden Prozess […] und dem fertigen *Beweis* als dem Produkt dieses Prozesses" (ebd., S. 26, Hervorhebungen im Original). Dieses Produkt liegt üblicherweise in schriftlicher, verkürzter Form vor (Brunner 2013, S. 31; Tietze 2000, S 151). Wie Schmidt-Thieme (2009, S. 124) darstellt, repräsentiert der Beweis als Produkt die Außensicht auf die Mathematik während aus der Perspektive forschender Mathematiker der Beweisprozess wichtig ist. Im Englischen wird die Unterscheidung zwischen Prozess- und Produktperspektive ergänzt durch eine dritte Perspektive, die *concept of proof* genannt wird, also *proof* im Singular ohne Artikel verwendet, um auf ein Konzept zu verweisen, während für den Prozess, wie im Deutschen, das substantivierte Verb *proving* und für das Produkt entweder der Singular *the/a proof* mit Artikel oder der Plural *proofs* verwendet wird (z. B. Reid/Knipping 2010, S. 28, S. 33; Reid 2001, S. 360). Im Deutschen gestaltet sich dies sprachlich schwieriger. Reiss und Ufer (2009, S. 158) formulieren beispielsweise „das Konzept des ‚Beweises'", wobei durch die Verwendung des im Genitiv gebrauchten Substantivs *Beweis* eine sprachliche Abgrenzung von der Produktperspektive nur durch das Hinzufügen des Begriffs *Konzept* möglich ist.

Formale Kriterien für die Beweisprodukte
Eine rein formalistische Sichtweise auf das Beweisen, die mit einem Fokus auf die Produktperspektive einhergeht, hat sich vor allem in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts herausgebildet (Wittmann/Müller 1988, S. 238) und wird auch als traditionelle Beweisauffassung beschrieben (Brunner 2013, S. 30). Gemäß dieser Sichtweise werden Beweise beispielsweise als „rein logische[…] Ableitung von Begriffen aus Grundbegriffen und von Sätzen aus Axiomen" (Wittmann/Müller 1988, S. 238) verstanden, oder als „sequence of transformations of formal sentences, carried out according to the rules of the predicate calculus" (Hersh 1993, S. 391). Eine Beschreibung, was eine *vollständige Formalisierung der Mathematik* bedeutet, findet sich bei Mormann (1981): „[E]ine mathematische Theorie wird als ein formales System bedeutungsloser Zeichenreihen aufgefaßt, ein Beweis ist die Ableitung einer Zeichenreihe aus bereits vorhandenen mithilfe algorithmischer Ableitungsregeln" (Mormann 1981, S. 13). Laut Kempen (2019) zeichnet sich ein formaler Beweis „dadurch aus, dass er innerhalb eines

formalen Systems (i. S. von Tarski 1944) stattfindet, in ihm Symbole verwendet werden, die keine semantische Bedeutung tragen und als Schlussweisen nur spezielle logische Beziehungen zugelassen sind, welche sich auf Axiome gründen" (Kempen 2019, S. 28). Bei einem formalen Beweisverständnis liegt also der Fokus auf der Form des Beweises, sowohl in der äußeren Darstellung als auch insbesondere in der verwendeten Logik. Vohns (2015) spricht hier von einem *Idealtypus* des formal strengen mathematischen Beweisens, der „der deutlich facettenreicheren, unschärferen realen Praxis mathematischen Beweisens […] als ‚Grenzbegriff' gegenübersteht" (Vohns 2015, S. 124). Auch Hanna (1990, S. 6) versteht in der formalen Auffassung einen Beweis als theoretisches Konzept der formalen Logik, als ein Ideal, das nur angenähert werden kann. Formale Strenge bedeutet nach Meyer (2007a, S. 21) die schrittweise Überprüfbarkeit des Beweises. Nach Brunner (2014a, S. 9 f.) heißt *absolut streng*, dass Beweise in einer formal-deduktiven Darstellung vorliegen, was formal-symbolische und algebraische Darstellungsformen beinhaltet.

Einem solchen Idealtypus werden von den unterschiedlichen Autoren in ihren Definitionen und Begriffsklärungen weitere Merkmale zugeschrieben: In idealtypischen Beweisen werden logische Schlüsse verwendet, die spezifizierten Schlussregeln folgen, die durch ein Logiksystem gegeben sind (Meyer 2007a, S. 21; Brunner 2013, S. 30; Brunner 2014a, S. 55; Tietze 2000, S. 151; Vollrath/Roth 2012, S. 73; Jahnke/Ufer 2015, S. 331). Dabei sind nur deduktive Schlussformen zugelassen (Meyer 2007a, S. 21; Brunner 2013, S. 30; Brunner 2014a, S. 29; Stylianides et al. 2016, S. 238; Sill 2019, S. 210; Reiss/Ufer 2009, S. 157; Jahnke/Ufer 2015, S. 331; Storz 2018, S. 60; Reid 2001, S. 360; Vohns 2015, S. 125). Die verwendeten Schlüsse sind in Ketten von Argumenten und Folgerungen angeordnet (Brunner 2013, S. 108 f.; Schmidt-Thieme 2009, S. 124; Sill 2019, S. 210; Storz 2018, S. 28), die vollständig, lückenlos und minimal sein müssen (Mormann 1981, S. 13; Schmidt-Thieme 2009, S. 124; Wittmann 2018, S. 22; Storz 2018, S. 28). Daraus resultiert die Eigenschaft der Schlüssigkeit von mathematischen Beweisen (Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 95; Storz 2018, S. 28), was bedeutet, dass „niemand, der [den] Ausgangssätzen […] zugestimmt hat, irgendeinem [der] Schritte die Zustimmung verweigern kann, ohne sich in Widersprüche zu verwickeln" (Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 95). Die Grundlage für die Schlüsse innerhalb eines Beweises bildet immer eine axiomatische Rahmentheorie mit Definitionen und bereits bewiesenen Sätzen (Meyer 2007a, S. 21; Tietze 2000, S. 151; Vollrath/Roth 2012, S. 73; Reiss/Ufer 2009, S. 157; Jahnke/Ufer 2015, S. 331; Storz 2018, S. 57; Vohns 2015, S. 125). Dadurch dass die Schlüsse innerhalb von Beweisen zwingend sind und notwendigerweise immer gelten (Meyer 2007a, S. 26; Brunner 2014a, S. 55), können durch

Beweise die Richtigkeit und Wahrheit von Aussagen gesichert werden (Meyer 2007a, S. 21; Brunner 2013, S. 30; Reid 2006, S. 459).

Diese idealisierte Sichtweise auf das Beweisen, insbesondere mit Blick auf die Beweisprodukte, ist zwar nach wie vor präsent, wird aber, wie schon bei Hanna (1990) und Vohns (2015) (siehe oben) angedeutet, von einem gemäßigteren Blick auf die tatsächliche Praxis des Beweisens in der mathematischen Wissenschaft (und auch in der Schule, siehe unten) begleitet: „full formalization and complete formal proof, even if possible in principle, may be impossible in practice" (Hersh 1993, S. 390). Aufgrund dessen spricht Hanna von einer „reconsideration of what the ideal proof should be" (1990, S. 8). Jahnke und Ufer beschreiben die tatsächliche Praxis des Beweisens näher:

> *Vollständige mathematische Strenge ist also unerreichbar und nicht wünschenswert. Stattdessen beweist der praktizierende Mathematiker auf einem halbformalen Level, das anschauliche Argumente, Rückgriffe auf Diagramme und Beweislücken einschließt. Das Ideal einer vollständig formalisierten Schlusskette besteht nur dem Anspruch nach, indem der Mathematiker behauptet, auf Nachfrage einen informellen Beweisschritt in eine vollständig explizierte logische Schlusskette verwandeln zu können.*
>
> (Jahnke/Ufer 2015, S. 332)

Dass eine übertriebene Idealisierung der Formalisierung auch negative Konsequenzen haben kann, stellt Mormann (1981) dar: Die „rigorose formale Auffassung […] löst das Problem des Beweisens jedoch höchstens im Prinzip" (Mormann 1981, S. 14), denn in der Praxis könnte eine komplette Formalisierung zur Unübersichtlichkeit und damit zu möglichen Irrtümern führen und hätte „höchst unerwünschte wissenschaftshistorische Konsequenzen" (ebd.). Geht es also „um die Bedeutung des Beweisens im Alltag der wissenschaftlichen Mathematik oder der Schulmathematik, so wird eine strikt formale Konzeption des Beweisens nicht ausreichen" (ebd.). Deswegen ist eine zusätzliche sozial-kommunikative Perspektive auf das Beweisen, die dieses mehr aus der Prozessperspektive sieht, unabdingbar.

Sozial-kommunikative Perspektive auf den Beweisprozess

Aus sozial-kommunikativer Perspektive gilt Beweisen als kommunikativer Akt (Brunner 2014a, S. 55) und ein vermeintlicher Beweis wird erst durch einen sozialen Akt der Akzeptanz zum Beweis (Manin 1977, S. 48). Damit ein vermeintlicher Beweis also tatsächlich gültig ist, muss er „qualified judges" (Hersh 1993, s. 391), „qualified mathematicians" (Hanna 1990, S. 6), die „betreffende[…] Gemeinschaft" (Meyer 2007a, S. 26) oder die „mathematical community" (Stylianides et al. 2016, S. 238) überzeugen und von diesen anerkannt werden. „Durch das Aufschreiben eines Beweises wird ein Geltungsanspruch erhoben. Dieser wird von der Community geprüft und akzeptiert oder verworfen“ (Brunner 2013, S. 31), was beispielsweise durch ein Peer-Review-Verfahren verwirklicht werden kann (Reiss/Ufer 2009, S. 158). Das heißt aber auch, dass die Akzeptanz von der jeweiligen Gemeinschaft, deren Praktiken, deren Kriterien und deren festgelegter gemeinsamer Argumentationsbasis abhängt (ebd., S. 157; Meyer/Prediger 2009, S. 4; Knipping 2003, S. 19). Dabei muss die Gemeinschaft nicht zwingend nach formalen Kriterien urteilen, es sind auch inhaltliche Kriterien möglich (Knipping 2003, S. 29). Auch eine Lerngruppe im Mathematikunterricht kann eine solche *community* mit eigenen ausgehandelten Kriterien für Beweise darstellen. Diese sozialkonstruktivistische Perspektive legt Grundey (2015) ihrer Studie zugrunde (siehe Abschnitt 3.3). Stylianides (2007, S. 291, siehe oben) nimmt diese Abhängigkeit von der Gemeinschaft in seine Definition von *Beweis* auf, die er speziell für eine Lerngemeinschaft im Klassenzimmer formuliert, die aber durch Streichen des Begriffs *classroom* auf beliebige *communities* verallgemeinert werden könnte.

„Beweisen“ im Mathematikunterricht

Aus sozial-kommunikativer oder sozialkonstruktiver Perspektive (siehe oben) ist es möglich, die Lerngemeinschaft im Klassenzimmer als eigene *community* zu betrachten, die gemäß ihrem Entwicklungsstand und auf Basis ihres geteilten Wissens selbst aushandelt, was als gültiger Beweis gilt und was nicht. Beispielsweise kann statt formaler Strenge eine adressatengerechte Darstellung als Kriterium verwendet werden (Storz 2018, S. 57). Da im Mathematikunterricht keine axiomatische Theorie aufgebaut wird, „treten an die Stelle der Axiome meist anschaulich unmittelbar einsichtige Sätze“ (Tietze 2000, S. 157) oder es wird „die Beziehung einzelner Sätze zueinander“ (ebd.) geklärt. Dies geht auf die Idee des „lokalen Ordnens“ nach Freudenthal (1973a, S. 142; 1973b, S. 423 ff.)[4] zurück. „Zur Beschreibung dieses Sachverhalts kann man den Begriff einer ‚Argumentationsbasis‘ heranziehen und darunter jene Annahmen verstehen,

[4] Bei Freudenthal (1973a) ist das lokale Ordnen „ein Begriff, der sich für das didaktische Verständnis insbesondere des Geometrie-Unterrichts als wichtig erweisen wird. Man analysiert die geometrischen Begriffe und Beziehungen bis zu einer recht willkürlichen Grenze, sagen wir, bis zu dem Punkte, wo man von den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, daß sie wahr sind. So räsonniert [sic.] man immer in der Geometrie unseres Lebensraumes; niemals aus Axiomen, die viel zu weit weg liegen, sondern, nach einem verschwimmenden und sich verschiebenden Horizont von Sätzen hin, die jeweils als wahr angenommen werden. Das Feld wird auf kleine oder größere Strecken, aber nicht als Ganzes geordnet“ (ebd., S. 142).

die einem Argument zugrunde liegen und die zum geteilten Wissen einer Lerngruppe gehören“ (Jahnke/Ufer 2015, S. 334). Fischer und Malle (2004) verstehen unter einer Argumentationsbasis „[e]ine Menge von Aussagen, die als richtig angesehen werden […] zusammen mit den Schlußweisen, die als zulässig anerkannt werden“ (Fischer/Malle 2004, S. 180) und legen fest: „Eine Begründung auf Grund einer vorgegebenen Argumentationsbasis soll als ein Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis bezeichnet werden“ (ebd., Hervorhebung im Original). Die soziale Perspektive macht es also möglich, dass der Begriff *Beweisen* auch im Kontext des Mathematikunterrichts sinnvoll verwendet werden kann, solange er entsprechend pragmatisch interpretiert wird. Dieser Sichtweise wirkt jedoch ein streng formales Beweisverständnis entgegen, weswegen in schulischen Kontexten oft auf die weiter gefassten Begriffe *Begründen* und *Argumentieren* zurückgegriffen wird (Brunner 2014a, S. 29). Vollrath bemerkt in diesem Sinne bereits 1980, dass die Verwendung des Begriffs *Argumentieren* in der mathematikdidaktischen Literatur zunimmt, und zwar „meist im Sinne von ‚begründen‘ [um] zum Ausdruck [zu] bringen, daß man das Begründen nicht auf die mathematisch eingeengte Form des Beweisens beschränken möchte“ (Vollrath 1980, S. 28). Somit kann das Argumentieren als „Vorform des strengen mathematischen Beweisens, die auch mit den begrifflichen und methodischen Mitteln der früheren Klassenstufen realisiert werden kann“ (Schwarzkopf 2015, S. 31) betrachtet werden. Das Beweisen wird dadurch also nicht ersetzt, sondern vorbereitet, indem es in einen breiteren Kompetenzbereich eingeschlossen ist (siehe Abschnitt 2.1.4).

2.1.4 Ein Modell für den Zusammenhang zwischen Argumentieren, Begründen und Beweisen

In dieser Arbeit beschreiben die Begriffe *(mathematisches) Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* Prozesse, in denen Mathematik treibende Personen Tätigkeiten ausführen. *Argumentationen*, *Begründungen* und *Beweise* sind die Produkte dieser Tätigkeiten. Eine Sonderrolle nehmen *Argumente* ein, die bei der Ausführung jeder dieser Tätigkeiten eine grundlegende Rolle spielen und zu Ketten verbunden werden (können). Wie oben bereits mehrfach erwähnt, hängen die Tätigkeiten *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* sehr stark zusammen. Deshalb bietet es sich an, diese nun in einer Zusammenschau zu betrachten.

Unter Einbezug verschiedener Quellen scheint es sinnvoll, das für diese Arbeit entworfene und in Abbildung 2.3 dargestellte Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs der Prozesse (und damit auch der Produkte) zu verwenden. Dies soll nun im Folgenden erläutert und begründet werden, bevor anschließend davon abweichende Positionen kurz diskutiert werden.

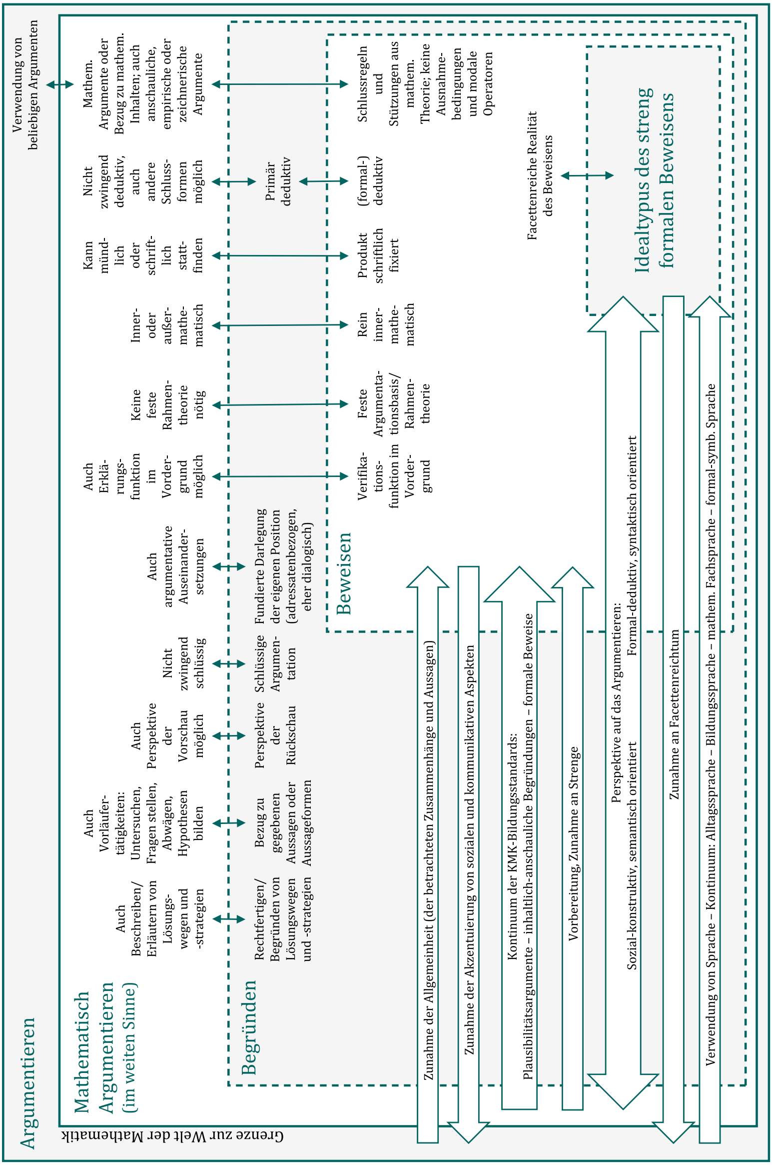


Abbildung 2.3 Modell zum Zusammenhang von Argumentieren, Begründen und Beweisen (einfache Pfeile (↔) drücken Unterschiede zur Abgrenzung der Konzepte aus, beschriftete Pfeile (⇔) drücken Kontinuen aus; weiter innen stehende Eigenschaften können immer auch für Konzepte weiter außen erfüllt sein, andersherum nicht)

Das mathematische Argumentieren wird in diesem Modell im weiten Sinne (siehe Abschnitt 2.1.1) verstanden, da sich diese Konzeption für die in dieser Arbeit dargestellte, explorative Interviewstudie mit Lehrkräften besonders anbietet, um alle Facetten des Argumentierens mit abdecken zu können und nicht vorab Einschränkungen zu formulieren. Von außen nach innen werden Teilmengenrelationen zwischen den verschiedenen Prozessen, Tätigkeiten und Produkten vorgeschlagen. Dabei sind angegebene Eigenschaften der jeweiligen Tätigkeiten immer auch für die weiter außen liegenden Tätigkeiten denkbar, aber nicht zwingend, während die Eigenschaften nach innen hin spezifischer werden. Die im Modell verwendete Konzeption des Beweisens als spezifische Form des Begründens und des Begründens wiederum als spezifische Form des mathematischen Argumentierens wird durch zahlreiche Quellen gestützt, wie oben bereits teilweise ausgeführt wurde (Brunner 2013, S. 108; Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 95; Meyer/Prediger 2009, S. 5; Reiss/Ufer 2009, S. 158; Wittmann 2018, S. 21; Nagel/Reiss 2016, S. 303). Außerdem gibt es Autoren, die das Beweisen entweder mit dem Argumentieren oder dem Begründen vergleichen und dabei Beweisen als spezifisches Argumentieren beziehungsweise spezifisches Begründen verstehen (Krummheuer 1992, S. 123; Knipping 2003, S. 34; Fischer/Malle 2004, S. 178; Bruder/Pinkernell 2011, S. 6; Tietze 2000, S. 158; Vollrath/Roth 2012, S. 247 ff.; Reiss/Hammer 2013, S. 53; Vohns 2015, S. 124; Ufer/Kramer 2015, S. 84 f.; Cramer 2018, S. 10; Durand-Guerrier et al. 2012, S. 349). Insgesamt können die jeweils im Modell weiter außen platzierten Tätigkeiten als Vorbereitung auf und Vorläufertätigkeiten für die Tätigkeiten weiter innen verstanden werden (vgl. Reiss/Ufer 2009, S. 158). Demzufolge nimmt auch die Strenge, mit der die Prozesse und Produkte beurteilt, die Prozesse ausgeführt und die Produkte erstellt werden, zu.

Das mathematische Argumentieren wird als spezielle Form des allgemeinen Argumentierens gesehen, wobei das Adjektiv *mathematisch* auch weggelassen werden kann, wenn der Kontext klar ist. Die Spezialisierung des Argumentierens auf das mathematische Argumentieren erfolgt durch den Schritt in die Welt der Mathematik. Dies zeichnet sich vor allem durch die Art der verwendeten Argumente oder der Inhalte aus. Entweder die Argumente selbst sind mathematischer Natur oder die Argumente beziehen sich auf mathematische Inhalte. Das mathematische Argumentieren nimmt somit gegenüber dem allgemeinen Argumentieren eine Präzisierung im Fachbereich der Mathematik vor (Brunner 2013, S. 103). Dadurch ist die Grenze zwischen dem allgemeinen Argumentieren und dem speziell mathematischen Argumentieren weitgehend klar gefasst. Die Unterschiede zwischen dem mathematischen Argumentieren, dem Begründen und Beweisen sind hingegen eher graduell und die Prozesse nicht klar voneinander abgrenzbar (Meyer/Prediger 2009, S. 5).

Innerhalb des Beweisens steht ein Idealtypus des streng formalen Beweisens der facettenreichen Realität des Beweisens gegenüber (Vohns 2015, S. 124; Jahnke/Ufer 2015, S. 332). Im Extremfall verwenden Beweisprodukte dieses Idealtypus Symbole rein syntaktisch ohne semantische Bedeutung und explizieren alle verwendeten Schlüsse und Argumente bis zurück zu den Axiomen (Kempen 2019, S. 31). Sie könnten also beispielsweise durch Verwendung standardisierter Sprache von Computern überprüft oder sogar erstellt werden. Vom Beweisen über das Begründen hin zum mathematischen Argumentieren und zum allgemeinen Argumentieren nimmt der Facettenreichtum der Produkte und der verwendeten Aktivitäten zu (Vohns 2015, S. 124). Von diesen unterschiedlichen Produkten werden drei in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für die allgemeine Hochschulreife explizit genannt und mit Hilfe eines Kontinuums formuliert: „Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen“ (KMK 2012, S. 15). Dieses Kontinuum reicht also im vorliegenden Modell vom mathematischen Argumentieren über das Begründen hin zum Beweisen. Auch die Verwendung des mathematischen Argumentierens als Oberbegriff über diese Prozesse, die zu diesen Produkten führen, stimmt mit der Konzeption im vorliegenden Modell überein.

Während das Argumentieren auch umgangssprachlich erfolgen kann (Wittmann 2018, S. 21) und beim Begründen auch alltagsnahe, vorwissenschaftliche Sprache einbezogen wird (Brunner 2013, S. 109), ist hin zum Beweisen eine Formalisierung der Sprache notwendig, die in möglichst knappen und präzisen mathematischen Formulierungen einer wissenschaftlichen Sprache mit der Verwendung von wissenschaftlichen und Fachbegriffen resultiert (Wittmann 2018, S. 22; Brunner 2013, S. 109). Das heißt, es lässt sich bezüglich der beim Argumentieren verwendeten Sprache ein Kontinuum von außen nach innen erkennen, von der Alltagssprache über die Bildungssprache hin zur mathematischen Fachsprache, die im Grenzfall des idealtypischen Beweisens nur in formal-symbolischer Darstellungsform verwendet wird (vgl. Meyer/Prediger 2012, S. 4; siehe auch Abschnitt 6.3.1). So finden Formen des mathematischen Argumentierens, die noch nicht als *Begründen* bezeichnet werden, überwiegend durch Verwendung des Sprachregisters der Alltagssprache statt, während beim Begründen schon mehr die Bildungssprache in den Vordergrund rückt und auch die mathematische Fachsprache schon mit einbezogen wird. Beim Beweisen schließlich steht die mathematische Fachsprache im Vordergrund. Das bedeutet aber nicht, dass nicht auch schon beim mathematischen Argumentieren Elemente der mathematischen Fachsprache verwendet werden können (vgl. Brunner 2013, S. 109). Dies hängt auch stark damit zusammen, dass beim Beweisen die Beweisprodukte immer schriftlich fixiert werden, während der Prozess des Argumentierens auch rein mündlich stattfinden kann (Schwarzkopf 2000, S. 240; siehe auch Abschnitt 6.3.1).

Mit Hilfe der in den Argumentationen verwendeten Argumente lassen sich Abgrenzungen zwischen den verschiedenen Prozessen festmachen. Beim allgemeinen Argumentieren werden keine spezifischen Ansprüche an die Argumente gestellt. Beim Schritt in die Welt der Mathematik müssen die verwendeten Argumente mathematischer Art sein oder sich auf mathematische Inhalte beziehen. Die Argumente können jedoch auch anschaulich, empirisch oder zeichnerisch sein, was für das Begründen, vor allem aber für das Beweisen nicht mehr gilt. Beim Beweisen treten nur noch Argumente auf, deren Schlussregeln und Stützungen (im Sinne Toulmins (1996, 2003)) aus einer mathematischen Theorie stammen (Durand-Guerrier et al. 2012, S. 356; vgl. Wittmann 2018, S. 21). Außerdem dürfen bei den beim Beweisen verwendeten Argumenten keine modalen Operatoren oder Ausnahmebedingungen (im Sinne Toulmins (1996, 2003)) auftreten, die die Gültigkeit der Argumente einschränken würden. Treten bezüglich einer Hypothese Ausnahmen auf, so werden diese als Voraussetzungen der Aussage erfasst (Meyer 2007b, S. 298).

Hinsichtlich der verwendeten Schlussformen sind beim Beweisen nur deduktive Schlüsse zugelassen (Meyer 2007a, S. 21; Reiss/Ufer 2009, S. 157; Brunner 2013, S. 109; Sill 2019, S. 210) und auch das Begründen ist primär deduktiv geprägt (Reiss/Ufer 2009, S. 158; Storz 2018, S. 60). Im Gegensatz dazu sind beim Argumentieren auch explizit nicht-deduktive Formen miteingeschlossen (Reiss/Ufer 2009, S. 157). Zudem müssen sich die Argumente und Schlüsse beim Beweisen auf eine feste Rahmentheorie als Argumentationsbasis beziehen, während das Begründen als Vorläufertätigkeit noch ohne feste Rahmentheorie auskommt (Reiss/Ufer 2009, S. 158; Fischer/Malle 2004, S. 180). Zur Unterscheidung von *Argumentieren* und *Begründen* kann zudem als Kriterium die Schlüssigkeit der Argumentation herangezogen werden. Nach Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2011, S. 95) heißt eine Argumentation „schlüssig, wenn niemand, der ihren Ausgangssätzen (Aussagen oder Normen) zugestimmt hat, irgendeinem ihrer Schritte die Zustimmung verweigern kann, ohne sich selbst in Widersprüche zu verwickeln.“ Eine als schlüssig bezeichnete Argumentation kann also auch als Begründung bezeichnet werden, während Argumentationen im Allgemeinen nicht schlüssig sein müssen (ebd., S. 94 f.; vgl. Ufer/Kramer 2015, S. 84 f.).

Die bisher dargestellten Dimensionen des Rasters sind tendenziell formal und syntaktisch orientiert. Darüber hinaus können zur Abgrenzung der Prozesse auch soziale und semantische Kriterien miteinbezogen werden. Diese Zweiteilung spiegelt zwei gegensätzliche Perspektiven wider, mit denen auf das Argumentieren und Beweisen geblickt werden kann, woraus auch unterschiedliche Beweisverständnisse resultieren. Cramer (2018, S. 33 ff.) unterscheidet zwischen syntaktisch und semantisch orientierten Zugängen zum Argumentieren und Beweisen, die zu „verschiedenen Wahrnehmungen der Bedeutung formaler Strenge" führen. Grundey (2015, S. 12 f.) unterscheidet eine formal-deduktive und eine sozialkonstruktivistische Sichtweise auf das mathematische Beweisen. Das vorliegende Modell sieht das Beweisen vordergründig aus einer syntaktisch-orientierten, formal-deduktiven Perspektive, was die Konzeption als spezielle Form des Argumentierens stützt. Das Argumentieren wird im vorliegenden Modell aus beiden Perspektiven betrachtet, wobei sich die semantisch orientierte, sozialkonstruktivistische Sichtweise mehr auf Formen des Argumentierens und Begründens bezieht, die nicht als *Beweise* bezeichnet werden.

Aus semantischer Perspektive rücken vor allem die in den Prozessen verwendeten Inhalte in den Mittelpunkt. Eine Abgrenzung zwischen mathematischem Argumentieren und dessen spezieller Form des Beweisens ist dadurch möglich, dass die thematisierten Inhalte beim Beweisen rein innermathematischer Natur sind, während sie beim mathematischen Argumentieren inner- oder außermathematisch sein können (Büchter/Leuders 2005, S. 45). Während für Büchter und Leuders (ebd.) bei der Zwischenform des Begründens auch nur innermathematische Situationen eine Rolle spielen, erscheint es in Zusammenschau mit den anderen Dimensionen des Modells sinnvoll, auch in außermathematischen Situationen gegebenenfalls von *Begründen* sprechen zu können, beispielsweise, wenn die Richtigkeit einer Aussage über die Wirklichkeit auf Basis der Überlegungen in einem mathematischen Modell begründet wird.

Insgesamt nimmt vom Argumentieren über das mathematische Argumentieren und das Begründen hin zum Beweisen die Allgemeinheit der betrachteten inhaltlichen Zusammenhänge zu. Während beim Argumentieren beispielsweise Eigenschaften konkret gegebener mathematischer Objekte, wie konkreter Funktionen, diskutiert werden, geht es beim Begründen darum, Begründungen für Aussagen beispielsweise auch über mehrere verwandte Objekte, wie Funktionen, die gleiche Eigenschaften aufweisen, zu formulieren. Die Aussagen und deren Begründungen haben dabei aber „nicht selten einen lokalen Charakter und/oder sind durch einen eher begrenzten Grad an Allgemeinheit gekennzeichnet" (Reiss/Ufer 2009, S. 156). Beim Beweisen schließlich stehen allgemeingültige mathematische Aussagen, die oft als Sätze bezeichnet werden, beispielsweise in Bezug auf ganze Funktionsklassen und mit größerer Bedeutung, im Fokus des Prozesses (Storz 2018, S. 55). Auf der Suche nach solch allgemeingültigen Aussagen kann die Frage „Ist das immer so?“ leitend sein (ebd., S. 57). Beim Übergang vom Argumentieren zum Begründen und schließlich zum Beweisen werden also die möglichen Geltungsansprüche, die für die thematisierten Aussagen postuliert werden, stärker eingegrenzt. Während Geltungsansprüche beim Argumentieren auch nur situativ gelten können, geht es beim Beweisen immer um universelle Geltungsansprüche.

Während sich das Begründen immer auf bereits gegebene oder zuvor entdeckte oder entwickelte Aussagen oder Aussageformen bezieht, gehören die im Vorfeld nötigen Aktivitäten wie das Untersuchen von Zusammenhängen, das Stellen charakteristischer und geeigneter zielführender Fragen, das Abwägen und das Bilden von Hypothesen in den breiteren Bereich des Argumentierens und werden noch nicht als *Begründen* bezeichnet (vgl. Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 94 f.; Wittmann 2018, S. 21). Beim Argumentieren können zudem Lösungsideen, -strategien und -wege als Inhalte betrachtet werden. Der Umgang mit diesen kann als Abgrenzung zwischen dem Argumentieren und dem spezielleren Begründen herangezogen werden. Wenn eigene Lösungswege und -strategien gerechtfertigt werden, kann von *Begründen* gesprochen werden (Reiss/Ufer 2009, S. 158), während der Begriff des *Begründens* für ein Beschreiben und Erläutern von Lösungswegen noch nicht geeignet sein muss, sodass hier gegebenenfalls (siehe Abschnitt 2.1.5) allgemeiner der Begriff *Argumentieren* verwendet wird (Wittmann 2018, S. 21).

Aus sozialer Perspektive kann zwischen unterschiedlichen Funktionen unterschieden werden, die das Argumentieren haben kann (siehe auch Abschnitt 2.3). Mit Hilfe der beiden Hauptfunktionen, die beispielsweise von Hanna (1989) und Hersh (1993) unterschieden werden (siehe Abschnitt 2.3.1), können verschiedene Schwerpunkte des Argumentierens akzentuiert werden. So kann beim Argumentieren insgesamt, vor allem im Bereich des Lernens von Mathematik, die erklärende Funktion im Vordergrund stehen, während speziell vom Beweisen nur gesprochen werden kann, wenn auch die Verifikationsfunktion einen entscheidenden Anteil hat (Cramer 2018, S. 17[5]).

---

[5] Cramer (2018, S. 17) spricht von „Validierungsfunktion“ und der zugehörigen „Gültigkeit einer Aussage“. Brunner (2014a, S. 10) folgend sollten aber die Begriffskombinationen „wahre Aussage“ und „gültige Argumentation“ verwendet werden, „gültige Aussage“ und „wahre Argumentation“ dagegen nicht. Deswegen wird davon ausgegangen, dass Cramer mit der von ihr als Validierungsfunktion bezeichneten Funktion die Verifikationsfunktion im Sinne der vorliegenden Arbeit meint.

Von innen nach außen im Modell werden kommunikative und soziale Aspekte immer wichtiger (vgl. Krummheuer 1992, S. 123). Während das Beweisen vorwiegend monologisch stattfindet (Storz 2018, S. 61), gewinnt der konkrete Adressat beim Begründen und noch stärker beim Argumentieren zunehmend an Bedeutung. So bezeichnet Storz (2018, S. 61) beispielsweise das Begründen als „soziale Form“ des Beweisens. Während es beim Begründen aber noch mehr um eine fundierte Darlegung der eigenen Position geht, kann es sich beim Argumentieren auch um eine Auseinandersetzung mit einem Gegenüber handeln, bei der eine strittige Position durch Argumente gestützt wird (Reiss/Ufer 2009, S. 156).

Als weiteres Unterscheidungskriterium zwischen Begründen und Argumentieren führt Storz (2018, S. 57 f.) an, dass das Argumentieren ein Prozess mit offenem Zielzustand ist. Deswegen kann das Argumentieren als Tätigkeit aus der Perspektive der Vorschau ausgeführt werden, die für Lernende typisch ist. Das Begründen und insbesondere das Beweisen hingegen haben eine klar formulierte Aussage oder Aussageform vorliegen, die begründet oder bewiesen werden sollen. Die Aktivität des Begründens benötigt deswegen einen Überblick über verschiedene Zusammenhänge, der nur aus der Perspektive der Rückschau möglich ist:

> *Argumentieren ist auch ein Prozess, an dessen Ende Antworten stehen, die am Anfang dem Argumentierenden noch nicht bekannt waren und Fragen beantwortet werden, die am Anfang nicht gestellt wurden. […] Ein Lernender befindet sich in der Perspektive der Vorschau, er argumentiert, stellt Fragen, findet Antworten und findet auf andere Fragen keine Antworten. Die Argumentationskette muss er erst aufbauen, ohne zu wissen, wie lang sie wird und bei welcher Erkenntnis sie enden wird. Ist ihm eine Argumentationskette gelungen, wechselt er bei diesem Wissenselement, und nur bei diesem, in die Perspektive der Rückschau. Aus Argumenten werden Begründungen. […] Begründungen erfordern die Perspektive der Rückschau. Wer begründen kann, hat bereits gelernt.*
>
> (Storz 2018, S. 57 f.)

Das vorgestellte Modell lässt sich nicht mit allen in der Literatur dargestellten Positionen zum Verhältnis der Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* vereinbaren. So wurde bereits in Abschnitt 2.1.2 dargestellt, dass sich drei unterschiedliche Verständnisse des Begründens herausarbeiten lassen. Im vorliegenden Modell wird das Verständnis des Begründens als Zwischenform zwischen Argumentieren und Beweisen verwendet. Das Verständnis, das Begründungen mit Argumenten gleichsetzt, wird hingegen nicht verwendet, da der Begriff des *Arguments* als Bestandteil von Argumentationen, Begründungen und Beweisen bereits ausreichend ist, sodass kein zweiter Begriff dafür nötig ist. Sprachlich kann zusätzlich noch von der *Angabe von Gründen* und von *logischen Schlüssen* (siehe Abschnitt 2.1.5) gesprochen werden, die innerhalb aller drei Prozesse in Zusammenhang mit dem Bilden von Argumenten und Ketten aus diesen auftreten. Das dritte Verständnis von *Begründen* im Sinne eines logischen Schließens oder *reasoning* bildet die Basis für das Modell von Brunner (2014a, S. 31), in welchem Begründen den Oberbegriff eines Kontinuums bildet, das vom alltagsbezogenen Argumentieren über das Argumentieren mit mathematischen Mitteln und das logische Argumentieren mit mathematischen Mitteln hin zum formal-deduktiven Beweisen verläuft. Auf Basis des Begriffsverständnisses von Begründen als logischem Schließen stellt dieses Modell sinnvolle theoretische Überlegungen zum Argumentieren, Begründen und Beweisen zusammen, jedoch ist die Übersetzung von *reasoning* mit *Begründen* und das Verständnis von Begründen als logischem Schließen eher unüblich. Das logische Schließen als Tätigkeit oder Denkleistung ist jedoch auch im Modell dieser Arbeit Grundlage aller argumentativen Tätigkeiten. Somit widersprechen sich die beiden Modelle nur auf den ersten Blick, dieser Unterschied kann aber durch die unterschiedlichen Begriffsverständnisse des Begründens aufgelöst werden. Durch die Darstellung als Kontinuum steht in Brunners Modell zudem das Argumentieren mehr dem Beweisen gegenüber, wenn auch nicht auf dichotome, sondern graduelle Art und Weise, während im Modell dieser Arbeit eine Teilmengenbeziehung favorisiert wird. Dieser Unterschied führt zu einer in der Literatur oft dargestellten Gegenüberstellung zweier Verständnisse bezüglich des Verhältnisses zwischen Argumentieren und Beweisen (vgl. Brunner 2013, S. 106 ff.; Brunner 2014a, S. 29 ff.; Brunner 2014b, S. 231; Jahnke/Ufer 2015, S. 338; Nagel/Reiss 2016, S. 302; Cramer 2018, S. 9 f.; Durand-Guerrier et al. 2012, S. 353). Die beiden Begriffe werden entweder als Gegensätze wahrgenommen, die sich sogar gegenseitig behindern können, oder das Argumentieren wird in engem Zusammenhang zum Beweisen gesehen, sodass es beispielsweise als Vorläufertätigkeit und/oder Oberbegriff zum Beweisen verstanden werden kann, wie in der vorliegenden Arbeit. Es könnte alternativ ein breiteres Beweisverständnis angelegt werden, das auch Formen einschließt, die in dieser Arbeit als *Argumentieren* oder *Begründen*, nicht aber als *Beweisen* bezeichnet werden.

Eine entscheidende Rolle kommt im vorliegenden Modell dem Begründen zu, das mehr Facettenreichtum und weniger Strenge als das Beweisen ermöglicht und somit eine für das Ausbilden mathematischer Argumentationskompetenz besonders geeignete Tätigkeit darstellt, die auf das typisch mathematische Beweisen hinarbeitet, ohne dies letztendlich (in der Schule) erreichen zu müssen. Wird ein weiteres Beweisverständnis gewählt, so ist dieses zumeist in Übereinstimmung mit der hier verwendeten Konzeption des Begründens.

2.1.5 Einordnung weiterer Begriffe: Logisches Schließen, Rechtfertigen, Herleiten, Kommunizieren, Erklären

Wie bereits mehrfach angeklungen, existieren zusätzlich zu den Begriffen *(mathematisch) Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* weitere, mit diesen inhaltlich verwandte Begriffe, die nun kurz in das oben vorgestellte Modell eingeordnet werden (siehe Abb. 2.4).

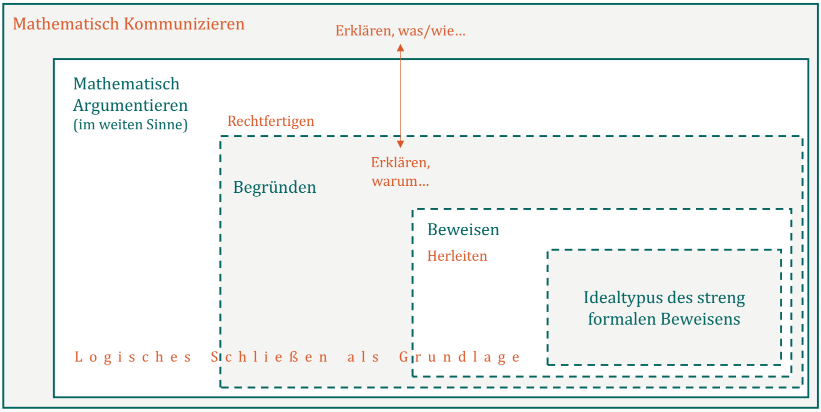


Abbildung 2.4 Einordnung weiterer Begriffe in das Modell zum Zusammenhang von Argumentieren, Begründen und Beweisen

Das logische Schließen oder schlussfolgernde Denken tritt häufig in Form des englischen *reasoning* in Erscheinung. Dieses wird von Jeannotte und Kieran definiert als „a process of communication with others or with oneself that allows for inferring mathematical utterances from other mathematical utterances“ (Jeannotte/Kieran 2017, S. 7). Es handelt sich damit um eine spezielle Form der Kommunikation oder des Denkens, bei der mathematische Aussagen aus anderen mathematischen Aussagen abgeleitet werden. Sie ist also für alle Formen des Argumentierens, Begründens und Beweisens grundlegend. In den amerikanischen NCTM-Standards bildet *Reasoning* zusammen mit *Proof* den Titel eines Standards für den Mathematikunterricht (NCTM 2000). In der Konzeption der TIMSS-Studie stellt *Reasoning* den anspruchsvollsten von drei untersuchten kognitiven Bereichen dar und wird als Fähigkeit, logisch und systematisch zu denken, konzeptualisiert (Mullis et al. 2009, S. 45). Das logische Schließen kann also im obigen Modell als Grundlage aller Bereiche eingetragen werden.

Ein Begriff, der häufig ohne Begriffsklärung verwendet wird, ist das *Rechtfertigen*. Beispielsweise verwenden Reiss und Ufer (2009, S. 158) die „Rechtfertigung eigener Lösungswege und -strategien" als Beispiel für eine Aktivität im Bereich des Begründens. Der Begriff des Rechtfertigens ist in etwa die deutsche Entsprechung für das englische *justifying*. Laut Kiel (1999, S. 72) sollen Rechtfertigungen für positive Bewertungen eigener Handlungen sorgen, insbesondere dann, wenn erwartet wird, dass die Handlung negativ bewertet wird. Jahnke und Krömer (2020) schlagen vor, *Rechtfertigen* „für die Entwicklung und Bewertung von Gründen, die zur Annahme oder Ablehnung von Axiomen und Definitionen führen" (ebd., S. 459), zu verwenden und grenzen den Begriff so vom Beweisen als „Begriff für deduktive Argumentationen in der Mathematik" (ebd.) ab. Diesem Verständnis folgend kann das Rechtfertigen in obigem Modell eine Form im Grenzbereich zwischen Argumentieren und Begründen, nicht aber im Bereich des Beweisens darstellen. Es wird an der Grenze zwischen Argumentieren und Begründen lokalisiert, da es nach obigem Verständnis beim Begründen inhaltlich um mathematische Aussagen oder Aussageformen geht. Das Rechtfertigen einer Definition kann in diesem Sinne als Begründen verstanden werden, wenn eine Aussage der Form „Die Definition von … als … ist sinnvoll, weil…" begründet wird. In der Konzeption von Jahnke und Krömer (2020) ist aber sowohl „das *Anführen von Gründen* […] die für oder gegen ein Axiom bzw. eine Definition sprechen" enthalten, als auch „die *Beurteilung und Bewertung* dieser Gründe […], die in der Entscheidung mündet, das vorgeschlagene Axiom bzw. die Definition für die weitere Arbeit zu akzeptieren oder zurückzuweisen" (ebd., S. 464, Hervorhebungen im Original). Somit geht es nicht <u>nur</u> um die Begründung einer Aussage, sodass eine Verortung im Bereich des Argumentierens außerhalb des Begründens naheliegender ist.

Der Begriff des *Herleitens* wird von Sill (2019) unter Rückgriff auf die didaktischen Überlegungen von Pruzina (1981) folgendermaßen definiert: „Mit **Herleiten** meint man allgemein eine Folge deduktiver Schlüsse von Voraussetzungen zu einer Behauptung. Im engeren didaktischen Sinne (Pruzina 1981) ist Herleiten eine Methode der deduktiven Satzfindung, bei der eine noch nicht bekannte Aussage gefunden wird, die mit der Herleitung gleichzeitig bewiesen ist" (Sill 2019, S. 211, Hervorhebung im Original). Wird nur der erste Satz dieser Definition betrachtet, so könnte der Begriff *Herleitung* synonym zum Begriff *Beweis* verwendet werden. Auch Jahnke und Ufer (2015) verwenden den Begriff *Herleitung* in ihrer Definition von Beweis: „Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln" (ebd., S. 331). Der Unterschied liegt im Einsatz der beiden Aktivitäten. So handelt es sich beim Herleiten um eine sehr spezifische Form des gelenkten Entdeckens einer Aussage, die die gleiche Art von Schlüssen verwendet wie ein Beweis, sodass nach dem Finden der Aussage kein Beweis mehr nötig ist. Eine Herleitung erfolgt also für die Lernenden zwar vermeintlich aus der Perspektive der Vorschau, was für eine Einordnung im obigen Modell im Bereich des Argumentierens, das noch nicht als Beweisen bezeichnet werden kann, sprechen würde. Die spezifische, deduktive Form einer Herleitung, die dafür sorgt, dass die gefundene Aussage am Ende automatisch auch bewiesen ist, gelingt aber nur, da die Lehrkraft aus der Perspektive der Rückschau die Lernenden anleitet. Im vorliegenden Modell wird das Herleiten deshalb im Bereich des Beweisens eingeordnet, obwohl sich beispielsweise der Einsatz im Unterricht vor allem hinsichtlich motivationaler Gründe unterscheidet (Pruzina 1981, S. 525).

Das *mathematische Kommunizieren* stellt in den Bildungsstandards der KMK (2012) einen eigenen Kompetenzbereich dar, der aber stark mit dem Argumentieren verknüpft ist. So ist das Argumentieren eine Tätigkeit, die auf ein (wenn auch möglicherweise fiktives) Gegenüber ausgerichtet ist und deren Produkte mit Hilfe von Sprache oder anderer Darstellungsmittel ausgedrückt werden. Damit kann das mathematische Argumentieren als Teilbereich des mathematischen Kommunizierens betrachtet werden, wie beispielsweise die Einordnung des Kapitels zum Beweisen und Argumentieren von Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2011, S. 93 ff.) als Abschnitt des Kapitels „Mathematik kommunizieren" (Leuders 2011a, S. 59 ff.) zeigt. Deshalb kann im vorliegenden Modell das mathematische Argumentieren als Teilbereich des mathematischen Kommunizierens (statt des allgemeinen Argumentierens) konzeptualisiert werden (siehe auch Abschnitt 2.2.3).

Auch das *Erklären* ist ein Teilbereich des mathematischen Kommunizierens, das mit dem Argumentieren in Verbindung steht. Kiel (1999) sieht die Bedeutungen von *Erklären* und *Begründen* in engem Zusammenhang, da beide Handlungen Reaktionen auf Warum-Fragen sein können. Der Unterschied liegt aber darin, dass das Begründen „aus einer Situation des Zweifelns und dem aus diesem Zweifel resultierenden Bestreiten – und *nicht* aus einer Situation eines Wissensdefizits wie das Erklären" (ebd., S. 71) resultiert. Jörissen und Schmidt-Thieme (2015, S. 401) sehen das Argumentieren als eine Variante des Erklärens. Die von Kiel et al. (2015, S. 3) dargestellte Unterscheidung von Erklärtypen in „Erklären was", „Erklären wie" und „Erklären warum" zeigt aber, dass nicht alle Erklärungen auch Argumentationen sind. Jedoch können Argumentationen, Begründungen und Beweise als Warum-Erklärungen fungieren, wenn ihnen eine erklärende Funktion zugeschrieben wird. Da dies insbesondere im Bereich des Beweisens nicht auf alle Beweisprodukte zutrifft (vgl. z. B. Hanna 1989), sondern vielmehr die

Bedeutung der erklärenden Funktion vom Beweisen über das Begründen hin zum Argumentieren zunimmt, wird das „Erklären, warum" im vorliegenden Modell im Bereich des Begründens (aber nahe beim Beweisen) verortet und gilt so insbesondere auch als Form des Argumentierens. Kiel (1999, S. 73) grenzt das Erklären noch vom Erläutern ab, bei dem der Hörer bereits eine Erklärung akzeptiert hat und der Sprecher ihm nur hilft, diese oder eine weitere Erklärung noch besser zu verstehen.

Das weite Begriffsverständnis des Argumentierens in dieser Arbeit umfasst somit auch die Begriffe *logisches Schließen, Rechtfertigen, Herleiten* und *Erklären warum*, während weitere Erklärtypen und das mathematische Kommunizieren generell zu weit gefasst sind, um gänzlich in die Konzeption des Argumentierens eingeschlossen werden zu können.

2.2 Argumentieren als allgemeine mathematische Kompetenz

Das mathematische Argumentieren ist in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz als allgemeine mathematische Kompetenz verankert. Damit ist die Förderung mathematischer Argumentationskompetenz Teil der Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht. Außerdem gibt es starke Zusammenhänge des mathematischen Argumentierens mit den anderen allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards. In diesem Abschnitt wird das Argumentieren deshalb aus der Sicht der Kompetenzorientierung beschrieben.

2.2.1 Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht

Kompetenzen sind

> *die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.*
>
> (Weinert 2001, S. 27)

Zeitgemäßer Mathematikunterricht ist auf die Förderung mathematischer Kompetenzen ausgerichtet. „Kompetenzen zu fördern bedeutet Situationen zu schaffen und zu nutzen, in denen Lernende mit relevanten Elementen der Mathematik umgehen und dadurch selbstaktiv Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten erwerben“ (Storz 2018, S. 6). Die Diskussion über Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht kam vor allem als Reaktion auf den sogenannten „Pisa-Schock“ im Jahr 2003 auf, als bekannt wurde, dass deutsche Schüler Probleme mit mathematischen Aufgaben haben, die nicht nur Routinefertigkeiten abfragen (Heckmann/Padberg 2012, S. 7). In Folge dessen wurden auch die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für die unterschiedlichen Bildungsabschlüsse formuliert. Diese legen Kompetenzen fest, die Lernende bis zum Erreichen dieser Bildungsabschlüsse erworben haben sollen. In den Bildungsstandards Mathematik werden in einem dreidimensionalen Modell Leitideen, allgemeine mathematische Kompetenzen und Anforderungsbereiche miteinander verbunden (KMK 2012, S. 11). Die Leitideen werden durch inhaltsbezogene Kompetenzen konkretisiert, die „zur Bewältigung mathematischer Problemsituationen“ (ebd., S. 21) mit den allgemeinen Kompetenzen zusammenspielen müssen. Die allgemeinen Kompetenzen werden auch *prozessbezogene Kompetenzen* genannt, um die damit verbundenen Fähigkeiten und Fertigkeiten in Abgrenzung zu Sach- und Faktenwissen zu betonen (Kratz 2011, S. 15). Die Betonung der allgemeinen, prozessbezogenen Kompetenzen im Sinne eines ganzheitlichen Verständnisses von Mathematik ist zwar nicht neu, soll aber durch die Bildungsstandards wieder in den Vordergrund gerückt werden (Heckmann/Padberg 2012, S. 6). Die Anforderungsbereiche beschreiben „unterschiedliche kognitive Ansprüche von kompetenzbezogenen mathematischen Aktivitäten“ (ebd., S. 10), die sich durch das Zusammenspiel von Inhalten und Prozessen ergeben. Die neu formulierten Lehrpläne, beispielsweise der bayerische LehrplanPLUS, setzen die Vorgaben der Bildungsstandards in länderspezifischen Vorgaben um.

Kompetenzorientierung zeigt sich aber im Mathematikunterricht nicht nur durch die Förderung der in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen oder eine veränderte Aufgabenkultur (Kratz 2011, S. 7), sondern an einer grundsätzlichen Haltung gegenüber dem Unterrichten von Mathematik. Diese zeigt sich unter anderem in der Einbeziehung offener Aufgaben, dem Erarbeiten vielfältiger Lösungen, der Umsetzung von Binnendifferenzierung, dem Anregen von Vernetzungen, der Vorstellungsaktivierung, der Stimulierung von Eigenaktivität und Stärkung von Eigenverantwortung, der Variation von Methoden, der Anregung zu Reflexion und dem Einsatz digitaler Werkzeuge sowie an einer positiven Fehlerkultur (ebd., S. 19). Dazu zieht Kratz (ebd.) ein treffendes Fazit: „Abschließend soll ausdrücklich angemerkt werden, dass guter Mathematikunterricht seit jeher viele dieser Merkmale aufweist. Anders gesagt: Guter Mathematikunterricht war schon immer kompetenzorientiert!“. Heckmann und Padberg (2012, S. 12 ff.)

stellen in diesem Sinne Grundprinzipien eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts zusammen, die „als Orientierungs- bzw. Entscheidungshilfe für eine situationsangemessene Auswahl von Inhalten und die spezifische Gestaltung des Unterrichts zu verstehen“ (ebd., S. 12) sind und im Folgenden mit Blick auf das Argumentieren und die vorliegende Arbeit interpretiert werden:

Unterricht soll sowohl an der Erschließung der Lebenswelt der Lernenden als auch an innermathematischen Strukturen ausgerichtet und dadurch legitimiert sein („Anwendungs- und Strukturorientierung“). Das Argumentieren ermöglicht insbesondere das Herstellen von Zusammenhängen innermathematischer Strukturen, kann aber auch Anteile an Modellierungsprozessen haben (siehe Abschnitt 2.2.3). Damit Wissen rekonstruierbar ist, muss es auf tiefgreifendem Verständnis aufbauen („Einsicht statt Routine“). Dazu gehört insbesondere die Vernetzung von Neuem mit Bekanntem und der Umgang mit charakterisierenden Merkmalen, was beim Argumentieren mit neuen Begriffen gefördert werden kann. Das Anknüpfen an Vorkenntnisse und Weiterführen derer ist insbesondere beim Argumentieren zentral, wenn die Vorkenntnisse als Argumentationsbasis dienen und aufbauend darauf neue Zusammenhänge begründet werden („Anknüpfungspunkte finden“). Da Lernen als aktiver Konstruktionsprozess verstanden wird und Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit betont werden, müssen Kompetenzen selbstaktiv erworben und weiterentwickelt werden, weshalb es von Bedeutung ist, dass Schüler selbst das Argumentieren als Tätigkeit lernen und nicht nur passiv Argumentationen der Lehrkraft nachvollziehen („Aktiv-konstruktiv statt passiv-rezeptiv“). Außerdem sollen insgesamt die Prozesse beim Lösen von Aufgaben und Problemen in den Vordergrund rücken, wozu insbesondere das Argumentieren gehört („Prozessorientierung“). In einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht initiiert, organisiert und begleitet die Lehrkraft individuelle Lernprozesse der Schüler und übergibt Verantwortung, die die Lernenden übernehmen müssen („Der Lehrer als Lernbegleiter“). Eine bedeutende Aktivität der Lehrkraft ist die Auswahl guter Aufgaben oder Lernumgebungen und deren Aufbereitung für den Unterricht („Lernarrangements vorbereiten“). Außerdem sorgt die Lehrkraft für Differenzierung („Individuelles Fördern“) und bietet Möglichkeiten zur Förderung sozial-kommunikativer Kompetenzen („Kommunikation und Kooperation“). Wie all dies gerade beim Argumentieren umgesetzt werden kann, wird im dritten Teil dieser Arbeit in den Blick genommen und an einem Beispiel ausgearbeitet (siehe Kap. 6 & 7).

Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht zeichnet sich auch dadurch aus, dass die mathematische Kompetenz von Schülern im Sinne einer mathematischen Grundbildung oder *mathematical literacy* gefördert wird. *Mathematical literacy* wird vom PISA-Konsortium als Fähigkeit definiert,

> *die Rolle, die Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen, begründete mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als eines konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürgers entspricht.*
>
> (Klieme et al. 2001, S. 141)

Um diese mathematische Kompetenz verschiedener Personen vergleichen und beschreiben zu können wurde für die PISA-Studie ein Kompetenzmodell mit fünf Stufen entwickelt:

> *Stufe I: Rechnen auf Grundschulniveau*
> *Stufe II: Elementare Modellierungen*
> *Stufe III: Modellieren und begriffliches Verknüpfen auf dem Niveau der Sekundarstufe I*
> *Stufe IV: Umfangreiche Modellierungen auf der Basis anspruchsvoller Begriffe*
> *Stufe V: Komplexe Modellierung und innermathematisches Argumentieren*
>
> (Klieme et al. 2001, S. 160)

Auffällig ist, dass das Argumentieren, Begründen und Beweisen erst auf der obersten Stufe eine Rolle spielt und im Kontext eines weiten inner- und außermathematischen Modellierungsbegriffs verwendet wird: „Begriffliche Modellierungsleistungen auf dieser höchsten Stufe umschließen häufig Begründungen und Beweise sowie das Reflektieren über den Modellierungsprozess selbst" (ebd.). Dies betont die Ansicht, dass das Argumentieren als anspruchsvolle mathematische Kompetenz gilt.

2.2.2 Mathematische Argumentationskompetenz

Das mathematische Argumentieren ist als allgemeine, prozessbezogene Kompetenz in den Bildungsstandards verankert. Ein Ziel des Mathematikunterrichts ist es also, dass Lernende fachspezifische Argumentationskompetenz ausbilden. Budke (2013, S. 360) formuliert auf Basis der Kompetenzdefinition von Weinert (2001) eine Definition von Argumentationskompetenz für den Geographieunterricht. Diese Definition greifen Budke und Meyer (2015) auf und erweitern sie zu einer Definition von Argumentationskompetenzen für alle Fächer:

> *In Anlehnung an die Kompetenzdefinition von Weinert (2001, S. 27) bedeuten Argumentationskompetenzen im Schulkontext dann, „dass die SchülerInnen über Fähigkeiten und Fertigkeiten verfügen, mündliche und schriftliche Argumentationen in verschiedenen fachlichen Kontexten zu verstehen, eigene Argumentationen zu produzieren*

> *und in der Interaktion mit anderen auf Argumentationen angemessen zu reagieren, sowie auch, dass sie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften aufweisen, diese Argumentationsfähigkeiten in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll zu nutzen" (Budke 2013, S. 360).*
>
> (Budke/Meyer 2015, S. 14)

Diese Definition lässt sich direkt auf die Mathematik übertragen:

> Mathematische Argumentationskompetenz besteht aus Fähigkeiten und Fertigkeiten, mündliche und schriftliche Argumentationen in mathematischen Kontexten zu verstehen und zu produzieren sowie in der Interaktion mit anderen auf Argumentationen angemessen zu reagieren. Dazu gehören auch die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften, die Argumentationsfähigkeiten in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll zu nutzen.

Somit umfasst die Kompetenz des mathematischen Argumentierens eine Bandbreite an (Teil-) Kompetenzen, die mit der Tätigkeit des mathematischen Argumentierens verbunden sind. Auch Ufer und Kramer (2015, S. 83) beschreiben das mathematische Argumentieren als einen „breiten Kompetenzbereich, der von der begründeten Lösung inner- und außermathematischer Probleme über das Bewerten und Konstruieren tragfähiger mathematischer Argumente bis hin zur Untersuchung mathematischer Aussagen auf ihre Gültigkeit hin reicht". Bei Brunner (2014a) besteht Beweiskompetenz, die in der Begriffsverwendung dieser Arbeit treffender als *Argumentationskompetenz* bezeichnet werden könnte, aus verschiedenen einzelnen Fähigkeiten:

> *Dazu gehört zunächst einmal recht allgemein, dass man die eigene mathematische Vorgehensweise und die gefundenen eigenen Lösungen auch erläutern kann. Gefordert ist also Kommunikationskompetenz. Des Weiteren sollte eine Lösung auch begründet werden können. Außerdem gehört zur Beweiskompetenz auch, dass man einen Beweis selbst führen kann. Dafür ist es notwendig, dass man mathematische Vermutungen anstellen und sie systematisch prüfen kann.*
>
> (Brunner 2014a, S. 79)

Auch metakognitive, motivationale und emotionale Aspekte gehören laut Brunner (2014a, S. 81) zur Beweiskompetenz. Um Argumentationskompetenz ausbilden zu können, sind nach Ufer und Kramer (2015, S. 92) zwei Voraussetzungen im Bereich der inhaltsbezogenen Kompetenzen notwendig: reichhaltiges und vernetztes Begriffswissen und die sichere und flexible Beherrschung „technische[r] Aspekte mathematischer Tätigkeiten wie das Umformen von Termen oder die Erstellung eines Koordinatensystems bzw. einer Wertetabelle" (Ufer/Kramer 2015, S. 92).

2.2.3 Zusammenhang zwischen dem Argumentieren und den anderen allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards

Wie die Beschreibung von Ufer und Kramer (2015, S. 83, siehe oben) in Bezug auf das Problemlösen andeutet, gibt es starke Zusammenhänge zwischen den verschiedenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen, sodass durch unterschiedliche Tätigkeiten im Mathematikunterricht meist mehrere prozessbezogene Kompetenzen gleichzeitig gefördert werden können, eventuell mit unterschiedlicher Schwerpunktsetzung. Im Folgenden werden Zusammenhänge zwischen dem mathematischen Argumentieren und den anderen fünf allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards aufgezeigt.

„Mathematisch argumentieren" und „Probleme mathematisch lösen"
Während beim Problemlösen der Fokus auf dem Finden einer Lösung für ein Problem liegt, kann das Argumentieren dazu dienen, Problemlösungen reflektiert zu begründen. Außerdem ist „das Erkennen und Beschreiben von Strukturen und Mustern" (Ufer/Kramer 2015, S. 84) sowohl ein Teilprozess des Argumentierens als auch des Problemlösens (ebd.). Des Weiteren kann das Argumentieren im Sinne des Erarbeitens von Argumentationen, Begründungen oder Beweisen selbst einen Problemlöseprozess darstellen, der adäquate Problemlösestrategien erfordert und somit gleichzeitig das Argumentieren und das Problemlösen fördert (Reiss 2002, S. 9; Reiss/Ufer 2009, S. 169; Brunner 2013, S. 76; Budke/Meyer 2015, S. 10; Jahnke/Ufer 2015, S. 344; Ufer/Kramer 2015, S. 92). Wenn das Argumentieren im Kontext von Problemlösungen stattfindet, gilt dies als motivierend für die Initiierung des Argumentierens (Wittmann 2018, S. 37).

„Mathematisch argumentieren" und „Mathematisch modellieren"
Die Theorien zum Zusammenhang von Argumentieren und Modellieren hängen stark davon ab, wie das Modellieren verstanden wird. Im Sinne der Bildungsstandards ist ein Wechsel zwischen Realsituation und mathematischer Welt im Begriffsverständnis des Modellierens zentral (KMK 2012, S. 15). In diesem Verständnis kann sich das mathematische Argumentieren auf Phänomene der realen Welt beziehen, über die mit Hilfe von mathematischen Modellen argumentiert wird. Die zugehörigen Prozesse sind in diesem Fall gleichzeitig Teil des mathematischen Modellierens (Ufer/Kramer 2015, S. 84). Dadurch kann dem mathematischen Argumentieren in außermathematischen Kontexten eine Bedeutung zukommen, die sich in gesellschaftlichen Entscheidungsprozessen zeigen kann (Vohns 2015, S. 130 ff.). Gleichzeitig kann das Argumentieren auch ein

Teilaspekt des Modellierens sein, wenn beispielsweise über die Passung von Modellen argumentiert wird. Andersherum kann auch das (innermathematische) Argumentieren als eine Form des Modellierens verstanden werden, wenn das Verständnis von Modellieren auch rein innermathematische Kontexte einschließt. Brunner (2013, S. 76) beispielsweise versteht das Beweisen als eine spezifische Art des Modellierens. Sie sieht dabei das Verstehen des innermathematischen Sachverhaltes, um den es beim Beweisen geht, als Erstellen eines Realmodells, das dann durch Mathematisieren in die Beweisidee als mathematisches Modell überführt wird. Auch in der Konzeption der PISA-Studie wird ein weiter Modellierungsbegriff zugrunde gelegt und das Argumentieren in diesem Zusammenhang betrachtet (siehe Abschnitt 2.2.1).

„Mathematisch argumentieren" und „Mathematische Darstellungen verwenden"
Ein Teilprozess des Argumentierens ist, mit Hilfe von Argumenten andere zu überzeugen. Dies fällt in den Prozessbereich *Überzeugen und Darstellen* nach Leuders (2011b, S. 268, S. 270), denn für eine überzeugende Argumentation ist die Darstellung der Argumente, also die Auswahl adäquater verständlicher Sprache und angemessener Darstellungsmittel, von entscheidender Bedeutung (Heckmann/Padberg 2012, S. 27). Außerdem können geeignete Darstellungen, beispielsweise graphischer oder materialgestützter Art, das Argumentieren erleichtern, vor allem im Gegensatz zu rein verbal geführten Argumentationen (Wittmann 2018, S. 37).

„Mathematisch argumentieren" und „Mathematisch kommunizieren"
Das Argumentieren kann in „natürliche[n] Kommunikationssituationen[, in denen] die Schülerinnen und Schüler ihre Lösung erläutern und auch vertreten sollen" (Wittmann 2018, S. 37), initiiert und praktiziert werden. Außerdem gelten Argumentieren, Begründen und Beweisen als Aktivitäten, „die sich im Unterricht in einem diskursiven Rahmen abspielen und deshalb einen fachlichen Austausch in einem Gespräch erforderlich machen" (Brunner 2014b, S. 229), sodass dieser Austausch zwingend auch mathematisches Kommunizieren erfordert; es „kann nur argumentieren, wer kommuniziert" (Storz 2018, S. 11). Teilweise wird sogar das Argumentieren als Teilbereich des Kommunizierens verstanden (Leuders 2011a, S. 93 ff.[6]; Budke 2013, S. 354; siehe auch Abschnitt 2.1.5) und es gibt konkrete Situationen, in denen sich Argumentieren und Kommunizieren auch nicht trennscharf voneinander abgrenzen lassen (Storz 2018, S. 21). Eine Gemeinsamkeit der beiden Kompetenzen stellen die

[6] In diesem Band von Leuders ist das Kapitel „Beweisen – Argumentieren" (Hefendehl-Hebeker/ Hußmann 2011) als Abschnitt von „Mathematik kommunizieren" (Leuders 2011a, S. 59 ff.) realisiert.

sprachlich-linguistischen und sozial-kommunikativen Kompetenzen dar, die dabei eingeschlossen werden (Linneweber-Lammerskitten 2014, S. 179).

„Mathematisch argumentieren" und „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen"
Zum Ausdrücken von Argumentationen sind symbolische und formale Elemente der Mathematik nötig (Storz 2018, S. 11 f.) und gerade der Grad an Formalität und Verwendung von Symbolen kann zur Spezifizierung des Beweisens als spezielles Begründen herangezogen werden (siehe Abschnitt 2.1.3 & 2.1.4). Auch technische Elemente wie Computer oder Taschenrechner können beim Argumentieren unterstützen, beispielsweise beim Aufstellen von Vermutungen oder beim ersten beispielhaften Überprüfen einer Hypothese.

2.3 Die Bedeutung des mathematischen Argumentierens

Dass die Kompetenz des mathematischen Argumentierens als allgemeine mathematische Kompetenz in die Bildungsstandards aller Schulformen aufgenommen wurde, deutet auf ihre weitreichende Bedeutung hin. Diese Bedeutung wird im Folgenden ausführlich dargelegt, indem ausgeführt wird, aus welchen Gründen und mit welchen Zielen das Argumentieren im Mathematikunterricht gefördert werden soll.

Dem Beweisen als spezielle Form des Argumentierens und den Beweisen als Produkte dieser Tätigkeit werden aus fachlicher Perspektive verschiedene Funktionen zugeordnet. Aus diesen können unterschiedliche Gründe für die Förderung der Kompetenz des Argumentierens im Mathematikunterricht abgeleitet werden. Deswegen werden zunächst die Funktionen des Beweisens als Grundlage vorgestellt und dann die vielen Argumente für die Bedeutung des Argumentierens, die sich in der Literatur finden, in vier Bereiche eingeteilt: das Argumentieren als zentrale Tätigkeit in der beweisenden Disziplin Mathematik, die Förderung inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen durch das Argumentieren, die Förderung prozessbezogener und überfachlicher Kompetenzen durch das Argumentieren und der Einsatz des Argumentierens als Instrument zur Lernstandseinschätzung im Mathematikunterricht. Die Kategorisierung dieser Argumente dient mit als Grundlage für die Auswertung der Lehrerinterviews, in denen unter anderem untersucht wird, welche Bedeutung Lehrkräfte dem Argumentieren im Analysisunterricht zuschreiben (siehe Kap. 4 & 5).

2.3.1 Funktionen des mathematischen Beweisens

Als Hauptfunktionen des Beweisens gelten das Verifizieren oder Überzeugen und das Erklären (Hanna 1989; Hersh 1993, S. 389; Hanna 2000, S. 8; Brunner 2014a, S. 13). Die Verifikation garantiert die Wahrheit einer Aussage, während eine Erklärung Einsicht darin gewährt und Verständnis dafür erzeugt, warum die Aussage wahr ist (de Villiers 1990, S. 18 f.). Dabei werden das Verifizieren und das Überzeugen aufgrund ihrer Ähnlichkeit meist gemeinsam genannt. Als Unterscheidung gilt beispielsweise, dass das Überzeugen überwiegend auf andere Personen, vor allem auf die *mathematical community,* bezogen ist, während das Verifizieren auch auf den Beweisenden selbst ausgerichtet sein kann (Reid/Knipping 2010, S. 74). Jedoch könnte der Beweisende sich mit einem Beweis auch selbst von der Wahrheit einer Aussage überzeugen. Eine weitere Unterscheidung ist durch die Art der Gewissheit, die erzeugt wird, möglich. Während durch das Verifizieren absolute, objektive Gewissheit erzeugt wird, dient das Überzeugen der Erzeugung subjektiver und damit relativer Gewissheit, die in verschiedenen Graden vorliegen kann (Kempen 2016, S. 46). Auch Hanna (1989) unterscheidet zwei Hauptfunktionen des Beweisens. In ihrer Terminologie werden „proofs that only prove" unterschieden von „proofs that explain". Dabei haben erstere nur eine verifizierende[7] Funktion, während letztere zusätzlich erklären, warum ein Satz wahr ist. Hersh (1993) unterscheidet zwischen *convincing* und *explaining*. Die Funktion des Verifizierens und Überzeugens ist vor allem im Kontext der mathematischen Forschung wichtig, während der erklärenden Funktion ihre Bedeutung überwiegend im Kontext der Schule zugeschrieben wird (Hersh 1993, S. 389; Hanna 1989; Brunner 2014a, S. 13). Aber auch für viele Mathematiker ist die Erklärung durch einen Beweis wichtiger als die Verifikation (de Villiers 1990, S. 20). Wäre die einzige Funktion eines Beweises eine Aussage zu verifizieren und abzusichern, so würde die von Experten nachgewiesene Existenz eines Beweises genügen, um die Wahrheit der Aussage nicht mehr anzuzweifeln: „the rest of the scholarly world would be glad to take their [the experts'] word for it and to go on" (Davis et al. 2012, S. 167). Da das Beweisen aber

[7] Hanna bezeichnet in ihrer Terminologie diese Funktion als *validation.* Aus dem Kontext ergibt sich, dass aber der Begriff *Verifikation* treffender für das ist, was sie beschreibt, als der Begriff *Validierung*. Brunner (2014a, S. 10) stellt klar, dass sich das Kriterium der Wahrheit nur auf den Inhalt von Aussagen (und nicht auf Argumentationen) beziehen kann und auf der semantischen Ebene überprüft werden muss, während sich das Kriterium der Gültigkeit nur auf Argumentationen (und nicht auf Aussagen) beziehen kann und ein syntaktisches, formallogisches Kriterium darstellt.

noch mehr Funktionen, unter anderem das Erklären, hat, werden Beweise immer wieder geführt.

Bell (1976) schreibt dem Beweisen nicht zwei, sondern drei Arten von Bedeutung zu: *verification/justification*, *illumination* und *systematisation.* Die ersten beiden können mit den oben genannten Hauptfunktionen identifiziert werden. Laut Bell beziehen sich *verification* und *justification* nämlich auf die Wahrheit einer Aussage (wie das Verifizieren und das Überzeugen). *Illumination* bedeutet, dass ein Beweis Einsicht vermittelt, *warum* eine Aussage wahr ist, was auch das Ziel der erklärenden Funktion ist. Laut Bell trägt die Illuminationsfunktion dabei nicht zur Validität eines Beweises bei, sondern zu seiner Schönheit (Bell 1976, S. 24). Die Systematisierungsfunktion sieht er als die für die Mathematik charakteristischste. Ihr zufolge tragen Beweise zur Einordnung von Ergebnissen in ein deduktives System aus Axiomen, Definitionen, Konzepten, Sätzen und Korollaren bei (ebd.). Dadurch werden mathematische Theorien organisiert, Inkonsistenzen aufgedeckt und eine globale Sicht auf die mathematische Welt ermöglicht (de Villiers 1990, S. 20).

De Villiers (1990) benennt als Beweisfunktionen *verification/conviction, explanation, systematisation, discovery* und *communication.* Er ergänzt somit die Funktionen nach Bell um das Entdecken und die Kommunikation. Die Funktion des Entdeckens meint, dass das Beweisen zu neuen Erkenntnissen führen kann, wenn während deduktiver Prozesse Verallgemeinerungen oder neue Aussagen entdeckt werden (ebd., S. 21). Die kommunikative Funktion des Beweisens bedeutet, dass Beweise als Teil des mathematischen Diskurses der Kommunikation zwischen Mathematikern dienen. Dadurch wird mathematisches Wissen gespeichert und weitergegeben (ebd., S. 22). De Villiers kommentiert zum Schluss: „This list of functions is however by no means complete. For instance, we could easily add an **aesthetic** function or that of **personal self-realisation**“ (1990, S. 23, Hervorhebungen im Original). Die Selbstrealisierung bezeichnet dabei den Zustand einer intellektuellen Herausforderung für Mathematiker (Kempen 2016, S. 51).

Die Funktionen nach de Villiers (1990) werden in vielen didaktischen Arbeiten aufgegriffen und – wie von de Villiers angeregt – durch weitere Funktionen ergänzt. So schlagen Hanna und Jahnke (1996) eine Ergänzung durch drei weitere Funktionen vor: Konstruktion (einer empirischen Theorie), Exploration (der Bedeutung einer Definition oder der Konsequenzen einer Annahme) und Inkorporation (eines bekannten Faktums in einen anderen Bereich, um es aus einer neuen Perspektive zu betrachten) (vgl. Hanna 2000, S. 8). Zusätzlich können Beweise dazu dienen, konzeptuelles Verständnis zu entwickeln, mathematisches Wissen zu sichern und wichtige Ergebnisse zu rekapitulieren (Kempen 2016, S. 51 ff.).

Zum Lernen des Beweisens gehört der Aufbau eines adäquaten Beweisverständnisses. Deswegen sollten die verschiedenen Beweisfunktionen beim Lehren von Beweisen mitbedacht werden (Kempen 2016, S. 45). Die vorgestellten Funktionen gelten aber nicht nur für das Beweisen, sondern können allgemeiner auf das mathematische Argumentieren bezogen werden, insbesondere dann, wenn das Beweisen als spezielle Form des Argumentierens verstanden wird und/oder das Argumentieren in der Schule als Hinführung zum formalen Beweisen dient (Jörissen/Schmidt-Thieme 2015, S. 402). Dabei sind die genannten Funktionen nicht nur deshalb von Bedeutung, weil die Kenntnis dieser Funktionen ein Bestandteil mathematischer Argumentationskompetenz ist. Vielmehr können aus diesen Funktionen Gründe für die Förderung eben dieser Kompetenz abgeleitet werden. Dies fließt in die nachfolgenden Ausführungen mit ein.

2.3.2 Bedeutung des Argumentierens in der Disziplin Mathematik

Für die Mathematik als beweisende Disziplin gelten speziell das Beweisen und allgemeiner das Argumentieren als charakteristische Tätigkeiten, die entscheidend dazu beitragen, die Mathematik von anderen Wissenschaften zu unterscheiden (z. B.: Bürger 1998, S. 585; Heintz 2000; Bürger 2000, S. 32; Reiss 2002, S. 1; Ufer/Kramer 2015, S. 84; Nagel/Reiss 2016, S. 302). Diese Bedeutung des Argumentierens zeigt sich auch durch die Vielzahl an Funktionen, die das Beweisen und das Argumentieren innerhalb der Disziplin haben (siehe Abschnitt 2.3.1). Lernende der Mathematik sollen ein adäquates Bild der Mathematik als forschender Disziplin erwerben. Daraus ergeben sich zweierlei Konsequenzen für den Mathematikunterricht, die sich gegenseitig beeinflussen.

Schüler müssen in der mathematischen Grundtätigkeit des Argumentierens ausgebildet (Bürger 1998, S. 585) und dadurch zur Tätigkeit des Beweisens hingeführt werden (Jörissen/Schmidt-Thieme 2015, S. 402). Argumentieren ist also ein explizites Lernziel (Wittmann 2018, S. 34). Deswegen sollen Lernende zur Rezeption und Produktion mündlicher und schriftlicher Argumentationen angeregt werden und dadurch Argumentationskompetenz entwickeln (Budke/Meyer 2015, S. 14; Ufer/Kramer 2015, S. 83; siehe auch Abschnitt 2.2.2).

Darüber hinaus sollen Schüler aber auch etwas über das Argumentieren in der Mathematik lernen. Sie sollen die Rolle, die das Argumentieren spielt, erkennen und verstehen. Dazu trägt auch die Kenntnis der unterschiedlichen Beweisfunktionen bei. Sie sollen zudem fachtypische Fragestellungen und Begründungsarten kennenlernen (Budke/Meyer 2015, S. 14). Dabei sollen sie insbesondere Beweise als Produkte der Mathematik anerkennen (Bürger 1998, S. 585; Schwarzkopf 2015, S. 31). Dadurch wird auch die ästhetische Rolle von Beweisen betont (Reid/Knipping 2010, S. 82, S. 221 f.).

Sowohl das Argumentieren zu lernen als auch über das Argumentieren zu lernen spiegeln sich in den Zielen wider, die das NCTM im Bereich des Standards *Reasoning and Proof* sieht:

> *Der Mathematikunterricht sollte rationales Argumentieren und die Konstruktion von Beweisen als Teil des Verstehens von Mathematik vermitteln, so dass alle Schülerinnen und Schüler*
>
> - *Argumentieren und Beweisen als grundlegende und tragende Aspekte der Mathematik erkennen,*
> - *mathematische Vermutungen aufstellen und erforschen („investigate“) können,*
> - *mathematische Argumente und Beweise entwickeln und evaluieren können,*
> - *verschiedene Typen der Argumentation und verschiedene Beweismethoden passend auswählen und benutzen können.*
>
> (NCTM 2000, S. 56, übersetzt von Reiss 2002, S. 5)

Diese Zweiteilung entspricht zweien der drei Ziele des Debattierens (als spezielle Form des Argumentierens) bei Andriessen und Kollegen (2003), nämlich *learning to debate* und *learning about the debate*. Diese können durch das dritte Ziel, *learning from the debate,* ergänzt werden, das meint, dass durch das Argumentieren das Verständnis vertieft und damit inhaltliches Lernen ermöglicht wird (Andriessen et al. 2003, S. 9 f.). Dieser dritte Grund wird im Folgenden im Hinblick auf das Argumentieren im Mathematikunterricht thematisiert.

2.3.3 Förderung inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen durch das Argumentieren

Aus den Funktionen des Beweisens in der Mathematik lassen sich Zusammenhänge zwischen dem Argumentieren und dem inhaltlichen Lernen von Mathematik ableiten. Die erklärende Funktion des Beweisens (und damit auch des Argumentierens) gibt an, dass Argumentationen dazu dienen können, Einsicht in die Gründe, warum eine Aussage wahr ist, und ein Verständnis für diese Gründe zu entwickeln (siehe oben). Dadurch liefert das Argumentieren die Möglichkeit, Einsichten in und Verständnis für die Zusammenhänge mathematischer Inhalte zu bekommen und somit inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen zu fördern. Auch die entdeckende Funktion des Argumentierens dient der Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen, da somit beim Argumentieren entdeckendes Lernen angeregt werden kann, das wiederum inhaltliches Lernen ermöglicht.

Die Bedeutung des Beweisens und Argumentierens für den Erwerb inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen wird vielfach betont. In diesem Zusammenhang wird sowohl die Verankerung und Festigung inhaltlichen mathematischen Wissens und Könnens als auch die Vertiefung und Erweiterung dessen genannt (Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 95; Sill 2019, S. 209, S. 225; Ufer/Kramer 2015, S. 83; Bürger 2000, S. 32). Dabei geht es auch um das Erkennen von Zusammenhängen zwischen Begriffen und somit um den Aufbau eines Wissensnetzes und insbesondere konzeptuellen Wissens (Bürger 1998, S. 586; Wittmann 2018, S. 34). Ein wichtiger Aspekt ist dabei auch die Entwicklung von Verständnis für mathematische Inhalte und Sachverhalte. Dieses Verständnis soll beispielsweise dadurch ermöglicht werden, dass Zusammenhänge, Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten durchdacht und Überlegungen dargestellt werden müssen (Bürger 1998, S. 585; Bürger 2000, S. 31 f.; Budke/Meyer 2015, S. 14). Für Bürger (2000, S. 33) sind wesentliche Aspekte des Verständnisses eines Sachverhalts diesen unterschiedlich darstellen und beschreiben zu können, Beispiele und Gegenbeispiele für diesen Sachverhalt angeben zu können sowie ihn anwenden und zu anderen Sachverhalten in Beziehung setzen zu können. All diese Tätigkeiten können beim Argumentieren angeregt und gefördert werden. Auch Heckmann und Padberg (2012) sehen einen engen Zusammenhang zwischen dem Verständnis eines Sachverhalts oder eines Verfahrens und dem argumentativen Umgang mit diesem:

> *Ein* Sachverhalt *ist verstanden, wenn man weiß, worauf er sich bezieht (und entsprechende Anwendungsbeispiele angeben kann), was er aussagt, unter welchen Voraussetzungen er gilt und welche Konsequenzen er hat. Zu einem vollkommenen Verständnis gehört zusätzlich auch, dass man begründen kann, weshalb der Sachverhalt gilt. Ebenso gilt ein* Verfahren *nur dann als voll verstanden, wenn man weiß, warum es funktioniert.*
>
> (Heckmann/Padberg 2012, S. 13 f., Hervorhebungen im Original)

Das Erzeugen von Verständnis durch das Argumentieren wird außerdem dadurch begründet, dass dabei der Kern der Sache offengelegt wird: „Proof, in its best instances, increases understanding by revealing the heart of the matter“ (Davis et al. 2012, S. 167).

Jahnke (1978) stellt das Beweisen und Begründen aus der Perspektive der Wissensentwicklung dar und kritisiert, dass dem Beweisen „im allgemeinen [sic.]

keine produktive, inhaltlich-entwickelnde Rolle beigemessen“ (ebd., S. 274) wird. Krummheuer (2003) greift diese Arbeit auf und führt aus: „Eine konstitutive Funktion für die Ermöglichung mathematischer Lernprozesse wird – weit grundsätzlicher – dem Argumentieren in unseren eigenen Arbeiten zugeschrieben.“ (ebd., S. 247). Diese Zuschreibung basiert auf der Ansicht des Argumentierens als narrativ geprägte Interaktion und der Annahme, dass narrative Prozesse durch individuelle Sinnkonstruktionen und kooperative Handlungen inhaltliches Lernen unterstützen. Als Basis seiner Theorie nimmt Krummheuer (2015, S. 51) an, dass das Lernen von Mathematik von der Teilnahme der Lernenden an kollektiven Argumentationsprozessen abhängig ist. Argumentieren wird als Voraussetzung und nicht als Produkt des Lernens betrachtet, sodass Mathematiklernen als argumentatives Lernen betrachtet wird (ebd., S. 53). Diese Annahmen werden durch die Analyse konkreter Unterrichtssituationen aus der Grundschule unterstützt (Krummheuer 1997, S. 39 ff.). Auch Krummheuer und Brandt (2001) stellen kollektive Argumentationen im Unterricht als „spezifische lernermöglichende und lernförderliche Interaktionsprozesse“ (ebd., S. 18) dar, sodass Argumentieren sowohl Lernziel als auch Voraussetzung für das Lernen von Mathematik ist (ebd., S. 19). Der Prozess des Argumentierens trägt also zum Erwerb inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen bei. Dabei verwenden Krummheuer und Brandt einen weiten Argumentationsbegriff, der eng an das rhetorische Argumentationsverständnis und an die Idee eines kollektiven, dialogischen Lernens geknüpft ist (ebd., S. 19 f.).

Ein Blick über die Grenzen der Mathematik hinaus zeigt, dass auch in der Forschung zum Argumentieren allgemein die Vorteile des Argumentierens für das fachlich-inhaltliche Lernen thematisiert werden, insbesondere im Bereich der Naturwissenschaften und der Mathematik (Budke/Meyer 2015, S. 15). Es sind jedoch derzeit keine empirischen Studien aus dem Bereich der Mathematikdidaktik bekannt, die einen Einfluss des Argumentierens auf den Erwerb inhaltsbezogener Kompetenzen belegen. Die von Budke und Meyer (2015, S. 15) angeführten Studien beziehen sich allesamt auf das naturwissenschaftliche Lernen, nicht auf die Mathematik.

Wuttke (2005) untersuchte in einer kommunikationsanalytischen Studie den Einfluss unterschiedlicher Arten von Unterrichtskommunikation auf Wissensgenerierung und -vernetzung bei Schülern einer selbstorganisiert lernenden Klasse im Bereich der Ausbildung von Industriekaufleuten. Sie unterschied dabei zwischen den Kategorien *deklaratives Wissen* und *Wissensvernetzung*, die in einem Test zum Lösen materialwissenschaftlicher Probleme erfasst wurden (ebd., S. 207). Die Unterrichtskommunikation wurde in Bezug auf Sprechakte analysiert (ebd., S. 195). Dabei wurden drei Arten von Kommunikationstypen in

Argumentationssequenzen unterschieden. *Disputational talk* ist auf unreflektierte Konfrontation gerichtet, *cumulative talk* ist von unkritischen Zustimmungstendenzen geprägt und *exploratory talk* „ist durch logisches Schlussfolgern und begründetes Argumentieren sowie durch effektive Kooperation charakterisiert“ (ebd., S. 138). *Exploratory talk* enthält somit kritische Auseinandersetzungen mit Ideen und Lösungswegen sowie begründete fachliche Kritik und Gegenvorschläge. Deswegen wird angenommen, dass *exploratory talk* „kognitive Konflikte auslöst und durch eine Vielzahl begründeter Argumente und Lösungswege Anbindung an individuelles Vorwissen ermöglicht“ (ebd., S. 231). In der Studie wurde insbesondere ein Zusammenhang zwischen *exploratory talk* und Wissensvernetzung gefunden (ebd., S. 237), auch wenn diese Art von Argumentationssequenzen nur selten vorkam (ebd., S. 231). Zusätzlich wurde auch die Dauer des Argumentierens und dessen Einfluss untersucht. Es zeigte sich: „Je häufiger lange Sequenzen qualitativ hochwertiger Argumentationen stattfinden, desto leichter fällt es Schülern, ihr Wissen zu vernetzen, da diese durch die unterschiedlichen und begründeten Sichtweisen der Teilnehmer hochwertige und vielfältige Anbindungsmöglichkeiten an das eigene Vorwissen zur Verfügung stellen“ (ebd., S. 238). Die bloße Übernahme von Redeanteilen im Unterricht durch die Schüler, wie sie sich meist im lehrerzentrierten Unterricht findet, fördert zwar den Aufbau deklarativen oder Faktenwissens, nicht aber die Wissensvernetzung (ebd., S. 260 f.). Offen bleibt an dieser Stelle, inwiefern sich diese Ergebnisse speziell auf mathematische Argumentationssituationen im Unterricht übertragen lassen, da hier tendenziell weniger unterschiedliche Sichtweisen von Lernenden erwartet werden. Trotzdem sollte auch im Mathematikunterricht die Anbindung an das Vorwissen und damit auch die Wissensvernetzung günstig beeinflusst werden, wenn qualitativ hochwertige Argumentationsprozesse stattfinden. Dies empirisch zu überprüfen, stellt ein wichtiges Forschungsdesiderat für weitere Arbeiten dar.

2.3.4 Förderung prozessbezogener und überfachlicher Kompetenzen durch das Argumentieren

> *Wenn der Mathematikunterricht das Argumentieren pflegt, trägt er nicht nur dazu bei, mathematisches Wissen sicher zu verankern; er trägt auch auf fachspezifische Weise zu einer Haltung bei, die gedankliche Klarheit und kritische Rationalität als Werte empfindet und pflegt.*
>
> (Hefendehl-Hebeker/Hußmann 2011, S. 95)

Neben der Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen wird durch das mathematische Argumentieren also auch der Erwerb überfachlicher Kompetenzen ermöglicht. Dies zeigt sich schon daran, dass das Argumentieren an sich eine Tätigkeit ist, „die für viele Lebens- und Wissensbereiche bedeutungsvoll ist" (Bürger 1998, S. 585). So entwickeln Schüler durch das mathematische Argumentieren Argumentationskompetenzen, die über die Mathematik hinausreichen. Dazu gehört „Dinge sachlich zu begründen (aktive Perspektive) und kritisch zu hinterfragen (passive Perspektive)" (Storz 2018, S. 56) sowie auch ein „Verständnis für gesellschaftliche Argumentationen und Fähigkeiten sich an diesen zu beteiligen" (Budke/Meyer 2015, S. 14). Der Mathematikunterricht kann in diesem Zusammenhang beispielsweise die Teilkompetenzen fördern, in gesellschaftlichen Argumentationen mathematische Argumente zu verwenden und logisch stringent zu begründen. Das Verfassen mathematisch fundierter und gesellschaftlich bedeutsamer Argumentationen obliegt meist mathematischen Experten. Die Rezeption mathematikhaltiger Argumentationen und das Treffen verantwortungsvoller Entscheidungen auf deren Basis ist in der heutigen Gesellschaft aber eine wichtige Fähigkeit allgemeingebildeter Laien, nicht nur aber auch im Bereich des politischen Handelns (Vohns 2015, S. 128 f.). Diese Idee geht zurück auf das Konzept der Höheren Allgemeinbildung von Fischer (2001). Diesem Konzept zufolge kommt „höher Gebildeten" eine „Vermittlungsaufgabe […] zwischen Experten und der ‚Allgemeinheit'" (ebd., S. 153) zu. Deshalb ist als Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten für den Unterricht die „Kommunikationsfähigkeit mit Experten und mit der Allgemeinheit" (ebd.) heranzuziehen. Allgemeingebildete Laien unterscheiden sich von Experten durch die Arten von Kompetenzen, die sie in einem Fach erwerben sollen. Experten brauchen Grundkenntnisse und -fertigkeiten, müssen diese kreativ anwenden und mit ihnen operieren können sowie über Reflexionskompetenzen in Bezug auf die Bedeutung von Begriffen und Methoden verfügen. Allgemeingebildete Laien hingegen müssen vor allem im Bereich der Grundkenntnisse und der Reflexion gebildet sein, um sich mit den Experten verständigen und deren Expertisen beurteilen zu können (ebd.). Diese Unterscheidung bezieht Fischer vor allem auf das Ergebnis von Lernprozessen. Während des Lernens jedoch hat das Operieren durchaus auch seine Berechtigung, nicht zuletzt, um die anderen beiden Kompetenzbereiche auszubilden (ebd., S. 154 f.). Eben das genannte Reflexionswissen ist dann entscheidend in „Urteils- und Entscheidungsfindungsprozesse[n]" (Vohns 2015, S. 129), bei denen das Argumentieren ein fester Bestandteil ist. Fischer (2012) entwickelt sein Konzept der Höheren Allgemeinbildung weiter zum Bildungskonzept der *Fächerorientierten Allgemeinbildung*, wobei er sich mit dem Allgemeinbildungsbegriff auch auf Heymann (1996) bezieht. Im Konzept der

Fächerorientierten Allgemeinbildung wird die Bedeutung der einzelnen Fächer für die Fähigkeit zur Kommunikation mit Experten betont und darauf hingewiesen, dass entscheidungskompetente Laien anders ausgebildet werden müssen als Experten. Auch hierbei wird wieder die Bedeutung des Reflexionswissens betont (Fischer 2012, S. 6). Im Bereich der Kommunikation mit Experten sind dabei vor allem das Delegieren und Beraten-Werden sowie das Beurteilen von Problemlösungen und das Treffen von darauf bezogenen Entscheidungen wichtige Prozesse (ebd.). Übertragen auf das Argumentieren im Mathematikunterricht können daraus zweierlei Konsequenzen abgeleitet werden. Erstens ist es für die Kommunikationsfähigkeit mit mathematischen Experten entscheidend, dass Schüler deren Argumentationen und Beweise nachzuvollziehen lernen, während das Verfassen von Beweisen den Experten vorbehalten bleiben kann. Zweitens ist es gerade für Reflexions- und Entscheidungsfindungsprozesse auf Basis von Expertenurteilen wichtig, dass auch Laien mathematisch argumentieren und ihre getroffenen Entscheidungen unter Einbezug von Mathematik begründen können. Also sind sowohl rezeptive als auch produktive Argumentationskompetenzen von entscheidender Bedeutung.

Die Bedeutung der Reflexion und des Reflexionswissens bei Fischer (2001; 2012) wird von Peschek (2005) aufgegriffen, auf den Mathematikunterricht bezogen und konkretisiert. Er versteht unter dem Reflexionsbegriff eine Bandbreite von Denktätigkeiten, die er in drei Kategorien einteilt, die *Interpretation von Rechenergebnissen,* die *Analyse der Bedeutung mathematischer Begriffe, Methoden und Darstellungen* sowie die *Bewertung mathematischer Expertisen hinsichtlich ihrer Bedeutung und Aushandlung über Sinn und Bedeutung mathematischer Inhalte im Bildungsprozess* (ebd., S. 59). An den Beispielen von Peschek und Kollegen (2008) wird der Zusammenhang zur Kompetenz des Argumentierens deutlich. Als Beispiel für Reflexion als Prozess wird angegeben: „Nachdenken darüber, warum man eine ganze Liste von Daten durch eine Kennzahl […] repräsentieren will". Ein Beispiel für Reflexionswissen als Produkt ist „Wissen, warum das arithmetische Mittel zur Mittelung von Noten kaum geeignet ist" (Peschek et al. 2008, S. 3). Zur Anregung von Reflexion werden unter anderem „Begründungsaufgaben samt ihres Vergleichs in der Klasse" (ebd., S. 4) angegeben. Das Stellen und die Beantwortung von Warum-Fragen sowie die Bearbeitung von Begründungsaufgaben ist gerade für das mathematische Argumentieren charakteristisch. Außerdem können auch Argumentationen Anlass zur Reflexion geben, wenn beispielsweise die Frage betrachtet wird, welche Rolle ein mathematisches Modell für eine Argumentation in einem Kontext spielt (Peschek et al. 2008, S. 5). Eine weitere Gemeinsamkeit und damit Anlass zur parallelen Förderung von Reflexion und

Argumentieren besteht in der dafür förderlichen fragenden Grundhaltung (Prediger 2005, S. 97). Zusammenfassend kann also das Argumentieren dazu beitragen, im Mathematikunterricht Reflexion zu fördern und Reflexionswissen aufzubauen und somit insbesondere einen Beitrag zur Höheren Allgemeinbildung gebildeter Laien im Sinne von Fischer (2001) leisten.

Des Weiteren fördert das mathematische Argumentieren eine selbständige und gleichzeitig logische und präzise Art des Denkens sowie ein überlegtes Arbeiten, beispielsweise dadurch, dass Zusammenhänge und Beziehungen durchdacht und die Darstellung der Überlegungen präzise gewählt werden müssen (Bürger 1998, S. 585; Bürger 2000, S. 32; Reid/Knipping 2010, S. 82, S. 221 f.; Cramer 2018, S. 7). Diese Art des Denkens und Arbeitens ist auch außerhalb des mathematischen Bereichs bedeutsam. Weitere Kompetenzen, die über die Mathematik hinausgehen und durch das Argumentieren gefördert werden können, sind Kompetenzen im sprachlich-logischen Bereich (Sill 2019, S. 225; siehe auch Abschnitt 6.3).

Durch das Argumentieren können, neben dem mathematischen Argumentieren als Kompetenz an sich, weitere prozessbezogene Kompetenzen gefördert werden, die sowohl innerhalb der Mathematik als auch darüber hinaus von Bedeutung sind, beispielsweise das Problemlösen und das mathematische Kommunizieren (siehe Abschnitt 2.2.3).

Darüber hinaus kann das Argumentieren im Mathematikunterricht auch überfachliche Kompetenzen im sozialen und affektiven Bereich fördern. Budke und Meyer (2015, S. 14) nennen diesbezüglich Interaktionsfähigkeit, Fähigkeit zur Kompromiss- und Konsensfindung, Fähigkeit, Widerspruch und unterschiedliche Ansichten auszuhalten, Persönlichkeitsbildung und Fähigkeit zur friedlichen Lösungsfindung, ohne die Liste vollständig abzuschließen.

2.3.5 Argumentieren als Instrument zur Lernstandseinschätzung

Ein weiterer Aspekt, durch den sich eine Begründung für eine Aufnahme des Argumentierens in den Mathematikunterricht ergibt, ist, dass das Argumentieren ein Instrument zur Lernstandseinschätzung für Lehrkräfte darstellen kann. So kann das Argumentieren zur Verständnisüberprüfung im Bereich des inhaltlichen Lernens dienen, denn „Lernende haben einen mathematischen Begriff verstanden, wenn sie […] mit dem Begriff beim Argumentieren und Problemlösen arbeiten können“ (Vollrath/Roth 2012, S. 48). Die Performanz bei argumentativen

Tätigkeiten kann also Lehrkräften einen Eindruck über die Tiefe des Verständnisses behandelter Begriffe und Konzepte vermitteln (Stylianides et al. 2016, S. 249). Wenn Schüler argumentieren, legen sie dabei ihre Gedanken offen. Somit können Lehrkräfte deren Denkweisen erkennen und eventuell vorhandene Miss- oder Fehlverständnisse aufdecken (Bürger 1998, S. 585). Knuth (2002b, S. 79) nennt diese Rolle des Beweisens *Displaying thinking* und sieht einen starken Zusammenhang zur Kommunikationsfunktion des Beweisens. Die Lehrkräfte in seiner Studie (siehe Abschnitt 3.1) sahen in der Offenlegung der Gedanken in Abgrenzung zur Kommunikationsfunktion vor allem den Vorteil, dass dadurch das Verständnis der Schüler beurteilt werden kann.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass das Argumentieren im Mathematikunterricht viele unterschiedliche Funktionen übernimmt. Dadurch dass das Argumentieren selbst als Kompetenz erworben und über die Rolle des Argumentierens in der Mathematik etwas gelernt wird, trägt es zur Ausbildung eines adäquaten Bildes der Mathematik als eigene Welt und als wissenschaftliche Disziplin bei. Gleichzeitig wird durch das Argumentieren mathematisch-inhaltlicher und überfachlicher Kompetenzerwerb gefördert und Lehrkräfte haben zudem die Möglichkeit, die Produktion von Schülerargumentationen zur Lernstandseinschätzung heranzuziehen.

3 Forschungsstand zum Argumentieren im Analysisunterricht (aus Lehrerperspektive)

In der TIMSS Videostudie von 1995 wurden 90 Klassen in Deutschland, den USA und in Japan videographiert und analysiert. Dabei ergab sich, dass nur in einem Viertel der Stunden Argumentieren im Sinne eines schlussfolgernden Arbeitens („*reasoning*") stattfand. Diese Stunden verteilten sich ungleichmäßig auf die drei untersuchten Länder und die mathematischen Teilbereiche. In Japan wurde immerhin in 53 Prozent der Stunden schlussfolgernd gearbeitet, in den USA gar nicht und in Deutschland wurden in 20 Prozent der Stunden „*reasoning*"-Situationen gefunden. Insgesamt traten fast alle Beispiele in Geometriestunden auf (Manaster 1998, S. 793 f.). Stylianides und Kollegen (2016) stellen fest, dass es wenig Forschung zum Thema *proof in typical classroom settings* gibt, und vergleichen die Ergebnisse der TIMMS Videostudien von 1995 und 1999 mit zwei aktuelleren, kleineren, US-amerikanischen Untersuchungen zur Praxis des Beweisens im Mathematikunterricht. Sie fassen zusammen: „the place of proof in typical K-12 school mathematics classroom practice […] is marginal" (ebd., S. 250). Außerdem vermissen sie wissenschaftliche Arbeiten, die vielversprechende Interventionen für das Lehren und Lernen des Beweisens entwickeln. Unklar bleibt, wie die Lage in Deutschland rund 20 Jahre nach der TIMMS Videostudie aussieht. Subjektive und unsystematische Beobachtungen im Unterricht und Aussagen in Gesprächen mit Lehrkräften und Mathematikdidaktikern decken sich mit einzelnen Hinweisen in der Literatur, dass die Kompetenzorientierung und insbesondere das mathematische Argumentieren im Unterricht noch nicht den Stellenwert haben, den sie haben sollten (z. B. Storz 2018, S. 5;

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_3.

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_3

S. 24). Die empirische Grundlage für solch eine Aussage fehlt aber weitgehend. Eine Studie aus den USA zeigt, dass Sekundarstufenlehrkräfte zwar die Bedeutung des Beweisens als mathematische Fähigkeit grundsätzlich kennen, in deren Unterricht aber verfahrensorientierte Fertigkeiten den Vorzug vor beweisbezogenen Aktivitäten bekommen (Kotelawala 2015). Außerdem fand Kotelawala einen Zusammenhang zwischen eigenen Erfahrungen von Lehrkräften mit dem Beweisen und der Bedeutung, die beweisbezogene Aktivitäten in deren Unterricht bekommen (ebd.). Es kann vermutet werden, dass ähnliche Tendenzen auch für deutsche Lehrkräfte gelten, weshalb gerade der Fokus auf die Lehrkräfte und deren Einstellungen und Erfahrungen in der vorliegenden Arbeit zentral ist.

Es gibt zahlreiche empirische Studien im Bereich des Argumentierens und Beweisens im Mathematikunterricht. Reid und Knipping (2010, S. 59 ff.) bieten einen Überblick über empirische Erkenntnisse, die in der mathematikdidaktischen *community* als akzeptiert gelten. Auffällig ist dabei, dass sich die präsentierten Ergebnisse fast alle auf die Perspektive der Lernenden konzentrieren. Wenn Lehrkräfte an den Studien beteiligt sind, so meist in der Rolle von Personen, die selbst argumentieren oder Beweise lesen sollen und dabei ähnliche Schwierigkeiten zeigen wie Schüler. Es fehlt weitgehend die Perspektive von Lehrkräften auf die Lernprozesse von Schülern im Unterricht und das obwohl gerade Lehrkräfte sehr viele Erfahrungen diesbezüglich im täglichen Unterricht sammeln.

Des Weiteren ist auffällig, dass sich die meisten empirischen Studien auf die mathematischen Teilbereiche Geometrie und Arithmetik/Algebra konzentrieren. Es kann vermutet werden, dass die Ursache dafür darin zu suchen ist, dass die Geometrie als traditionelles Gebiet für das Beweisen gilt und dass vor allem der Bereich der Zahlentheorie relativ einfache Aussagen bietet, die begründet werden können, ohne dass vorab eine komplexe mathematische Theorie aufgebaut werden muss (vgl. Wittmann 2018, S. 36). Gerade der Bereich der Analysis, der in der gymnasialen Oberstufe einen Schwerpunkt darstellt, wird nur in wenigen empirischen Studien zum Argumentieren miteinbezogen.

Im Folgenden werden vier Studien vorgestellt, von denen sich eine aus der Perspektive von Lehrkräften auf das formale Beweisen konzentriert, eine auf den Umgang von Lehrkräften mit Beweisen im Unterricht und auf zugehöriges *practical knowledge*, eine auf das Beweisen (in weiterem Sinne) von Lernenden im Bereich der Analysis und eine auf die *beliefs* deutscher Lehrkräfte zum Analysisunterricht, nicht aber speziell zum Argumentieren. Daraus wird am Ende eine Forschungslücke abgeleitet, die die vorliegende Arbeit zu schließen versucht.

3.1 Studie zum Beweisverständnis von Lehrkräften aus den USA (Knuth)

Knuth (2002a,b) führte eine Interviewstudie mit 17 Lehrkräften weiterführender Schulen in den USA durch, um deren Beweisverständnis zu untersuchen. Dieses betrachtet er als grundlegend für die Unterrichtsgestaltung von Lehrkräften. Im englischsprachigen Original verwendet er den Begriff *conceptions of proof* und fasst damit Fachwissen und *beliefs* zum Beweisen zusammen. Den Begriff *proof* verwendet er im Sinne eines „deductive argument that shows why a statement is true by utilizing other mathematical results and/or insight into the mathematical structure involved in the statement. When referring to non-proofs, I will use the term argument or informal proof" (Knuth 2002b, S. 86). Aus seinen Ausführungen lässt sich ableiten, dass er den Begriff *argument* als Überbegriff zu *proof* und *non-proof* verwendet[1]. Die verwendeten Beispiele für *non-proofs* zeigen, dass diese beispielsweise generisch, exemplarisch oder nicht deduktiv sind. Dies spricht für eine formale Sichtweise Knuths auf das Beweiskonzept.

Das Beweisverständnis der Lehrkräfte wurde in Knuths Studie vor allem hinsichtlich der Klassifikation von Argumentationen[2] als Beweise und in Bezug auf unterschiedliche Funktionen des Beweisens nach Bell (1976), de Villiers (1999) und Hanna (1983, 1990) (siehe Abschnitt 2.3.1) untersucht. Die interviewten Lehrkräfte waren Teilnehmer eines Lehrerfortbildungsprogramms. Sie wurden sowohl zu ihrem Beweisverständnis innerhalb der mathematischen Disziplin befragt als auch zu ihrem Beweisverständnis in Bezug auf die Schulmathematik in der Sekundarstufe. Die in den Interviews eingesetzten Argumentationen stammten aus unterschiedlichen mathematischen Bereichen, beispielsweise aus der Zahlentheorie, der Geometrie und der Analysis.

Knuth (2002a,b) konnte zeigen, dass die befragten Lehrkräfte ein breites Verständnis bezüglich der Funktion von Beweisen hatten, sowohl in Bezug auf die Mathematik als Disziplin als auch in Bezug auf den Schulunterricht. Alle Lehrkräfte schlossen die Verifikationsfunktion von Beweisen in ihrem Beweisverständnis ein. Trotzdem gab es Lehrkräfte, die Zweifel an der Allgemeingültigkeit von Beweisen zeigten. Viele Lehrkräfte betrachteten Beweise außerdem als Kommunikationsmittel, die durch soziale Akzeptanz erst zu Beweisen werden. Diese

[1] Z. B. „they believed the argument to be a proof" (Knuth 2002a, S. 389), „there were 13 arguments that constituted proofs and 8 arguments that did not" (ebd., S. 391).

[2] Der von Knuth als Oberbegriff verwendete Begriff *argument* wird hier mit *Argumentation* übersetzt, um mit dem in Kapitel 2 festgelegten Begriffsverständnis der Arbeit übereinzustimmen.

Rolle wurde auch mehrfach in Bezug auf den Mathematikunterricht genannt, wo die Klassengemeinschaft Beweise als solche akzeptieren müsse. Von mehreren Lehrkräften wurde zudem die Rolle von Beweisen bei der Schaffung neuen Wissens und der Systematisierung mathematischen Wissens genannt. Die Schaffung neuen Wissens spielte dabei auch im Mathematikunterricht der Lehrkräfte eine Rolle, weil dadurch Schüler zu „mathematically independent thinkers" (Knuth 2002b, S. 81) werden könnten; die Systematisierung von Wissen hingegen spielte keine solche Rolle. Manche Lehrkräfte sprachen auch von einer erklärenden Funktion des Beweisens. Knuth interpretiert diese Aussagen aber so, dass eine Erklärung des Beweises an sich gemeint ist und nicht die Erklärung der zugrundeliegenden Mathematik:

> *On the surface, these teachers' comments suggest that they do indeed view explanation as a role of proof; however, their comments pertained more to understanding how one proceeded from the premise to the conclusion of proof – a procedural focus – rather than to understanding the underlying mathematical relationships illuminated by the proof.*
>
> (Knuth 2002a, S. 389f.)

Der verständnisfördernde Aspekt des Beweisens fehlte also in den Beweisvorstellungen der befragten Lehrkräfte, sowohl in Bezug auf die mathematische Disziplin als auch in Bezug auf den Schulunterricht, obwohl „of all the roles of proof, its role in promoting understanding is, perhaps, the most significant from an educational perspective" (Knuth 2002b, S. 81). Speziell im Kontext des Schulunterrichts nannten die Lehrkräfte zusätzlich noch die Funktionen der Entwicklung logischen Denkens seitens der Schüler und die Darstellung von Denkprozessen der Schüler. Letztere dient unter anderem der Bewertung von Schülern durch Lehrkräfte (Knuth 2002b, S. 79).

In der Studie mussten Lehrkräfte einschätzen, welche der vorgegebenen Argumentationen als Beweise klassifiziert werden können. Auffällig ist, dass die von Knuth als Beweise klassifizierten Argumentationen auch größtenteils von den Lehrkräften als Beweise angesehen wurden, während die von Knuth nicht als Beweise klassifizierten Argumentationen teilweise auch als Beweise akzeptiert wurden. Dies liegt möglicherweise am abweichenden Begriffsverständnis von *Beweis* bei den Lehrkräften im Gegensatz zum Verständnis von Knuth. Beispielsweise wurde eine generische Begründung der Teilbarkeitsregel durch 3 von einigen Lehrkräften als Beweis angesehen, von Knuth aber nicht (Knuth 2002a, S. 394). Das Begriffsverständnis von *Beweis* variierte bei den Lehrkräften von einem engeren Verständnis, demzufolge ein Beweis logisch-deduktiv die Wahrheit einer Aussage zeigen muss, bis hin zu einem weiteren Verständnis von *Beweis* im Sinne einer überzeugenden Argumentation. Insgesamt herrschte Einigkeit unter den Lehrkräften, dass ein Beweis schlüssig die Wahrheit einer Aussage zeigt (Knuth 2002b, S. 71). Im Bericht der Studie wird leider nicht ausgeführt, ob die Lehrkräfte mit einem weiteren Begriffsverständnis auch diejenigen waren, die mehr der vorgelegten Argumentationen als Beweise klassifizierten als von Knuth intendiert.

In der Studie wurde auch untersucht, welche Kriterien Lehrkräfte für die Klassifikation von Beweisen innerhalb der Mathematik heranziehen. Zur Unterscheidung von Argumentationen in sogenannte *proofs* und *non-proofs* bezogen die Lehrkräfte die angewandte Beweismethode mit ein, teilweise ohne auf die Details einzugehen, sowie die Bewertung der Gültigkeit der gezogenen Schlüsse als mathematisch einwandfrei. Zur weiteren qualitativen Klassifikation von Beweisen, die bereits als solche akzeptiert wurden, beurteilten die Lehrkräfte, wie detailliert die Beweise ausgeführt sind und ob Spezialwissen für das Verständnis des Beweises nötig ist (Knuth 2002a, S. 395 ff.). Auffällig ist auch, dass die Lehrkräfte bei der Frage, welche Argumentationen sie überzeugend finden, häufig solche als überzeugend einschätzten, die durch den Autor der Studie als *non-proofs* klassifiziert werden, also als Argumentationen, die keine Beweise sind. Außerdem zogen die Lehrkräfte bei der Einschätzung der Überzeugungskraft häufiger formale als inhaltliche Kriterien heran. Die herangezogenen Kriterien waren die mathematische Korrektheit, die Greifbarkeit, beispielsweise durch konkrete Beispiele oder Visualisierungen, der Bekanntheitsgrad, die Allgemeingültigkeit und die gewährte Einsicht in die mathematischen Gegebenheiten.

> *It is interesting that the only arguments that teachers identified as convincing because they offered an insight were arguments that included visual representations. This was the case despite the fact that the argument sets were designed to include other, nonvisual, arguments that were (thought to be) explanatory.*
>
> (Knuth 2002a, S. 399)

Ergänzend dazu untersuchte Knuth (2002b) auch, wie Lehrkräfte Beweise in Bezug auf die Schulmathematik beschreiben und kategorisierte diese Beschreibungen als *formale*, *weniger formale* und *informelle* Beweise. Die weniger formalen Beweise unterscheiden sich von den formalen durch einen geringeren Grad an Strenge, werden aber trotzdem als gültige Beweise angesehen, während die informellen „Beweise" von Knuth nicht mehr als Beweise akzeptiert werden, da sie beispielsweise auf exemplarischen Untersuchungen beruhen.

Die Lehrkräfte wurden auch gefragt, welche Rolle Beweisen im Schulunterricht spielen sollte und die meisten antworteten, dass das Beweisen im Sinne von Knuth – also das formale und weniger formale Beweisen in der Klassifikation der Lehrkräfte – nicht für alle Schüler angemessen sei, sondern nur für höhere Jahrgangsstufen oder in Fortgeschrittenenkursen (Knuth 2002b, S. 73). Dies steht für Knuth im Kontrast dazu, dass in den USA die NCTM-Standards das Beweisen für alle Schüler vorsehen. Die befragten Lehrkräfte sehen hingegen das informelle „Beweisen" als zentrale Idee der Sekundarstufenmathematik an. Dies deutet darauf hin, dass die befragten Lehrkräfte die NCTM-Standards unterschiedlich interpretierten. Möglicherweise gibt es Lehrkräfte, die das dort angeführte Beweisen im Sinne Knuths interpretieren und folglich nicht für alle Schüler für geeignet halten und andere Lehrkräfte, die das Beweisen in den NCTM-Standards breit interpretieren, darunter formales, weniger formales und informelles „Beweisen" verstehen, und folglich die Vorgaben für den Schulunterricht für angemessen halten.

3.2 Studie mit italienischen Lehrkräften zu *beliefs* zum und zum Umgang mit dem Beweisen (Furinghetti/Morselli)

Furinghetti und Morselli (2011) berichten von einer qualitativen Interviewstudie mit zehn italienischen Lehrkräften zum Umgang mit dem Beweisen im Unterricht. Dabei wurden insbesondere Faktoren untersucht, die diesen Umgang beeinflussen, mit Blick auf mögliche Gründe für Ungereimtheiten zwischen *beliefs* und Umsetzung. Dazu wurden Interviews mit Lehrkräften der oberen Sekundarstufe zum Thema Beweisen geführt, die das Beweisen als Konzept, das Lehren und Lernen des Beweisens, Herangehensweisen an das Beweisen, Schülerschwierigkeiten beim Beweisen, die Verwendung von Schulbüchern beim Beweisen und italienische Richtlinien für das Unterrichten von Mathematik thematisierten (ebd., S. 591). Im Anschluss wurden die direkten Aussagen der Lehrkräfte, sowie das zugrunde liegende sogenannte *practical knowledge* (vgl. Elbaz 1983; siehe Abschnitt 4.1) analysiert, welches das Wissen der Lehrkräfte über ihre Arbeit umfasst und auch *beliefs* miteinschließt (Furinghetti/Morselli 2011, S. 589). Der Studie lag ein tendenziell enges, formales Beweisverständnis zugrunde. Sie war nicht auf einen mathematischen Teilbereich eingeschränkt, es wurden aber Beispielbeweise zum Satz des Pythagoras als Material innerhalb der Interviews verwendet (ebd., S. 591). Außerdem zeigen Furinghetti und Morselli, dass die Geometrie in vielen Fällen als am besten geeigneter Teilbereich für das Lehren des Beweisens angesehen wird und das Lehren des Beweisens somit häufig auf die Geometrie beschränkt ist (ebd., S. 592).

Zum Umgang mit dem Beweisen im Klassenzimmer fanden Furinghetti und Morselli zwei Tendenzen: Entweder es werden Sätze und zugehörige Beweise präsentiert oder Schüler werden in die Beweiskonstruktion mit eingebunden und es wird auch von ihnen erwartet, eigene Beweise zu einfachen Aussagen zu entwickeln. Im ersten Fall stehen eher die Beweisfunktionen des Überzeugens und Systematisierens und die Perspektive von Beweisen als Produkte im Vordergrund, im zweiten Fall soll das Beweisen mathematisches Verständnis fördern und wird als Prozess wahrgenommen. Die Art, wie das Beweisen behandelt wird, hängt hauptsächlich von drei Faktoren ab, nämlich wie der schulische Kontext wahrgenommen wird, wie viel Aufmerksamkeit auf die Erwartungen und Bedürfnisse der Schüler gelegt wird und wie die Mathematik und das Lehren und Lernen von Mathematik gesehen wird (ebd., S. 592 f., S. 597). Den Übergang vom individuellen *belief system* der jeweiligen Lehrkraft zur tatsächlichen Umsetzung im Unterricht beschreiben Furinghetti und Morselli mit dem Konstrukt eines *leading belief*, der die Entscheidung von Lehrkräften hinsichtlich des Umgangs mit verschiedenen *beliefs* und dabei auftretenden Konflikten erklären kann. So stellen sie eine Lehrkraft vor, die eine Lerner-orientierte Sicht auf das Lehren und Lernen von Mathematik hat und außerdem auf Inhalte und konzeptuelles Verständnis fokussiert ist, weshalb sie von Furinghetti und Morselli als *explainer* (in Abgrenzung zum *instructor*) bezeichnet wird. Andererseits sieht der schulische Kontext bei dieser Lehrkraft so aus, dass sie an einer humanistischen Schule unterrichtet und die Schüler tendenziell wenig Interesse an Mathematik haben und am liebsten „Rezepte" vermittelt bekommen. In der Praxis verzichtet die Lehrkraft darauf, ihre Idealvorstellungen umzusetzen und tritt nicht nur in der Rolle des *explainer,* sondern auch in der Rolle des *instructor* auf. Sie entwickelt Beweise an der Tafel und versucht, die Schüler miteinzubeziehen. Letztendlich müssen die Schüler die fertigen Beweise auswendig lernen. Furinghetti und Morselli erklären sich das dadurch, dass der *leading belief* der Lehrkraft beinhaltet, dass die Erwartungen und Bedürfnisse der Schüler berücksichtigt werden müssen, und sie sich der Situation an ihrer Schule deshalb anpasst. Im Gegensatz dazu präsentiert eine andere Lehrkraft an derselben Schule Beweise ausschließlich und die Schüler müssen diese am Ende als Produkte lernen. Die Schüler werden nicht aktiv miteinbezogen, was am *leading belief* dieser Lehrkraft liegt, die Mathematik als eine Sammlung von Wissen ansieht, das den Schülern so komplett wie möglich präsentiert werden muss (ebd., S. 594 f.).

3.3 Studie zu Beweisvorstellungen und eigenem Beweisen von deutschen und kanadischen Lernenden im Analysisunterricht (Grundey)

Grundey (2015) führte eine zyklisch aufgebaute Designstudie in zwei deutschen und zwei kanadischen Lerngruppen durch, rekonstruiert dabei ein komplexes Zusammenspiel von Beweisvorstellungen und Beweisaktivitäten und ermöglicht so einen Einblick in die Beweisprozesse von Lernenden. Dem liegt die Annahme zugrunde, „dass sich die Beweisvorstellungen der Lernenden und ihre Beweisfähigkeiten wechselseitig beeinflussen und dass sich dieses Zusammenspiel hinderlich, aber auch förderlich im Lernprozess auswirken kann“ (ebd., S. 3). Als theoretischen Hintergrund greift Grundey dafür auf den Ansatz der Problematik der Sichtbarkeit von Hemmi (2006, 2008) zurück, die ein Problem bei der Vermittlung des Beweisens in der *condition of transparency* (bei Grundey *Problematik der Sichtbarkeit*), sieht, der fehlenden Transparenz hinsichtlich des Wechselspieles der Beweis- und der Inhaltsebene gegenüber den Lernenden (Grundey 2015, S. 3 f.). Darauf aufbauend entwickelt Grundey ein Designexperiment, in dem dieses Wechselspiel genauer untersucht wird. „Durch die bewusste Thematisierung von Beweisen und deren Reflexion auf der Metaebene soll die gebotene Transparenz zum Wechselspiel zwischen Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit mathematischer Beweise hergestellt werden“ (ebd., S. 46). Nach Erfassen der Beweisvorstellungen bei den Lernenden besteht das Unterrichtskonzept aus einer Beweisrezeptions-, einer Beweisdiskussions- und einer Beweiskonstruktionsphase, die dreimal zyklisch durchlaufen werden. Dabei beantwortet Grundey die Fragen, über welche Beweisvorstellungen die Schüler verfügen, wie diese mit dem eigenständigen Beweisen zusammenhängen und ob das Unterrichtskonzept sich zur Förderung von Beweisvorstellungen und eigenständigem Beweisen sowie zur Analyse diesbezüglicher Lernprozesse eignet (Grundey 2015, S. 6).

Grundey versteht das Beweisen aus einer soziokonstruktivistischen Sichtweise heraus und betont die soziale Dimension bei der Frage, was als Beweis gilt. Kriterien für die Akzeptanz von Beweisen werden diesem Verständnis zufolge in ihrem Unterrichtskonzept innerhalb der Lerngruppen ausgehandelt. Diese Perspektive grenzt sie von einem formal-deduktiven Beweisverständnis ab (ebd., S. 9 ff.). Außerdem nutzt Grundey für ihre Analysen die unterschiedlichen Beweisfunktionen nach Hersh (1993), Hanna (1996) und de Villiers (1990) (Grundey 2015, S. 14 ff.; siehe auch Abschnitt 2.3.1).

Im ersten Durchgang des Designexperiments wurden die Schüler mit prototypischen Begründungen von fiktiven Schülern zu der Aussage, dass ein Polynom zweiten Grades genau einen Extrempunkt besitzt, konfrontiert. Bei den vorgelegten Begründungen handelt es sich um je eine narrativ-deduktive, eine formal-deduktive, eine empirisch-rechnerische, eine fehlerhafte formal-deduktive und eine empirisch-graphische Begründung sowie um einen Autoritätsbeweis („wir haben gelernt, dass…") und eine fehlerhafte Widerlegung durch ein Gegenbeispiel (Grundey 2015, S. 71)[3]. In den weiteren Durchgängen wurden jeweils ähnliche Aussagen und Begründungsarten thematisiert. Für die jeweils anschließenden Beweiskonstruktionsphasen in Grundeys Designexperiment wurden strukturell ähnliche Aussagen verwendet (Grundey 2015, S. 74).

Die Unterrichtsstunden in den deutschen Klassen und den kanadischen Kursen wurden videographiert und mit Hilfe von Audiogeräten dokumentiert. Außerdem wurden Gruppeninterviews durchgeführt (ebd., S. 98 f.). Es wurden die schriftlichen Beweisprodukte der Schüler, die Antworten zur Frage nach den Beweisvorstellungen sowie die Unterrichtssituationen ausgewertet (ebd., S. 105 ff.).

Zu Beginn des Designexperiments zeigte sich in allen Lerngruppen eine enge Beweisvorstellung, die stark algebraisch geprägt ist. Zudem dominierte die Verifikationsfunktion von Beweisen (ebd., S. 117 f., S. 129). Am Ende des Designexperiments zeigten sich deutliche Veränderungen. Die Beweisvorstellungen waren erweitert, es wurden mehr Arten des Schließens, Formen der Darstellung und Beweisfunktionen genannt, der Aspekt der Allgemeingültigkeit war in den Vordergrund gerückt und die soziale Dimension des Beweisens hatte an Bedeutung gewonnen (ebd., S. 30 f., S. 145 f.). Allerdings blieb bei vielen Lernenden die Fokussierung auf die formale äußere Darstellung erhalten (ebd., S. 274). Die Veränderungen sind in den unterschiedlichen Lerngruppen unterschiedlich, was Schlüsse darauf zulässt, dass vor allem das Verhalten der Lehrkraft große Auswirkungen auf die Veränderung von Beweisvorstellungen bei Schülern hat (ebd.).

In den Beweisdiskussionsphasen stellte sich das Wechselspiel zwischen der Beweis- und Inhaltsebene als besonders hilfreich für die Bewertung von Beweisen heraus. Dies schien den Schülern aber nicht bewusst zu sein. Wurde im Gegensatz dazu beispielsweise nur die äußere Form auf der Beweisebene betrachtet, so war dies hinderlich, da beispielsweise korrekte narrativ-deduktive Begründungen fälschlicherweise abgelehnt wurden (ebd., S. 206 f.). Die unterschiedlichen Verhaltensweisen der Lehrpersonen während der Diskussionen werden von Grundey als unterschiedlich förderlich eingestuft. Insbesondere wird ein ausgewogenes

[3] Vier dieser Beispielbegründungen wurden als Ausgangspunkt für die Entwicklung der *prompts* für die Lehrerinterviews in meiner Studie (siehe Kap. 4 & 5, sowie Anhang E im elektronischen Zusatzmaterial) verwendet.

Verhalten positiv hervorgehoben, das sich dadurch auszeichnet, dass „die Lehrperson die Schülerantworten zum einen aufgreift und wertschätzt und weiterhin an entscheidenden Stellen im Lehr-Lernprozess lenkend eingreift und auf wichtige Aspekte fokussiert“ (ebd., S. 222).

In die Aufgaben zur Beweiskonstruktion baute Grundey intendierte „Bruchstellen“ ein, um den Umgang der Schüler mit diesen möglichen Schwierigkeiten zu untersuchen. Eine Aussage war so konstruiert, dass keine hinreichende Bedingung vorlag, um aus der ersten Ableitung mit Hilfe der zweiten Ableitung auf Extremstellen schließen zu können, eine Aussage war absichtlich falsch und erforderte eine Widerlegung durch ein Gegenbeispiel und eine weitere Aussage erforderte einen komplexen algebraischen Ansatz. Die Schüler stießen wie erwartet aufgrund ihres formal-rechnerischen Ansatzes auf die intendierten Schwierigkeiten. Viele hielten an ihrem algebraischen Ansatz fest und konnten die Schwierigkeiten dadurch nicht umgehen. Dies deutete Grundey als Problem auf der Beweisebene, da sich die Lernenden weigerten, ihre inhaltlich korrekten Begründungen in narrativer Form aufzuschreiben und so die formal-algebraischen Schwierigkeiten zu umgehen. Zusätzlich ergaben sich inhaltliche Schwierigkeiten und Schwierigkeiten mit der Allgemeingültigkeit der Aussagen. Visuelle Vorstellungen der Graphen von Polynomfunktionen können beim Beweisen förderlich sein, besonders bei der Bewertung der Korrektheit von Aussagen. Jedoch können sich falsche visuelle Vorstellungen auch hinderlich auswirken. Auch die Orientierung an den Prototypen aus der ersten Phase der Unterrichtskonzeption kann sich positiv auf den Beweisprozess der Schüler auswirken, sowohl auf der Beweis- als auch auf der Inhaltsebene (ebd., S. 269 ff.).

Die von Grundey der Analyse zugrunde gelegte Problematik der Sichtbarkeit, die beschreibt, dass gerade die „Unsichtbarkeit“ des Wechselspiels zwischen Inhalts- und Beweisebene zu Schwierigkeiten im Beweisprozess führen kann, stellte sich als geeignete Erklärung für viele Konflikte heraus, die Grundey (2015, S. 275 ff.) beobachtete:

- Probleme bei den Vorstellungen auf der Beweisebene können die Lernenden daran hindern, einen eigenständigen Beweis zu notieren, den sie auf der Inhaltsebene gefunden haben. Dies zeigte sich vor allem in Bezug auf die engen formal-algebraischen Beweisvorstellungen der Lernenden.
- Probleme auf der Inhaltsebene und beim Wechselspiel zwischen Inhalts- und Beweisebene führten zu Schwierigkeiten in den Beweisprozessen.
- Die Fokussierung auf eine der beiden Ebenen kann zu Problemen im Lernprozess führen.

3.4 Studie zu *beliefs* deutscher Sekundarstufenlehrkräfte zum Analysisunterricht (Erens/Eichler)

Erens und Eichler (Erens/Eichler 2013a,b; 2014; 2019; Eichler/Erens 2014; 2015) führten eine Studie zu *beliefs* 50 deutscher Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufen durch, wobei 30 speziell zum Analysisunterricht befragt wurden, die anderen zur Stochastik oder Geometrie. Die Darstellung in diesem Abschnitt bezieht sich schwerpunktmäßig auf den Bereich der Analysis. Bei den Befragten bezüglich des Analysisunterrichts handelte es sich um zehn Lehramtsstudierende nach dem ersten Staatsexamen aber vor dem Referendariat, zehn Referendare und zehn erfahrene Lehrkräfte. Die ersten beiden Gruppen wurden in einem quasi-longitudinalen Design zweimal befragt, die letzte Gruppe nur einmal. Die Unterscheidung der Gruppen floss nur in die Auswertungen im Bereich von Weiterentwicklungen ein, ansonsten wurden alle bezüglich der Analysis Befragten als eine Gruppe betrachtet (Erens/Eichler 2014, S. 27). Die Daten wurden in halb-strukturierten Interviews und mit qualitativen Fallstudien sowie quantitativen Fragebögen erhoben. Außerdem wurden Unterrichtsstunden videographiert und protokolliert (Eichler/Erens 2015, S. 185 f.). Durch die Studie wurden die Fragen beantwortet, wie die *belief systems* und Lehrziele der Lehrkräfte bezüglich der Analysis und des Lehrens und Lernens von Analysis strukturiert sind und wie sich diese von *belief systems* bezüglich anderer Teilbereiche der Mathematik unterscheiden. Die Daten legen die Vermutung nahe, dass Lehrkräfte in Bezug auf die verschiedenen Teilbereiche der Mathematik unterschiedliche *beliefs* haben (Eichler/Erens 2015, S. 197).

Als theoretische Grundlage verstehen Eichler und Erens (2015) *beliefs* als „an individual's personal conviction concerning a specific subject, which shapes an individual's way of both receiving information about a subject and acting in a specific situation" (ebd., S. 183). Die Organisation der *beliefs* einer Person wird als *belief system* bezeichnet und darin zwischen zentralen und peripheren *beliefs* und Lehrzielen sowie koordinierten und subordinierten Lehrzielen unterschieden. Lehrziele als konkrete Formen von *beliefs* wirken sich direkt auf die Unterrichtsplanung aus (Erens/Eichler 2014, S. 26). Übergreifende Lehrziele können mathematische Weltbilder nach Grigutsch und Kollegen (1998) repräsentieren. Es wird zwischen einem formalistischen, einem prozessorientierten, einem schemaorientierten und einem anwendungsorientierten Weltbild unterschieden. Das formalistische Weltbild betont formal-logische, deduktive Aspekte der Mathematik und insbesondere der Analysis sowie Präzision und Genauigkeit. Das prozessorientierte Weltbild sieht die Mathematik als kreative, heuristische

Aktivität und stellt Problemlöseprozesse in den Vordergrund. Das schemaorientierte Weltbild versteht die Mathematik als *toolbox* mit Regeln und Verfahren, die gelernt und angewendet werden. Das anwendungsorientierte Weltbild betont die Nützlichkeit der Mathematik für die reale Welt und stellt außermathematische Anwendungen in den Fokus (Erens/Eichler 2013b, S. 1331).

Eichler und Erens (2014, S. 648 ff.) arbeiten zur Beschreibung des gegenwärtigen Analysisunterrichts theoretisch vier generelle pädagogische Trends in Bezug auf das Unterrichten von Analysis heraus. Es wird angenommen, dass Lehrkräfte aus diesen Trends, die jeweils verschiedene Lehrziele zusammenfassen, ihre individuellen Lehrziele auswählen. Der *generic trend* betont die Bedeutung generischer Beispiele in einer bottom-up-Herangehensweise an die Analysis und beinhaltet somit Ziele des prozessorientierten Weltbildes. Der damit in Verbindung stehende *technology trend* nutzt digitale Medien, um das generische Lernen von Konzepten zu unterstützen. Der *modelling trend* sieht die Modellbildung als zentrales Mittel zum Lernen von Analysis und steht somit in engem Zusammenhang zum anwendungsorientierten Weltbild. Der *moderate New Math trend*, dem, im Vergleich zu den anderen dreien, weniger Bedeutung zugeschrieben wird, legt Wert auf Exaktheit und formale Strenge und beinhaltet Ziele des formalistischen Weltbildes.

Eichler und Erens (2015, S. 184) verstehen unter dem *intended curriculum* einer Lehrkraft ihr individuelles *belief system*. Dieses besteht zum einen aus dem individuellen mathematischen Weltbild und weiteren *beliefs*, die von Lehrzielen repräsentiert werden, die sich auf die Unterrichtsplanung auswirken. Den Vorteil der detaillierten Untersuchung von *beliefs* und Lehrzielen für das Verständnis der Gestaltung von Unterricht durch Lehrkräfte stellen Erens und Eichler (2014) folgendermaßen heraus:

> *[T]he distinction of central and peripheral beliefs or goals, as well as the distinction of relations between beliefs or goals – e.g. in terms of coordination and subordination – could serve as an explanation of reported inconsistencies or consistencies between espoused and enacted beliefs or goals.*
>
> (Erens/Eichler 2014, S. 31)

Eichler und Erens (2014, S. 653 ff.) leiten aus ihren Daten vier Typen von *intended curricula* ab, die vor allem durch die jeweils zentralen Lehrziele definiert sind und hinsichtlich des Analysisunterrichts sogenannte *empirical trends* (im Gegensatz zu den theoretisch herausgearbeiteten Trends, siehe oben) darstellen. Diese repräsentieren die vier mathematischen Weltbilder nach Grigutsch und Kollegen (1998). Der *empirical generic trend* wird Lehrkräften zugeordnet, die zentrale prozessorientierte Ziele haben, formalistische *beliefs* ablehnen und, wenn überhaupt, weitere Ziele haben, die der prozessorientierten Sicht untergeordnet sind und diese beispielsweise unterstützen. Lehrkräfte dieses Typs unterscheiden sich nur in diesen weiteren, untergeordneten Zielen, die zentral oder peripher sein können. Dieser Trend wurde insgesamt 13 Lehrkräften zugeordnet. Ein zweiter Trend ist der *empirical modelling trend*, der sechs Lehrkräften zugeordnet wurde. Er ist dadurch definiert, dass anwendungsorientierte Ziele zentral sind, während weitere Ziele, falls vorhanden, den anwendungsorientierten Zielen untergeordnet sind. Der dritte Trend, der *empirical moderate New Math trend*, repräsentiert zentrale formalistische Ziele, denen eventuelle weitere Ziele untergeordnet sind. Dieser wurde sieben Lehrkräften zugeordnet. Der letzte Trend, der *empirical schema trend* wurde nur drei Lehrkräften zugeordnet und zeichnet sich allein dadurch aus, dass schemaorientierte Ziele betont und weitere Ziele fast gänzlich abgelehnt werden. Schemaorientierte Ziele sind bei den meisten Lehrkräften anderen Zielen untergeordnet und sind vorwiegend aus zwei Gründen Teil des *belief systems* der Lehrkräfte: zur Abiturvorbereitung und um den besonderen Bedürfnissen schwächerer Lernender gerecht zu werden (Eichler/Erens 2014, S. 657).

Eichler und Erens (2015, S. 190) stellen einen starken Zusammenhang zwischen anwendungsorientiertem und prozessorientiertem Weltbild bei den befragten Lehrkräften fest, wobei letzteres oft ersterem untergeordnet ist. Bezüglich des anwendungsorientierten Weltbildes beschreiben Eichler und Erens (2015, S. 192) große Unterschiede bei den Analysis-Lehrkräften. Dies reicht von Lehrkräften, die eine Anwendungsorientierung ablehnen, bis zu Lehrkräften, die Anwendungsorientierung aus motivationalen Gründen betonen oder Analysis als Teilbereich sehen, der gerade für die Förderung von Modellierungskompetenz geeignet ist. Insgesamt finden sie ein zentrales anwendungsorientiertes Weltbild bei mehr als der Hälfte der Befragten vor und im Referendariat (Erens/Eichler 2019, S. 353). Das prozessorientierte Weltbild ist bei den Analysis-Lehrkräften anderen Zielen einer formalistischen oder anwendungsorientierten Perspektive untergeordnet[4], im Gegensatz zur Geometrie, wo das prozessorientierte Weltbild auch als zentrales Weltbild zu finden ist (Eichler/Erens 2015, S. 193). Auch wenn das formalistische Weltbild für Lehrkräfte im Bereich der Analysis unterschiedlich wichtig ist,

[4] Laut (Eichler/Erens 2015, S. 193) ist bei Analysis-Lehrkräften das prozessorientierte Weltbild (das prozessorientierte Ziele beinhaltet) anderen Zielen eines formalistischen oder anwendungsorientierten Weltbildes untergeordnet. In (Eichler/Erens 2014, S. 653 ff.) steht hingegen, dass der *empirical generic trend* 13 von 29 Lehrkräften zugeordnet wurde, was bedeutet, dass diese Lehrkräfte zentrale prozessorientierte Ziele haben und dass weitere eventuell vorhandene Ziele den prozessorientierten Zielen untergeordnet sind. Dieser vermeintliche Widerspruch konnte leider nicht aufgelöst werden.

so fanden Eichler und Erens (2015, S. 193) nur im Bereich der Analysis Lehrkräfte mit einem zentralen formalistischen Weltbild. Eichler und Erens (2015, S. 189) stellen dar, dass Lehrkräfte mit konsistent formalistischem mathematischem Weltbild Anwendungen nicht erwähnten, während eine Orientierung des Unterrichts an Anwendungen nicht automatisch heißt, dass die Lehrkräfte ein nicht-formalistisches Weltbild haben. Auch das schemaorientierte Weltbild spielt nur bei Analysislehrkräften eine wichtige Rolle. Es ist zwar bei den meisten Lehrkräften kein zentrales Weltbild, aber die Bedeutung einer *toolbox* mit Regeln und Verfahren und deren Anwendung wird in Bezug auf die Abiturvorbereitung und mit Fokus auf leistungsschwächere Schüler mehrfach betont (Eichler/Erens 2015, S. 188, S. 193 f.; Erens/Eichler 2019, S. 360) und wirkt sich auch auf das *enacted curriculum* (das aus dem *intended curriculum* der jeweiligen Lehrkraft entwickelt wird) aus:

> *[F]or all teachers in our sample the preparation of the final exam […] does indeed play more than a subordinate role in their calculus beliefs as an inductive feature. The driving force of the written curriculum and a focus on student achievement scores has a particular influence on the realisation of learning processes and, thus, the enacted curriculum.*
>
> (Erens/Eichler 2013b, S. 1337)

Als generelle Tendenz stellen Eichler und Erens (2015, S. 197) fest: „Whereas an application oriented view seems to characterize teachers' beliefs concerning stochastics, it seems to be a process oriented view concerning geometry and, less specific, a formalist view concerning calculus". Eichler und Erens (2015, S. 197) vermuten einen Einfluss der zentralen *beliefs* auf die *enacted curricula* der Lehrkräfte. Allerdings gibt es auch widersprüchliche *beliefs* oder Ziele. Solche zeigen sich in Berichten von Lehrkräften darüber, dass sich ihre Lehrziele im konkreten Unterrichtszusammenhang nicht so umsetzen lassen, wie es (aufgrund ihrer *beliefs*) ideal wäre (Erens/Eichler 2014, S. 29).

Eichler und Erens (2014, S. 658) stellen tendenziell fest, dass *beliefs*, die den *empirical generic trend* oder den *modelling trend* repräsentieren, bei den befragten Lehrkräften vor dem Referendariat und während des Referendariats im Vergleich zu den *beliefs* im Bereich des *New Math trend* und des *schema trend* deutlich wichtiger sind, im Gegensatz zur Situation bei den erfahrenen Lehrkräften. Zentrale und übergeordnete *beliefs* sind über den Zeitraum des Referendariats vergleichsweise stabil, während sich periphere *beliefs* und Ziele eher ändern (Eichler/Erens 2015, S. 198; Erens/Eichler 2019, S. 369). Vor allem zwei Faktoren scheinen solch eine Veränderung zu beeinflussen: Autoritäten und Reflexion. Als wichtige

Autoritäten werden beispielsweise Seminarlehrer im Referendariat und zentrale Abschlussprüfungen gesehen (Erens/Eichler 2019, S. 369 f.). Die zweite Befragung zeigte insbesondere vielfach einen Rückgang formalistischer Sichtweisen, wobei die Schwierigkeit des formalen Beweisens ein wichtiger Einflussfaktor ist:

> *In many cases the level of acceptance of formalism even decreased comparing first and second interviews. The reason for this decrease was explained by the high difficulty in formal abstraction especially for weaker students. For this group of teachers, the rejection of formalist goals is predominantly restricted to issues like formal proofs.*
>
> (Erens/Eichler 2019, S. 358)

Auch wenn Erens und Eichler in ihrer Studie die Kompetenz des Argumentierens nicht direkt adressieren, lassen sich trotzdem Zusammenhänge zwischen ihrer Studie und dem mathematischen Argumentieren ableiten: Es kann vermutet werden, dass die mathematischen Weltbilder und die in den *trends* enthaltenen Ziele eine wichtige Rolle dabei spielen, wie Lehrkräfte die Kompetenz des Argumentierens sehen und das Argumentieren als Tätigkeit im Analysisunterricht integrieren. Wie in obigem Zitat angedeutet, hängt eine Sicht auf das Argumentieren in Form eines streng formalen, deduktiven Beweisens wahrscheinlich mit einem formalistischen Weltbild und dem *New Math trend* zusammen. Diese Vermutung wird auch durch die Analyse eines weiteren Beispiels durch Erens und Eichler (2019, S. 357) unterstützt. Ein Lehrer mit zentralem formalistischem Weltbild beschreibt, dass er Beweise formal korrekt durchführt, aber durch Vereinfachungen und illustrierende Beispiele ergänzt. Erens und Eichler kommentieren dies als Abweichung von seinen formalistischen Zielen:

> *In the second interview Mr G. confirmed the centrality of his formal conceptions working as a professional teacher. However, taking into account the perspective of high school students, Mr G. acknowledges the need to simplify proofs with a certain degree of transparency as well as the need to include plausibility arguments instead of „hard" and formal mathematical proofs.*
>
> (Erens/Eichler 2019, S. 357)

Im Gegensatz dazu fügt sich ein weiteres Begriffsverständnis des Argumentierens in Bezug auf das Herstellen von mathematischen Zusammenhängen gut in das prozessorientierte Weltbild und den *generic trend* ein. Je nachdem welche mathematischen Weltbilder bei Lehrkräften zentral und übergeordnet sind, beeinflusst dies möglicherweise auch die Vorstellungen und *beliefs* zum mathematischen

Argumentieren. Da das prozessorientierte Weltbild stark mit dem anwendungsorientierten Weltbild zusammenhängt und beide bei Analysislehrkräften eine wichtige Rolle spielen, erscheint es sinnvoll, die prozessbezogene Kompetenz des Argumentierens (wie in Abschnitt 2.1 vorgeschlagen) möglichst breit zu konzeptualisieren und sie insbesondere nicht auf innermathematische Zusammenhänge zu beschränken, sondern auch im Bereich des Modellierens das Argumentieren zu fördern.

3.5 Fazit: Forschungslücke für die vorliegende Arbeit

Tabelle 3.1 zeigt einen Überblick über die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Studien. Die Studie zum Beweisverständnis aus den USA (Knuth 2002a,b) untersucht das Argumentieren in der Sekundarstufe aus der Perspektive von Lehrkräften. Dabei wird stark auf das formale Beweisen als spezielle Form des Argumentierens fokussiert. Die italienische Studie mit Lehrkräften hat auch ein tendenziell formales Beweisen im Blick. Im Gegensatz dazu ist es interessant, einen breiteren Standpunkt einzunehmen und das Argumentieren im weiten Sinne mit allen seinen Facetten in den Blick zu nehmen. Es ist ohnehin nicht möglich, die Erkenntnisse einer Studie aus dem Jahre 2002 aus den USA und einer Studie aus dem Jahre 2011 aus Italien direkt auf die Situation in Deutschland 5 bis 15 Jahre später zu übertragen. Deshalb werden in der ersten vorliegenden Studie dieser Arbeit deutsche Lehrkräfte zur gegenwärtigen Situation des Argumentierens befragt.

Dadurch dass die Mehrheit der bisherigen Studien zum Argumentieren die Bereiche der Algebra/Arithmetik/Zahlentheorie sowie Geometrie in den Mittelpunkt stellen, ist es besonders interessant, den Fokus in einer neuen Studie auf den Bereich der Analysis zu legen. Die Analysis nimmt einen zentralen Bereich im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II ein und die Förderung der Kompetenz des Argumentierens ist somit gerade in diesem Bereich von großem Interesse. Auch die Erkenntnisse von Erens und Eichler legen eine Konzentration auf ein mathematisches Teilgebiet nahe, da *beliefs* von Lehrkräften teilbereichsspezifisch zu sein scheinen (Eichler/Erens 2015, S. 197; Erens/Eichler 2019, S. 346). Es wird angenommen, dass diese Fokussierung auch in Bezug auf das Argumentieren sinnvoll ist.

Grundey (2015) fokussiert mit ihrer Studie das Argumentieren, von ihr als *Beweisen* bezeichnet, im Analysisunterricht. Sie sieht das Beweisen aus einer sozialkonstruktivistischen Perspektive, die dem Verständnis des Argumentierens der vorliegenden Arbeit näher ist als das enge Verständnis von Knuth (2002a,b)

Tabelle 3.1 Überblick über den Forschungsstand zum Argumentieren im Analysisunterricht

Autoren	Knuth (2002 a,b)	Furinghetti & Morselli (2011)	Grundey (2015)	Erens & Eichler (2013a,b, 2014, 2015, 2019)
Fokus der Studie	Beweisvorstellungen	*Beliefs* zum und praktische Umsetzung des Beweisen(s)	Beweisvorstellungen, Beweisprozesse, Probleme und Schwierigkeiten	*Beliefs,* Lehrziele und mathematische Weltbilder allgemein
Beweisverständnis	Formal, eng	Formal, eng	Sozialkonstruktivistisch, weit	–
Studienteilnehmer (Perspektive)	Lehrkräfte	Lehrkräfte	Lernende	Lehrkräfte
Mathematischer Teilbereich	Mehrere	Mehrere, tendenziell Fokus auf Geometrie	Analysis	Vorrangig Analysis
Land	USA	Italien	Deutschland, Kanada	Deutschland

und Furinghetti und Morselli (2011). Bei Grundey stehen Beweisprozesse von Lernenden und dabei auftretende Schwierigkeiten im Vordergrund. Sie arbeitet insbesondere die Bedeutung der Beweisvorstellungen von Lernenden für den Beweisprozess heraus. Zudem zeigt sich durch ihre Studie, dass Lehrkräfte (bewusst oder unbewusst) auf die Veränderung dieser Beweisvorstellungen einwirken. Deshalb ist es wichtig, auch über die Vorstellungen und Einschätzungen von Lehrkräften zum Argumentieren Erkenntnisse zu gewinnen. In Ergänzung zur Perspektive der Lernenden, die in vielen didaktischen Arbeiten zum Argumentieren eingenommen wird, ist es also sinnvoll, auch aus der Perspektive der Lehrkräfte auf das Argumentieren im Analysisunterricht zu blicken. Dies ist eines der Ziele der im zweiten Teil dieser Arbeit dargestellten Interviewstudie.

Erens und Eichler stellen interessante Erkenntnisse zum Analysisunterricht aus Lehrerperspektive dar. Sie untersuchten allgemein *beliefs* zum Analysisunterricht und deren Weiterentwicklung, wobei das Argumentieren nur am Rande erwähnt wird. Im Gegensatz dazu wird nun in der vorliegenden Studie ein spezifischerer Fokus auf die Kompetenz des mathematischen Argumentierens gelegt, während die Konzentration auf *beliefs* und Lehrziele von Erens und Eichler aufgehoben und eine weitere Perspektive eingenommen wird. Es werden die Vorstellungen, Einschätzungen und Erfahrungen von Lehrkräften zum Argumentieren im Analysisunterricht untersucht und dabei auch insbesondere aus Perspektive der Lehrkräfte Herausforderungen, die sich bei der Umsetzung ergeben, in den Blick genommen.

Die vier beschriebenen Studien fokussieren wichtige Bereiche, die auch für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind, lassen jedoch eine Lücke im Bereich des Argumentierens speziell im Analysisunterricht, betrachtet aus der Perspektive deutscher Lehrkräfte, wobei das Argumentieren als Überbegriff über verschiedene Aktivitäten des Argumentierens, Begründens und Beweisens (siehe Abschnitt 2.1.4) verwendet wird und insbesondere Herausforderungen in den Blick genommen werden. Diese Lücke wird durch die beiden Studien, die in dieser Arbeit dargestellt werden, geschlossen.

Teil II

Interviewstudie zum Argumentieren im Analysisunterricht

4 Methodik der Interviewstudie mit Lehrkräften

Auf Grundlage des in Kapitel 2 herausgearbeiteten Begriffsverständnisses soll in diesem zweiten Teil der Arbeit die in Abschnitt 3.5 dargestellte Forschungslücke insofern geschlossen werden, dass durch eine Interviewstudie mit Lehrkräften zum Argumentieren im Analysisunterricht Erkenntnisse zur aktuellen Situation gewonnen werden. Dazu werden in diesem vierten Kapitel die methodischen Grundlagen für die Datenerhebung und -auswertung gelegt, bevor in Kapitel 5 die Ergebnisse dargestellt und diskutiert werden.

4.1 Forschungsinteresse, Forschungsgegenstand und Forschungsfragen

Um die in Abschnitt 3.5 herausgearbeitete Forschungslücke zu schließen, steht die gegenwärtige Situation im Analysisunterricht in Bezug auf die allgemeine, prozessbezogene Kompetenz des mathematischen Argumentierens im Zentrum des Interesses der vorliegenden Studie. Dazu wird die Perspektive von Lehrkräften eingenommen, um deren Wissen und Erfahrungen direkt aus dem Unterricht zu nutzen. Elbaz (1983) zeigt, wie gewinnbringend diese Perspektive sein kann. Er nutzt dafür den Begriff des *practical knowledge*:

> *[T]he teacher exhibits wide-ranging knowledge which grows as experience increases. This knowledge encompasses firsthand experience of students' learning styles, interests, needs, strengths and difficulties, and a repertoire of instructional techniques and*

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_4.

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_4

> *classroom management skills. The teacher knows the social structure of the school and what it requires, of teacher and student, for survival and for success; she knows the community of which the school is a part, and has a sense of what it will and will not accept. This experiential knowledge is informed by the teachers' theoretical knowledge of subject matter, and of areas such as child development, learning and social theory. All of these kinds of knowledge, as integrated by the individual teacher in terms of personal values and beliefs and as oriented to her practical situation, will be referred to here as 'practical knowledge'.*
>
> (Elbaz 1983, S. 5)

Konkret wird in der vorliegenden Studie untersucht, welche Bedeutung Lehrkräfte der Kompetenz des Argumentierens (im Analysisunterricht) beimessen, welche Vorstellungen und Einschätzungen sie bezüglich dieser Kompetenz haben und welche Erfahrungen sie bei der Förderung der Kompetenz des Argumentierens bei den Schülern im (Analysis-)Unterricht machen. Insbesondere wird herausgearbeitet, auf welche Herausforderungen Lehrkräfte dabei stoßen. Diese Aspekte fügen sich zu einer Gesamtsituation des Argumentierens im Analysisunterricht zusammen, die durch die Sichtweise von Lehrkräften in der vorliegenden Studie näher beleuchtet wird. Ziel ist es, die Erkenntnisse, die daraus gewonnen werden, anschießend als Grundlage heranziehen zu können, um darauf aufbauend Vorschläge für eine verbesserte Förderung der Kompetenz des mathematischen Argumentierens, insbesondere im Analysisunterricht, zu erarbeiten. Gerade dafür können die Erfahrungen von Lehrkräften, die täglich im Unterricht gesammelt werden, einen wertvollen Beitrag leisten. Für ein vertieftes Verständnis der Situation muss zunächst erforscht werden, was Lehrkräfte unter dem Begriff *(mathematisch(es)) Argumentieren* verstehen und worauf sie verweisen, wenn sie über das Argumentieren sprechen. Um die Lehrkräfte dabei nicht zu beeinflussen, werden in den Interviews diejenigen Begriffe des Feldes rund um *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* (siehe auch Abschnitt 2.1) aufgegriffen, die die Lehrkräfte selbst einbringen. Außerdem werden *Argumentieren* und *Begründen* synonym verwendet und der Begriff des *Beweisens* nur dann in die Interviews einbezogen, wenn die Lehrkräfte den Begriff selbst erwähnen[1]. Mit Hilfe der Interviewfragen sollen die Lehrkräfte also dazu angeregt werden, mit Blick auf das Argumentieren aus ihrem (Analysis-)Unterricht zu erzählen, dabei ihre subjektiven Einschätzungen zu äußern und insbesondere auch Probleme, denen sie

[1] Es stellte sich im Nachhinein als sinnvoll heraus, dass das Beweisen als spezifische Form des Argumentierens nur dann am Rande thematisiert wurde, wenn die Lehrkräfte es selbst ansprachen, da sich überwiegend negative Konnotationen rund um diesen Begriff zeigten (siehe Abschnitt 5.2).

begegnen, oder Schwierigkeiten, die sie beobachten, mitzuteilen. Aus diesen Überlegungen ergeben sich folgende Forschungsfragen für die Interviewstudie:

1. Welchen Stellenwert nimmt die Förderung des mathematischen Argumentierens derzeit im Analysisunterricht ein?
2. Welche Gründe für die Förderung des mathematischen Argumentierens im Analysisunterricht können aus Äußerungen von Lehrkräften abgeleitet werden?
3. Welche Herausforderungen sehen Lehrkräfte in Zusammenhang mit der Förderung des mathematischen Argumentierens im Analysisunterricht?

4.2 Leitfadengestützte, explorative (Experten)Interviews

Für die Durchführung der Interviewstudie wird die Form eines offenen Leitfadeninterviews gewählt. Diese Form eignet sich besonders für „Fragestellungen, die sich auf bestimmte berufliche und alltägliche Praktiken beziehen, deren Darstellung primär über den Modus der Beschreibung und Argumentation zu erfassen ist und bei denen es darauf ankommt, dass bestimmte Bereiche in jedem Fall detailliert behandelt werden“ (Przyborski/Wohlrab-Sahr 2014, S. 126 f.). Dies trifft für das vorliegende Forschungsinteresse zu, da die beruflichen Praktiken und Erfahrungen der Lehrkräfte hinsichtlich der Förderung des Argumentierens erfasst, gleichzeitig aber auch ihre konkreten Ansichten zum Argumentieren untersucht werden sollen.

Lehrkräfte verfügen durch ihre berufliche Tätigkeit über ein spezifisches Wissen, das sie implizit täglich im Klassenzimmer sammeln und das für die didaktische Forschung interessante Erkenntnisse bringen kann, wenn es expliziert wird (vgl. Elbaz 1983, siehe Abschnitt 4.1). Somit beinhaltet die gewählte Interviewform Aspekte eines Experteninterviews, bei dem das spezialisierte Wissen von Lehrkräften über alltägliche Abläufe in ihrem konkreten Unterricht, aber auch über Kompetenzen und Schwierigkeiten von Schülern, die sie direkt beobachten, erfasst wird (vgl. Przyborski/Wohlrab-Sahr 2014, S. 119 ff.). Da Experteninterviews meist mit Hilfe eines Leitfadens realisiert werden (Kruse 2015, S. 166; Przyborski/Wohlrab-Sahr 2014, S. 120), ergibt sich hier eine gute Passung beider Interviewtypen. Für das vorliegende Forschungsinteresse bieten sich explorative Experteninterviews an, die zur Orientierung im Feld und „zur Schärfung des Problembewusstseins des Forschers“ (Bogner/Menz 2002, S. 37) mit dem Ziel der Hypothesengenerierung und der Strukturierung des untersuchten Gebietes eingesetzt werden können. Bogner und Menz (2002) führen aus, dass die Experten in dieser Interviewform „selbst als Teil des Handlungsfeldes zur Zielgruppe der Untersuchung gehören" (ebd., S. 37) können, was genau die angestrebte Rolle der Lehrkräfte in der vorliegenden Studie beschreibt. Sie sind Experten, deren Wissen und Kompetenzen das Forschungsvorhaben bereichern, aber gleichzeitig auch Personen, deren Einstellung und Handlungsweisen als untersuchte Objekte beschrieben werden sollen. Die Form des explorativen Experteninterviews ist stark monologisch orientiert und explikativ ausgerichtet. Der Interviewer nimmt die Rolle des „wissbegierigen Unwissenden" ein. Die Schwerpunktsetzung liegt somit vor allem bei den Befragten. Es gibt weniger dialogische Anteile als bei anderen Formen von Experteninterviews (Kruse 2015, S. 167). Die Gesprächsasymmetrie, die sich daraus ergibt, wird als für Lehrkräfte nicht problematisch eingeschätzt, da diese aus ihrem beruflichen Umfeld asymmetrische Gesprächssituationen gewohnt sein dürften (vgl. Kruse 2015, S. 207). Die Einhaltung eines notwendigen Grades an Selbstzurücknahme auf Seiten der Interviewerin wird dadurch positiv beeinflusst, dass diese durch die geringe eigene praktische Erfahrung im Unterrichten mit einem hohen Grad an Objektivität an die Durchführung der Interviews und auch an deren spätere Auswertung herangehen kann (vgl. Kruse 2015, S. 208).

Die gewählte Interviewform enthält auch Elemente eines episodischen Interviews, da die Befragten immer wieder zu Beschreibungen konkreter Situationen aus ihrer Unterrichtspraxis aufgefordert werden. Dies geschieht beispielsweise durch Fragen, die mit „Können Sie sich an eine konkrete Situation erinnern, in der Sie…" eingeleitet werden (vgl. Helfferich 2011, S. 36). Ziel solcher Fragen ist es, das Gespräch eng am Unterricht des jeweiligen Befragten auszurichten und vor allem in den ersten Interviewteilen nicht in eine theoretische oder hypothetische Gesprächsführung überzugehen, damit Routinen aus dem Unterrichtsalltag rekonstruiert, expliziert und beschrieben werden können (vgl. Steinke 2007, S. 182; Flick 2004, S. 190 f.). Da den Lehrkräften in den Interviews auch eine Schulbuchdoppelseite und Beispiele von Schülerargumentationen als konkrete Materialien vorgelegt werden (siehe Abschnitt 4.3), auf die sie dann spontan mit Hilfe einer einleitenden Fragestellung reagieren sollen, weist die gewählte Interviewform auch Elemente eines fokussierten Interviews auf (Helfferich 2011, S. 36).

Die Lehrkräfte werden in der Einführung des Interviews direkt als Experten adressiert, an deren speziellen Kompetenzen besonderes Interesse und Bedarf besteht. Dadurch sollen sie sich in dieser Rolle bestärkt fühlen. Im Gegensatz dazu stellt sich die Autorin in ihrer Rolle gegenüber den Lehrkräften als relativ unerfahren in der Unterrichtspraxis dar. Dadurch soll eine Vertrauensbasis geschaffen werden, sodass davon ausgegangen werden kann, dass die Lehrkräfte sich frei äußern und unvoreingenommen ihre Erfahrungen teilen (vgl. Furinghetti/Morselli 2011, S. 591). Insbesondere sollen sie auf dieser Grundlage auch über negative Aspekte wie Probleme und Schwierigkeiten sprechen, ohne sich dem Druck sozialer Erwünschtheit ausgesetzt zu fühlen (vgl. Steinke 2007, S. 182). Trotz der expliziten Zuschreibung der Rolle als Experten werden die Aussagen der Lehrkräfte in der Analyse und Interpretation nicht nur als unanfechtbare Expertenmeinung, sondern als Untersuchungsgegenstand behandelt und auch kritisch diskutiert.

Der Leitfaden für die Interviews[2] wurde nach dem SPSS-Prinzip (*Sammeln, Prüfen, Sortieren, Subsumieren*) von Helfferich (2011, S. 182 ff.) und dem darauf aufbauenden S^2PS^2-Prinzip (*Sammeln, Sortieren, Prüfen, Streichen, Subsumieren*) von Kruse (2015, S. 230 ff.) entwickelt. Außerdem wurden die konkreten Anforderungen von Kruse (2015, S. 215 ff.) an die Formulierung von Stimuli und Fragen berücksichtigt. Tabelle 4.1 zeigt einen Überblick über die verschiedenen Phasen der Interviews (vgl. Kruse 2015, S. 212 f., S. 273). Durch diese Phasen sind wesentliche Aspekte eines Experteninterviews abgedeckt (vgl. Przyborski/Wohlrab-Sahr 2014, S. 123 f.) und das Kriterium der Spezifität erfüllt (ebd., S. 128). Gleichzeitig erfolgt eine Orientierung am typischen Ablaufschema eines Leitfadeninterviews vom Allgemeinen zum Spezifischen (ebd., S. 127 f.).

Kruse (2015) sieht es als

> *Hauptmerkmal qualitativer Interviewführung […], den Befragten so viel offenen Raum wie möglich zu geben, damit diese so weitgehend wie möglich ohne fremdgesteuerte Strukturierungsleistungen und theoretische Vorannahmen (die von außen an sie herangetragen werden) ihre subjektiven Relevanzsysteme, Deutungen und Sichtweisen verbali*sieren können.
>
> (Kruse 2015, S. 260 f.)

Diesem Ziel folgend ist für die Strukturierung der Interviews zwar der Leitfaden grundlegend, in der konkreten Durchführung hat aber die Struktur, die sich durch die offene Kommunikation mit den Befragten ergibt, Vorrang. Außerdem werden in der Verwendung der Terminologie im Bereich des mathematischen Argumentierens von den Begriffen *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* diejenigen aufgegriffen, die die Befragten selbst verwenden. Dabei wird keine Unterscheidung der Begriffe durch die Interviewerin an die Befragten herangetragen.

[2] Siehe Anhang C im elektronischen Zusatzmaterial.

Tabelle 4.1 Überblick über die verschiedenen Phasen der Interviews

Phase	Im Leitfaden	Ziele	Konkrete Umsetzung
Einstieg	In Stichpunkten vorformuliert	Vorstellung der Interviewerin Präsentation des Ablaufs Erläuterung von Formalitäten Klärung organisatorischer Fragen	Möglichst freie Formulierung, um Künstlichkeit zu vermeiden (vgl. Kruse 2015, S. 271)
Kern des Leitfadens (4 inhaltliche Blöcke)	Anordnung der Blöcke vom Allgemeinen zum Spezifischen (1. Analysisunterricht allgemein, 2. Argumentieren im Analysisunterricht, 3. Probleme/Schwierigkeiten beim Argumentieren, 4. Vorstellungen von idealem Analysisunterricht) Inhaltliche Aspekte Möglichkeiten für konkrete Nachfragen Aufrechterhaltungsfragen Ideen zur Überleitung zwischen den Blöcken	„Stimulierung einer selbstläufigen Sachverhaltsdarstellung" (Przyborski/ Wohlrab-Sahr 2014, S. 123) Erfüllung des Kriteriums der Offenheit, insb. beim Einstieg (vgl. ebd., S. 128; Helfferich 2011, S. 113 ff.) Realisierung einer niedrigen Eingangshürde zur Gewöhnung an die Interviewsituation	Anordnung innerhalb der Blöcke vom Allgemeinen (offener Stimulus) hin zum Speziellen (durch immanente und exmanente[3] Nachfragen) Reihenfolge der Fragen innerhalb eines Blockes wird abhängig vom Gesprächsverlauf spontan gewählt Aufforderungen zur spontanen Beurteilung vorgelegter Materialien

(Fortsetzung)

[3] Immanente Nachfragen beziehen sich direkt auf das vorher Gesagte, exmanente Nachfragen bringen neue Aspekte ein, die vorher nicht angesprochen wurden.

Tabelle 4.1 (Fortsetzung)

Phase	Im Leitfaden	Ziele	Konkrete Umsetzung
Theoretisierende Fragen	Vorformulierte Fragen zur Auswahl	Theoretisierung der Begriffe *Argumentieren* und *Begründen*	Nachfrage nach Begriffen *Argumentieren* und *Begründen* Einbezug von *Beweisen* nur falls im Interview angesprochen
Abschlussfragen	Zwei vorformulierte Fragen zum Ausstieg	Befragter bestimmt Ende des Interviews (vgl. Kruse 2015, S. 273) Reflexion und ggf. Optimierung des Interviews (vgl. ebd.)	Aufforderung, weitere wichtige Dinge zu erzählen Nachfrage bzgl. Empfinden des Interviews und Teilnahmemotivation
Schlussbemerkungen	Vorformulierte Sätze	Dank Formalitäten	Ggf. abweichende Formulierung

4.3 Durchführung und Transkription der Interviews

Teilnehmer der Interviewstudie sollten Lehrkräfte sein, die in der Sekundarstufe II Mathematik und insbesondere Analysis unterrichten. Dafür kamen bayerische Lehrkräfte in Frage, die am Gymnasium, an der Beruflichen Oberschule (Fachoberschule oder Berufsoberschule) oder am Bayernkolleg unterrichten. Die Studienteilnehmer wurden mit Hilfe eines Fragebogens[4] ausgewählt. So konnte dafür gesorgt werden, dass sich die Befragten möglichst stark voneinander unterschieden. Dafür wurden Aspekte wie Geschlecht, Alter, Berufserfahrung, spezielle Funktion an der Schule, Zweitfach und Aussagen zu mathematischen Weltbildern (vgl. Grigutsch et al. 1998; Eichler/Erens 2014) herangezogen. Dadurch wurde das Kriterium der maximalen strukturellen Variation erfüllt, das die Basis für das *kontrastierende Samplingverfahren* bildet (Kleining 1982, S. 234 ff.; Kruse 2015, S. 242). Durch die Auswahl mit Hilfe der Fragebögen aus den Lehrkräften, die sich auf die Anfragen nach dem Schneeballsystem (vgl. Kruse 2015, S. 251) meldeten, ergab sich das Sample[5], das die Heterogenität des Untersuchungsfeldes bestmöglich zu berücksichtigen und repräsentieren versucht. Für dieses Verfahren, das in der qualitativen Forschung das Pendant zur Auswahl einer repräsentativen Stichprobe in der quantitativen Forschung darstellt (vgl. Kruse 2015, S. 241), werden mindestens zehn bis zwölf Fälle gefordert, um generelle Aussagen treffen zu können (Ilg/Boothe 2010, Abs. [85], Oevermann 2002, S. 17; Mayring 2007, Abs. [20]). Trotzdem ist eine Einschränkung dahingehend nicht zu vermeiden, dass eventuell nur Lehrkräfte sich für eine Teilnahme melden, die selbst von ihrem Unterricht qualitativ überzeugt sind oder zumindest der Meinung sind, mit ihren Ansichten und Erfahrungen aus dem Analysisunterricht „weiterhelfen" zu können. So können Lücken im Sample hinsichtlich eines kompletten Abbildes der Heterogenität der Lehrerschaft nicht komplett vermieden werden. Es nahmen neun männliche und fünf weibliche Lehrkräfte an der Interviewstudie teil. Das unausgewogene Geschlechterverhältnis ergab sich aufgrund der Konstellation der freiwilligen Meldungen. Die Lehrkräfte stammten von sieben verschiedenen Schulen. Dabei war auch eine Lehrkraft eines öffentlich anerkannten, privaten Gymnasiums und eine Lehrkraft, die in einer iPad-Klasse unterrichtet, vertreten. 13 Lehrkräfte unterrichteten in Bayern, eine Lehrkraft unterrichtete in Rheinland-Pfalz. Die Lehrkräfte waren im Alter zwischen 30 und 64 Jahren und hatten zwischen vier und 36 Jahren Berufserfahrung. Ziel bei der Auswahl der Befragten war es nicht, Vergleiche zwischen Teilgruppen zu ermöglichen, sondern ein

[4] Siehe Anhang A im elektronischen Zusatzmaterial.

[5] Siehe Anhang B im elektronischen Zusatzmaterial.

möglichst breites Spektrum an Erfahrungen mit in die Studie einfließen zu lassen. Dies rechtfertigt insbesondere, dass das Feld bayerischer Lehrkräfte um eine Lehrkraft aus Rheinland-Pfalz erweitert wurde.

Die Befragten wurden vor Beginn des Interviews nur darüber informiert, dass das Thema *Analysisunterricht* sein würde, der spezifischere Bereich des *Argumentierens* im Analysisunterricht wurde nicht genannt, sodass im ersten Abschnitt der Interviews ganz allgemein über den Analysisunterricht gesprochen werden konnte, ohne dass die Lehrkräfte bereits auf das Argumentieren fokussiert waren. Es wurde allgemein nach einer Beschreibung des eigenen Analysisunterrichts gefragt, nach der Bedeutung der Analysis, besonderen Schwerpunkten im Analysisunterricht (nicht weiter spezifiziert welcher Natur), Unterrichtsvorbereitung und Zielen des eigenen Analysisunterrichts. Außerdem wurde eine Doppelseite aus dem baden-württembergischen Schulbuch *Neue Wege 6* (Lergenmüller/Schmidt 2009a, S. 186 f.)[6] vorgelegt, von der angenommen wurde, dass sie allen Befragten unbekannt war. Sie enthält unterschiedliche Aufgaben aus dem Themenkomplex der Ableitung. Die Lehrkräfte wurden aufgefordert, darüber zu sprechen, welche Aufgaben dieser Doppelseite sie in ihrem Unterricht einsetzen würden und warum. Teilweise enthielten die vorgelegten Aufgaben explizite Begründungsaufforderungen, sodass darüber eine Überleitung zum nächsten Block zum Argumentieren im Analysisunterricht möglich war, der mit dem offenen Stimulus eingeleitet wurde, zu erzählen, an welchen Stellen ihres Analysisunterrichts das Argumentieren oder Begründen eine Rolle spielt. Exmanente Nachfragen bezogen sich dann auf die Bedeutung des Argumentierens, die Umsetzung des Argumentierens und Argumentationsprozesse auf Seiten der Schüler. Dabei wurden auch Beispielargumentationen von vier fiktiven Schülern als *prompts* vorgelegt, die die Aussage begründeten, dass eine ganzrationale Funktion zweiten Grades genau einen Extrempunkt besitzt. Diese Beispielargumentationen wurden an die „prototypischen Schülerantworten" angelehnt, die Grundey (2015, S. 70 ff.; siehe Abschnitt 3.3) in der Beweisrezeptionsphase ihrer Studie einsetzte, und geringfügig abgewandelt.[7] Dabei handelt es sich um die von Grundey als *narrativ-deduktive*, *formal-deduktive* und *empirisch-rechnerische Begründung* sowie *Autoritätsbeweis* genannten Argumentationen. Die Befragten wurden dazu aufgefordert, diese zu beurteilen. Im Falle thematisierter negativer Aspekte bezüglich des Argumentierens, stellte dies eine mögliche Überleitung zum nächsten Block dar, ansonsten wurde exmanent nachgefragt, wie leicht oder schwer der jeweilige Befragte es finde, Argumentationen/Begründungen in den

[6] Siehe Anhang D im elektronischen Zusatzmaterial.

[7] Siehe Anhang E im elektronischen Zusatzmaterial.

Analysisunterricht einzubinden. Konkreter wurde in diesem Block dann noch gefragt, wodurch das Argumentieren erschwert werde und wie geeignet Begründungsaufgaben für Leistungserhebungen seien. Der letzte Block wurde damit eingeleitet, dass vom konkreten Analysisunterricht der Befragten zum Nachdenken über einen idealen Analysisunterricht übergegangen wurde und die Befragten dazu aufgefordert wurden, das Argumentieren in einem idealen Analysisunterricht zu beschreiben. Außerdem wurde in diesem Block die Gewichtung des Argumentierens im Analysisunterricht thematisiert, und nach Wünschen und Ideen für die Weiterentwicklung des Analysisunterrichts gefragt. Dieser hypothetische Gesprächsteil verfolgte das Ziel, über Wünsche der Befragten negative Aspekte am Ist-Zustand explizieren zu können. Abschließend erfolgte eine Theoretisierung, indem die Befragten dazu aufgefordert wurden, über den Unterschied zwischen den Begriffen *Argumentieren* und *Begründen* nachzudenken, die vorher synonym verwendet worden waren. Falls im vorausgehenden Gespräch auch das *Beweisen* Gegenstand war, wurde auch dieser Begriff in die theoretischen Überlegungen miteinbezogen. Zum Abschluss des Interviews wurden die Lehrkräfte gefragt, ob sie noch etwas erzählen möchten, was ihnen wichtig ist, was aber bisher nicht zur Sprache gekommen war, wie das Interview für sie war und wie es zur Teilnahme gekommen war (vgl. Kruse 2015, S. 273). Der Leitfaden wurde in einem Probeinterview mit einem Kollegen, der auch als Lehrkraft an einem Gymnasium tätig ist, getestet und anschließend final festgelegt.[8]

Neun der Interviews fanden direkt an der Schule statt, an der der jeweilige Befragte tätig war, um eine Nähe zum alltäglichen Arbeitsumfeld als Basis für eine natürliche Gesprächssituation passend zum Thema zu gewährleisten. Da dies nicht von allen Lehrkräften so gewünscht oder nicht möglich war, fanden drei Interviews in einem Büro der Universität, ein Interview in einem Café und eines per Telefon statt. Alle Interviews wurden mit Hilfe eines Aufnahmegerätes vom Typ *Olympus Digital Voice Recorder DM-670* oder vom Typ *Olympus Linear PCM Recorder* aufgezeichnet.

Zum Abschluss der Interviews unterschrieben die Teilnehmer eine Einwilligungserklärung für die anonymisierte Verschriftung und Auswertung des geführten Interviews sowie die Veröffentlichung von Ausschnitten im Zusammenhang mit der Studie. Die Befragten erhielten umgekehrt eine Vertrauensschutzerklärung mit Details zum Datenschutz und zum Verfahren der Anonymisierung (vgl. Helfferich 2011, S. 190; Kruse 2015, S. 274, S. 276 f.). Direkt im Anschluss an die Durchführung jedes Interviews wurde von der Interviewerin ein Interviewprotokollbogen[9] ausgefüllt, sodass besondere Vorkommnisse oder Auffälligkeiten

[8] Siehe Anhang C im elektronischen Zusatzmaterial.

[9] Siehe Anhang F im elektronischen Zusatzmaterial.

direkt festgehalten wurden und so für die spätere Analyse zur Verfügung standen (vgl. Helfferich 2011, S. 193; Kruse 2015, S. 277 ff.). Außerdem wurde während des Studienzeitraums als interviewbegleitende Dokumentation eine Tabelle geführt, die einen Überblick über den Stand der jeweiligen Vorabkommunikation und der Durchführung der Interviews ermöglichte (vgl. Helfferich 2011, S. 193).

Die Interviews wurden von der Autorin gemeinsam mit einer studentischen Hilfskraft komplett transkribiert. Dabei wurden von der Autorin grundsätzliche Transkriptionsregeln vorgegeben, die auf Basis von Methodenliteratur zusammengestellt wurden (vgl. Kuckartz 2010, S. 38 ff.; Kuckartz et al. 2007, S. 27 ff.; Kallmeyer/Schütze 1976, S. 6 f.; Przyborski/Wohlrab-Sahr 2014, S. 167 ff.; Kruse 2015, S. 350 ff.; Dresing/Pehl 2015, S. 17 ff.; Bortz/Döring 2015, S. 313). Im Laufe des Transkriptionsprozesses wurden diese beim Aufkommen zweifelhafter Fälle in gemeinsamer Absprache spezifiziert.[10] Alle Transkriptionen wurden durch beide Transkribierende mehrmals gegengelesen. Für die Transkription wurde die Software *f4transkript* und eine Fußsteuerungseinheit zur Steuerung der Tonspur verwendet. Im Anschluss an die Transkription wurden Anonymisierungen vorgenommen, indem konkrete Nennungen beispielsweise von Namen, die Rückschluss auf die Befragten oder andere Personen zugelassen hätten, durch unspezifische Beschreibungen wie *Name einer Lehrerin* oder *Name der Schule* ersetzt wurden (vgl. Kruse 2015, S. 358; Helfferich 2011, S. 191).

4.4 Die Qualitative Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode

Die transkribierten Interviews wurden anschließend mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet, die durch ihre Offenheit dem explorativen Charakter der vorliegenden Studie gerecht wird, und „gleichzeitig Standards methodisch kontrollierten Vorgehens genügen kann“ (Mayring 2015, S. 130). Die qualitative Inhaltsanalyse zeichnet sich durch ein systematisches, regelgeleitetes Vorgehen aus, mit dem auch große Materialmengen bearbeitet werden können. Trotzdem hat die Anpassung an den konkreten Untersuchungsgegenstand Vorrang vor der Systematik, während gleichzeitig „sinnvolle, aussagekräftige und methodisch abgesicherte qualitativ orientierte Forschung“ (Mayring 2015, S. 130 f.) möglich ist.

[10] Siehe Anhang G im elektronischen Zusatzmaterial für die endgültige Liste der Transkriptionsregeln.

Es schwierig, die qualitative Inhaltsanalyse als eine feststehende Methode zu beschreiben, da es viele verschiedene Varianten gibt (vgl. Schreier 2014). Mayring (2015) betont außerdem, dass seine „vorgeschlagenen Verfahren auch immer auf die konkrete Studie hin modifiziert werden müssen“ (ebd., S. 52). Gemeinsam haben alle Varianten der qualitativen Inhaltsanalyse, dass sie zur systematischen Auswertung umfangreicher qualitativer Daten und dadurch zur Überprüfung oder zum Finden von Hypothesen angewandt werden. Im Zentrum der Auswertung steht ein System aus Kategorien, die im Sinne von Variablenausprägungen fungieren. Die Kategorien können deduktiv durch Rückgriff auf Theorien oder die Fragestellung unabhängig vom Material gebildet oder induktiv aus dem Material abgeleitet werden. Das Zuordnen von Segmenten des Datenmaterials zu den Kategorien wird als *Codieren* bezeichnet. Dies geschieht auf Grundlage konkreter Definitionen der Kategorien, die zusammen mit sogenannten Ankerbeispielen in einem Codiermanual[11] festgehalten sind. Dies dient gleichzeitig zusammen mit dem Ablaufmodell als Grundlage für die Codierung durch mehrere Codierer und zur Qualitätssicherung der Auswertung. (Bortz/Döring 2015, S. 329 ff.; Kuckartz 2016, S. 26, S. 51 ff.; Mayring 2015, S. 22 ff., S. 50 ff.; siehe auch Abschnitt 4.5).

Ein wesentliches Ziel der Anwendung der qualitativen Inhaltsanalyse in der vorliegenden Studie war eine inhaltliche Klassifikation von Aussagen von Lehrkräften. Dabei wurden auch implizite Äußerungen mit Hilfe von Deutungen und Interpretationen expliziert, wodurch diese auch in die inhaltliche Klassifikation einflossen. Insgesamt wurden dadurch explorativ Erkenntnisse über die aktuelle Situation des Argumentierens im Analysisunterricht gewonnen.

Das Verfahren der qualitativen Inhaltsanalyse wird bei verschiedenen Autoren unterschiedlich beschrieben, woraus sich verschiedene Varianten der qualitativen Inhaltsanalyse ergeben[12]. Im Folgenden werden die Verfahren nach Mayring (2015) und Kuckartz (2016) mit Fokus auf die jeweils unterschiedenen Grundtechniken und Analyseformen (Mayring) beziehungsweise Basismethoden (Kuckartz) beschrieben. Für die qualitative Inhaltsanalyse zur Auswertung der vorliegenden Interviews wurde eine Synthese aus den Analyseformen *Induktive Kategorienbildung* und *Inhaltliche* sowie *Skalierende Strukturierung* von Mayring und der Basismethode *Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse* von Kuckartz gebildet (siehe Abschnitt 4.4.3).

[11] Siehe Anhang H und K im elektronischen Zusatzmaterial.

[12] Schreier (2014) gibt einen Überblick über verschiedene Varianten der qualitativen Inhaltsanalyse bei unterschiedlichen Autoren, setzt sie zueinander in Beziehung und ordnet diese zwei sogenannten Basisformen zu, der strukturierenden Inhaltsanalyse, die auf Mayring zurückgeht und von manchen Autoren als „die“ qualitative Inhaltsanalyse angesehen wird, und der qualitativen Inhaltsanalyse durch Extraktion nach Gläser und Laudel (Abs. [48]).

4.4.1 Die Qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring

Die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring ist zwar auf qualitative Analyseschritte fokussiert, enthält aber auch einige quantitative Elemente und orientiert sich am Ablauf und der Systematik der quantitativen Inhaltsanalyse (Lamnek/Krell 2016, S. 496). Mayring sieht für seine Variante der qualitativen Inhaltsanalyse ein allgemeines Ablaufmodell vor (siehe Abb. 4.1), das an das konkret vorliegende Material und die Fragestellung der Studie angepasst werden muss. Laut diesem Modell beginnt die Inhaltsanalyse mit der Bestimmung des Ausgangsmaterials. Dabei wird festgelegt, welches Material der Analyse zugrunde gelegt wird, wie dieses Material von wem unter welchen Bedingungen produziert wurde und in welcher Form dieses vorliegt. Es folgt die Konkretisierung der Fragestellung. Im nächsten Schritt wird eine konkrete Analyseform, die einer Analysetechnik zugeordnet und in Analyseschritte untergliedert ist, ausgewählt und passend dazu das konkrete Ablaufmodell festgelegt. Außerdem werden Codiereinheit (kleinster Materialbestandteil, der unter eine Kategorie fallen kann), Kontexteinheit (größter Textbestandteil, der unter eine Kategorie fallen kann) und Auswertungseinheit (Textteile, die nacheinander ausgewertet werden) bestimmt. Dann folgt die eigentliche Analyse anhand des festgelegten Ablaufmodells und mit Hilfe des Kategoriensystems, wobei dieses an Theorie und Material rücküberprüft und gegebenenfalls verändert wird. Bei einer Änderung des Kategoriensystems ist ein erneuter Materialdurchlauf vorgesehen. Auch ist in dieser Phase ein Zurückgehen zur theoretischen Differenzierung der Fragestellung möglich. Sind alle Analyseschritte der Analyseform erfolgreich durchlaufen, werden die Ergebnisse zusammengestellt und interpretiert. Abschließend wird die Aussagekraft der Analyse durch Anwendung inhaltsanalytischer Gütekriterien eingeschätzt (Mayring 2015, S. 54 ff.).

Bei Mayring (2015) stehen drei Analysetechniken, *Zusammenfassung, Explikation* und *Strukturierung*, zur Auswahl, die sich aus Grundformen des Interpretierens ergeben und in acht Analyseformen ausdifferenziert sind (siehe Tabelle 4.2). Abgestimmt auf das Material und die Forschungsfrage wird die passende Technik und die passende Analyseform ausgewählt. Bei der *Zusammenfassung* wird das Material reduziert und abstrahiert, um eine überschaubare Datenmenge zu erhalten, die in den wesentlichen Inhalten mit dem Gesamtmaterial übereinstimmt. Für die *Explikation* wird zusätzliches Material herangezogen, um fragliche Textstellen genauer erläutern und deuten zu können. Ziel der *Strukturierung* ist es, „bestimmte Aspekte aus dem Material herauszufiltern, unter vorher festgelegten Ordnungskriterien einen Querschnitt durch das Material zu legen oder das Material aufgrund bestimmter Kriterien einzuschätzen“ (Mayring 2015, S. 67). Dies geschieht immer durch eine deduktive Kategorienanwendung.

Abbildung 4.1 Allgemeines Ablaufmodell der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015)

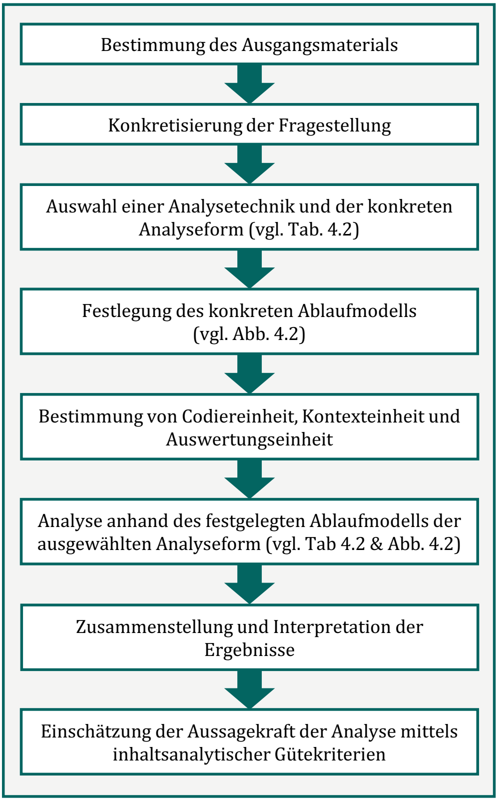


Tabelle 4.2 Übersicht über Analysetechniken und Analyseformen bei Mayring (2015)

Analysetechnik	Zusammenfassung	Explikation	Strukturierung
Analyseformen	Zusammenfassende Inhaltsanalyse Induktive Kategorienbildung	Enge Kontextanalyse Weite Kontextanalyse	Formale Strukturierung Inhaltliche Strukturierung Typisierende Strukturierung Skalierende Strukturierung

Da für das Vorgehen in der Analyse innerhalb der vorliegenden Studie die Analyseformen *Induktive Kategorienbildung*, *Inhaltliche Strukturierung* und *Skalierende Strukturierung* herangezogen und daraus zusammen mit einer der Basismethoden nach Kuckartz (siehe Abschnitt 4.4.2) eine Synthese gebildet wurde, werden nur diese drei Analyseformen im Folgenden näher beschrieben (siehe Abb. 4.2).

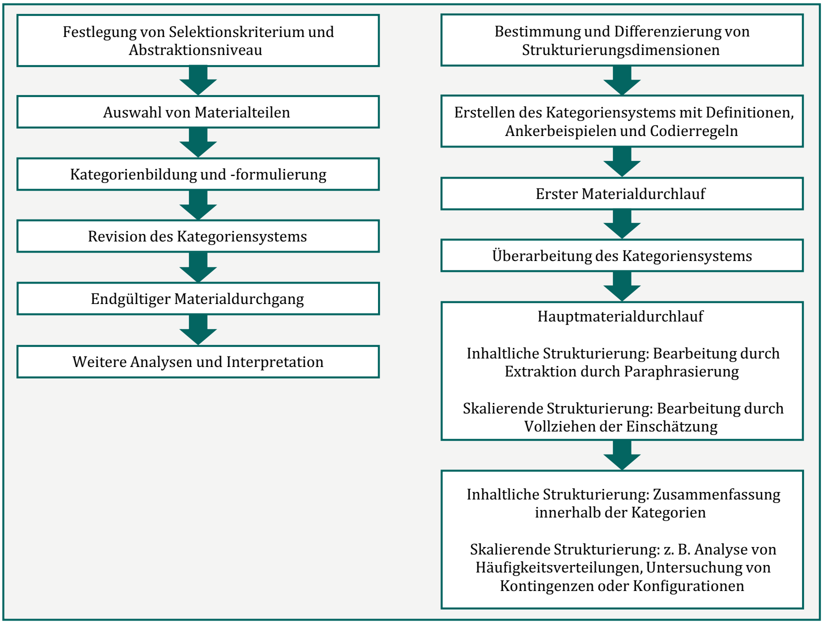


Abbildung 4.2 Ablaufmodell der Analyseformen Induktive Kategorienbildung (links) und Inhaltliche bzw. Skalierende Strukturierung (rechts) bei Mayring (2015)

Bei der sogenannten *Induktiven Kategorienbildung* nach Mayring werden die Kategorien des Kategoriensystems durch einen Verallgemeinerungsprozess aus dem Material abgeleitet, während bei der *Inhaltlichen* und bei der *Skalierenden Strukturierung* die Kategorien deduktiv durch theoretische Überlegungen definiert werden. Der Begriff *Induktive Kategorienbildung* wird hier für eine eigene Analyseform mit ausgearbeiteten Analyseschritten verwendet, wodurch Verwechslungsgefahr mit der allgemeinen Unterscheidung bei der Bildung von Kategorien in *induktiv* und *deduktiv* besteht. Bei der Analyseform *Induktive Kategorienbildung* bei Mayring, die vorrangig Kategorien induktiv bildet, wird mit Hilfe von Theorie und der Fragestellung der Analyse ein Selektionskriterium und ein Abstraktionsniveau für die Kategorien festgelegt. Mit Hilfe des Selektionskriteriums werden die Materialteile ausgewählt, die in die induktive Kategoriendefinition eingehen. Alle ausgewählten Textstellen bilden die Basis für die Kategorienformulierung unter Berücksichtigung des Abstraktionsniveaus. Bei jeder Textstelle wird entschieden, ob sie unter eine bereits definierte Kategorie fällt oder Basis für eine neue Kategorie bildet. In einer Revision wird zwischendurch das Kategoriensystem überprüft. Ergeben sich dadurch Änderungen am Kategoriensystem, wird der Materialdurchlauf erneut begonnen. Als Ergebnis der Analyse ergibt sich ein Kategoriensystem, dem bereits alle relevanten Textsegmente zugeordnet sind. Für die weitere Analyse schlägt Mayring verschiedene Möglichkeiten vor: Das Kategoriensystem kann im Sinne der Fragestellung interpretiert werden, es können induktiv oder deduktiv Hauptkategorien gebildet werden oder es können quantitative Analysen folgen (Mayring 2015, S. 85 ff.).

Bei der *Strukturierung* entsteht das Kategoriensystem vorab durch die Bestimmung von Strukturierungsdimensionen und deren weiterer Differenzierung in Ausprägungen. Bei der *Inhaltlichen Strukturierung* sind die Strukturierungsdimensionen deduktiv gebildete inhaltliche Hauptkategorien, die durch Unterkategorien ausdifferenziert werden können. Bei der *Skalierenden Strukturierung* handelt es sich um Variablen, die mindestens Ausprägungen in ordinalskalierter Form aufweisen. Die Kategorien werden genau definiert und durch konkrete Ankerbeispiele exemplarisch verdeutlicht. Bei Abgrenzungsproblemen zwischen Kategorien werden weitere Codierregeln formuliert. Das Kategoriensystem wird dann in einem ersten Materialdurchlauf erprobt und gegebenenfalls überarbeitet, bevor der Hauptmaterialdurchlauf vorgenommen wird. Beide Durchgänge erfolgen in zwei Phasen, einer Markierung der Fundstellen und einer Bearbeitung der Fundstellen. Bei der *Inhaltlichen Strukturierung* erfolgt die Bearbeitung durch eine Extraktion durch Paraphrasierung. Das dabei entstehende Material wird anschließend erst innerhalb der Unter-, dann innerhalb der Hauptkategorien zusammengefasst. Bei der *Skalierenden Strukturierung* erfolgt die Bearbeitung der Fundstellen durch das Vollziehen der Einschätzungen. Anschließend können beispielsweise Häufigkeitsverteilungen der Einschätzungen analysiert oder Kontingenzen oder Konfigurationen von Einschätzungen untersucht werden.

4.4.2 Die Qualitative Inhaltsanalyse nach Kuckartz

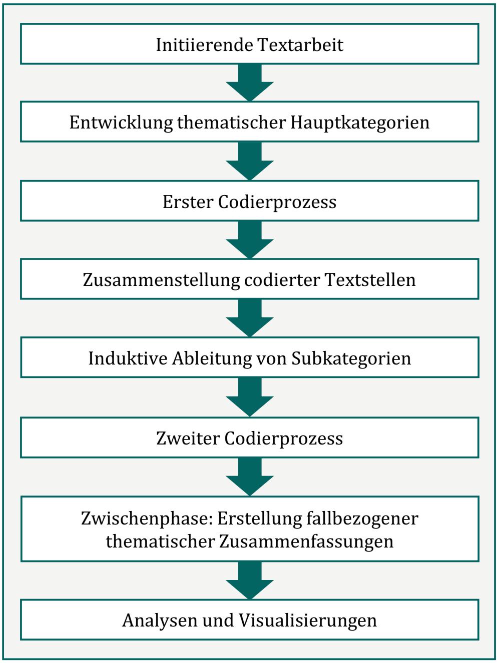
Kuckartz stellt seine Variante der qualitativen Inhaltsanalyse in Abgrenzung zur „klassischen“, d. h. quantitativen Inhaltsanalyse dar. So plädiert er für ein offenes Vorgehen ohne vorab formulierte Hypothesen. Der klassische Weg von der Forschungsfrage über die Analyse hin zum Ergebnisbericht wird beibehalten, jedoch mit einer Loslösung der Fixierung auf strikte Ablaufschritte zugunsten von Phasen, die parallel ablaufen können und durch Rückkopplungsschleifen miteinander verbunden sind. Bei der interpretativen Codierung behält das ursprüngliche Material bis zum Abschluss seinen Wert, die Kategorien werden mit dem Ziel einer Strukturierung und Systematisierung der Daten angewendet, nicht mit dem Ziel, quantitative Aussagen treffen zu können. Eine qualitative Inhaltsanalyse kann bei Kuckartz sogar völlig ohne Quantifizierungen auskommen (Kuckartz 2016, S. 46 f.).

Für Kuckartz ist die Unterscheidung zwischen *Fällen* und *Kategorien* als Strukturierungsdimensionen grundlegend. Damit grenzt er sich von Mayring ab, bei dem „die fallorientierte im Vergleich zur kategorienorientierten Perspektive so gut wie keine Rolle“ (Kuckartz 2016, S. 49) spiele. Fälle sind in der Regel die Forschungsteilnehmer, bei einer Interviewstudie also die Befragten. Bei den Kategorien handelt es sich häufig um Themen, sodass Kuckartz die aus den beiden Dimensionen gebildete Matrix auch als *Themenmatrix* bezeichnet (Kuckartz 2016, S. 49 f.).

Kuckartz unterscheidet drei Basismethoden der qualitativen Inhaltsanalyse, die *Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse,* die *Evaluative qualitative Inhaltsanalyse* und die *Typenbildende qualitative Inhaltsanalyse.* Aufgrund der Forschungsfragen wird die jeweils passende Basismethode ausgewählt. Aufgrund des explorativen und beschreibenden Charakters der vorliegenden Studie bietet sich die *Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse* an (Kuckartz 2016, S. 51).

Die *Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse* nach Kuckartz wird insbesondere zur Auswertung leitfadenorientierter, problemzentrierter und fokussierter Interviews vorgeschlagen. Innerhalb dieser Basismethode ist von rein induktiver bis zu rein deduktiver Kategorienbildung ein ganzes Spektrum denkbar, wobei die beiden Extreme eher selten in Reinform auftreten. Häufiger ist ein mehrstufiges Verfahren, das erst mit relativ wenigen deduktiv gebildeten Hauptkategorien arbeitet, die induktiv am Material weiter ausdifferenziert werden, wodurch das endgültige Kategoriensystem entsteht. Der Analyseprozess läuft bei der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse in sieben Phasen ab (siehe Abb. 4.3). Die erste Phase besteht aus der initiierenden Textarbeit, bei der die zu analysierenden Texte gelesen und währenddessen bei Auffälligkeiten Notizen und Markierungen angefertigt werden. Als Abschluss dieser Phase können erste kurze Fallzusammenfassungen geschrieben werden. In der zweiten Phase werden beispielsweise unter Rückgriff auf die Forschungsfrage und die in der ersten Phase angefertigten Notizen die thematischen Hauptkategorien gebildet und an einem Teil der Daten erprobt. Im ersten Codierprozess (Phase 3) wird das gesamte Material mit den entwickelten Hauptkategorien codiert, indem die Texte sequenziell durchgearbeitet und passende Segmente den Hauptkategorien zugeordnet werden. Eine Codierung eines Segments mit mehreren Hauptkategorien ist dabei auch möglich, was zu Überlappungen und Verschachtelungen führen kann. In der vierten Phase werden alle mit der gleichen Kategorie codierten Textstellen zusammengestellt und anschließend mit Hilfe dieser Zusammenstellung in der fünften Phase Subkategorien induktiv am Material abgeleitet, was zu einer Ausdifferenzierung der durch die Hauptkategorien repräsentierten Themen führt. Die dabei entstehenden Subkategorien werden geordnet und systematisiert und dabei gegebenenfalls zusammengefasst und abstrahiert. Die Subkategorien werden definiert und durch Beispiele aus dem Material illustriert. Phase 6 besteht aus dem zweiten Codierprozess, in dem das komplette Material mit den ausdifferenzierten Kategorien codiert wird. Vor der letzten Phase empfiehlt Kuckartz als Zwischenschritt fallbezogene thematische Zusammenfassungen anhand der Themenmatrix zu erstellen. Dabei entsteht eine transformierte Themenmatrix, die komprimierte Formen des Materials enthält und der weiteren Analyse sowie der

Abbildung 4.3 Ablauf einer *Inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse* nach Kuckartz (2016, S. 100)



Ergebnispräsentation dient. Die siebte und letzte Phase besteht schließlich aus den Analysen der Codierungen und der Visualisierung. Anschließend wird der Auswertungsprozess dokumentiert und eine Beantwortung der Forschungsfrage angestrebt (Kuckartz 2016, S. 97 ff.).

4.4.3 Die Auswertung der Lehrerinterviews – eine Synthese aus Mayring (2015) und Kuckartz (2016)

Für die Analyse der Lehrerinterviews kamen die Analyseformen *Induktive Kategorienbildung, Inhaltliche Strukturierung* und *Skalierende Strukturierung* von Mayring sowie die Basismethode *Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse* von Kuckartz in Frage, jedoch war keine dieser konkreten Auswertungsmethoden komplett oder am besten geeignet, sodass sich eine Synthese dieser Analysemethoden anbot. Die skalierende Strukturierung bot sich nur für diejenigen Aspekte an, die annährend ordinalskaliert betrachtet werden können. Dies traf nur auf einen geringen Teil der Daten zu, beispielsweise auf die Äußerungen der Lehrkräfte zu den vorgelegten Schulbuchaufgaben, die diese durch die Frage, welche der Aufgaben sie in ihrem Unterricht einsetzen würden und warum, implizit neutral, positiv oder negativ bewerteten. Die Beurteilung konnte also annährend auf einer dreistufigen Ordinalskala interpretiert werden. Abläufe der skalierenden Strukturierung waren somit sinnvoll, aber nur für einen Teil des Materials. Während Mayring bei der Strukturierung auf rein deduktive Kategorienbildung setzt und bei der Analyseform *Induktive Kategorienbildung* auf eine zunächst rein induktive, hat die *Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse* bei Kuckartz den Vorteil, dass beide Arten der Kategorienbildung kombiniert werden können. Dies bot sich für die vorliegende Studie deshalb an, weil einerseits eine Orientierung an den Forschungsfragen durch deduktive Hauptkategorien angestrebt werden sollte, um aus der großen Datenmenge die für die Fragestellungen relevanten Aspekte herauszufiltern, und andererseits die explorative Ausrichtung der Studie eine Ableitung der Subkategorien aus dem Material nahelegte. Eine reine Konzentration auf die *Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse* von Kuckartz hätte aber auf den Schritt der Anwendung eines Selektionskriteriums verzichtet, das Mayring bei der Analyseform *Induktive Kategorienbildung* einbindet, um nicht das komplette Datenmaterial in die Auswertung mit einzubeziehen. Dies bot sich gerade beim vorliegenden Datenmaterial an, da bewusst ein sehr allgemeiner Einstieg in die Interviews gewählt wurde, was gleichzeitig dazu führte, dass die Interviews Passagen enthalten, die das eigentliche Thema des Argumentierens nicht berühren. Mit Hilfe eines Selektionskriteriums konnten vorab nur die Bereiche der Interviews ausgewählt werden, in denen das Argumentieren im weitesten Sinne thematisiert wird, und auf dieses Datenmaterial konnten dann die deduktiven Hauptkategorien im ersten Durchgang der Codierung angewandt werden. Im Gegensatz zur *Inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse* von Kuckartz, bei der die Analyse der Codierungen mit einer kategorienbasierten Auswertung der Hauptkategorien beginnt, erfolgt die Auswertung bei der *Inhaltlichen Strukturierung* nach Mayring mit Hilfe einer Extraktion durch Paraphrasierung (die in etwa der Erstellung fallbezogener thematischer Zusammenfassungen innerhalb der Themenmatrix als Vorstufe für die Auswertung der Ergebnisse bei Kuckartz entspricht) und einer anschließenden Zusammenfassung erst innerhalb der Subkategorien und dann innerhalb der Hauptkategorien. Diese Vorgehensweise, die bei den einzelnen Segmenten beginnt und dann über die Zusammenfassungen innerhalb der Subkategorien zu den Hauptkategorien fortschreitet, erschien aufgrund der Datenmenge und der großen Anzahl an Codierungen in der vorliegenden Studie besonders geeignet.

Auf Grundlage der vorgestellten Überlegungen und unter Einbezug der Spezifika der vorliegenden Studie wurde das konkrete Vorgehen für die Analyse der Lehrerinterviews festgelegt. Das resultierende Ablaufmodell beginnt bei der eigentlichen Auswertung des Interviewmaterials. Die Bestimmung des Ausgangsmaterials, also die Durchführung der Interviews und die Transkription, sowie die Konkretisierung der Forschungsfragen, die bei Mayring der eigentlichen Analyse als Schritte in seinem Ablaufmodell vorausgehen, wurden bereits in Abschnitt 4.3 dargestellt. Es gibt keine eigene Phase für die Bestimmung von Codiereinheit, Kontexteinheit und Auswertungseinheit (vgl. Mayring 2015, S. 61 ff.), da für Codiereinheit und Kontexteinheit kein einheitlicher Umfang für alle Phasen des Ablaufmodells angegeben werden kann. Diese wurden implizit durch die Codierregeln und die Kategoriendefinitionen im Codiermanual festgehalten. Als übergreifende Regel galt, dass die codierten Segmente so knapp wie möglich aber so umfassend, wie für ein Verständnis unabhängig vom umgebenden Text nötig, gewählt wurden. Als Auswertungseinheiten wurden die jeweiligen Transkripte der einzelnen Interviews gewählt.

Das in Abbildung 4.4 dargestellte Ablaufschema stellt ein Modell dar, das in der konkreten Umsetzung durch viele Erprobungen an Materialteilen und Rücklaufschleifen ergänzt wurde, die der Übersichtlichkeit halber nicht im Einzelnen aufgeführt sind. So führten Erkenntnisse bei der Bildung von Subkategorien beispielsweise noch einmal zu einer Überarbeitung der deduktiven Hauptkategorien, angelehnt an die Analyseform *Induktive Kategorienbildung* bei Mayring, bei der nach der induktiven Bildung von Kategorien eine deduktive Bildung von Hauptkategorien vorgeschlagen wird. Überprüfungen der Codierungen zur

Qualitätssicherung durch den ersten Codierer mit zeitlichem Abstand und durch

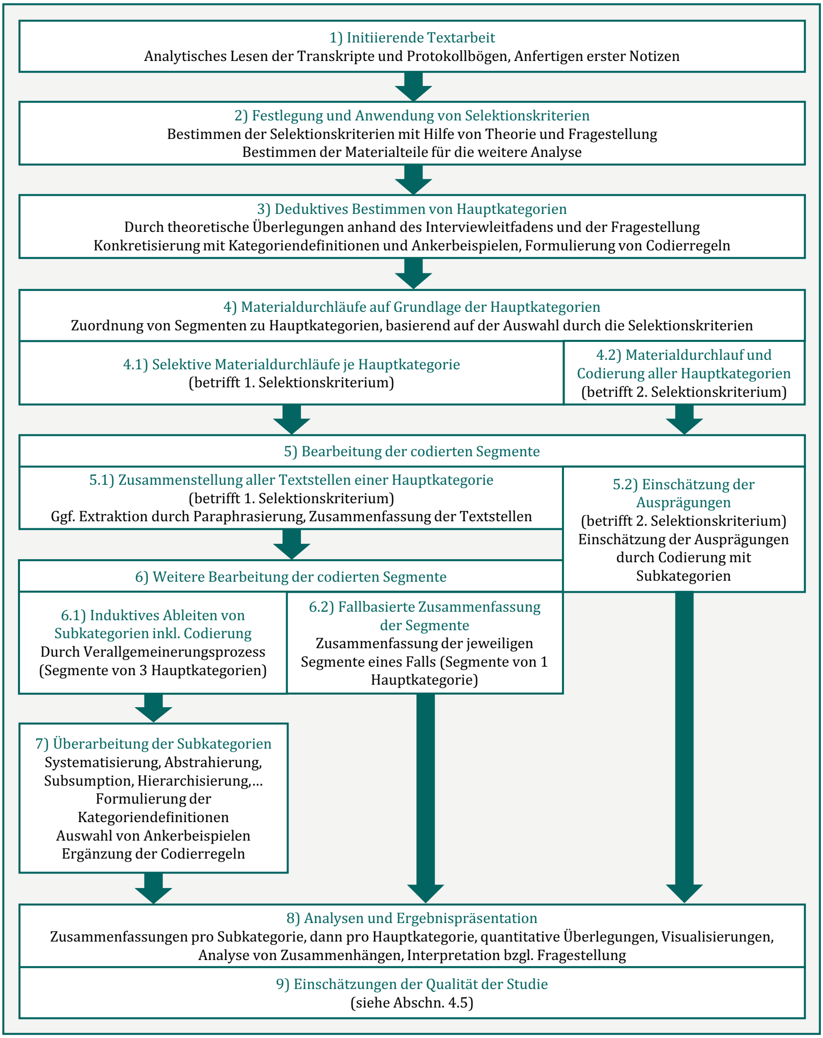


Abbildung 4.4 Ablaufschema der qualitativen Inhaltsanalyse der Lehrerinterviews

einen zweiten Codierer (siehe Abschnitt 4.5.2) führten auch zu Anpassungen und Überarbeitungen des kompletten Kategoriensystems.

Phase 1: Initiierende Textarbeit
In der ersten Phase wurde das Material zum ersten Mal mit analytischem Blick gelesen. Auch die direkt nach Durchführung der Interviews angefertigten Interviewprotokollbögen wurden miteinbezogen. Dabei wurden spontan Notizen, Memos und Markierungen angefertigt, wenn Auffälligkeiten in den Interviews oder Ideen für die Analyse aufkamen (vgl. Kuckartz 2016, S. 101).

Phase 2: Festlegung und Anwendung von Selektionskriterien
In der zweiten Phase wurden mit Hilfe der Theorie und der Fragestellungen Selektionskriterien bestimmt. Die Selektionskriterien wurden auf das gesamte Material angewandt, um die Materialteile für die weitere Analyse zu bestimmen. Es wurden zwei Selektionskriterien verwendet. Um Erkenntnisse über die aktuelle Situation des Argumentierens im Analysisunterricht zu erlangen, waren all diejenigen Teile der Interviews von Bedeutung, die sich mit dem Argumentieren im weiten Sinne (siehe Abschnitt 2.1), also in irgendeiner Hinsicht mit dem Argumentieren, Begründen und Beweisen und all deren Ausgestaltungen und verwandten Konzepten befassen. Dieses Selektionskriterium wurde als *Argumentieren (im weiten Sinne)*[13] bezeichnet. Die durch dieses Kriterium ausgewählten Materialteile wurden in den Phasen 3, 4.1, 5.1, 6.1 bzw. 6.2, 7, 8 und 9 des Prozessmodells weiterbearbeitet. Im ersten, allgemeinen Teil der Interviews wurde den Lehrkräften eine Schulbuchdoppelseite vorgelegt. Sie sollten erklären, welche der darin enthaltenen Aufgaben sie im Unterricht einsetzen würden und ihre Entscheidung begründen. Um Aussagen zu expliziten Begründungsaufgaben mit Aussagen zu anderen Aufgaben dieser Schulbuchseite vergleichen zu können, wurden mit Hilfe eines zweiten Selektionskriteriums alle Abschnitte der Interviews für die nähere Analyse ausgewählt, die sich mit der Schulbuchdoppelseite beschäftigen. Dieses Selektionskriterium wurde als *Aussagen zur vorgelegten Schulbuchseite* bezeichnet. Die durch dieses Kriterium ausgewählten Materialteile wurden in den Phasen 3, 4.2, 5.2, 8 und 9 des Prozessmodells weiterbearbeitet. Gerade in Bezug auf Begründungsaufgaben ergaben sich Abschnitte der Interviews, die von beiden Selektionskriterien erfasst wurden (vgl. Mayring 2015, S. 86 f.).

[13] Im Rahmen des Codierungsprozesses wird das Argumentieren immer „im weiten Sinne" (siehe Abschnitt 2.1) verstanden. Der besseren Lesbarkeit halber wird dies in der Benennung und Definition der einzelnen Kategorien (siehe auch Anhang H im elektronischen Zusatzmaterial) nicht immer zusätzlich notiert.

Phase 3: Deduktives Bestimmen von Hauptkategorien

In der dritten Phase wurden anhand theoretischer Überlegungen und unter Einbezug des Leitfadens und der Fragestellung deduktiv Hauptkategorien bestimmt, die mit Hilfe von Kategoriendefinitionen und Ankerbeispielen konkretisiert wurden. Diese Hauptkategorien fungieren im Sinne von Strukturierungsdimensionen. Sie sind im Bereich des Selektionskriteriums *Argumentieren (im weiten Sinne)* inhaltlicher Natur. Mit der Hauptkategorie *Begriffsverständnis Argumentieren* wurden Aussagen codiert, aus denen ein mögliches Begriffsverständnis daraus abgeleitet werden kann, wie die Befragten die Begriffe aus dem Feld des *Argumentierens* verwenden oder wie sie reagieren, wenn sie diese Begriffe hören. Mit Hilfe der Hauptkategorie *Aktuelle Umsetzung des Argumentierens im Unterricht* wurden Segmente der Interviews gesammelt, in denen die Befragten in Bezug auf das Argumentieren konkret aus ihrem Unterricht berichteten. Mit der Hauptkategorie *Positive Einschätzungen zum Argumentieren* wurden positive Aussagen in Bezug auf das Argumentieren codiert, aus denen Gründe für die Förderung der Kompetenz des Argumentierens abgeleitet werden können. In der Hauptkategorie *Herausforderungen rund um das Argumentieren im Unterricht* wurden Segmente gesammelt, in denen die Befragten Probleme und Schwierigkeiten explizit äußerten oder aus denen Herausforderungen abgeleitet werden können. Bei den Strukturierungsdimensionen im Bereich des Selektionskriteriums *Aussagen zur vorgelegten Schulbuchseite* handelt es sich um die einzelnen Aufgaben der Schulbuchdoppelseite. Die Bewertung dieser Aufgaben kann durch eine Einteilung in *positiv/neutral/negativ* als nahezu ordinalskaliert betrachtet werden und somit im Sinne der skalierenden Strukturierung nach Mayring analysiert werden. In dieser Phase wurden auch Codierregeln formuliert und in einem Codiermanual[14] festgehalten (vgl. Mayring 2015, S. 97 ff.; Kuckartz 2016, S. 101 f.).

Phase 4: Materialdurchläufe auf Grundlage der Hauptkategorien

In der vierten Phase wurde das Material durchlaufen, das in der zweiten Phase anhand der Selektionskriterien ausgewählt worden war. Dabei wurden passende Segmente den Hauptkategorien zugeordnet (vgl. Mayring 2015, S. 99 ff.; Kuckartz 2016, S. 102 ff.). Das Material, das durch das Selektionskriterium *Argumentieren (im weiten Sinne)* ausgewählt worden war, wurde dabei vier Mal selektiv durchlaufen, jeweils mit Fokus auf eine der Hauptkategorien, zu der alle passenden Segmente gesucht und codiert wurden (Phase 4.1). Dieses Vorgehen

[14] Siehe Anhang H im elektronischen Zusatzmaterial.

wurde festgelegt, da das Material sehr umfangreich ist und viele Überlappungen und Verschachtelungen der Codierungen zu erwarten waren. So sollte das Übersehen von relevanten Stellen im Material möglichst vermieden werden. Die durch das Selektionskriterium *Aussagen zur vorgelegten Schulbuchseite* ausgewählten Materialteile wurden nur einmal durchlaufen und dabei mit den formal definierten Hauptkategorien codiert (Phase 4.2). Um festzustellen, von welcher der Schulbuchaufgaben die Befragten jeweils sprachen, wenn sie die Aufgabennummer nicht äußerten, wurde die Schulbuchdoppelseite selbst herangezogen, um beispielsweise mit Hilfe der Aufgabenformulierungen die passende Codierung vorzunehmen. Diese Phase diente der Markierung und Bezeichnung der „Fundstellen" im Sinne der Strukturierung bei Mayring (2015, S. 99 ff.), wobei Kuckartz (2016) folgend der Begriff *Fundstelle* vermieden und stattdessen *codiertes Segment* verwendet wird (vgl. ebd., S. 41 f.).

Phase 5: Bearbeitung der codierten Segmente
In der fünften Phase wurden die in Phase 4 codierten Segmente bearbeitet (vgl. Mayring 2015, S. 98 f.). Dies geschah für die dem Selektionskriterium *Argumentieren (im weiten Sinne)* zugeordneten Hauptkategorien durch eine Zusammenstellung aller Textstellen der jeweiligen Hauptkategorie (Phase 5.1). Je nach Umfang und Grad der Ausschmückung der jeweiligen Segmente waren zudem eine Extraktion durch Paraphrasierung oder eine Zusammenfassung der gefundenen Textstellen möglich (vgl. Kuckartz 2016, S. 106; Mayring 2015, S. 103). Die Bearbeitung der codierten Segmente im Bereich des Selektionskriteriums *Aussagen zur vorgelegten Schulbuchseite* wurde durch eine Einschätzung der Ausprägungen durchgeführt (Phase 5.2). Diese Ausprägungen beziehen sich auf die Bewertung der Schulbuchaufgaben durch die Befragten und wurden jeweils durch die Subkategorien *positiv/neutral/negativ* realisiert (vgl. Mayring 2015, S. 106).

Phase 6: Weitere Bearbeitung der codierten Segmente
Die sechste Phase, die nur die Hauptkategorien im Bereich des Selektionskriteriums *Argumentieren (im weiten Sinne)* betrifft, bestand aus zwei parallelen Teilphasen. Innerhalb der Hauptkategorien *Begriffsverständnis Argumentieren, Positive Einschätzungen zum Argumentieren* und *Herausforderungen rund um das Argumentieren im Unterricht* wurden induktiv am Material Subkategorien bestimmt und formuliert (Phase 6.1). Dafür fand ausgehend von den in Phase 5 zusammengestellten Segmenten einer Hauptkategorie ein Verallgemeinerungsprozess statt, wodurch die durch die Hauptkategorien repräsentierten Themen weiter

ausdifferenziert wurden. Da jeweils alle Segmente einer Hauptkategorie miteinbezogen wurden, erfolgte automatisch gleichzeitig die Codierung mit diesen Subkategorien (vgl. Kuckartz 2016, S. 106 ff.; Mayring 2015, S. 85 ff.). Innerhalb der Hauptkategorie *Aktuelle Umsetzung des Argumentierens im Unterricht* bot sich keine weitere Ausdifferenzierung in Subkategorien an, da die Befragten von sehr unterschiedlichen konkreten Erfahrungen aus ihrem Unterricht berichteten und eher ein Überblick über die einzelnen Fälle in diesem Bereich interessant ist. Deshalb wurde innerhalb dieser Hauptkategorie fallbasiert ausgewertet (Phase 6.2). Dies geschah durch eine Zusammenfassung der jeweiligen Segmente eines Falls angelehnt an die thematischen Summarys bei Kuckartz (2016, S. 111).

Phase 7: Überarbeitung der Subkategorien
Die siebte Phase betraf nur die in Phase 6.1 gebildeten Subkategorien. Diese wurden nun überarbeitet, indem sie geordnet, systematisiert, abstrahiert, zusammengefasst, subsumiert und hierarchisiert wurden. Dadurch entstanden auch mehrere Ebenen von Subkategorien, für die jeweils ein möglichst einheitliches Abstraktionsniveau angestrebt wurde. Für die endgültigen Subkategorien wurden Kategoriendefinitionen formuliert und durch Ankerbeispiele illustriert. Dabei wurden auch die Codierregeln aus Phase 3 gegebenenfalls ergänzt.

Phase 8: Analysen der Codierungen und Ergebnispräsentation
In der achten Phase wurden alle bisherigen Codierungen miteinbezogen, unterschiedliche Analysen gemacht und die Ergebnispräsentation vorbereitet. Dazu gehörten Zusammenfassungen pro Subkategorie und anschließend pro Hauptkategorie, quantitative Überlegungen wie beispielsweise das Zählen von Segmenten oder Fällen mit Segmenten in bestimmten Kategorien, die Analyse von Häufigkeitsverteilungen der Einschätzungen, die Ableitung genereller Tendenzen aus den fallbasierten Auswertungen, das Erstellen von Visualisierungen, Analysen von Zusammenhängen zwischen Kategorien und Interpretationen bezüglich der Fragestellung (vgl. Mayring 2015, S. 61 ff., S. 87, S. 103, S. 106 ff.).

Phase 9: Einschätzungen der Qualität
In der abschließenden neunten Phase wurde die Qualität der Auswertungen anhand verschiedener Kriterien eingeschätzt. Da die Qualitätssicherung nicht nur die Auswertung mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse, sondern auch vorausgehende Phasen der Studie betrifft, werden Überlegungen zur Qualitätssteigerung der Studie in Abschnitt 4.5 übergreifend dargestellt.

4.5 Qualitätssicherung in der qualitativen Forschung

Eine Studie muss sich immer der Frage nach der Qualität ihrer Durchführung und der vorgenommenen Auswertungen des Datenmaterials stellen, um die gewonnen Erkenntnisse zu stützen. Während es in der quantitativen Forschung die drei klassischen Gütekriterien Objektivität, Validität und Reliabilität gibt, denen jede Studie genügen muss, hat sich in der qualitativen Forschung noch kein Konsens über Qualitätsstandards herausgebildet (z. B. Steinke 2007, S. 176). Gerade deswegen darf aber „nicht der Eindruck entstehen, Kategorienbildung und darauf aufbauende Analyse sei generell willkürlich und verwehre sich jeder Qualitätsüberprüfung und Erhöhung ihrer Zuverlässigkeit“ (Rädiker 2013, S. 144). Immer wieder betont wird in diesem Zuge die Notwendigkeit eines regelgeleiteten, systematischen Vorgehens bei der Durchführung und Auswertung als Qualitätssicherung (z. B. Bortz/Döring 2015, S. 334; Kuckartz 2016, S. 53; Mayring 2015, S. 50 f.). Zur Überprüfung und Steigerung der Qualität qualitativer Studien gibt es darüber hinaus verschiedene Möglichkeiten, die von einer kompletten Übernahme der klassischen Gütekriterien in die qualitative Forschung bis zur kompletten Ablehnung von Gütekriterien reichen (Flick 2007, S. 192 ff.; Kuckartz 2016, S. 202). In diesem Abschnitt werden mögliche Gütekriterien der qualitativen Forschung diskutiert und anschließend anhand dieser Kriterien dargestellt, welche Maßnahmen zur Steigerung der Güte der vorliegenden Studie vorgenommen wurden.

4.5.1 Kriterien zur Beurteilung der Studiengüte

Zur Beurteilung der internen Studiengüte, die sich auf Aspekte wie Zuverlässigkeit, Regelgeleitetheit, intersubjektive Nachvollziehbarkeit oder Glaubwürdigkeit bezieht, finden sich bei Kuckartz zwei Checklisten mit Fragen, eine in Bezug auf Datenerfassung und Transkription, eine in Bezug auf die eigentliche Auswertung mit der qualitativen Inhaltsanalyse. In ersterer werden Aspekte wie die Fixierung der Daten, die Dokumentation des Prozesses und Details zum Transkriptionsprozess wie Transkriptionsregeln, -software, transkribierende Personen, Anonymisierungen und Ähnliches abgefragt. Die zweite Checkliste fragt nach der Wahl und Begründung der Methode, deren konkreter Durchführung, den codierenden Personen, dem Kategoriensystem, der Verwendung von Beispielen und ähnlichen Aspekten der qualitativen Inhaltsanalyse und der Präsentation der Ergebnisse (Kuckartz 2016, S. 204 f.).

Mayring (2016, S. 144 ff.) schlägt sechs übergreifende Kriterien vor, mit denen die Güte qualitativer Forschung beurteilt werden kann. 1) Mit dem Kriterium der *Verfahrensdokumentation* wird eingeschätzt, inwiefern das spezifische Vorgehen, das in der qualitativen Forschung an den jeweiligen Gegenstand angepasst sein muss, detailliert dokumentiert wurde. 2) Mit der *Argumentativen Interpretationsabsicherung* wird eingeschätzt, inwiefern vorgenommene Interpretationen argumentativ begründet werden und ob dabei auch alternative Deutungsmöglichkeiten nicht außenvor gelassen werden. 3) Mit dem Kriterium der *Regelgeleitetheit* wird eingeschätzt, inwiefern das komplette Vorgehen trotz notwendiger Flexibilität systematisch und regelgeleitet ausgeführt wird. 4) Mit dem Kriterium *Nähe zum Gegenstand* wird eingeschätzt, wie nahe die Situation der Datenerhebung an der Alltagswelt der Versuchsteilnehmer ist und inwiefern eine Interessensübereinstimmung mit den beforschten Personen angestrebt wird. 5) Mit dem Kriterium der *Kommunikativen Validierung* wird eingeschätzt, inwiefern die Ergebnisse abschließend mit den Beforschten diskutiert werden. 6) Mit dem Kriterium der *Triangulation*[15] wird eingeschätzt, inwiefern unterschiedliche Methoden angewendet und die Ergebnisse verglichen werden.

Für die Beurteilung der Qualität von Codierungen kann das Kriterium der Intercoder-Reliabilität oder Intercoder-Übereinstimmung herangezogen werden, mit dem die Zuverlässigkeit der Codierungen eingeschätzt wird, indem mindestens zwei Codierer bestimmte Materialteile codieren und die Codierungen verglichen werden. Ziel ist die Präzisierung der Kategoriendefinitionen und die Erhöhung der Zuverlässigkeit der Codierungen. In Anlehnung an Kuckartz wird der Begriff *Intercoder-Übereinstimmung* verwendet, um den Begriff *Reliabilität*, der aus der quantitativen Forschung stammt, zu vermeiden. Bei der Intercoder-Übereinstimmung bezieht sich „[d]ie Forderung nach Übereinstimmung der Codierenden […] primär auf die Anwendung der Kategorien, d. h. das Codieren von Daten" (Kuckartz 2016, S. 206), da eine Übereinstimmung bei der Bildung der Kategorien kaum möglich und auch gar nicht erstrebenswert ist. Somit kann eine Überprüfung der Übereinstimmung auch bei induktiv gebildeten Kategorien nur dadurch erfolgen, dass das Kategoriensystem bereits vorgegeben ist und von weiteren Codierern deduktiv angewendet wird.

Zur Anwendung der Intercoder-Übereinstimmung schlägt Kuckartz zwei Möglichkeiten vor, den qualitativ-orientierten Weg des konsensuellen Codierens und den quantitativ-orientierten Weg der Berechnung einer prozentualen Übereinstimmung, in Anlehnung an die Idee der Bestimmung eines Reliabilitätskoeffizienten. Beide Wege können sich sinnvoll ergänzen.

[15] Die Idee der Triangulation wird bei Flick (2007, S. 197 ff.) ausführlich dargestellt.

Das konsensuelle Codieren erfolgt nach Kuckartz so, dass zwei Personen unabhängig voneinander die gleichen Texte mit Hilfe des Codierleitfadens codieren. Anschließend werden Abweichungen diskutiert und die erzielten Einigungen festgehalten. Gegebenenfalls können auch die Kategoriendefinitionen und Codierregeln angepasst werden. Ist eine Konsensfindung nicht möglich, wird eine dritte Person hinzugezogen. Das konsensuelle Codieren ist sehr aufwändig und muss konsequent aufgrund guter Argumente erfolgen. Es sollte sich keine Routine einschleichen, welcher Codierer sich durchsetzt (Kuckartz 2016, S. 211 f.). Obwohl es für die Qualität der Analysen ideal wäre, ist es aufgrund der Rahmenbedingungen von Projekten oftmals nicht möglich, das komplette Material konsensuell zu codieren. Deswegen werden hierfür oft zu Beginn des Auswertungsprozesses zufällig Materialteile ausgewählt und das konsensuelle Codieren durch die Bestimmung eines Übereinstimmungs-Koeffizienten ergänzt (Kuckartz 2016, S. 216 f.).

Für die Bestimmung eines Übereinstimmungs-Koeffizienten schlägt Kuckartz als genaueste Variante eine *segmentgenaue Berechnung* vor. Dabei erfolgt zunächst ein Durchlauf durch die Codierungen des ersten Codierers. Jedes codierte Segment wird als eine Codiereinheit betrachtet. Hat der zweite Codierer ein Segment mit der gleichen Kategorie codiert, so wird dies als Übereinstimmung gezählt, andernfalls als Nicht-Übereinstimmung. Dabei ist es wichtig, einen Toleranzbereich zu berücksichtigen, da die Segmentgrenzen variabel gewählt und die Sinnabschnitte trotzdem erhalten bleiben können. In einem zweiten Durchlauf werden die Codierungen des zweiten Codierers betrachtet und bei jedem codierten Segment überprüft, ob der erste Codierer das Segment unter Berücksichtigung des Toleranzbereichs auch codiert hat oder nicht. Aus den Ergebnissen kann nun eine Übereinstimmungstabelle gebildet und ein Übereinstimmungs-Koeffizient errechnet werden. Die Gesamtzahl der Codierungen ist dabei die Summe der Codierungen des ersten und zweiten Codierers. Der Übereinstimmungskoeffizient ergibt sich als $\frac{Anzahl\, der\, übereinstimmenden\, Codierungen}{Gesamtzahl\, der\, Codierungen}$. Da es keine Fälle von Segmenten gibt, die von beiden Codierern nicht codiert wurden, ist eine Zufallsbereinigung des Koeffizienten nicht möglich. Eine Zufallskorrektur könnte nur über die Anzahl der Wörter eines Textes erfolgen. Da die Wahrscheinlichkeit für zufällig gleiche Codierungen mit wachsendem Textumfang verschwindend gering wird, sodass ein zufallsbereinigter Wert sehr nahe am Übereinstimmungskoeffizienten liegen würde, rät Kuckartz (2016, S. 215 f.) davon ab. Schreier (2012, S. 171) schlägt eine etwas andere Herangehensweise bei der Berechnung von Übereinstimmungskoeffizienten vor, die davon ausgeht, dass eine Überprüfung von Übereinstimmung nur dort sinnvoll ist, wo sich Kategorien gegenseitig ausschließen. Das heißt, es werden nicht alle Subkategorien über alle Hauptkategorien hinweg in die Überprüfung miteinbezogen, sondern es wird für jede Kategorie, die weiter in Subkategorien ausdifferenziert ist, ein eigener Koeffizient berechnet.

Es stellt sich die Frage, welcher Wert des Übereinstimmungskoeffizienten der Auswertung welche Güte bescheinigt. Zur Aussage des Wertes des Koeffizienten gibt es kaum und wenn keine übereinstimmenden Angaben in der Literatur. Lotz et al. (2013, S. 94) schlagen eine Grenze von 85 % als Mindestanforderung für eine angemessene Intercoder-Übereinstimmung vor. Mayring (2015) gibt an, dass bei qualitativen Analysen „negative Ergebnisse nicht zum sofortigen Abbruch der Analyse führen müssen“ (ebd., S. 53), sondern als Ausgangspunkt für die Fehlersuche in der Pilotphase und als Anlass zur Überarbeitung der Analyseinstrumente gesehen werden sollten. Was für ihn ein „negatives Ergebnis“ ist, bleibt allerdings offen. Schreier (2012, S. 172) argumentiert, dass die zu erwartende Höhe eines Übereinstimmungskoeffizienten auch von der betrachteten Art der Kategorien abhängt. Bei Kategorien, die standardisierte Inhalte, z. B. Geschlecht, abfragen, sieht sie eine Übereinstimmung von 75 % als problematisch, während 75 % durchaus ein akzeptabler Wert sein kann, wenn es sich um Kategorien mit hohem Interpretationsspielraum handelt. Passend zu Mayring gibt sie an, kein Cut-off-Kriterium festzusetzen, sondern niedrige Übereinstimmungen als Anlass zu nehmen, sich noch einmal genauer mit dem Datenmaterial und dem Kategoriensystem auseinanderzusetzen (ebd., S. 173).

Da es einige Argumente gegen die Bestimmung eines konkreten Wertes für die Intercoder-Übereinstimmung gibt[16], sollte diese nicht im Vordergrund stehen und weder das einzige Kriterium zur Qualitätsüberprüfung sein, noch sollte ein dabei erreichter niedriger Wert Grund zur negativen Beurteilung der Qualität sein. Vielmehr sollte die Bestimmung eines solchen Wertes Anlass zur Reflexion der Zuverlässigkeit der Codierungen und Grundlage für einen konsensuellen Codierprozess, die Überarbeitung des Kategoriensystems sowie die Ergreifung weiterer Maßnahmen zur Erhöhung der Studiengüte sein.

Mayring (2015, S. 124) schlägt als besser geeignetes Maß für die Zuverlässigkeit von Codierungen eine Intracoder-Übereinstimmung vor, die bestimmt werden kann, wenn der gleiche Codierer zweimal das gleiche Material codiert, ohne die ersten Codierungen zu kennen. Dies wäre jedoch nur mit großem zeitlichem Abstand überhaupt leistbar. Bei Kuckartz (2016) wird der Begriff der

[16] Solche Argumente gegen die Berechnung einer Intercoder-Übereinstimmung können bei Kuckartz (2016, S. 207 ff.), Ritsert (1972, S. 70), Schreier (2012, S. 170 f.) und Lisch/Kriz (1978, S. 89 f.) nachgelesen werden.

Intracoder-Übereinstimmung nur kurz im Zusammenhang mit der quantitativen Inhaltsanalyse erwähnt (ebd., S. 207) und auch Schreier weist auf die Möglichkeit einer Konsistenz- oder Stabilitätsüberprüfung durch zwei Analysezeitpunkte des gleichen Codierers nur kurz in Abgrenzung zur Überprüfung durch zwei Codierer hin (2012, S. 170, S. 175). Durch diese geringfügige Erwähnung wird dieser Maßnahme aber unter Umständen zu wenig Bedeutung zugemessen. Das Durchführen einer erneuten Codierung mit zeitlichem Abstand und ein Vergleich der Codierungen mit dem Ziel einer Analyse der Nicht-Übereinstimmungen kann auch für deutliche Qualitätssteigerungen sorgen, da beispielsweise die Anzahl an übersehenen Segmenten, die in eine Kategorie fallen, vermindert wird und unscharfe Kategoriendefinitionen aufgedeckt werden können. Durch Selbstüberprüfung und -reflexion kann eine Intracoder-Übereinstimmung auch im Sinne einer Art konsensuellen Codierens eines Prüfers mit sich selbst angewandt oder durch eine Berechnung einer prozentualen Übereinstimmung mit zeitlichem Abstand zur Legitimation herangezogen werden kann. Die Idee einer Intracoder-Übereinstimmung kann also eine sinnvolle Ergänzung zu anderen qualitätssteigernden Maßnahmen darstellen.

Eine weitere Maßnahme kann die Überprüfung der Vollständigkeit der Codierungen mit Hilfe der Analysesoftware sein. Dies wird von Rädiker (2013, S. 146) in zweifacher Hinsicht umgesetzt. Er durchsucht erstens Texte, in denen eine Kategorie nicht zur Codierung verwendet wurde, nach den entsprechenden Themen und sucht zweitens mit Hilfe der Software nach typischen Begriffen, die die Zuordnung zu einer Kategorie nahelegen.

Die bisher dargestellten Maßnahmen zur Erhöhung der Studienqualität schätzen überwiegend die interne Studiengüte ein, die auch Voraussetzung für eine Zuschreibung externer Studiengüte ist. Darüber hinaus sollten auch spezielle Maßnahmen zur Betrachtung der externen Studiengüte in Betracht gezogen werden. Dabei liegt der Fokus auf dem gesamten Studiendesign, da es um Fragen der Übertragbarkeit und Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse geht. Durch die üblicherweise relativ kleinen Stichproben können nicht automatisch Rückschlüsse auf eine Grundgesamtheit gezogen werden, da diese Stichproben nicht repräsentativ für die Grundgesamtheit sind. Durch ein kontrastierendes Samplingverfahren (Kruse 2015, S. 242) kann aber eine bestmögliche Repräsentation der Heterogenität des Feldes angestrebt werden. Durch eine sorgfältige Fallauswahl kann also die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse erhöht werden (Kuckartz 2016, S. 217 f.). Entscheidend ist die theoriegeleitete statt einer zufälligen Auswahl von Fällen für die Untersuchung, eine sogenannte theoretische Stichprobe. Dies ist nicht unproblematisch, denn

> *die Vorstellung, ein Forscher könne bei einer begrenzten Auswahl von Fällen einen ‚typischen Fall' erkennen, impliziert nicht nur, dass der Forscher bereits eine Theorie über den Gegenstand hat (sonst wüsste er ja nicht, was typisch oder untypisch ist), sondern auch, dass er die Repräsentativität des Einzelfalls tatsächlich erkennt, um ihn in das Zentrum einer ‚exemplarischen Verallgemeinerung' stellen zu können.*
>
> (Bortz/Döring 2015, S. 335 f.)

Laut Bortz und Döring ist dieses Problem nur durch Rückgriff auf Quantifizierungen zu lösen. Eine Möglichkeit dafür ist, an die qualitative Untersuchung einen quantitativen Schritt anzuhängen, in welchem die Ergebnisse mit Hilfe einer großen Stichprobe quantitativ bestätigt oder widerlegt werden (Bortz/Döring 2015, S. 336).

4.5.2 Maßnahmen zur Qualitätssteigerung der vorliegenden Studie

Die oben dargestellten Kriterien können dazu beitragen, im Nachhinein die Güte einer Untersuchung einzuschätzen oder bereits vor und während der Durchführung der Studie und der Auswertung der Daten auf Grundlage dieser Kriterien Maßnahmen zur Qualitätssteigerung der Studie vorzunehmen. Zur Qualitätssteigerung der vorliegenden Interviewstudie mit Lehrkräften zum Argumentieren im Analysisunterricht wurden die folgenden Maßnahmen umgesetzt.

Verfahrensdokumentation (vgl. Mayring 2016, S. 144 f.)
Das spezifische Vorgehen zur Datenerhebung und Auswertung mit der auf das Material angepassten Variante der qualitativen Inhaltsanalyse wurde detailliert dokumentiert. Diese Dokumentation wurde in diese Arbeit aufgenommen (siehe Abschnitt 4.2–4.4). Dadurch soll der Forschungsprozess für den Leser nachvollziehbar sein. Die detaillierte Dokumentation betrifft auch die theoretischen Ausführungen zum zugrunde gelegten Verständnis des mathematischen Argumentierens sowie die Maßnahmen zur Qualitätssicherung der Studie (siehe Abschnitt 2.1 & 4.5).

Systematik und Regelgeleitetheit (vgl. Bortz/Döring 2015, S. 334; Kuckartz 2016, S. 53; Mayring 2015, S. 50 f.; Mayring 2016, S. 145 f.)
Die komplette Studie wurde von der Datenerhebung über die Transkription bis hin zur Auswertung systematisch und regelgeleitet durchgeführt. Dies wurde vor

allem durch die leitfadengestützte Interviewdurchführung, das festgelegte Ablaufmodell für die qualitative Inhaltsanalyse und die detaillierten Transkriptionsregeln umgesetzt (siehe Abschnitt 4.2–4.4).

Verwendung der beiden Checklisten von Kuckartz (2016, S. 204 f.)
Die beiden Checklisten in Bezug auf Datenerfassung und Transkription sowie Durchführung der qualitativen Inhaltsanalyse im engeren Sinne (Kuckartz 2016, S. 204 f.) wurden während der gesamten Studie als Referenz herangezogen und abschließend zur Qualitätsüberprüfung eingesetzt.

Nähe zum Gegenstand (vgl. Mayring 2016, S. 146)
Durch die Durchführung der meisten Interviews direkt an der Schule, an der der jeweilige Befragte tätig war, wurde dieser in seinem alltäglichen Arbeitsumfeld befragt, was somit eine Nähe zum Thema des Interviews darstellt. Nur in Ausnahmefällen wurde davon abgewichen. Zudem wurde eine Interessensübereinstimmung dahingehend angestrebt, dass den Befragten der Wert ihrer Teilnahme am Interview argumentativ dargelegt wurde. Hierfür war zuträglich, dass die Autorin zum Zeitpunkt der Interviews authentisch die Rolle einer Studienabsolventin hatte, die über nur wenig Vorerfahrung in der Unterrichtspraxis verfügte und deswegen aus den Erfahrungen der Lehrkräfte wertvolle Erkenntnisse für sich und für die Forschung gewinnen wollte. Die Wertschätzung der Äußerungen der Lehrkräfte steigerte deren Motivation an der Teilnahme und die Rollenkonstellation ermutigte sie, offen ihre Meinung und ihre tatsächlichen Erfahrungen darzulegen, ohne dem Zwang einer sozialen Erwünschtheit unterlegen zu sein.

Intercoder-Übereinstimmung und konsensuelles Codieren (vgl. Kuckartz 2016, S. 210 ff.)
Um die Zuverlässigkeit der Codierungen zu überprüfen und die Kategoriendefinitionen zu präzisieren, wurden drei zufällig ausgewählte Interviews von einem zweiten Codierer mit Hilfe des vollständigen Codierleitfadens inklusive Kategoriensystem mit Kategoriendefinitionen und Ankerbeispielen analysiert. Dies entspricht mehr als 20 % der Interviews. Der zweite Codierer war in die Forschungsdetails nicht eingeweiht, sodass die Zusammenarbeit auch die Objektivität der Auswertungen erhöhte. Auf Grundlage der Analysen der beiden Codierer wurde unter Berücksichtigung eines Toleranzbereichs eine segmentgenaue Intercoder-Übereinstimmung im Sinne Kuckartz‘ (2016, S. 213 ff.) berechnet. Es ergab sich über die drei Interviews hinweg nur eine Übereinstimmung von circa 48 %, was zunächst als sehr gering erscheinen mag. Eine genauere Analyse

der Nicht-Übereinstimmungen zeigt aber, dass die niedrigen Übereinstimmungswerte oft durch fehlende Codierungen auf beiden Seiten, vermehrt auf Seiten des zweiten Codierers, verursacht wurden. Dies fällt vor allem dadurch auf, dass zum Zeitpunkt der Überprüfung der zweite Codierer mit 117 Codierungen insgesamt viel weniger Codierungen vorgenommen hatte als die Autorin mit 205. Werden alle Codierungen des zweiten Codierers als Grundgesamtheit herangezogen und die Übereinstimmungen, die auf Basis der Auswertungen des zweiten Codierers gezählt werden können, durch diese Grundgesamtheit geteilt, so ergibt sich immerhin eine Übereinstimmung von etwa 65 %, was als gute Übereinstimmung interpretiert werden kann (vgl. Kuckartz 2016, S. 210). Die große Anzahl an Segmenten, die fälschlicherweise durch Übersehen nicht codiert wurden, ist auf die große Anzahl an Kategorien, die starke Ausdifferenzierung in Subkategorien und das hohe Maß an Überschneidungen der einzelnen Hauptkategorien, und teilweise sogar der Subkategorien höherer Ebenen, zurückzuführen. Dieser Einschränkung der Qualität der Auswertung wurde durch weitere Maßnahmen so weit wie möglich entgegengewirkt. Außerdem zeigte sich, dass einige Nicht-Übereinstimmungen durch die nicht ausreichende Vertrautheit des zweiten Codierers mit dem Forschungsgegenstand ausgelöst wurden. Dies zeigte sich im konsensuellen Codierprozess, in welchem alle Abweichungen diskutiert und die Einigungen festgehalten wurden. Wo nötig wurden Kategoriendefinitionen geschärft, um Abgrenzungen zwischen Subkategorien klarer zu machen. Es zeigte sich, dass beide Codierer durchwegs schnell Einigungen erzielen konnten.

Aufgrund der finanziellen und zeitlichen Rahmenbedingungen war es nicht möglich, das Verfahren des konsensuellen Codierens auf das komplette Datenmaterial anzuwenden, was die Studiengüte noch weiter erhöht hätte. Auch eine erneute Überprüfung in Zusammenarbeit mit einem zweiten Codierer, bei der jeweils auf die einzelnen Hauptkategorien und Subkategorien höherer Ebenen eingeschränkt wird und eine Übereinstimmung nur innerhalb dieser Kategorien überprüft wird (vgl. Schreier 2012, S. 171), konnte aufgrund der gegebenen Rahmenbedingungen nicht umgesetzt werden. Stattdessen wurden aber zwei weitere Maßnahmen zur Erhöhung der Zuverlässigkeit der Codierungen vorgenommen, die Arbeit mit einer Intracoder-Übereinstimmung und mit der Suchfunktion des Analyseprogramms. Somit konnte die Idee des konsensuellen Codierens zumindest im Sinne der Intracoder-Übereinstimmung auch auf die nicht durch den zweiten Codierer überprüften Interviews angewandt werden.

Intracoder-Übereinstimmung (vgl. Mayring 2015, S. 124; Kuckartz 2016, S. 207; Schreier 2012, S. 170, S. 175)
Das gesamte Material wurde mit einem zeitlichen Abstand von über einem Jahr von der Autorin erneut mit dem finalen Kategoriensystem codiert. Da eine Unkenntnis der ersten Codierungen trotz des zeitlichen Abstandes nicht vorausgesetzt werden konnte, wurde kein Übereinstimmungs-Koeffizient berechnet. Stattdessen wurde die erneute Analyse in Anlehnung an ein konsensuelles Codieren dafür verwendet, Nicht-Übereinstimmungen zu analysieren und infolgedessen Kategoriendefinitionen zu schärfen und im Zuge der ersten Codierung übersehene Segmente zu finden und zu codieren. Dies war vor allem wegen der vielen Überlappungen der einzelnen Hauptkategorien notwendig, die oft zu einer Fokussierung auf einzelne Bedeutungsaspekte im Interviewtranskript verleiteten, wodurch die Kategorisierung einer zweiten, überlappenden Kategorie übersehen wurden. Durch die erneute Codierung konnten einige zusätzliche Segmente codiert und bereits im ersten Durchlauf vorgenommene Codierungen angepasst werden.

Verwendung einer Suchfunktion zur Überprüfung der Vollständigkeit (vgl. Rädiker 2013, S. 146)
Zur Identifizierung möglicherweise übersehener Textstellen wurden lexikalische Suchläufe durch die Interviewtranskripte vorgenommen. Dafür wurde mit Hilfe der Suchfunktion von *f4analyse* nach typischen Schlagwörtern für einzelne Kategorien gesucht. Diese typischen Schlagwörter ergaben sich durch die Kategoriendefinitionen und zusätzlich durch die Zusammenstellung der bereits codierten Segmente der jeweiligen Kategorie. Beispielsweise hatte sich im konsensuellen Codierprozess (im Rahmen der Intercoder-Übereinstimmung und der Intracoder-Übereinstimmung, siehe oben) gezeigt, dass in der Hauptkategorie zum Begriffsverständnis des Argumentierens häufig passende Segmente übersehen wurden, da hier die Überlappung mit anderen Hauptkategorien besonders groß ist. Deswegen wurde unter anderem speziell nach Begriffen wie *Beweisen, Erklären, Satz, Lösungsweg* und ähnlichen gesucht.

Kontrastierendes Samplingverfahren und exemplarische Verallgemeinerung (vgl. Kuckartz 2016, S. 218; Bortz/Döring 2015, S. 335; Kruse 2015, S. 242)
Die Stichprobe der Befragten wurde theoretisch zusammengestellt, indem mögliche Versuchspersonen einen Fragebogen[17] ausfüllten und auf Grundlage dieser Fragebögen die Befragten so ausgewählt wurden, dass das Prinzip der maximalen

[17] Siehe Anhang A im elektronischen Zusatzmaterial.

strukturellen Variation erfüllt ist und das Sample die Heterogenität des Untersuchungsfeldes bestmöglich repräsentiert. Auch wenn dies keine Garantie auf die Anwendbarkeit der Idee der exemplarischen Verallgemeinerung darstellt, so erhöht es doch die Aussagekraft der durch die Studie gewonnenen Erkenntnisse.

Methoden-Triangulation/Mixed-Methods (vgl. Mayring 2016, S. 147 f.; Kuckartz 2016, S. 218; Bortz/Döring 2015, S. 336; Flick 2007, S. 197 ff.)
Nicht mehr Gegenstand dieser Arbeit ist die quantitative Überprüfung der gewonnenen Erkenntnisse und damit eine Hinzunahme einer weiteren Forschungsmethode mit dem Ziel der Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse. Dabei würden beispielsweise die Ergebnisse der vorliegenden, explorativen Untersuchung in Hypothesen überführt werden, die mit Hilfe einer Fragebogenstudie mit einer großen Anzahl an Lehrkräften überprüft werden könnten, um Generalisierungen zu ermöglichen.

5 Ergebnisse und Diskussion der Analyse der Lehrerinterviews

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse der Lehrerinterviews vorgestellt und diskutiert[1]. Dabei werden die Erkenntnisse zu den theoretischen Grundlagen in Beziehung gesetzt, die in Kapitel 2 dargestellt sind. Die Analyse der Interviews dient schließlich als Ausgangspunkt für Teil III dieser Arbeit, in dem auf theoretische Grundlagen aufbauend eine Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht entwickelt und deren Evaluation vorgestellt wird.

Mit Hilfe des Selektionskriteriums *Aussagen zur vorgelegten Schulbuchseite* wurden alle Segmente der Interviews ausgewählt, in denen sich die Lehrkräfte zu den vorgelegten Aufgaben äußerten. Die ausgewählten Segmente wurden dann in Hauptkategorien gemäß der Aufgaben 1 bis 16 der Schulbuchdoppelseite[2] kategorisiert. Da sich der Teil der Interviews, in dem die Schulbuchaufgaben vorgelegt wurden, noch nicht speziell auf das Argumentieren bezog, werden die Erkenntnisse, die aus dieser Kategorisierung gezogen werden können, zuerst dargestellt (Abschnitt 5.1). Im Anschluss (Abschnitt 5.2 bis 5.5) werden die Segmente in den Blick genommen, die sich direkt auf das Argumentieren (im weiten

[1] In zusammengefasster Form wurden einzelne Erkenntnisse, die in diesem Kapitel dargestellt werden, bereits in Tagungsbänden der GDM und der CERME veröffentlicht. Die Auswertungen wurden aber für das vorliegende Kapitel noch einmal überarbeitet (vgl. Scheffler 2017; Scheffler 2018; Bersch 2019).

[2] Siehe Anhang D im elektronischen Zusatzmaterial.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_5.

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_5

Sinne) beziehen und demzufolge mit dem gleichnamigen Selektionskriterium ausgewählt wurden. Die Struktur des Kategoriensystems, das für die Auswertung dieser ausgewählten Segmente verwendet wurde, ist überblicksartig in Abbildung 5.1 dargestellt. Die mit Hilfe des Selektionskriteriums *Argumentieren (im weiten Sinne)* ausgewählten Segmente der Lehrerinterviews wurden entlang vierer Hauptkategorien codiert und in weiteren Analyseschritten in mehreren Ebenen induktiver Subkategorien strukturiert. In Abbildung 5.1 sind der Übersichtlichkeit halber nicht alle Ebenen dargestellt und die Kategorienbezeichnungen teilweise abgekürzt formuliert. In Abschnitt 5.6 wird schließlich ein allgemeines Fazit bezüglich der Erkenntnisse aus der Interviewstudie gezogen. Bei der Darstellung der Ergebnisse werden an verschiedenen Stellen Teile des Kategoriensystems abgebildet. Die Zahlen in Klammern hinter den Bezeichnungen der Kategorien geben dabei stets die Anzahl an Befragten an, die Segmente zu dieser Kategorie beitrugen. Die exemplarisch ausgewählten, illustrierenden Zitate aus den Interviews sind meist in geglätteter Form[3] zitiert. Gemäß der Transkriptionsregeln[4] sind besondere Betonungen durch die Befragten unterstrichen dargestellt.

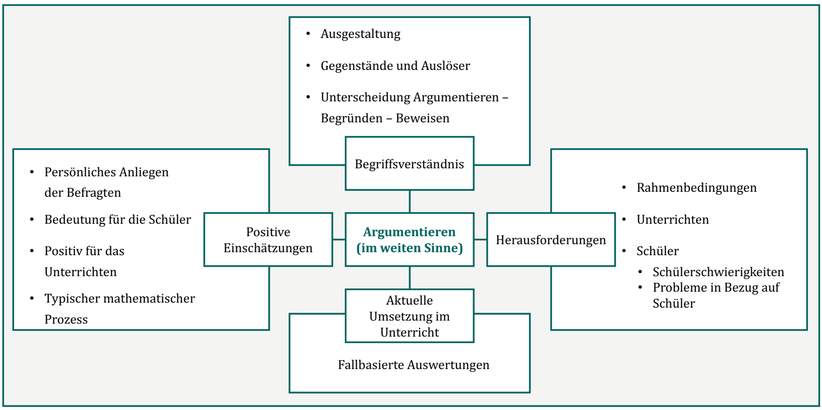


Abbildung 5.1 Überblick über die Hauptkategorien im Bereich des Argumentierens

[3] Das bedeutet, dass dialektale Färbungen, Versprecher und sprachlich unsaubere Formulierungen der besseren Lesbarkeit halber verändert oder gelöscht wurden, ohne dabei die Aussage des Zitates zu verändern.

[4] Siehe Anhang G im elektronischen Zusatzmaterial.

5.1 Einschätzungen zur vorgelegten Schulbuchseite

Im ersten Teil der Interviews, der noch nicht auf das Argumentieren fokussiert war, wurde den Lehrkräften eine Doppelseite aus dem Schulbuch *Neue Wege 6* aus Baden-Württemberg (Lergenmüller/Schmidt 2009a, S. 186 f.)[5] vorgelegt. Es wurde ein Schulbuch aus einem Bundesland gewählt, in dem keiner der Befragten arbeitete, sodass die Doppelseite für alle Lehrkräfte unbekannt sein sollte. Sie enthält „Vermischte Aufgaben“ zum Kapitel „Funktionen und Ableitungen“. Aufgrund der verwendeten Operatoren lassen sich die 16 Aufgaben in sieben explizite Begründungsaufgaben (Aufg. 5; 8–13) und 9 Nicht-Begründungsaufgaben (Aufg. 1–4; 6–7; 14–16) einteilen. Erstere enthalten alle entweder den Operator „Begründe…“ oder „Bestätige…“. Letztere sind Aufgaben, die nicht explizit zum Begründen auffordern, was aber nicht bedeutet, dass diese nicht trotzdem Argumentationsanlässe bieten können. Ruwisch (2017, S. 115 f.) nennt solche „reasoning requests“ *implizit*. Auf der vorgelegten Schulbuchdoppelseite kann dementsprechend zusätzlich Aufgabe 7 als eine Aufgabe mit impliziter Argumentationsaufforderung kategorisiert werden („Welche Eigenschaften treffen jeweils in den angegebenen Punkten zu?“). Außerdem enthalten die Aufgaben 10, 11 und 13 neben expliziten auch implizite Argumentationsaufforderungen. Die Einteilung der Schulbuchaufgaben anhand der verwendeten Operatoren wurde für die Auswertung verwendet, da die Lehrkräfte nur die Aufgabenstellungen zu sehen bekamen, die Aufgaben aber nicht selbst lösten, sodass die Operatoren erste Hinweise auf Argumentationsanlässe darstellen. Die Lehrkräfte kannten diese Einteilung der Aufgaben aber nicht. Sie wurden dazu aufgefordert, sich die Aufgaben der Doppelseite anzusehen und dann zu erläutern, welche davon sie in ihrem Unterricht einsetzen würden und warum. Dabei gab es Lehrkräfte, die über jede einzelne Aufgabe sprachen und diese beurteilten und andere, die nur einzelne Aufgaben herausgriffen. Die zugehörigen Äußerungen wurden je Aufgabe jeweils als positiv, neutral oder negativ codiert. Eine neutrale Codierung wurde dann vorgenommen, wenn eine Lehrkraft nur über die Aufgabe sprach, sie aber nicht positiv oder negativ bewertete und nicht angab, ob sie sie im Unterricht verwenden würde oder nicht. Abbildung 5.2 zeigt für die einzelnen Aufgaben die Anzahlen der Lehrkräfte, die über die Aufgabe positiv, neutral beziehungsweise negativ sprachen. Dass insgesamt viel mehr positive Äußerungen codiert wurden als negative, ist wahrscheinlich teilweise auf die Art der Fragestellung im Interview zurückzuführen, da die Lehrkräfte entsprechend dieser hauptsächlich über Aufgaben sprachen, die sie für ihren Unterricht verwenden würden.

[5] Siehe Anhang D im elektronischen Zusatzmaterial.

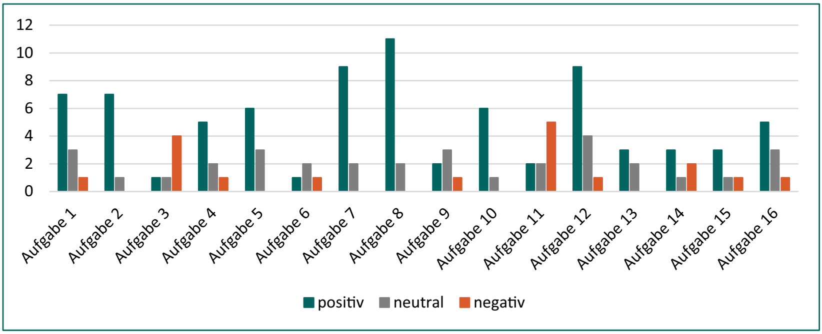


Abbildung 5.2 Bewertung der vorgelegten Aufgaben durch die Lehrkräfte

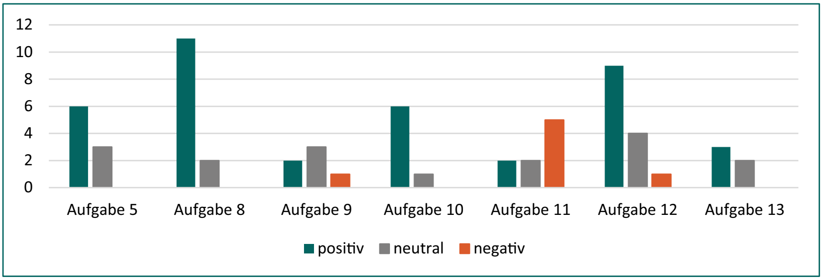


Abbildung 5.3 Bewertung der vorgelegten Begründungsaufgaben durch die Lehrkräfte

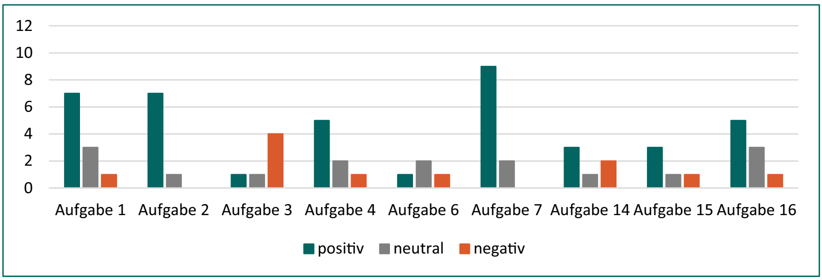


Abbildung 5.4 Bewertung der vorgelegten Nicht-Begründungsaufgaben durch die Lehrkräfte

In den Abbildungen 5.3 und 5.4 wurden die Bewertungen der Aufgaben nach Begründungsaufgaben und Nicht-Begründungsaufgaben sortiert. Bei den Begründungsaufgaben zeigt sich, dass es nur bei drei der sieben Aufgaben überhaupt negative Codierungen gab, bei Aufgabe 9 und 12 jeweils nur eine. Aufgabe 11 sticht heraus, da sie als einzige mehr negative als positive Beurteilungen bekommen hat. Diese Aufgabe thematisiert notwendige und hinreichende Bedingungen, einmal für die Existenz von Extrema und einmal für die Folgerung, dass der Graph einer Funktion eine Gerade darstellt. Die Verwendung der logischen Begriffe *notwendig* und *hinreichend* war für mehrere Lehrkräfte explizit ein Grund, die Aufgabe nicht für ihren Unterricht zu wählen. Zum Beispiel führte Herr C[6] aus: „Muss gestehen, die Begriffe *hinreichend* und *notwendig* benutze ich im Unterricht nicht. Das heißt, das könnten meine Schüler nicht“ (Herr C, Absatz 18). Positiv hebt sich vor allem die Aufgabe 8 hervor, in der ein begründetes Zuordnen von Funktionstermen und Graphen gefragt ist. Herr F griff explizit diese Aufgabe als „Lieblingsaufgabe“ heraus:

> *Und die Nummer 8, auch sehr gerne mit den Graphen arbeiten, mit den Eigenschaften. Meine Lieblingsaufgabe, wenn wir das auf eine Aufgabe reduzieren müssten, wäre wahrscheinlich die Nummer 8.*
>
> (Herr F, Absatz 20)

Bei den Nicht-Begründungsaufgaben gibt es nur zwei Aufgaben, die gar keine negativen Bewertungen erhielten: In Aufgabe 2 sollen Extrema und Krümmungsverhalten von Funktionen bestimmt werden, in Aufgabe 7 sollen qualitativ dem Graphen einer Funktion bestimmte Eigenschaften zugeordnet werden. Aufgabe 7 bietet also implizit auch einen Anlass zum qualitativen Argumentieren. Negativ fällt bei den Nicht-Begründungsaufgaben Aufgabe 3 auf. In dieser sollen Funktionen, die durch Funktionsterme gegeben sind, nach der Größe ihrer Steigung an einer bestimmten Stelle geordnet werden. Diese Aufgabe wird von den Befragten als „relativ künstlich“ (Herr K, Absatz 22), „eher langweilig“ (Herr C, Absatz 18) und „typisch mathematisch hirnige Aufgabe“ (Herr G, Absatz 18) beschrieben.

Insgesamt waren die drei Aufgaben, die von den Lehrkräften am häufigsten positiv erwähnt wurden, zwei explizite Begründungsaufgaben und eine Aufgabe, die implizit auch Argumentationspotenzial bietet. Mit Aufgabe 1 und 2 liegen dahinter zwei Standard-Kalkülaufgaben, knapp vor zwei weiteren Begründungsaufgaben. Negativ fiel vor allem die Begründungsaufgabe auf, in der die Begriffe *notwendig* und *hinreichend* verwendet wurden.

[6] Die Zuordnung von Buchstaben zu den einzelnen Lehrkräften ist zufällig und steht in keinem Zusammenhang zu deren Namen oder anderen persönlichen Eigenschaften.

Durch die Analyse der Aussagen zu den Schulbuchaufgaben zeigt sich eine große Bandbreite an Gründen, die Lehrkräfte für die Auswahl von Aufgaben für den Unterricht heranziehen. Dass manche Aufgaben Argumentationsanlässe bieten und andere nicht, ist dabei ein mögliches Kriterium der Lehrkräfte, das teilweise auch explizit erwähnt wurde, wie im Beispiel von Herrn L, der Aufgabe 8 wählen würde, „weil man da sowohl die Technik lernt als auch dann begründen. Also wenn es jetzt in das mathematische Argumentieren oder Kommunizieren geht“ (Herr L, Absatz 28), oder Frau H, die über Aufgabe 10 sagt: „Also die würde ich auf jeden Fall nehmen, aber nicht gleich am Anfang. Also einfach Begründungsaufgaben mag ich sehr gerne“ (Frau H, Absatz 22). In einigen Fällen wurden aber andere, beispielsweise inhaltliche, oder gar keine Gründe für die positive Bewertung der Begründungsaufgaben angegeben, zum Beispiel: „Also die 13 scheint mir sehr interessant zu sein“ (Herr C, Absatz 18), „Symmetrie kommt immer dran“ (Herr A, Absatz 24) oder „5 gefällt mir eigentlich auch, weil es nicht mehr rein um das Ableiten geht, sondern auch nochmal ein paar andere Begriffe abgefragt werden, die man da dann wiederholen kann“ (Herr K, Absatz 22). Auffallend im Vergleich zu den anderen Aufgaben ist, dass bei Aufgabe 12 die meisten Lehrkräfte über das Aufgabenformat („Wahr oder falsch? Begründe deine Entscheidung.“) sprachen und dieses positiv hervorhoben. Insgesamt kann aus den Aussagen der Lehrkräfte über die Schulbuchaufgaben gefolgert werden, dass diese Argumentationsanlässen tendenziell positiv gegenüberstehen und Begründungsaufgaben auch in ihrem Unterricht einsetzen. Dabei werden Aufgaben, die eine Förderung des mathematischen Argumentierens anregen, im Vergleich zu anderen Aufgaben, geringfügig besser beurteilt.

5.2 Begriffsverständnis der Lehrkräfte zum Argumentieren

Das Argumentieren (im weiten Sinne, siehe Abschnitt 2.1) im Analysisunterricht war inhaltlicher Schwerpunkt der Lehrerinterviews, wobei die Begriffe *Argumentieren* und *Begründen* im Kontext der Interviews synonym verwendet wurden. Im jeweiligen Interview wurde überwiegend derjenige der beiden Begriffe verwendet, der von den Lehrkräften selbst, beispielsweise im ersten Teil des Interviews[7],

[7] Die Lehrkräfte wussten im Vorfeld des Interviews nur, dass sie zum Analysisunterricht befragt werden sollten. Der Fokus auf das Argumentieren wurde ihnen nicht mitgeteilt. Auch im ersten Teil des Interviews wurde der Analysisunterricht allgemein thematisiert. Erst im Anschluss wurde näher auf das Argumentieren eingegangen (siehe Abschnitt 4.3).

genannt wurde. Die Begriffe *Beweis* und *Beweisen* wurden nur dann verwendet, wenn sie selbst von den Interviewten in das Gespräch eingebracht wurden. Diese Entscheidung bestätigte sich im Nachhinein als sinnvoll, da das Beweisen eine Sonderrolle einzunehmen scheint und ihm eine Abwehrhaltung seitens der Lehrkräfte entgegengebracht wird. Diese Haltung der Lehrkräfte sollte nicht die Ergebnisse in Bezug auf das Argumentieren im Allgemeinen negativ beeinflussen. Deswegen wurden auch Äußerungen speziell zum Beweisen in der Analyse teilweise gesondert betrachtet. Erst am Ende der Interviews wurden die Befragten direkt auf die Unterscheidung der Begriffe *Argumentieren, Begründen* und gegebenenfalls *Beweisen* angesprochen und befragt. Die diesbezüglichen Einschätzungen der Lehrkräfte wurden in der Auswertung auch gesondert in den Blick genommen. Das Begriffsverständnis der Lehrkräfte ist grundlegend für die weiteren Analysen der aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht und der geäußerten positiven und negativen Aspekte in Bezug auf das Argumentieren. Deshalb werden die Ergebnisse zum Begriffsverständnis der Lehrkräfte zuerst vorgestellt und diskutiert. Die mit der zugehörigen Hauptkategorie *Begriffsverständnis Argumentieren* codierten Segmente sind nicht auf Basis konkreter Fragen nach dem Begriffsverständnis entstanden, sondern wurden aus allen Teilen der Interviews herausgefiltert, in denen die Lehrkräfte über das Argumentieren sprachen, es mit unterschiedlichen Begriffen benannten oder konkrete Argumentationssituationen als Beispiele anführten. Induktiv ergaben sich dadurch die Subkategorien *Ausgestaltung des Argumentierens, Gegenstände und Auslöser des Argumentierens* und *Unterscheidung Argumentieren – Begründen – Beweisen.*

5.2.1 Ausgestaltung des Argumentierens

In den Interviews wurden indirekt eine ganze Reihe von Möglichkeiten angesprochen, wie das Argumentieren im Analysisunterricht ausgestaltet sein kann. Abbildung 5.5 gibt einen Überblick über die Subkategorie *Ausgestaltung des Argumentierens* der Hauptkategorie *Begriffsverständnis Argumentieren* im Kategoriensystem. Die zugehörigen Äußerungen ließen sich bis auf Einzelnennungen wiederum in zwei Subkategorien gliedern, die *Art des Argumentierens* als Prozess und die *Gestalt der Argumentation,* bezogen auf das Produkt des Argumentierens.

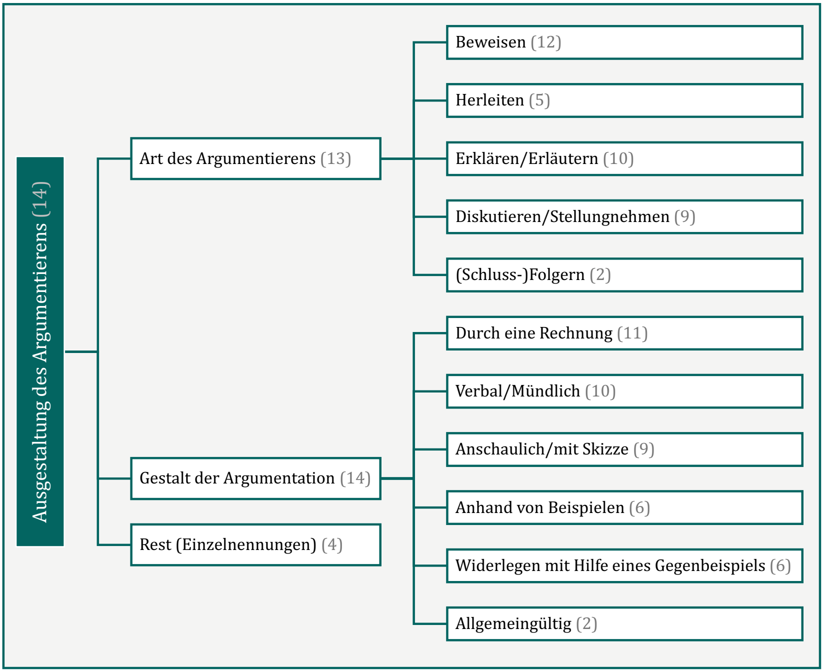


Abbildung 5.5 Überblick über die Subkategorie „Ausgestaltung des Argumentierens“

5.2.1.1 Art des Argumentierens

In Abschnitt 2.1.1 wurden verschiedene Arten des Argumentierens aus der Literatur zusammengetragen: Begründen, Beweisen, Herleiten, Erklären/Erläutern, Folgern/Logische Schlussfolgerungen ziehen, Diskutieren, Gründe angeben, Logisch einordnen. Dabei finden sich große Übereinstimmungen mit den Nennungen der Lehrkräfte in den Interviews. Das Begründen als eine Unterform des Argumentierens wurde dabei jedoch nicht als Art des Argumentierens kategorisiert, da die Begriffe *Argumentieren* und *Begründen* in den Interviews synonym verwendet wurden.

Das *Beweisen* wurde von 12 der 14 Lehrkräfte als eine Form des Argumentierens genannt und dabei häufig nur erwähnt. Bei genaueren Ausführungen wurde dem Beweisen unterschiedliche Bedeutung beigemessen. Häufig wurde es in Bezug auf die Unterrichtspraxis negativ beurteilt. Beispielsweise begründete Herr L seine Vermeidung des Beweisens im Unterricht durch die fehlende Zeit und die fehlende Relevanz für die Abiturprüfungen (siehe auch Abschnitt 5.5.1):

> *Wenn wir jetzt von der Oberstufe sprechen, dass sie [die Schüler] sehr viele Fächer haben und sehr wenig Zeit und dass man ihnen klare Rezepte gibt. Also jetzt keine Beweise oder irgendwas, mache ich zum Beispiel gar nicht, in der Oberstufe, weil ich mir denke, dass das für die Schüler für das Abitur auch nicht wirklich so relevant ist.*
>
> (Herr L, Absatz 22)

Herr G sieht das niedrige Leistungsniveau der Schüler als Ursache dafür, dass er „Begründen im Sinne von Beweisen kaum hin[bekommt]“ (Herr G, Absatz 20). Auffällig im Vergleich zu den anderen Befragten ist die Einstellung von Herrn D, der bedauert, dass das Beweisen im Unterricht in den Hintergrund rückt, dies aber als unumgängliche Tatsache betrachtet:

> *Wenn wir schon Mathe machen, dann würde ich auch wieder versuchen, solche Begründungen einzuführen, die ja völlig weggekommen sind. […] Also die theoretische Argumentation ist ja eigentlich nicht mehr da. Ich glaube wir machen im Matheunterricht überhaupt keinen Beweis mehr. […] Also, warum kann man das nicht wirklich mal machen? Ich muss ja jetzt nicht jede Stunde einen Beweis machen. Aber ich finde es eigentlich schon ein bisschen schade, dass wir irgendwelche Konzepte einführen, ohne die eigentlich nach*zuweisen. *Ich meine, das ist eigentlich zumindest so nach meinem Verständnis, wie ich ein Mathestudium hinter mich gebracht habe. Ich meine, da hat man den anderen Krempel weggelassen, da hat man nur bewiesen, das ist auch Käse. Aber dass man das jetzt hier völlig außenvor lässt, finde ich eigentlich auch nicht richtig.*
>
> (Herr D, Absatz 66-70)

Das theoretisch nah am Beweisen liegende *Herleiten* (siehe Abschnitt 2.1.5) wurde von 5 der 14 Lehrkräfte als Form des Argumentierens bei der Einführung theoretischer Inhalte oder Zusammenhänge erwähnt. Häufig wurde dabei von den Lehrkräften auch beschrieben, dass Herleitungen bewusst gerade keine große Rolle in ihrem Analysisunterricht spielen. Herr B beispielsweise gab an, dass er sich manchmal Folgendes denkt:

> *Die Herleitung ist mir jetzt gar nicht wichtig. Mir ist jetzt mal nur wichtig, dass die [Schüler] das wissen und wie man das ableitet. Und warum der Sinus abgeleitet der Kosinus ist, das ist halt so. Das müssen sie jetzt anwenden können.*
>
> (Herr B, Absatz 106)

Im Gespräch über das Argumentieren wurden von 10 der 14 Lehrkräfte die Begriffe *Erklären* oder *Erläutern* in ihren Ausführungen verwendet. Wie in Abschnitt 2.1.5 ausgeführt wurde, können Warum-Erklärungen theoretisch als Argumentationen verstanden werden, während andere Formen des Erklärens vom mathematischen Argumentieren abgegrenzt werden sollten. Diese theoretische Unterscheidung konnte an vielen Stellen nicht auf das konkrete Interviewmaterial übertragen werden, sodass alle Segmente in diese Subkategorie codiert wurden, in denen die Lehrkräfte im Kontext des Argumentierens die Begriffe *Erklären* oder *Erläutern* verwendeten. In manchen Fällen war das Verständnis des Erklärens in Form von Warum-Erklärungen eindeutig, nämlich wenn eindeutig eine der vorgelegten fiktiven Beispielargumentationen von Schülern als Erklärung beschrieben (Herr A, Absatz 34), das Erklären synonym zum Begründen verwendet („Erklär das mal nochmal, begründe nochmal, wie bist du darauf gekommen?" (Herr B, Absatz 40)) oder der Begriff *Erklären* in Verbindung mit dem Relativpronomen *warum* verwendet wurde. Andererseits sind Abgrenzungen in folgenden Beispielen schwierig:

> *„Begründe! Warum ist das so?", solche Aufgaben finde ich einfach wichtig. Also das zu erklären, wie geht denn das.*
>
> (Herr D, Absatz 20)
>
> *In dem Moment, wo ich es jemand anderem erklären muss, daran merke ich immer am schnellsten, ob man es selbst kapiert hat oder nicht.*
>
> (Frau H, Absatz 30)
>
> *Wenn mir das ein Schüler erläutern kann mit den Exponenten, dann wäre das für mich vollkommen okay.*
>
> (Frau J, Absatz 26)

Unklar ist, ob Herr D ein begründendes Warum-Erklären meint oder doch ein Wie-Erklären, was sich im zweiten Satz andeutet. Frau H und Frau J führten ihre Beispiele nicht weit genug aus, um eindeutig ableiten zu können, was das „es" bzw. das „das" ist, welches erklärt wird. In diesem Zusammenhang wird auch klar, dass die erklärende Funktion des Begründens für viele Lehrkräfte wichtig ist und dass das erklärende Element einen Teil ihres Begriffsverständnisses von *Argumentieren* oder *Begründen* ausmacht. Dies ist beispielsweise an den folgenden Segmenten zu erkennen. Frau O beurteilte die formal ausgerichtete Beispielargumentation des fiktiven Schülers Tom folgendermaßen:

> *Also die vom Tom, wenn sie nur so an der Tafel steht und er dazu nichts sagt, finde ich sie nicht so gut, weil sie schwache Schüler vielleicht nicht so nachvollziehen können. Wenn er dabei erklärt, was er tut, finde ich es gut.*
>
> (Frau O, Absatz 36)

> *Also die [Schüler] begründen sich auch viel gegenseitig. Die erklären sich dann und sagen: „Du, pass mal auf, da muss das hin, weil…“ oder „Das ist falsch, weil…“. Ich finde das zählt auch als Begründen.*
>
> (Frau E, Absatz 34)

Eine weitere als Art des Argumentierens klassifizierte Tätigkeit, die von 9 der 14 Lehrkräfte erwähnt wurde, ist das Diskutieren oder das Stellungnehmen. Diese Form des Argumentierens beschrieb beispielsweise Herr A mehrfach in seinen Ausführungen:

> *Es gab zum Beispiel schon einmal, wo sich die Schüler nicht klar waren, was ist jetzt* $\frac{\sin(x)}{x}$*, wenn* x *gegen* 0 *geht. Da hatte man im Unterricht eine Diskussion, wo es verschiedene Meinungen gab. Wo ich dann die Schüler habe diskutieren lassen.*
>
> (Herr A, Absatz 28)
>
> *Ja aber das [Argumentieren und Begründen] machen wir auch schon recht viel. Es sind natürlich auch für den Lehrer immer spannende Stunden, wenn eine Diskussion stattfindet. Das habe ich ja in den Gesellschaftswissenschaften häufiger und das können wir im Mathematikunterricht noch häufiger haben. […] Manchmal hat man das natürlich, dass man den Schülern ein schweres Problem gibt, wo sie erst mal alleine versuchen, dann schreibt einer was an die Tafel, dann diskutiert man darüber, dann kommt man darauf, das war jetzt nicht ganz richtig, dann verwirft man es wieder und dann hat man viel.*
>
> (Herr A, Absatz 48-50)

In ähnlicher Weise bezeichnete Herr B „Nimm Stellung zu…“ als ähnlich zum Operator „Begründe“ (Absatz 68). Gerade der Begriff *Argumentieren* wird von den Lehrkräften häufig mit Diskussion und Meinungsaustausch in Zusammenhang gebracht:

> *Argumentieren würde ich sagen, wenn jetzt mehrere Schüler darüber diskutieren. Dann bringt so jeder seine Argumente, warum. Also gerade, wenn es eine andere Ansicht gibt, was in Mathematik ja selten ist.*
>
> (Herr G, Absatz 56)
>
> *Verschiedene Graphen skizzieren lassen und dann darüber reden: Passt das? Könnte das jetzt so sein? Könnten wir hinkommen? […] Und bei solchen Aufgaben, wenn sich so Diskussionen ergeben, darf man die Diskussion in meinen Augen auch wirklich an die Klasse weitergeben. Nochmal mit einem anderen Beispiel. Oder dies auch offen einfach mal in den Raum stellen: „Ja ist das denn immer so?“*
>
> (Frau J, Absatz 28)

Eine letzte Art des Argumentierens, die aus theoretischer Perspektive mehr als Teilaspekt des Argumentierens zu bezeichnen wäre, aber in den Interviews von 2 Lehrkräften explizit herausgehoben wurde, ist das Folgern oder Schlussfolgern. Besonders Frau J verwendete den Begriff der Folgerung an mehreren Stellen, zum Beispiel:

> *Sie [die Schüler] müssen auch logische Folgerungen zu Papier bringen. Monotonieberechnungen: Die Berechnungen selbst sind ja eigentlich nicht schwer. […] Also ableiten, das kriegen sie relativ schnell hin, aber was heißt das denn dann für die Folgerungen? Was berechne ich? Was sind die Zusammenhänge?*
>
> (Frau J, Absatz 8)
>
> *Das ist für mich der Sinn der Mathematik, dass ich lerne, aus Gegebenem Folgerungen folgerichtig herzuleiten.*
>
> (Frau J, Absatz 14)

Insgesamt zeigt sich, dass 12 von 14 Lehrkräften mehrere Arten des Argumentierens in ihren Äußerungen erwähnten. Das breite Spektrum von einem Argumentieren in Form von Diskussionen im Unterrichtsgespräch bis hin zum tendenziell formal aufgefassten Beweisen zeigt, dass sich die Lehrkräfte durchaus der Bandbreite der Tätigkeit des mathematischen Argumentierens zumindest implizit bewusst sind. Es werden aber nicht alle diese Tätigkeiten hinsichtlich ihrer Eignung zum Einsatz im Analysisunterricht gleich bewertet. Tendenziell werden die formal weniger gebundenen Formen wie das Diskutieren und Erklären deutlich positiver hervorgehoben als die eher als formal strenger verstandenen Arten Beweisen und Herleiten. Auch im Hinblick darauf, wer die aktive Person bei diesen Tätigkeiten ist, zeigen sich Gegensätze. Das Erklären und das Diskutieren werden durchaus den Schülern zugetraut, während das Beweisen und Herleiten vor allem theoretischer Zusammenhänge den Äußerungen zufolge oft nur die Lehrkraft übernehmen könne. Zwischen den in den Interviews genannten Arten des Argumentierens und den in Abschnitt 2.1 aus der Literatur entnommenen Beispielen besteht eine große Übereinstimmung. Allerdings wurden das Angeben von Gründen (Bürger 2000, S. 31), das Logisch einordnen (Wittmann 1974, S. 36) und das Rechtfertigen (z. B. Jahnke/Krömer 2020) in den Interviews nicht explizit gefunden. Alle hier aufgeführten Begriffe wurden in Abschnitt 2.1.5 in das zuvor entworfene Rahmenmodell zum Argumentieren eingeordnet. Der Begriff des (Schluss)Folgerns steht dabei mit dem in der Literatur geläufigen logischen Schließen (*reasoning*) in Verbindung. Verglichen mit den theoretischen Überlegungen zeigt sich jedoch, dass das logische Schließen und verschiedene Schlussformen von den Lehrkräften so gar nicht erwähnt wurden. Es wurde nur von 2 Lehrkräften explizit das Ziehen von Schlussfolgerungen genannt.

5.2.1.2 Gestalt der Argumentation

In den Äußerungen der Lehrkräfte zum Argumentieren zeigen sich ganz unterschiedliche Auffassungen darüber, wie Argumentationen oder Begründungen ausgestaltet sein können. Dabei zeigt sich eine große Übereinstimmung mit den Beispielen für die Gestalt von Argumentationen, die in Abschnitt 2.1.1 aus der Literatur herausgearbeitet wurden: formal/axiomatisch, inhaltlich-anschaulich, ikonisch/mit Hilfe von Skizzen/Zeichnungen/Visualisierungen, verbal/(umgangs-) sprachlich, durch eine Rechnung, mit Hilfe von Beispielen und Gegenbeispielen, schrittweise/lückenlos/vollständig, Plausibilitätsbetrachtungen. Dass eine Argumentation in Form einer Rechnung auftreten kann, wurde von 11 der 14 Lehrkräfte genannt. Zum Beispiel gab Herr B an, dass „eine Rechnung […] auch eine Begründung" (Absatz 64) sei und führte später aus: „Wenn ich hier irgendetwas runterrechne, ist das auch eine Begründung, eine Argumentationskette. Jeder Rechenschritt ist ja wieder ein Argument dafür, dass ich dem Ergebnis näherkomme" (Absatz 82). Dass sich hinter den Begriffen *Argumentieren* und *Begründen* häufig verfahrensorientierte Aufgaben verbergen, die auf die Anwendung eines (Rechen)Schemas abzielen, wird in der Antwort von Frau E auf die Frage, wie leicht oder schwer es sei, Begründungen im Analysisunterricht einzubauen, deutlich:

> *Also prinzipiell ist es schon einfach, weil man kann zu jeder Funktion irgendwas begründen lassen. Aber die Aufgabentypen werden relativ häufig die gleichen sein. […] Es heißt zum Beispiel: „Begründe: Ist das Ding punktsymmetrisch oder nicht?". Muss man aber wieder rechnen. Ist halt wieder schwierig. […] Man kann alle Aufgaben begründen lassen, die man sonst rechnet. Aber meistens läuft es auf eine Rechnung hinaus. Also man kann ja auch sagen: „Begründe, dass das Ding punktsymmetrisch ist." Die Begründung wird aber eine Rechnung sein. Oder: „Begründe, dass die erste Ableitung die Nullstellen bei $-2+\sqrt{2}$ hat." Dann wird auch wieder gerechnet werden. Also wenn man darauf hinaus möchte, dass die Schüler wirklich einen Satz antworten, […] dann würde ich sagen, muss man mehr Erläuternfragen stellen und wenn es in Ordnung ist, dass sie auch mit Rechnung begründen, dann kann man das Begründen überall einbauen. Zu jeder Aufgabe.*
>
> (Frau E, Absatz 44)

Auch Herr D gab an, dass mit Hilfe einer „Rechenformel" (Absatz 56) oder mit „Berechnungen" (Absatz 56) argumentiert werden kann und dass dies einfacher sei, als wenn „man das mit Text macht" (Absatz 56). Wie bei Frau E und Herrn D zeigt sich auch bei anderen Lehrkräften, dass das rechnerische Begründen einem verbalen Begründen entgegengestellt wird. Beispielsweise beschrieb Frau O das Begründen in Leistungserhebungen so: „Man hat halt dann oft eine Rechnung und keinen Aufsatz".

Verbale Begründungen, die häufig in Form von mündlichen Begründungen auftreten, wurden von 10 der 14 Lehrkräfte erwähnt. Im Gegensatz dazu sind rechnerische Begründungen auf das medial Schriftliche beschränkt. Für die Operatoren in schriftlichen Aufgabenstellungen erwähnten die Lehrkräfte immer wieder Formulierungen wie „Begründen Sie in Worten“ (Herr L, Absatz 74) oder „Begründe in zwei bis drei Sätzen“ (Frau O, Absatz 46) im Gegensatz zu „Begründe rechnerisch“ (Frau E, Absatz 48), um den Schülern zu verdeutlichen, welche Form der Begründung von ihnen erwartet wird. Herr F sieht es als positiv an, dass die Aufforderung an die Schüler im Unterricht, in ganzen Sätzen zu antworten, oft automatisch dazu führe, dass Schüler Begründungen in ihre Antworten mit aufnehmen (Absatz 42).

9 der 14 Befragten verbinden mit dem Argumentieren unter anderem, dass anschauliche Begründungen gegeben werden, die beispielsweise durch Skizzen ergänzt sein können oder sogar komplett aus zeichnerischen Argumentationen bestehen. Im Bereich der Analysis wurden hier vor allem häufig Funktionsgraphen genannt, anhand derer graphisch argumentiert werden kann. Frau J beschrieb eine dafür beispielhafte Situation:

> *Ich habe eine Funktion vom Grad 3. Liegt jetzt der Wendepunkt zwischen Hoch- und Tiefpunkt oder wie sieht das aus? Dann skizzieren wir das eher so hin. Also dann begründet das der Schüler. Er bringt was an die Tafel. Entweder schreiben wir es insgesamt dann nochmal zusammen. Es kommt jetzt einfach auf den Schüler an. Also ob ich sage: Ich kann ihn das wirklich an die Tafel schreiben lassen oder ich lasse es mündlich und dem Schüler ist es wichtig, dass die anderen es einsehen, dann ist das jetzt fachlich vielleicht nicht hundertprozentig korrekt formuliert, aber die Idee ist rübergekommen.*
>
> (Frau J, Absatz 40)

Dass zum Argumentieren auch Beispiele herangezogen werden können, beschrieben 6 Lehrkräfte. Ebenfalls 6 der 14 Lehrkräfte, aber teilweise andere, erwähnten das Widerlegen mit Hilfe eines Gegenbeispiels als eine Möglichkeit des Argumentierens. Unter Ersteres fällt sowohl die Betrachtung eines konkreten Beispiels, dass dann generisch verallgemeinert wird, als auch das als negativ bewertete reine Betrachten von Beispielen ohne damit wirkliche Allgemeingültigkeit zu sichern, und das Veranschaulichen eines Zusammenhangs mit Hilfe eines Beispiels, ohne damit allgemeingültig zu verifizieren. Das Widerlegen mit Hilfe eines Gegenbeispiels wurde überwiegend als positive Variante des Begründens genannt, Frau E beispielsweise führte aus:

> *Gegenbeispiel ist immer gut. Also wenn er [gemeint: ein Schüler] zum Beispiel sagen kann: „Das ist falsch, weil…“, und mir dann eine Funktion sagt und hier sieht es genau so aus, dass es eben nicht so ist. Das ist super.*
>
> (Frau E, Absatz 38)

2 Lehrkräfte erwähnten noch zusätzlich als Eigenschaft von Argumentationen, dass diese allgemeingültig sein sollen. Beispielsweise leitete Frau H daraus eine Schwierigkeit von Begründungsaufgaben ab (siehe auch Abschnitt 5.5.3): „Wenn es wahr ist, muss ich es echt allgemeingültig zeigen oder beschreiben und das ist schon schwierig“ (Absatz 40).

Insgesamt zeigt sich an den Äußerungen der Lehrkräfte, dass sie auch bezüglich der konkreten Ausgestaltung von Argumentationen viele unterschiedliche Eigenschaften kennen und diese auch gezielt in ihrem Unterricht einsetzen. In mündlichen Situationen wird dabei überwiegend verbal argumentiert, wobei die fachliche Exaktheit nicht immer im Vordergrund stehen muss. In schriftlichen Begründungssituationen wird teilweise durch die Formulierung der Aufgabenstellung klargestellt, in welcher Form die Schüler begründen sollen. Die Formulierung „Begründen sie rechnerisch“ zeigt sich dabei als Möglichkeit, zwar vordergründig Begründungen einzufordern, aber den Schülern die Möglichkeit zu geben, dabei ihre gelernten kalkülhaften Fertigkeiten anzuwenden. Dies ist relevant für die Beurteilung von Aussagen der Lehrkräfte, dass das Begründen und Argumentieren an vielen Stellen ihres Unterrichts eine Rolle spiele. Hierbei kann es sich um qualitativ (bezogen auf die Kompetenz des Argumentierens) ganz unterschiedliche Situationen handeln. Im Vergleich zu den verschiedenen Möglichkeiten, welche Gestalt Argumentationen haben können, die in Abschnitt 2.1.1 herausgearbeitet wurden, zeigen sich viele Übereinstimmungen, jedoch mit unterschiedlichen Schwerpunkten. Während die Lehrkräfte oft von mündlichen Argumentationen berichteten, dominieren in der Literatur eher schriftliche. Die von zwei Lehrkräften genannte Eigenschaft der Allgemeingültigkeit, die Argumentationen aufweisen können, hängt mit den in der Literatur gefundenen Begriffen *schrittweise, lückenlos* und *vollständig* zusammen und ist in der Theorie bedeutender als in der Praxis. Dies könnte möglicherweise auch mit der Diskrepanz zwischen mündlichen und schriftlichen Argumentationsprozessen zusammenhängen. Im Mündlichen wird vermutlich weniger Wert auf Vollständigkeit und Allgemeingültigkeit gelegt als im Schriftlichen. Wenn die Lehrkräfte von schriftlichen Argumentationen sprachen, dann häufig von rechnerischen Begründungen. Diesen kommt hingegen in der Literatur eher weniger Bedeutung zu.

Insgesamt zeigt sich bezüglich der Ausgestaltung des Argumentierens eine große Übereinstimmung bei Arten des Argumentierens bzw. der möglichen

Gestalt von Argumentationen und den in Abschnitt 2.1.1 aus der Literatur herausgearbeiteten Beispielen. Durch die Analyse der Interviews konnte diesen Beispielen jedoch unterschiedlich viel Gewicht verliehen werden.

5.2.2 Gegenstände und Auslöser des Argumentierens

Neben der Art des Argumentierens und dessen konkreter Ausgestaltung sollen nun die Gegenstände betrachtet werden, die die Lehrkräfte als Inhalte oder Auslöser argumentativer Situationen im Analysisunterricht benannten, und mit den in Abschnitt 2.1.1 herausgearbeiteten Gegenständen und Auslösern verglichen werden. Die von den Befragten in den Interviews genannten Gegenstände und Auslöser des Argumentierens lassen sich in den in Abbildung 5.6 dargestellten Subkategorien klassifizieren:

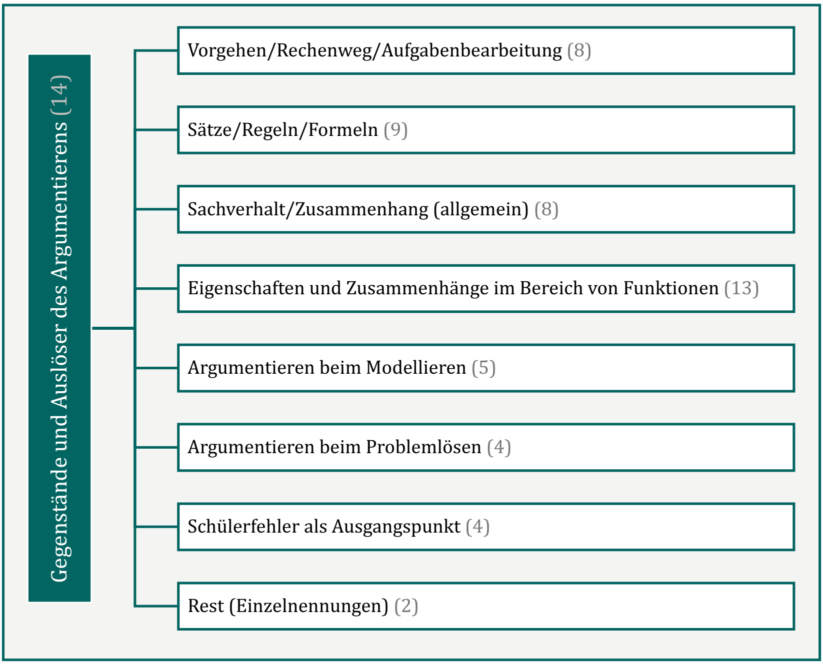


Abbildung 5.6 Überblick über die Subkategorie „Gegenstände und Auslöser des Argumentierens“

Diese Subkategorien weisen nicht alle den gleichen Grad an Allgemeinheit oder Abstraktion auf. So ist die Nennung eines Sachverhalts ohne Spezifizierung wesentlich allgemeiner als ein konkreter Inhalt aus dem Bereich der Analysis. Es könnten auch teilweise Kategorien unter zusätzlichen Begriffen zusammengefasst werden, wiederum ohne dadurch aber ein einheitliches Niveau zu erreichen. Deshalb wurden diese zusätzlichen Strukturierungsansätze aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht im Kategoriensystem umgesetzt, sondern werden nun in den folgenden Erläuterungen der Ergebnisse und deren Diskussion mit aufgegriffen.

8 der 14 Befragten erwähnten Situationen, in denen ein Vorgehen, ein Rechenweg oder eine Aufgabenbearbeitung begründet wird oder in direktem Zusammenhang mit diesen argumentiert wird. Das heißt, dass konkrete Schritte einer mathematischen Aufgabenstellung nicht nur ausgeführt, sondern auch hinterfragt werden, wie beispielsweise Herr B ausführt:

> *Ich bin eigentlich so wie es läuft relativ glücklich. Es ist nicht mehr nur dieses stupide Runterrechnen, das wir ja vorher schon angesprochen haben, man schaut jetzt zum Teil dann nochmal hinter die Kulissen und sagt: „Mensch, warum hat man das jetzt so und so gemacht?“*
>
> (Herr B, Absatz 88)

Dabei werden Beschreibungen, Erklärungen und Begründungen in Zusammenhang gebracht und nicht immer klar unterschieden, wie bei Herrn D:

> *Ich muss eigentlich erklären, was ich denn überhaupt gemacht habe. Also allein schon, dass ich beschreibe, bedeutet ja schon, dass ich in gewisser Weise eigentlich erkläre und auch begründe, was ich da mache und warum ich das mache. Das heißt, da steckt das ja eigentlich alles drin.*
>
> (Herr D, Absatz 46)

Der mathematische Gehalt der Argumentationen kann in diesem Zusammenhang variieren. So geht es im Beispiel von Frau J um eine persönliche Präferenz bei der Vorgehensweise, die begründet wird, während im Beispiel von Frau O der mathematische Zusammenhang hinterfragt wird:

> *Ich kann ja auch über Vorgehensweisen bei irgendetwas argumentieren. Warum ich das da lieber so mache oder der andere, warum er es lieber so macht.*
>
> (Frau J, Absatz 72)

> *Begründen spielt immer eine Rolle, wenn wir über Aufgaben sprechen. Also ich lasse sehr selten schriftlich begründen, sondern wenn dann, wenn jetzt ein Schüler mir eine Antwort gibt, frage ich schon nach: „Ja warum ist das so?“*
>
> (Frau O, Absatz 22)

Elemente der mathematischen Theorie wie Sätze, Regeln oder Formeln wurden von 9 der 14 Lehrkräfte als Gegenstände des Argumentierens genannt. Bezüglich der Analysis wurden häufig die Produkt- und Quotientenregel der Ableitung genannt, der Begriff *Formel* wurde zumeist ohne konkrete Beispiele erwähnt. Als Sätze wurden, wenn überhaupt, Beispiele aus der Geometrie der Sekundarstufe I explizit benannt, meist aber wurden auch Sätze nicht näher spezifiziert, beispielsweise „Ich habe die Erfahrung gemacht, dass es zeitlich den Rahmen sprengt, wenn man wirklich jeden Satz begründet“ (Frau O, Absatz 44). Häufig wurde das Begründen von Sätzen, Regeln und Formeln als Beispiel genannt, an welchen Stellen im Analysisunterricht <u>nicht</u> begründet wird. Die vielen Nennungen zeigen aber, dass den Lehrkräften durchaus bewusst ist, dass es sich hierbei um mathematiktypische Argumentationsanlässe handelt.

8 Befragte sprachen ganz allgemein von (Sach-)Zusammenhängen oder Sachverhalten, die begründet würden oder die als Anlass zum Argumentieren dienten: „Warum ist irgendein Sachverhalt so geordnet, so geklärt?“ (Herr B, Absatz 36), „diesen Zusammenhang so erschließen“ und „nochmal konkret die Zusammenhänge darstellen“ (Frau O, Absatz 30) sind hierfür typische Beispiele. Auch die Zusammenhänge verschiedener Themen wurden hier erwähnt, beispielsweise von Frau H auf die Frage hin, ob bei der Einführung neuer Themen begründet wird:

> *Also entweder man versteht das so, dass man sagt: Wie komme ich dazu? Also dass man versucht, so ein bisschen so einen roten Faden zu bekommen, dass man sagt: „Okay, das ist jetzt quasi eine logische Folgerung vom letzten Thema, wir müssen jetzt irgendwie dazu kommen.“ Ergibt sich vielleicht nicht immer, aber ich überlege gerade, ob man da jetzt etwas sagen kann irgendwie.*
>
> (Frau H, Absatz 50)

In die Subkategorie *Sachverhalt / Zusammenhang (allgemein)* wurden auch Segmente eingeordnet, in denen die Frage nach der Allgemeingültigkeit und die Frage „Ist das immer so?“ erwähnt wurden, ohne dass aber konkrete Beispiele angegeben wurden.

Konkrete Beispiele hingegen finden sich in den Segmenten, die in der Subkategorie *Eigenschaften und Zusammenhänge im Bereich von Funktionen* eingeordnet wurden. Diese Kategorie könnte zusammen mit den allgemeinen mathematischen

Zusammenhängen der vorangehenden Kategorie in einer neuen Kategorie subsumiert werden. Es zeigt sich jedoch durch die große Anzahl von Codierungen die Bedeutung dieser Kategorie, sodass beide Kategorien nebeneinanderstehend beibehalten wurden. 13 von 14 Befragten nannten Beispiele von Eigenschaften und Zusammenhänge im Bereich von Funktionen, die als Gegenstände für das Argumentieren im Analysisunterricht dienen oder dienen könnten. Innerhalb dieser Subkategorie gibt es eine Bandbreite unterschiedlicher Argumentationsanlässe, die sich auf ganz konkret vorgegebene Funktionen beziehen („Begründen Sie, warum die Funktion da monoton steigend ist“ (Herr G, Absatz 20)), auf eine Klasse von Funktionen („ganzrationale Funktion dritten Grades ist immer punktsymmetrisch“ (Frau E, Absatz 42)) oder allgemein auf Funktionen als solche („Alles, was ich in x-Richtung mache, ist genau verkehrt herum. Also ‚$x - 1$‘ im Argument verschiebt um 1 nach rechts, nicht nach links. Und ‚mal 2‘ bewirkt eine Stauchung und keine Streckung. […] Ich bin aber schon der Meinung, dass es einmal begründet sein muss“ (Herr C, Absatz 46).). Außerdem beschrieben manche Lehrkräfte Argumentationsanlässe an Funktionen, ohne aber konkrete Beispiele zu geben, wie Frau J:

> *Weil Sie ja gerade in der Oberstufenanalysis immer wieder diese Sprünge haben zwischen Funktionen, Ableitungen, Graphen, da hüpfe ich ja von einem zum anderen. Und dann kann ich sie auch schnell begründen lassen: Warum ist das so? Ich meine es geht ja dann ganz häufig so, dass ich eine Begründung habe, ohne dass ich die Ableitung skizziere, dass ich versuche, bei ihnen im Kopf dieses Bild entstehen zu lassen.*
>
> (Frau J, Absatz 52)

An den Segmenten in dieser Subkategorie wird deutlich, dass im Unterricht eher Argumentationen an konkreten Funktionen eine Rolle spielen, während theoretische Argumentationen tendenziell vermieden werden. Als Beispiel für Letzteres beschrieb Frau O:

> *Also mit Streifenmethode von oben und von unten. Letztlich reicht es doch, wenn die Schüler verstanden haben: Okay, ich kann die Fläche darunter annähern mit verschiedenen geometrischen Figuren, die ich da reinpassen kann und kann so den Flächeninhalt bestimmen. Werde aber nie ganz genau werden und dafür gibt es aber eine andere Methode, wie ich das ganz genau ausrechnen kann und kann somit das Integral einführen, ohne jetzt da irgendwie groß bewiesen zu haben mit Streifenmethode hier und da. Also die Schüler können und verstehen dadurch nicht mehr oder weniger.*
>
> (Frau O, Absatz 60)

Die nächsten beiden Subkategorien *Argumentieren beim Modellieren* und *Argumentieren beim Problemlösen* zeigen, dass die Lehrkräfte Gelegenheiten für Argumentationen kennen, bei denen die Förderung einer anderen prozessbezogenen Kompetenz wie des Modellierens oder Problemlösens im Vordergrund steht. 5 der 14 Befragten nannten Beispiele, wie in Modellierungssituationen das Argumentieren eine Rolle spielen kann. 4 der Befragten beschrieben Argumentationen im Rahmen des Problemlösens. Beim Modellieren beschreiben die Beispiele ganz unterschiedliche Argumentationsanlässe, die sich auf unterschiedliche Stellen des Modellierungskreislaufs beziehen: Situationen, in denen reale Situationen mit Hilfe von Modellen beschrieben werden und die jeweilige Wahl begründet wird, in denen eine Aussage über eine reale Situation begründet getroffen wird, in denen das (innermathematische) Vorgehen beim Modellieren begründet wird oder in denen unterschiedliche Modellierungsansätze diskutiert werden. Hierbei ergibt sich eine gute Passung mit den theoretisch herausgearbeiteten Zusammenhängen zwischen Argumentieren und Modellieren (siehe Abschnitt 2.2.3), wobei aber die Sichtweise, dass das Argumentieren an sich einen Modellierungsprozess darstellen kann, nicht thematisiert wird:

> *Sie [die Schüler] sollen mal den Graphen machen von einer gedämpften Schwingung […] und sich dann überlegen: Wie könnte jetzt so ein Term aussehen, der jetzt so eine gedämpfte Schwingung beschreibt? Und das sollen sie begründen.*
>
> (Herr A, Absatz 28)
>
> *Es muss argumentiert werden im Bereich von Modellierungsaufgaben, warum was passt oder warum jetzt mit einem bestimmten Ergebnis, das man als Funktion herausbekommen hat, was Bestimmtes berechnet werden kann. Warum das so geht? Warum man damit eine Prognose machen kann bei exponentiellem Wachstum? Das sind so Beispiele, wo begründet werden muss und argumentiert werden muss.*
>
> (Herr N, Absatz 44)
>
> *Wichtiger [als zu wissen, warum $ln(x)$ die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist] sind glaube ich dann wirklich die Anwendungen. Ich sage: „Okay, die Funktion gibt mir jetzt das an und ich will jetzt das Sachproblem lösen. Begründe mal!“ Wir nehmen die Ableitung. Die liefert uns ein Extremum.*
>
> (Herr B, Absatz 42)
>
> *Ich habe jetzt hier in der Schulaufgabe so einen Torbogen, da sollen sie ausrechnen, ob ein bestimmter LKW mit bestimmten Maßen durchpasst. […] Da gibt es verschiedene richtige Lösungen. Und dann kann man argumentieren, was vielleicht einleuchtender ist.*
>
> (Herr G, Absatz 56)

Die Beispiele, die das Argumentieren im Zusammenhang mit Problemlösesituationen thematisieren, sind nicht so konkret formuliert wie obige Beispiele aus dem Bereich des Modellierens. Hauptsächlich wurde nur erwähnt, dass ein Problem als Argumentationsanlass dienen kann, beispielsweise von Herrn G: „Also, dass man mehr so an Problemen so ein bisschen herumdiskutiert“ (Herr G, Absatz 48).

In einer letzten Subkategorie wurden Segmente von 4 Lehrkräften codiert, die beschrieben, dass Fehler von Schülern als Ausgangssituationen für das Argumentieren dienen können. Exemplarisch dafür sind die Situation, die Frau E beschreibt, und allgemein eine Einstellung der Lehrkraft gegenüber Fehlern, wie Frau J sie hat.

> *Ich lege irgendeine Aufgabe unter [die Dokumentenkamera] und sage: „Wo ist der Fehler, den der Schüler hier gemacht hat?“ und dann müssen sie mir begründen, wo der Fehler gemacht wurde.*
>
> (Frau E, Absatz 30)
>
> *Dann auch eine falsche Antwort mal aufnehmen und sich daran überlegen: „Warum passt die nicht?“ Also auf gar keinen Fall eine falsche Antwort als falsch abtun und damit ist das erledigt, sondern dann einfach: „Warum passt die nicht? Wo liegt das Problem?“.*
>
> (Frau J, Absatz 28)

Insgesamt zeigt sich in Bezug auf Gegenstände und Auslöser des Argumentierens eine große Breite an Argumentationsanlässen, die von den Lehrkräften genannt wurden. Dabei ergibt sich eine große Übereinstimmung mit den theoretisch in Abschnitt 2.1.1 herausgearbeiteten Beispielen. Fast alle Lehrkräfte sprachen von konkreten Argumentationsanlässen in Bezug auf Eigenschaften und Zusammenhänge im Bereich von Funktionen. Außerdem zeigte sich, dass die Lehrkräfte vor allem das Begründen eines konkreten Vorgehens, Rechenwegs oder einer Aufgabenbearbeitung als Beispiele nannten, die im Unterricht auch umgesetzt werden. Eher theoretische Argumentationsanlässe durch Sätze, Regeln und Formeln werden zwar auch genannt, aber meist geht aus den Ausführungen hervor, dass diese Argumentationsanlässe im Unterricht tendenziell weniger genutzt werden. Dies zeigt, dass die Lehrkräfte durchaus verschiedenste Anlässe zur Förderung von Argumentationskompetenz im Analysisunterricht kennen, aber dabei auch bewusst auswählen, welche davon sie nutzen und welche nicht. Da aber teilweise statt der konkreten Angabe von Beispielen allgemein von *Zusammenhängen*, *Vorgehen, Sätzen* oder Ähnlichem gesprochen wurde, bleibt offen, ob und wie Lehrkräfte die angesprochenen Argumentationsanlässe tatsächlich in die konkrete Unterrichtspraxis transferieren. Hier würde es sich anbieten, eine Studie mit Unterrichtsbeobachtungen anzuschließen, um möglicherweise genauere und objektivere Erkenntnisse zu erlangen. Von den in Abschnitt 2.1.1. herausgearbeiteten möglichen Gegenständen und Auslösern für das Argumentieren finden sich fast alle in den Nennungen der Lehrkräfte wieder. Einzig die Beispiele, die von Schmidt-Thieme (2006, S. 81) als strittige Angelegenheiten genannt werden, die ein offenes, „unmathematisches" Argumentieren ermöglichen, finden sich so in den Interviews nicht direkt wieder. Andersherum fehlt in der theoretischen Zusammenstellung der Bereich konkreter Eigenschaften und Zusammenhänge in Bezug auf Funktionen, da die Zusammenstellung eher allgemeiner Natur ist.

5.2.3 Zusammenhang und Unterscheidung der Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen*

Im Gegensatz zum oben erläuterten Begriffsverständnis, das sich implizit während der Interviews zeigte, wurden die Lehrkräfte abschließend gefragt, ob es für sie einen Unterschied zwischen *Argumentieren*, *Begründen* und gegebenenfalls *Beweisen* gebe. Es bestätigte sich als sinnvoll, diese Frage ganz am Ende der Interviews zu stellen, da sich die Lehrkräfte über diese Frage, mit der sich die meisten von ihnen noch nie beschäftigt hatten, etwas verunsichert zeigten. Dies geht beispielsweise aus folgenden Äußerungen hervor:

> *Wow, da bin ich jetzt kein Sprachwissenschaftler.*
>
> (Herr F, Absatz 72)
>
> *Darüber, muss ich gestehen, mach ich mir jetzt eigentlich wenig Gedanken, weil meine Gedanken gehen eher dann darum, wie formuliere ich eine Aufgabe im Unterricht und ob ich jetzt von Argumentieren oder Begründen spreche, das ist halt so bestenfalls aus dem Bauch heraus.*
>
> (Herr C, Absatz 52)

Die meisten fingen dann entsprechend während des Interviews laut zu denken an und korrigierten sich auch mehrmals. Schließlich zeigten aber die meisten intuitiv ein ähnliches Verständnis in Bezug auf das Verhältnis der Begriffe, wie in Abschnitt 2.1.4 vorgeschlagen, also das Argumentieren als Oberbegriff zu sehen und darunter das Begründen als spezielle Form des Argumentierens und das Beweisen als spezielles Begründen zu verstehen. Dies zeigt sich unter anderem an folgenden Beispielen:

Wobei natürlich jeder Beweis auch wieder eine Begründung ist.

(Herr C, Absatz 52)

Begründen, finde ich, ist mehr zielgerichtet als Argumentieren. Argumentieren kann in die eine oder in die andere Richtung gehen. Ich finde bei Argumentieren muss man sich nicht so, nicht so direkt festlegen, bei Begründen schon. Begründen ist auch vielleicht, dass schon festgegeben ist, wo es hinläuft und man nur noch sagen muss, warum. Und beim Argumentieren kann es in die eine oder die andere Richtung gehen.

(Frau E, Absatz 72)

Argumentieren ist wahrscheinlich ein bisschen offener. Begründen ist ja sehr zielgerichtet. […] Argumentieren ist natürlich weiter gefasst, das muss ja nicht auf eine Aussage bezogen sein.

(Frau H, Absatz 76)

Begründen kann ich ja dann auch ohne Beweis. Ich muss ja dann bloß einen Grund finden, warum diese Aussage jetzt wahr oder falsch ist, aber ich muss es nicht mathematisch beweisen.

(Frau M, Absatz 124)

Also für mich ist Argumentieren *eher noch ein bisschen der Oberbegriff oder umfassender. […]* Argumentieren *würde ich als Überbegriff sehen zu* Begründen *als streng formalem Beweis oder* Begründen *auf einer anschaulichen Ebene. […] Diese Bereiche* Begründen, Beweisen *und so weiter würde ich als Teilbereiche sehen dieses großen Bereichs* Argumentieren.

(Herr N, Absatz 82, Absatz 84)

Also beim Begründen, würde ich sagen, ist die Ausgangssituation eher so, dass das einfach Fakt ist und beim Argumentieren ist es eher so, dass die Ausgangssituation eventuell sogar vakant ist oder halt man darüber diskutieren kann. […] Ich finde Begründen ist ein bisschen lockerer als Beweisen. Also wo beim Beweisen einfach eine klare mathematische Struktur dahinter sein muss und einfach klar mathematisch strukturiert sein muss und das Begründen vielleicht ein bisschen lockerer ist, weil man es eben auch mit eigenen Worten machen kann.

(Frau O, Absatz 66, Absatz 68)

Insbesondere zeigt sich hierbei auch nochmals ein explizit formales Begriffsverständnis der meisten Lehrkräfte zum Beweisen:

Also zwischen Beweisen *und* Begründen*, denke ich, Beweis ist eher was Formelles.*

(Herr B, Absatz 52)

Ich glaub Beweis ist formeller, also so Uni.

(Herr F, Absatz 78)

> *Beweis kann sehr formalistisch sein und muss nichts mit Sprache zu tun haben.*
>
> (Frau H, Absatz 80)

Es zeigen sich aber auch einzelne abweichende Verständnisse. Beispielsweise überlegte Herr B, dass Argumentieren formaler sein könnte als Begründen:

> *Ich glaube, vielleicht,* Argumentieren *ist halt vielleicht dann eher noch das Formalere. Dass man wirklich sagt, also das ist dann sauber hingeschrieben.* Begründen*, begründen, kann ich vielleicht auch mal einfach so ein bisschen lapidar.*
>
> (Herr B, Absatz 96)

Auch Herr L sieht *Begründen* als weiter gefasst im Vergleich zu *Argumentieren*:

> Begründen *ist vielleicht ein bisschen allgemeiner vom Begriff her. Weil man vielleicht* Begründen *und* Erklären *eher in eine Kategorie schieben kann. Also ich würde so sagen, dass* Begründen *allgemeiner gefasst ist als* mathematisch Argumentieren.
>
> (Herr L, Absatz 70)

Frau H fasst das Argumentieren noch weiter als in dieser Arbeit vorgeschlagen: „Argumentieren im weitesten Sinne heißt einfach, Mathematik zu verbalisieren“ (Frau H, Absatz 76). Auf die Nachfrage, wo dann der Unterschied zum Kommunizieren sei, antwortete sie: „Das wird jetzt schwierig. So wie ich das gerade gesagt habe, gibt es dann keinen Unterschied mehr. Das stimmt.“ (Frau H, Absatz 78). Herr L versteht Beweisen nicht als Form des Argumentierens, da letzteres immer zwingend verbale Argumente erfordere: „Beweisen kann rechnerisch sein. Das ist in meinen Augen kein Argumentieren. Argumentieren ist immer mit verbalen, sprachlichen Argumenten“ (Herr L, Absatz 72).

Es zeigt sich also insgesamt, dass das intuitive Begriffsverständnis der meisten Lehrkräfte in Bezug auf den Zusammenhang der Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* dem in Abschnitt 2.1.4 vorgeschlagenen sehr nahekommt. Trotzdem gibt es bei einzelnen Lehrkräften davon abweichende Vorstellungen. Auffällig ist zudem das formale Verständnis zum Beweisen, das oft mit negativen Konnotationen verbunden ist, wie sich auch in anderen Bereichen der Analyse der Interviews immer wieder zeigt. Da aber nicht mit allen Lehrkräften explizit über das Beweisen gesprochen wurde, sondern nur mit denjenigen, die von selbst das Beweisen ansprachen, ist es nicht möglich, hierzu Aussagen über alle Befragten zu treffen.

5.3 Aktuelle Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht

Um die aktuelle Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht analysieren zu können, wurden mit der Hauptkategorie *Aktuelle Umsetzung des Argumentierens im Unterricht* die Segmente codiert, in denen die Lehrkräfte konkret vom Argumentieren (im weiten Sinne) in ihrem eigenen Analysisunterricht sprachen. Wenn sie sich explizit auf andere Teilbereiche wie die Geometrie oder Stochastik bezogen, wurden diese Segmente nicht codiert. Die codierten Segmente wurden dann fallbasiert weiter ausgewertet, indem erst segmentweise zusammengefasst und anschließend abstrahiert wurde. Daraus wurden dann für jede Lehrkraft Fallzusammenfassungen erstellt und diese schließlich zwischen den Lehrkräften verglichen, um übergreifende Tendenzen ableiten zu können. Im Folgenden werden erst die einzelnen Fallzusammenfassungen und anschließend die übergreifenden Erkenntnisse vorgestellt.

5.3.1 Fallzusammenfassungen[8] zur aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht

Herr A:
Im Unterricht von Herrn A wird an verschiedenen Stellen argumentiert: wenn Diskussionen mit verschiedenen Meinungen stattfinden, bei speziellen Aufgaben, beispielsweise wie ein Funktionsgraph aus einem anderen hervorgeht, und beim Modellieren, wenn ein passendes mathematisches Modell gefunden werden muss. Aus Zeitgründen kommen Modellieren und Argumentieren im Unterricht aber zu kurz. Auch „Kalküldruck“ (Absatz 48) verhindert mehr Argumentieren im Unterricht. Die Schüler müssen vorrangig auf die Abiturprüfung vorbereitet werden. Dafür ist es Herrn A wichtig, Standardaufgaben zu üben, da diese im Vergleich zu Argumentationsaufgaben vorrangig geprüft werden und schwache Schüler durch Standardaufgaben immerhin eine notwendige Minimalpunktzahl erreichen können. In Klausuren werden auch Aufgaben zum Argumentieren gestellt, beispielsweise solche, bei denen die Schüler durch Rechnen oder Zeichnen des

[8] Der besseren Lesbarkeit halber sind die Fallzusammenfassungen im Indikativ formuliert. Die Inhalte sind aber keine Tatsachen, sondern zusammengefasste und abstrahierte Angaben der einzelnen Lehrkräfte.

Funktionsgraphen nicht weiterkommen und dann mit Hilfe einer Skizze argumentieren müssen. Der Zwang zu schemenhafter Bepunktung verhindert aber, dass Herr A noch mehr Aufgaben zum Argumentieren stellt.

Herr B:
In der Oberstufe wird im Unterricht von Herrn B wenig hergeleitet. Wenn Schüler an Herleitungen interessiert sind, können sie diese im Buch nachlesen und dazu Fragen stellen. Wichtiger ist es ihm, sich auf die relevanten Inhalte der Abiturprüfung zu konzentrieren und mit den Schülern Schemata einzuüben, auch wenn dies nicht seinem eigenen Anspruch entspricht. Dazu ist es wichtig, dass die Schüler über Inhalte Bescheid wissen und diese anwenden können. Bei Herrn B ist der Unterricht ausgewogen zwischen kalkülorientiertem „Kleinrechnen" (Absatz 102) auf der einen Seite und sinnvollem Argumentieren auf der anderen Seite. Das Argumentieren findet aus Zeitgründen oft lehrerzentriert statt. Die Schüler müssen ihre Rechenwege und ihr Vorgehen beim Lösen von Aufgaben begründen und bei Anwendungsaufgaben argumentieren, welcher Lösungsweg der beste ist. Dabei werden unterschiedliche Herangehensweisen im Unterricht aufgegriffen und thematisiert. Außerdem müssen die Schüler Gegenbeispiele und Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften finden. Der Lehrer fungiert beim Argumentieren als Korrektiv und hilft den Schülern. In Klausuren prüft Herr B das Argumentieren, beispielsweise beim Zusammenhang zwischen Ableitung und Steigung. Die Schüler müssen begründen, warum Aussagen immer gelten oder Aussagen durch Gegenbeispiele widerlegen.

Herr C:
Im Unterricht von Herrn C argumentieren Schüler zum Beispiel bei der Bestimmung von Limites am Funktionsterm. Es werden offene Fragen zum Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung gestellt und die Schüler argumentieren dann qualitativ. Am Ende formuliert Herr C nochmals präziser und exakter. Begriffe wie „hinreichend" und „notwendig" werden dabei im Unterricht aber nicht verwendet. Auch Verfahren werden erst im Unterrichtsgespräch begründet, bevor sie kalkülhaft angewandt werden. Herr C würde sich weigern, Inhalte zu unterrichten, die nicht begründet werden können. An konkreten Beispielen werden allgemeine Eigenschaften von Funktionen im Klassengespräch begründet. Im Unterricht ergibt sich ein Begründungsbedürfnis daraus, dass in den meisten Klassen einzelne Schüler Sachverhalte hinterfragen. Beweise hingegen werden vom Lehrer vorgeführt, da beispielsweise geschickte Ergänzungen von den Schülern nicht erraten werden können. Dabei wird zwischen stärkeren und schwächeren Kursen unterschieden. In letzteren werden Beweise oft weggelassen und Regeln

nur verkündet. Allgemeine Zusammenhänge werden jedoch auch in schwachen Kursen begründet. Obwohl Begründungsaufgaben in Klausuren sowohl für Herrn C als auch für seine Schüler problematisch sind, stellt Herr C sie aus zwei Gründen: erstens im Hinblick auf das Abitur, in dem die Schüler auch begründen müssen, und zweitens damit die Schüler Begründungen im Unterricht ernst nehmen. Beweise werden nämlich nicht ernst genommen, da sie nicht geprüft werden.

Herr D:
Nach Meinung von Herrn D ist der Analysisunterricht zu einem „Rechending" (Absatz 6) verkommen, in dem nicht mehr bewiesen oder theoretisch argumentiert wird, sondern nur anschaulich interpretiert und plausibel gemacht. Konzepte werden eingeführt, ohne dass sie begründet werden, es findet kein entdeckendes Lernen mit anschließendem Begründen statt und es werden keine theoretischen Probleme, beispielsweise bei Ober- und Untersumme, thematisiert. Das alles findet Herr D schade, entscheidet sich aber dafür, um seine Schüler möglichst gut auf das Abitur vorzubereiten. Dafür werden Begründungsaufgaben im Unterricht fast jede Stunde behandelt und auch in Klausuren geprüft, aber nicht ausschließlich, da auch schwächere Schüler eine Chance haben müssen und da sie korrekturaufwändig sind. Im Unterricht von Herrn D wird anschaulich begründet und von Beispielen abstrahiert. Die Schüler müssen nach Eigenarbeit Argumentationen liefern und immer ihre Vorgehensweise begründen.

Frau E:
Frau E leitet Formeln nicht her, sondern präsentiert sie und demonstriert deren Anwendung an Beispielen. Dies dient der Abiturvorbereitung und sorgt für gute Noten, da mehr Zeit für Übungen bleibt. In die Entscheidung, dass im Unterricht wenig hergeleitet, sondern mehr geübt wird, werden die Schüler miteinbezogen und entscheiden sich immer für diese Variante. Begründungsaufgaben spielen im Unterricht und in Prüfungen eine große Rolle. Im Unterricht werden Begründungsaufgaben oft in Form mündlicher Aufgaben zur Wiederholung am Beginn der Stunde eingesetzt. In Klausuren werden häufig rechnerische Begründungen verlangt. Beim selbstständigen Bearbeiten von Begründungsaufgaben im Unterricht fragen die Schüler nach, wenn sie die Begründungen in den ausgeteilten Lösungen nicht verstehen. Dann liefert Frau E meist Begriffsklärungen nach. Außerdem müssen die Schüler bei fehlerhaften Aufgabenbearbeitungen begründen, wo ein Fehler gemacht wurde. Beim selbstständigen Bearbeiten von jeglichen Aufgaben begründen sich die Schüler viel gegenseitig, beispielsweise

ihr Vorgehen oder warum ein Vorgehen eines Mitschülers falsch ist. Trotzdem begründet Frau E insgesamt viel mehr im Unterricht als die Schüler.

Herr F:
Im Unterricht von Herrn F wird erst „technisch" (z. B. Absatz 60) gearbeitet und am Ende begründet. Beispielsweise wird beim Thema Integralrechnung begründet, wenn sie zur Flächenbestimmung herangezogen wird oder wenn Funktionen und zugehörige Integralfunktionen begründet zugeordnet werden. Außerdem begründen die Schüler bei einer Problemstellung, warum diese ein neues Problem darstellt. Mündlich werden im Unterricht Wahr-oder-Falsch-Aufgaben gemacht. Im Unterrichtsgespräch verlangt Herr F oft nach zusätzlichen Begründungen. Er fordert die Schüler auf, ihre Lösungen zu begründen und immer in ganzen Sätzen zu antworten, was auch automatisch für Begründungen sorgt. Herr F selbst begründet viel, wenn er Warum-Fragen der Schüler beantwortet. Insgesamt liegt inzwischen der Fokus mehr auf Begründungsaufgaben als auf Aufgaben mit Parametern, die früher wichtiger waren. In schwachen Klassen liegt der Fokus mehr auf Grundtechniken als auf dem Begründen. In fast jeder Klausur stellt Herr F Begründungsaufgaben, beispielsweise zum begründeten Zuordnen.

Herr G:
Begründen steht im Unterricht von Herrn G nicht im Mittelpunkt. Beim Begründen zeigt sich eine sehr große Heterogenität der Schüler. Deshalb wird nur auf sehr niedrigem Niveau begründet, mit dem Ziel, an die Erfahrungen der Schüler anzuknüpfen, zum Beispiel wenn es darum geht, welche Eigenschaften von Funktionen direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden können. Außerdem begründen Schüler ihr Vorgehen. Insbesondere bei Anwendungsaufgaben begründen sie, welches Vorgehen am besten ist. Formales Begründen oder Beweisen spielt im Unterricht von Herrn G keine Rolle. Die Schüler sollen nur wissen, dass in der Mathematik bewiesen wird, aber nicht selbst beweisen. In Prüfungen wird kaum Begründen verlangt, da Probleme dabei nur schwer diagnostiziert werden können und Schüler sich weigern, diese Aufgaben zu bearbeiten. Was in Prüfungen gefragt wird ist begründetes Zuordnen.

Frau H:
Frau H zeigt im Unterricht Zusammenhänge manchmal am Beispiel auf und verkündet dann Verallgemeinerungen davon. Beweise werden nur gemacht, wenn sie besonders schön oder besonders einfach sind, denn es wird viel Zeit damit „vertan" (Absatz 50). Manche Schüler sind davon überfordert und die Schüler schalten dabei ab, da Beweise nicht geprüft werden. Zwischen den einzelnen

Themen gibt es nicht immer einen roten Faden, mit dem begründet wird, wie man von einem Thema zum nächsten kommt. Frau H argumentiert mehr als ihre Schüler, da sie erklärt. Sie erklärt auch auf einer Metaebene das Vorgehen beim Begründen oder Widerlegen sowie unterschiedliche Begründungsarten. Es gibt im Unterricht eine Balance zwischen unterschiedlichen Aufgabentypen, zum Beispiel Rechenaufgaben, Textaufgaben und Begründungsaufgaben. Dabei wird nie eine komplette Unterrichtsstunde für das Begründen verwendet, da dabei zu viele Schüler abgehängt werden würden. Beispielsweise wird bei Wahr-oder-Falsch-Aufgaben zu Funktionsklassen anschaulich begründet und Begründungsaufgaben werden meistens im Klassengespräch mit eventuell vorangehender Einzel- oder Partnerarbeit besprochen. Schüler begründen auch bei Rückfragen von Frau H. In Klausuren werden immer auch Begründungsaufgaben gestellt.

Frau J:
Im Unterricht von Frau J wird die Theorie nicht bewiesen, sondern anschaulich plausibel gemacht. Frau J begründet Regeln kurz und erläutert dann deren Anwendung. Auf Beweise wird großteils verzichtet, da dabei die Schüler abgehängt werden würden. Es werden nur kurze Beweise geführt, sonst wird eher das Beweisverfahren oder die Beweisidee erläutert. Am Anfang des Schuljahres begründet mehr Frau J, gegen Ende des Schuljahres gibt sie mehr Begründungen an die Klasse ab. In fast jeder Stunde gibt es kurze Begründungen, beispielsweise initiiert durch Warum-Fragen oder die Frage „Ist das jetzt immer so?“. Es wird zum Beispiel beim Zusammenhang zwischen Funktionen, Ableitungen und Graphen argumentiert. Wie gut das funktioniert und wie viel das dementsprechend gemacht wird, hängt von der Klasse ab. Wenn die Schüler begründen, dann meist mit Hilfe von Skizzen. Das Notieren von Begründungen an der Tafel übernimmt dann wieder die Lehrkraft, da die Schüler Schwierigkeiten beim schriftlichen Formulieren haben. Argumentationen werden meist an der Tafel fixiert, um Begriffe zu verinnerlichen und auf die Begründungen zurückgreifen zu können. Dabei kommt es auf die Klasse an, wie viel schriftlich fixiert wird. Als Vorbereitung auf die Abiturprüfung müssen viele Begründungsaufgaben geübt werden, da sie den Schülern besonders Probleme bereiten. In Klausuren fragt Frau J auch Begründungen ab, schwache Schüler sind dabei bei der Bearbeitung unsicher. Deswegen wird in Stegreifaufgaben wenig Begründen gefragt, wenn dann nur am Ende und mit einschätzbarem Erwartungshorizont.

Herr K:
Im Unterricht von Herrn K gibt es wenig Begründungen für die Theorie. Warum ein neues Thema eingeführt wird, wird nicht über einen Sachzusammenhang

begründet, sondern, wenn möglich, rein innermathematisch. Zu Beginn eines Themas stehen erst Trainingsaufgaben zu Rechenfertigkeiten im Vordergrund, später dann Verständnisaufgaben und Begründungsaufgaben. Dabei arbeiten die Schüler beispielsweise selbsttätig an Begründungsaufgaben, die dann hinterher besprochen werden. Auch Alternativbegründungen werden thematisiert. In schwachen Klassen wird allerdings wenig begründet. Es stehen mehr die rechnerischen Fertigkeiten im Vordergrund. In Klausuren stellt Herr K Begründungsaufgaben, in Stegreifaufgaben nicht, da sie viel Zeit in Anspruch nehmen und Schülern schwerer fallen.

Herr L:
Im Unterricht von Herrn L wird zu Beginn eines Themas ein Theoriegebilde aufgebaut, um Begriffe einzuführen. Die Theorie gerät aber immer mehr in den Hintergrund und wird auch nicht (mehr) geprüft. Insbesondere werden keine Beweise ausgeführt. Die Produktregel beispielsweise wird nur verkündet und dann geübt. Wichtig sind dann die Anwendungen von Regeln und die Kochrezepte für das Lösen von Aufgaben. Im Unterricht argumentieren die Schüler und Herr L ungefähr gleich viel. Dabei argumentieren die Schüler zum Beispiel bei der Präsentation von Hausaufgaben. Auch in der Abiturvorbereitung wird argumentiert. Es werden Begründungsaufgaben gemacht, vor allem begründetes Zuordnen von Term und Graph sowie Wahr-oder-Falsch-Aufgaben. Bei Anwendungsaufgaben wird die Passung von Modellen begründet. Herr L stellt Argumentationsaufgaben sowohl in Klausuren als auch in Stegreifaufgaben, obwohl sie korrekturaufwändig sind.

Frau M:
Im Unterricht von Frau M wird nur sehr selten die Theorie begründet. Wenn Frau M zum Beispiel die Ableitungsregeln begründet, zeigen die Schüler kein Interesse, da sie wissen, dass sie das nicht können müssen. Beweise werden gar nicht geführt. Insgesamt begründet Frau M sehr viel mehr als ihre Schüler. Bei der Bearbeitung von Begründungsaufgaben werden die Schüler sehr eng betreut: Die Aufgaben werden vorbesprochen und es gibt Kochrezepte zu deren Lösung. In sehr schwachen Klassen werden keine Begründungsaufgaben gemacht. In stärkeren Klassen argumentieren beispielsweise die Schüler bei Anwendungsaufgaben für ihre Lösungen. In Prüfungen wird sehr wenig Begründen verlangt.

Herr N:
Zur Vorbereitung auf das Argumentieren im Analysisunterricht gibt es bei Herrn N eine Doppelstunde zu logischen Konstruktionen und Begriffen wie *notwendig*

und *hinreichend*. Im Unterricht wird eher anschaulich begründet. Zum Beispiel wird bei den Ableitungen der trigonometrischen Funktionen nicht bewiesen, sondern graphisch argumentiert. Beim Zusammenhang zwischen Funktionen und deren Ableitungen und auch bei Anwendungsaufgaben wird viel begründet. Bei Extremwertaufgaben wird begründet, warum es ein Extremum geben muss, bei Modellierungsaufgaben wird die Passung eines Modells und der Nutzen der Modellierung begründet. Dabei gibt meist Herr N Impulse und die Schüler begründen dann. Eventuell folgt noch eine Ergänzung durch Herrn N. Insgesamt haben im Unterricht Kalkülanteile stärkeres Gewicht als Begründungsanteile, da eine Orientierung an den Abituraufgaben stattfindet.

Frau O:
Im Unterricht von Frau O werden Sätze und Zusammenhänge an Beispielen erläutert und veranschaulicht, aber nicht bewiesen. Der Fokus liegt auf den Übungen. Bei theoretischen Nachfragen der Schüler geht Frau O kurz darauf ein und verweist dann auf das Buch. Im Unterricht wird wenig schriftlich begründet, da das viel Zeit kostet und wenig bringt. Begründungsaufgaben werden meist mündlich bearbeitet. Bei Aufgabenbesprechungen fragt Frau O auch teilweise nach Begründungen und Alternativen dazu, um mehrere Lösungsmöglichkeiten aufzuzeigen. Auch beim Üben von Abituraufgaben müssen die Schüler ihr Vorgehen begründen. Wenn von den Schülern nichts kommt, Zeitdruck herrscht, oder Nachfragen kommen, dann begründet Frau O. Ab und zu werden in Klausuren und Stegreifaufgaben Begründungsaufgaben gestellt, meist als indirekter Weg, um Zwischenergebnisse anzugeben. Dabei werden meist rechnerische Begründungen verlangt, da bei Begründungen in Worten der Korrekturaufwand höher ist.

5.3.2 Übergreifende Tendenzen bezüglich der aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht

Aus den oben dargestellten fallbasierten Auswertungen hinsichtlich der aktuellen Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht zeigen sich bei den einzelnen Lehrkräften ähnliche Tendenzen.

Beweise und theoretische Herleitungen spielen im Unterricht kaum eine Rolle, weder bei der Einführung neuer Inhalte noch in Übungsphasen. Ein selbständiges Beweisen durch die Schüler wird von keiner Lehrkraft erwähnt. Insgesamt wird die Theorie wenig begründet und wenn dann durch die Lehrkraft. Exemplarisch zeigen dies folgende Aussagen:

Also ich persönlich versuche in der Oberstufe gar nicht so viel herzuleiten. Weil bei einer Herleitung nimmt man meistens bloß die Guten mit, den Rest verliert man bei der Herleitung.

(Herr B, Absatz 20)

Wenn ich wirklich irgendwas beweise, also zum Beispiel die Produktregel bei der Ableitung, das finde ich so einen Klassiker. Ich weiß nicht ganz genau auswendig, man muss vermutlich irgendwie plus und minus dasselbe machen dann irgendwie geschickt umsortieren und so. Da staunen die Schüler meistens Bauklötze und sagen: „Wie kommt man darauf?" und dann sage ich: „Vielleicht habt ihr gemerkt, ich habe meinen Zettel in der Hand gehabt und habe das von dem Zettel abgeschrieben. Da kommt kein normaler Mensch spontan drauf. Sondern da ist irgendein genialer Mensch mal darauf gekommen und ich kann das nachvollziehen. Und sowas verlange ich von euch auch nicht, ihr müsst den Beweis nicht auswendig lernen, das halte ich nicht für sinnvoll." Also das heißt, in dem Moment argumentiert wirklich der Lehrer und ich finde, wie sollen Schüler das erraten, was man da ergänzen muss? Das geht überhaupt nicht.

(Herr C, Absatz 24)

Also jetzt keine Beweise oder irgendwas, mach ich zum Beispiel gar nicht in der Oberstufe, weil ich mir denk, dass das für die Schüler für das Abitur auch nicht wirklich so relevant ist.

(Herr L, Absatz 22)

Beweise vermeide ich großräumig. Das wird Gott sei Dank bei uns überhaupt nicht gefragt in der Abschlussprüfung und ich mach das auch nicht. Gar nicht.

(Frau M, Absatz 120)

Im Gegensatz dazu sind Argumentationen und Begründungen im Unterricht eher informell und es wird oft nur mündlich, beispielsweise im Unterrichtsgespräch, argumentiert. Diese Tendenz lässt sich unter anderem an folgenden Aussagen erkennen:

Dann habe ich eine Dokumentenkamera und lege das Buch unter und stelle [Begründungs-]Aufgaben mündlich, die den Stoff von letzter Stunde behandeln. […] Und dann besprechen wir das anhand von den Aufgaben nochmal und dann bekommen sie irgendeine Aufgabe zu tun, die sie selbständig bearbeiten.

(Frau E, Absatz 22)

Also wie oft stelle ich auch die Frage: „Warum ist es genau ein Hochpunkt? Begründe doch mal!" und dann müssen sie halt wirklich sagen: Entweder mit der Steigung oder wenn man die Werte in die Ableitung einsetzt.

(Herr F, Absatz 24)

> *Es müssen ja nicht immer große Begründungen sein, aber kleine, die einmal die Schüler bringen, wenn man nochmal nachfragt: „Warum?“. Oder eben, wenn ich irgendwas mache und dann nochmal ich selbst die Frage stelle: „Ist das jetzt immer so?“*
>
> (Frau J, Absatz 62)
>
> *Begründen spielt immer eine Rolle, wenn wir über Aufgaben sprechen. Also ich lasse sehr selten schriftlich begründen, sondern wenn dann, wenn jetzt ein Schüler mir eine Antwort gibt, dann frage ich schon nach: „Ja warum ist das so?“. In konkreten Aufgaben findet es eigentlich fast nur mündlich statt.*
>
> (Frau O, Absatz 22)

Viele Lehrkräfte sprechen in Bezug auf das Argumentieren von sogenannten *Begründungsaufgaben*, also Aufgaben, in denen durch die verwendeten Operatoren Begründungen verlangt werden. Solche Aufgaben sind auch auf der Schulbuchdoppelseite[9] vorhanden, die den Lehrkräften während des Interviews vorlegt wurde (siehe Abschnitt 5.3). Eventuell ist die häufige Thematisierung von Begründungsaufgaben in den Interviews auf diesen Prompt zurückzuführen. Begründungsaufgaben spielen aber aus Sicht der Lehrkräfte im aktuellen Analysisunterricht tatsächlich eine große Rolle bei der Förderung der Kompetenz des mathematischen Argumentierens. Dies zeigt sich beispielsweise durch folgende Aussagen:

> *Also dass wir relativ viel von diesen Begründungsaufgaben machen. Also ich suche schon im Buch möglichst viel raus oder stelle auch selber manchmal eine.*
>
> (Herr D, Absatz 78)
>
> *Ich nehme auch viel die Buchaufgaben dann her oder eben aus anderen Büchern suche ich mir Begründeaufgaben. Wichtig ist, dass „Begründe deine Entscheidung!“ dabeisteht. Nicht nur „Wahr oder falsch?“, sondern auch „Begründe!“, weil man da viele Detailfragen stellen kann.*
>
> (Frau E, Absatz 26)
>
> *Wenn man dann mit dem rechnerischen Teil zurechtkommt, dann kann man übergehen zu solchen Verständnisfragen und solchen Begründungsaufgaben. Und das mache ich eigentlich, lege ich schon immer Wert darauf, bei egal welchem Thema.*
>
> (Herr K, Absatz 28)

[9] Siehe Anhang D im elektronischen Zusatzmaterial.

Insbesondere werden Begründungsaufgaben auch in Klausuren eingesetzt, teilweise auch in Stegreifaufgaben[10]. Hier zeigt sich ein Unterschied zum Beweisen, das nicht geprüft wird und dadurch auch keinen großen Stellenwert im Unterricht einnimmt. Begründungsaufgaben spielen bei einigen Lehrkräften sowohl im Unterricht als auch in Prüfungen eine wichtige Rolle, auch wenn die Lehrkräfte sie teilweise für schwierig halten:

> *Wir müssen sie [Begründungsaufgaben in Prüfungen] ja machen. Erstmal weil es verlangt wird, aber da könnte ich noch sagen „Das ist mir egal!“, aber sie müssen es ja im Abitur auch machen. Ich finde da müsste man einfach, ich finde es schwieriger. Das heißt ja deswegen noch nicht, dass die jetzt nicht geeignet sind. Aber ich finde es wirklich eine große Herausforderung für mich als Lehrer, die vorher so zu trainieren und Aufgaben dann auch so zu stellen, also ein vernünftiger Schüler muss ungefähr wissen, wie tief er darauf eingehen muss. Aber wirklich schwieriger für beide Seiten, für mich als Lehrer und auch für die Schüler.*
>
> (Herr C, Absatz 40)
>
> *Also auch in Schulaufgaben [d. h. Klausuren], in Stegreifaufgaben. Ich schaue, dass ich immer Begründeaufgaben mit darin habe.*
>
> (Frau E, Absatz 26)
>
> *Also immer sehr gut finde ich, wie zum Beispiel Aufgabe 8, wenn es heißt „Ordne zu und begründe!“, das bringe ich fast in jeder Analysisklausur. […] Also ich habe, wenn wir so meine Klausuren durchgehen, wahrscheinlich bei fast jeder immer irgendwelche Begründungsaufgaben dabei.*
>
> (Herr F, Absatz 20, Absatz 52)
>
> *In Stegreifaufgaben, die nur zwanzig Minuten dauern, wenn ich vorneweg eine Begründungsaufgabe setze, dann werden sie hinten niemals fertig. Also es ist nicht so, dass ich in Stegreifaufgaben nie was begründen lasse, das will ich nicht sagen, aber dann erstens am Ende und den Schülern muss bewusst sein: „Wie viel will sie ungefähr?“.*
>
> (Frau J, Absatz 58)

Abgesehen von speziellen Begründungsaufgaben, die aufgrund ihrer Operatoren explizit das Argumentieren fordern, wird von vielen Lehrkräften geschildert, dass Schüler beim Lösen von Aufgaben aller Art argumentieren, indem sie zum Beispiel ihren Lösungsweg begründen. Theoretisch könnte dabei unterschieden werden, ob die Schüler begründen, welchen Weg sie warum einschlagen oder ob

[10] Stegreifaufgaben sind in Bayern kleine, schriftliche Leistungsnachweise, die nicht angekündigt werden, sich auf höchstens zwei unmittelbar vorangegangene Unterrichtsstunden beziehen und eine Bearbeitungszeit von höchstens 20 Minuten haben (§ 23 BayGSO).

die Schüler einzelne Schritte beim Ausführen des gewählten Weges begründen. Diese Unterscheidung ließ sich aber nicht auf die Äußerungen der Lehrkräfte übertragen, da diese ihre Beispiele nicht konkret genug beschrieben.

> *In Mathematik läuft es ja immer auf eine Begründung raus. So wie die Schüler irgendwie sagen „Ja, da kommt 15 raus.“, dann heißt es ja auch „Ja, warum denn eigentlich? Also wie kommst du denn überhaupt dahin?“*
>
> (Herr D, Absatz 46)
>
> *Zum Beispiel lege ich irgendeine Aufgabe dann unter und sage „Wo ist der Fehler, den der Schüler hier gemacht hat?“ und dann müssen sie mir begründen, wo der Fehler gemacht wurde. […] Dadurch, dass sie selbständig Aufgaben rechnen, finde ich, begründen sie sich viel gegenseitig. Sie erklären sich dann und sagen: „Du, pass mal auf, da muss das hin, weil…“ oder „Das ist falsch, weil…“. Ich finde, das zählt auch als Begründen.*
>
> (Frau E, Absatz 30, Absatz 34)
>
> *Im Sinne von dem, warum mache ich das, was ich da mache, warum mache ich das und nicht das? Und wenn ich das jetzt gemacht habe, wenn ich jetzt weiß, die Ableitung ist 0, weiß ich dann, dass es ein Extremwert ist? Bin ich da fertig? Oder nicht? Kann es auch ein Terrassenpunkt sein oder so? Also da müssen sie schon auch begründen können.*
>
> (Herr G, Absatz 20)

Auch speziell im Bereich des Modellierens berichten Lehrkräfte teilweise von Argumentationsanlässen:

> *Die sollen mal den Graphen machen von einer gedämpften Schwingung, das haben sie im Physikunterricht nicht gemacht, aber sie sollen es im Mathematikunterricht machen und sich dann überlegen, wie könnte jetzt so ein Term aussehen, der jetzt so eine gedämpfte Schwingung beschreibt. Und das sollen sie begründen.*
>
> (Herr A, Absatz 28)
>
> *Ich mache zum Beispiel unheimlich gerne bei der Einführung der Differentialrechnung so eine Aufgabe mit einem Meteoritenkrater, wo man eben versuchen muss, so ein Autochen rauszufahren und dann passt es mit der Steigung nicht und dann muss man entweder abtragen oder aufschütten und sowas und grad da argumentieren die Schüler ja auch und begründen dann ihre Lösung, warum sie gerade die gewählt haben und keine andere. Aber da sind immer locker zwei bis drei Unterrichtsstunden weg im Gegensatz zu wenn ich es einfach bloß hinschreibe. Und darum mache ich das eben auch nur bei sehr starken Klassen.*
>
> (Frau M, Absatz 118)

Oder es muss argumentiert werden im Bereich von Modellierungsaufgaben, warum was passt oder warum jetzt mit einem bestimmten Ergebnis, das man als Funktion herausbekommen hat, was Bestimmtes berechnet werden kann. Warum das so geht? Warum man damit eine Prognose machen kann bei exponentiellem Wachstum? Das sind so Beispiele, wo begründet werden muss und argumentiert werden muss.

(Herr N, Absatz 44)

Das Argumentieren im Analysisunterricht scheint in gewisser Weise einem Unterrichten von Schemata und Üben von Kalkül entgegenzustehen. Letzterem wird oft Vorrang gewährt, was zumeist durch eine Orientierung an der Abiturprüfung begründet wird. Exemplarisch zeigen dies folgende Segmente:

So unterrichte ich, weil das garantiert mir natürlich den Erfolg in der Prüfung, wo ich die Schüler vorbereite. Und es ist natürlich immer teaching to the test. Ich muss genau die Sachen natürlich machen, die so gefragt werden. Wenn jetzt natürlich mehr Begründen und so weiter kommt, dann kann ich natürlich da auch mehr verwenden, weil dann sieht man ja unmittelbar: Okay, das dient dem Ziel. Wenn jeder Mathematik-Abitur machen muss, dann muss ich jeden zum Mathematikabitur befähigen und da gibt es viele, die hätten das nie freiwillig gemacht, die kämpfen um einen Punkt und ein Punkt heißt von 120 Punkten 25 Rohpunkte und 25 Rohpunkte bekomm ich nicht durch das Argumentieren, sondern da muss ich halt die Ableitung können, die Tangente aufstellen können und so weiter. Und das ist das, was ich vor allem dann einüben muss.

(Herr A, Absatz 46)

Und dann, wenn ich wirklich eine ganz schwache Klasse habe, dann muss ich halt schauen, wie weit mach ich dann immer das Begründen oder inwieweit müssen halt dann solche Grundtechniken da sein, wie dass sie halt mal ableiten können oder dass sie ein Integral bilden können oder eine Tangente aufstellen können.

(Herr F, Absatz 44)

Wenn man aber mit recht vielen schwachen Schülern zu tun hat, bleibt einem oft nichts anderes übrig, als sich auf das zu beschränken, was sie dann überhaupt eigentlich können. Und diese schweren Sachen, oder das, was da gefordert wird vom Lehrplan sind ja eigentlich eher die schwereren Sachen, nämlich die Kompetenzorientierung und Sachzusammenhänge und so weiter. Das ist ja alles noch schwerer als die reinen rechnerischen Fähigkeiten. Wenn man aber mit schwachen Schülern zu tun hat, muss man sich letztlich ja wieder nur auf diese einfachen Rechensachen irgendwie zurückziehen, damit man überhaupt noch einigermaßen passable Ergebnisse in der Schulaufgabe erzielen kann.

(Herr K, Absatz 74)

Nachdem dargestellt wurde, was die Befragten über die Umsetzung des Argumentierens in ihrem Unterricht berichteten, wird in den folgenden beiden Abschnitten

5.4 und 5.5 analysiert, welche Beweggründe hinter der Art und Weise steckt, wie Lehrkräfte das Argumentieren fördern und insbesondere welche Herausforderungen Lehrkräfte davon abhalten, das Argumentieren mehr zu fördern als es zum Zeitpunkt der Interviews der Fall war.

5.4 Die Bedeutung des mathematischen Argumentierens

Die weitreichende Bedeutung des mathematischen Argumentierens wurde in Abschnitt 2.3 ausführlich dargestellt und auch in den Lehrerinterviews zeigte sich, dass die Lehrkräfte viele Gründe für das Argumentieren äußerten, ohne direkt danach gefragt worden zu sein. Vor dem Hintergrund der theoretischen Überlegungen in Abschnitt 2.3 wurden alle positiven Äußerungen gegenüber dem Argumentieren in der Hauptkategorie *Positive Einschätzungen zum Argumentieren* codiert und in den Subkategorien *Persönliches Anliegen der Befragten, Bedeutung für die Schüler, Positiv für das Unterrichten* und *Typischer mathematischer Prozess* weiter ausdifferenziert.

5.4.1 Persönliches Anliegen der Befragten

Bei allen Befragten fanden sich Äußerungen, die darauf schließen lassen, dass das Argumentieren im Analysisunterricht ihnen persönlich ein Anliegen ist. Hierbei handelt es sich um Segmente, in denen sich die Befragten positiv über das Argumentieren äußerten, es beispielsweise mit Adjektiven wie *schön* oder *toll* beschrieben, dessen Bedeutung hervorhoben und Ähnliches, und dies entweder explizit intrinsisch begründeten oder aber gar keine Gründe für diese Einschätzungen angaben. In letzterem Fall kann trotzdem davon ausgegangen werden, dass die Gründe in den persönlichen Empfindungen über das Argumentieren zu finden sind. Oft gaben einzelne Begriffe oder Satzteile den Ausschlag für eine entsprechende Codierung. In den folgenden exemplarisch ausgewählten Beispielen sind die Wörter, die eine Codierung als *Persönliches Anliegen der Befragten* auslösten, fett hervorgehoben[11].

[11] Im Gegensatz dazu sind besondere Betonungen durch die Befragten beim Äußern der Sätze gemäß der Transkriptionsregeln durch Unterstreichungen markiert.

> *Wird **glücklicherweise*** durch die Aufgabenkultur immer wichtiger.
>
> (Herr A, Absatz 26)
>
> *Man schaut jetzt zum Teil nochmal hinter die Kulissen und sagt: „Mensch, warum hat man das jetzt so und so gemacht?“, oder: „Begründe!“, oder: „Finde ein Gegenbeispiel!“. Das **finde ich toll**.*
>
> (Herr B, Absatz 88)
>
> ***Ich meine idealerweise** wäre eigentlich nur Argumentieren angesagt. Weil der Rest geht eigentlich so.*
>
> (Herr D, Absatz 58)
>
> *Also einfach Begründungsaufgaben **mag ich sehr gerne**.*
>
> (Frau H, Absatz 22)
>
> ***In meinen Augen sollte** in jeder Stunde* begründet werden.
>
> (Frau J, Absatz 60)
>
> *Ich finde aber, dass man sich als Lehrer nicht davor drücken kann, sondern dass es **wirklich wichtig** ist, das zu machen. Einfach weil die Kompetenz **in meinen Augen** schon auch **sehr wichtig*** ist.
>
> (Herr L, Absatz 50)
>
> *Ich finde es auch **sinnvoll**, das stark zu machen. Das Kalkül ist wichtig, das müssen sie auch beherrschen, aber diese Begründungs- und Verstehensebenen finde ich schon **sehr wichtig**.*
>
> (Herr N, Absatz 58)

Alle Lehrkräfte äußerten sich positiv gegenüber dem Argumentieren, wobei eine positive Einstellung zumindest ansatzweise interpretativ zugeschrieben werden konnte. Trotzdem sind Unterschiede in den Segmenten erkennbar. Beispielsweise milderten manche Lehrkräfte ihre Äußerungen sprachlich ab: Herr D benutzte in obiger Aussage zweimal „eigentlich“, Herr L schob „schon auch“ ein. Auch die Anzahl der Segmente, die von der jeweiligen Lehrkraft in die Kategorie *Persönliches Anliegen der Befragten* kategorisiert werden konnten, zeigt, dass das Argumentieren trotz allem bei den einzelnen Lehrkräften von unterschiedlicher Bedeutung ist. Herr A und Herr C haben jeweils elf Segmente in dieser Kategorie, während Frau M nur eine und Frau O und Frau E nur jeweils zwei Segmente zu dieser Kategorie beitragen.

5.4.2 Bedeutung für die Schüler

In der Subkategorie *Bedeutung für die Schüler* wurden Segmente zusammengefasst, in denen die Befragten sich positiv gegenüber dem Argumentieren im Unterricht äußerten und dies dadurch begründeten, dass das Argumentieren für die Schüler wichtig ist. 13 der 14 Befragten äußerten sich in dieser Hinsicht. Die zugehörigen Äußerungen konnten weiter untergliedert werden. In Abbildung 5.7 ist die Ausdifferenzierung dieser Subkategorie dargestellt.

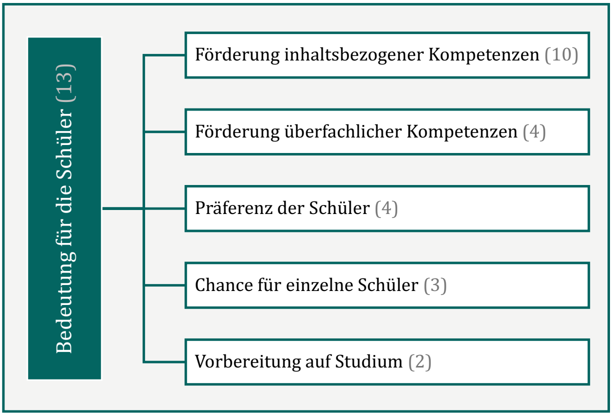


Abbildung 5.7 Überblick über die Subkategorie „Bedeutung für die Schüler“

Innerhalb der Subkategorie *Bedeutung für die Schüler* zeigt sich eine Dominanz der Begründungen für diese Bedeutung über die Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen bei den Schülern. Dies wurde aber häufig nicht explizit so beschrieben, sondern musste aus impliziten Äußerungen der Lehrkräfte entnommen werden, beispielsweise über die Angabe, dass das Argumentieren Verständnis fördert:

> *Ja das ist mir schon wichtig. Also erstmal, weil man es für Prüfungen braucht und weil ich einfach auch finde, dass es natürlich das Verständnis fördert.*
>
> (Herr C, Absatz 22)
>
> *Mit den Aussagen, die wahr oder falsch sind, dass man das begründen soll. Das kommt zwar im Abitur nicht mehr so oft, oder nicht so viel dran, ich mache es aber trotzdem, weil ich finde, dass das viel für das Verständnis beiträgt.*
>
> (Herr L, Absatz 28)

Außerdem wurde genannt, dass das Argumentieren zum Nachdenken oder vernetzenden Denken anregt, woraus wiederum eine Förderung der inhaltsbezogenen Kompetenzen resultieren kann. Zudem wurden das Reflektieren und Nachdenken darüber, was inhaltlich gemacht wird und wie die Inhalte fachlich zusammenhängen, als Gründe für das Argumentieren angegeben, zum Beispiel von Herrn B:

> *Das ist schon gut, finde ich, dass man jetzt auch mal ein bisschen hinter die Kulissen schauen muss. Warum ist irgendein Sachverhalt so geordnet, so geklärt?*
>
> (Herr B, Absatz 36)

Die Bedeutung des mathematischen Argumentierens für den Erwerb inhaltsbezogener Kompetenzen wird auch in der didaktischen Literatur vielfach betont (siehe Abschnitt 2.3.3). Im Gegensatz zu den Äußerungen der Befragten in den Interviews, werden Gründe für diese Bedeutung in der Literatur viel stärker ausdifferenziert. Die im Wesentlichen von den Lehrkräften genannten Aspekte wie die Förderung des Verständnisses, tiefere Einsichten in die Zusammenhänge und die Vernetzung des Wissens finden sich jedoch auch als zentrale Punkte in der didaktischen Theorie.

Über die Förderung inhaltsbezogener, fachlicher Kompetenzen hinaus, wurde von den Lehrkräften auch die Förderung überfachlicher Kompetenzen als Grund für das Argumentieren im Analysisunterricht genannt. Hier zeigt sich vor allem die Bedeutung des Argumentierens in außermathematischen Bereichen wie im gesellschaftlichen Meinungsaustausch, beim wissenschaftlichen Arbeiten allgemein oder in nicht-mathematischen Berufen, beispielsweise im juristischen Bereich. Dies impliziert laut Herrn A auch eine bestimmte Denkhaltung:

> *So läuft doch auch im Prinzip die Idee des Widerspruchsverfahrens, also der Beweis durch Widerspruch, dass ich sage: „Nehmen wir mal an du hast Recht. Dann würde aus dem das folgen, aus dem das folgen, aus dem das folgen und schau, dann hast du einen Widerspruch, also hast du nicht Recht.“ Aber das ist ja eine sehr <u>freundliche</u> Argumentation. Das beginnt nicht mit „Schau mal, du hast einen Scheiß gemacht, weil…“, sondern „Nehmen wir mal an, du hast Recht…“. Das ist ja eine <u>ganz</u> andere Denkweise. Also wenn wir jetzt Schüler heranziehen und sie mündig für eine Gesellschaft machen wollen und wir ziehen sie quasi heran und bei einem Streitgespräch steigen sie erst einmal ein und stellen sich erst einmal auf den <u>Standpunkt</u> des <u>Gegenüber</u>, dessen Meinung sie insgeheim <u>nicht</u> haben und führen diese Meinung ad absurdum, sodass das im besten Fall der Gegenüber selbst <u>erkennt</u>, ja da hätten wir doch viel gewonnen für eine friedliche Zusammenarbeit.*
>
> (Herr A, Absatz 64)

Auch in der didaktischen Literatur zeigt sich diese Bedeutung des Argumentierens für überfachliche Bereiche (siehe Abschnitt 2.3.4). Dabei werden theoretisch viel mehr Aspekte aufgeführt als von den Lehrkräften in den Interviews. Was von ein paar wenigen Lehrkräften genannt wurde, sind Argumentationskompetenzen in außermathematischen Bereichen und ansatzweise die Förderung einer bestimmten Art zu denken. Darüber hinaus wurden aber in der Literatur genannte Gründe wie die Förderung überlegten Arbeitens, sprachlich-logischer und sozialer Kompetenzen in den Interviews nicht erwähnt.

Ein weiterer Grund für das Argumentieren im Analysisunterricht, der von 4 Lehrkräften angesprochen wurde, ist, dass Schüler gerne diskutieren, mündlich argumentieren und Warum-Fragen stellen. Außerdem berichtete Herr N, dass er im Kontext notwendiger und hinreichender Kriterien für Aussagen über Funktionen immer eine Unterrichtseinheit mit Alltagsbeispielen durchführt, um den Schülern die Logik näher zu bringen und erwähnte dabei, dass dies „von Schülern auch immer sehr begrüßt" (Herr N, Absatz 28) wird. Des Weiteren wurde das Argumentieren von 3 Lehrkräften als Chance für einzelne Schüler betrachtet. Eine Lehrkraft sah darin eine Chance für schwächere Schüler, die durch die Möglichkeit des Umschreibens sogar bessere Lösungen entwickeln. 2 Lehrkräfte sahen die Chance, dass starke Schüler beim Argumentieren besonders gefördert werden können und zeigen können, dass sie besser sind als andere. Außerdem nannten zwei Lehrkräfte die Vorbereitung auf ein mögliches Studium im mathematischen Bereich als Begründung für das Argumentieren im Analysisunterricht.

Insgesamt erwähnten fast alle Befragten die Bedeutung des Argumentierens für die Schüler, wobei sich mehrheitlich Ausführungen in Richtung der Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen fanden. Dies zeigt eine Fokussierung der Lehrkräfte auf die Inhalte, während das Argumentieren vorrangig als unterstützendes Element beim Erlernen dieser Inhalte betrachtet wird.

5.4.3 Positiv für das Unterrichten

Ein weiterer von den Befragten genannter Vorteil des Argumentierens im Analysisunterricht ergibt sich für die Tätigkeit des Unterrichtens. Zum einen kann das Argumentieren als Grundlage für gute Unterrichtsgespräche betrachtet werden, zum anderen kann es als Instrument zur Lernstandseinschätzung dienen. Insgesamt 8 Lehrkräfte äußerten sich diesbezüglich, 3 davon zur Grundlage für Unterrichtsgespräche, 7 zur Lernstandseinschätzung. Letzteres wurde unter anderem auch dadurch ausgelöst, dass im Interview eine Frage nach der Eignung von Argumentationsaufgaben für Leistungserhebungen gestellt wurde. Aber nur wenn hier eine eindeutig positive Einschätzung der Eignung getroffen wurde, wurde die entsprechende Antwort in der Subkategorie *Lernstandseinschätzung* der Subkategorie *Positiv für das Unterrichten* codiert. Dabei bezieht sich der Fokus der betreffenden Einschätzung durch die Lehrkräfte meist nicht auf das Argumentieren an sich, sondern liegt auf dem Verständnis der Inhalte. Exemplarisch zeigt sich dies in folgenden Segmenten:

> *Da merkt man im Endeffekt, wie gut oder schlecht ein Schüler in Mathe ist.*
>
> (Herr D, Absatz 34)
>
> *Dass man bei diesen Begründungsaufgaben feststellt, ob jemand die Strukturen <u>dahinter</u> erkannt hat und vielleicht viele Informationen, die die letzten Stunden so im Raum rumgewabert sind, zusammenbringen kann und das können eben nicht viele.*
>
> (Frau H, Absatz 58)
>
> *Nur wenn die Schüler es begründen können, haben sie es auch wirklich verstanden.*
>
> (Frau O, Absatz 24)

Der Vorteil, dass beim Argumentieren insbesondere das Verständnis der Schüler für die fachlichen Inhalte überprüft werden kann, wird auch in der didaktischen Literatur erwähnt (siehe Abschnitt 2.3.5). Der in diesem Zusammenhang von Bürger (1998, S. 585) erwähnte Aspekt, dass Lehrkräfte dabei auch die Denkweisen der Schüler erkennen und so Miss- oder Fehlverständnisse aufdecken können, konnte so aber in den Interviews nicht gefunden werden.

Darüber hinaus berichteten 3 Befragte von Situationen, in denen sich das Argumentieren positiv auf den Unterricht an sich auswirkt, beispielsweise dadurch, dass sich interessante Diskussionen oder Unterrichtsgespräche auf Basis entsprechender Fragestellungen ergeben, zum Beispiel:

> *Was ich ganz gut finde sind so Sachen wie hier: Wahr oder Falsch? Da kann man darüber diskutieren, sprechen. Das ist zum gemeinschaftlichen Arbeiten gut beim Wiederholen.*
>
> (Herr G, Absatz 18)

5.4.4 Typischer mathematischer Prozess

Ein letzter Aspekt, warum das Argumentieren im Analysisunterricht eine Rolle spielen sollte, ergibt sich für 6 der befragten Lehrkräfte daraus, dass Argumentieren, Begründen und Beweisen typische mathematische Prozesse darstellen. Die

Schüler sollten das Argumentieren im weiten Sinne also auch deswegen kennenlernen, weil es für die Mathematik charakteristisch ist. Beispielhafte Segmente für die entsprechende Subkategorie sind:

> *Also ich halte das schon für das Wesen der Mathematik, dass wir begründen, oder für einen Wesenszug der Mathematik.*
>
> (Herr C, Absatz 40)
>
> *Sie [die Schüler] sollen schon mitbekommen, dass in der Mathematik Dinge bewiesen werden und zwar klipp und klar. Das gehört zur Mathematik, das würde ich nicht draußen lassen. Ist nur die Frage, ob es in den Schulunterricht in dem Sinne reingehört, dass die Schüler das können, weil diese Beweise, die hätte ich mir ja auch nicht ausgedacht. Die habe ich ja auch von irgendjemand Schlauem übernommen.*
>
> (Herr G, Absatz 56)
>
> *Das ist für mich der Sinn der Mathematik, dass ich lerne aus Gegebenem Folgerungen folgerichtig herzuleiten.*
>
> (Frau H, Absatz 50)
>
> *Diese Begründungsaufgaben mache ich tatsächlich eigentlich immer. Ich mag das auch, weil das vor allem natürlich auch viel mehr mit eigentlicher Mathematik zu tun hat als das sture Rechnen. […] Mathematik hat, wie jeder weiß, der mal Mathematik studiert hat, eigentlich was mit Denken zu tun und nicht mit sturem Rechnen. Von daher mache ich das auch eigentlich lieber.*
>
> (Herr K, Absatz 50)

Angesichts der großen Bedeutung, die das Argumentieren und speziell das Beweisen innerhalb der mathematischen Disziplin haben (siehe Abschnitt 2.3.1 & 2.3.2), ist es aber doch auffällig, dass nur 6 der 14 Befragten sich in dieser Hinsicht äußerten. Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, dass die Lehrkräfte zwar die Bedeutung speziell des Beweisens für die mathematische Disziplin kennen, dieses jedoch, wie im Beispiel von Herrn G ersichtlich, für den Schulunterricht skeptisch sehen. Diese Vermutung wird gestützt durch eine US-amerikanische Studie von Kotelawala (2016), in der gezeigt wurde, dass die teilnehmenden Lehrkräfte zwar generell dem Beweisen in der Mathematik eine hohe Bedeutung beimessen, gleichzeitig diese Bedeutung aber nicht auf ihren Unterricht übertragen. Im Unterricht spielt im Gegensatz dazu das Einüben von Verfahren eine größere Rolle. In Kotelawalas Studie konnte sogar gezeigt werden, dass Lehrkräfte, die in ihrer Ausbildung viel beweisen mussten, wodurch sie die Bedeutung des Beweisens praktisch spürten, dazu tendieren, weniger beweisende Tätigkeiten in ihren Unterricht zu integrieren. Gleichzeitig könnte es sein, dass

Lehrkräften nicht explizit bewusst ist, dass sie auch durch die Förderung der allgemeinen Kompetenz des Argumentierens zur Ausbildung eines adäquaten Bildes von Mathematik beitragen, da auch das weiter gefasste Argumentieren viele für die Mathematik charakteristische Eigenschaften aufweist.

Insgesamt zeigt sich, dass alle vier Begründungsbereiche für das Argumentieren im Unterricht, die in Abschnitt 2.3 theoretisch herausgearbeitet wurden, in den Interviews wiederzufinden sind: Die Bedeutung der charakteristischen Tätigkeit des Argumentierens in der mathematischen Disziplin, die Förderung inhaltsbezogener, mathematischer Kompetenzen sowie prozessbezogener und überfachlicher Kompetenzen bei den Schülern durch das Argumentieren und die Möglichkeit der Lernstandseinschätzung durch die Lehrkräfte bei argumentativen Tätigkeiten der Schüler. Teilweise wurden diese Bereiche durch einzelne darüber hinausgehende Gründe ergänzt, wie die Präferenz der Schüler, die Chance für einzelne Schüler oder die Vorbereitung auf ein mögliches Studium. Jedoch konnte aufgezeigt werden, dass sich die Breite an Gründen für das Argumentieren, die in der Theorie zu finden ist, in den Interviews nicht zeigt. Insbesondere sind die einzelnen Bereiche jeweils bei weitem nicht bei allen Lehrkräften zu finden. Trotzdem äußerten sich insgesamt alle Lehrkräfte positiv gegenüber dem Argumentieren, begründeten dies aber ganz unterschiedlich. Zudem sind die Ausführungen der Lehrkräfte nicht sehr differenziert und bleiben meist relativ oberflächlich. Positiv hervorzuheben ist allerdings, dass von allen Lehrkräften Segmente in der Kategorie *Persönliches Anliegen der Befragten* zu finden sind, woraus eine positive Einstellung gegenüber dem Argumentieren bei den Lehrkräften, zumindest in Ansätzen, gefolgert werden kann.

5.5 Herausforderungen rund um das Argumentieren im Analysisunterricht

Trotz der vielen positiven Aspekte, die von den Lehrkräften bezüglich des Argumentierens, insbesondere im Analysisunterricht, genannt wurden und dem vielfältigen Begriffsverständnis der Befragten zeigen sich auch viele Herausforderungen, die eine angemessene Förderung der mathematischen Argumentationskompetenz im Analysisunterricht behindern. Da die Exploration gerade von Herausforderungen ein erklärtes Ziel der Interviewstudie ist, wurden die Lehrkräfte im dritten Block der Interviews auch explizit nach Problemen und Schwierigkeiten gefragt. Dabei ist nicht die Anzahl, sondern die Art und Vielfalt der genannten Herausforderungen von Interesse. Zudem sollen besonders dominante Problemfelder herausgearbeitet werden, an denen in der zweiten Studie dieser Arbeit angesetzt werden kann. In die Hauptkategorie *Herausforderungen rund um das Argumentieren im Analysisunterricht* wurden aber nicht nur Segmente codiert, die auf die explizite Nachfrage nach solchen geäußert wurden, sondern es wurden auch hier die kompletten Interviews in die Analyse einbezogen. Neben der konkreten Benennung von Problemen und Schwierigkeiten wurden auch Segmente codiert, in denen die Befragten sich negativ über das Argumentieren äußerten oder in denen Abweichungen zwischen deren Idealvorstellung zum Argumentieren und der tatsächlichen Umsetzung im Unterricht zu erkennen waren. Die Segmente wurden induktiv in drei große Subkategorien kategorisiert: *Rahmenbedingungen, Unterrichten* und *Schüler* (siehe Abb. 5.8).

Die Subkategorie *Schüler* beinhaltet etwa siebenmal so viele Codierungen wie die Subkategorie *Unterrichten* und etwa viermal so viele Codierungen wie die Subkategorie *Rahmenbedingungen.* Dies ist ein erster Hinweis auf die hohe Bedeutung von Herausforderungen, die sich im Zusammenhang mit den Schülern ergeben, verglichen mit Problemen und Schwierigkeiten, die durch die Rahmenbedingungen entstehen oder bei der unterrichtlichen Umsetzung des Argumentierens durch die Lehrkräfte. Die Codierungen innerhalb der Subkategorie *Schüler* wurden weiter in zwei Subkategorien *Schülerschwierigkeiten* und *Probleme in Bezug auf Schüler* unterteilt. Mit ersterer wurden Segmente codiert, in denen die Lehrkräfte Schwierigkeiten beschreiben, die Schüler beim oder mit dem Argumentieren haben, mit letzterer Schwierigkeiten, die sich für die Lehrkräfte ergeben, aber mit den Schülern in Zusammenhang stehen, beispielsweise durch die Haltung oder die Zusammensetzung der Schülerschaft. Auch diese beiden Subkategorien bestehen wiederum aus mehreren Subkategorien auf einer weiteren Ebene.

5.5.1 Herausforderungen durch Rahmenbedingungen

13 der 14 befragten Lehrkräfte erwähnten Probleme, die sich für das Argumentieren im Analysisunterricht aus verschiedenen Rahmenbedingungen ergeben. Diese Rahmenbedingungen wurden in der Analyse in die in Abbildung 5.8 dargestellten Subkategorien weiter untergliedert.

Die zwei mit Abstand relevantesten Faktoren, die für die Lehrkräfte problematische Rahmenbedingungen darstellen, sind die begrenzte Zeit sowie die notwendige Vorbereitung auf Prüfungen, insbesondere die Abiturprüfungen. Die beiden Faktoren hängen auch insofern zusammen, dass durch die notwendige Prüfungsvorbereitung, in der das Argumentieren keine große Rolle zu spielen scheint,

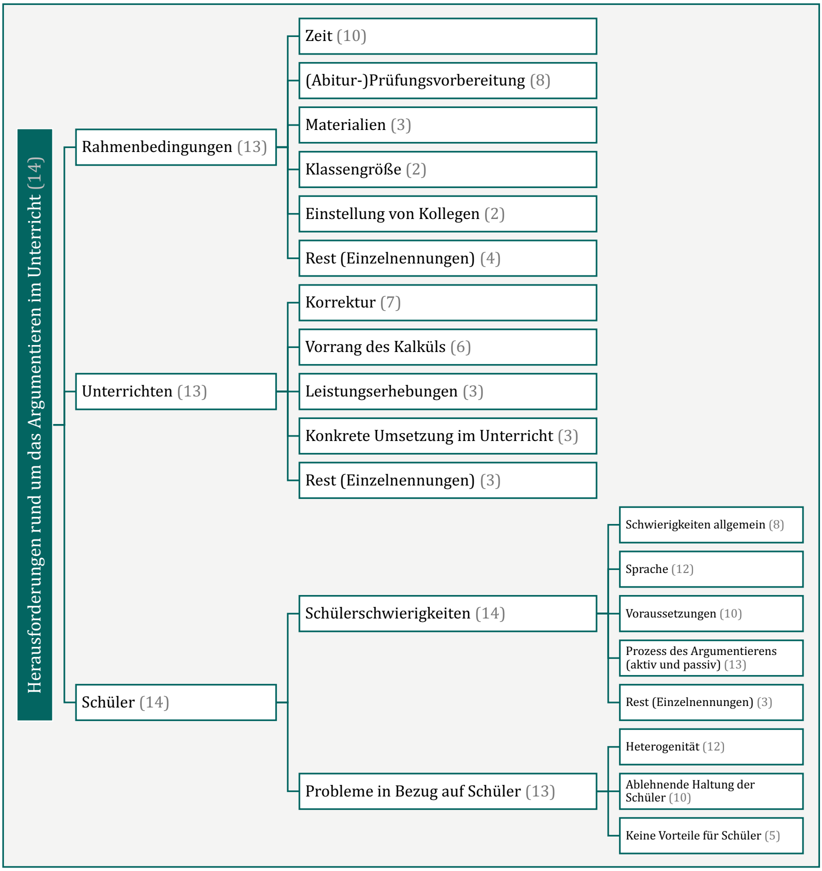


Abbildung 5.8 Überblick über die Hauptkategorie „Herausforderungen rund um das Argumentieren im Unterricht"

wenig Unterrichtszeit in argumentative Tätigkeiten investiert wird, wie beispielsweise Herr L als Antwort auf die Frage äußerte, was er einem Referendar für seinen Analysisunterricht raten würde:

> *Wenn wir jetzt von der Oberstufe sprechen, dass sie sehr viele Fächer haben und sehr wenig Zeit und dass man ihnen klare Rezepte gibt. Also keine Beweise oder irgendwas, mache ich zum Beispiel gar nicht in der Oberstufe, weil ich mir denke, dass das für die*

> *Schüler für das Abitur auch nicht wirklich so relevant ist. Dass man ihnen klipp und klar sagt: „Wenn du die Quotientenregel anwenden willst, merke dir: $NAZ - ZAN$ durch $Nenner^2$ und wende das Ganze an“, so Kochrezepte.*
>
> (Herr L, Absatz 22)

Hinsichtlich der Zeit gaben die Lehrkräfte an, dass sie nicht genügend Zeit für das Argumentieren haben, dass sie mehr Zeit bräuchten, oder dass das Argumentieren an sich sehr zeitintensiv ist. Frau M verglich eine Themeneinführung, bei der argumentiert wird, mit der bloßen Verkündung des Inhalts:

> *Aber da sind immer locker zwei bis drei Unterrichtsstunden weg im Gegensatz dazu, wenn ich es einfach bloß hinschreibe. Und darum mache ich das auch nur bei sehr starken Klassen, wo ich genau weiß, die Zeit kann ich nachher wieder einholen. Bei schwachen Klassen mache ich das eben nur sehr reduziert.*
>
> (Frau M, Absatz 118)

Ähnlich sieht Frau E Zeit, die sie mit Herleitungen verbringt, als verlorene Zeit und investiert die Unterrichtszeit lieber in das Üben von Anwendungen:

> *Das ist ein bisschen schwierig, weil ich sozusagen nicht die Mathematiker für die Mathematik ausbilde, sondern eher: „Wie wende ich die Mathematik an?“ Also nicht: „Wo kommt das eigentlich her?“. Das ist manchmal ein bisschen schade, aber so mache ich das, so habe ich genügend Zeit dafür und verliere nicht so viel Zeit durch die Herleitungen und wir haben viel mehr Zeit zum Üben. Und das äußert sich positiv in den Noten.*
>
> (Frau E, Absatz 2)

Mehr Zeit, insbesondere mehr Unterrichtsstunden, werden auch als Wunsch für einen idealen Analysisunterricht angegeben.

Wenn näher spezifiziert wurde, dass sich zeitliche Probleme durch Zeitdruck aufgrund von Abitur- und Prüfungsvorbereitung ergeben, wurden diese Segmente mit der Subkategorie *(Abitur-)Prüfungsvorbereitung* codiert, der zweiten wichtigen Subkategorie innerhalb der Schwierigkeiten durch Rahmenbedingungen. Dadurch dass in der Oberstufe der Fokus vieler Lehrkräfte darauf liegt, ihre Schüler auf das bevorstehende Abitur und die Klausuren davor vorzubereiten, resultiert dies häufig in einem *teaching to the test*, das sich an den Aufgabentypen im Abitur orientiert. Im Interview mit Herrn A trat dieser Aspekt immer wieder auf, er beschrieb das unter anderem folgendermaßen:

> *Es gibt den Aufgabentyp, es gibt den Aufgabentyp, es gibt den Aufgabentyp und den muss ich halt können. Ich meine natürlich so unterrichte ich, weil das garantiert mir natürlich den Erfolg in der Prüfung, worauf ich die Schüler vorbereite. Und es ist natürlich immer teaching to the test. Ich muss genau die Sachen machen, die so gefragt werden. […] Wenn jeder Mathematikabitur machen muss, dann muss ich jeden zum Mathematikabitur befähigen. Da gibt es viele, die das nie freiwillig gemacht hätten und um einen Punkt kämpfen. Und ein Punkt heißt von 120 Punkten 25 Rohpunkte und 25 Rohpunkte bekomme ich nicht durch das Argumentieren, sondern da muss ich die Ableitung können, die Tangente aufstellen können und so weiter. Und das ist das, was ich vor allem dann einüben muss.*
>
> (Herr A, Absatz 46)

Aber auch viele der anderen Lehrkräfte äußerten sich in ähnlicher Weise und betonten, dass für das Abitur Rechenfertigkeiten wichtig sind und dass relativ wenige Aufgaben gestellt werden, die das Argumentieren fordern. Interessant ist hierbei, dass die Lehrkräfte in diesem Zusammenhang nur die fehlenden Aufgabentypen im Abitur als Grundlage zur Auswahl der Aufgaben für den Unterricht erwähnten, nicht aber, dass das Argumentieren trotzdem ein Weg zum Ziel sein könnte, indem inhaltsbezogene Kompetenzen bei den Schülern gefördert und Inhalte miteinander vernetzt werden (siehe Kap. 2.3.3). Frau O merkt sogar an, dass die Schüler für das Abitur „nicht groß […] Zusammenhänge verstehen müssen“ (Frau O, Absatz 2).

Herr A und Herr B beschreiben, wie es durch eine veränderte Aufgabenkultur im Abitur zu einer Veränderung der Situation im Unterricht kommen könnte:

> *Wenn jetzt natürlich mehr Begründen und so weiter [in der Abiturprüfung] kommt, dann kann ich da auch mehr verwenden, weil dann sieht man ja unmittelbar: Okay, das dient dem Ziel.*
>
> (Herr A, Absatz 46)

> *Wenn sich das Abitur, die Prüfung, ändert, was da verlangt wird, dann besteht natürlich die Möglichkeit, den Unterricht auch darauf auszulegen.*
>
> (Herr B, Absatz 76)

Neben der häufigen Nennung von Problemen durch begrenzte Zeit und notwendige Vorbereitung auf Abiturprüfungen, wurden von wenigen Lehrkräften weitere Rahmenbedingungen genannt, die sich als problematisch für das Argumentieren erweisen. Dabei wurde erwähnt, dass es in kleineren Klassen einfacher wäre, argumentative Phasen umzusetzen und dass die zur Verfügung stehenden Aufgaben das Argumentieren nicht ausreichend anregten. In diesem Zusammenhang wurden von zwei Lehrkräften auch Kollegen erwähnt, die „konservative Rechenaufgaben“ (Herr A, Absatz 44) bevorzugen, was beispielsweise zu Schwierigkeiten bei der Erstellung gemeinsamer Klausuren führen kann. Darüber hinaus bezogen sich Einzelnennungen im Bereich von Rahmenbedingungen auf die Unfreiheit von Lehrkräften im System Schule, beispielsweise bei der Korrektur und Bewertung von Prüfungsleistungen, auf die Reduktion auf richtig und falsch innerhalb der Mathematik, auf zu wenig Platz im Klassenzimmer oder auf das G8.

Insgesamt zeigen sich also zwar verschiedene Herausforderungen, die auf Rahmenbedingungen zurückzuführen sind, es ist aber ein Schwerpunkt auf den Aspekten Zeit und Prüfungsvorbereitung, insbesondere für das Abitur, zu erkennen. Die geringe Bedeutung des Argumentierens innerhalb der Abiturprüfung ist ein Grund, warum dieses auch in der Vorbereitung vernachlässigt wird, um genügend Zeit zum Einüben abiturrelevanter Fertigkeiten zu haben. In diesem Zusammenhang wird der Einfluss des Argumentierens auf die Entwicklung der relevanten inhaltsbezogenen Kompetenzen von den Lehrkräften tendenziell vernachlässigt.

5.5.2 Herausforderungen beim Unterrichten

Da sich die Interviewstudie auf das Argumentieren im Analysisunterricht aus der Perspektive von Lehrkräften bezieht, haben alle genannten Probleme und Schwierigkeiten Auswirkungen auf das Unterrichten. In der Subkategorie *Unterrichten* der Hauptkategorie *Herausforderungen rund um das Argumentieren im Unterricht* wurden aber speziell Segmente codiert, die sich direkt für die Lehrkräfte oder aus den Handlungen der Lehrkräfte ergeben und dabei nicht aufgrund von Rahmenbedingungen entstehen und nicht direkt auf die Schüler bezogen sind. So ergaben sich in der Subkategorie *Unterrichten*, in der sich Segmente von 13 der 14 Lehrkräfte finden, die Subkategorien *Korrektur, Argumentieren vs. Kalkül, Leistungserhebungen, konkrete Umsetzung im Unterricht* sowie Einzelnennungen, die in einer Restkategorie zusammengefasst wurden (siehe Abb. 5.8).

Die Hälfte der 14 befragten Lehrkräfte äußerte sich zu Schwierigkeiten, die sich bei der Korrektur von Argumentationsaufgaben ergeben. Dabei spielt sowohl der Aufwand bei der Korrektur solcher Aufgaben als auch die fehlende Möglichkeit einer schemenhaften Bepunktung und eines fairen Vergleichs zwischen den Schülern eine Rolle. Stellvertretend dafür stehen die Aussagen von Herrn F und Frau O:

> *Viele Lehrer schrecken davor zurück, die [Begründungsaufgaben] zu stellen, weil es halt schwieriger zu korrigieren ist. Da braucht man halt dann wirklich schon viele Abstufungen und man kann kaum quer vergleichen.*
>
> (Herr F, Absatz 52)
>
> *Schriftlich, also ausformuliert begründen; klar drückt man sich ein bisschen davor, weil man es ja dann auch korrigieren muss. […] In erster Linie [ist es] natürlich zeitaufwändiger, weil man sich erst mal auch häufig mit dem Schriftbild einiger Schüler auseinandersetzen muss. Dann muss man natürlich erst mal das rauslesen, was sie jetzt da genau meinen. Und es ist halt einfach nicht so klar. Wenn man halt eine klare Rechnung dastehen hat, dann ist diese richtig oder falsch. Wenn etwas formuliert ist und man weiß vielleicht sogar, dass der Schüler das Richtige meint, aber formuliert es halt falsch, ist es schwierig. Also man kommt leichter in so Zwickmühlen, weil es einfach nicht mehr so klar und deutlich ist, wie wir es in der Mathematik ja einfach auch gerne haben.*
>
> (Frau O, Absatz 46-48)

In dieser Äußerung von Frau O deutet sich auch eine Schwierigkeit der Schüler an, Argumentationen schriftlich zu formulieren. Schwierigkeiten dieser Art wurden (in diesem Fall zusätzlich) in der Subkategorie *Schüler – Schülerschwierigkeiten – Sprache* codiert.

Wie bereits aus den Beschreibungen der praktischen Umsetzung des Argumentierens abgeleitet werden konnte, zeigt sich die Tendenz, dass kalkül- und verfahrensorientierte Anteile im Unterricht wichtiger sind als argumentative. Dies resultiert in einer problematischen Stellung des Argumentierens im Analysisunterricht. Bei sechs Lehrkräften konnte geschlossen werden, dass sie eine Art Konkurrenz zwischen Kalkülanteilen und Argumentieren für den konkreten Analysisunterricht wahrnehmen und dabei ein Problem darin besteht, dass das Einüben von Verfahren Vorrang bekommt. Herr N, der in seinen Ausführungen zu Problemen beim Argumentieren nicht nur seinen eigenen Unterricht reflektiert, sondern auch den Unterricht seiner Kollegen miteinbezieht, stellt dies beispielsweise folgendermaßen dar:

> *Also natürlich gibt es halt das Bestreben, diese ganzen Kalkülanteile erstmal stark zu machen. Und da gibt's halt dann die Gefahr, sich zu wenig Zeit zu nehmen für das Argumentieren. Also dass man zu schnell dann einfach zum Kalkül übergeht, zur Kurvendiskussion, zur Extrempunktbestimmung und so weiter auf symbolischer, formaler Ebene und dann Gefahr läuft, halt das Argumentieren über Bord zu schmeißen. […] Also, dass zu sehr nur das Kalkül gesehen wird und das Begründen an den wichtigen Stellen vernachlässigt wird.*
>
> (Herr N, Absatz 60)

Hierbei kann ein Zusammenhang zu den Rahmenbedingungen, die sich aus den Abiturprüfungen ergeben, vermutet werden, da in diesem Zusammenhang von den Lehrkräften ähnlich argumentiert wurde, dass kalkülhafte Verfahren für die Prüfung wichtiger sind als Argumentieren (siehe Abschnitt 5.5.1).

Auch Herr G formulierte es als allgemeine Tendenz, dass das Begründen „im Gymnasialunterricht sehr weit in den Hintergrund getreten“ (Herr G, Absatz 48) ist, weil Schüler keine Begründungen „brauchen“, sondern stattdessen Ergebnisse berechnen. Herr K beschreibt seine Idealvorstellung des Analysisunterrichts so, dass die Schüler Rechenfertigkeiten schneller beherrschen und so genügend Zeit für „echte Verständnisfragen“ bleiben würde. Herr B dagegen, der vom realen Analysisunterricht spricht, warnt davor, dem Begründen Vorrang vor dem Kalkül zu geben:

> *Das ist heute die Gefahr, dass man eigentlich mehr in diese Begründungsschiene abtaucht und so das rein Rechnerische, diese Fertigkeiten, die wir stupide eintrainiert haben, dass man die auf der Strecke lässt. Also es ist dennoch wichtig, auch einfach gewisse Sachen durchzuzelebrieren und zu üben und üben und üben.*
>
> (Herr B, Absatz 36)

Herr G und Frau H antworteten auf die Frage nach der Eignung von Argumentationsaufgaben für Leistungserhebungen, dass diese „wenig“ (Herr G, Absatz 44) beziehungsweise „nicht komplett“ (Frau H, Absatz 60) geeignet seien, was auch als Teilaspekt des Unterrichtens kategorisiert wurde. Herr K unterscheidet zwischen der Art der Leistungserhebung und sieht bei Stegreifaufgaben von solchen Aufgaben ab. Dies hängt vermutlich auch mit der Korrektur der Leistungserhebungen und mit den Schwierigkeiten von Schülern bei Leistungserhebungen (siehe Abschnitt 5.5.3) zusammen. Eine negative Einschätzung der Eignung für Leistungserhebung zieht möglicherweise auch Konsequenzen für den Stellenwert des Argumentierens im Unterricht und im Ansehen der Schüler nach sich, weshalb das Argumentieren auch geprüft werden sollte.

Drei Lehrkräfte erwähnten Schwierigkeiten, die sich bei der konkreten Umsetzung von schülerorientiertem Unterricht für das Argumentieren ergeben. Beispielsweise zeigt Frau H Unsicherheiten bezüglich der Situation, dass Schüler selbständig Dinge erarbeiten und sich diese gegenseitig erklären:

> *Manchmal weiß ich noch nicht so genau, wie ich gewährleisten soll, dass das dann auch wirklich verstanden wurde und dass die Begründungen auch wirklich richtig sind. Da habe ich manchmal noch keine richtig gute Idee, wie man das gewährleistet, dass das dann passt.*
>
> (Frau H, Absatz 6)

Weitere Aspekte, die nur von einzelnen Lehrkräften genannt wurden, sind ein fehlendes entdeckendes Lernen im Unterricht, die Notwendigkeit einer angemessenen Atmosphäre im Unterricht und die Gefahr, „dass man an der falschen Stelle begründet, dass man versucht, diese formalen Argumentationen wasserdicht zu machen, […] was den Schülern aber nicht mehr zugänglich ist" (Herr N, Absatz 60).

Insgesamt zeigt sich, dass zwar fast alle Lehrkräfte in irgendeiner Weise Herausforderungen, die sich für das Unterrichten des Argumentierens ergeben, nannten, dass diese aber ziemlich breit gefächert sind, sodass wenig Übergreifendes abgeleitet werden kann. Eine Tendenz scheint es im Bereich von Leistungserhebungen zu geben, wobei die Schwierigkeiten für die Lehrkräfte vor allem durch die Korrektur entstehen. Die Problematik, dass im Unterricht eine Konkurrenz zwischen kalkülorientiertem Arbeiten und Argumentieren zu bestehen scheint, steht eventuell in Zusammenhang mit den Schwierigkeiten, die sich durch die Rahmenbedingungen der Abiturprüfungen ergeben. Alles in allem stellen aber Herausforderungen mit Bezug auf das Unterrichten durch die Lehrkräfte keinen Schwerpunkt in den Interviews dar. Daraus könnte entweder abgleitet werden, dass es in diesem Bereich tatsächlich wenige Probleme gibt. Oder aber es könnte daran liegen, dass Lehrkräfte dazu neigen, Probleme und Schwierigkeiten eher Faktoren zuzuschreiben, die sie selbst nur indirekt betreffen als introspektiv eigene Schwierigkeiten zu reflektieren. Beispielsweise sprach keine Lehrkraft darüber, dass sie selbst Unsicherheiten beim eigenen Argumentieren hätte, obwohl eine solche Problematik auch durchaus denkbar wäre und eine Vermeidungshaltung gegenüber dem Argumentieren im Unterricht verursachen könnte. Beispielsweise zeigte Kotelawala (2016) in einer US-amerikanischen Studie, dass Lehrkräfte, die in der Vergangenheit im Zusammenhang mit dem Beweisen Angst verspürten und Lehrkräfte, die in ihrem Studium viele Mathematikkurse belegten, weniger Wert auf argumentative Tätigkeiten im Unterricht legen.

5.5.3 Herausforderungen in Zusammenhang mit Schülern

Mit großem Abstand am meisten Codierungen im Bereich von Problemen und Schwierigkeiten mit dem Argumentieren im Analysisunterricht wurden im Zusammenhang mit Schülern vorgenommen. Diese sind auf alle Befragten verteilt. Es handelt sich dabei zum einen um von Lehrkräften berichtete Schwierigkeiten, die die Schüler selbst beim oder mit dem Argumentieren haben, zum anderen um Herausforderungen, die sich für die Lehrkräfte in Bezug auf die Schüler ergeben (siehe Abb. 5.9).

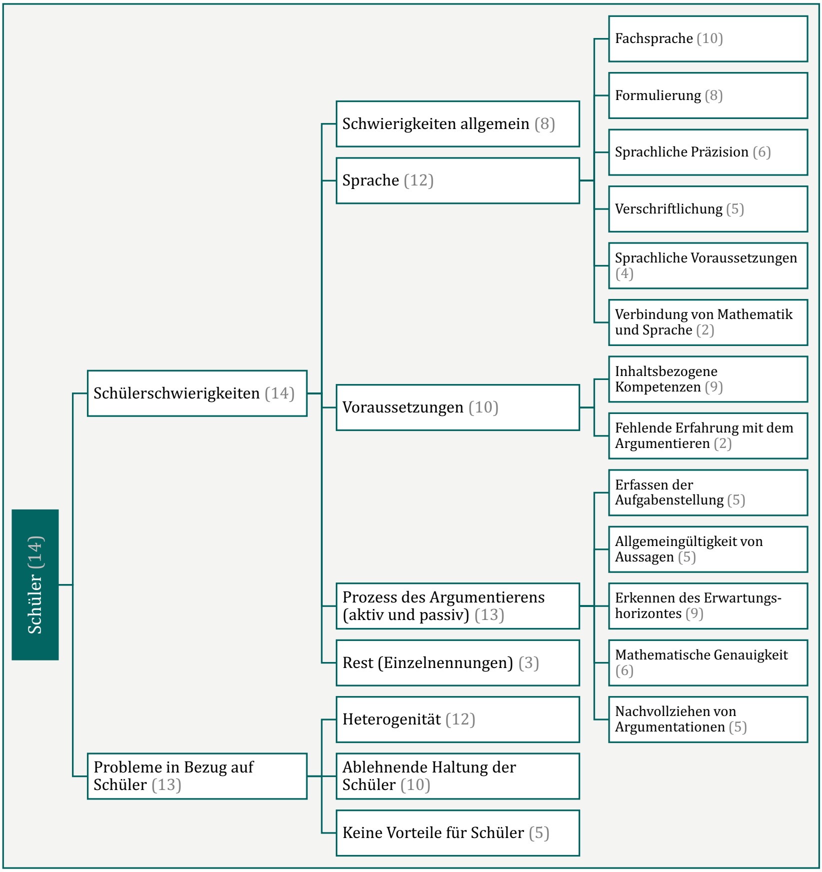


Abbildung 5.9 Überblick über die Subkategorie „Schüler“

5.5.3.1 Schwierigkeiten der Schüler

In der Subkategorie *Schülerschwierigkeiten*, mit der Segmente codiert wurden, in denen die Befragten Schwierigkeiten und deren Ursachen beschreiben, die Lernende beim oder mit dem Argumentieren im Analysisunterricht haben, finden sich Aussagen aller Befragten. Die weitere Untergliederung in Subkategorien ist in Abbildung 5.9 dargestellt und die Erkenntnisse, die sich daraus ergeben, werden in den folgenden Abschnitten ausgeführt.

5.5.3.1.1 Schülerschwierigkeiten im Allgemeinen

Von 8 Befragten wurden allgemein Schwierigkeiten der Lernenden beim Argumentieren angesprochen, ohne dass diese näher ausgeführt oder Ursachen beschrieben wurden. Die zugehörigen Segmente wurden deshalb in der Subkategorie *Schwierigkeiten allgemein* zusammengefasst. Auffällig ist, dass mehrere Befragte dabei explizit vom Beweisen sprachen, beispielsweise:

> *Begründen im Sinne von Beweisen bekommen wir kaum hin.*
>
> (Herr G, Absatz 20)
>
> *Ich finde es einfach unsinnig, irgendwelche Beweise zu führen, wenn die Klasse nach der zweiten Zeile nicht mehr dabei ist.*
>
> (Frau J, Absatz 36)
>
> *Also bei den Beweisen sind die Schüler eigentlich alle ausgestiegen. Ich hatte einen relativ schwachen Kurs.*
>
> (Frau O, Absatz 2)

Außerdem wurden Schwierigkeiten der Schüler in Prüfungssituationen genannt, zum Beispiel:

> *Aber es fällt den Schülern nicht wirklich leicht, muss man auch sagen. Jetzt habe ich auch Abitur korrigiert und auch bei sehr leichten Begründungsaufgaben war <u>leider</u> der Erfolg nicht, wie ich es mir erwünscht hätte.*
>
> (Herr F, Absatz 24)
>
> *Aber mit <u>solchen</u> Aufgaben [im Abitur] haben sie dann immer wieder Probleme.*
>
> (Frau J, Absatz 42)

Darüber hinaus fiel teilweise der Begriff der *Überforderung,* unter anderem bei der Betrachtung der vorgelegten Schulbuchaufgaben, als zwei Lehrkräfte die Aufgabe sahen, in der die Begriffe *hinreichend* und *notwendig* verwendet wurden (siehe Abschnitt 5.1).

5.5.3.1.2 Schülerschwierigkeiten im Bereich Sprache

Ein Bereich, der innerhalb der Subkategorie *Schülerschwierigkeiten* besonders heraussticht, ist die Sprache. In der gleichnamigen Subkategorie finden sich insgesamt 57 Segmente von 12 der 14 Befragten, was die Bedeutung dieses Bereichs nahelegt. Zur Strukturierung der vielen Codierungen innerhalb der Subkategorie wurde diese wiederum in weitere Subkategorien untergliedert (siehe Abb. 5.9).

Die dargestellten Subkategorien sind keinesfalls trennscharf und weisen auch bedeutende Zusammenhänge und Schnittmengen auf. So ist beispielsweise für eine sprachlich präzise Formulierung einer Argumentation Fachsprache von großer Bedeutung. Werden Argumentationen schriftlich notiert, kommt ein schriftliches Formulieren hinzu. Die sprachlichen Kompetenzen im Bereich der deutschen Sprache stellen notwendige Voraussetzungen für alle diese sprachlichen Handlungen dar. Trotzdem bietet die vorgenommene Strukturierung in weitere Subkategorien einen Überblick über die unterschiedlichen Aspekte von Schwierigkeiten, die Lehrkräfte beim Argumentieren der Schüler im sprachlichen Bereich beobachteten und zeigt auch auf, welche Schwerpunkte dabei in den Interviews auftraten.

10 der befragten Lehrkräfte erwähnten Schwierigkeiten, die Schüler mit der mathematischen Fachsprache haben oder gaben an, dass Schüler zu wenig Fachsprache benutzten. Dies zeigen exemplarisch folgende Segmente:

> *Dass die Schüler irgendwann lernen so zu antworten wie die Lisa [in der vorgelegten Beispielargumentation]. Das wäre toll. Also wenn sie mehr Fachsprache benutzen würden.*
>
> (Frau E, Absatz 56)
>
> *Schüler fühlt sich überfordert mit Begriffen, mit Bezeichnungen, mit Schreibweisen.*
>
> (Frau J, Absatz 16)

Einige Lehrkräfte nannten die Verwendung von Fachsprache, als sie gefragt wurden, worin sich Argumentationen von Lehrkraft und Schüler im Unterricht unterschieden, beispielsweise Frau H und Frau M:

> *Wahrscheinlich benutze ich mehr mathematische Fachbegriffe als meine Schüler in ihren Formulierungen.*
>
> (Frau H, Absatz 34)
>
> *Sie machen das mehr so mit allgemeinen Worten, während ich dann doch eher versuche, mich mit mathematischen Begriffen fundierter auszudrücken.*
>
> (Frau M, Absatz 60)

Wie es sich bei Frau M andeutet, wurde die von Schülern verwendete Sprache von manchen Lehrkräften explizit nicht als Fachsprache bezeichnet. Beispielsweise stellten sie die Fachsprache der „Schülersprache“, „Alltagssprache“ oder „Umgangssprache“ gegenüber. So führt zum Beispiel Herr K aus:

Wobei ich die Erfahrung gemacht habe, dass die Schüler sich mit einem sauberen mathematischen Begründen sehr, sehr schwertun. Klar, die Formulierungen sind dann ja in Schülersprache sozusagen oder in Alltagssprache.

(Herr K, Absatz 22)

Herr B und Herr G sahen die Verwendung von Fachsprache im Unterricht aber auch kritisch und nicht unbedingt als Ziel des Mathematikunterrichts:

Ich glaube an der Schule sollte man den Schülern einfach Spaß an der Mathematik oder an der Analysis vermitteln und dann vielleicht einfach über ganz stringente Sachen, über Schreibweisen einfach einmal darüber hinwegsehen, wenn sie das falsch machen, auch die Fachsprache nicht richtig verwenden.

(Herr B, Absatz 106)

Sobald man in die Nähe von Begründungen kommt im Analysisunterricht, dann geht es um „hinreichend" und „notwendig", um „wenn – dann" und „genau dann ist es umkehrbar" und so, dann ist man schon in Bereichen, die sind sehr, sehr abstrakt und zwar nicht nur mathematisch, auch sprachlich. Also da ist man in einem Bereich, der mit Umgangssprache gar nichts mehr zu tun hat, mit Erfahrung und ich würde mir wünschen, dass das Begründen, also dass ein Schüler stets von seinem Erfahrungsschatz her lernt.

(Herr G, Absatz 52)

Wie im theoretischen Abschnitt 2.1.4 dargestellt, kann Argumentieren nicht nur mit Hilfe von Fachsprache erfolgen. Die im Folgenden dargestellten Schwierigkeiten beziehen sich demzufolge auch nicht nur auf fachsprachliche Aspekte, sondern auf die Sprache im Allgemeinen, ohne dass Bezüge zur Fachsprache damit ausgeschlossen sind.

Von gut der Hälfte der Befragten wurden Schwierigkeiten der Schüler beim Formulieren und Verbalisieren genannt, beispielsweise:

Also das Verbalisieren von mathematischen Inhalten fällt Schülern unglaublich schwer.

(Herr G, Absatz 22)

Dass es den Schülern äußerst schwerfällt, präzise in Worte zu fassen, was sie denken […] oder auch einfach schlecht formulieren können.

(Herr K, Absatz 38)

Wenn etwas formuliert ist und man weiß vielleicht sogar, dass der Schüler das Richtige meint, aber er formuliert es falsch, ist es schwierig.

(Frau O, Absatz 48)

Insbesondere wurde dabei auch von zwei Lehrkräften die fehlende Nachvollziehbarkeit der Schülerformulierungen bemängelt. Frau J wiederholte sich dabei sogar in ähnlicher Form an mehreren Stellen des Interviews, zum Beispiel:

> *Und das andere ist, was man schon feststellt, dass sie einfach wahnsinnige sprachliche Probleme haben. […] Eine logische Folgerung, einen Relativsatz hinbringen und sich richtig darauf beziehen. Dass ich einfach sage: „Okay, das ist eigentlich wirklich klar nachvollziehbar."*
>
> (Frau J, Absatz 30)
>
> *Also meistens formulieren es die nicht so Guten aus und Sie haben dann oft das Problem, Sie wissen gar nicht, auf was sich der Schüler denn bezieht. Also Sie können das wirklich, wenn sie es lesen, gar nicht nachvollziehen: Passt das? Oder passt das nicht? Meinte er das Richtige oder meinte er das nicht?*
>
> (Frau J, Absatz 44)

Ein spezieller Aspekt des Formulierens ist der präzise Umgang mit Sprache, ein Aspekt, den mehrere Lehrkräfte im Bereich sprachlicher Schwierigkeiten benannten, insbesondere wieder bei der Frage nach dem Unterschied zwischen Argumentationen von Lehrkraft und Schülern. Beispielhaft zeigen dies folgende Segmente:

> *Also ein schlechter Schüler, da merkt man so: „Okay, der hat schon so ungefähr eine Ahnung, aber so ganz detailliert kann er es eigentlich nicht erklären." Und gute Schüler können das dann wesentlich besser erklären oder da merkt man dann: „Ja, okay, der hat das schon eher verstanden und kann das auch wirklich sauber hinschreiben." […] Es ist halt wirklich logisch stringent das Ganze und in sich schlüssig. Und auch wirklich nicht bloß so wischiwaschi beschrieben, wie das halt die anderen dann zum Teil machen.*
>
> (Herr D, Absatz 36)
>
> *Der größte Unterschied zwischen meiner Begründung und denen der Schüler ist, dass sie es tatsächlich schlecht zu Papier bringen können oder auch einfach schlecht formulieren können, mit schlecht in dem Sinne meine ich fehlende Präzision.*
>
> (Herr K, Absatz 38)

Die Aussage von Herrn K beinhaltet auch den nächsten Aspekt sprachlicher Schwierigkeiten, nämlich solche, die beim Verschriftlichen von Argumentationen und Begründungen auftreten. Fünf der befragten Lehrkräfte äußerten sich diesbezüglich. Obwohl es vermutlich eine große Schnittmenge zwischen den Bereichen *Formulierung* und *Verschriftlichung* gibt, konnten diese beiden Bereiche nicht zusammengefasst werden, da die Äußerungen in Bezug auf das Formulieren sich nicht nur auf schriftliche Äußerungen beziehen oder der Bezug sogar offenbleibt, während das Verschriftlichen gerade das medial Schriftliche in den Fokus nimmt. Auffällig ist, dass Frau J, die insgesamt viele Segmente im Bereich Sprache lieferte, hier mit sieben Segmenten, die teilweise aus verschiedenen Abschnitten des Interviews stammen, vertreten ist, zum Beispiel:

> *Und wollen es die Schüler schriftlich fixiert haben, dann übernehme es dann meistens doch wieder ich, dass ich es dann hinschreibe. Weil ich einfach erkenne, dass die Schüler sich da wahnsinnig schwertun, dies dann wirklich niederzuschreiben.*
>
> (Frau J, Absatz 40)
>
> *Und schriftlich müssen sie natürlich dann ganze Sätze schreiben, wenn sie argumentieren sollen, wenn jetzt sowas schriftlich verlangt ist. Da ist auch immer das Ding, dass einen ordentlichen Fließtext zu schreiben bei den Schülern oft auch einfach ein Problem ist.*
>
> (Herr L, Absatz 48)

Da sprachliche Kompetenzen eine entscheidende Voraussetzung für das Argumentieren sind, können sich Schwierigkeiten beim Argumentieren durch unzureichende sprachliche Voraussetzungen bei den Schülern ergeben. Dies erwähnten vier der befragten Lehrkräfte. Stellvertretend dafür stehen folgende Ausschnitte:

> *Also ein Hindernis ist sicherlich die Beherrschung der deutschen Sprache, aber auch wie gut man in Deutsch ist.*
>
> (Herr F, Absatz 46)
>
> *Das liegt daran, dass die sprachlichen Voraussetzungen der Schüler sowieso nicht besonders sind.*
>
> (Herr G, Absatz 22)
>
> *I: Was würden Sie sich für das Begründen im Analysisunterricht wünschen?*
>
> *B: Dass sie schon gefestigter in die Oberstufe kommen mit mathematischen Schreibweisen, dass sie sprachlich etwas fitter sind. Und wenn Sie dann Arbeiten herausgeben und dann mit den Schülern zuerst mal den deutschen Satz, was sie damit ausgesagt haben, diskutieren, denke ich mir… Ja, dass sie da gefestigt werden.*
>
> (Frau J, Absatz 63-64)

Zwei Lehrkräfte erwähnten zudem, dass Schüler Schwierigkeiten damit haben, Mathematik und Sprache überhaupt miteinander in Verbindung zu bringen:

> *Es ist allerdings tatsächlich so, dass dieses Begründen in Schulaufgaben wenig funktioniert. Also sich sprachlich hier auszudrücken, gelingt selten. […] Das liegt daran, dass die sprachlichen Voraussetzungen vieler Schüler sowieso nicht besonders sind und es liegt daran, dass sie, wenn sie Mathe machen, grad gar nicht daran denken, dass man auch Sätze formulieren sollte. Sondern in Mathe, hat man den Eindruck, dass viele sogar auch die ganze Umwelt ausblenden. Sie haben ihre Formeln und Zahlen und da kommen Worte gar nicht vor.*
>
> (Herr G, Absatz 20-22)
>
> *Unseren Schülern fällt es sehr schwer, irgendwie Mathematik mit Sprache in Verbindung zu bringen.*
>
> (Frau M, Absatz 40)

Interessant ist, dass diese vielen Aspekte von Schwierigkeiten im Bereich der Sprache zwar von den Lehrkräften vielfach benannt wurden, dass diese aber nicht davon sprachen, was sie gegen diese Schwierigkeiten unternehmen oder auch nicht benannten, dass sie selbst Schwierigkeiten hätten, die Schüler geeignet zu unterstützen. Vielmehr klingen die Einschätzungen der Lehrkräfte nach unveränderlichen Tatsachen. Des Weiteren sind zwei Punkte in Bezug auf die Befragten auffällig. Mit 32 zu 24 Segmenten stammen deutlich mehr als die Hälfte der Segmente innerhalb der Subkategorie *Sprache* von weiblichen Befragten, obwohl der Anteil der weiblichen Befragten mit 5 von 14 unter der Hälfte liegt. Aufgrund der geringen Datenmenge lassen sich daraus zwar keine statistischen Schlüsse ziehen, aber dennoch könnte die Hypothese generiert werden, dass weibliche Lehrkräfte eventuell mehr auf sprachliche Aspekte beim Argumentieren achten als männliche. Noch auffälliger sind die Schularten der Lehrkräfte mit einer Vielzahl an Segmenten in der Subkategorie *Sprache*. Herr A, Herr G, Frau J, Herr K und Frau M sind diejenigen Lehrkräfte, die nicht an einem Gymnasium unterrichteten, sondern an der Beruflichen Oberschule oder dem Bayernkolleg. Mit Ausnahme von Herrn A, der nichts im Bereich sprachlicher Schülerschwierigkeiten äußerte, stammen überdurchschnittlich viele Segmente innerhalb der Subkategorie *Sprache* von diesen Lehrkräften. Hier liegt die Vermutung nahe, dass gerade Schüler, die auf dem zweiten Bildungsweg zum Abitur gelangen möchten, mehr sprachliche Schwierigkeiten haben als Schüler am Gymnasium, was durch weitere Studien zu überprüfen wäre.

Wie durch die verschiedenen Subkategorien innerhalb der Subkategorie *Sprache* aufgezeigt werden konnte, durchziehen Schwierigkeiten mit der Sprache verschiedene Bereiche des Argumentierens. So sind sprachliche Kompetenzen eine Voraussetzung, um Argumentationskompetenzen erwerben zu können. Sie kommen beim Erfassen der Aufgabenstellung, der Analyse einer zu begründenden

Aussage und beim Nachvollziehen von Argumentationen in passiver Rolle zum Tragen, werden aber insbesondere auch aktiv beim Verfassen einer Argumentation benötigt. Somit hätten die Segmente innerhalb der Subkategorie *Sprache* auch in den nachfolgend dargestellten Subkategorien mit eingeordnet werden können. Jedoch ist die Vielzahl an Segmenten fast aller Befragten im Zusammenhang mit der Sprache so auffällig, dass dieser Bereich gesondert betrachtet wurde, wodurch auch seine besondere Bedeutung herausgearbeitet werden konnte.

5.5.3.1.3 Schülerschwierigkeiten durch fehlende Voraussetzungen

Eine wichtige Voraussetzung, um argumentieren zu können, sind inhaltsbezogene Kompetenzen im betreffenden, aber auch in angrenzenden Gebieten. Daraus ergeben sich Schwierigkeiten für Schüler, bei denen diese Kompetenzen nicht ausreichend ausgeprägt sind. Dies ist ein Bereich, der von 9 Befragten angesprochen wurde, zum Beispiel von Herrn D, Frau H und Herrn K:

> *Sie müssen natürlich einen gewissen konzeptuellen Hintergrund haben. Also man muss ja zumindest die Theorie mal soweit verstanden haben, dass ich weiß, wie wende ich das an, was kommt da, und das ist für schwache Schüler, glaube ich, nicht so ganz einfach.*
>
> (Herr D, Absatz 48)
>
> *Dass man bei diesen Begründungsaufgaben eben feststellt, ob jemand die Strukturen <u>dahinter</u> erkannt hat und vielleicht viele Informationen, die die letzten Stunden so im Raum herumgewabert sind, zusammenbringen kann, und das können eben nicht viele.*
>
> (Frau H, Absatz 58)
>
> *Also irgendeine Rechnung stur durchzuführen, erfordert vom Schüler vielleicht irgendwie das sture Einüben von so Rechenfertigkeiten und das ist normalerweise leichter sich anzueignen als ein echtes Verständnis, das man für solche Begründungsaufgaben braucht.*
>
> (Herr K, Absatz 66)

Insbesondere wurde dabei auch genannt, dass Inhalte, die weiter zurückliegen, beim Begründen auch benötigt werden und diese nicht immer abrufbar sind. Außerdem sind oft Spezialfälle oder Ausnahmen nötig, um Gegenbeispiele bei Wahr-oder-Falsch-Aufgaben konstruieren zu können. Diese sind Schülern häufig nicht bekannt. Außerdem wurden fehlende bildliche Vorstellungen zu Konzepten und Begriffen, komplexe Sachverhalte und der hohe Abstraktionsgrad der Inhalte gerade in der Analysis als inhaltliche Faktoren genannt, die Schwierigkeiten verursachen.

In Bezug auf das Argumentieren in der Analysis, also insbesondere in höheren Jahrgangsstufen, ist es wichtig, dass die Lernenden bereits Vorerfahrungen mit dem Argumentieren aus niedrigeren Jahrgangsstufen mitbringen, um nun ihre Kompetenzen weiter ausbilden zu können. Zwei Lehrkräfte benannten als Schwierigkeit, dass Schülern genau diese Vorerfahrung fehlt („Aber unsere Schüler haben das nicht gemacht“ (Herr G, Absatz 22)) und sie nur dann in der Form begründen könnten, wie es die fiktiven Schüler in den vorgelegten Beispielargumentationen tun, wenn dies „extrem geübt“ (Frau J, Absatz 46) würde. Diese beiden Lehrkräfte unterrichteten nicht am Gymnasium, sodass ihre Lernenden über den zweiten Bildungsweg zum Abitur gelangen. Möglicherweise könnte dies eine Ursache für die fehlende Erfahrung mit dem Argumentieren darstellen.

Insgesamt zeigen sich also Schwierigkeiten bezüglich fehlender Voraussetzungen bei den Schülern vor allem im Bereich inhaltlicher Kompetenzen sowie auch im Bereich sprachlicher Kompetenzen (siehe auch Abschnitt 5.5.3.1.2). Fehlende Erfahrungen mit dem Argumentieren an sich wurden zwar genannt, spielen aber aus Sicht der Lehrkräfte vermutlich eher eine untergeordnete Rolle.

5.5.3.1.4 Schülerschwierigkeiten im Prozess des Argumentierens (aktiv und passiv)

Einige Schwierigkeiten ergeben sich an verschiedenen Stellen eines Argumentationsprozesses, wobei sowohl aktive als auch passive Aspekte der Argumentationskompetenz betroffen sein können. So können Schwierigkeiten beim Planen und Produzieren einer eigenen Argumentation genauso auftreten wie beim Verstehen der zu begründenden Aussage oder beim Nachvollziehen oder Evaluieren einer fertigen Argumentation. 13 der 14 Befragten äußerten sich in diesem breiten Bereich. Die 56 Segmente innerhalb der Subkategorie *Prozess des Argumentierens (aktiv und passiv)* wurden mit Hilfe weiterer Subkategorien strukturiert: *Erfassen der Aufgabenstellung, Allgemeingültigkeit von Aussagen, Erkennen des Erwartungshorizontes, Mathematische Genauigkeit, Nachvollziehen von Argumentationen* (siehe Abb. 5.9).

Wird ein Argumentationsprozess durch eine (meist schriftlich formulierte) Aufgabenstellung initiiert, so ist der erste Schritt für die Schüler, diese Aufgabenstellung zu erfassen, ein Schritt, in dem 5 der Befragten Schwierigkeiten bei den Schülern erkannten. So hätten Schüler Schwierigkeiten, der Aufgabenstellung die zu begründende Aussage oder deren Art zu entnehmen oder die betreffenden Inhalte zu erfassen. Damit zusammen hängt auch die Erfassung des Textes an sich und dabei die Aufnahme aller wichtigen Wörter. Hierbei zeigt sich erneut der Zusammenhang zu sprachlichen Kompetenzen der Schüler. Beispielhaft zeigen folgende Äußerungen Inhalte der Subkategorie *Erfassen der Aufgabenstellung*:

Mindestens genauso schwierig ist es für die Schüler, die Aufgabe zu lesen und zu sagen: „Ich muss jetzt da eins, zwei, drei Sachen begründen: Parabel, nach oben geöffnet und", sagen wir mal, „zwei Nullstellen," oder was halt dasteht. Ja und sie begründen vielleicht nur eine Sache. Sie begründen nur „zwei Nullstellen". Und das andere überlesen sie. Also es fehlt häufig auch die Struktur, dass man liest, was man überhaupt begründen soll.

(Herr C, Absatz 30)

Oder weil sie halt die Definition nur so gelernt haben, wie es halt meistens so ist, aber halt dann auf kleine Worte[12] *nicht aufpassen, wie streng monoton steigend oder nur diese Funktion hat diese Eigenschaft. Und gerade diese Ausnahmen oder diese Besonderheiten finden dann die Schüler immer so schwer. Was ich aber auch manchmal verstehen kann, weil manche Aufgaben, die so „Wahr-oder-Falsch" sind, sind halt dann nur auf die Ausnahmen ausgelegt.*

(Herr F, Absatz 26)

Eng damit zusammen hängt, dass die Schüler beim Argumentieren erkennen müssen, welchen Geltungsbereich die zu begründende Aussage hat. Speziell Aussagen, in denen ein allgemeingültiger Zusammenhang postuliert wird, bereiten Schülern laut der Befragten Schwierigkeiten. Eine häufig genannte Schwierigkeit ist dabei, dass Schüler nur an Beispielen begründen, davon ausgehend nicht abstrahieren und somit nicht allgemeingültig begründen, sondern die Beispiele als ausreichend akzeptieren. Dies wurde von Lehrkräften häufig, aber nicht immer, in Zusammenhang mit der Betrachtung der vorgelegten Beispielargumentationen geäußert, da dort in einer Argumentation einer fiktiven Schülerin von zwei Beispielen auf die Allgemeinheit einer Aussage geschlossen wird. Auch die Tatsache, dass ein Gegenbeispiel ausreichend ist, um eine falsche Aussage zu widerlegen, eine wahre Aussage jedoch unabhängig von Beispielen begründet werden muss, wird von Lehrkräften als Schwierigkeit für die Schüler gesehen. Die Herausforderung besteht also darin, Beispiele in einer Anfangsphase des Argumentierens sinnvollerweise heranzuziehen, um sich den Sachverhalt klarzumachen, dann aber von den konkreten Beispielen wegzukommen, um eine Aussage allgemeingültig begründen zu können. Exemplarisch zeigen folgende Segmente diesen Schwierigkeitsbereich:

Also diesen formalen Weg, diese formale Begründung, das machen die wenigsten Schüler. Sie versuchen immer, über Beispiele zu gehen. Aber das haben sie dann ja meist

[12] Gemeint ist vermutlich „Wörter" und nicht „Worte", da Herr F die Wörter „streng" und „nur" betont.

nicht drauf, dass halt ein Gegenbeispiel ausreicht, um den Sachverhalt zu verneinen, aber ich kann halt mit einem konkreten Beispiel oder mit mehreren nicht einen Sachverhalt hinreichend klären.

(Herr B, Absatz 56)

Weil sie oft meinen, mit einem Beispiel haben sie dann schon einen ganzen Satz bewiesen. Also wenn sie zum Beispiel sagen, die Punkte (0|0) *und* (1|1) *liegen auf beiden Graphen, also sind die Graphen identisch. Das verstehen viele Schüler nicht, dass es dann für alle Punkte gelten muss. Also das Abstraktionsniveau haben sie da noch nicht oder, dass sie dann, wenn sie etwas beweisen müssen, das für alle beweisen müssen.*

(Herr F, Absatz 22)

Wie bei der Clara [in der vorgelegten Beispielargumentation] jetzt irgendwie, das ist ja eine ganz gängige Sache, dass sie zwei Beispiele angeben und dann sagen: „Okay, und das war's dann."

(Frau H, Absatz 40)

Und die Argumentationen der Schüler sind schon oft vorläufiger oder einfacher gestrickt oder an einem Beispiel begründet. Also die haben vielleicht nicht die Allgemeingültigkeit mit im Blick. Sowas gibt es schon.

(Herr N, Absatz 52)

Wie die Aussage von Herrn N andeutet, sind nicht nur an einem beispielgebundenen Begründungsmuster Schwierigkeiten der Schüler mit der Allgemeinheit von Aussagen zu erkennen. Auch Frau H nennt die Allgemeingültigkeit als Schwierigkeit:

Und das ist natürlich ganz schwer zu sagen, eine Begründungsaufgabe, wenn es wahr ist, muss ich es echt allgemeingültig zeigen oder beschreiben und das ist schon schwierig.

(Frau H, Absatz 40)

Frau J sieht es aber auch als Ziel, dass die Schüler lernen, von einem Beispiel ausgehend auf die allgemeine Gültigkeit eines Sachverhaltes zu schließen und beschreibt, dass sich gerade auch dabei Schwierigkeiten ergeben:

Anhand eines Beispiels auf die Allgemeinheit oder auf den gesamten Sachverhalt zu folgern, fällt vielen auch schwer. Und das muss wirklich trainiert werden. Ich denke, das ist ja im Grund auch unsere Aufgabe, dass man genau diesen Transfer hier leistet.

(Frau J, Absatz 30)

Bereits zu Beginn des Argumentationsprozesses, beim Erfassen der Aufgabenstellung, aber insbesondere in einer späteren Phase beim Verfassen einer Argumentation wird implizit von den Schülern erwartet, so zu begründen, wie es von der Lehrkraft intendiert wird. Dazu gehören beispielsweise der erwartete Umfang, die Ausführlichkeit und die Tiefe der Argumentation, was möglicherweise zwischen verschiedenen Lehrkräften variiert. Insbesondere in Prüfungssituationen ist dies eine Herausforderung für Schüler. Zugleich ist es auch eine Schwierigkeit für Lehrkräfte, die Aufgabenstellungen ihren Erwartungen entsprechend zu formulieren. Folgende Beispiele zeigen diesen Aspekt exemplarisch:

> *Ich finde es schwieriger. Das heißt ja deswegen noch nicht, dass die [Begründungsaufgaben für Prüfungen] jetzt nicht geeignet sind. Aber ich finde es ist wirklich eine Herausforderung für mich als Lehrer, die vorher so zu trainieren und die Aufgaben dann auch so zu stellen, dass ich sage, also ein vernünftiger Schüler muss jetzt ungefähr wissen, wie tief er darauf eingehen muss. Also schwieriger für beide Seiten, für mich als Lehrer und auch für die Schüler.*
>
> (Herr C, Absatz 40)
>
> *Es ist schon auch oft schwierig für die Schüler, zu erkennen, was für mich jetzt eine ausreichende Begründung ist und was nicht.*
>
> (Herr G, Absatz 28)
>
> *Ja ein bisschen Probleme gibt es vielleicht schon, weil man dann halt die Frage hat: Auf welcher Ebene soll etwas begründet werden? Müsste man sich mal Gedanken darüber machen, wie man für die Schüler da die Erwartungen deutlich machen kann, auf welcher Ebene begründet werden soll.*
>
> (Herr N, Absatz 64)

Außerdem ist es beim aktiven Argumentieren wichtig, die wesentlichen Argumente auszuwählen, den Kern der Sache zu erfassen und dabei weder wichtige Aspekte auszulassen noch unnötigerweise zu viele, für den Argumentationsgang unnötige, Argumente anzuführen. Auch das gehört mit zur Einschätzung des Erwartungshorizontes einer Argumentationsaufgabe. Dies könnte auch von der jeweiligen Lehrkraft, die hier die mathematische *community* vertritt, abhängen, ist aber mehr der zu begründenden Aussage inhärent als beispielsweise der erwartete Umfang. Schwierigkeiten von Schülern zeigen sich in diesem Bereich dadurch, dass sie zu viele Informationen in ihre Argumentationen einbauen und sich nicht auf die entscheidenden Aspekte konzentrieren, aber auch dadurch, dass sie wesentliche Argumente nicht anführen, weil ihnen diese als offensichtlich erscheinen und sie dabei also den Begründungsbedarf nicht erkennen. Auch zu entscheiden, an welchen Stellen ein Zusammenhang ausführlich begründet werden soll und wann es genügt, diesen innerhalb einer Argumentation, in der es im Wesentlichen um einen anderen Aspekt geht, nur zu erwähnen, fällt Schülern schwer. Eine Lehrkraft nannte zudem die Auswahl geeigneter Beispiele für eine Argumentation als Schwierigkeit der Schüler. Folgende Beispiele illustrieren diesen Aspekt:

> *Sie argumentieren häufig an Stellen ganz, ganz ausführlich, wo ich sage: „Da würde mir genügen, dass du mir sagst, dass du das machst," und das Eigentliche ist halt häufig schlampig.*
>
> (Herr C, Absatz 28)
>
> *Die Hälfte der Schüler würde etwas dazu schreiben, die würden mindestens doppelt bis dreimal so lang schreiben, wie sie immer nochmal außen herum schreiben und nochmal. Und einfach diese klare Struktur zu haben, so: „Ich habe alles erfasst!", das ist relativ schwer.*
>
> (Frau J, Absatz 58)
>
> *Oder sie schreiben dann auch manchmal einfach so: „Ja das ist so, weil das ist so." Also begründen es mit dem, was eigentlich sowieso schon dasteht. Habe ich auch schon gelesen.*
>
> (Frau O, Absatz 48)

Beim Verfassen der Argumentation als Produkt eines Argumentationsprozesses ergeben sich aus Sicht der Lehrkräfte für die Schüler Schwierigkeiten durch die notwendige mathematische Genauigkeit, mit der beim Argumentieren vorgegangen werden muss, um die zu begründende Aussage präzise zu treffen. 6 der befragten Lehrkräfte berichteten, dass Schüler beim Argumentieren Begriffe nicht genau genug abstecken, beispielsweise im Bereich der Monotonie, oder nicht an Ausnahmen denken. Allgemeiner beschrieben die Befragten, die Schüler würden nicht so exakt begründen, nicht detailliert oder sauber genug, zu schwammig und unpräzise und es würden Aspekte fehlen. Hierbei wird auch wieder der Zusammenhang zum durch die Lehrkräfte implizit gesteckten Erwartungshorizont deutlich. Stellvertretend illustrieren dies folgende Aussagen:

> *Begründen wird vielleicht dadurch erschwert, dass in der Mathematik die Präzision halt viel wichtiger ist als im Alltag. Das ist einmal schwerer sich an dieses hohe Maß an Präzision zu gewöhnen.*
>
> (Herr K, Absatz 60)

Man sieht das ja auch in den schriftlichen Aufgaben. Die Schüler argumentieren, würde ich mal sagen, nicht so exakt. Also auch wie ich jetzt Abitur korrigiert habe, man sieht dann ja wieder, ja also eigentlich so ungefähr stimmt das schon, aber es sollte vielleicht noch etwas detaillierter oder genauer sein.

(Herr D, Absatz 34)

Auch ob sie jetzt monoton steigend ist oder streng monoton steigend. Ist die 2 beim Intervall mit dabei oder ist sie ausgeschlossen? Ist es umkehrbar, weil jeder x-Wert genau einen y-Wert hat oder höchstens? Solche Sachen halt. Da lege ich mehr Wert darauf als die Schüler. Ich sage dann immer, dass man das auch ein bisschen feiner formulieren kann und dann kommt es schon immer. Aber so auf den ersten Einstieg ist es immer schwierig für die Schüler.

(Frau E, Absatz 36)

An den Aussagen von Herrn D und Frau E wird deutlich, dass hier (fach-) sprachliche und mathematisch-inhaltliche Aspekte zusammenspielen. Es ist nicht klar, ob die Schüler das richtige meinen und es nur nicht präzise genug formulieren können, oder ob die inhaltliche Unklarheit zur sprachlich unpräzisen Äußerung führt.

Ein letzter Bereich von Schwierigkeiten innerhalb der Subkategorie *Prozess des Argumentierens (aktiv und passiv)* betrifft speziell eine passive Komponente von Argumentationskompetenz, nämlich das Nachvollziehen von Argumentationen. Dieser Aspekt kann gegen Ende des Argumentationsprozesses auftreten, wenn Schüler gegenseitig ihre verfassten Argumentationen rezipieren und evaluieren sollen, kann aber auch durch das Vorlegen fremder oder beispielhafter Argumentationen initiiert werden. In den Interviews wurden den Befragten fiktive Schülerargumentationen zur Beurteilung vorgelegt. Dies wurde teilweise von den Lehrkräften so aufgefasst, dass sie davon ausgehend beschrieben, wie ihre Schüler auf diese Beispielargumentationen reagieren würden, zum Beispiel, wenn diese von Mitschülern geäußert würden. In diesem Zusammenhang sprachen sie dann davon, dass ihre Schüler möglicherweise Schwierigkeiten beim Nachvollziehen dieser Argumentationen haben könnten. Herr G beispielsweise beschrieb:

Also ich persönlich wäre froh, wenn ich die Daniel-Antwort bekommen würde im Unterricht. Liegt aber einfach daran, dass Lisa und Tom natürlich Recht haben, aber dass beides Aussagen sind, die in meinem Unterricht nur eine verschwindend geringe Anzahl versteht.

(Herr G, Absatz 34)

Frau J bezog sich nicht auf die Beispielargumentationen, sondern auf die Situation, dass sie, wenn sie im Unterricht argumentiert, dabei darauf achten muss, dass sie ihre Schüler nicht dadurch „verliert", dass diese ihre Argumentation nicht nachvollziehen können:

> *Das hängt aber von der Klasse ab. Bei manchen läuft das ganz schlecht, also wo Sie wirklich auch jeden Zwischenschritt bei einer Begründung hinschreiben oder hinmalen, weil Sie merken: Die Schüler gehen Ihnen sonst verloren.*
>
> (Frau J, Absatz 52)

Es zeigt sich also, dass verschiedenste Abschnitte eines Argumentationsprozesses Schwierigkeiten für Schüler bereithalten, dass davon aktive wie passive Aspekte der Argumentationskompetenz betroffen sind und dass Schwierigkeiten in den verschiedenen Prozessschritten auch zusammenhängen können.

Neben den bisher dargestellten Schülerschwierigkeiten beim Argumentieren im Analysisunterricht, die entweder in allgemeiner Form benannt wurden, sprachlicher Art sind, Voraussetzungen für das Argumentieren betreffen oder sich auf den Prozess des Argumentierens in aktiver oder passiver Weise beziehen, wurden von einzelnen Lehrkräften weitere Aspekte genannt. Da es sich hierbei um Einzelnennungen handelt, wurden diese in einer Restkategorie innerhalb der Subkategorie *Schülerschwierigkeiten* gesammelt. Hierbei handelt es sich beispielsweise um Schwierigkeiten, die den Fokus von Wahr-oder-Falsch-Aufgaben auf Ausnahmen und Besonderheiten betreffen und deshalb bei den bisher dargestellten Subkategorien *Sprache* und *Erfassen der Aufgabenstellung* innerhalb des Argumentationsprozesses bereits in ähnlicher Form benannt wurden. Außerdem wurde erwähnt, dass Schwierigkeiten dann bestehen, wenn Schüler alleine argumentieren müssen oder wenn sich Begründungsaufgaben aufeinander beziehen. Außerdem benannte eine Lehrkraft als Ursache für Schwierigkeiten die Tatsache, dass zu wenig Aussagenlogik thematisiert wird.

Insgesamt konnte ein breiter Bereich von Schülerschwierigkeiten beim Argumentieren aus den Äußerungen der Lehrkräfte abgeleitet werden. Dabei sind vor allem drei Subkategorien von großer Bedeutung, die *Sprache*, *Voraussetzungen* für das Argumentieren und der *Prozess des Argumentierens (aktiv und passiv)*. In allen 3 Subkategorien finden sich Äußerungen von mindestens 10 der Befragten. Besonders dominant zeigt sich das Problemfeld Sprache, wie oben bereits herausgearbeitet wurde. Im Vergleich zur Subkategorie *Prozess des Argumentierens (aktiv und passiv)* beinhaltet der Bereich Sprache zwar etwa gleich viele Codierungen, die auch von etwa gleich vielen Lehrkräften stammen, jedoch ist der Bereich Sprache vergleichsweise übersichtlich, was die darin enthaltenen Aspekte betrifft.

Drei Subkategorien der Subkategorie *Sprache*, nämlich *Fachsprache, Formulierung* und *sprachliche Präzision*, die auch stark miteinander zusammenhängen, treten dabei besonders hervor. Außerdem fällt auf, dass sprachliche Aspekte auch innerhalb anderer Schwierigkeitsbereiche immer wieder tangiert werden, beispielsweise beim mathematisch präzisen Arbeiten oder beim Erfassen der Aufgabenstellung. Der zentrale Bereich der Sprache soll deshalb im dritten Teil dieser Arbeit genauer in den Fokus genommen und Fördermöglichkeiten diesbezüglich vorgeschlagen werden.

5.5.3.2 Probleme in Bezug auf Schüler

Herausforderungen, die sich für Lehrkräfte beim Unterrichten des Argumentierens in direktem Zusammenhang mit den Schülern ergeben, aber weder Schwierigkeiten sind, die Schüler mit dem Argumentieren haben, noch Gründe für solche Schwierigkeiten, wurden mit der Subkategorie *Probleme in Bezug auf Schüler* codiert. Wie in Abbildung 5.8 und 5.9 dargestellt, ist diese in die drei Subkategorien *Heterogenität, Ablehnende Haltung der Schüler* und *Keine Vorteile für die Schüler* weiter untergliedert.

5.5.3.2.1 Heterogenität der Schüler

Mehr als die Hälfte der Lehrkräfte sprach über schwache Schüler und Klassen, aufgrund derer sie auf Probleme bei der Umsetzung des Argumentierens stoßen. Im Gegensatz zu Segmenten, die mit der Subkategorie *Schülerschwierigkeiten allgemein* codiert wurden, beziehen sich diese Aussagen nicht auf eine generelle Überforderung aller Schüler, sondern explizit auf Teile der Schülerschaft. Schwierigkeiten für die Lehrkräfte ergeben sich somit daraus, dass die Schüler unterschiedlich auf argumentative Tätigkeiten reagieren. So berichteten die Befragten, dass vor allem schwächere Schüler Begründungsaufgaben meiden, besondere Schwierigkeiten mit diesen haben und durch diese frustriert werden:

> *Es gibt natürlich da schon recht schwache Schüler, die sich an sowas gar nicht viel hintrauen.*
>
> (Herr A, Absatz 36)
>
> *Also bei einem schlechten Schüler merkt man: Okay, der hat schon so ungefähr eine Ahnung, aber so ganz detailliert kann er es eigentlich nicht erklären.*
>
> (Herr D, Absatz 34)
>
> *Sie dürfen aber nicht überfrachtet werden [mit Begründungsaufgaben], weil sonst sind die Vierer-/Fünfer-Schüler so wahnsinnig frustriert.*
>
> (Frau J, Absatz 26)

Auch das Nachvollziehen von Begründungen sei für diese Schüler kaum möglich. Deshalb entscheiden sich einige Lehrkräfte dafür, „Grundtechniken“ (Herr F, Absatz 44) den Vorrang zu geben und mit „Kochrezepten“ (Frau M, Absatz 82) zu arbeiten:

> *Und wenn ich dann wirklich eine ganz schwache Klasse habe, dann muss ich halt schauen, inwieweit ich dann immer das Begründen mache oder inwieweit halt dann solche Grundtechniken da sein müssen, wie dass sie halt mal ableiten können oder dass sie ein Integral bilden können oder eine Tangente aufstellen können.*
>
> (Herr F, Absatz 44)
>
> *Weil ich dieses Jahr eine Klasse mit Schülern hatte, die schon extreme Probleme hatten, bis auf zwei Schüler eben, überhaupt mit Mathe klarzukommen. Also ich habe dann wirklich bei diesen sehr viel über Kochrezepte gearbeitet. Also die hätten zum Beispiel allein mit dem Grad und dann wieder „Ableitung Grad 1“ und dann kommt auf einmal ein a vor, wobei überhaupt nicht vorher definiert wird, was das a überhaupt ist, extreme Probleme.*
>
> (Frau M, Absatz 82, anonymisiert)

Hier zeigt sich wieder die bereits mehrmals angesprochene Gegenüberstellung zwischen kalkülhaftem, verfahrensorientierten Arbeiten und Argumentieren. Bei manchen Lehrkräften ist auffällig, dass sie besonders schwächere Schüler innerhalb einer Klasse im Blick zu haben scheinen und so eventuell stärkere Schüler dadurch nicht angemessen gefördert werden. Deshalb wurden auch diese Aussagen, die sich nur auf schwächere Schüler beziehen, in die Kategorie *Heterogenität* eingeordnet. 10 Lehrkräfte sprachen aber direkt über die Heterogenität der Schüler und davon ausgehende Konsequenzen für das Argumentieren. Vielfach wurde erwähnt, dass sich die Argumentationskompetenzen der Schüler innerhalb einer Klasse stark unterscheiden:

> *Also wenn man gute Schüler fragt, die können das schon sehr gut begründen und da braucht man eigentlich auch fast nichts nachbessern. Wenn man natürlich einen schwachen Schüler fragt, läuft es letztlich darauf hinaus, dass mehr Falsches kommt oder gar nichts kommt und man selber halt dann nochmal konkret die Zusammenhänge darstellen muss.*
>
> (Frau O, Absatz 30)
>
> *Also es gibt schon wahrscheinlich einige Schüler, ich glaube zwei Kategorien, also manche die steigen komplett aus bei den Begründungsaufgaben, manche die sagen: „Oh cool, der hat das jetzt so erzählt, das habe ich kapiert“, würden aber selbst nie darauf kommen, und dann die dritten, die total Spaß daran haben und das auch sofort durchschauen und sofort die Antwort geben können. Und mit diesen ersten zwei*

[vermutlich gemeint: letzten zwei] kann man das, glaube ich, ganz gut machen und mit dieser dritten Kategorie muss man ein bisschen aufpassen, denke ich. Die muss man immer irgendwann mal wieder ins Boot holen.

(Frau H, Absatz 58)

Vor allem kommt es ja, wie gesagt, eben auch auf das Niveau der Schüler an. Sie sind ja auch sehr heterogen. Manche bringen es gut hin, andere halt dann wieder weniger gut.

(Herr B, Absatz 58)

Die Sorge, schwächere Schüler „abzuhängen" (Herr G, Absatz 44) oder zu „verlieren" (Herr B, Absatz 20) ist bei der Entscheidung für die konkrete Umsetzung im Unterricht, beispielsweise für den Verzicht auf Herleitungen oder auf das Stellen vieler Begründungsaufgaben leitend:

Letztlich, wenn man es aber mit recht vielen schwachen Schülern zu tun hat, bleibt einem oft nichts anderes übrig, als sich auf das zu beschränken, was sie denn dann überhaupt eigentlich können. Und die schweren Sachen, oder das, was da gefordert wird vom Lehrplan, sind ja eigentlich eher die schwereren Sachen, nämlich die Kompetenzorientierung und Sachzusammenhänge und so weiter. Das ist ja alles noch schwerer als die reinen rechnerischen Fähigkeiten. Wenn man es aber mit schwachen Schülern zu tun hat, muss man sich letztlich ja wieder irgendwie nur auf diese einfachen Rechensachen irgendwie zurückziehen, damit man überhaupt noch einigermaßen passable Ergebnisse in der Schulaufgabe erzielen kann.

(Herr K, Absatz 74)

Man kann nicht nur Begründungsaufgaben stellen, weil, wie gesagt, man sollte auch den Schwächeren eine Chance geben.

(Herr D, Absatz 50)

*Also ich persönlich versuche in der Oberstufe gar nicht so viel herzuleiten. Weil bei einer Herleitung nimmt man meistens bloß die Guten mit, den Rest verliert man bei der Herlei*tung.

(Herr B, Absatz 20)

Einzelne Lehrkräfte führten aus, dass verschiedene Niveaus im Unterricht nötig seien, um alle Schüler angemessen zu fördern. Dies führt aber teilweise dazu, dass argumentative Aufgaben nur leistungsstärkeren Schülern gestellt werden. Herr F beschrieb, dass auch beim Argumentieren ein Fördern auf unterschiedlichen Niveaus möglich wäre, hält dies aber für unfair, wenn er Prüfungen mit in den Blick nimmt:

> *Dass die Schüler halt auch alle auf ihrem Leistungsniveau gefördert werden ist halt zum Beispiel auch schwierig zu meistern im Unterricht, denn ich kann schon Blätter erstellen mit Schwierigkeitsgrad Stufe 1, 2, 3, aber dann ist halt für mich die Frage: Wie viel kann ich dann in der Klausur abprüfen? Also wenn ich jetzt dann Aufgabe 1, 2, 3 mache, dann sagen dann die schlechten Schüler: „Ja aber Aufgabe 3 habe ich doch nie im Unterricht geübt und bin da gar nicht dazu gekommen." Und wenn ich halt dann nur Aufgabe 1 und 2 prüfe, dann habe ich das Niveau nicht, das ich haben will.*
>
> (Herr F, Absatz 54)

Frau J äußerte den Wunsch für eine mögliche Weiterentwicklung des Analysisunterrichts, dass nicht nur die schwächeren, sondern auch die stärkeren Schüler gefördert werden sollten:

> *Zum einen müssen sie [die Schüler] so Standardaufgaben üben, aber dass auch immer wieder so Fragen da sind, wo sie sich selbst Gedanken machen könnten. So wie jetzt hier bei Ihnen die rechte Seite [der vorgelegten Schulbuchseite]. Also wo ich dann einfach sage, dass sie selbst daran mal, …, dass sie nicht nur immer hinten fördern, die zwischen vier und fünf stehen, sondern dass sie auch vorne mal die, die zwischen eins und zwei stehen, dass Sie denjenigen auch sagen können: „Schaut euch das mal an und überlegt euch mal was dazu." Das würde ich mir im Grunde wünschen.*
>
> (Frau J, Absatz 68)

Innerhalb der Segmente, die mit der Subkategorie *Heterogenität* codiert wurden, fanden sich teilweise auch spezifische Schwierigkeiten, die insbesondere schwächere Schüler beim Argumentieren haben. Solche Segmente wurden zusätzlich in die Kategorie *Schülerschwierigkeiten* eingeordnet, sodass hier Überschneidungen auftreten.

Dadurch dass 12 der befragten Lehrkräfte sich in Bezug auf die Heterogenität oder mit Blick auf schwächere Schüler äußerten, woraus Probleme für die Lehrkräfte im Umgang damit abgeleitet werden können, zeigt sich die große Bedeutung dieses Aspekts. Insbesondere sind in den Kategorien jeweils mehrere Codierungen von 10 der 12 Lehrkräfte zu finden, was diese Bedeutung noch verstärkt. Zudem zeigt sich innerhalb der Subkategorie *Heterogenität* eine inhaltlich relativ einheitliche Tendenz der Äußerungen bei allen Befragten. Die Bedeutung der Thematik zeigt sich auch in der aktuellen mathematikdidaktischen Literatur. Siller und Roth (2016) sehen die Arbeit mit heterogenen Lerngruppen als „zentrale[…] Herausforderungen im Mathematikunterricht aller Schulformen und -stufen" (Siller/Roth 2016, S. 2). Laut Leuders und Kollegen (2018) hat die Frage nach Möglichkeiten zum Umgang mit Heterogenität derzeit „Hochkonjunktur"

(Leuders et al. 2018, S. 282). Und auch Bruder und Kollegen (2015, S. 514 f.) berichten von Nöten und Hilflosigkeit von Lehrkräften bei der Reaktion auf heterogene Kenntnisse, Fähigkeiten sowie Lern- und Anstrengungsbereitschaft von Schülern. Es ist also wichtig, Lehrkräften Möglichkeiten aufzuzeigen, wie mit Hilfe angemessener Differenzierung eine Förderung aller Schüler und insbesondere auch schwächerer Schüler (insbesondere) beim Argumentieren möglich ist. Dies ist einer der Schwerpunkte des dritten Teils dieser Arbeit.

5.5.3.2.2 Weitere Probleme in Bezug auf Schüler

Eine weitere Schwierigkeit im Bereich der Schüler, von der 10 der 14 Befragten berichteten, ist eine ablehnende Haltung, die Schüler dem Argumentieren entgegenbringen. Die Befragten sprachen dabei entweder pauschal von den Schülern oder aber von einer Teilgruppe, dem Großteil oder von schwächeren Schülern, die das Argumentieren nicht mögen, es nicht gerne tun, nicht ernst nehmen, kein Interesse daran zeigen, entsprechende Aufgaben auslassen oder Aufforderungen zum Begründen gar nicht nachkommen. Stellvertretend zeigen dies folgende Segmente:

> *[Das Argumentieren und Begründen] mögen die Schüler gar nicht. Also was heißt die Schüler? Sagen wir mal so der Großteil der Schüler.*
>
> (Herr A, Absatz 26)
>
> *Diese formalen Beweise nehmen ja viele Schüler auch nicht ernst. Da kommt, also zum Beispiel beim Beweis der Produktregel beim Ableiten, hinterher die Frage: „Müssen wir das in der Schulaufgabe können?", und dann sage ich „Nein". Und dann ist das Thema für 24 von 25 abgehakt.*
>
> (Herr C, Absatz 40)
>
> *Ich frage auch immer wieder, wie das ist, ob ich ihnen lieber die Theorie herleiten soll oder ob ich ihnen einfach sagen soll: „So ist das. Jetzt üben wir es." Und sie wählen immer die zweite Variante.*
>
> (Frau E, Absatz 80)
>
> *Also es ist so, dass die Schüler von Haus aus nicht gerne begründen.*
>
> (Herr G, Absatz 20)
>
> *Die [Schüler] lassen sie [gemeint sind Begründungsaufgaben] soweit wie möglich aus.*
>
> (Herr K, Absatz 46)

Ein weiteres Problem im Zusammenhang von Lehrkräften, Schülern und dem Argumentieren zeigt sich, indem 5 der Befragten erwähnten, dass sie selbst keine

Vorteile für die Schüler durch das Argumentieren bei der Einführung von Theorie sehen. Dies könnte eventuell auch motivationale Auswirkungen auf die Schüler haben und zur eben dargestellten ablehnenden Haltung dem Argumentieren gegenüber führen. Exemplarisch zeigen folgende Segmente diese Einschätzung:

> *Ich finde, die Herleitung von der Formel, die hilft häufig nicht so viel, sondern lieber dann viele Beispiele mit unterschiedlichen Anwendungsaufgaben, dass sie dann lernen: Okay, diese Formel kann ich auf dieses Problem auch anwenden und ich muss das und das und das machen.*
>
> (Frau E, Absatz 2)
>
> *Wenn ich jetzt im G9 einen LK hätte, dann würde man das natürlich sauber herleiten: Differenzenquotient, schauen wir das Ganze mal an, gibt es ein paar Tricks, müssen wir vielleicht das Element einbauen und so weiter. Wo ein paar mathematische Tricks dann mit hineinkommen, was jetzt aber für den Ottonormalschüler nicht nötig ist.*
>
> (Herr L, Absatz 66)
>
> *Wie gesagt, ich finde eben auch diese Begründungen von Sätzen nicht so wichtig. Also die Schüler müssen wissen, dass es die gibt und schon auch irgendwo warum, aber die müssen jetzt nicht bis ins letzte Detail bewiesen haben, warum die Ableitung so und so und… ja. […] Also die Schüler können und verstehen dadurch nicht mehr oder weniger.*
>
> (Frau O, Absatz 60)

In diesem Abschnitt wurde aufgezeigt, wie Herausforderungen in Bezug auf die Schüler beim Argumentieren auftreten können, ohne dass es sich dabei um Schwierigkeiten handelt, die die Schüler selbst beim Argumentieren haben. Besonders wichtig ist hierbei die Heterogenität der Schüler, die eine Herausforderung für die Lehrkräfte darstellt. In vielen Interviews zeigt sich, dass die Lehrkräfte wenig Möglichkeiten kennen, auf diese Heterogenität angemessen zu reagieren. Eine häufige Folge ist, dass das Argumentieren vernachlässigt wird, um insbesondere schwächere Schüler im Unterricht nicht zu „verlieren“ (z. B. Frau H, Absatz 58). Es zeigt sich aber auch als problematisch, dass Lehrkräfte teilweise den Wert gerade theoretischer Argumentationen für die Schüler nicht sehen und sich dies eventuell auch auf die Einstellung von Schülern gegenüber dem Argumentieren auswirkt. Teilweise wird eine solch ablehnende Haltung bei einem Teil der Schüler von den Lehrkräften als Herausforderung beschrieben, der sie gegenüberstehen. Im Vergleich zu den Schwierigkeiten, die die Schüler selbst beim Argumentieren haben, scheint der Bereich der Probleme in Bezug auf die Schüler aber nicht ganz so bedeutend zu sein. Allerdings gibt es vermutlich auch

Zusammenhänge zwischen beiden Bereichen. So wäre es denkbar, dass die Probleme in Bezug auf die Schüler ursächlich sind für Schwierigkeiten, die Schüler beim Argumentieren haben.

5.6 Fazit zu den Erkenntnissen aus der Interviewstudie und Zwischenfazit der Arbeit

Durch die Interviewstudie konnte gezeigt werden, dass die Sichtweisen der befragten Lehrkräfte auf das Argumentieren im Analysisunterricht vielfältige, teilweise auch widersprüchliche Aspekte aufweisen. Diese Sichtweisen setzen sich aus implizitem Verständnis, expliziten Erfahrungen, theoretischen Überzeugungen und ähnlichen Komponenten zusammen. Grundlegend für die Analyse war, das Begriffsverständnis der Lehrkräfte zum Argumentieren mit dem in Abschnitt 2.1 theoretisch herausgearbeiteten Verständnis abzugleichen, um nicht aufgrund der von den Lehrkräften verwendeten Begrifflichkeiten falsche Schlüsse zu ziehen.

Es konnte gezeigt werden, dass die Lehrkräfte die Begriffe *Argumentieren, Begründen* und *Beweisen* und insbesondere auch deren Zusammenhang ganz ähnlich verstehen, wie theoretisch in Abschnitt 2.1.4 dargelegt wurde. Dies bedeutet aber bezüglich der Unterscheidung zwischen *Argumentieren* und *Begründen* nicht zwangsläufig, dass die Lehrkräfte die beiden Begriffe auch immer entsprechend verwendeten. Das wird beispielsweise dadurch deutlich, dass die meisten Lehrkräfte bei der expliziten Nachfrage zur Unterscheidung der Begriffe am Ende der Interviews erst einmal überfordert waren. Deshalb wurden die Begriffe *Argumentieren* und *Begründen* im Kontext der Interviewstudie und deren Auswertung nicht voneinander abgegrenzt. Zudem zeigte sich eine oft negative Konnotation zum meist formal gefassten Begriff *Beweisen*, sodass sich die Entscheidung vorab, diesen Begriff nur dann aufzugreifen, wenn die Lehrkräfte selbst diesen einbringen, als sinnvoll bestätigte. Außerdem ist die Breite des Begriffs *Argumentieren* im Begriffsverständnis der Lehrkräfte teilweise noch breiter gefasst als in Abschnitt 2.1.1 dargestellt und vermutlich sind einzelne Aspekte davon auch anders gewichtet. So wurde zum Beispiel manchmal das Argumentieren mit dem Erklären gleichgesetzt und häufig ein alltagsnahes Argumentieren im Mathematikunterricht positiver bewertet als eine theoretische mathematische Argumentation. Insgesamt zeigte sich im Bewusstsein der Lehrkräfte eine breite Vielfalt an Arten des Argumentierens, an Möglichkeiten der Ausgestaltung von Argumentationen und an Argumentationsanlässen, wobei diese für die Eignung im Analysisunterricht ganz unterschiedlich bewertet wurden.

Die Aussagen der Lehrkräfte in Bezug auf eine vorgelegte Schulbuchdoppelseite, auf der sich sowohl Aufgaben befanden, die explizit zum Argumentieren auffordern als auch solche, die dies nicht tun, zeigen, dass gerade sogenannte Begründungsaufgaben von den Lehrkräften als positiv hervorgehoben wurden. Davon gab es nur eine Ausnahme, eine Aufgabe, die mit den Begriffen *notwendig* und *hinreichend* arbeitet. In Ergänzung zu den Begründungsaufgaben wurden vor allem Standardaufgaben, die kalkülhaft bearbeitet werden können, positiv bewertet.

Neben dieser hypothetischen Auswahl von Schulbuchaufgaben durch die Lehrkräfte wurde während der Interviews immer wieder auch konkret über die tatsächliche Unterrichtspraxis der Lehrkräfte gesprochen. Die fallbasierten Auswertungen der zugehörigen Interviewsegmente zeigen über die verschiedenen Befragten hinweg ähnliche Tendenzen auf. Während Beweisen und theoretischen Herleitungen wenig Bedeutung beigemessen wird, spielen informelle, meist mündliche Argumentationen im Unterricht durchaus eine wichtige Rolle. Einen häufigen Anlass zum Argumentieren stellen Rechen- und Lösungswege dar, die begründet werden. Außerdem sind sogenannte Begründungsaufgaben, die teilweise auch in Leistungserhebungen eingesetzt werden, häufig Ausgangspunkt für Argumentationen, wenn auch nicht ohne Probleme und Schwierigkeiten. Viele Lehrkräfte gehen jedoch von einer Konkurrenz des Argumentierens mit einem kalkül- und verfahrensorientierten Unterricht aus, insbesondere wenn es um die Verteilung der Unterrichtszeit geht. Der Vorrang von schematischem, verfahrensorientiertem Arbeiten und Kalkül wird häufig durch eine Orientierung an den Abiturprüfungen begründet. Die Tendenz, den Mathematikunterricht verfahrensorientiert auszurichten und deshalb argumentativen Tätigkeiten wenig Bedeutung einzuräumen, fand auch Kotelawala (2016) in einer Studie mit Lehrkräften in den USA. Obwohl die teilnehmenden Lehrkräfte dem Argumentieren in der Mathematik generell eine hohe Bedeutung beimaßen, fand Kotelawala bei den meisten Lehrkräften eine Tendenz, die als *procedures-over-proving-in-my-classroom* bezeichnet wird (ebd., S. 1120).

Um zu verstehen, welche Beweggründe, Einstellungen und Erfahrungen der Lehrkräfte hinter der tatsächlichen Praxis stehen und vermutlich auch ursächlich für diese sind, wurden Aspekte analysiert, die von den Lehrkräften in positiver sowie negativer Weise in Bezug auf das Argumentieren geäußert wurden und daraus Gründe für das Argumentieren aber auch Herausforderungen abgeleitet.

Eine Analyse der ausschlaggebenden Gründe dafür, das Argumentieren im Analysisunterricht zu fördern, zeigt vier Bereiche. Für alle Befragten ist das Argumentieren ein persönliches Anliegen. Zudem sehen sie darin eine Bedeutung für die Lernenden und auch Vorteile für das Unterrichten. Außerdem erkennen sie das Argumentieren als typischen mathematischen Prozess, den die Schüler kennenlernen sollten. Letzterer Bereich deckt sich genau mit einem der theoretisch herausgearbeiteten Bereiche von Gründen für das Argumentieren im Analysisunterricht. Aber auch bei den anderen Bereichen sind große Übereinstimmungen zu erkennen. Die Förderung inhaltsbezogener sowie prozessbezogener und überfachlicher Kompetenzen findet sich in der Bedeutung für die Schüler wieder und die Bedeutung für die Lernstandseinschätzung durch Lehrkräfte ist ein Teilbereich der Vorteile für das Unterrichten. Die von den Lehrkräften genannten Gründe sind also dementsprechend sogar vielfältiger als die theoretisch herausgearbeiteten. Andererseits nannten die Lehrkräfte Gründe oft nur ansatzweise, ohne diese so detailliert ausführen und begründen zu können, wie dies in der Literatur zu finden ist.

Demgegenüber stehen viele negative Aussagen der Lehrkräfte, die Probleme, Schwierigkeiten und negative Erfahrungen der Lehrkräfte mit dem Argumentieren deutlich werden lassen. Diese umfassen Rahmenbedingungen, wie zeitliche Einschränkungen und die notwendige Vorbereitung auf bevorstehende Abiturprüfungen, sowie Schwierigkeiten, die sich für die Unterrichtstätigkeiten der Lehrkräfte ergeben. Besonders ausführlich berichteten die Befragten aber von Schwierigkeiten, die sich für und in Bezug auf die Schüler ergeben.

Ein Bereich, der dabei an verschiedenen Stellen angesprochen wurde, sind Schwierigkeiten, die sich im Zusammenhang mit Leistungserhebungen und den bevorstehenden Abiturprüfungen ergeben. Dadurch dass in der Sekundarstufe II eine Vorbereitung auf die bevorstehenden Abiturprüfungen stattfindet, werden im Unterricht insbesondere Fertigkeiten trainiert und Verfahren eingeübt, die Schüler direkt auf die zu erwartenden Aufgaben vorbereiten. Da in den Prüfungen das Argumentieren keinen großen Stellenwert zu besitzen scheint, überträgt sich dies auch auf den Unterricht. Aber auch im Bereich der Leistungserhebungen während des Schuljahres zeigen sich Schwierigkeiten für Lehrkräfte und Schüler. Erstere finden es teilweise schwierig, geeignete Argumentationsaufgaben zu stellen, die den Schülern eindeutig deren Erwartungshorizont deutlich machen. Letztere haben genau mit dem Erkennen dieses Erwartungshorizontes Schwierigkeiten. Außerdem sehen sich die Lehrkräfte mit Problemen bei der Korrektur entsprechender Aufgaben konfrontiert. Schüler haben laut Angaben der Lehrkräfte insgesamt Schwierigkeiten mit argumentativen Aufgabenstellungen. Dies betrifft neben dem Erkennen des Erwartungshorizontes den gesamten Argumentationsprozess mit seinen aktiven und passiven Aspekten. Vor allem Schwierigkeiten der Schüler mit der Sprache wurden von den Lehrkräften in verschiedenen Zusammenhängen erwähnt. Dabei spielen insbesondere die Fachsprache und das (schriftliche) Formulieren von präzisen Argumentationen eine zentrale Rolle. Ein weiterer wichtiger Aspekt, der sich in Bezug auf die Schüler zeigt, ist die heterogene Zusammensetzung der Klassen. Die Heterogenität der Schüler stellt die Lehrkräfte vor große Herausforderungen. Es scheint, dass es den Lehrkräften an Strategien fehlt, allen Schülern beim Argumentieren im Analysisunterricht gleichermaßen gerecht zu werden und jeden adaptiv auf seinem individuellen Niveau zu fördern. Dies resultiert häufig in einer Orientierung an den leistungsschwächeren Schülern und in Zusammenhang damit in einer Vermeidung argumentativer Tätigkeiten im Unterricht.

Es kann angenommen werden, dass alle von den Lehrkräften angesprochenen Herausforderungen in ihrer Gesamtheit ursächlich dafür sind oder zumindest dazu beitragen, dass Lehrkräfte das Argumentieren im Analysisunterricht nicht in einem Maße fördern, das sinnvoll wäre. Teilweise zeigt sich durch Interviewsegmente, in denen die Lehrkräfte über ihre Vorstellungen für einen idealen Analysisunterricht sprechen, dass die Lehrkräfte sich dessen auch bewusst sind. Nichtsdestotrotz sind auch Einstellungen und Überzeugungen der Lehrkräfte gegenüber dem Argumentieren möglicherweise nicht positiv genug, um ausreichend gegen die Probleme und Schwierigkeiten vorzugehen. Dazu kommt, dass möglicherweise auch die Kenntnis der Lehrkräfte über entsprechende Möglichkeiten fehlt.

Davon ausgehend werden im dritten Teil dieser Arbeit dominante Schwerpunkte aus den Schwierigkeiten und Problemen, die aus den Interviews herausgearbeitet werden konnten, aufgegriffen, um konstruktiv Vorschläge für das Argumentieren im Analysisunterricht zu entwickeln. Hierfür werden die Schwerpunkte *Heterogenität der Schüler* und *Schwierigkeiten der Schüler mit der Sprache* herausgegriffen. Außerdem spielen begleitend weitere Aspekte, wie das Erkennen des Erwartungshorizontes durch die Schüler und verschiedene Schritte eines Argumentationsprozesses, eine Rolle. Dazu werden erst entsprechende Möglichkeiten zu Differenzierung, Sprache und Lösungsbeispielen theoretisch herausgearbeitet (siehe Kap. 6), die dann in der Entwicklung einer adäquaten Lernumgebung angewendet werden (siehe Kap. 7), und schließlich werden in einer zweiten Studie mit Lehrkräften die Lernumgebung und deren Einsatz evaluiert (siehe Kap. 8).

Teil III

Entwicklung und Evaluation einer Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht

6 Theoretische Grundlagen für die Entwicklung einer Lernumgebung zum Argumentieren im Analysisunterricht

Um die Entwicklung der Kompetenz des mathematischen Argumentierens bei Schülern zu unterstützen, ist es wichtig, geeignete Unterrichtsmaterialien dafür zu entwickeln (z. B. Reiss et al. 2006, S. 194). Auf Grundlage der Erkenntnisse aus der Interviewstudie (siehe Kap. 5) wurde deshalb eine differenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen entwickelt. Bevor die konkrete Ausgestaltung der Lernumgebung präsentiert (Kap. 7) und über die qualitative Studie zu deren Evaluation berichtet wird (Kap. 8), werden in diesem Kapitel die dabei zugrunde liegenden theoretischen Überlegungen dargestellt. Zunächst wird kurz der Begriff der Lernumgebung geklärt, bevor diejenigen Grundlagen aus den Themenbereichen *Differenzierung*, *Sprache im Mathematikunterricht* und *Lernen aus Lösungsbeispielen* präsentiert werden, die für die Ausarbeitung der spezifischen Charakteristika der anschließend dargestellten Lernumgebung von Bedeutung sind.

6.1 Lernumgebungen im Mathematikunterricht

Der Begriff *Lernumgebung* wird innerhalb der Mathematikdidaktik und auch in ihren Bezugswissenschaften Psychologie und Mediendidaktik nicht einheitlich verwendet. Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über unterschiedliche Verständnisse des Begriffs und schließt mit einem für diese Arbeit verwendeten Begriffsverständnis.

Eine auch in der Didaktik vielzitierte Definition des Begriffs stammt aus der Psychologie:

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_6

> *Der Begriff der Lernumgebung bringt zum Ausdruck, dass das Lernen von ganz verschiedenen Kontextfaktoren abhängig ist, die in unterschiedlichem Ausmaß planvoll gestaltet werden können. Eine durch Unterricht hergestellte Lernumgebung besteht aus einem Arrangement von*
> *Unterrichtsmethoden*
> *Unterrichtstechniken*
> *Lernmaterialien*
> *Medien.*
> *Dieses Arrangement ist durch die besondere Qualität der aktuellen Lernsituation in zeitlicher, räumlicher und sozialer Hinsicht charakterisiert und schließt letztlich auch den jeweiligen kulturellen Kontext ein.*
>
> (Reinmann-Rothmeier/Mandl 2001, S. 603 f.)

Für den Bereich der Mathematikdidaktik fassen Vollrath und Roth (2012) zusammen, dass es keine einheitliche Definition von *Lernumgebung* gibt, dass aber der gemeinsame Nenner ein „zur Unterstützung von Lernprozessen planvoll gestaltetes Gesamtarrangement" (ebd., S. 150) ist. Sie führen dann Gütekriterien und Aspekte an, die bei der Entwicklung und Beurteilung von Lernumgebungen berücksichtigt werden müssen. Wenn in mathematikdidaktischen Arbeiten der Begriff *Lernumgebung* definiert wird, ist eine Konzeption des Begriffs als Gesamtarrangement üblich (Ulm 2009; Barzel et al. 2005, S. 30; Hirt/Wälti 2016, S. 12 f.). Eine häufig zitierte Definition in diesem Bereich ist die von Barzel und Kollegen:

> *Lernumgebungen (im weiten Sinne) sind im Grunde alles, was den Lernenden von außen instruiert. Dazu gehören Inhalte, Ziele, Kommunikationsformen u.a., die durch die Lehrperson oder die Lernenden vorstrukturiert bzw. festgelegt sind und die den Rahmen bieten für die Lernprozesse der Einzelnen oder der Gruppe.*
>
> (Barzel et al. 2005, S. 30)

Diese sehr breit angelegte Definition ermöglicht, jegliche Zusammenstellungen von Inhalten, Zielen, Kommunikationsformen und weiteren Teilen der Unterrichtsplanung als *Lernumgebung* zu bezeichnen, solange diese vorstrukturiert und festgelegt sind und einen Rahmen für Lernprozesse bieten. Damit wäre jedes vorab geplante Unterrichtsvorhaben eine Lernumgebung. Auffällig ist, dass in dieser Definition Ziele als *Teil* von Lernumgebungen auftreten und nicht als Grundlage für deren Entwicklung und Ausgestaltung.

Anstelle von oder ergänzend zu Definitionen finden sich häufig Auflistungen von Gütekriterien oder Aspekten, die bei der Gestaltung sowie Beurteilung von Lernumgebungen zu bedenken sind (z. B.: Wittmann 1998, S. 337 f.; Barzel 2006, S. 109 ff.; Ulm 2009; Vollrath/Roth 2012, S. 151; Hirt/Wälti 2016,

S. 13). Bei vielen Autoren wird der Begriff *Lernumgebung* explizit oder implizit sehr weit gefasst, sodass er die Rolle eines Sammelbegriffs übernimmt und dann durch spezielle Attribute weiter ausdifferenziert und charakterisiert wird. So finden sich in der Literatur viele so verwendete Attribute, beispielsweise *problemorientiert*, *aufgabenbasiert*, *situiert*, *konstruktivistisch*, *digital*, *selbständigkeitsorientiert*, *internetbasiert*, *computergestützt*, *selbstdifferenzierend* oder *substanziell* (Barzel et al. 2005, S. 30; Bruder 2007; Schukajlow/Blum 2018, S. 4 ff.; Vollrath/Roth 2012, S. 150 f., S. 218 ff.; Kerres 2001, S. 33 f.; Roth 2015, S. 8; Hirt/Wälti 2016, S. 13).

Auffallend ist, dass im Bereich der Mathematikdidaktik für die Primarstufe üblicherweise ein etwas engerer Lernumgebungsbegriff verwendet wird. Eine verbreitete Definition in diesem Bereich ist die von Hirt und Wälti (2016), die in ähnlichen Formulierungen auch schon früher veröffentlicht wurde:

> *Eine Lernumgebung für den Mathematikunterricht ist im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung dessen, was man im Mathematikunterricht traditionell eine ‚gute bzw. eine substanzielle Aufgabe' nennt. Substanzielle Aufgaben sind ein wesentliches Merkmal und eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung zur Gestaltung erfolgreichen Mathematikunterrichts.*
> *Eine Lernumgebung ist eine flexible große Aufgabe. Sie besteht in der Regel aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen, die durch bestimmte Leitgedanken – immer basierend auf einer innermathematischen oder sachbezogenen Struktur – zusammengebunden sind. Der Terminus beschreibt als Erweiterung des üblichen Begriffs ‚Aufgabe' somit im Wesentlichen eine Unterrichtssituation mit Zielen, Inhalten und Vorgehensweisen bzw. Tätigkeiten der Lehrperson wie auch der Schülerinnen und Schüler.*
>
> (Hirt/Wälti 2016, S. 13)

Ein wesentliches Merkmal in diesem Verständnis, das sich ähnlich auch bei Wollring (2007, S. 5) findet, ist die Idee einer erweiterten substanziellen Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung, die einen inhaltlichen Leitgedanken verfolgt. Diese Erweiterung weist dann durch Hinzunahme von Zielen, Inhalten, Vorgehensweisen und Tätigkeiten auch in Richtung des sehr weiten Verständnisses von oben, jedoch aus der Perspektive von erweiterten Aufgaben betrachtet. Des Weiteren basiert eine Lernumgebung im Primarbereich üblicherweise auf einer konstruktivistischen Grundposition, stützt die Idee der Kompetenzorientierung und dient der Differenzierung (Hengartner 2007, S. 11 ff.; Hirt/Wälti 2016, S. 12 f.). Diese Eigenschaften würden in einem weiteren Verständnis des Begriffs eher durch zusätzliche Attribute wie *konstruktivistisch, kompetenzorientiert* und (*selbst-)differenzierend* ausgedrückt werden. Auf Wittmann (1995, 1998) zurückgehend findet sich im Primarbereich außerdem der Begriff der *substanziellen*

Lernumgebung, der die Güte einer Lernumgebung oder Unterrichtseinheit zum definierenden Element erhebt (Wittmann 1995, S. 528; 1998, S. 337 f.).

Die Idee, dass eine Aufgabe den Mittelpunkt einer Lernumgebung zur nachhaltigen Kompetenzentwicklung bildet, findet sich auch im Bereich der Sekundarstufe bei Bruder (2007), die dafür den Begriff *aufgabenbasierte Lernumgebung* wählt. Durch eine solche werden Lernende dazu angeregt, sich eine Lernaufgabe zu stellen und sich eine Handlungsorientierung zur Bewältigung dieser Lernaufgabe zu erarbeiten (ebd., S. 720).

Auch im Bereich des digitalen Lernens wird häufig der Begriff der Lernumgebung verwendet, sowohl innerhalb der Mathematikdidaktik als auch in der Bezugswissenschaft der Mediendidaktik. Oft wird der Begriff *Lernumgebung* dabei mit Adjektiven wie *digital, computergestützt, medial, interaktiv, dynamisch* oder *internetbasiert* spezifiziert, teils aber auch ohne Attribute verwendet (Kerres 2001, S. 33; Barzel et al. 2005; Barzel 2006, S. 84; Meier 2009; Vollrath/Roth 2012, S. 218; Roth 2015, S. 8). Computer- oder internetgestützte Lernumgebungen können weiter ausdifferenziert werden in interaktive Arbeitsblätter und Lernpfade. Interaktive Arbeitsblätter bestehen aus nur einer Internetseite, in die ein Applet und mögliche Hilfestellungen eingebunden sind. Lernpfade, die auch als dynamische Lernumgebungen bezeichnet werden, bestehen aus ganzen Sequenzen interaktiver Materialien (Vollrath/Roth 2012, S. 218 ff.; Roth 2015, S. 8).

In Zusammenschau der unterschiedlichen Verwendungen des Begriffs *Lernumgebung* wird deutlich, dass für die Verwendung in der vorliegenden Arbeit eine Begriffsklärung notwendig ist. Dabei ist ein zu weit gefasster Begriff ungünstig, da er die Gefahr der Beliebigkeit birgt und eine Abgrenzung zur begrifflichen Verwendung in anderen Arbeiten verhindert. Ein zu enger Begriff kann dagegen nicht so einfach auf verschiedene Situationen übertragen werden, beispielsweise wenn Eigenschaften wie *selbstdifferenzierend* oder *digital* mit in die Definition genommen werden. Diese könnten für die konkrete Entwicklung einer Lernumgebung zu stark einschränkend wirken und sollten deshalb besser in Form von zusätzlichen Attributen verwendet werden. Aufgrund dieser Überlegungen wird der Begriff *Lernumgebung* in der vorliegenden Arbeit folgendermaßen verwendet:

Eine *Lernumgebung* wird als Gesamtarrangement von Inhalten, Prozessen, Materialien, Medien, Unterrichtsmethoden, Sozialformen, Kommunikationsformen sowie intendierten Tätigkeiten von Lehrperson und Lernenden verstanden, das einen Kompetenzzuwachs bei Lernenden ermöglichen soll. Dieses Gesamtarrangement unterliegt einem Leitgedanken, der sowohl inhalts- als auch prozessbezogen ist und mit Hilfe dessen die Lernumgebung strukturiert wird.

Dies kann sinnvollerweise durch eine zentrale Aufgabe innerhalb der Lernumgebung umgesetzt werden, die aus mehreren Teilaufgaben besteht, die durch diesen Leitgedanken verbunden sind. Die explizite Gestaltung einer Lernumgebung ist abhängig vom zugrunde liegenden Verständnis von Lernen und wird deshalb in einem kompetenzorientierten Setting aus der Perspektive der Lernenden heraus entwickelt. Zur Betonung der Charakteristika von Lernumgebungen mit unterschiedlichen Schwerpunkten werden zusätzliche Attribute, beispielsweise *(selbst-)differenzierend, aufgabenbasiert, digital* oder *zur Förderung von…*, verwendet. Beim konkreten Einsatz einer Lernumgebung muss dann auch das soziale, kulturelle, zeitliche und räumliche Umfeld des Lernprozesses und der Zusammenhang zu anderen Lernumgebungen mit in die Überlegungen einbezogen werden.

Auf dieser Grundlage wurde für die vorliegende Arbeit unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Lehrerinterviews (siehe Kap. 5) am Beispiel der Ableitung ganzrationaler Funktionen eine selbstdifferenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zur Förderung der Argumentationskompetenz von Lernenden entwickelt. Die theoretischen Grundlagen zu Differenzierung, Sprachförderung und zum Lernen mit Lösungsbeispielen werden in den nächsten Abschnitten dargelegt, bevor in Kapitel 7 die konkrete Entwicklung der Lernumgebung präsentiert wird.

6.2 Differenzierung

In der Interviewstudie (siehe Kap. 5) zeigte sich, dass ein möglicher Problembereich bei der Umsetzung des Argumentierens im Analysisunterricht darin begründet ist, dass Lehrkräfte Schwierigkeiten haben, der Heterogenität der Schüler beim Argumentieren gerecht zu werden. Laut Siller und Roth (2016, S. 2) ist „[d]ie zentrale Frage beim Umgang mit Heterogenität […], wie mit möglichst allen Lernenden einer Lerngruppe konstruktiv und entwicklungsfördernd gearbeitet werden kann“. Diese Frage führt automatisch zum Begriff der *Differenzierung*, einem „Sammelbegriff für alle pädagogischen, didaktischen und organisatorischen Maßnahmen, die sich treffen lassen, um Unterschieden zwischen Schülern gerecht zu werden“ (Heymann 1991, S. 63). Scholz (2008, S. 9) plädiert: „Statt den Unterricht an einem fiktiven Durchschnittsschüler auszurichten, gilt es also, sich der Heterogenität bewusst zu werden und ihr so weit wie möglich Rechnung zu tragen“. Durch die Lehrerinterviews konnte gezeigt werden, dass sich die Lehrkräfte der Heterogenität der Schüler, insbesondere bezüglich des inhaltlichen Vorwissens und der Kompetenz des Argumentierens, durchaus bewusst sind. Bei der Umsetzung des Argumentierens stellt diese Heterogenität aber einen Problembereich dar. Deshalb werden in diesem dritten Teil der vorliegenden Arbeit Überlegungen angestellt, wie beim Argumentieren im Analysisunterricht mittels Differenzierung auf die Heterogenität der Schüler reagiert werden kann, um durch individualisiertes Lernen eine bestmögliche Förderung jedes einzelnen Schülers zu erreichen und so von einem „Lernen im Gleichschritt" wegzukommen (vgl. Siller/Roth 2016, S. 3; Leuders/Prediger 2016, S. 9). In diesem Abschnitt wird ausgehend von einer allgemeinen Begriffsklärung, über speziell mathematikdidaktische Differenzierungsansätze, speziell zur Differenzierung durch Aufgaben hingeleitet. Besonderes Augenmerk wird anschließend auf Blütenaufgaben gelegt, da dieses Aufgabenformat wegen seines großen Differenzierungspotenzials für die Entwicklung einer konkreten Lernumgebung (siehe Kap. 7) ausgewählt wurde.

6.2.1 Begriffsklärung

Nach Bönsch (1995) wird unter Differenzierung Folgendes verstanden:

> *[E]inmal das variierende Vorgehen in der Darbietung und Bearbeitung von Lerninhalten […], zum anderen die Einteilung bzw. Zugehörigkeit von Lernenden zu Lerngruppen nach bestimmten Kriterien. Es geht um die Einlösung des Anspruchs, jedem Lernenden auf optimale Weise Lernchancen zu bieten, dabei die Ansprüche und Standards in fachlicher, institutioneller und gesellschaftlicher Hinsicht zu sichern und gleichzeitig lernorientiert aufzubereiten. Differenzierung stellt sich für die Organisation von Lernprozessen als Bündel von Maßnahmen dar, Lernen in fachlichem, organisatorischem, institutionellem wie individuellem und sozialem Bezug zu optimieren.*
>
> (Bönsch 1995, S. 21)

Die im Nachfolgenden beschriebenen Unterscheidungen bezüglich des Differenzierungsbegriffs sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Eine allgemein anerkannte Unterscheidung sowohl in der Pädagogik als auch in der Fachdidaktik ist die zwischen äußerer und innerer Differenzierung, wobei letztere meist mit dem Begriff der Binnendifferenzierung gleichgesetzt wird. Äußere Differenzierung meint, dass die Lernenden nach Kriterien wie Alter oder Leistungsvermögen organisatorisch in möglichst homogene Lerngruppen eingeteilt werden, die dann über einen längeren Zeitraum bestehen. Innerhalb dieser durch äußere Differenzierung entstandenen Lerngruppen setzt dann Binnendifferenzierung mit methodischen und didaktischen Ansätzen an. Sie kann nach unterschiedlichen Kriterien umgesetzt werden und ist nicht dauerhaft. Ziel ist es, den Lernenden individuell gerecht zu werden und dabei die Chancen einer heterogenen Lerngruppe zu nutzen (Heymann 1991; Bönsch 1995; Paradies/Linser 2005; Bruder/Reibold 2010; Eisenmann/Grimm 2011; Scholz 2008; Leuders/Prediger 2016).

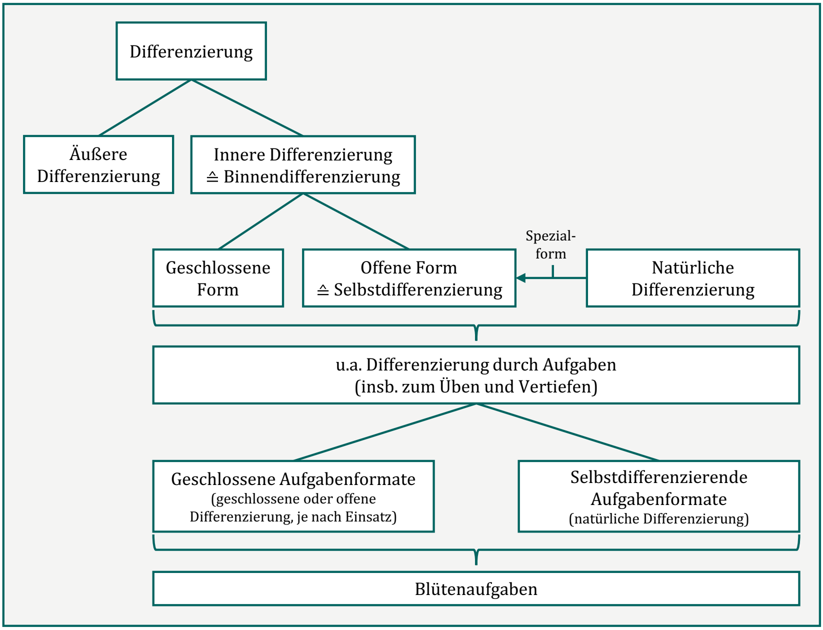


Abbildung 6.1 Unterscheidungen bezüglich des Differenzierungsbegriffs mit Einordnung von Blütenaufgaben

Der Begriff der inneren Differenzierung wird auf Heymann (1991) zurückgehend weiter unterschieden in eine geschlossene und eine offene Form. Bei der geschlossenen Binnendifferenzierung wird jedem Schüler entsprechend seiner kognitiven Leistung ein individueller Lernweg zugewiesen. Die Lehrkraft übernimmt somit die Alleinverantwortung für die Adaptivität des Lernangebotes. Bei der offenen Form der Differenzierung, die in der Mathematikdidaktik häufig auch als *Selbstdifferenzierung* bezeichnet wird, sollen hingegen die Schüler selbst ihre individuellen Lernwege finden. Die Verantwortung für die Adaptivität des Lernangebotes liegt also bei den Lernenden (Leuders/Prediger 2012, S. 37; Hußmann/Prediger 2007, S. 2). Nach Heymann (1991) ist diese idealtypische Unterscheidung aber mehr theoretischer Natur, in der Praxis werden meist Mischformen verwendet.

Ein Vergleich von geschlossener und offener Differenzierung zeigt, dass eine rein geschlossene Differenzierungsform aus mehreren Gründen problematisch ist. Die Lehrkraft muss genügend diagnostische Kompetenz mitbringen, um adaptiv jedem Schüler die passenden Materialien zuzuweisen. Werden die Lernangebote durch mangelhafte Diagnose oder aus anderen Gründen nicht adaptiv eingesetzt, können durch Über- oder Unterforderung die eigentlichen Ziele der Differenzierungsmaßnahmen nicht mehr erreicht werden (Leuders/Prediger 2012, S. 56). Außerdem ist eine „passgenaue, individuelle Zuweisung von Lernangeboten für jeden Schüler und jede Schülerin einer Klasse durch eine Lehrkraft auch gar nicht leistbar“ (Bruder/Reibold 2012, S. 75 f.). Im Gegensatz dazu haben selbstdifferenzierende Angebote den Vorteil, dass jeder Schüler auf seinem eigenen Niveau in seiner eigenen Geschwindigkeit lernen kann. Dadurch sind unterschiedliche Bearbeitungstiefen und Reflexionsniveaus möglich und prozessbezogene Kompetenzen können gefördert werden (Leuders/Prediger 2012, S. 58). Auch Bruder und Reibold (2012) sehen „keine ernsthafte Alternative zu einer ‚offenen‘ Differenzierung“ (ebd., S. 75), da „die allgemeinen Kompetenzziele einen mündigen Bürger favorisieren, der über seine Geschicke selbst entscheiden kann, was im Allgemeinen erst gelernt werden muss“ (ebd., S. 75). Prediger und Scherres (2012) haben jedoch gezeigt, dass offene Differenzierungsformate im Mathematikunterricht nicht automatisch adaptiv für Differenzierung sorgen. Es ist vielmehr notwendig, dass die Lehrkraft unterstützend tätig wird, um für niveauangemessenes Arbeiten zu sorgen und Lernende an das offene Arbeiten heranzuführen.

In der Mathematikdidaktik findet als Spezialform der Selbstdifferenzierung das Konzept der natürlichen Differenzierung Beachtung. Dieses geht auf Wittmann (1990) zurück, wurde im Projekt *mathe 2000* entwickelt und nach dem „natürlichen Lernen“ außerhalb der Schule benannt (Wittmann 2007, S. 5; Wittmann/Müller 2008, S. 15). Dabei erhält „[d]ie gesamte Lerngruppe […] einen Arbeitsauftrag, der den Kindern Wahlmöglichkeiten bietet“ (Wittmann/Müller 2008, S. 15). Dieser Arbeitsauftrag ermöglicht eine „ganzheitliche […] Bearbeitung von Themen[, bei der] immer Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsniveaus anfallen, […] [sodass] sich **alle** Schüler, von lernschwachen bis leistungsstarken, nach ihren Möglichkeiten beteiligen [können]“ (Wittmann 1990, S. 159, Hervorhebung im Original). Im Zuge dessen plädiert Wittmann (1996, S. 5) für einen offenen Unterricht vom Fach aus, womit gemeint ist, dass die

Mathematik selbst solch offene Problemstellungen bietet, die auf unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen bearbeitet werden können. So können sich Lernende in heterogenen Gruppen „wenn auch in unterschiedlicher Weise, so doch mit denselben Aufgaben beschäftigen, sodass innerhalb der Gruppen ein Austausch möglich ist und in Reflexionsphasen auf ähnliche Erfahrungen zurückgegriffen werden kann“ (Wittmann 2007, S. 6).

6.2.2 Aufgabenbasierte Differenzierung im Mathematikunterricht

Wie bereits in Bezug auf die natürliche Differenzierung angedeutet, stellen Aufgaben im Mathematikunterricht ein wichtiges Mittel zur Differenzierung dar. Gerade beim Argumentieren können Aufgaben wesentlich zur Differenzierung beitragen, wie die folgenden Beispiele zeigen. Bezold (2009, S. 104 f., 111) entwickelte anforderungsdifferenzierte Aufgaben, die innerhalb eines gemeinsamen inhaltlichen Kontextes Anforderungen auf unterschiedlichen Niveaus stellen, wobei der Begriff *anforderungsdifferenziert* synonym zum Begriff *selbstdifferenzierend* verwendet wird. Speziell arbeitet sie mit sogenannten *Forscheraufgaben*, die Schülern Entdeckungen ermöglichen, Argumentationspotenzial bieten und eine natürliche Differenzierung ermöglichen. In einer Studie konnte Bezold zeigen, dass durch die Arbeit mit Forscheraufgaben in ihrem Unterrichtskonzept zur Förderung von Argumentationskompetenz die Selbsttätigkeit der Schüler gesteigert werden kann. Auch die Lehrkräfte empfanden die Erfahrungen mit diesen Aufgaben als positiv. Aus Bezolds Studie kann also abgeleitet werden, dass geeignete Aufgaben eine Differenzierung beim Argumentieren ermöglichen.

Während sich die Ideen von Wittmann/Müller (u. a. 2008) und Bezold (2009) auf die Primarstufe beziehen, zeigt Schindler (2016) auf, wie auch in der Sekundarstufe eine Begründungsaufgabe („*Betrachte die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen. Was fällt dir auf? Begründe/beweise deine Entdeckung.*“ (ebd., S. 20) für natürliche Differenzierung sorgen kann, indem bei der Lösung der Aufgabe unterschiedliche Bearbeitungswege und Darstellungsebenen möglich sind.

Aufgaben sind außerdem ein wesentlicher Bestandteil der theoretischen Überlegungen zur Differenzierung von Leuders und Prediger (2012, 2016). Sie unterscheiden Differenzierungsansätze nach Prozessen mathematischen Erkenntnisgewinns. Das heißt sie unterscheiden Differenzieren beim Anknüpfen, beim Erkunden, beim Austauschen, beim Ordnen und beim Vertiefen. Das Differenzieren beim Vertiefen unterscheiden sie wiederum in Differenzieren durch

Aufgaben und Differenzieren durch Strukturen. Außerdem sortieren Leuders und Prediger (2016) Differenzierungsansätze nach Unterrichtsphasen (Erarbeiten, Systematisieren, Üben und Wiederholen, Überprüfen), nach Differenzierungszielen, nach Differenzierungsaspekten (welche Aspekte von Heterogenität sollen in den Blick genommen werden?), nach Differenzierungsformaten (geschlossen/offen) und nach Differenzierungsebenen (Differenzierung mit Aufgaben, mit Methoden/Arbeitsformen/Sozialformen, mit Unterrichtsstrukturen). Aufgaben stellen demnach sowohl eine Differenzierungsebene dar als auch eine Möglichkeit, beim Vertiefen zu differenzieren.

Weiter unterscheiden Leuders und Prediger (2012) beim Differenzieren durch Aufgaben in geschlossene und selbstdifferenzierende Aufgabenformate (siehe Abb. 6.1). Bei geschlossenen Aufgaben liegt die Verantwortung für das Differenzierungspotenzial bei der Lehrkraft, die entweder im Sinne einer geschlossenen Differenzierung den einzelnen Schülern die passenden Aufgaben zuweisen muss oder die Schüler dabei unterstützen muss, im Sinne einer offenen Differenzierung für sich selbst die passenden Aufgaben auszuwählen. Selbstdifferenzierende Aufgaben sind hingegen offene Aufgaben, die von den Lernenden auf unterschiedlichen Niveaus, mit unterschiedlichen Herangehensweisen und Lösungswegen und in unterschiedlicher Tiefe bearbeitet werden können (Leuders/Prediger 2012, S. 55 ff.; Büchter/Leuders 2005, S. 111 f.). Büchter und Leuders (2005, S. 111 f.) zeigen Beispiele für Situationen auf, in denen dies gut gelingen kann: So können funktionale Zusammenhänge durch Rückgriff auf unterschiedliche Darstellungsformen untersucht oder Gleichungen mit Hilfe unterschiedlicher Lösungsstrategien gelöst werden. Auch für geometrische Probleme gibt es unterschiedliche Zugangsweisen, wie Ausprobieren, Konstruieren oder abstraktes Argumentieren.

Selbstdifferenzierende Aufgabenformate haben den Vorteil, dass sie adaptiv allen Lernenden gerecht werden können und gleichzeitig prozessbezogene Kompetenzen fördern (Leuders/Prediger 2012, S. 55 ff.). Selbstdifferenzierende Aufgaben können somit eine natürliche Differenzierung ermöglichen. Der Einsatz selbstdifferenzierender Aufgaben muss aber auch auf die Klasse abgestimmt sein. Besteht beispielsweise bei einzelnen Lernenden noch ein vertiefter Förderbedarf im Bereich des Grundverständnisses von Inhalten, so kann dieser nicht allein durch selbstdifferenzierende Aufgaben abgedeckt werden (Leuders/Prediger 2012, S. 58).

Leuders und Prediger (2016) differenzieren die Unterscheidung von geschlossenen und selbstdifferenzierenden Aufgaben weiter aus und stellen vier nach ihrer äußeren Struktur verschiedene differenzierende Aufgabentypen vor: paralleldifferenzierende Aufgaben, gestuft differenzierende Aufgaben, selbstdifferenzierende

Aufgaben und Aufgabengruppen mit Wahl und Pflicht. Paralleldifferenzierende Aufgaben gehören zu den geschlossenen Aufgabenformaten und sind so gestaltet, dass Schüler an verschiedenen, aber inhaltlich parallelen Aufgaben arbeiten können. Es handelt sich also um unterschiedliche Varianten der gleichen Aufgabe. Gestuft differenzierende Aufgaben sind in sich dadurch gestuft, dass sie unterschiedliche Niveaus von Anfangs- und vor allem Endpunkten aufweisen, sodass es beispielsweise eine Grundaufgabe für alle und optionale weiterführende Aufgaben gibt oder eine verständnissichernde Einstiegsaufgabe für leistungsschwächere Schüler und dann eine Kernaufgabe für alle. Der dritte Typus besteht aus selbstdifferenzierenden Aufgaben, die so gestaltet sind, dass alle Lernenden dieselbe Aufgabe bearbeiten können, aber auf unterschiedlichen Niveaus der Lernwege. Als viertes stellen Leuders und Prediger Aufgabengruppen mit Wahl und Pflicht vor, bei denen Lernende selbst eine Auswahl treffen dürfen. Diese Aufgabengruppen werden zu offenen Differenzierungsformaten gerechnet und ermöglichen somit auch eine Selbstdifferenzierung, aber durch die Auswahl der Aufgaben, nicht wie bei den selbstdifferenzierenden Aufgaben durch die Auswahl von Lernwegen.

6.2.3 Blütenaufgaben

Ein spezielles Aufgabenformat, das sich zur Differenzierung im Mathematikunterricht eignet, sind Blütenaufgaben[1], die in Abbildung 6.1 in das Gerüst zum Überblick über Differenzierung eingeordnet sind. Das Konzept dieser Aufgaben wurde von Bruder und Kollegen im Rahmen eines Projektes entwickelt

[1] Die verwendete Metapher einer Blüte wird unterschiedlich erklärt: Laut Bruder (2008, S. 42) erinnert der Aufbau der Aufgabe an das Wachsen einer blühenden Pflanze, die sich in verschiedene Richtungen entwickelt. Dabei (und auch von Bruder und Reibold (2010, S. 6) und Bruder und Kollegen (2015, S. 527)) wird auf Schupp (2002) verwiesen. Dieser benutzt das Bild einer sich öffnenden Blüte im Bereich von Aufgabenvariationen durch Schüler als Gegenentwurf zum Bild eines Trichters. Er schlägt vor, im Gegensatz zu einer anfänglichen Offenheit einer Problemstellung, die dann zu einer geschlossenen Aufgabe eingeengt wird, eine sich öffnende Problemstellung zu verwenden, bei der nach einem herkömmlichen Einstieg eine allmähliche Öffnung erfolgt. Analog nimmt der Grad der Offenheit über die Teilaufgaben von Blütenaufgaben hinweg zu. Von Bruder (2013) wird die Metapher der Blüte so erklärt, „dass eine wachsende Pflanze erst eine Blüte treibt und danach weiter in die Höhe wächst und die nächsten Blüten sich öffnen. Die Blüten weisen in verschiedene Richtungen, die unterschiedliche Aspekte oder Blickwinkel zum Thema und mathematischen Kern beschreiben" (Bruder 2013, S. 38).

(Bruder 2008; Bruder/Reibold 2010; 2011; 2012; Bruder et al. 2015). „Die Grundidee der Blütenaufgaben besteht […] darin, mit den Lernenden gemeinsam, wenn auch in unterschiedlicher Verarbeitungstiefe, an demselben mathematischen Unterrichtsthema zu arbeiten“ (Bruder et al. 2015, S. 527). Blütenaufgaben sind binnendifferenzierende Aufgaben, die ein einheitliches Thema aus unterschiedlichen Blickwinkeln beleuchten. Die erste Teilaufgabe ermöglicht einen geschlossenen, niedrigschwelligen Einstieg. Das Anforderungsniveau und die Offenheit steigen über die weiteren Teilaufgaben hinweg an (Bruder 2008, S. 42; Bruder/Reibold 2012, S. 84). Die letzten Teilaufgaben bieten ein „erweiterndes Lernangebot“ (Grave/Thiemann 2010, S. 18) für leistungsstärkere Schüler. Dabei sind die Teilaufgaben voneinander unabhängig, sodass leistungsstärkere Schüler auch Teilaufgaben überspringen könnten. Deshalb bezeichnen Bruder und Reibold (2012) Blütenaufgaben als „besondere Form der Wahlaufgaben in der offenen Differenzierung“ (ebd., S. 84). Blütenaufgaben als ganze sind selbstdifferenzierend, durch ihren speziellen Aufbau enthalten sie aber sowohl geschlossene als auch selbstdifferenzierende Teilaufgaben (Bruder 2008, S. 45 f., S. 49). Leuders und Prediger (2016, S. 138) ordnen sie in ihrer Typologie im Bereich der gestuft differenzierenden Aufgaben ein. Da aber durch die öffnende Struktur mindestens die letzte Teilaufgabe als selbstdifferenzierend eingestuft werden kann, und auch die vorangehenden Aufgaben hinsichtlich der möglichen Lösungsansätze unterschiedliche Bearbeitungen zulassen können, ist eine Abgrenzung zu selbstdifferenzierenden Aufgaben in der Typologie von Leuders und Prediger nicht möglich.

Bruder und Kollegen (2015, S. 527) schlagen ein Konstruktionsmuster für die Erstellung von Blütenaufgaben vor. Die erste Teilaufgabe bietet durch eine einfache Grundaufgabe einen niedrigschwelligen Einstieg. Die zweite Teilaufgabe ermöglicht einen Wechsel des Blickwinkels auf den Lerninhalt, der auch einfach gehalten ist und gleichzeitig das Verständnis fördert. Dies kann insbesondere durch Umkehraufgaben geschehen. Den Kern der Blütenaufgabe bildet die dritte Aufgabe, die höhere Anforderungen als die ersten beiden Aufgaben stellt. Weitere Teilaufgaben werden dann zunehmend offener und ermöglichen mehr eigenständige Entscheidungen.

Bruder und Reibold stellen die Bedeutung von Transparenz der Lernanforderungen gegenüber den Lernenden für die Förderung von Selbstregulation und realistischer Selbsteinschätzung heraus. Deshalb plädieren sie entgegen teils verbreiteter Meinungen dafür, die Schüler bewusst über den Aufbau von Blütenaufgaben, das steigende Anforderungsniveau und die Schwierigkeitseinschätzung der Lehrkraft zu informieren (Bruder/Reibold 2012, S. 88).

Die Vorzüge des Konzeptes der Blütenaufgaben ergeben sich durch das Differenzierungspotenzial der anforderungsgestuften Teilaufgaben, die sowohl einen passenden Einstieg für leistungsschwächere als auch Förderungspotenzial für leistungsstärkere Schüler bieten. Außerdem sind Blütenaufgaben selbstdifferenzierend, wenn eine feste Bearbeitungszeit vorgegeben wird und jeder Schüler so weit an der Aufgabe arbeitet, wie er in dieser Zeit kommt (Bruder 2008, S. 44 f.). Durch die (Ergebnis-)Offenheit der hinteren Teilaufgaben bietet sich den Schülern die Möglichkeit, „sich so flexibel in einem Themenfeld zu bewegen, dass sie dann in Testsituationen entsprechend unblockiert agieren können" (Bruder 2008, S. 49). Durch den unterschiedlichen Öffnungsgrad der Teilaufgaben können insgesamt die Vorzüge offener und geschlossener Aufgabenstellungen kombiniert werden. Dadurch, dass alle Teilaufgaben einen gemeinsamen Kontext haben, wird eine fokussierte Arbeit an den Aufgaben sowie eine gemeinsame Besprechung und Reflexion im Plenum ermöglicht (Bruder/Reibold 2010, S. 6). Indem der Lerngegenstand in den einzelnen Teilaufgaben von unterschiedlichen Seiten betrachtet wird, werden durch einen vielseitigen, vernetzenden und mehrperspektivischen Umgang mit dem Lerngegenstand Verständnis und Anwendungsfähigkeit gefördert (Bruder/Reibold 2012, S. 86). Dadurch eignen sich Blütenaufgaben besonders für Übungs- und Anwendungsphasen und zur Vertiefung (Bruder et al. 2015).

Grave und Thiemann (2010, S. 20) folgern aus ihren Erfahrungen, dass „das Ziel, ein selbstdifferenzierendes Lernangebot bereitzustellen, mit Hilfe von Blütenaufgaben erreichbar" ist. Erfolg stellt sich dann ein, wenn Schüler nicht nur die Minimalanforderungen erfüllen, sondern ihrem Niveau entsprechende Aufgaben bearbeiten. Allerdings sind nicht immer genau die leistungsstärksten Lernenden diejenigen, die motiviert sind, die letzte, offene Teilaufgabe zu bearbeiten. Bruder und Reibold (2012, S. 87 f.) berichten, dass die Erfahrung mit Aufgaben, die Wahlmöglichkeiten bieten, gezeigt hat, dass Schüler zögern, wenn es darum geht, Aufgaben auszulassen, da sie nichts verpassen möchten. Außerdem können schwierige Teilaufgaben zu einer Entmutigung von lernschwächeren Schülern führen.

6.3 Sprache im Mathematikunterricht

Die Bedeutung von Sprache für einen guten Fachunterricht allgemein und speziell für den Mathematikunterricht ist unbestritten (Becker-Mrotzek et al. 2013, S. 7; Leisen 2013, S. 3; Meyer 2017, S. 53; Meyer/Tiedemann 2017, S. V; Rossack/Neumann 2017, S. 1 f.; Schilcher et al. 2017, S. 34 f.; Schmölzer-Eibinger

2013, S. 25; Verboom 2008, S. 102)[2]. Prediger und Kollegen (2015) konnten zeigen, dass Sprachkompetenz stark mit Mathematikleistung zusammenhängt. Ein Grund für die Bedeutung von Sprache ist, dass diese im Mathematikunterricht sowohl eine kognitive Funktion im Rahmen des eigenen Denkens als auch eine kommunikative im Gedankenaustausch mit anderen einnimmt, wobei die kommunikative die kognitive Funktion noch verstärkt (Maier/Schweiger 1999, S. 17; Meyer/Tiedemann 2017, S. 42 f.). Ein weiterer Grund für die Bedeutung von Sprache ist, dass fachbezogene Sprachkompetenz im Mathematikunterricht in der Rolle von Lernvoraussetzung (und damit potenziellem Lernhindernis), Lernmedium und Lerngegenstand auftritt (Leisen 2013, S. 3; Schmölzer-Eibinger 2013, S. 25; Becker-Mrotzek et al. 2013, S. 8; Meyer 2017, S. 53 ff.; Meyer/Prediger 2012, S. 2; Meyer/Tiedemann 2017, S. 43 ff.)[3]. Außerdem ist Sprachkompetenz zum einen ein Bestandteil der *mathematical literacy*, andererseits trägt kompetenzorientierter Mathematikunterricht auch zur Förderung kognitiv-linguistischer Kompetenzen bei, zu denen auch das Argumentieren gezählt werden kann (Linneweber-Lammerskitten 2013, S. 151; Schmölzer-Eibinger 2013, S. 28 f.), sodass Fach- und Sprachlernen sich gegenseitig bedingen und fördern.

Während ursprünglich Sprache im Fachunterricht aufgrund von Schülern nichtdeutscher Muttersprache fokussiert wurde (Rossack/Neumann 2017, S. 2; Feilke 2012; Ufer et al. 2013; Vollmer/Thürmann 2013; Gogolin/Duarte 2016; 2018), steht inzwischen das Ziel, Konzepte für eine sprachliche Bildung aller zu entwickeln, mehr im Fokus (Abshagen 2015, S. 10 ff.; Gogolin/Dirim et al. 2011; Gogolin/Lange et al. 2011; Götze 2015; Leisen 2013, S. 3). Wessel und Prediger (2017) fanden in einer empirischen Untersuchung kaum differentielle Unterschiede hinsichtlich des sprachlichen Förderbedarfs zwischen verschiedenen sprachbasiert eingeteilten Gruppen von Lernenden mit mathematischen Schwächen. Insbesondere gab es nur geringe Unterschiede zwischen Einsprachigen und Mehrsprachigen hinsichtlich des sprachlichen Förderbedarfs. Auch in Bezug auf diskursive Merkmale beim Begründen fanden die Autoren kaum interpretierbare

---

[2] Schilcher und Kollegen (2017) untersuchten die Tagungsbandbeiträge zu den Fachvorträgen auf der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik von 2014 bis 2016, die sich mit dem Thema *Sprache im Mathematikunterricht* befassten. Diese Untersuchung zeigt einerseits die Bedeutung der Thematik in der mathematikdidaktischen Forschung und gibt andererseits einen interessanten Überblick über aktuelle Strömungen innerhalb der Thematik (ebd., S. 16–35, 38).

[3] Für einen Überblick über die mathematikdidaktische Forschung zum Thema Sprache sortiert nach *(Fach-)Sprache als Lerngegenstand, (Unterrichts- und Alltags-)Sprache als Lernmedium* und *(Bildungs- und Fach-)Sprache als Lernvoraussetzung und potenzielles Lernhindernis* siehe Prediger (2013, S. 167–169).

Muster und schließen auf parallele Förderbedarfe und somit keine Notwendigkeit unterschiedlicher sprachlicher Förderung für die verschiedenen Sprachgruppen (Wessel/Prediger 2017).

Durch die Lehrerinterviews (siehe Kap. 5) konnte gezeigt werden, dass die teilnehmenden Lehrkräfte viele Herausforderungen beim Argumentieren im Analysisunterricht gerade im Bereich der Sprache sehen. Deshalb werden im Folgenden kurz wichtige Begriffe im Zusammenhang von Sprache und Mathematikunterricht geklärt und beschrieben, warum sich gerade in diesem Bereich viele Schwierigkeiten ergeben, bevor speziell auf verschiedene Formen der Sprachförderung theoretisch eingegangen und auf die konkrete Sprachförderung mit Hilfe von Wortspeichern geblickt wird. Letztere dient als Grundlage für die sprachliche Förderung innerhalb einer Lernumgebung zum Argumentieren, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde (siehe Kap. 7).

6.3.1 Systematisierung von Sprache im (Mathematik-) Unterricht

Sprache tritt im Mathematikunterricht nicht immer mit gleichen Eigenschaften auf. Sie ist nicht für alle Schüler Muttersprache, sondern kann auch Zweit- oder Drittsprache sein, deren Erwerbs- oder Lernprozess durch die Schüler zu unterschiedlichen Zeitpunkten begonnen hat. Darüber hinaus tritt Sprache in unterschiedlichen (Darstellungs- und Handlungs-)Formen, Ebenen und Registern auf, sodass Leisen (2013, S. 46) sogar den Plural verwendet und von verschiedenen in Fachtexten vorkommenden „Sprachen" spricht. Die im Unterrichtsgeschehen verwendete Sprache kann entweder medial mündlich oder schriftlich auftreten und dabei jeweils entweder konzeptionell mündlich oder konzeptionell schriftlich sein. Diese Unterscheidung geht zurück auf Söll (1985, S. 17 ff.) und Koch und Oesterreicher (1986, S. 17 ff.)[4]. Im Bereich des im Mathematikunterricht relevanten Sprachschatzes zieht Prediger (2017, S. 240 ff.)

[4] Söll (1985) verwendet die Begriffe *Code phonique*, *Code graphique*, *Code parlé* und *Code écrit* zur Beschreibung von gesprochenem und geschriebenem Französisch in der Realisation bzw. der Konzeption (ebd., S. 17 ff.). Koch und Oesterreicher (1986) nehmen diese Unterscheidung auf und beschreiben einen *phonischen* und einen *graphischen Kode* als Realisierungsformen im Bereich des Mediums und einen *gesprochenen* und einen *geschriebenen Modus* im Bereich der Konzeption sprachlicher Äußerungen (ebd., S. 17 ff.). Im Bereich der Mathematikdidaktik wird diese Unterscheidung beispielsweise von Prediger (2013, S. 175), Stephany und Kollegen (2015, S. 132 f.), Meyer und Tiedemann (2017, S. 12) und Schilcher und Kollegen (2017, S. 10) aufgegriffen.

die Unterscheidung aus der Sprachdidaktik zwischen produktivem (aktiv genutztem), rezeptivem (versteh- und erkennbarem) und potenziellem (erschließbarem) Wortschatz heran. Sie nutzt den Begriff des *Sprachschatzes* statt dem des *Wortschatzes*, um darauf aufmerksam zu machen, dass nicht einzelne isolierte Wörter, sondern Satzbausteine und bedeutungsbezogene Sprachmittel das Zentrum der Sprachschatzarbeit ausmachen.

Eine weitere, häufig verwendete Unterscheidung ist die in *Wortebene, Satzebene* und *Textebene,* die auch eine hohe Relevanz insbesondere für das mathematische Argumentieren hat (Meyer/Tiedemann 2017, S. 22). Vor allem in neueren Publikationen wird in Ergänzung zur Textebene noch die *Diskursebene* in den Blick genommen (Prediger et al. 2019, S. 444 ff.). Auf der Wortebene sind vor allem mathematische Fachbegriffe von Interesse, die teilweise in der Alltagssprache in anderer Bedeutung vorkommen, teilweise in ähnlicher Bedeutung und teilweise nur aus einer, möglicherweise fremdsprachigen, Alltagssprache entstanden sind (Malle 2009, S. 10). Auch Symbole können in die Wortebene eingeordnet werden. Definitionen mathematischer Begriffe sind auf der Satzebene zu finden, auf der auch Zusammenhänge zwischen den Begriffen und mathematische Aussagen formuliert werden, die eine Grundlage für das mathematische Argumentieren bieten. Mathematische Argumentationen, Begründungen und Beweise werden schließlich in die Text- und Diskursebene eingeordnet. In mathematischen Sätzen und Texten tauchen Phänomene auf, die in umgangssprachlichen Texten oder Texten anderer Fachdisziplinen kaum zu finden sind, wie Teilsätze, die in Symbolsprache komprimiert werden, oder die spezielle Verwendung des Konjunktivs („Sei…“). Speziell in Begründungen, Argumentationen und Beweisen wird eine spezifische Struktur verwendet, sodass die logische Struktur der Folgerungen sprachlich Ausdruck findet (Meyer/Tiedemann 2017, S. 22 ff., Meyer/Prediger 2012). Auf der Diskursebene werden zusätzlich Sprecherwechsel und Ko-Konstruktionen von Texten und die Genrezugehörigkeit unterschiedlicher Diskurspraktiken wie Erklären oder Argumentieren in den Blick genommen (Prediger et al. 2019, S. 444). Außerdem werden sprachliche Mittel analysiert, die notwendig sind, um spezifische Sprachhandlungen auszuführen. Einige Beispiele dazu aus dem Primarbereich hat Prediger (2016, S. 8) zusammengestellt. Für den Bereich des Argumentierens listet sie dabei Sprachmittel auf, die notwendig sind, um allgemeine Zusammenhänge zu beschreiben. Dies sind beispielsweise verallgemeinernde Mittel wie „immer wenn …, dann…“ oder funktionale Bezüge wie „je… desto…“.

Je nach Kommunikationssituation wird Sprache in unterschiedlichen Registern verwendet (Halliday 1978, S. 35; Prediger 2013, S. 174). Im Mathematikunterricht treten drei verschiedene Sprachregister auf, *Fachsprache, Bildungssprache* und *Alltagssprache* (Abshagen 2015). Diese können in unterschiedlichen Darstellungsformen auftreten. Wie Meyer und Prediger (2012, S. 4) aufzeigen, können Alltagssprache, Bildungssprache und Fachsprache in verbaler, aber auch in graphischer Darstellungsform auftreten. Bildungs- und Fachsprache können zudem in numerischer, und Fachsprache außerdem noch in symbolisch-algebraischer Darstellungsform verwendet werden. Da im Unterricht als Lernmedium vorrangig die Bildungssprache verwendet wird, stellt diese und somit automatisch auch die zugrunde liegende Alltagssprache eine Lernvoraussetzung und damit ein potenzielles Lernhindernis dar. Sowohl Bildungs- als auch Fachsprache sind im Mathematikunterricht Lerngegenstand, wobei die Fachsprache meist expliziter als solcher betrachtet wird (Meyer/Prediger 2012, S. 3 f.). Prediger (2013) grenzt die Fachsprache „als die für Fach*unterricht* spezifische Sprache" (ebd., S. 173, Hervorhebung im Original) noch einmal von der allgemeinen Wissenschaftssprache der Mathematik ab, während Abshagen (2015) die Fachsprache als „Sprache der Wissenschaft" (ebd., S. 11) beschreibt. Alltags-, Bildungs- und Fachsprache stellen keine disjunkten Kategorien dar, sondern sind auf einem Kontinuum anzusiedeln. Dies zeigt sich beispielsweise im Grad der Explizitheit und der Komplexität der drei Register. Die Alltagssprache ist oft wenig explizit, meist kontextgebunden und verwendet eher kurze, oft auch unvollständige Sätze und einen Wortschatz von geringem Umfang, weswegen sie auch als konzeptionell mündlich bezeichnet wird. Beschreibungen, Erklärungen und Argumentationen werden nur so weit ausgeführt, wie für die Kommunikationssituation notwendig. Die Bildungssprache besitzt einen höheren Grad an Explizitheit und ist meist ohne Kenntnis der konkreten Situation verständlich. Sie verwendet komplexere sprachliche Strukturen, einen umfangreicheren Wortschatz und Bezüge, die rein sprachlich hergestellt werden. Dadurch dass sie „situationsunabhängig, entpersonalisiert, genau, eindeutig, vollständig, explizit, objektiv, komplex, strukturiert und distant" (Pertzel/Schütte 2016) ist, zeichnet sie sich durch konzeptionelle Schriftlichkeit sowohl im medial mündlichen als auch im medial schriftlichen Gebrauch aus. Noch eindeutiger, komplexer und weiter ökonomisch optimiert ist die Fachsprache[5] (Prediger 2013, S. 175; Abshagen 2015, S. 10 f.; Meyer

[5] Meyer (2017, S. 59) und Prediger und Kollegen (2019, S. 438) stellen Eigenschaften von Alltagssprache und Fachsprache bzw. Bildungssprache polarisierend gegenüber, ohne sich auf ein Kontinuum zu beziehen. Dabei klassifizieren Sie die Eigenschaften nach Wort-, Satz-, Text- und Diskursebene. Für eine ausführliche Analyse mathematischer Fachsprache auf Wort-, Satz- und Textebene mit Blick auf Definitionen, Aussagen, Beweise sowie Fachwörter, Symbole, Syntax und Semantik siehe Abschnitt 1.2 bis 1.5 von Maier und Schweiger (1999, S. 20 ff.).

2017, S. 59). Wessel und Prediger (2017) stellen fest, dass sich das Kontinuum von Alltags- zu Fachsprache widerspiegelt in der Konzeptualisierung des Begründens von Brunner (2014a, S. 30 f.), die dieses als Kontinuum vom alltagsbezogenen Argumentieren über das (logische) Begründen mit mathematischen Mitteln hin zum formal-deduktiven Beweisen darstellt (Wessel/Prediger 2017, S. 169; siehe auch Abschnitt 2.1). Auch Brunner (2014a, S. 64) stellt fest, dass alltagsnahes Argumentieren auf Alltagsbegriffe gestützt sein kann, während formal-deduktives Beweisen wissenschaftliche Begriffe nutzt. Hierbei handelt es sich laut Brunner (ebd.) nicht nur um die Verwendung von Fachbegriffen, sondern zusätzlich um „Zusammenhangswissen". Über die Abgrenzung von Fach- und Bildungssprache sind sich unterschiedliche Autoren jedoch nicht einig. Prediger (2013, S. 175) beschreibt es als Eigenschaft der Bildungssprache, dass diese teilweise auch fachsprachliche Ausdrücke enthält, während Abshagen (2015) eben das Vorkommen von Fachtermini für die Definition von Fachsprache als Teil der Bildungssprache heranzieht: „Enthalten bildungssprachliche Texte auch Fachbegriffe und fachsprachliche Redewendungen, so bezeichnet man sie auch als Fachsprache" (ebd., S. 11). Meyer und Tiedemann (2017) argumentieren sogar, dass es aus linguistischer Sicht vertretbar wäre, Bildungs- und Fachsprache als ein Register zusammenzufassen, plädieren aber dafür, für unterschiedliche Schwerpunktsetzungen in der didaktischen Diskussion beide Termini beizubehalten (ebd., S. 16).

Versteht man Bildungssprache als eine „innersprachliche Verkehrssprache zwischen den Wissenschaften und ihren Fachsprachen" (Vollmer/Thürmann 2013, S. 42), so nimmt sie eine interessante Position zwischen Alltags- und Fachsprache ein und hat dadurch eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht inne. So sieht Meyer (2017) sie als „gemeinsame[n] sprachliche[n], nicht-fachliche[n] Nenner der verschiedenen Schulfächer" (ebd., S. 55). Leisen (2013) definiert Bildungssprache als „Sprache, die vorrangig im Bildungsbereich vorkommt und deren Beherrschung zur Teilhabe an der Bildung erforderlich ist" (ebd., S. 48). Innerhalb oder in Zusammenhang mit der Bildungssprache werden teilweise weitere Begriffe wie *Unterrichtssprache* (Leisen 2013, S. 46) oder *Schulsprache* (Feilke 2012, S. 5) verwendet. Da eine konkrete Abgrenzung der Bildungssprache von der Fachsprache im Unterricht kaum möglich ist, schlägt Tiedemann (2015) zur Bezeichnung der „im Unterricht tatsächlich verwendeten Mischung der bereits beschriebenen Sprachregister" (ebd., S. 43) den Begriff der *Unterrichtsfachsprache* vor, die sie auch als „gefilterte Variante der mathematischen Fachsprache, welche in der Lerngruppe akzeptiert ist und verwendet wird" (ebd.) beschreibt. Somit sieht die Ausgestaltung der Unterrichtsfachsprache in jeder Lerngruppe anders aus (ebd., S. 44; Meyer/Tiedemann 2017, S. 39).

6.3.2 Schwierigkeiten und Probleme durch Sprache im Mathematikunterricht

Wie auch durch die Interviewstudie aus der Perspektive von Lehrkräften (siehe Kap. 5) gezeigt werden konnte, gibt es im Mathematikunterricht Herausforderungen durch die Sprache, insbesondere beim Argumentieren. Abshagen (2015, S. 13) weist darauf hin, dass gerade die kognitiven Sprachhandlungen Begründen und Argumentieren besonders hohe sprachliche Anforderungen an die Lernenden stellen. Wenn Schüler diesen Anforderungen nicht genügen können, kann sich dies in Frustration und Beschämung äußern, wodurch die Bereitschaft zur sprachlichen Äußerung sinkt und somit auch der aktive Gebrauch von Sprache, was wiederum zu fehlenden sprachlichen Kompetenzen führen kann (Verboom 2012, S. 14). Andererseits leistet aber gerade das Argumentieren „einen Beitrag zur allgemeinen Sprachentwicklung“ (Reblin 2013, S. 227). Es gibt mehrere Gründe dafür, warum die sprachlichen Anforderungen und damit auch das Potenzial für sprachliche Schwierigkeiten im Mathematikunterricht hoch sind. Abshagen (2015, S. 13 ff.) zeigt „Stolpersteine der deutschen Sprache“ auf, die Schülern im Mathematikunterricht Schwierigkeiten bereiten. Dabei unterscheidet sie zwischen Schwierigkeiten auf der Wortebene, wie Fachbegriffe, Nominalisierungen oder schriftsprachliche Ausdrücke, Schwierigkeiten auf der Satzebene wie die Verwendung von Genitivattributen oder Partizipialkonstruktionen und Schwierigkeiten durch den (fehlenden) Kontext und die Vermeidung von Redundanzen.

Etwas allgemeiner skizziert Schmölzer-Eibinger (2013) fünf Problemfelder des Fachunterrichts in Bezug auf Sprache:

> *Die Welt der Texte ist den SchülerInnen nicht vertraut. […]*
> *Im Fachunterricht findet zu wenig aktives sprachliches Handeln statt. […]*
> *Wissen wird im Fachunterricht v.a. reproduziert anstatt aktiv konstruiert. […]*
> *Sprachliche Anforderungen des Fachlernens sind oft nicht transparent. […]*
> *Im Unterricht findet kaum intensive Textarbeit und epistemisches Schreiben statt.*
>
> (Schmölzer-Eibinger 2013, S. 29 ff.)

Das erste Problemfeld betrifft dabei insbesondere Lernende mit Deutsch als Zweitsprache oder aus bildungsfernen Familien. Das zweite Problemfeld wird unter anderem durch das dritte bedingt, da durch die fehlende aktive Konstruktion von Lerninhalten kaum Lerngelegenheiten geschaffen werden, die eigenaktives Arbeiten mit Problemstellungen und dadurch echte Kommunikation ermöglichen würden (Schmölzer-Eibinger 2013, S. 29 ff.).

Des Weiteren zeigt Leisen (2018) auf, wie die verbale Sprache im Mathematikunterricht zu Problemen führen kann. So können Begriffe und auch Funktionswörter in der Umgangssprache und in der Fachsprache verschiedene Bedeutungen haben. Außerdem kann die genaue Satzstellung innerhalb eines mathematischen Satzes die Aussage stärker beeinflussen als in der Umgangssprache. In ähnlicher Weise zeigt Malle (2009) Schwierigkeiten im Bereich der mathematischen Sprache auf. Beispielsweise werden logische Ausdrücke unterschiedlich verwendet. Ist zum Beispiel in der Mathematik der Wahrheitsgehalt einer Implikation der Form $A \Rightarrow B$ bekannt, so kann daraus nicht auf den Wahrheitsgehalt der Umkehrung $B \Rightarrow A$ und damit auch nicht auf den Wahrheitsgehalt dessen Kontraposition $\neg A \Rightarrow \neg B$ geschlossen werden, im Alltag ist dies aber manchmal möglich: „Der Satz ‚Wenn du brav bist, gehen wir ins Kino' beinhaltet selbstverständlich auch ‚Wenn du nicht brav bist, gehen wir nicht ins Kino'" (Malle 2009, S. 14). Soll Sprache in kohärenten und kohäsiven Texten verwendet werden, so ergeben sich außerdem Schwierigkeiten aus der passenden Verwendung von Funktionswörtern wie Konjunktionen oder Präpositionen und aus der notwendigen Kenntnis von Textsorten und dem Zusammenhang zwischen Form und Funktion eines Textes (Stephany et al. 2013, S. 208 ff.). Diese Schwierigkeiten können sich also insbesondere beim mathematischen Argumentieren zeigen, besonders wenn dieses in schriftlicher Form erfolgt.

6.3.3 Schreiben im Mathematikunterricht

Eine wichtige Rolle bei der Verwendung von Sprache im Mathematikunterricht und insbesondere beim mathematischen Argumentieren nimmt das Schreiben ein, denn die für den Mathematikunterricht wichtigen Sprachregister Fach- und Bildungssprache können zwar medial mündlich verwendet werden, sind aber von ihrer Konzeption her schriftlich angelegt. Die medial schriftliche Sprachverwendung hat den Vorteil, dass die Unmittelbarkeit des Mündlichen fehlt, da der Adressat meist nicht in unmittelbarer Nähe ist und so eine bewusstere Sprachproduktion möglich ist. Dem Vorteil durch diese Verlangsamung steht aber auch das Hindernis der Endgültigkeit und Dauerhaftigkeit von Schreibprodukten gegenüber, die zu Hemmungen bei den Lernenden führen können (Leisen 2013, S. 156). Vorzüge des Schreibens beschreiben der Linguist Hermanns sowie Ruf und Gallin:

> *Erst, wenn ich über ein Thema schreibe, mache ich es mir wirklich zu eigen, nur dann habe ich auch eigene Gedanken dazu, nur dann kann ich auch meine Gedanken wirklich auf ihre Stichhaltigkeit prüfen, weil ich sie dann, auf dem Blatt Papier, vor mir habe. Zugleich verschaffe ich mir, wenn ich über ein neues Thema schreibe, mit den Gedanken und mit dem Wissen auch die Sprache, die ich dafür brauche. So kann ich dann, wenn ich mich schrei bend damit beschäftigt habe, auch viel besser darüber sprechen.*
>
> (Hermanns 1988, S. 71)

> *Beim Schreiben verlangsamen und klären sich Gefühle und Gedanken, nehmen Gestalt an und fordern zur Stellungnahme heraus. Wer schreibt, übernimmt in besonderer Weise Verantwortung für seine Position und öffnet sich der Kritik. Individualisierung ohne Aufbau einer schriftlichen Sprachkompetenz, die es dem Lernenden erlaubt, seine im Moment verfügbare Sprache als Medium des Lernens selbständig zu nutzen, ist undenkbar.*
>
> (Gallin/Ruf 1993, S. 5)

Wie im zweiten Zitat deutlich wird, hängen also auch Differenzierung und Sprachförderung eng miteinander zusammen. Außerdem bekommt die Lehrkraft durch schriftliche Sprachproduktionen von Schülern Einblicke in die Lernprozesse und kann gezielt Rückmeldung geben und differenzieren. Die Schüler müssen ihre Gedanken reflektieren und verbindlich verbalisieren, was ihre Verantwortung erhöht (Barzel/Ehret 2009, S. 6 f.). Außerdem wird die Schreibkompetenz der Schüler an sich gefördert, die eine Teilhabe am fachlichen Diskurs im Unterricht und in der Gesellschaft ermöglicht. Besonders wertvoll sind Schreibhandlungen, die mehrere Funktionen zur gleichen Zeit erfüllen. Gerade das Erklären und Argumentieren können hier zu den besten Lernergebnissen führen, wenngleich dies schwierige Textsorten für die Lernenden sind (Stephany et al. 2013, S. 203, S. 220; Stephany et al. 2015, S. 131). Durch das Schreiben wird die Sprache bewusst, reflektierbar und analysierbar, sodass diese leichter korrigiert oder verbessert werden kann, was das Erlernen sprachlicher Strukturen erleichtert (Pertzel/Schütte 2016, S. 14). Ganz allgemein trägt das Schreiben im Fachunterricht zur Entwicklung bildungssprachlicher Kompetenzen bei, die fächerübergreifend und auch außerschulisch verwendet werden können (Thürmann et al. 2015, S. 41 f.) Im Zusammenhang mit Differenzierung kann das Schreiben auch gerade für schwache Schüler, beispielsweise durch den verlangsamten Prozess und die Möglichkeit, die eigenen Ideen auf dem Papier zu sehen, einen Vorteil bei der Erarbeitung von Inhalten haben (Becker-Mrotzek 2017, S. 215; Stephany et al. 2013, S. 204). Und auch für den herausfordernden mündlichen Sprachgebrauch bietet das Schreiben als Übung oder als Vorbereitung eines mündlichen Beitrags eine Unterstützung (Pertzel/Schütte 2016, S. 16, S. 88 f.).

Stephany und Kollegen (2013, S. 204 ff.) stellen fest, dass in Unterrichtsmaterialien oft Operatoren verwendet werden, die zu (schrift-)sprachlichen Handlungen auffordern, während kaum explizit gemacht wird, in welcher sprachlichen Form die Bearbeitung erfolgen soll, ob schriftlich oder mündlich, in welchem Register oder mit welcher Textsorte. Meist fehlen auch sprachliche Hilfestellungen. Des Weiteren vermuten sie, dass wenn im Mathematikunterricht geschrieben wird, es sich meist um das Abschreiben von der Tafel oder Ähnlichem handelt und die Schreibprodukte keine kohärenten Texte, sondern oft stichpunktartig sind (ebd.). Sollen Schüler im Unterricht einen Text einer bestimmten Sorte schreiben, sollten sie vorab ein Muster eines solchen Textes gelesen haben. Auch für die Nutzung bildungssprachlicher Figuren ist es von Vorteil, sich solche Strukturen vorher aktiv bewusst zu machen, um sie bei Bedarf potenziell im Gedächtnis zur Verfügung zu haben. Eine weitere Notwendigkeit beim Einsatz des Schreibens im Unterricht ist, dass die verfassten Texte im Anschluss auch gelesen werden und als Grundlage für ein Gespräch über die verfassten Texte dienen. Dies dient der Vergewisserung und Rückabsicherung, aber auch der positiven Verstärkung durch Wertschätzung (Pertzel/Schütte 2016, S. 16).

6.3.4 Sprachförderung im Mathematikunterricht

Sollen Lernende adäquat beim Umgang mit der Sprache im Fach unterstützt werden, sodass sie Sprache nicht als Hindernis begegnen, sondern die dargestellten Vorteile der Sprachverwendung beim Mathematiklernen nutzen können, ist es notwendig, sich mit Eigenschaften und Möglichkeiten eines sprachförderlichen Unterrichts auseinanderzusetzen. Dabei ist es aus oben aufgeführten Gründen wichtig, nicht nur sprachliche Defizite ausgleichen zu wollen, sondern immer parallel zum inhaltlichen auch das sprachliche Lernen mit im Blick zu haben und sprachliche Ressourcen der Lernenden weiterzuentwickeln (Meyer/Prediger 2012, S. 5). Bei Ansätzen zur Sprachförderung kann unterschieden werden zwischen defensiven Ansätzen, bei denen die benutzte Sprache möglichst vereinfacht wird, sodass mögliche Hürden beseitigt werden, und offensiven Ansätzen, die Lernende befähigen, die sprachlichen Herausforderungen des Unterrichts zu meistern. Vielversprechender für den fachlichen und sprachlichen Kompetenzerwerb der Lernenden sind offensive Ansätze (Meyer/Prediger 2012, S. 5). In Anlehnung an Meyer und Prediger (2012) kann weiter zwischen einer ganzheitlichen und einer fokussierten Sprachförderung unterschieden werden.

6.3.4.1 Ganzheitliche Sprachförderung

Für eine ganzheitliche Förderung empfehlen Meyer und Prediger (2012) verschiedene Strategien. Die erste ist, im Unterricht reichhaltige Kommunikationssituationen zu etablieren, in denen alle sprachlichen Fertigkeiten Anwendung finden. Diese Strategie kann auch aus den Überlegungen von Verboom (2008) und Leisen (2013) abgeleitet werden. Verboom plädiert für eine „lebendige, intensive Kommunikationskultur“ (Verboom 2008, S. 102), die notwendig für die Sprachentwicklung ist. Leisen schlägt ein Sprachbad vor, welches das fachliche Lernen umgibt, die *Cognitive Academic Language Proficiency* (CALP) fördert und in welchem Schüler idealerweise eine Sprachbewusstheit und eine Sprachlernbewusstheit entwickeln (Leisen 2013, S. 61, S. 76). Sprachbewusstheit und Sprachaufmerksamkeit werden auch von Schmölzer-Eibinger (2013, S. 34) als zentrale Aspekte beim Wissenserwerb betrachtet und können ihr zufolge durch Sprachverwendung der Lehrkraft und bewusstes Nachdenken über Sprache und Sprachgebrauch im Unterricht erzeugt werden.

Als weitere Strategie regen Meyer und Prediger (2012) zum sogenannten Darstellungsvernetzen an, das die Vielfalt sprachlicher Register und deren Auftreten in unterschiedlichen Darstellungsformen durch gezieltes Hin- und Herwechseln in den Fokus rückt. Eine weitere Strategie zur ganzheitlichen Sprachförderung ist das Anknüpfen an und Weiterentwickeln von Ressourcen der Lernenden, wobei beispielsweise neue Sprachmittel aus verfügbaren heraus entwickelt oder fremdsprachliche Ausdrücke aus der Muttersprache von Schülern mit Migrationshintergrund gezielt eingebunden werden (Meyer/Prediger 2012, S. 5 f.).

Im Projekt FörMig wurde zur Förderung bildungssprachlicher Kompetenzen das Konzept der *Durchgängigen Sprachbildung* entwickelt, das ebenfalls als ganzheitliche Sprachförderung im Mathematikunterricht eingestuft werden kann. Dieses Konzept zielt darauf ab, insbesondere das bildungssprachliche Register unter Berücksichtigung der vorausgesetzten Mehrsprachigkeit explizit und systematisch zu fördern, da dieses zur Wissensvermittlung und Leistungsüberprüfung verwendet wird (Gogolin/Duarte 2018, S. 71).

Im Kontext einer ganzheitlichen Sprachförderung spielt auch das Konzept des *sprachsensiblen Fachunterrichts* eine wichtige Rolle, dessen Grundsatz „der bewusste Umgang mit Sprache beim Lehren und Lernen im Fach“ (Leisen 2013, S. 3) ist. Sprachsensibler Fachunterricht führt zum Aufbau bildungssprachlicher Kompetenzen und konzentriert sich ausdrücklich auf die Kompetenzförderung sprachschwacher Schüler (ebd., S. 6). Der sprachsensible Fachunterricht zeichnet sich sowohl durch ein sprachbezogenes Fachlernen als auch durch ein fach- und sachbezogenes Sprachlernen aus, indem gegen sprachliche Hindernisse beim Fachlernen bewusst vorgegangen wird und Sprache an und mit den Fachinhalten und Fragestellungen des Fachs gefördert wird. Der sprachsensible Fachunterricht hat aber auch das *Prinzip des Vorrangs der Sachfachdidaktik vor der Sprachdidaktik*, was bedeutet, dass das inhaltliche Lernen im Vordergrund steht und durch Sprachorientierung unterstützt wird (ebd., S. 43). Wenn die Sprache nicht um der Sprache Willen gefördert wird, sondern immer für das fachliche Lernen genutzt und daran gebunden bleibt, dann sprechen auch Meyer und Tiedemann (2017, S. 82) von einem *sprachsensiblen Mathematikunterricht* und grenzen diesen sogar begrifflich von der *Sprachförderung im Mathematikunterricht* ab. Im sprachsensiblen Fachunterricht wird Sprachbewusstheit durch Reflexion gefördert und individuelle Förderung dadurch ermöglicht, dass die Lernenden in „sprachlich authentische, aber bewältigbare Sprachsituationen" (Leisen 2013, S. 6) gebracht werden und gerade die notwendige Unterstützung durch Sprachhilfen bekommen (ebd., S. 6, S. 42). Schmölzer-Eibinger (2013), die synonym zum sprachsensiblen von einem *sprachbewussten* Fachunterricht mit integriertem Sprach- und Fachlernen spricht, wirbt für den Wert des Schreibens in einem solchen Unterricht und begründet: „Das Schreiben findet nie im inhaltsleeren Raum statt, im Prozess des Schreibens wird vielmehr inhaltliches Verständnis aufgebaut und erweitert; gleichzeitig wird Sprache dabei als ein Mittel des Denkens und Lernens zugänglich" (ebd., S. 32). Sprachsensibler Fachunterricht soll auch dafür sorgen, dass Lernende kognitiv-sprachliche Fähigkeiten entwickeln, wozu auch das Argumentieren zählt (Pertzel/Schütte 2016, S. 18 f.). Außerdem stellen Pertzel und Schütte (2016) Eigenschaften zusammen, die Lernaufgaben im sprachsensiblen Unterricht im Sinne einer expliziten Aufgabekultur haben sollen:

> *Dazu gehört u. a., dass Lernaufgaben*
> - *auf zusammenhängend formulierte sinnentwickelnde mündliche oder schriftliche (!) Sprachproduktion zielen;*
> - *Lernwege im Prinzip für individuelle Lösungen offen halten;*
> - *hinreichend Zeit für die Bewältigung der Arbeitsschritte erforderlich machen;*
> - *den Schülerinnen und Schülern in schriftlicher Form vorliegen, damit sie den Aufgabentext genauer analysieren und Rückfragen stellen bzw. um Modifikation bitten können;*
> - *Anregungen und Impulse dazu enthalten, in welchen Schritten die Aufgaben bearbeitet werden können;*
> - *alle wesentlichen Informationen als Rahmenvorgabe für die erwarteten kognitiv-sprachlichen Leistungen enthalten: (a) Operatoren aus einer zahlenmäßig begrenzten und den Schülerinnen und Schülern vertrauten Liste, (b) Präzisierung der Fachinhalte, (c) konkrete Angaben zu den Ausgangstexten bzw. zugrunde liegenden Materialien, (d) konkrete Angaben zu den Zieltexten und (e) Gütemerkmale der Zieltexte.*
>
> (Pertzel/Schütte 2016, S. 24 f.)

6.3.4.2 Fokussierte Sprachförderung

Trotz aller Vorzüge einer ganzheitlichen Sprachförderung ist innerhalb dieses Rahmens eine zusätzliche fokussierte Spracharbeit notwendig und sinnvoll. Wie Verboom (2012, S. 14) für den Grundschulbereich berichtet, sind Schüler leicht für gezielte Spracharbeit zu motivieren, da sie deren Sinn aufgrund ihrer Bedürfnislage, sich angemessen äußern zu wollen, nachvollziehen können. Meyer und Prediger (2012) verstehen unter einer fokussierten Sprachförderung ein Angebot der „für die Kommunikation notwendigen Sprachmittel auf Wort-, Satz- und Textebene" (ebd., S. 6) und stellen dazu mehrere Ansätze vor. Eine Möglichkeit ist eine komplexere Wortfelderschließung, die ihren Ursprung in der Sprachdidaktik hat und im Mathematikunterricht in der Form eingesetzt werden kann, dass möglichst viele Aufgabentexte zur gleichen mathematischen Anforderung gesammelt und verglichen werden. Außerdem führen sie das Konzept einer sprachförderlichen Gesprächsführung an, in der beispielsweise die Lehrkraft die Äußerungen von Schülern aufnimmt, das vermutlich Gemeinte aufgreift und einen passenden Vorschlag zur sprachlichen Verbesserung macht. Ein weiterer Ansatz ist, die impliziten Bezüge innerhalb von Texten zu thematisieren und dabei zu explizieren. Ein Hilfsmittel bei der Textproduktion, beispielsweise bei Argumentationen, können konkrete Fragestellungen sein, die innerhalb des Textes beantwortet werden sollen oder das gezielte Angebot von Satzteilen (Meyer/Prediger 2012, S. 7 f.).

„Viele der fokussierenden Methoden verfolgen den sprachdidaktisch etablierten Gedanken des Scaffolding" (Meyer/Prediger 2012, S. 8). Während der Begriff *Scaffolding* so weitläufig verwendet wird, dass darunter viele Sprachförderstrategien gemeint sein können (Neumann 2017, S. 21; Pertzel/Schütte 2016, S. 21), ist der Grundgedanke, dass den Lernenden ein unterstützendes Gerüst angeboten wird, das gezielt als Stütze eingesetzt und dann wieder abgebaut wird, wenn die Lernenden die darin enthaltenen Inhalte selbständig verwenden können. Das Gerüst kann entweder im Aufgabentext enthalten sein oder zusätzlich angeboten werden (Meyer/Prediger 2012, S. 8; Götze 2015, S. 23; Gibbons 2015, S. 16; Pertzel/Schütte 2016, S. 21 f.). Hammond und Gibbons (2005) unterscheiden für den Unterricht zwischen Makroscaffolding, das vorab geplant ist, und Mikroscaffolding, das in der jeweiligen Unterrichtssituation spontan als Reaktion angewandt wird. Laut Pertzel und Schütte (2016) haben sprachförderliche unterrichtliche Strategien und Techniken im Sinne des Scaffolding folgende Eigenschaften:

> *[Sie] unterstützen auf flexible Weise die bildungssprachliche Entwicklung, indem sie (a) sprachliche Mittel zur reflektierten Auswahl und Erweiterung bereitstellen (z. B. einschlägige Wortfelder zum Zweck des detaillierten Beschreibens, fachlich einschlägige Sprachmittel für das Erklären von Ursache-Wirkungs-Verhältnissen),*
> *(b) die Aufmerksamkeit auf fachlich relevante sprachliche Phänomene richten,*
> *(c) sprachliche Verwendungsmuster und Eigenschaften von Textsorten bewusstmachen,*
> *(d) durch eigenes kontrolliertes Sprachverhalten Modelle für fachangemessene Formulierungen bereitstellen,*
> *(e) Modelltexte gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern analysieren,*
> *(f) die Funktionsweise von Lern- und Arbeitstechniken (z. B. für das Leseverstehen oder die Textproduktion) vorführen und Lerngelegenheiten bieten, diese anzuwenden und für den eigenen Gebrauch zu übernehmen.*
>
> (Pertzel/Schütte 2016, S. 22)

6.3.4.3 Wortspeicher

Eine spezielle Strategie zur fokussierten Sprachförderung im Mathematikunterricht, die auch als spezifische Form des Makroscaffolding bezeichnet werden kann, ist der Wortspeicher. Die Idee stammt ursprünglich aus dem Primarbereich und wurde von Verboom (2008) entwickelt und verbreitet. Sie verwendet den Begriff *Wortspeicher* für ein Lernplakat zum „Festhalten von häufig verwendeten Begriffen und Ausdrücken zu einzelnen Aufgabenformaten" (ebd., S. 101). Sie weist darauf hin, dass die Art der Gestaltung des Wortspeichers wichtig ist, um seine Lernförderlichkeit zu ermöglichen. So plädiert sie, das Thema in der Überschrift anzugeben, eine reduzierte Anzahl von Begriffen zu verwenden, den Wortspeicher übersichtlich zu strukturieren, die Begriffe thematisch zu ordnen, Veranschaulichungen und Erläuterungen miteinzubeziehen, bei den Nomen Artikel mit aufzunehmen, auch Konjugationen und verschiedene Zeitformen zu verwenden und Fachbegriffe in Ausdrücke oder Sätze einzubinden und so auch auf sprachliche Besonderheiten wie Kasuswechsel aufmerksam zu machen (Verboom 2017, S. 60 f.). Der Wortspeicher kann mit den Schülern gemeinsam erstellt oder von der Lehrkraft vorgegeben werden. Insbesondere zu Beginn des Lernens eines neuen Wortschatzbereiches bietet sich die gemeinsame Erarbeitung an, jedoch müssen Fachbegriffe in der Regel von der Lehrkraft mitgeteilt werden. Bei Themen mit feststehendem Vokabular, wie es vor allem in den Sekundarstufen der Fall ist, bietet es sich an, dass die Lehrkraft Wortspeicher vorstrukturiert (Verboom 2012, S. 15). Er sollte keine isolierten Begriffe, sondern Formulierungshilfen in Form sprachlicher Wendungen oder Satzmuster enthalten. Auch wenn sich Verbooms (2012, S. 13, S. 16) Überlegungen und die dazugehörigen praktischen Erfahrungen auf die Primarstufe beziehen, gibt sie an, dass die von ihr vorgestellten Ansätze zur Sprachförderung auch in höheren Klassenstufen eingesetzt werden können. Götze (2013, S. 368 f.; 2015, S. 33 f.; 2016, S. 17), die ebenfalls im Primarbereich tätig ist, unterscheidet zwischen aufgabenübergreifender und aufgabengebundener Sprachförderung und führt Wortspeicher als Beispiel für aufgabenübergreifende Sprachförderung an. Sie macht ähnliche Vorschläge zur konkreten Nutzung und Gestaltung von Wortspeichern wie Verboom, ergänzt die möglichen Inhalte, beispielsweise durch Beschreibungen mathematischer Operationen, Begründungen, alternative Formulierungen und Synonyme und betont die universelle Nutzbarkeit, weshalb der Wortspeicher nicht zu aufgabenspezifisch sein sollte. Götze (2013, S. 370 f.) konnte durch die ersten Ergebnisse einer empirischen Studie zum Einsatz von Wortspeichern zeigen, dass die Schüler die Begrifflichkeiten des Wortspeichers für ihre eigenen Äußerungen übernehmen, dass Qualität und Umfang der Beschreibungen steigen und dass die Unterstützung durch den Wortspeicher es schafft, an den vorhandenen sprachlichen Ressourcen der Schüler anzuknüpfen.

Meyer und Prediger (2012, S. 7 f.) übernehmen das Konzept des Wortspeichers als Beispiel für eine fokussierte Sprachförderung auf Wort- und Satzebene für die Sekundarstufe I und zeigen an einem geometrischen Beispiel, dass in Wortspeichern auch Präpositionen und auseinandergezogene Verbformen (z. B. „zeichne … ein“) aufgenommen werden sollten. Auch Bedeutungen von Ausdrücken könnten ergänzt werden. Stephany und Kollegen (2013) zeigen, dass insbesondere beim Schreiben die Wortschatzarbeit ein wichtiger Bestandteil ist, der beispielsweise durch Scaffolding mit Hilfe von Wortspeichern umgesetzt werden kann. Als weitere Scaffolds eigenen sich „Satzgerüste, Textstrukturierungshilfen, Checklisten und das gemeinsame Verfassen von Texten“ (ebd., S. 213). Stephany und Kollegen (2013) untersuchten in einem explorativen Design sprachsensible Mathematikkurse einer Sommerschule mit Schülern der fünften und sechsten Klassen. Es sollten sowohl fachliche als auch sprachliche Kompetenzen unter anderem durch schreibdidaktische Ideen gefördert werden. Dafür wurden kommunikativ-epistemische Schreibsettings mit situierten Schreibaufgaben eingesetzt und durch Scaffolding-Methoden, wie zur Verfügung gestellte Satzgerüste und Lernplakate zum Wortschatz, ergänzt. Es wurden quantitative und qualitative Untersuchungen gemacht, jedoch gab es dabei keine Kontrollgruppe, sodass die signifikanten Unterschiede, die sich im Prä- und Posttest zeigten, nicht zwingend auf das Setting zurückgeführt werden konnten. Es zeigten sich Fortschritte auf der sprachlichen und insbesondere der Wortebene. In einer Aufgabe, in der die Schüler Fehler finden und beschreiben sollten, zeigte sich, „dass der Einsatz fachsprachlicher Elemente zu einer präziseren und mathematisch korrekteren Beschreibung des Fehlers in der gegebenen Rechnung führt“ (ebd., S. 219 f.).

Ähnliche Ideen finden sich im Bereich der Sprachdidaktik, wo beispielsweise die Methode *Wortschatz aus der Werkzeugkiste* Schüler beim Formulieren unterstützt, indem eine Sammlung von Wörtern und Sprachbausteinen zur Verfügung gestellt oder gemeinsam zusammengestellt wird (Baurmann 2015, S. 157 f.). Steets (2009) regt im Kontext der Schreibdidaktik des Deutschen an, Wortkombinationen als Textbausteine vorzugeben, um schwächere Schreiber zu ermutigen.

> *Die Vorgabe solcher Bausteine eignet sich besonders für Textarten, deren Textorganisation weitgehend normiert ist […]. Indem er aus dem Formulierungsangebot auswählt, kann der Schüler seine Gedanken präzisieren und versprachlichen, und er findet gleichzeitig Hinweise zur Textorganisation. Textbausteine stellen also sowohl eine Formulierungs- als auch eine Strukturierungshilfe dar.*
>
> (Steets 2009, S. 67)

Ihre Ausführungen können gut auf das schriftliche Formulieren mathematischer Argumentationen übertragen werden, da es sich bei diesen auch um eine Textart mit starker Normierung handelt. Außerdem arbeitet Grundler (2009) im Bereich der Deutschdidaktik die Bedeutung der Lexik für das Argumentieren heraus und folgert: „Die Förderung der Argumentationsfähigkeit muss daher immer mit einer Förderung des Wortschatzes der Kinder und Jugendlichen einhergehen“ (ebd., S. 94). Auch wenn die Kompetenz des Argumentierens in den Bereichen des Deutsch- und Mathematikunterrichts unterschiedlich ausgerichtet ist, lässt sich Grundlers Erkenntnis auf die Mathematikdidaktik übertragen und unterstützt die Idee, beim Argumentieren einen Wortspeicher zur Förderung auf Wort- und Satzebene einzusetzen.

6.4 Lernen aus Lösungsbeispielen

Beispiele sind ein bedeutender Bestandteil der Mathematik und insbesondere des Mathematikunterrichts. Eine Möglichkeit, Beispiele im Mathematikunterricht sinnvoll einzusetzen, ist die Arbeit mit sogenannten Lösungsbeispielen. In diesem Abschnitt werden verschiedene Arten von Lösungsbeispielen dargestellt, Argumente für die Effektivität des Einsatzes von Lösungsbeispielen angeführt und schließlich speziell die praktische Umsetzung des Lernens mit Lösungsbeispielen thematisiert. Lösungsbeispiele werden schließlich in der in Kapitel 7 entworfenen Lernumgebung zum Argumentieren verwendet.

Eine Definition von Lösungsbeispielen findet sich bei Renkl und Schworm (2002):

> *Lösungsbeispiele bestehen aus einer Problemstellung, Lösungsschritten und der endgültigen Lösung selbst. […] Unter Lernen aus Lösungsbeispielen versteht man aber nicht die üblicherweise kurze Lernphase zwischen der Behandlung eines Prinzips/Gesetzes o. Ä. und dem Lösen von Rechenaufgaben, in der meist nur ein Lösungsbeispiel behandelt wird. Es werden vielmehr die Lösungsprozesse und -effekte betrachtet, die auftreten, wenn statt nur eines Lösungsbeispiels mehrere verwendet werden und die Phase des Lösungsbeispielstudiums also verlängert wird.*
>
> (Renkl/Schworm 2002, S. 261)

Während Definitionen von Lösungsbeispielen weitestgehend einheitlich sind (Reiss/Renkl 2002, S. 30; Hilbert et al 2006, S. 62; Renkl et al. 2004, S. 77; Reiss et al. 2008, S. 457), gibt es viele unterschiedliche Überlegungen dazu, welche Arten von Beispielen als Lösungsbeispiele im Mathematikunterricht verwendet werden können.

6.4.1 Arten von Lösungsbeispielen

Als *klassische Lösungsbeispiele* werden üblicherweise solche Beispiele bezeichnet, die „eine algorithmische, zumeist mathematische Vorgehensweise bei der Lösung eines Problems“ (Renkl et al. 2004, S. 79) veranschaulichen. Klassische Lösungsbeispiele werden nur dann als solche bezeichnet, wenn sie neben der Aufgabenstellung und der Lösung auch die Lösungsschritte beinhalten. Da sich diese Beispiele nur auf eine inhaltliche Ebene beziehen, werden sie von Renkl und Kollegen als *single-content examples* im Gegensatz zu *double-content* und *triple-content examples* (siehe unten) bezeichnet (Renkl et al. 2009, S. 68; Schworm/Renkl 2007, S. 286). Die Bezeichnung als *klassisch* ist darauf zurückzuführen, dass zu Beginn der Untersuchungen zur Arbeit mit Lösungsbeispielen nur algorithmische Bereiche der Mathematik herangezogen wurden. Erst nach der Jahrtausendwende fiel der Blick auch auf nicht-algorithmisch lösbare Problemstellungen.

Reiss und Renkl (2002) entwerfen sogenannte *heuristische Lösungsbeispiele* für das Erlernen des mathematischen Beweisens. Dafür kombinieren sie die Ideen der (klassischen) Lösungsbeispiele mit Schönfelds (1983) Ansatz, heuristische Strategien beim Problemlösen zu explizieren. Dies äußert sich darin, dass „nicht nur die Lösungsschritte, sondern auch gedankliche Grundlagen, explorative Wege und Irrwege oder benutzte Heuristiken, wie etwa Zeichnungen und Planskizzen, explizit gemacht“ (Reiss et al. 2006, S. 196) werden. Somit kann prozessorientiert gelernt werden (Reiss et al. 2008, S. 458). Als Grundlage verwenden Reiss und Renkl (2002) das Prozessmodell des Beweisens von Boero (1999). Ihre heuristischen Lösungsbeispiele regen deshalb zur Exploration der Behauptung samt Kontext an, beinhalten die Identifikation von Argumenten und präsentieren schließlich einen korrekten Beweis der Behauptung (Reiss/Renkl 2002, S. 32). Im Gegensatz dazu würde ein klassisches Lösungsbeispiel eines Beweises eine Art idealisierte Zusammenstellung von Lösungsschritten sein und somit den Eindruck erwecken, dass das Beweisen eine geradlinige, deduktive Aktivität sei. Die heuristischen Lösungsbeispiele zeigen somit ein authentischeres Bild des tatsächlichen Beweisprozesses (ebd.).

Da im nicht-algorithmischen, heuristischen Bereich oft zwei inhaltliche Bereiche betroffen sind, verwenden Schworm und Renkl (2007) den Begriff der *double-content examples*. Die beiden betroffenen Bereiche nennen sie *learning domain (level)* und *exemplifying domain (level)*. Die *learning domain* ist der Bereich, aus dem etwas, beispielsweise ein Prozess, gelernt werden soll und die *exemplifying domain* bezeichnet den dafür verwendeten Inhalt, der aber nicht im Zentrum der Aufmerksamkeit steht (Schworm/Renkl 2007, S. 286; Renkl et al. 2009, S. 69 f.). Im Kontext der prozessbezogenen Kompetenzen im Mathematikunterricht können Prozesse als *learning domain* nur an konkreten mathematischen Inhalten der *exemplifying domain* gelernt werden. Oft beinhalten *double-content examples* jedoch keine Lösungsschritte, sodass viele keine Lösungsbeispiele nach obiger Definition sind. Werden in *double-content examples* zusätzlich kognitive Prozesse eines Experten erläutert, der gerade das Problem löst, und dadurch heuristische, kognitive Strategien zur Verfügung gestellt, so ist eine dritte Ebene betroffen, die als *strategy level* bezeichnet wird. Solche Lösungsbeispiele sind dann *triple-content examples*, die auch als *cognitive models* bezeichnet werden (Schworm/Renkl 2007, S. 286; Renkl et al. 2009, S. 69 f.).

Enthalten Beispiele zu nicht-algorithmischen Problemstellungen keine expliziten Lösungsschritte, werden sie nicht als heuristische Lösungsbeispiele bezeichnet. Renkl und Kollegen (2004, S. 80) verwenden dann den Begriff *gelöste Beispielprobleme*. So kann ein Lösungsbeispiel zu einer Begründungsaufgabe, das keine heuristischen Schritte enthält, sondern nur aus einer ausgearbeiteten Begründung besteht, nach Renkl und Kollegen (2004, S. 80) als gelöstes Beispielproblem und als *double-content example* (Renkl et al. 2009, S. 69 f.) bezeichnet werden, nicht aber als heuristisches Lösungsbeispiel. Zur Analyse von in videographierten Unterrichtsstunden verwendeten Beispielen verwenden Renkl und Kollegen (2004, S. 80) außerdem den Begriff der *entwickelten Beispiele* für den Fall, dass Beispiele erst im Verlauf des Unterrichts entwickelt werden und erst durch die an die Entwicklung anschließende Arbeit mit diesen Beispielen zu Lösungsbeispielen in der Terminologie der Autoren werden.

Renkl und Kollegen (2004, S. 79 ff.; Hilbert et al. 2008b, S. 324) untersuchten in drei zusammenhängenden Studien den tatsächlichen Einsatz von Lösungsbeispielen im Mathematik- und Physikunterricht. Sie führten eine Videoanalyse von Unterrichtsstunden durch, um herauszufinden, wie häufig und in welcher Form Beispiele im Unterricht eingesetzt werden. Außerdem analysierten sie in Schulbüchern enthaltene Beispiele und führten eine Interviewstudie mit Lehrkräften zu deren Auffassung über und Einsatz von beispielbasiertem Lernen durch. Sie fanden heraus, dass in Lehrbüchern zwar klassische Lösungsbeispiele die mit Abstand häufigste Kategorie sind, dass diese aber von Lehrkräften nicht im klassischen Sinne eingesetzt, sondern im Unterricht entwickelt werden. Sie folgern aus dem Einsatz von Lösungsbeispielen in Übungsphasen statt bei der Einführung von Prinzipien oder Themen in den videographierten Unterrichtsstunden und aus den Interviews, dass der Einsatz der Beispiele vorrangig der allgemeinen Verbesserung von Rechenfertigkeiten und weniger der Verständnisförderung dient. Dadurch würde das Potenzial von Lösungsbeispielen nicht ausreichend genutzt. Die Lehrkräfte zeigten eine eher ablehnende Haltung gegenüber dem Lernen aus Lösungsbeispielen im klassischen Sinne, da sie es als oberflächlich und didaktisch nicht sinnvoll erachteten. Insbesondere gingen sie nicht davon aus, dass auch leistungsstärkere Schüler aus Lösungsbeispielen etwas lernen könnten (Renkl et al. 2004, S. 79 ff.; Hilbert et al. 2008b, S. 324).

6.4.2 Wirksamkeit von Lösungsbeispielen

Beispiele stellen „einen unverzichtbaren Baustein beim Wissenserwerb dar“ (Zöttl 2010, S. 10), da das Lernen aus (Lösungs-)Beispielen viele Vorteile birgt. Überblicke zu empirischen Studien im Bereich des Einsatzes von Lösungsbeispielen in der Bildungsforschung allgemein und speziell in der Mathematik finden sich bei diversen Autoren (z. B. Atkinson et al. 2000, S. 182 ff.; Reiss/Renkl 2002, S. 31; Sweller et al. 1998, S. 274). Die meisten der dort zusammengestellten Studien zeigen die Vorteile des Lernens mit Lösungsbeispielen. Reiss und Kollegen konnten in mehreren Studien (Reiss et al. 2006; 2008; Hilbert et al. 2008a) auch die Wirksamkeit speziell heuristischer Lösungsbeispiele nachweisen. Insbesondere leistungsschwächere Lernende profitieren von heuristischen Lösungsbeispielen in Ergänzung zum herkömmlichen Mathematikunterricht. Zöttl (2010, S. 223) übertrug die Idee vom Beweisen auf das Modellieren und konnte mit einer

Lernumgebung mit heuristischen Lösungsbeispielen die Modellierungskompetenz von schwächeren Schülern geringfügig steigern. Langfristige Auswirkungen wurden dabei jedoch nicht untersucht.

Zur Begründung der Effektivität des Lernens aus Lösungsbeispielen sowohl im algorithmischen als auch im heuristischen Bereich ziehen nahezu alle Autoren die *Cognitive Load Theory* heran, die auf Sweller und Kollegen (Sweller/Cooper 1985; Sweller 1988; Sweller et al. 1998) zurückgeht: Das Arbeitsgedächtnis, das für die Verarbeitung von Lehr-Lern-Materialien zuständig ist, hat nur eine geringe Kapazität und kann deswegen nur wenige Elemente gleichzeitig verarbeiten. Darauf baut die *Cognitive Load Theory* auf. Es wird angenommen, dass allen Informationselementen, die im Arbeitsgedächtnis ankommen, ein gewisses Maß an Elementinteraktivität zugeordnet werden kann. Elemente mit niedriger Elementinteraktivität interagieren kaum mit anderen Elementen und verursachen deshalb nur eine geringe Belastung des Arbeitsgedächtnisses. Deswegen wird ihnen ein geringer *intrinsic cognitive load* zugeschrieben. Elemente mit hoher Elementinteraktivität hingegen interagieren stark untereinander, weswegen sie im Arbeitsgedächtnis parallel verarbeitet werden müssen. Da dadurch die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses stark belastet wird, wird solchen Elementen ein hoher *intrinsic cognitive load* zugeschrieben. Durch Lernprozesse werden interagierende Elemente zusammen in sogenannten Schemata[6] im Langzeitgedächtnis gespeichert, die in Zukunft als einzelne Elemente ins Arbeitsgedächtnis gerufen werden können und somit die kognitive Belastung des Arbeitsgedächtnisses verringern. Dem *intrinsic cognitive load*, der in der Natur der Informationselemente liegt und nicht beeinflusst werden kann, wird ein *extraneous cognitive load* gegenübergestellt, der durch die Art der Präsentation der Elemente und der vom Lerner geforderten Aktivitäten entsteht und somit durch die Art der Lehr-Lern-Materialien beeinflusst werden kann. Er spiegelt die Anstrengungen des Arbeitsgedächtnisses wider, die für den Lernerfolg unnötig sind. Von ihm wird eine dritte Form des *cognitive load* abgegrenzt, der *germane cognitive load*, der auch von außen beeinflusst werden kann, der aber diejenigen Anstrengungen des Arbeitsgedächtnisses widerspiegelt, die zur Konstruktion von Schemata und somit für den Lernerfolg notwendig sind (Sweller et al. 1998, S. 258 f.). Das Ziel ist folglich, Lehr-Lernmaterialien so zu entwickeln, dass ein hoher *extraneous cognitive load* vermieden wird, wenn ein hoher *intrinsic cognitive load*

[6] Sweller und Cooper (1985) definieren Schemata folgendermaßen: „In the present context, schemas are defined as mental constructs that allow patterns or configurations to be recognized as belonging to a previously learned category and which specify what moves are appropriate for that category. The presence or absence of these schemas may substantially explain the differences between levels of expertise" (ebd., S. 60).

vorhanden ist. Eine hoher *germane cognitive load* ist gleichzeitig jedoch wünschenswert (ebd., S. 259, S. 290). Sweller und Kollegen und weitere Autoren, die darauf zurückgreifen, argumentieren nun, dass beim Lernen des Problemlösens viel kognitive Verarbeitungskapazität durch *extraneous cognitive load* verbraucht wird, da Novizen versuchen, durch allgemeine Problemlösestrategien wie die Mittel-Ziel-Analyse oder Oberflächenstrategien den gewünschten Zielzustand herbeizuführen. Außerdem führt fehlendes Vorwissen beim anfänglichen Problemlösen zu einer zusätzlichen Belastung durch einen hohen *intrinsic cognitive load*, da viele Elemente gleichzeitig im Arbeitsgedächtnis bereitgestellt werden müssen. Dies kann zum *cognitive overload* führen oder zumindest erfolgreiche Lernprozesse, die durch *germane cognitive load* ausgelöst werden würden, verhindern. Die Aufmerksamkeit liegt dabei nämlich hauptsächlich auf dem gewünschten Zielzustand und dessen Unterschied zum Problemzustand. Für den Erwerb notwendiger Schemata müsste die Aufmerksamkeit auf die Konfiguration der beiden Zustände an sich und die notwendigen Operationen zur Überführung des Problemzustandes in den Zielzustand liegen und mehr Kapazität des Arbeitsspeichers für den Erwerb von Schemata zur Verfügung stehen (Sweller 1988, S. 261, S. 284; Sweller/Cooper 1985, S. 61 f.; Reiss et al. 2008, S. 458; Renkl et al. 2009, S. 68; Zöttl 2010, S. 22). Werden nun Lösungsbeispiele bereitgestellt, wird weniger kognitive Verarbeitungskapazität für das Problemlösen an sich verbraucht und zudem werden genau die Informationen bereitgestellt, die für den Erwerb von Schemata notwendig sind. Die Lernenden können sich also darauf konzentrieren, die angewandten Strategien in den präsentierten Lösungen nachzuvollziehen. *Extraneous cognitive load* wird durch *germane cognitive load* ersetzt, indem die Aufmerksamkeit auf die Relation zwischen den relevanten Problemlösezuständen und auf die relevanten Operationen, also auf die Struktur der Problemlösung, gerichtet wird. Lösungsbeispiele sorgen somit für eine dem Lernen angemessenere Verteilung kognitiver Ressourcen (Sweller/Cooper 1985, S. 62; Sweller et al. 1998, S. 290; Reiss et al. 2008, S. 458; Renkl et al. 2009, S. 68; Zöttl 2010, S. 22). Renkl und Kollegen (2003) bestätigen in einer Studie mit Lösungsbeispielen aus dem Bereich von Grundbegriffen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung die Erklärung der *Cognitive Load* Theorie für die Effektivität des Lernens aus Lösungsbeispielen. Sie variieren einerseits die Lösungsmethoden *Lernen aus Lösungsbeispielen* und *Lernen durch Problemlösen* und andererseits das Vorhandensein einer Zweitaufgabe, die für zusätzlichen *cognitive load* im Sinne der Theorie sorgt. Die Messung der Reaktionszeit bei der Zweitaufgabe führt zu dem Schluss, dass das Lernen aus Lösungsbeispielen nur dann dem Lernen durch Problemlösen überlegen ist, wenn der Arbeitsspeicher nicht durch die zusätzliche Auslastung durch die Zweitaufgabe ausgelastet ist. Somit konnte die Erklärung der *Cognitive Load* Theorie bestätigt werden (Renkl et al. 2003).

Eine motivationale Begründung für die Effektivität des Lernens durch Lösungsbeispiele führen Hilbert und Kollegen (2006, S. 62) sowie Reiss und Renkl (2002, S. 31) an. Beim reinen Problemlösen wird die Performanzorientierung betont. Das heißt, die Schüler bekommen den Eindruck, dass das Hauptziel die Lösung am Ende sei. Dies kann nachhaltigem Lernen im Weg stehen, wenn reines Probieren oder auswendig gelernte Lösungswege angewandt werden und kein Verständnis angestrebt wird. Lösungsbeispiele hingegen regen zur Lern- oder Verstehensorientierung an, indem die Schüler zur Eigenaktivität durch Selbsterklärung und dadurch zum Erstreben des Verständnisses von Vorgehensweisen und Zusammenhängen angeregt werden können (Hilbert et al. 2006, S. 62; Hilbert et al. 2008a, S. 47). Durch das Verstehen des sogenannten *Lösungsrationales* ist insbesondere auch eine wichtige Voraussetzung für Transferleistungen geschaffen. Dies wird dadurch ermöglicht, dass Wissen um abstrakte Prinzipien und Wissen um konkrete Anwendungsfälle und Beispiele zu nutzbarem Wissen integriert werden (Renkl et al. 2004, S. 77 f.).

Ein weiterer Grund für die Effektivität von Lösungsbeispielen könnte sein, dass ein Teil der Verantwortung für das Lernen weg von der Lehrkraft und hin zu den Schülern verlagert wird. Dadurch werden die Einstellungen von Schülern hinsichtlich ihrer mathematischen Fähigkeiten positiv beeinflusst (Carroll 1994, S. 361). Außerdem kann eine Erhöhung der Anzahl der verwendeten Lösungsbeispiele für mehr Gelegenheit sorgen, relevante Eigenschaften des Lösungsweges zu abstrahieren. Zudem können die Beispiele eine Form des Scaffolding sein und so Lernende beispielsweise beim Selbststudium zu Hause unterstützen (ebd.). Ein Teil der Wirkungsweise von Lösungsbeispielen kann außerdem durch das in der sozialen Lerntheorie von Bandura verankerte Modelllernen erklärt werden, da Lösungsbeispiele „zumeist in verbalisierter Form Verhaltensweisen vor[geben], die von den Lernenden imitiert werden“ (Zöttl 2010, S. 8). Auch die *Adaptive Control of Thought-Rational*-Theorie nach Anderson (1993), die deklaratives und prozedurales Wissen unterscheidet, liefert einen Erklärungsansatz. Prozedurales Wissen wird in Form von Produktionsregeln im Produktionengedächtnis abgespeichert. Diese Produktionsregeln werden dadurch gebildet, dass Beispiele encodiert und exemplarische Vorgehensweisen bei ähnlichen Problemstellungen nachgeahmt werden. Dies betrifft vor allem frühe Phasen des Erwerbs kognitiver Fertigkeiten (Atkinson et al. 2000, S. 185; Zöttl 2010, S. 10).

6.4.3 Struktur des Lernens mit (Sequenzen von) Lösungsbeispielen

In der Literatur sind viele Gestaltungsprinzipien für Lösungsbeispiele und Überlegungen für deren Einsatz im Unterricht zu finden, die sich als sinnvoll für das Lernen herausgestellt haben. Viele davon haben Atkinson und Kollegen (2000) zusammengestellt und in drei Kategorien eingeteilt. Sie betreffen erstens einzelne Lösungsbeispiele (*intra-example features*), zweitens das Zusammenspiel mehrerer Lösungsbeispiele *(inter-example features*) und drittens die Art der Arbeit mit Lösungsbeispielen durch die Lernenden (*situational factors).*

Lösungsbeispiele sollten im sogenannten integrierten Format entwickelt werden, das weniger kognitive Kapazität fordert, indem unterschiedliche Informationsquellen so miteinander verbunden werden, dass diese gemeinsam wahrgenommen werden können und somit keine Anstrengung für die Zuordnung beispielsweise von Abbildungen und Texten (*split-attention effect)* notwendig ist (Renkl et al. 2001, S. 16 f.; Renkl/Schworm 2002, S. 262 f.). Zur Relativierung des *split-attention effects* kann es zudem sinnvoll sein, die Aufmerksamkeit der Lernenden auf relevante Teile des Beispiels zu lenken. Dafür bietet es sich an, mehrere Modalitäten, zum Beispiel akustische und visuelle Elemente, zu kombinieren (Atkinson et al. 2000, S. 191). Innerhalb eines Lösungsbeispiels sollten Zwischenziele des Lösungsweges hervorgehoben werden, sodass Lernenden das Erreichen von Teilzielen und das Zusammenfügen von Lösungsschritten bewusst wird (Renkl et al. 2001, S. 16; Atkinson et al. 2000, S. 191). Da Lücken im Vorwissen im Bereich der *exemplifying domain* bei *double-content examples* die Fertigkeitsaneignung behindern können, ist es sinnvoll, keine zu schwierige *exemplifying domain* auszuwählen oder vor dem Einsatz ein Vorwissenstraining durchzuführen. Wichtig ist außerdem, dass sich Lernende auf nur ein *content level* fokussieren, damit ein *cognitive overload* durch die gleichzeitige Konzentration auf zwei *content levels* verhindert wird (Renkl et al. 2009, S. 73 ff.).

Es ist sinnvoll für den Lernprozess, nicht nur einzelne Lösungsbeispiele im Unterricht einzusetzen, sondern mehrere Beispiele zu einer Sequenz zusammenzufügen und somit die Phase der Arbeit mit Lösungsbeispielen auszudehnen (Renkl et al. 2004, S. 77). Die Lernenden sollten dann unterschiedliche Lösungsbeispiele analysieren und miteinander vergleichen (Hilbert et al. 2008a, S. 47; Renkl et al. 2001, S. 18). Dazu ist es hilfreich, wenn die Oberflächenmerkmale der Beispiele dazu anregen, die Tiefenstruktur genauer zu untersuchen. Lösungsbeispiele sollten nicht für sich stehen und blockweise abgearbeitet werden, sondern immer in unmittelbarem Zusammenhang zu Problemen stehen, die selbst gelöst werden. Atkinson und Kollegen schlagen diesbezüglich vor, Lösungsbeispiele und Probleme in sogenannten *example problem pairs* zu kombinieren (Atkinson et al. 2000, S. 195).

Für den Einsatz von Lösungsbeispielen wird oft vorgeschlagen, Selbsterklärungsaufforderungen und/oder instruktionale Erklärungen zu verwenden (Atkinson et al. 2000, S. 201; Renkl et al. 2009, S. 71 ff.). Dies wirkt dem Problem entgegen, dass Schüler Lösungsbeispiele nur oberflächlich oder passiv verarbeiten und insbesondere jüngere Schüler sich nicht längere Zeit komplett auf ein Lösungsbeispiel konzentrieren können (Reiss/Renkl 2002, S. 34). Renkl und Kollegen stellen im Bereich der *double-content examples* die große Bedeutung von Selbsterklärungsaufforderungen heraus, die dafür sorgen, dass die kognitiven Ressourcen wirklich für die Reflexion über Lösungsstrategien verwendet werden. Allerdings steht dem das potenzielle Problem entgegen, dass Novizen von Selbsterklärungsaufforderungen kognitiv überfordert werden, wenn sie sich mit komplizierten Inhalten beschäftigen, wie es oft gerade bei *double-content examples* der Fall ist. Selbsterklärungsaufforderungen können sich sogar nachteilig auswirken, wenn sie mit zusätzlichen auszufüllenden Lücken in den Beispielen kombiniert werden und somit zu einem *cognitive overload* führen (Renkl et al. 2009, S. 71 f.). Selbsterklärungen können dadurch unterstützt werden, dass die Lösungsbeispiele strukturell gut aufbereitet sind (vgl. *intra-example features*) und dass Selbsterklärungen vorab geübt werden. Weniger vielversprechend ist der Einsatz von *social incentives*, bei denen beispielsweise Lernende sich gegenseitig die Lösungsbeispiele erklären (Atkinson et al. 2000, S. 201).

Schworm und Renkl (2007) führten eine Studie mit *double-content examples* im Bereich des Argumentierens durch, wobei sie verschiedene Arten von Selbsterklärungsprompts einsetzten. Das Argumentieren wurde dabei im fächerübergreifenden und nicht speziell im mathematischen Sinne verstanden. Es wurden verschiedene Varianten einer computergestützten Lernumgebung mit Lösungsbeispielen eingesetzt, mit Selbsterklärungsaufforderungen im Bereich der *exemplifying domain*, im Bereich der *learning domain* (das Argumentieren) und eine Mischung aus beidem. Insgesamt zeigte sich ein Lernfortschritt durch den Einsatz der Lösungsbeispiele in diesem nicht-algorithmischen Bereich. Der Einsatz der *double-content examples* sorgte für eine Steigerung des deklarativen Wissens über das Argumentieren. Durch zusätzliche Selbsterklärungsaufforderungen konnten auch Argumentationsfertigkeiten gesteigert werden. Selbsterklärungsaufforderungen aus dem Bereich der *exemplifying domain* verbesserten zwar die Qualität der auf die *exemplifying domain* bezogenen Selbsterklärungen, erhöhten aber nicht deren Häufigkeit. Selbsterklärungsaufforderungen im Bereich der *learning domain* erleichterten die Aneignung von Argumentationsfertigkeiten. Unklar ist, inwieweit diese Ergebnisse auf das mathematische Argumentieren im Sinne dieser Arbeit übertragen werden können.

7 Entwicklung einer differenzierenden, aufgabenbasierten Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen

Zur Förderung der mathematischen Argumentationskompetenz anhand des Inhaltsbereichs *Ableitung ganzrationaler Funktionen* wurde eine differenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen entwickelt, die in sechs Versionen ausgearbeitet wurde (siehe unten)[1]. Dies geschah auf Grundlage der Erkenntnisse der Interviewstudie aus dem zweiten Teil dieser Arbeit sowie der theoretischen Überlegungen, die in Kapitel 6 dargestellt wurden. Der Begriff der Lernumgebung wird dabei so verwendet, wie in Abschnitt 6.1 herausgearbeitet, als Gesamtarrangement von Inhalten, Prozessen, Materialien, Medien, Unterrichtsmethoden, Sozialformen, Kommunikationsformen sowie intendierten Tätigkeiten von Lehrperson und Lernenden, das einen Kompetenzzuwachs bei den Lernenden ermöglichen soll. Die entwickelte Lernumgebung zielt vor allem auf einen Kompetenzzuwachs im Bereich des mathematischen Argumentierens ab. Gleichzeitig werden aber auch inhaltsbezogene Kompetenzen im Bereich der Leitidee funktionaler Zusammenhang gefördert. Lernen wird dabei als gemäßigt-konstruktivistisch verstanden, weshalb die Lernumgebung aus der Perspektive der Lernenden heraus entwickelt wurde. Durch den Einsatz der Lernumgebung sollen Argumentationskompetenzen und schriftsprachliche Kompetenzen bei den Schülern möglichst differenziert gefördert und dabei das Verständnis von ganzrationalen Funktionen und deren Ableitungen vertieft werden. Das konkrete soziale, kulturelle, zeitliche und räumliche Umfeld

[1] Alle Materialien der entwickelten Lernumgebung sind in Anhang I im elektronischen Zusatzmaterial zu finden.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_7.

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_7

des Einsatzes der Lernumgebung wurde nicht in die Gestaltung miteinbezogen, da die Lernumgebung unabhängig von einer konkreten Lerngruppe basierend auf den Erkenntnissen der Interviewstudie aus dem zweiten Teil dieser Arbeit entwickelt wurde. Stattdessen ist die Lernumgebung so flexibel angelegt, dass eine Anpassung an die jeweilige Lerngruppe durch die Lehrkraft stets möglich (und nötig) ist. So wurden insbesondere verschiedene Versionen der Lernumgebung entwickelt, woraus sich für Lehrkräfte eine Auswahlmöglichkeit basierend auf den Voraussetzungen ihrer jeweiligen Lerngruppe ergibt.

Im Mittelpunkt der Lernumgebung steht die Förderung der mathematischen Argumentationskompetenz. Unter dieser Prämisse basiert die Struktur der Lernumgebung auf drei Grundpfeilern, erstens dem konkreten Inhalt, ohne den prozessbezogene Kompetenzen wie das Argumentieren nicht gefördert werden können, zweitens der Sprachförderung und drittens der Differenzierung als Reaktion auf die Heterogenität der Schüler einer Lerngruppe (siehe Abb. 7.1). In der konkreten Umsetzung besteht die Lernumgebung deshalb aus mehreren Elementen:

Zentrale Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung:
Die Lernumgebung besitzt eine zentrale Aufgabe, die aus mehreren, voneinander unabhängigen Teilaufgaben besteht, die durch einen inhaltlichen, mathematischen Zusammenhang verbunden sind. Die mathematische Begründung dieses Zusammenhangs stellt den Leitgedanken der Lernumgebung dar. Der spezifische Aufbau der Aufgabe basiert auf der Idee der Blütenaufgaben und trägt somit zur Differenzierung bei. Es wurden drei Varianten für solch eine zentrale Aufgabe entwickelt, die jeweils einen eigenen mathematischen Zusammenhang in den Blick nehmen. Dadurch entstanden mehrere Versionen der Lernumgebung (siehe unten). Die Entwicklung der Aufgaben ist in Abschnitt 7.1 dargestellt.

Formulierungshilfen:
Die zentrale Aufgabe wird jeweils durch Formulierungshilfen ergänzt, die zur Förderung sprachlicher Kompetenzen bei den Lernenden beitragen. Die Formulierungshilfen wurden in zwei Varianten entwickelt, die *Wortspeicher* und *Satzbausteine* genannt werden. Die Entwicklung der Formulierungshilfen ist in Abschnitt 7.2 dargestellt.

Vorangestelltes Lösungsbeispiel:
Der zentralen Aufgabe ist jeweils ein Lösungsbeispiel vorangestellt, das zusätzlich zur Differenzierung beiträgt und gleichzeitig ein sprachliches Vorbild darstellt. Die Entwicklung dieser Lösungsbeispiele ist in Abschnitt 7.3 dargestellt.

Durch die Gestaltung der Lernumgebung soll Lehrkräften beispielhaft aufgezeigt werden, wie sich Differenzierung im Bereich des mathematischen Argumentierens konkret umsetzen lässt und wie Schüler gleichzeitig sprachlich unterstützt werden können. Die jeweils entwickelten Ideen lassen sich auf andere Kontexte und Inhalte übertragen. Das Arrangement wird komplettiert durch Vorschläge für Lehrkräfte zum Einsatz der Lernumgebung, die Methoden, Sozialformen und Medien empfehlen. Die tatsächlichen Entscheidungen für die Umsetzung werden den Lehrkräften auf Grundlage der Einschätzungen ihrer Lerngruppen überlassen.

<table>
<tr><th colspan="3">Förderung mathematischer Argumentationskompetenz</th></tr>
<tr><th>Inhalt</th><th>Sprache</th><th>Differenzierung</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Themenbereich:
Ableitung ganzrationaler Funktionen

Leitgedanke

Begründungsaufgabe im Zentrum

Unterschiedliche Begründungen möglich</td><td>Formulierungshilfen:
Wortspeicher
oder
Satzbausteine</td><td>Orientierung an Konzept von Blütenaufgaben

Teilaufgaben mit gestufter Schwierigkeit
(konkret → abstrakt, geschlossen → offen)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vorangestelltes, ausformuliertes Lösungsbeispiel
Ähnlich der ersten Teilaufgaben
Gegliedert in zwei Schritte und zwei Begründungen</td></tr>
</table>

Abbildung 7.1 Grundpfeiler der entwickelten Lernumgebung

Die Lernumgebung wurde in sechs Versionen entwickelt, die sich aus den drei unterschiedlichen Aufgaben im Zentrum und zwei Varianten der jeweils passend dazu konstruierten Formulierungshilfen ergeben (siehe Abb. 7.2). Auch vom Lösungsbeispiel wurden drei Varianten, jeweils passend zur zentralen Aufgabe, entwickelt.

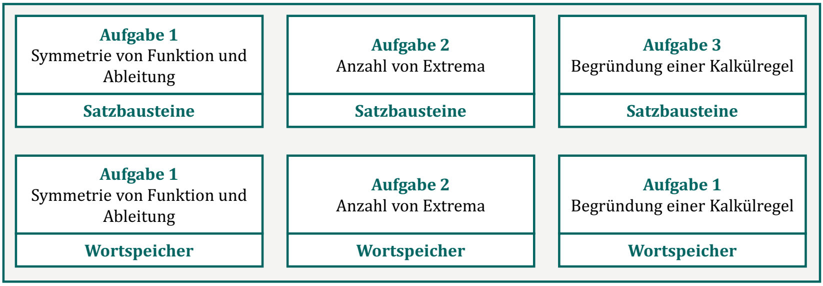


Abbildung 7.2 Sechs Versionen der Lernumgebung

7.1 Die Konstruktion der Aufgaben

Die Lernumgebung wurde so konzipiert, dass sie in den regulären Mathematikunterricht integriert werden kann. Somit war eine curriculare Anbindung der verwendeten Inhalte notwendig. Um die Einsetzbarkeit noch zu verbessern, wurden drei verschiedene zentrale Aufgaben als Varianten zur Auswahl entwickelt. Durch Auswahl einer dieser Aufgaben ergibt sich dann die konkrete Lernumgebung für den Einsatz im Unterricht[2]. Alle drei Aufgaben stellen Begründungsaufgaben innerhalb des Themenbereichs der Ableitung ganzrationaler Funktionen dar. Dieser Themenbereich wurde aus zweierlei Gründen gewählt. Erstens handelt es sich um einen zentralen Themenbereich in der Sekundarstufe II in allen Schularten, die in Bayern zum Abitur führen: Gymnasium, Berufliche Oberschule[3] und Bayernkolleg[4]. Damit ist eine gut passende Einbindung in den regulären Mathematikunterricht möglich. So kann die Lernumgebung beispielsweise im Rahmen einer Übungsphase im Themenblock zur Ableitung ganzrationaler Funktionen eingesetzt werden. Dies soll die Bereitschaft von Lehrkräften zum Einsatz der Lernumgebung erhöhen. Zweitens ist der Themenbereich der Ableitung ganzrationaler Funktionen sowohl ein typischer als auch ein relativ einfacher Bereich der Analysis, verglichen mit anderen Themenbereichen der Sekundarstufe II, die andere Funktionstypen einbeziehen. Dadurch wird der

[2] Nach Auswahl der Aufgabe werden dann die zugehörigen Materialien und eine Variante der Sprachförderung gewählt, siehe unten.

[3] Die Berufliche Oberschule besteht aus der Fachoberschule und der Berufsoberschule. Für die Berufliche Oberschule gibt es einen eigenen Lehrplan.

[4] Am Bayernkolleg kann auf dem zweiten Bildungsweg die allgemeine Hochschulreife erlangt werden. Es wird nach dem gymnasialen Lehrplan unterrichtet.

Umfang des notwendigen Vorwissens vergleichsweise gering gehalten. Außerdem ist so eine Konzentration auf die Tätigkeit des Argumentierens eher möglich, da weniger Kapazität des Arbeitsgedächtnisses für den Inhalt benötigt wird. Dies kann auf Basis der *Cognitive Load* Theorie (siehe Abschnitt 6.4.2) angenommen werden.

7.1.1 Überblicksartige Schulbuchanalyse zur Ableitung ganzrationaler Funktionen

Die Ideen für die konkreten Aufgaben im Zentrum der Lernumgebung wurden auf Basis einer überblicksartigen Schulbuchanalyse[5] entwickelt. Dafür wurden zwei in Bayern gängige gymnasiale Schulbücher verwendet, *Lambacher Schweizer 11* (Götz et al. 2009) und *Fokus 11* (Jahnke/Scholz 2009).[6] Dabei wurden Begründungsaufgaben im Themenbereich der Ableitung ganzrationaler Funktionen betrachtet.[7] Dazu wurden anhand der verwendeten Aufgabenstellungen alle Aufgaben des jeweiligen Buches ausgewählt, die mindestens eine ganzrationale Funktion enthalten oder die allgemein gehalten sind, wobei für die Lösung ganzrationale Funktionen beispielhaft herangezogen werden könnten. Außerdem muss in der Aufgabe die Ableitung einer ganzrationalen Funktion eine Rolle spielen oder zumindest eine Lösungsmöglichkeit bieten. Als *Begründungsaufgaben* wurden dabei Aufgaben verstanden, deren Operatoren oder Formulierungen der Fragen explizit eine Begründung verlangen. Aufgaben, bei denen zwar argumentiert werden kann, dies aber nicht explizit aus dem Aufgabentext hervorgeht, wurden nicht betrachtet. Es zeigte sich, dass als Operatoren in Begründungsaufgaben mit Abstand am häufigsten *begründen* verwendet wird. Weitere auftretende Operatoren sind *zeigen, überprüfen, nachweisen, widerlegen, bestätigen, erläutern, erklären* und *Warum*-Fragen. Dabei ist zu beachten, dass beispielsweise

[5] Einzelne Aspekte dieser Analyse wurden zusammenfassend auch in einem Tagungsband der GDM-Tagung veröffentlicht (Bersch 2020a).

[6] Zum Zeitpunkt der Entwicklung der Aufgaben gab es kein dem Lehrplan entsprechendes Schulbuch für die berufliche Oberschule, welches häufig eingesetzt wurde. Deshalb wurden für die Analyse nur gymnasiale Schulbücher verwendet. Nachdem mit dem LehrplanPLUS das neue Schulbuch *Mathematik* (Altrichter et al. 2017) für die berufliche Oberschule erschien, welches nun auch verbreitet eingesetzt wird, wurde die Analyse nachträglich auch noch für dieses Buch durchgeführt. Dadurch konnten die Ergebnisse der Analyse der gymnasialen Schulbücher weitestgehend bestätigt werden.

[7] Die Analyse wurde nachträglich auf alle Begründungsaufgaben im Bereich der Analysis der jeweiligen Bücher ausgeweitet und vertieft. Die hier dargestellten Ergebnisse konnten dabei bestätigt werden.

erläutern oder *erklären* nicht zwingend zum Argumentieren auffordern (siehe Abschnitt 2.1.5). Die Auswahl von Aufgaben mit derartigen Operatoren wurde im Einzelfall entschieden. Zur Verbesserung der Güte der Analyse wurde diese mit zeitlichem Abstand erneut durchgeführt und die Ergebnisse wurden anschließend zusammengeführt. Die Analyse ergab, dass sich Begründungsaufgaben im Bereich der Ableitung ganzrationaler Funktionen in vier Kategorien einteilen lassen, wobei eine weitere Ausdifferenzierung in Subkategorien möglich wäre. Die Kategorien wurden jeweils induktiv gebildet und sind in Tabelle 7.1 dargestellt.

Tabelle 7.1 Kategorien der überblicksartigen Schulbuchanalyse

Kategorie	Definition	Beispiele
Begründete Zuordnungen	Aufgaben, in denen unterschiedliche Objekte einander zugeordnet werden sollen und eine Begründung verlangt ist	Begründete Zuordnung von Graphen von Funktion und Ableitung
Begründungen innerhalb des Modellierens	Aufgaben aus dem Bereich des Modellierens, in denen Begründungen verlangt sind	Begründung der Passung eines gewählten Modells zur Realität Begründete Schlussfolgerungen vom Modell auf die reale Problemstellung
Begründungen an ganzrationalen Funktionen allgemein	Aufgaben, in denen Aussagen über einen bestimmten Funktionstyp (z. B. ganzrationale oder quadratische Funktionen) begründet werden sollen	Begründung, dass eine spezielle Eigenschaft für alle Funktionen eines bestimmten Typs gilt
Begründungen an konkreten Funktionen	Aufgaben, in denen Begründungen in Bezug auf ganz spezielle Funktionen, die durch einen Funktionsterm oder einen Graphen definiert sind, gesucht sind	Begründung, dass eine konkret gegebene Funktion ein Extremum besitzt

Bezüglich der Wahl der Kategorien ist zu beachten, dass diese nicht disjunkt sind. So kann beispielsweise innerhalb von Modellierungsaufgaben auch an konkreten Funktionen begründet werden und bei Zuordnungsaufgaben wird in jedem Fall an konkreten Funktionen argumentiert. Auffällig ist, dass die letzte Kategorie mit Abstand am häufigsten auftritt. Nur selten werden allgemeine Zusammenhänge begründet. Außerdem wird kaum die Möglichkeit genutzt, begründete Aussagen über spezielle Funktionen zu verallgemeinern und so die letzte mit der vorletzten Kategorie zu kombinieren. Gerade dies würde sich mit dem Ziel der Differenzierung aber anbieten. Deshalb wurde für die konkrete Ausgestaltung der Aufgaben für die Lernumgebung diese Idee weiterverfolgt. Aufgaben aus Schulbüchern wurden weiterentwickelt, um differenzierende Aufgaben zu erhalten, in denen sowohl an konkreten Funktionen als auch allgemeine Zusammenhänge begründet werden. Dabei wurde der Fokus auf das innermathematische Argumentieren gelegt. Eine Steigerung der Komplexität durch außermathematische oder teilbereichsübergreifende Einbettungen sollte vermieden werden, um eine Konzentration auf das Argumentieren bestmöglich zu erreichen.

7.1.2 Die Aufgaben

Für die Lernumgebung wurden drei Aufgaben zur Auswahl entwickelt, um Lehrkräften mehrere Versionen der Lernumgebung anbieten zu können. So sollte Einsetzbarkeit und Passung zur sonstigen Unterrichtskonzeption und zur Lerngruppe ermöglicht werden. Jede der Aufgaben verfolgt die Begründung eines mathematischen Zusammenhangs und ist in mehrere Teilaufgaben von unterschiedlichem Niveau gegliedert. Es ist davon auszugehen, dass die dritte Aufgabe dabei insgesamt einen höheren Schwierigkeitsgrad hat als die ersten beiden, da der zu begründende Zusammenhang abstrakter ist.

Im Zuge der oben dargestellten Schulbuchanalyse wurden zwei interessante Aufgaben ausgewählt und abgeändert, um die Verknüpfung zwischen Argumentieren an konkreten Funktionen und Argumentieren an allgemeinen Funktionen zu erreichen. Dies resultierte in den Aufgaben 1 und 2. Für die dritte Aufgabe wurde ein üblicherweise als Kalkülregel verwendeter Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung ausgewählt und die Begründung dessen als Kern für die Aufgabe ausgewählt. Für die konkrete Konstruktion der Aufgaben erfolgte eine grobe Orientierung am Konstruktionsmuster für Blütenaufgaben von Bruder und Kollegen (2015, S. 527; siehe Abschnitt 6.2.3). Die größte Abweichung besteht darin, dass für die zweite Teilaufgabe (bzw. bei Aufgabe 3 für die dritte Teilaufgabe) kein Blickwinkelwechsel durch eine Umkehraufgabe angestrebt wurde.

Stattdessen wird der Schritt von konkreten Beispielfunktionen zu allgemeinen Funktionstypen gegangen.

Wie von Bruder und Reibold (2012) und Grave und Thiemann (2010) empfohlen, werden die Lernanforderungen gegenüber den Schülern transparent gemacht, um Selbstregulation und realistische Selbsteinschätzung zu fördern. Dazu wird der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben mit Hilfe von ein bis drei Sternen markiert. Auf den Arbeitsblättern[8] ist zudem angegeben, dass die Schüler mit der ersten Teilaufgabe beginnen und versuchen sollen, möglichst weit zu kommen. Zudem sollte den Schülern die Erwartung mitgeteilt werden, dass jeder mindestens eine Aufgabe, die mit zwei Sternen markiert ist, bearbeiten soll.

Aufgabe 1: Symmetrie von Funktion und Ableitung

Die Idee zur ersten Aufgabe entstammt einer der wenigen Begründungsaufgaben aus der Schulbuchanalyse (Lambacher Schweizer 11), die tendenziell Begründungen an konkreten Funktionen mit Begründungen allgemeiner Aussagen verbindet:

> *Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 - x^2 - 3$.*
>
> a) *Untersuchen Sie f auf Symmetrie.*
> b) *Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f'.*
> c) *Untersuchen Sie f' auf Symmetrie.*
> d) *Zeichnen Sie die beiden Graphen mit einem Funktionsplotter.*
> e) *Begründen Sie allgemein, dass die Ableitungsfunktion einer bezüglich der y-Achse achsensymmetrischen Funktion punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist und umgekehrt.*
>
> (nach Götz et al. 2009, S. 52/13)

Jedoch wird in den ersten vier Teilaufgaben nicht durch Operatoren zum Begründen aufgefordert. Erst die letzte Teilaufgabe fordert und fördert somit explizit die Kompetenz des mathematischen Argumentierens. Allerdings ist der Sprung von den ersten vier Teilaufgaben zur letzten Teilaufgabe relativ groß und wird kaum durch den Aufbau der Aufgabe vorbereitet.

Darauf aufbauend wurde die in Abbildung 7.3 dargestellte Aufgabe 1 entwickelt. Sie thematisiert den Zusammenhang symmetrischer Funktionsgraphen mit den Symmetrien der Funktionsgraphen der zugehörigen Ableitungsfunktionen.

[8] Siehe Anhang I im elektronischen Zusatzmaterial.

Aufgabe 1:
Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - x^2 - 2$.

a)	★	Begründen Sie, dass der Funktionsgraph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist, und dass der Funktionsgraph der Ableitung f' punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
b)	★★	Allgemein gilt: Ist der Graph einer ganzrationalen Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse, so ist der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung. Begründen Sie dies.
c)	★★	Formulieren Sie eine ähnliche Aussage über Funktionen, deren Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung sind. Begründen Sie diese Aussage.
d)	★★	Falls Sie in Teilaufgabe a) eine allgemeine Regel verwendet haben, geben Sie diese an und begründen Sie diese.
e)	★★★	Gelten ähnliche Zusammenhänge auch für Funktionen, die zwar achsensymmetrisch, aber nicht zur y-Achse, oder punktsymmetrisch, aber nicht zum Ursprung, sind? Stellen Sie Vermutungen an und begründen Sie diese.

Abbildung 7.3 Aufgabe 1 der Lernumgebung: Symmetrie von Funktion und Ableitung

Der Zusammenhang der Symmetrien wird erst an einem konkreten Beispiel untersucht, um dann auf den ersten Teil des allgemeinen Zusammenhangs in Teilaufgabe b) überzuleiten. In Teilaufgabe c) soll dann der zweite Teil des allgemeinen Zusammenhangs selbst als Hypothese formuliert und anschließend begründet werden. So wird auch der Aspekt des Aufstellens von Hypothesen als Teil der Kompetenz des mathematischen Argumentierens mitberücksichtigt. Häufig wird die Achsensymmetrie zur y-Achse und die Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems bei ganzrationalen Funktionen im Rückgriff auf folgende Regeln begründet:

> *Enthalten die Potenzen von x im Funktionsterm nur gerade Exponenten (einschließlich* 0*), so ist der Graph der zugehörigen Funktion achsensymmetrisch zur* y*-Achse. Enthalten die Potenzen von x im Funktionsterm nur ungerade Exponenten (und gibt es keinen Summanden ohne Faktor* x*), so ist der Graph der zugehörigen Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.*
>
> (selbst formuliert)

Diese Regeln können wiederum auf Eigenschaften der Achsen- bzw. Punktsymmetrie zurückgeführt werden. Darauf wird in Teilaufgabe d) hingewiesen und zu einer Begründung der Regel aufgefordert. Teilaufgabe e) verallgemeinert den thematisierten Zusammenhang auf eine allgemeine Achsensymmetrie, unabhängig von der y-Achse, und eine allgemeine Punktsymmetrie, unabhängig vom Ursprung. Auch wenn die Thematisierung dieses allgemeinen Zusammenhangs beispielsweise nicht direkt vom bayerischen Lehrplan für den Unterricht erwähnt wird, kann dieser auf unterschiedlichen Niveaus durchaus auf Basis der curricularen Inhalte begründet werden. Die Teilaufgabe ist offen formuliert, indem nach der Gültigkeit ähnlicher Zusammenhänge gefragt und zur Bildung von Hypothesen angeregt wird.

Die Aussagen innerhalb der einzelnen Teilaufgaben können jeweils auf unterschiedliche Arten begründet werden. Die Symmetrien der Graphen der konkret gegebenen Funktion und deren Ableitungsfunktion in Teilaufgabe a) können wie oben erwähnt auf die Aussage über die einzelnen Exponenten im Funktionsterm der Funktion bzw. der Ableitung zurückgeführt werden. Alternativ können die Symmetrien auch direkt durch Rechnung und Anwendung der Symmetrieeigenschaft nachgewiesen werden, indem gezeigt wird, dass $f(-x) = f(x)$ und $f'(-x) = -f'(x)$. Außerdem könnte die spezielle Aussage auch aus der allgemeinen Aussage aus Teilaufgabe b) abgeleitet werden, wenn Teilaufgabe b) zuerst bearbeitet wird. Die allgemeine Aussage kann dabei auf die Regel über die Exponenten zurückgeführt werden. Dann muss aber zusätzlich begründet werden, warum der Funktionsterm der Ableitung nur ungerade Exponenten besitzt. Die Aussage könnte aber auch unabhängig von der Gestalt des Funktionsterms begründet werden, indem beide Seiten der Gleichung $f(-x) = f(x)$ mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet werden, um so den Zusammenhang $f'(-x) = -f'(x)$ zu erhalten. Teilaufgabe c) kann analog zu Teilaufgabe b) bearbeitet werden, sobald folgende Hypothese aufgestellt ist: Ist der Graph einer (ganzrationalen) Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung, so ist der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion achsensymmetrisch zur y-Achse. Die in Teilaufgabe d) angesprochene Regel könnte die bereits thematisierte Regel über die Art der Exponenten der Potenzen von x sein, die aus dem Zusammenhang $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$ hergleitet werden kann. Es könnte aber auch eben dieser Zusammenhang damit gemeint sein, der auf die geometrische Eigenschaft der Achsensymmetrie bzw. Punktsymmetrie zurückgeführt werden kann. Die Verallgemeinerung der Symmetrien in Teilaufgabe e) kann algebraisch oder geometrisch durch Verschiebung des Graphen mit Hilfe der vorher gezeigten Aussagen begründet werden. Je nachdem ob dabei anschaulich mit Hilfe von Grundvorstellungen der Ableitung oder algebraisch argumentiert wird, sind Argumente unterschiedlicher Art und Komplexität gefragt, sodass unterschiedlich leistungsstarke Schüler durch diese Aufgabe gefordert und gefördert werden können.

Aufgabe 2: Anzahl von Extrema
Die in Abbildung 7.4 dargestellte Aufgabe 2 wurde auf Basis mehrerer Schulbuchaufgaben entwickelt:

> *Die Funktion f sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades.*
> *Welche der Aussagen sind wahr? Begründe.*
>
> a) *f hat mindestens einen Hochpunkt*
> b) *f hat höchstens zwei lokale Extremwerte.*
> *[…]*
>
> (nach Lergenmüller/Schmidt 2009a, S. 187/10)[9]
>
> *Begründen Sie für ganzrationale Funktionen:*
>
> a) *Ist der Grad von f gerade, so hat f mindestens eine Extremstelle.*
> b) *Wenn f drei verschiedene Extremstellen hat, so ist der Grad von f mindestens 4.*
> c) *Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n hat höchstens $n - 1$ Extremstellen.*
>
> (nach Götz et al. 2009, S. 87/4)
>
> *Zeigen Sie, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades entweder einen Tief- und einen Hochpunkt oder genau einen Terrassenpunkt oder aber keinen solchen Punkt hat.*
>
> (nach Jahnke/Scholz 2009, S. 80/9)

In der Aufgabe aus *Neue Wege 6* (Lergenmüller/Schmidt 2009a, S. 187) werden allgemeine Eigenschaften ganzrationaler Funktionen dritten Grades beurteilt und begründet. In der Aufgabe aus *Fokus 11* (Jahnke/Scholz 2009, S. 80) geht es allgemein um die Existenz von Extrem- oder Terrassenpunkten bei ganzrationalen Funktionen dritten Grades. Und auch die Aufgabe aus *Lambacher Schweizer 11* (Götz et al. 2009, S. 87) thematisiert den Zusammenhang zwischen dem Grad einer ganzrationalen Funktion und der Anzahl an Extremstellen. Alle diese Aufgaben sind durch die thematisierten allgemeinen Zusammenhänge sehr abstrakt und komplex.

Für die zweiten Aufgabe der Lernumgebung wurde die Idee des Zusammenhangs zwischen dem Grad einer ganzrationalen Funktion und der Anzahl der Extrema aufgegriffen und daraus eine neue Aufgabe mit mehreren Teilaufgaben entwickelt. Diese baut den Zusammenhang bei ganzrationalen Funktionen dritten Grades auf, indem in Teilaufgabe a) anhand zweier Beispiele begründet und dann zu allgemeinen Aussagen übergegangen wird. In Teilaufgabe b) wird die zu begründende Aussage noch vorgegeben, in Teilaufgabe c) soll dann über die

[9] Siehe Anhang D im elektronischen Zusatzmaterial.

Aufgabe 2:

a)	★	Begründen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$ zwei lokale Extrema besitzt und die Funktion g mit $g(x) = x^3 + x$ kein lokales Extremum besitzt.
b)	★★	Begründen Sie folgende Aussage: Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat maximal 2 lokale Extrema.
c)	★★	Gibt es eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit genau einem lokalen Extremum? Begründen Sie Ihre Antwort.
d)	★★	Finden Sie jeweils eine alternative Begründungsart für die Aussagen in Teilaufgabe a).
e)	★★★	Formulieren Sie ähnliche Aussagen über ganzrationale Funktionen vierten Grades und begründen Sie diese.

Abbildung 7.4 Aufgabe 2 der Lernumgebung: Anzahl von Extrema

Existenz einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit genau einem lokalen Extremum entschieden werden. Teilaufgabe d) regt zum Nachdenken über alternative Begründungsarten für die am Beispiel begründete Aussage an. In der letzten Teilaufgabe wird der Zusammenhang dann auf ganzrationale Funktionen vierten Grades übertragen, indem zur Hypothesenbildung aufgefordert wird und anschließend Begründungen eingefordert werden.

Die Existenz bzw. Nichtexistenz von Extrema bei den Beispielen in Teilaufgabe a) kann mit Hilfe der ersten Ableitung nachgerechnet oder visuell am Verlauf des Graphen begründet werden. Da Leitkoeffizient und Nullstellen am Funktionsterm abgelesen werden können, ist der wesentliche Verlauf des Graphen von f relativ einfach zu erkennen. Der Graph von g ist streng monoton wachsend, da die beiden Summanden des Funktionsterms x^3 und x jeweils zu streng monoton wachsenden Funktionen gehören. Die strenge Monotonie von g kann alternativ auch algebraisch nachgewiesen werden. In Teilaufgabe b) können aus der Tatsache, dass die Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion dritten Grades eine ganzrationale Funktion zweiten Grades ist, Aussagen über deren Nullstellen gemacht werden. Ähnlich kann in Teilaufgabe c) argumentiert werden. Alternativ kann in Teilaufgabe c) visuell über die möglichen Verläufe von Graphen ganzrationaler Funktionen dritten Grades argumentiert werden oder algebraisch mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung einer allgemeinen ganzrationalen Funktion dritten Grades. Für Teilaufgabe e) können Hypothesen darüber formuliert werden, wie viele Extrema eine ganzrationale

Funktion vierten Grades mindestens und höchstens hat, oder über die (Nicht-) Existenz einer ganz bestimmten Anzahl von Nullstellen, analog zu den Aussagen in den vorhergehenden Teilaufgaben.

Aufgabe 3: Begründung einer Kalkülregel
Die in Abbildung 7.5 dargestellte Aufgabe 3 basiert im Gegensatz zu den ersten beiden Aufgaben nicht auf Aufgaben aus Schulbüchern sondern auf der Idee, dass Lernende Kalkülregeln nicht nur anwenden, sondern diese auch hinterfragen und begründen sollten.

In der Aufgabe werden zwei Kalkülregeln erarbeitet: Für eine differenzierbare Funktion f und alle Elemente x des Definitionsbereichs gilt: $(-f)' = -\big(f'\big)$[10] und $(f(-x))' = -f'(-x)$. Geometrisch können diese Regeln als Spiegelungen der zugehörigen Funktionsgraphen an der x-Achse bzw. an der y-Achse interpretiert werden, was durch Teilaufgabe a) angeregt wird. Die Tatsache, dass der Graph von q durch Spiegelung des Graphen von p an der x-Achse hervorgeht, kann entweder begründet werden, indem jeder x-Wert unter der Abbildung von p und von q verglichen wird, woran erkannt wird, dass die Punkte $(x|p(x))$ und $(x|q(x))$ jeweils symmetrisch bezüglich der x-Achse liegen. Oder es kann ein beliebiger, aber fester Punkt des Graphen von p an der x-Achse gespiegelt werden, wobei festgestellt werden kann, dass der Bildpunkt immer auf dem Graphen von q liegt. Die Aussage von Teilaufgabe b) kann entweder nachgerechnet oder direkt allgemein analog zu Teilaufgabe c) gezeigt werden. Die Kalkülregel in Teilaufgabe c) kann auf unterschiedliche Weise begründet werden, durch Betrachtung von Steigungsdreiecken, durch Anwendung der Produktregel oder durch Anwendung der Kettenregel. Auch die Aussage in Teilaufgabe d) kann mit Hilfe einer Spiegelung interpretiert werden, in diesem Fall an der y-Achse. Dann sind analoge Argumentationen zu denen in Teilaufgabe c) möglich.

[10] Im Zuge der Evaluationsstudie (siehe Kap. 8) entstand die Überlegung, dass es eventuell besser gewesen wäre, die erste Kalkülregel analog zur zweiten auch mit den Argumenten x zu formulieren, da Schüler diese Schreibweise möglicherweise besser gewohnt sind: $(-f(x))' = -\big(f'(x)\big)$. In der ursprünglichen Konzeption der Aufgabe wurde das Argument weggelassen, um den Fokus auf den Unterschied zwischen $(-f)'$ und $-\big(f'\big)$ zu lenken und dabei Ablenkung durch die Argumente zu vermeiden.

Aufgabe 3:

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen p und q mit

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x - 2,$$
$$q(x) = -p(x).$$

a) ★ Bestimmen Sie den Funktionsterm von q explizit und begründen Sie, dass der Graph von q durch Spiegelung des Graphen von p an der x-Achse hervorgeht.

b) ★ Begründen Sie, dass für die Ableitungen p' und q' gilt:
$$q'(x) = -p'(x).$$

c) ★★ Begründen Sie auf zweierlei Arten, dass für jede beliebige, differenzierbare Funktion f gilt:
$$(-f)' = -(f').$$
(Tipp: Verwenden Sie geometrische Überlegungen wie in Teilaufgabe a) und/oder Ableitungsregeln.)

d) ★★★ Finden Sie mehrere Begründungen dafür, dass für jede beliebige, differenzierbare Funktion g gilt:
$$\big(g(-x)\big)' = -g'(-x).$$

Abbildung 7.5 Aufgabe 3 der Lernumgebung: Begründung einer Kalkülregel

7.1.3 Differenzierungspotenzial der Aufgaben[11]

Bei der Entwicklung der Lernumgebung wurden verschiedene Elemente eingearbeitet, die für Differenzierungspotenzial sorgen.[12] So sind bei allen Begründungs(teil)aufgaben unterschiedliche Arten des Begründens möglich. Des Weiteren ist der gesamte Aufbau der Aufgaben an das Konzept der Blütenaufgaben nach Bruder und Kollegen (Bruder 2008; Bruder/Reibold 2010; 2011; 2012; Bruder et al. 2015; siehe Abschnitt 6.2.3) angelehnt. Das bedeutet, dass die jeweilige Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung aus mehreren Teilaufgaben besteht, durch die ein mathematischer Zusammenhang aus dem Themenbereich der Ableitung ganzrationaler Funktionen argumentativ beleuchtet wird. Gemäß dem speziellen Aufbau von Blütenaufgaben (siehe Abschnitt 6.2.3) sind sowohl geschlossene als auch selbstdifferenzierende Teilaufgaben enthalten. Die jeweils

[11] In zusammengefasster Form wurden die grundsätzlichen Überlegungen zum Differenzierungspotenzial der Aufgaben, die in diesem Abschnitt dargestellt werden, und zu den zughörigen Erkenntnissen der Evaluationsstudie (siehe Abschnitt 8.4.5) bereits in einem Tagungsband der GDM veröffentlicht (vgl. Bersch 2020a).

[12] Ausführliche Erläuterungen zu den in diesem Abschnitt angesprochenen theoretischen Hintergründen sind in Abschnitt 6.2 zu finden.

ersten Teilaufgaben (bzw. die ersten beiden in Aufgabe 3) stellen dabei eine Einstiegshilfe insbesondere für schwächere Schüler dar und tragen somit auch zur Differenzierung bei. Dies soll der Gefahr entgegenwirken, dass offene, selbständigkeitsorientierte Lernformen insbesondere lernschwächeren oder unsicheren Lernenden weniger Lernchancen bieten könnten als stark vorstrukturierter Unterricht (Bruder/Reibold 2012, S. 89). Erst über die Teilaufgaben hinweg nimmt der Grad der Öffnung zu. Insgesamt kann die Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung auch als gestuft differenzierende Aufgabe im Sinne von Leuders und Prediger (2016) angesehen werden, die durch zusätzliche selbstdifferenzierende Elemente angereichert ist.

Bei allen Teilaufgaben sind stets unterschiedliche Begründungsarten möglich. Als niedrigschwelliger Einstieg wird in der jeweils ersten Teilaufgabe (bzw. den ersten beiden Teilaufgaben in Aufgabe 3) mit Hilfe vorgegebener, konkreter Funktionen am Beispiel argumentiert und dadurch auf einen allgemeinen Zusammenhang hingearbeitet. In der daran anschließenden Teilaufgabe wird der Zusammenhang, der bereits am Beispiel begründet wurde, verallgemeinert und allgemein begründet. Bei Aufgabe 1 und 2 wird dann eine eigene Hypothesenbildung mit anschließender Begründung zu einem analogen Zusammenhang angeregt. Bei Aufgabe 3 wird ein weiterer allgemeiner Zusammenhang vorgegeben, der auf unterschiedliche Arten begründet werden soll. Bei Aufgabe 1 wird anschließend zur Begründung einer verwendeten Regel aufgefordert, bei Aufgabe 2 wird nach einer alternativen Begründungsart gefragt. Die letzten Teilaufgaben von Aufgabe 1 und 2 fordern dann zu einer Hypothesenbildung hinsichtlich eines weiteren, mit den vorherigen Teilaufgaben verknüpften Zusammenhangs einschließlich Begründung auf. Dabei steigt das inhaltliche Niveau insgesamt an, es sind aber weiterhin Begründungen auf unterschiedlichen Niveaus möglich. Die Schüler bearbeiten die Teilaufgaben in vorgegebener Reihenfolge und gelangen je nach Leistungsstärke unterschiedlich weit. Im Idealfall kommen alle Lernenden mindestens bis zur vorletzten Teilaufgabe, die letzte Teilaufgabe stellt einen Zusatz für besonders leistungsstarke Schüler dar. Aber selbst für die leistungsschwächsten Schüler bietet die erste Teilaufgabe eine Möglichkeit am gleichen mathematischen Zusammenhang mit Hilfe von Beispielen zu arbeiten.

Die jeweils letzte Teilaufgabe der Aufgaben 1 und 2 ist offen konzipiert. Dies bietet eine Mitgestaltungsmöglichkeit für die Lernenden, sodass eine Differenzierung durch die selbstständige Auswahl und Formulierung der Inhalte die anschließend bearbeitet werden, erfolgt. Dies wird von Hennen (2008) als „höchste Form einer inhaltlichen Differenzierung“ (ebd., S. 124) bezeichnet.

Die Lernumgebung ist zwischen einer strikt offenen, selbstdifferenzierenden und einer geschlossenen Form von Differenzierung einzuordnen. Sie folgt damit dem Plädoyer von Hußmann und Prediger (2007) für eine Kombination aus geschlossener und offener Differenzierung. Einerseits haben die Schüler die Möglichkeit, individuelle Lernwege zu finden, Mitverantwortung für ihr Lernen zu übernehmen und auf eigenem Niveau und in eigener Geschwindigkeit zu lernen. Andererseits wird ihnen ein Teil der Verantwortung dadurch abgenommen, dass die Teilaufgaben mit Hilfe didaktischer Überlegungen angeordnet sind und insbesondere die ersten Teilaufgaben eine geschlossene Form aufweisen. Sie werden zudem von allen Lernenden ohne Wahlmöglichkeit bearbeitet. Dadurch wird den Lernenden der Einstieg in ihren Lernweg zugewiesen und sie können sich in der weiteren Bearbeitung immer freier für ihr eigenes Bearbeitungsniveau und die passende Geschwindigkeit entscheiden. Die vorliegende Lernumgebung bietet somit insbesondere eine Möglichkeit, Schüler an offene Differenzierungsformen heranzuführen.

7.2 Entwicklung von Formulierungshilfen[13]

Zur fokussierten sprachlichen Unterstützung der Lernenden wird die zentrale Aufgabe innerhalb der Lernumgebung durch jeweils auf sie abgestimmte Formulierungshilfen ergänzt. In Abschnitt 6.3.4.3 wurde erläutert, wie Sprach- und Textbausteine eine sprachliche Unterstützung darstellen können. Außerdem wurde die Idee der Wortspeicher zur fokussierten Sprachförderung theoretisch vorgestellt. Im Sinne der Autoren, die solche Wortspeicher verwenden[14], können diese sowohl Begriffe als auch sprachliche Wendungen und Sätze beinhalten. Für die vorliegende Arbeit wurden diese Ideen als Basis genommen und weiterentwickelt. Dabei wird zwischen Formulierungshilfen auf Wortebene und auf Satzebene unterschieden. Demzufolge wurden zwei verschiedene Varianten von Formulierungshilfen für die entwickelte Lernumgebung entworfen, die als *Wortspeicher* beziehungsweise *Satzbausteine* bezeichnet werden. Abgestimmt auf die drei Aufgaben wurden jeweils ein Wortspeicher und Satzbausteine entwickelt, sodass insgesamt sechs Versionen der Lernumgebung vorliegen.

[13] In zusammengefasster Form wurden die grundsätzlichen Überlegungen zur Entwicklung der Formulierungshilfen, die in diesem Abschnitt dargestellt werden, und zu den zughörigen Erkenntnissen der Evaluationsstudie (siehe Abschnitt 8.4.6) bereits in einem Tagungsband der GDM veröffentlicht (vgl. Bersch 2020b).

[14] Verboom (2008; 2012; 2017), Götze (2013; 2015; 2016), Meyer und Prediger (2012).

Angelehnt an die Ideen zur Konzeption von Wortspeichern im Primarbereich von Verboom (2008; 2012; 2017) und Götze (2013; 2015; 2016) und in der Sekundarstufe I von Meyer und Prediger (2012) wurden Formulierungshilfen für den Einsatz in der Sekundarstufe II entwickelt, indem die Aufgaben von Experten bearbeitet und deren Formulierungen als Basis genommen wurden. Die Idee, zentrale Begriffe, Ausdrücke und Satzbausteine als Unterstützung für die Sprachproduktion optisch präsent zu haben, wird aufgegriffen und in den beiden Varianten wie folgt ausdifferenziert: Der *Wortspeicher* (siehe als Beispiel Abb. 7.7), der in Form von Notizzetteln visualisiert ist, enthält thematisch gruppierte Fachbegriffe und Funktionswörter zur Verknüpfung von Sätzen, die für das Argumentieren typisch sind. Außerdem gibt es einen Notizzettel, der Platz für eigene Ergänzungen bietet. So kann der Wortspeicher individuell, während der Arbeit mit diesem, weiterentwickelt werden. Die *Satzbausteine* sind Verbindungen von Wörtern und Teilsätze, die auf einem abgebildeten Notizblock vermerkt und durch einen zusätzlichen Notizzettel mit Funktionswörtern angereichert sind (siehe als Beispiel Abb. 7.6). Da die Formulierungshilfen nicht während der Erarbeitung des betreffenden Wortschatzes eingesetzt werden, sondern in einer Unterrichtsphase, in der die verwendeten Begriffe und Wendungen bereits bekannt sein sollten, werden diese nicht mit den Schülern gemeinsam erarbeitet, sondern sind auf dem Aufgabenblatt mit abgedruckt.

Der in dieser Arbeit verwendete Wortspeicher stellt durch die Beschränkung auf die Wortebene eine reduzierte Form der Wortspeicher im Sinne von Verboom und Götze dar. Diese Reduktion basiert auf der Überlegung, dass der Wortspeicher erstens nicht bei der Erarbeitung erstellt wird, sondern zur Wiederholung und Aktivierung der Begriffe dient, und zweitens nicht in der Primarstufe, sondern in der Sekundarstufe II eingesetzt wird. Die hier verwendeten Satzbausteine sind eine Art erweiterter Wortspeicher verglichen mit Verboom, Götze oder Meyer/Prediger, da Wendungen und Teilsätze für eine komplette Argumentationsaufgabe in unterschiedlichen Varianten zur Verfügung gestellt werden und die sprachliche Komplexität in der Sekundarstufe II entsprechend höher ist als in der Primar- oder niedrigen Sekundarstufe. Dies hat einen großen Umfang der Satzbausteine zur Folge. Diese Variante dient nicht nur der Aktivierung von Begriffen, sondern soll die Schüler insbesondere beim Verbalisieren und Formulieren mathematischer Zusammenhänge unterstützen und damit auf die Schülerschwierigkeiten beim Formulieren und Verschriftlichen eingehen, die in der vorangegangenen Interviewstudie von Lehrkräften benannt wurden. Diese Variante wird auch der Forderung von Prediger (2017, S. 231) gerecht, nicht isolierte Wörter, sondern Satzbausteine in das Zentrum der von ihr sogenannten Sprachschatzarbeit zu rücken. In beiden Varianten wird die Sprache nicht isoliert

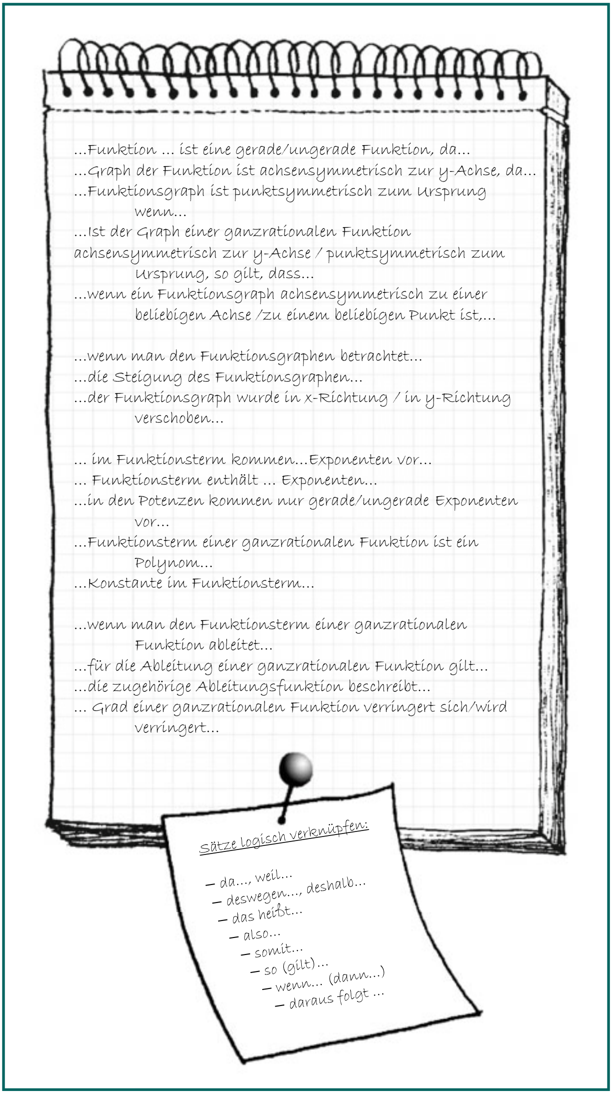


Abbildung 7.6 Satzbausteine zu Aufgabe 1 der Lernumgebung[15]

[15] Die Satzbausteine zu den weiteren Aufgaben sind in Anhang I im elektronischen Zusatzmaterial zu finden.

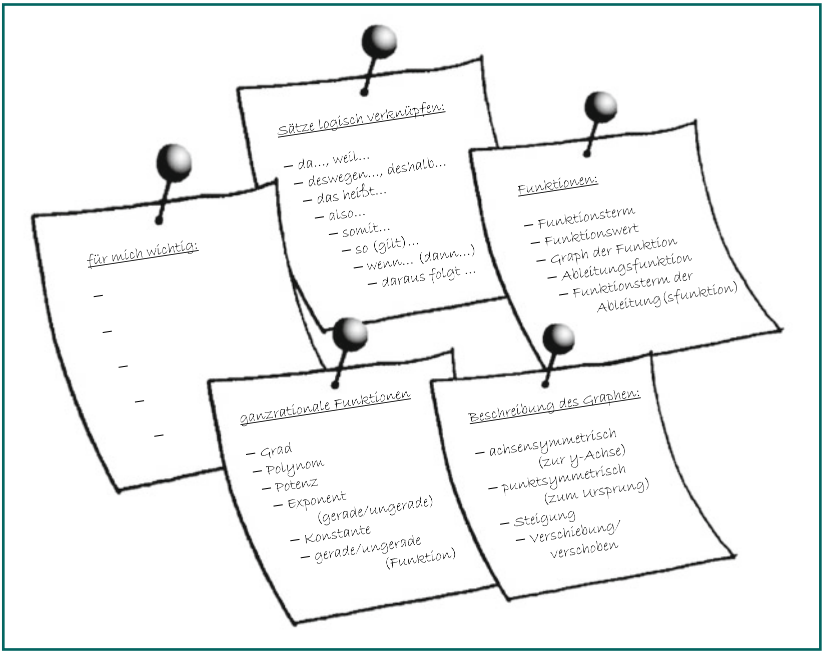


Abbildung 7.7 Wortspeicher zu Aufgabe 1 der Lernumgebung[16]

gefördert, sondern in der Diskurspraktik des Argumentierens anhand geforderter Begründungen in Textform, sodass die Spracharbeit nicht auf die Wort- und Satzebene beschränkt bleibt, sondern in die Text- und Diskursebene integriert wird.

Die Unterstützung der Lernenden durch Formulierungshilfen kann als *Scaffolding* bezeichnet werden, da die Begriffe im Wortspeicher und die Satzbausteine ein Gerüst bieten, das speziell auf die Aufgabe abgestimmt und damit nicht dauerhaft, sondern speziell für die Bearbeitung der Lernumgebung vorgesehen ist. Es kann anschließend im Unterricht nochmals darauf zurückgegriffen und mit der Zeit dann ganz weggelassen werden. Da diese Unterstützung vorab geplant ist und allen Schülern angeboten wird, handelt es sich um eine Form des Makroscaffolding, die bei Bedarf während des Einsatzes spontan durch

[16] Die Wortspeicher zu den anderen Aufgaben sind in Anhang I im elektronischen Zusatzmaterial zu finden.

zusätzliches Mikroscaffolding angereichert werden kann. Einige der Charakteristika, die Pertzel und Schütte (2016) für sprachförderliche Strategien und Techniken im Sinne des Scaffolding anführen, sind in der Konzeption der Lernumgebung mit den zur Verfügung gestellten Formulierungshilfen berücksichtigt (siehe Abschnitt 6.3.4.2): Die Formulierungshilfen sind so auf die Aufgaben abgestimmt, dass sie sich direkt auf die sprachlichen Anforderungen der einzelnen Aufgaben beziehen. Durch den gestuften Aufbau der Aufgaben sind sowohl die inhaltlichen als auch die sprachlichen Anforderungen in leistbare einzelne Schritte gegliedert, die sich an einer zentralen Idee orientieren und so insgesamt der Lösung einer komplexen Problemstellung dienen. Die Formulierungshilfen sind dabei nur für den Zeitraum der Lernumgebung und damit temporär begrenzt angelegt. Die sprachlichen Mittel sind derart ausgestaltet, dass die sprachliche Entwicklung durch eine notwendige reflektierte Auswahl aus vorgegebenen Vorschlägen und der Möglichkeit des Hinzunehmens eigener Formulierungen gefördert wird. Sie sind zudem so ausgewählt, dass die Aufmerksamkeit auf relevante sprachliche Phänomene gelenkt und die Spezifika der Textsorte einer mathematischen Begründung bewusst gemacht werden. Durch das zusätzlich angebotene Lösungsbeispiel (siehe Abschnitt 7.3) steht ein Modelltext zur Verfügung, der vorab im Plenum diskutiert werden kann. Durch die angeregte methodische Ausgestaltung (siehe Abschnitt 7.4) ist auch eine Rückmeldung zu den formulierten Begründungen durch Mitschüler und abschließend in Einzelfällen auch durch die Lehrkraft vorgesehen (vgl. Pertzel/Schütte 2016, S. 21 f.).

Durch die Formulierungshilfen auf Wort- und (Teil)Satzebene wird auch die Sprachproduktion auf Textebene unterstützt. Eine zusätzliche Unterstützung auf Textebene liegt durch das ausgearbeitete Lösungsbeispiel (siehe Abschnitt 7.3) vor. Die Schüler sollen beim Bearbeiten der Aufgaben lernen, ihre Begründungen schriftlich zu formulieren. Die verwendete Sprache ist also sowohl medial als auch konzeptionell schriftsprachlich geprägt. Ziel ist eine Verwendung von Sprache im bildungs- und fachsprachlichen Register, wobei die Grenzen fließend sind (siehe Abschnitt 6.3.1). Die im Wortspeicher zur Verfügung gestellten Begriffe sind überwiegend fachsprachlich, wobei die aufgeführten Funktionswörter eher auf der Ebene der Bildungssprache einzuordnen sind. Die in der Variante *Satzbausteine* verwendete Sprache zeigt auch viele fachsprachliche Anteile, die mit bildungssprachlichen Elementen verknüpft werden.

Die beiden Varianten der Formulierungshilfen können somit auf dem Kontinuum Alltagssprache – Bildungssprache – Fachsprache zwischen Bildungs- und Fachsprache eingeordnet werden, wobei die Satzbausteine tendenziell näher an der Bildungssprache zu verorten sind als der Wortspeicher. Dabei ist allerdings im Sinne der Differenzierung eine Variation der möglichen Sprachproduktion in beide Richtungen denkbar. Zieht man analog das Kontinuum von Brunner (2014a) zum Begründen heran, so kann die erwartete Sprachproduktion im Bereich des logischen Argumentierens mit mathematischen Mitteln mit Tendenz hin zum Beweisen eingeordnet werden. In der in dieser Arbeit verwendeten Terminologie des Argumentierens als Oberbegriff können die Produkte hingegen als Argumentationen, die auch Begründungen sind, aber tendenziell keine Beweise, bezeichnet werden.

Was einzelne Lehrkräfte von ihren Schülern erwarten, wie sie die vorgegebenen Wörter oder Satzbausteine in eine schriftliche Begründung einbauen, hängt von der implizit vorhandenen Norm in jeder einzelnen Lerngruppe ab, die für die von Tiedemann (2015) als *Unterrichtsfachsprache* bezeichnete Realisierung von Bildungs- und Fachsprache im Unterricht gelten. Es handelt sich hier nicht um die Erarbeitung eines neuen Wortschatzes, sondern mehr um eine Wiederholung und Aktivierung, die den Übergang der Formulierungen vom rezeptiven oder sogar potenziellen in den produktiven Wortschatz unterstützen soll.

Beim Schreiben im Rahmen der Lernumgebung zeigen sich beide Funktionen von Sprache, sowohl die kognitiv-epistemische als auch die kommunikative. Erstens werden die Lernenden durch die Aufforderung zur schriftlichen Formulierung der Argumentationen zum Ordnen ihrer Gedanken und folglich zu tieferem Durchdringen der mathematischen Zusammenhänge angeleitet. Zweitens werden die Schüler durch die Weiterarbeit mit den schriftlichen Produkten bei der Kommunikation über fachliche Inhalte und über die Sprache selbst unterstützt. Außerdem werden als Lerngegenstand die schriftsprachlichen Kompetenzen der Schüler im Bereich des Argumentierens und der Analysis gefördert, die sie für die Teilnahme am fachlichen Diskurs inner- und außerhalb des Mathematikunterrichts brauchen. Durch den Fokus auf die schriftliche Sprachproduktion werden auch alle weiteren Vorteile genutzt, die das Schreiben im Fachunterricht hat (siehe Abschnitt 6.3.3).

Insgesamt leistet die sprachliche Säule der Lernumgebung einen Beitrag zu einem sprachsensiblen Fachunterricht nach Leisen (2013; 2018; siehe Abschnitt 6.3.4.1). Die zur Verfügung gestellten Formulierungshilfen unterstützen insbesondere sprachschwache Schüler ungeachtet des Ursprungs dieser nachteiligen Lernvoraussetzungen. Die Sprache wird durch die Konzentration auf Formulierungen gefördert, aber nicht isoliert, sondern an Fachinhalten, mit denen sie untrennbar verbunden ist. Dabei hat das fachliche Lernen trotz allem Vorrang vor dem sprachlichen. Abgestimmt auf die jeweilige Aufgabe wurden die Formulierungshilfen auf Wort- und Teilsatzebene sowie das Lösungsbeispiel auf der Textebene gezielt konzipiert (siehe auch Abschnitt 7.3). Dabei sind die Aufgaben an sich und deren sprachliche Anforderungen so gewählt, dass sie für die Lernenden eine fachlich und sprachlich authentische aber bewältigbare Herausforderung darstellen. Die Lernumgebung erfüllt die Eigenschaften, die Pertzel und Schütte (2016) für Lernaufgaben im sprachsensiblen Unterricht zusammenstellen (siehe Abschnitt 6.3.4.1): Die Aufgabenstellungen zielen auf zusammenhängend formulierte Argumentationen ab, wobei individuelle Lösungswege ermöglicht werden und erwünscht sind. Die Aufgabenstellungen liegen schriftlich vor, was eine genaue Analyse und Rückfragen von Seiten der Lernenden ermöglicht. Das Lösungsbeispiel (siehe Abschnitt 7.3) bietet Anregungen und Impulse, die den Schülern zeigen, wie sie bei der Bearbeitung vorgehen können. Die verwendeten Operatoren entsprechen den gewöhnlicherweise im Unterricht verwendeten und die notwendigen Fachinhalte sollten aus dem vorangegangenen Unterricht bekannt sein. Die verwendeten Materialien enthalten an Stellen, die möglicherweise ungewöhnlich erscheinen, zusätzliche Kommentare und Erklärungen auf einer Metaebene und die Erwartungen an die Produkte des Argumentationsprozesses sind durch das zusätzliche Lösungsbeispiel offengelegt.

Da die Lernumgebung auf Grundlage der Erkenntnisse der Interviewstudie (siehe Kap. 5) unabhängig von der Ermittlung von Lernvoraussetzungen in einer speziellen Lerngruppe entwickelt wurde, konnte auf diese nicht im Speziellen eingegangen werden. Durch die verschiedenen Versionen der Lernumgebung ergibt sich aber für Lehrkräfte die Möglichkeit, für die jeweilige Lerngruppe die Version auszuwählen, die sie als am besten geeignet einschätzen. Dies erfordert die aktive Auswahl durch die jeweilige Lehrkraft auf Grundlage vorausgehender Beobachtungen sprachlicher Lernvoraussetzungen ihrer Schüler.

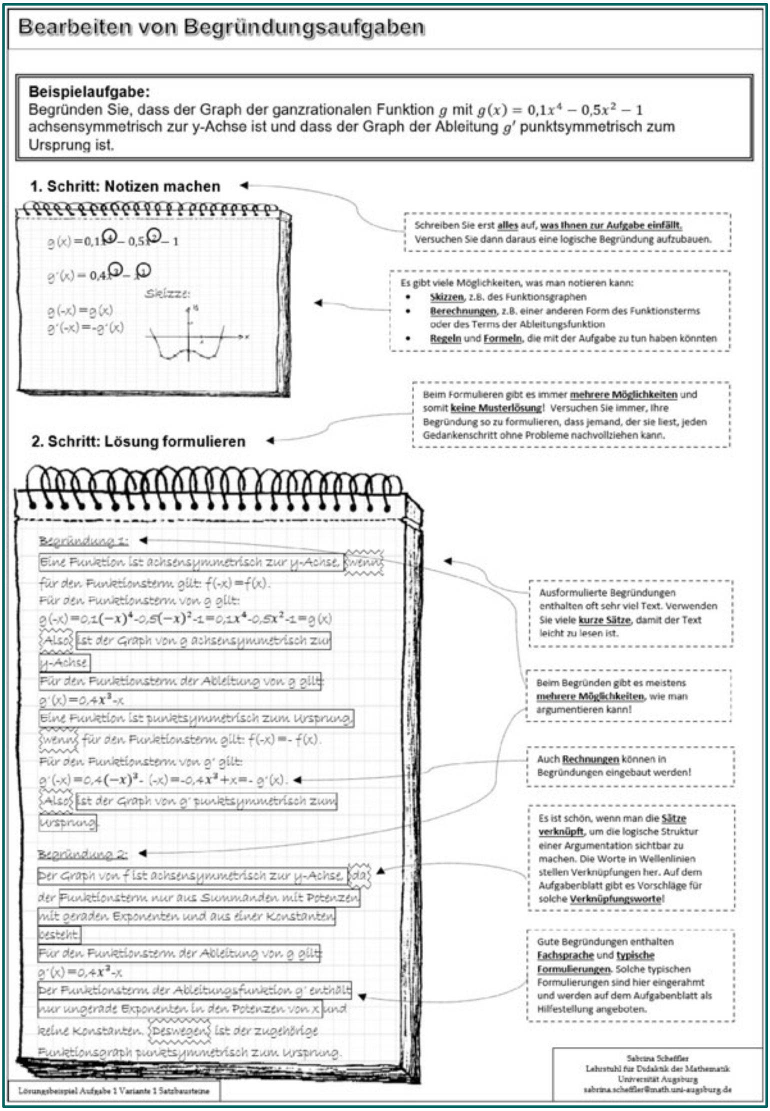
7.3 Konstruktion eines vorangestellten Lösungsbeispiels

Ein weiterer Bestandteil der Lernumgebung ist ein vorangestelltes Lösungsbeispiel (siehe Abb. 7.8), das sowohl als differenzierendes Element als auch als sprachliches Muster dient und den Schülern einen Erwartungshorizont für ihre schriftlichen Bearbeitungen der Lernumgebung aufzeigt. Gleichzeitig fördert das Nachvollziehen des Lösungsbeispiels die passive Komponente der Argumentationskompetenz von Lernenden. Dabei werden die Vorteile des Lernens aus Lösungsbeispielen genutzt, die in Abschnitt 6.4.2 aufgezeigt wurden.

Für jede der drei Aufgaben wurde ein passendes Lösungsbeispiel konstruiert, das jeweils an die erste Teilaufgabe angelehnt ist. Somit stellen das Lösungsbeispiel und Teilaufgabe a) zusammen ein *example problem pair* im Sinne von Atkinson und Kollegen (2000, S. 195) dar. Dies sorgt für eine zusätzliche Unterstützung schwächerer Schüler, denen der Einstieg in das Argumentieren dadurch ermöglicht wird, dass sie parallel zu ihrer Bearbeitung ein Modell nutzen können. Somit behandeln alle drei Varianten des Lösungsbeispiels eine Begründungsaufgabe aus dem Bereich der ganzrationalen Funktionen. Der Fokus auf das mathematische Argumentieren, das die *learning domain* des Lösungsbeispiels darstellt, ist nur am konkreten Inhalt der *exemplifying domain* möglich. Die Eigenschaften des Lösungsbeispiels werden in Metakommentaren am Rand expliziert. Dabei werden auch Strategien vermittelt, wie das Sammeln von Ideen zur Aufgabe zu Beginn oder das Denken an einen möglichen Adressaten beim Formulieren der Begründung. Somit können die Lösungsbeispiele als *triple-content examples* nach der Klassifizierung von Schworm, Renkl und Kollegen (Schworm/Renkl 2007; Renkl et al. 2009; siehe Abschnitt 6.4.1) bezeichnet werden. Wie für die Lernumgebung im Allgemeinen gilt auch für das Lösungsbeispiel im Speziellen, dass durch den Themenbereich der Ableitung ganzrationaler Funktionen ein vergleichsweise elementares Gebiet als *exemplifying domain* gewählt wurde und somit ein relativ großer Anteil der Kapazität des Arbeitsgedächtnisses auf das mathematische Argumentieren verwendet werden kann. Dadurch sollen die Lerneffekte der Schüler im Bereich des Argumentierens möglichst groß sein, während störende Effekte durch fehlendes Vorwissen im inhaltlichen Bereich möglichst minimiert werden, aber keinesfalls vermieden werden können.

Das jeweils zur Aufgabe passende Lösungsbeispiel ist auf einem separaten Blatt dargestellt. Am oberen Rand findet sich die Beispielaufgabe, die anschließend gelöst wird. Auf zwei abgebildeten Notizblöcken sind zuerst Notizen zur Aufgabe notiert und anschließend zwei mögliche Begründungen formuliert. Somit wird eine explorative und eine produktive Phase des Begründungsprozesses ausgewiesen. Parallel dazu gibt es Kommentare auf einer Metaebene, die Eigenschaften und verwendete Strategien knapp beschreiben und mit Hilfe von Pfeilen auf die jeweils beschriebenen Elemente verweisen (siehe Abb. 7.8).

Lösungsbeispiel 1 thematisiert wie Aufgabe 1 die Achsen- und Punktsymmetrie von Funktionsgraphen einer Funktion und ihrer Ableitung. Das Lösungsbeispiel begründet dabei speziell, dass eine konkret durch einen Funktionsterm gegebene Funktion einen zur y-Achse symmetrischen Funktionsgraphen hat und dass der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems ist. Als „Notizen“ sind der Funktionsterm und der Term der Ableitung notiert und deren Exponenten markiert, außerdem sind die Bedingungen für Punkt- und Achsensymmetrie aufgeschrieben und der Funktionsgraph skizziert. Für die Lösung der Aufgabe selbst werden zwei alternative Begründungen dargestellt. Die erste Variante argumentiert mit Hilfe der Definition von Achsen- und Punktsymmetrie, die zweite Variante mit Hilfe der Regel bezüglich der Exponenten ganzrationaler Funktionen (siehe Abschnitt 7.1.2).



Bearbeiten von Begründungsaufgaben

Beispielaufgabe:
Begründen Sie, dass der Graph der ganzrationalen Funktion g mit $g(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}5x^2 - 1$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist und dass der Graph der Ableitung g' punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

1. Schritt: Notizen machen

$g(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}5x^2 - 1$

$g'(x) = 0{,}4x^3 - x$

Skizze:

$g(-x) = g(x)$

$g'(-x) = -g'(x)$

Schreiben Sie erst **alles** auf, **was Ihnen zur Aufgabe einfällt.** Versuchen Sie dann daraus eine logische Begründung aufzubauen.

Es gibt viele Möglichkeiten, was man notieren kann:

- **Skizzen**, z.B. des Funktionsgraphen
- **Berechnungen**, z.B. einer anderen Form des Funktionsterms oder des Terms der Ableitungsfunktion
- **Regeln** und **Formeln**, die mit der Aufgabe zu tun haben könnten

Beim Formulieren gibt es immer **mehrere Möglichkeiten** und somit **keine Musterlösung**! Versuchen Sie immer, Ihre Begründung so zu formulieren, dass jemand, der sie liest, jeden Gedankenschritt ohne Probleme nachvollziehen kann.

2. Schritt: Lösung formulieren

Begründung 1:

Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für den Funktionsterm gilt: $f(-x) = f(x)$.
Für den Funktionsterm von g gilt:
$g(-x) = 0{,}1(-x)^4 - 0{,}5(-x)^2 - 1 = 0{,}1x^4 - 0{,}5x^2 - 1 = g(x)$
Also ist der Graph von g achsensymmetrisch zur y-Achse.
Für den Funktionsterm der Ableitung von g gilt:
$g'(x) = 0{,}4x^3 - x$
Eine Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für den Funktionsterm gilt: $f(-x) = -f(x)$.
Für den Funktionsterm von g' gilt:
$g'(-x) = 0{,}4(-x)^3 - (-x) = -0{,}4x^3 + x = -g'(x)$.
Also ist der Graph von g' punktsymmetrisch zum Ursprung.

Begründung 2:

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da der Funktionsterm nur aus Summanden mit Potenzen mit geraden Exponenten und aus einer Konstanten besteht.
Für den Funktionsterm der Ableitung von g gilt:
$g'(x) = 0{,}4x^3 - x$
Der Funktionsterm der Ableitungsfunktion g' enthält nur ungerade Exponenten in den Potenzen von x und keine Konstanten. Deswegen ist der zugehörige Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Ursprung.

Ausformulierte Begründungen enthalten oft sehr viel Text. Verwenden Sie viele **kurze Sätze**, damit der Text leicht zu lesen ist.

Beim Begründen gibt es meistens **mehrere Möglichkeiten**, wie man argumentieren kann!

Auch **Rechnungen** können in Begründungen eingebaut werden!

Es ist schön, wenn man die **Sätze verknüpft**, um die logische Struktur einer Argumentation sichtbar zu machen. Die Worte in Wellenlinien stellen Verknüpfungen her. Auf dem Aufgabenblatt gibt es Vorschläge für solche **Verknüpfungsworte**!

Gute Begründungen enthalten **Fachsprache** und **typische Formulierungen**. Solche typischen Formulierungen sind hier eingerahmt und werden auf dem Aufgabenblatt als Hilfestellung angeboten.

Lösungsbeispiel Aufgabe 1 Variante 1 Satzbausteine

Sabrina Scheffler
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
sabrina.scheffler@math.uni-augsburg.de

Abbildung 7.8 Eine Variante des Lösungsbeispiels zu Aufgabe 1[17]

---

[17] Die andere Variante und die Lösungsbeispiele zu den anderen Aufgaben sind in Anhang I im elektronischen Zusatzmaterial zu finden.

Lösungsbeispiel 2 thematisiert wie Aufgabe 2 die Anzahl von Extrema einer ganzrationalen Funktion, speziell am Beispiel einer konkret definierten Funktion dritten Grades, deren Funktionsterm in faktorisierter Form gegeben ist. Gezeigt werden soll, dass die Funktion genau zwei Extrema hat. In den „Notizen“ zu dieser Aufgabe sind wesentliche Eigenschaften der Funktion wie der Grad, der Leitkoeffizient und die Anzahl der Nullstellen notiert. Außerdem ist eine ausmultiplizierte Form des Funktionsterms, eine Berechnung der Ableitungsfunktion, das Nullsetzen dieser und eine Skizze des Funktionsgraphen dargestellt. Die eigentliche Lösung enthält wiederum zwei alternative Begründungsmöglichkeiten. In der ersten Variante wird aus den gegebenen Eigenschaften der Verlauf des Graphen beschrieben, der keine andere Möglichkeit als genau zwei Extrema zulässt. In der zweiten Variante werden die Nullstellen der Ableitung berechnet und aus deren zugehörigem Vorzeichenwechsel geschlossen, dass es sich dabei um Extremstellen handelt.

Lösungsbeispiel 3 behandelt analog zu Aufgabe 3 zwei Funktionen, die über ihre Funktionsterme in einem gewissen Zusammenhang stehen. In diesem Fall ist eine konkrete Funktion f gegeben und eine Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot f(x)$. Es soll begründet werden, dass der Graph von g durch Streckung des Graphen von f mit Faktor 2 in y-Richtung hervorgeht und dass für die Ableitungen gilt: $g'(x) = 2f'(x)$. In den „Notizen“ wird der Funktionsterm von g berechnet, sowie die Terme der Ableitungsfunktionen von f und g. Außerdem gibt es einen Hinweis auf die Faktorregel und eine Skizze, die die beiden Funktionsgraphen zeigt und in der mit Hilfe von Pfeilen die Streckung des Graphen von f angedeutet ist. In der eigentlichen Lösung der Aufgabe werden zwei Begründungsvarianten präsentiert. Die erste betrachtet alle x-Werte unter f und g und folgert die Lage der Punkte $(x|g(x))$ und $(x|f(x))$ in Bezug auf die x-Achse und damit die Streckung des Graphen von f, um denjenigen von g zu erhalten. Dass $g'(x) = 2f'(x)$ gilt, wird durch explizite Berechnung der Funktionsterme von f' und g' gezeigt. In der zweiten Variante wird ein beliebiger, aber fester Punkt des Graphen von f betrachtet und dieser mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt. Da dieser dann auf dem Graphen von g liegt, folgt die Behauptung. Aus dem Zusammenhang $g(x) = 2f(x)$ der Funktionsterme wird dann mit der Faktorregel begründet, dass für die Ableitungen $g'(x) = 2f'(x)$ gilt.

Durch das Lösungsbeispiel wird aufgezeigt, wie beim Argumentieren formuliert werden kann und sollte, dass mit Begründungen auf unterschiedlichen Niveaus gearbeitet werden kann und dass es beim Begründen nicht eine einzige, eindeutige Lösung gibt. Da keine ausführlichen Lösungsschritte dargestellt werden, könnte das Lösungsbeispiel in der Terminologie von Renkl und Kollegen (2004, S. 80) als *gelöstes Beispielproblem* bezeichnet werden. Die Lernenden müssen bei der Bearbeitung der Begründungsaufgaben in der Lernumgebung einen Prozess durchlaufen, um eine Begründung zu finden und diese anschließend angemessen schriftlich darzustellen. Dieser Prozess wird verkürzt durch die beiden Schritte im Lösungsbeispiel „Notizen machen“ und „Lösung formulieren“ abgebildet. Um die Gefahr eines falschen Eindrucks zu vermeiden, dass das Argumentieren eine geradlinige, deduktive Tätigkeit sei, wird der erste Schritt „Notizen machen“ sehr offen dargestellt, ist nicht deduktiv oder argumentativ angelegt und wird durch Metakommentare am Rand weiter expliziert. Außerdem werden zwei mögliche Begründungen im Lösungsbeispiel dargestellt, um aufzuzeigen, dass es zu mathematischen Aussagen mehrere mögliche Begründungen geben kann und ein Lösungsbeispiel keine eindeutige, sogenannte *Musterlösung* darstellt. Anstelle von heuristischen Strategien werden in der Lernumgebung im ersten Schritt heuristische Hilfsmittel wie Skizzen, kurze Berechnungen oder das Zusammenstellen von bekannten Regeln und Formeln vorgestellt (vgl. Bruder 2003, S. 21, S. 23), die beim Argumentationsprozess hilfreich sein können.

Die drei Varianten des Lösungsbeispiels sind jeweils im integrierten Format dargestellt, sodass bei der Beschäftigung mit diesen keine Zuordnung verschiedener Elemente erfolgen muss. Die Metakommentare, die das Lösungsbeispiel selbst am Rand ergänzen, verweisen mit Pfeilen direkt auf diejenigen Stellen im Beispiel, auf die sie sich beziehen, sodass sie gemeinsam mit den jeweiligen Elementen wahrgenommen werden können. Zudem wird dadurch die Aufmerksamkeit der Lernenden auf relevante Elemente des Beispiels gelenkt.

Im Sinne der Differenzierung stellt das Lösungsbeispiel unter anderem eine zusätzliche Hilfestellung für schwächere Schüler dar. Durch die Passung des Lösungsbeispiels zur jeweiligen Aufgabe stellt die Aufforderung zum Bearbeiten der Teilaufgaben automatisch eine Aufforderung zur Selbsterklärung und damit tieferen Verarbeitung des Lösungsbeispiels vor allem für leistungsschwächere Lernende dar, da die Ideen des Lösungsbeispiels auf die Teilaufgabe übertragen werden müssen. Zusätzliche Erklärungen finden die Lernenden in den begleitenden Metakommentaren am Rand des Lösungsbeispiels. Außerdem kann das Lösungsbeispiel durch das gezielte Offenhalten seines Einsatzes für unterschiedliche Schüler unterschiedliche Rollen übernehmen und somit ein weiteres Differenzierungselement darstellen. So kann das Lösungsbeispiel gleichzeitig sowohl Sprachmuster als auch Argumentationsvorbild und Erwartungshorizont sein.

Eine wichtige Aufgabe des Lösungsbeispiels ist es, den Schülern ein Sprachmuster zur Verfügung zu stellen, anhand dessen sprachliche Eigenschaften einer ausformulierten Begründung verdeutlicht werden. Dadurch wird die sprachliche Unterstützung durch die Formulierungshilfen auf Wort- und Satzebene ergänzt durch ein sprachliches Muster, das in der Text- und Diskursebene einzuordnen ist. Das Lösungsbeispiel ist dazu an die jeweils gewählte Variante der Formulierungshilfen angepasst. Wird die Variante *Wortspeicher* gewählt, sind in der formulierten Begründung Fachbegriffe und sprachliche Verknüpfungen hervorgehoben und kommentiert. Wird die Variante *Satzbausteine* eingesetzt, sind im zugehörigen Lösungsbeispiel Teilsätze markiert und beschrieben. Ein großer Unterschied zu den sonstigen in der Literatur beschriebenen Lösungsbeispielen besteht darin, dass eine Konzentration auf die sprachlichen Oberflächenmerkmale explizit gewünscht ist, wenn auch nicht ausschließlich. Durch die Betonung sprachlicher Elemente trägt das Lösungsbeispiel auch zur Reflexion sprachlicher Eigenschaften bei. In der anschließenden eigenen Sprachproduktion können die Lernenden die erkannten Eigenschaften dann selbst einbauen.

7.4 Vorschläge zu Methoden, Sozialformen und Medien

Um die entwickelte Lernumgebung zu einem Gesamtarrangement von Inhalten, Prozessen, Materialien, Medien, Unterrichtsmethoden, Sozialformen, Kommunikationsformen sowie intendierten Tätigkeiten von Lehrperson und Lernenden (siehe Abschnitt 6.1) zu komplettieren, wurden ergänzende Vorschläge zur methodischen und medialen Gestaltung und zum Einsatz von Sozialformen sowie zusätzliche optionale Materialien entwickelt. Dazu gibt es für Lehrkräfte Lösungsvorschläge zu den einzelnen Aufgaben, die insbesondere verschiedene Begründungsmöglichkeiten für die einzelnen Teilaufgaben aufzeigen.

Die Lehrkräfte erhalten für den Einsatz der Lernumgebung eine PowerPoint-Präsentation, die sie bei der Besprechung des Lösungsbeispiels einsetzen können. Dadurch würden die Lernenden nicht mit allen Informationen, die sich auf dem Blatt mit dem Lösungsbeispiel befinden, gleichzeitig konfrontiert. Für den Einsatz der Lernumgebung im Unterricht wird den Lehrkräften ein zeitlicher Rahmen von 90 Minuten vorgeschlagen. Zu Beginn soll das Lösungsbeispiel im Plenum besprochen werden. Hierbei kann optional die PowerPoint-Präsentation verwendet werden. Für die Arbeit mit der Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung wird ein Ich-Du-Wir-Format vorgeschlagen. Dies entspricht dem Vorschlag von Grave und Thiemann (2010, S. 19) zum methodischen Einsatz von Blütenaufgaben und der Feststellung von Storz (2018, S. 68), dass das Begründen mit Verstehen auf individueller Ebene beginnt und dann mit gegenseitigem Überzeugen auf sozialer Ebene fortgesetzt wird. Es ist wichtig, dass jeder Schüler sich erst selbständig mit den Aufgaben auseinandersetzt und vor allem eine Lösung notiert. Dies dient der Kompetenzentwicklung im Bereich der schriftsprachlichen Fertigkeiten. Die

Schüler erhalten den Auftrag, die Aufgaben der Reihenfolge nach zu bearbeiten, da die Teilaufgaben zwar unabhängig voneinander sind, aber gemäß der Steigerung von Niveau und Offenheit angeordnet. Besonders leistungsstarken Schülern könnte als Differenzierungsmaßnahme vorgeschlagen werden, die Aufgaben mit nur einem Stern zu überspringen. Um die Motivation der Schüler zu erhöhen, die Lösungen auch wirklich ausführlich aufzuschreiben, ist es sinnvoll, wenn sie dabei für einen möglichen Adressaten formulieren. Deswegen arbeiten die Lernenden in der nächsten Phase mit einem Mitschüler zusammen und lesen gegenseitig ihre Begründungen. Dabei geben sie sich Feedback sowohl zu den inhaltlichen Begründungen als auch zu den Formulierungen. Durch die Adressatenorientierung erkennen die Schüler die Bedeutung genauer Formulierungen. Damit möglichst Schüler eines ähnlichen Leistungsstandes zusammenarbeiten, kommen sie immer dann zusammen, wenn ein Schüler mit den Aufgaben einer Sternkategorie fertig ist. Er trifft sich dann mit demjenigen Mitschüler, der als nächstes mit der gleichen Kategorie fertig wird, oder direkt vor ihm fertig geworden ist. Alternativ könnten Phasen der Zusammenarbeit auch nach jeder Teilaufgabe stattfinden. Am Ende der Arbeitsphase werden im Plenum unterschiedliche Bearbeitungen der Schüler besprochen. Auch dabei wird sowohl auf unterschiedliche Begründungen als auch auf Formulierungen eingegangen. Die Aufgaben, die mit drei Sternen markiert sind und somit über das Ziel für alle Lernenden hinausgehen, werden nicht im Plenum besprochen. Hier hat die Lehrkraft die Möglichkeit, individuelles Feedback zu geben. Trotz dieser Überlegungen zum Einsatz der Lernumgebung wird die detaillierte Ausgestaltung des Einsatzes den Lehrkräften überlassen, da diese bei ihren Planungen die Eigenschaften ihrer Lerngruppe und ihren persönlichen Unterrichtsstil berücksichtigen müssen.

8 Qualitative Studie zur Evaluation der Lernumgebung

Durch eine qualitative Studie mit 14 Lehrkräften wurde die in Kapitel 7 entwickelte Lernumgebung evaluiert. So wurde untersucht, inwiefern die in der Lernumgebung umgesetzten Konzepte (siehe Kap. 7) aus Sicht von Lehrkräften die intendierte Wirkung erzielen und somit eine adäquate Möglichkeit für Lehrkräfte bieten, im Analysisunterricht auf die durch die Interviewstudie (siehe Kap. 5) erkannten Probleme beim Argumentieren zu reagieren. Indirekt wurde dadurch auch erhoben, wie Lehrkräfte mit der Lernumgebung umgehen und diese akzeptieren. Dazu sollten folgende Forschungsfragen beantwortet werden:

1. Welche Varianten der Lernumgebung setzen Lehrkräfte wie ein?
2. Welche Erfahrungen machen Lehrkräfte im Unterricht in Bezug auf die in der Lernumgebung beinhalteten Aufgaben und wie beurteilen sie die Aufgaben?
3. Welche Erfahrungen machen Lehrkräfte mit dem vorangestellten Lösungsbeispiel?
4. Welche Erfahrungen machen Lehrkräfte hinsichtlich der Formulierungshilfen *Wortspeicher* und *Satzbausteine* beim Einsatz der Lernumgebung?
5. Welche Erfahrungen machen Lehrkräfte hinsichtlich des Differenzierungspotenzials der Lernumgebung?
6. Welche Verbesserungsvorschläge für eine überarbeitete Version der Lernumgebung können aus den Erfahrungen der Lehrkräfte abgeleitet werden?

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_8.

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_8

Die an der Studie teilnehmenden Lehrkräfte wählten aus den sechs verschiedenen Versionen der Lernumgebung (siehe Kap. 7) eine[1] aus und setzten diese in ihrem Unterricht ein. Anschließend wurden ihre Erfahrungen in einem schriftlichen Interview erhoben. Durch das gewählte Design konnte die Expertise von Lehrkräften genutzt werden, um Unterrichtskonzepte zu evaluieren, deren direkter Einfluss sonst nur schwer messbar ist. Das gewählte Design orientiert sich insgesamt an Ideen des Design Research (vgl. z. B. Cobb et al. 2003; 2016; Prediger et al. 2012; Bakker 2018; Gravemeijer/Prediger 2019). Da jedoch nicht direkt die Wirkung der Lernumgebung auf die Lernprozesse der Schüler, sondern indirekt deren Wirksamkeit durch die Lehrkräfte erhoben wurde, war zunächst offen, ob eine zirkuläre Weiterentwicklung mit erneuter Erprobung der Lernumgebung im Sinne des Design Research möglich wäre. Die Ergebnisse zeigen, dass mit Hilfe der gewählten Methode interessante Erkenntnisse gewonnen werden konnten, jedoch eine Weiterentwicklung der Materialien auf Grundlage dieser Erkenntnisse nicht sinnvoll erscheint (siehe Abschnitt 8.4).

8.1 Teilnehmende Lehrkräfte

Die Evaluationsstudie fand im ersten Halbjahr des Schuljahres 2017/2018 statt. Es nahmen 15 Lehrkräfte teil, wovon eine ausgenommen wurde[2]. Von den 14 verbliebenen Teilnehmern unterrichteten zum Zeitpunkt der Studie vier an bayerischen Gymnasien, vier an beruflichen Oberschulen (Fachoberschule und Berufsoberschule) in Bayern, einer am Bayernkolleg und sechs an Gymnasien in Rheinland-Pfalz. Die Lehrkräfte wurden so ausgewählt, dass nach dem Prinzip der maximalen strukturellen Variation (Kruse 2015, S. 242) eine möglichst breite Vielfalt gegeben war. Aufgrund der Verfügbarkeit ergab sich ein unausgewogenes Geschlechterverhältnis von vier Lehrerinnen und zehn Lehrern. Die Schnittmenge

[1] Es war intendiert, dass sich die Lehrkräfte für eine Version entscheiden, diese einsetzen und von ihren Erfahrungen damit berichten. Allerdings hielten sich nicht alle Lehrkräfte daran und setzten teilweise mehrere Versionen oder eine Mischung daraus ein. Die dabei gemachten Erfahrungen wurden in der Analyse auch mitberücksichtigt.

[2] Die Lehrkraft, die nachträglich aus der Studie ausgenommen wurde, füllte den Fragenbogen, der die Basis für das schriftliche Interview darstellte, nur teilweise aus und reagierte nicht mehr auf weitere Anfragen.

mit den Lehrkräften, die bereits an der Interviewstudie teilgenommen hatten, umfasst vier Lehrkräfte, wobei eine davon zwischenzeitlich die Schule gewechselt hatte[3]. Sechs Lehrkräfte waren im Alter zwischen 25 und 34 Jahren, vier Lehrkräfte im Alter zwischen 35 und 44 Jahren, drei Lehrkräfte im Alter zwischen 45 und 54 Jahren und nur eine Lehrkraft im Alter zwischen 55 und 64 Jahren. Von den Lehrkräften hatte ein Großteil eine Berufserfahrung zwischen einem Jahr und zehn Jahren, drei hatten eine Berufserfahrung von 11 bis 20 Jahren und zwei eine Berufserfahrung von 21 bis 30 Jahren. Es zeigt sich also, dass die Teilnehmer tendenziell eher jung waren und eher wenig Berufserfahrung hatten. Vier der Lehrkräfte setzten die Lernumgebung in zwei Parallelklassen ein. Zwei davon beantworteten die Interviewfragen gemeinsam für beide Klassen, die anderen beiden füllten die Interviewfragen für beide Klassen getrennt aus. Dadurch ergibt sich eine Gesamtzahl von 16 Interviews als Grundlage für die Auswertung.

8.2 Die Methode der schriftlichen Interviews

Für die systematische, qualitative Erfassung von Rückmeldungen der Lehrkräfte zum Einsatz der Lernumgebung wurde die Methode der schriftlichen Interviews gewählt. Dabei werden reflexive Schreibprozesse stimuliert und unter Abwesenheit des Interviewers in einer, im Vergleich zu mündlichen Interviews, verzögerten Art und Weise vollzogen. Dies ermöglicht eine Verlangsamung des Denkens und Reflektierens und gleichzeitig eine Überarbeitung und spätere Wiederaufnahme des Schreibproduktes. Trotzdem ist der Schreibprozess im schriftlichen Interview kommunikativ und reaktiv. Außerdem ist das Schreibprodukt auf einen konkreten Leser ausgerichtet (Schiek 2014, S. 380). Durch die Schriftlichkeit sind die Äußerungen in schriftlichen Interviews „weniger spontan, besser durchdacht und erschöpfender“ (Bortz/Döring 2015, S. 308). Die gewählte Methode bietet sich in der vorliegenden Studie vor allem an, um den Lehrkräften genügend Zeit zur Reflexion des Unterrichtsgeschehens zu lassen und so eine tiefere Verarbeitung ihrer Erfahrungen und eine systematische Präsentation dieser zu ermöglichen. Außerdem wurde vermutet, dass negative Kritik an der Lernumgebung in der

[3] Aufgrund der kleinen Schnittmenge wurden die Daten der Teilnehmer beider Studien nicht zueinander in Verbindung gebracht.

distanzierteren Variante eher geäußert wird als in einer face-to-face-Situation mit der Entwicklerin der Lernumgebung. Im Gegensatz zur vorausgegangenen Interviewstudie (siehe Kap. 4 & 5) ist hier die Spontaneität der Antworten weniger relevant. Die Möglichkeit der Rückfragen im schriftlichen Interview kann wertvolle Erkenntnisse bringen und so auch Unklarheiten beim Verständnis der Antworten der Befragten klären. So ist auch weniger subjektive Interpretation notwendig.

Für die vorliegende Studie wurde die Grundform des Leitfadeninterviews gewählt, um gezielt auf einzelne Aspekte der Lernumgebung eingehen zu können. Grundlage des Interviews bot ein Fragebogen[4], der die Leitfragen enthält und als Dokument per E-Mail an die Studienteilnehmer übermittelt wurde. Diese beantworteten die Fragen schriftlich direkt in das Dokument und schickten es zurück. Die Interviewerin hatte dann die Möglichkeit, auf die Antworten zu reagieren und Rückfragen direkt in das Dokument einzufügen und dieses wiederum an den Befragten zu übermitteln. Dieses Verfahren wurde so lange wiederholt, bis mögliche Unklarheiten beseitigt waren und die Interviewerin alle Fragen als ausreichend beantwortet einschätzte.

8.3 Auswertungsmethodik

Die schriftlichen Interviews wurden anonymisiert, indem Namen von Personen oder Schulen gelöscht oder ersetzt und konkrete Angaben zu Alter und Berufsjahren durch Intervalle ersetzt wurden. Anschließend wurden die Daten mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse (siehe Kap. 4) im Programm *f4analyse* ausgewertet[5]. Zur Erhöhung der internen Studiengüte wurde die Checkliste von Kuckartz (2016, S. 204 f.) herangezogen (siehe Abschnitt 4.5.1). Im ersten Durchgang wurde das Material anhand deduktiv gebildeter Hauptkategorien codiert. Diese Hauptkategorien wurden auf Grundlage der Forschungsfragen und der Interviewfragen gebildet. Anschließend wurden induktiv Subkategorien

[4] Siehe Anhang J im elektronischen Zusatzmaterial.

[5] Die Teilnehmer unterschrieben in einer Einwilligungserklärung, dass das von ihnen an die Autorin übermittelte schriftliche Interview in anonymisierter Form zur Analyse und Auswertung verwendet werden darf und Ausschnitte daraus im Zusammenhang mit der Studie veröffentlicht werden dürfen.

abgeleitet. Das endgültige Kategoriensystem und spezielle Entscheidungen im Codierprozess wurden in einem Codiermanual mit Codierleitfaden[6] festgehalten. Darin wurden die Kategorien definiert und mit Hilfe von Ankerbeispielen konkretisiert. Ein zweiter Codierer kategorisierte im Anschluss zwei zufällig ausgewählte Interviews mit Hilfe des Codierleitfadens. Dies entspricht dem von Kuckartz (2016, S. 215 f.) empfohlenen Verfahren zur Berechnung der Intercoder-Übereinstimmung zur Überprüfung der Güte des Codierschemas (siehe Abschnitt 4.5.1). Im ersten Durchlauf konnte eine Übereinstimmung von circa 78 % erreicht werden. Nach einem konsensuellen Diskussionsprozess der unterschiedlich zugewiesenen Codes durch die beiden Codierer auf Grundlage der Kategoriendefinitionen und einer Anpassung des Kategoriensystems konnte in einer zweiten Überprüfung eine Übereinstimmung von circa 86 % erreicht werden. Lotz et al. (2013, S. 94) schlagen eine Grenze von 85 % als Mindestanforderung für eine angemessene Intercoder-Übereinstimmung vor. Diese wurde somit erreicht. Die beim konsensuellen Codieren getroffenen Entscheidungen und aufgefallenen Spezifika bei der Analyse wurden dann vom ersten Codierer auf die nicht-konsensuell codierten Interviews übertragen, um die Studiengüte insgesamt zu erhöhen.[7]

8.4 Ergebnisse

Abbildung 8.1 zeigt einen Überblick über die Hauptkategorien des Kategoriensystems[8]. Die Ergebnisse werden im Folgenden sortiert nach Hauptkategorien dargestellt.

[6] Siehe Anhang K im elektronischen Zusatzmaterial.

[7] Ein konsensuelles Codieren des gesamten Materials durch zwei Codierer war aufgrund der Rahmenbedingungen der Studie nicht möglich.

[8] Siehe Anhang K im elektronischen Zusatzmaterial.

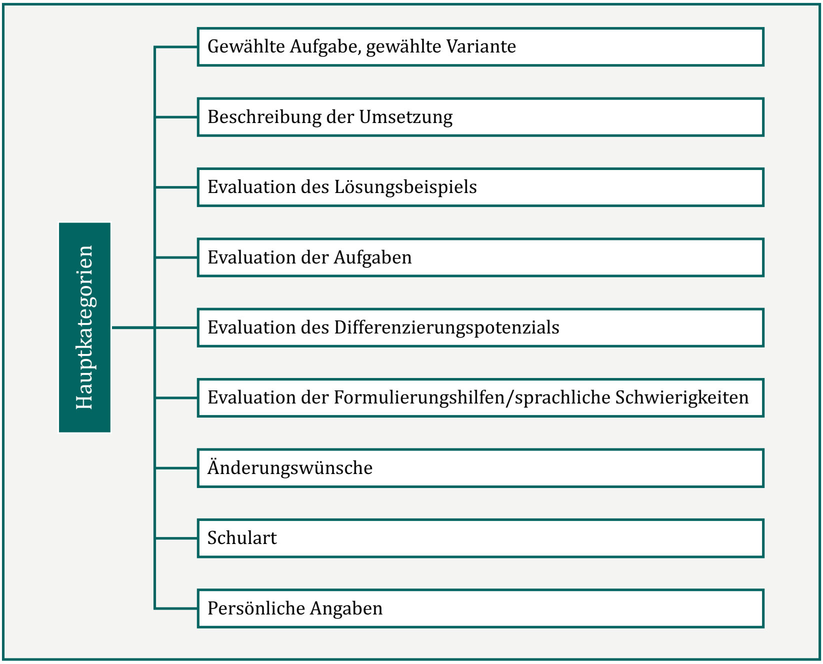


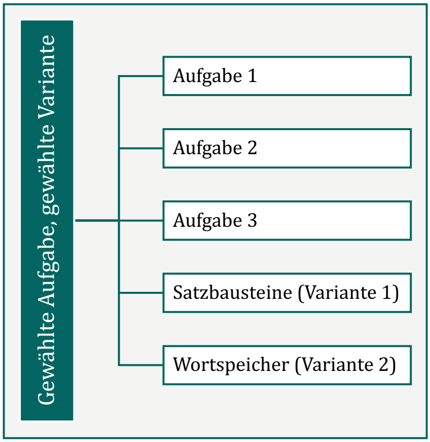
Abbildung 8.1 Hauptkategorien der qualitativen Inhaltsanalyse der schriftlichen Interviews

8.4.1 Gewählte Versionen der Lernumgebung

In der Hauptkategorie *Gewählte Aufgabe, gewählte Variante* wurden Segmente codiert, die zeigen, welche Aufgabe und welche Variante der Formulierungshilfen die Lehrkräfte aus welchen Gründen gewählt haben. Abbildung 8.2 zeigt die zugehörigen Subkategorien.

Aufgabe 1 wurde 8-mal, Aufgabe 2 wurde 9-mal und Aufgabe 3 nur 3-mal gewählt. Dabei gab es Lehrkräfte, die zwei oder alle drei Aufgaben auswählten und entweder in parallelen oder in der gleichen Klasse einsetzten. Mögliche Erklärungen und Gründe für die seltenere Wahl der dritten Aufgabe könnten sein, dass diese nicht auf einer Schulbuchaufgabe basiert und möglicherweise den Lehrkräften deswegen fremder erscheint. Außerdem ist die Aufgabe abstrakter und es gibt weniger Möglichkeiten einer kalkülorientierten Herangehensweise. Die Lehrkräfte gaben für ihre Wahl der Aufgabe oft zeitliche, thematische oder relevanzbezogene Gründe an. Eine Lehrkraft begründete ihre Wahl der ersten Aufgabe mit Ausschlusskriterien für die zweite und dritte: „Aufgabe 3 finde ich vom Inhalt her nicht interessant und Aufgabe 2 war zu dem Zeitpunkt noch nicht behandelt (Extremstellen)“ (05a1SBGymBy, Absatz 5). Eine Lehrkraft gab an, dass Aufgabe 3 gewählt wurde, da der inhaltliche Zusammenhang, der darin thematisiert wird, bereits im Unterricht besprochen wurde.

Abbildung 8.2
Subkategorien der Hauptkategorie „Gewählte Aufgabe, gewählte Variante“



Die beiden Varianten *Satzbausteine* und *Wortspeicher* wurden mit 9- beziehungsweise 10-mal ungefähr gleich häufig gewählt. Dabei ist kein offensichtlicher Zusammenhang zwischen gewählter Aufgabe und gewählter Variante zu erkennen. Auch bei der Variante gab es Lehrkräfte, die beide Varianten zeitgleich oder nacheinander einsetzten. Meist war der Grund für die Wahl der *Satzbausteine* die konkrete, umfangreichere Unterstützung für die Schüler in dieser Variante. Die Wahl auf den *Wortspeicher* fiel meist wegen des geringeren Umfangs, beispielsweise um zu fördern, „dass die Schüler eigene Formulierungen finden“ (142WSGymRLP, Absatz 4).

Insgesamt ist die Verteilung der Aufgaben und der Varianten über die unterschiedlichen Schularten hinweg ausgeglichen.

8.4.2 Beschreibung des Einsatzes der Lernumgebung im Unterricht

Mit der Hauptkategorie *Beschreibung der Umsetzung* wurden Segmente codiert, die zeigen, wie die Lehrkräfte die Lernumgebung im Unterricht einsetzten. Diese Segmente ergaben sich vorrangig aus der folgenden Frage im zugrunde liegenden Fragebogen: „Beschreiben Sie möglichst detailliert, wie Sie die Lernumgebung im Unterricht eingesetzt haben: (Zeiteinteilung, Themenblock, Vorwissen der Schüler, Sozialform, Methoden, Unterrichtsphase, etc.)“. Die Subkategorien, die sich in dieser Hauptkategorie induktiv ergaben, sind in Abbildung 8.3 dargestellt.

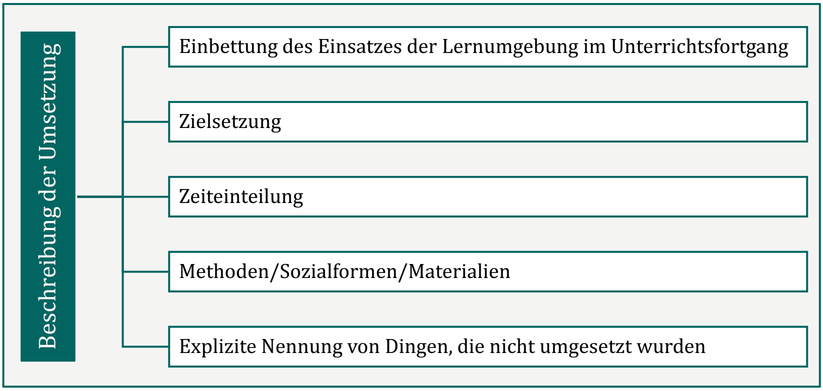


Abbildung 8.3 Subkategorien der Hauptkategorie „Beschreibung der Umsetzung“

Wie vorgesehen setzten die meisten Lehrkräfte die Lernumgebung im Bereich der Untersuchung ganzrationaler Funktionen ein, teils als Wiederholung, teils als Abschluss der Unterrichtssequenz, teils als „Stunde vor den Ferien“ oder als Prüfungsvorbereitung für Klausur oder Abitur. Somit hatten die Schüler zwar unterschiedliche inhaltliche Voraussetzungen bei der Arbeit mit den Aufgaben, brachten aber theoretisch das notwendige Vorwissen mit. Drei Lehrkräfte nannten explizit Ziele, die sie mit der gewählten Version der Lernumgebung erreichen wollten, nämlich Vorwissensaktivierung, Klausur- und Abiturvorbereitung.

In den methodischen Vorschlägen, die die Lehrkräfte mit den Materialien erhielten, die aber nicht verpflichtend umzusetzen waren, wurde ein zeitlicher Rahmen von 90 Minuten für die gesamte Arbeit mit der Lernumgebung vorgeschlagen. Beim konkreten Einsatz der Lernumgebung wurde der zeitliche Rahmen von den Lehrkräften ganz unterschiedlich angesetzt und ausgenutzt. Der gesamte Einsatz dauerte zwischen 45 und 180 Minuten, wobei die meisten Lehrkräfte die empfohlene Doppelstunde nutzten. Dabei hatten die Schüler zwischen 25 und 90 Minuten Zeit für die Arbeit mit den Aufgaben. Die Besprechung dauerte zwischen 0 und 90 Minuten.

In den methodischen Vorschlägen war eine Ich-Du-Wir-Methode vorgeschlagen worden (siehe Abschnitt 7.4). Diese wurde nicht immer eingesetzt, aber die Schüler arbeiteten zumindest immer selbständig, in Einzelarbeit, in Partnerarbeit oder in Kleingruppen mit den Aufgaben, sodass sie die Möglichkeit zur Selbsttätigkeit und eigenständigen Formulierung hatten. Ein Austausch zwischen den Schülern über ihre Bearbeitungen und eine gemeinsame Reflexion im Plenum fand jedoch nicht immer statt. Drei Lehrkräfte gaben explizit an, dass sie die Aufgaben am Ende nicht mit den Schülern besprachen. Das vorangestellte Lösungsbeispiel, das nicht als optional, sondern als fester Bestandteil der Lernumgebung ausgewiesen war, wurde auch nicht immer eingesetzt und einmal als eine Art Lösungskontrolle nach der Bearbeitung der Aufgaben. Die meisten Lehrkräfte setzten das Lösungsbeispiel zu Beginn der Lernumgebung ein, jedoch gab es auch hier Unterschiede in der methodischen Ausgestaltung. Meist wurde das Lösungsbeispiel mit der optionalen PowerPoint-Präsentation besprochen. Nur einzelne Lehrkräfte verzichteten auf die PowerPoint-Präsentation. Die meisten Lehrkräfte gaben an, das Lösungsbeispiel mit den Schülern gemeinsam im Plenum besprochen zu haben. Teils wurden die Schüler mit einbezogen, indem sie das Lösungsbeispiel vorlasen, mündlich zusammenfassten oder vorab eine Lösung vorschlugen; teils wurde das Lösungsbeispiel aber auch von der Lehrkraft allein präsentiert. Einzelne Lehrkräfte berichteten explizit, dass sie bei der Besprechung des Lösungsbeispiels auf spezielle Punkte hinwiesen, wie auf die gewünschte Genauigkeit oder auf spezielle Formulierungen.

8.4.3 Evaluation des Lösungsbeispiels

In der Hauptkategorie *Evaluation des Lösungsbeispiels* finden sich Aussagen, die das Lösungsbeispiel evaluierend thematisieren und Antworten auf Fragen, die auf das Lösungsbeispiel bezogen waren. Die induktiv gebildeten Subkategorien sind in Abbildung 8.4 dargestellt.

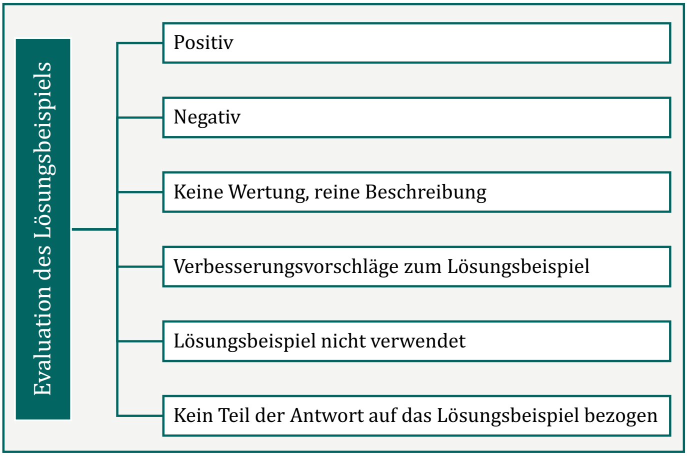


Abbildung 8.4 Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation des Lösungsbeispiels“

Obwohl das Lösungsbeispiel fester Bestandteil der Lernumgebung und nicht optional ist, entschieden sich zwei Lehrkräfte explizit gegen den Einsatz des Lösungsbeispiels. Bei der einen Lehrkraft handelte es sich um einen zweiten Einsatz einer anderen Version der Lernumgebung in derselben Klasse, was sie als Grund angab, dass das Lösungsbeispiel nicht mehr notwendig gewesen wäre. Die andere Lehrkraft entschied sich bewusst gegen das Lösungsbeispiel, da sie „die Induktion künstlicher Denkschemata vermeiden wollte“ (0823SBGymBy, Absatz 31). Abgesehen von dieser Lehrkraft gibt es von allen Lehrkräften (unter anderem) positive Äußerungen zum Lösungsbeispiel. Neben allgemeinen Kommentaren wie „hat gut funktioniert“ (FB021SBFOSKolBy, Absatz 17) oder „sinnvoll und hilfreich“ (FB033WSGymRLP, Absatz 15) wurden einzelne Aspekte positiv hervorgehoben: die Orientierung für die Schüler, die enthaltene Skizze, die Ausführlichkeit, der Modellcharakter, die Einteilung in zwei Schritte und zwei mögliche Begründungen, die verwendeten Pfeile und die Eigenschaft als „Eisbrecher“ und Einstiegshilfe. Außerdem wurde teilweise die Funktionalität des Lösungsbeispiels begründet, beispielsweise durch die Hilfe für Sprachgebrauch und Argumentation, durch die Förderung eines Grundverständnisses oder durch die gezielte Auseinandersetzung mit Argumentationsproblemen. Insgesamt zeigt sich ein breites Spektrum an positiven Äußerungen zum Lösungsbeispiel. Dieses wurde ergänzt durch negative Äußerungen, einerseits zum Lösungsbeispiel an sich und andererseits zum Umgang der Schüler mit dem Lösungsbeispiel. Es wurde kritisiert, dass zu viel vorbesprochen würde, die Begründungen zu umfangreich seien, dass es „überfrachtet“ wirke und dass der unbekannte Begriff des *Leitkoeffizienten* verwendet würde. Außerdem wurde beschrieben, dass sich die Schüler zu wenig daran orientierten und dass diese den Sinn für die erste Teilaufgabe im Anschluss nicht mehr sahen. Zudem gab es einen Verbesserungsvorschlag, nämlich, das Lösungsbeispiel als Lückentext zu formulieren, sodass die Schüler ihr Vorwissen bei der Besprechung einbringen müssen. Außerdem schrieb eine Lehrkraft in der Reflexion, dass sie das Lösungsbeispiel vielleicht hätte intensiver nutzen sollen. Bei einzelnen Lehrkräften kam die Bedeutung des Lösungsbeispiels nicht richtig an, was beispielsweise aus folgender Äußerung geschlossen werden kann:

> *Ich habe aus Zeitgründen die Lösung kurz unter die Dokumentenkamera gelegt und die Schüler die Lösungen lesen lassen. Es gab wenig Rückfragen und deshalb nehme ich an, dass die bereitgestellten Lösungen sinnvoll waren. – Rückfrage: Haben sich die Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben am Lösungsbeispiel orientiert? – Das kann ich nicht beurteilen, weil ich habe die Schüler in Ruhe arbeiten lassen und die Lösungen nicht angeschaut. Aber viele meinten ja. Die guten Schüler meinten, dass die Aufgabe 1 ja total einfach wäre, weil man genau das Gleiche hinschreiben kann wie beim Lösungsbeispiel.*
>
> (FB05a1SBGymBy, Absatz 37–42)

Auffällig ist, dass nur zwei Lehrkräfte das Differenzierungspotenzial des Lösungsbeispiels in ihren Rückmeldungen erwähnten und das auch nur implizit. Eine Lehrkraft formulierte der Einsatz des Lösungsbeispiels sei „[a]bsolut sinnvoll um alle (auch schwächere) genau einzuweisen und Mut zum Anfangen zu geben“ (FB132SBGymRLP), eine andere bezog sich auf schwächere Schüler: „Sehr sinnvoll, da schlechtere Schüler oft nur mit Algorithmen arbeiten und derartige Aufgabenstellungen nicht bearbeiten. So konnten sie die Lösung des Beispiels auf ihre Aufgabe übertragen“ (FB152WSFOSKolBy). Möglicherweise deutet die fehlende Thematisierung des Differenzierungspotenzials durch die Lehrkräfte darauf hin, dass sich die intendierte Wirkung nicht entfaltete oder die Lehrkräfte das Differenzierungspotenzial des Lösungsbeispiels nicht erkannten.

8.4.4 Evaluation der Aufgaben

Mit der Hauptkategorie *Evaluation der Aufgaben* wurden Segmente codiert, in denen die Aufgabe im Zentrum der Lernumgebung, deren Inhalte, die Teilaufgaben oder die Formulierung der Aufgaben thematisiert wurden, in denen die Aufgaben gegebenenfalls miteinander verglichen wurden und die Antworten auf Fragen enthalten, die auf die Aufgaben bezogen waren. Innerhalb dieser Hauptkategorie ergaben sich die Subkategorien, die in Abbildung 8.5 dargestellt sind.

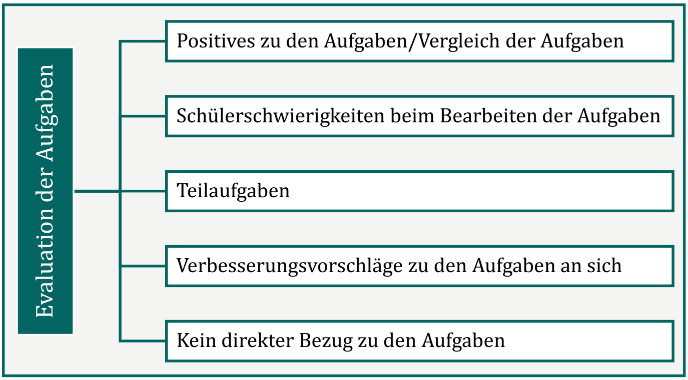


Abbildung 8.5 Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation der Aufgaben"

Zu allen drei Aufgaben wurden positive Aspekte genannt und teils spezifiziert. Beispielsweise erläuterte eine Lehrkraft, die sich für Aufgabe 2 entschieden hatte: „Aufgabenstellungen sind sehr ansprechend für Schüler. Schüler können ihre Kenntnisse über Funktionen anwenden und mit verschiedene [sic.] Möglichkeiten begründen" (FB152WSFOSKolBy, Absatz 2). Die Verständlichkeit der Aufgabenstellung und der Formulierungen wurde mehrfach und in Bezug auf alle Aufgaben genannt. Es wurde auch insbesondere die Eignung zur Förderung der Kompetenz des Argumentierens mehrfach angeführt. Außerdem berichtete eine Lehrkraft auch explizit von inhaltlichen Verbesserungen bei den Schülern. Diejenigen Lehrkräfte, die mehrere Aufgaben miteinander verglichen, konnten mehrheitlich keine Unterschiede feststellen. Eine Lehrkraft stellte heraus, dass Aufgabe 2 den Schülern besser gefiel als Aufgabe 1, unter anderem, da die

Thematik rund um Extremstellen „mehr Spaß [macht] als das formel- und algebralastige Prüfen der Symmetrie“ (FB05b2WSGymBy, Absatz 18). In Bezug auf einzelne Teilaufgaben ist auffällig, dass nur Lehrkräfte, die sich für Aufgabe 1 entschieden hatten, die mangelnde Abgrenzung der einzelnen Teilaufgaben kritisierten. Die Rückmeldungen zur letzten, sehr offenen und für leistungsstarke Schüler gedachten Teilaufgabe waren sehr unterschiedlich. Teils wurde sie als selbst für starke Schüler zu schwer empfunden, teils wurde sie als positiv für die Differenzierung herausgehoben und teils wurde angemerkt, dass die Zeit nicht ausreichend war, um auch diese letzte Teilaufgabe zu bearbeiten.

In Bezug auf die Bearbeitung der Aufgaben berichteten alle Lehrkräfte von Schwierigkeiten der Schüler unterschiedlicher Art. Schwierigkeiten, die sich direkt auf das Begründen beziehen, wurden dabei nur selten erwähnt. Meist ging es in Zusammenhang mit dem Begründen hauptsächlich um das Formulieren und Verschriftlichen der Begründungen (siehe Abschnitt 8.4.6). Einzelne Lehrkräfte berichteten von mangelnder Motivation seitens der Schüler, von Problemen, die Aufgaben graphisch zu lösen und von der Symbolik, die den Schülern Schwierigkeiten bereitete. Häufig wurde von Schwierigkeiten mit den abstrakteren, allgemeineren und damit schwierigeren Teilaufgaben, mit Transferleistungen oder Inhalten, die so noch nicht besprochen worden waren, berichtet. Beispielsweise berichtete eine Lehrkraft: „Um so [sic.] abstrakter und allgemeiner wurde [sic.], desto schwerer taten sich auch die Schüler. Das liegt sicherlich auch daran, dass, gerade die schwachen SuS, nur nach Kochrezept arbeiten und nicht wirklich die mathematischen Zusammenhänge dahinter verstehen“ (FB0912WSFOSKolBy, Absatz 22). Auffällig ist dabei, dass Äußerungen dieser Art nur von Lehrkräften stammen, die an der Beruflichen Oberschule oder am Bayernkolleg arbeiteten. Außerdem hatten die Schüler inhaltliche Schwierigkeiten mit den Aufgaben. Dies führten die Lehrkräfte auf fehlendes Vorwissen oder geringe Mathematikkenntnisse zurück, die sich dann als Hürde für das Argumentieren herausstellten. Häufig, aber nicht ausschließlich, betrifft dies Schulen des zweiten Bildungsweges. Drei Lehrkräfte gaben sogar an, dass den Schülern tendenziell alles schwerfiel. Zwei dieser Lehrkräfte unterrichten an Gymnasien in Rheinland-Pfalz, eine an einer nicht-gymnasialen Schule in Bayern. Alle drei Lehrkräfte hatten sich (unter anderem) für Aufgabe 3 entschieden.

Die Verbesserungsvorschläge im Bereich der Aufgaben passen großteils zu den berichteten Schwierigkeiten der Schüler. So wünschen sich einzelne Lehrkräfte weniger Abstraktion, dafür aber mehr Aktivierung des Vorwissens und einfachere Inhalte. Außerdem wünschte sich eine Lehrkraft eine andere Unterteilung der Aufgaben sowie Titel für die Aufgaben, um darauf verweisen zu können. Eine Lehrkraft schlug außerdem eine nächste Stufe mit weniger Hilfen vor.

8.4.5 Evaluation des Differenzierungspotenzials[9]

In der Hauptkategorie *Evaluation des Differenzierungspotenzials* wurden insbesondere Antworten auf die Leitfrage „Ist die Lernumgebung zur Differenzierung beim Argumentieren im Analysisunterricht geeignet? Warum oder warum nicht?“ und zudem Aussagen zum Differenzierungspotenzial, die an anderer Stelle gemacht wurden, gesammelt. Induktiv ergaben sich hieraus die Subkategorien, die in Abbildung 8.6 dargestellt sind.

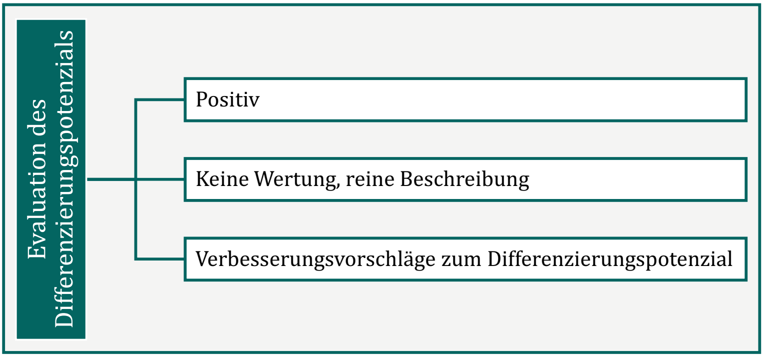


Abbildung 8.6 Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation des Differenzierungspotenzials“

Auffällig ist, dass es in diesem Bereich keinerlei negative Äußerungen gab. Nur zwei Lehrkräfte äußerten sich nicht positiv über das Differenzierungspotenzial, sondern machten nur Verbesserungsvorschläge. Zudem gab es zwei Beschreibungen, die in den Bereich der Differenzierung einzuordnen sind, die jedoch nicht wertend sind. Dabei geht es zum einen um einen Schüler mit Asperger-Syndrom und wie dieser mit den Aufgaben arbeitete und zum anderen darum, dass nicht alle Schüler alle Aufgaben bearbeiteten. Die sehr vielen positiven Äußerungen zum Differenzierungspotenzial wurden teils nicht weiter begründet, meistens aber benannten die Lehrkräfte, warum sie der Lernumgebung ein hohes Differenzierungspotenzial zuschreiben. Hier wurde angeführt,

[9] Überblicksartig wurden erste Überlegungen zu den Erkenntnissen der Evaluationsstudie hinsichtlich des Differenzierungspotenzials bereits in einem Tagungsband der GDM veröffentlicht (vgl. Bersch 2020a). Die Auswertungen wurden für diese Arbeit aber noch einmal überarbeitet.

dass verschiedene Begründungsmöglichkeiten zugelassen werden und alternative Begründungsmöglichkeiten eine inhaltliche Differenzierung ermöglichen. Außerdem wurde genannt, dass die Steigerung des Niveaus einen Einstieg für alle Schüler ermöglicht und gleichzeitig leistungsstarke Schüler herausfordert. Auch wurde die differenzierende Wirkung unterschiedlicher Arbeitstempos und Sozialformen erwähnt. Zudem wurden Aspekte genannt, die so nicht vorab intendiert waren, die sich aber dadurch ergaben, dass die Lehrkräfte mehrere Versionen der Lernumgebung einsetzten. So sorgten die unterschiedlichen Aufgaben und die unterschiedlichen Arten von Formulierungshilfen auch für Differenzierungspotenzial.

Bei den Änderungswünschen zum Differenzierungspotenzial handelt es sich um Einzelmeinungen, beispielsweise nach Hilfekarten zur letzten Teilaufgabe, noch differenzierteren Aufgabenstellungen und einer nächsten Stufe mit weniger Hilfen. Außerdem wurde angeregt, mit den Ideen früher anzusetzen und bereits ähnliche, differenzierende Aufgabenstellungen im Bereich von linearen und quadratischen Funktionen zu entwickeln.

8.4.6 Evaluation der Formulierungshilfen und sprachliche Schwierigkeiten[10]

Die Hauptkategorie *Evaluation der Formulierungshilfen/sprachliche Schwierigkeiten* war zunächst nur für die Evaluation der Formulierungshilfen gedacht. Bei der Kategorisierung fiel dann aber auf, dass die Lehrkräfte in diesem Zusammenhang immer wieder von sprachlichen Schwierigkeiten der Schüler berichteten, auf welche die Formulierungshilfen genau abzielen, sodass diese Schwierigkeiten in der Hauptkategorie mitkategorisiert und der Titel der Hauptkategorie angepasst wurden. Die daraus induktiv entstandenen Subkategorien sind in Abbildung 8.7 dargestellt.

[10] Überblicksartig wurden erste Überlegungen zu den Erkenntnissen der Evaluationsstudie hinsichtlich der Formulierungshilfen bereits in einem Tagungsband der GDM veröffentlicht (vgl. Bersch 2020b). Die Auswertungen wurden für diese Arbeit aber noch einmal überarbeitet.

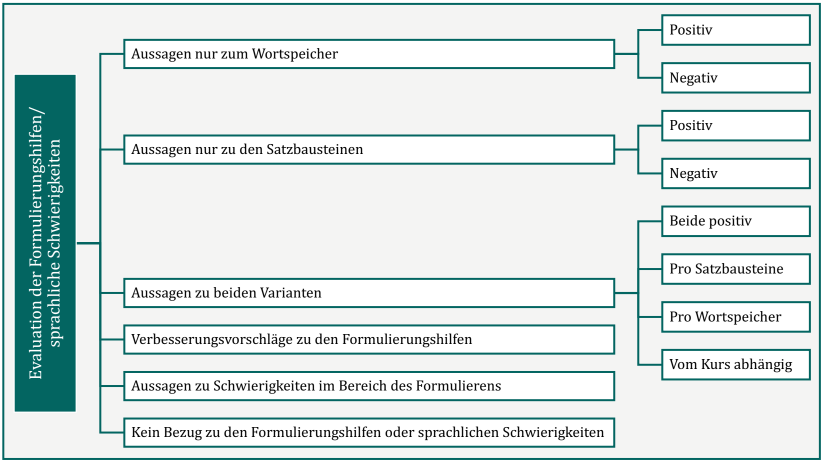


Abbildung 8.7 Subkategorien der Hauptkategorie „Evaluation der Formulierungshilfen/sprachliche Schwierigkeiten“

Je nachdem für welche Variante der Formulierungshilfen sich die Lehrkräfte entschieden hatten, waren ihre Antworten auf Fragen zu den Formulierungshilfen auf den Wortspeicher, die Satzbausteine oder auf beides bezogen. Teils äußerten sich Lehrkräfte auch im Nachhinein vergleichend zu beiden Varianten, obwohl sie nur eine der Varianten eingesetzt hatten.

Zu beiden Varianten gibt es sowohl positive als auch negative Rückmeldungen, wobei die positiven überwiegen. Eine Lehrkraft, die beide Varianten einsetzte, formulierte ihr positives Fazit folgendermaßen:

> *Ohne diese Aufgaben (mit den Hilfen) hätten einige Schüler überhaupt keine Ahnung gehabt, wie sie mit solchen Aufgaben starten. Zitat eines Schülers: ‚Solche Aufgaben sollten mehr in den Unterricht einfließen, wenn diese immer stärker gefordert werden.‘ Es ist wichtig, dass sie [sic.] Schüler über Mathematik ‚reden‘ müssen und nicht nur rechnen. Das Rechnen stand bis jetzt zu sehr im Vordergrund.*
>
> (FB11123WSSBFOSKolBy, Absatz 55–57)

Die positiven Rückmeldungen zum Wortspeicher wurden teils näher spezifiziert, vor allem dadurch, dass der Wortspeicher den Erwerb von Fachsprache unterstützt, aber auch als Zusammenfassung dienen kann und den Schülern den Anspruch des Begründens aufzeigt. Negativ wurde am Wortspeicher einerseits kritisiert, dass er zu stark vorformuliert sei und die Schüler dadurch wenig denken müssten. Im Gegensatz dazu wurde von einer anderen Lehrkraft kritisiert, dass er als reine Auflistung von Begriffen nicht aufzeige, wie mathematisch argumentiert oder begründet wird. Außerdem gab eine Lehrkraft an, dass er kaum von den Schülern genutzt wurde, da einige Schüler „auch aufgrund geringer Mathematikkenntnisse mit den Begriffen nicht sicher umgehen [können]. Gute Schüler versuchen ohne Hilfen zu argumentieren" (FB062WSFOSKolBy, Absatz 18). Bei all diesen Nennungen handelt es sich jedoch um Einzelnennungen. Insgesamt haben sich 7 Lehrkräfte positiv zum Wortspeicher geäußert, davon 2 zusätzlich auch negativ. Nur eine Lehrkraft äußerte sich ausschließlich negativ. Eine Lehrkraft konnte keine umfassende Evaluation des Wortspeichers vornehmen, da sich die Schüler aufgrund fehlender inhaltlicher Vorkenntnisse nicht an das Argumentieren und somit das Verwenden des Wortspeichers herantrauten.

Auch zu den Satzbausteinen äußerten sich 6 Lehrkräfte positiv, eine davon zusätzlich negativ und nur eine Lehrkraft äußerte sich ausschließlich negativ. Diese hatte sich allerdings für die Variante Wortspeicher entschieden. Positiv hervorgehoben wurde die sprachliche Unterstützung insbesondere im Bereich des Argumentierens und Formulierens. So sahen die Schüler, wie sie mathematische Aussagen sprachlich miteinander verknüpfen können und erkannten so auch den Zusammenhang zwischen Sprache und Logik. Insbesondere schwächere Schüler wurden ermutigt und generell konnten Schüler ihren Argumentationsstil überdenken. Auch bei diesen Äußerungen handelt es sich meist um Einzelnennungen. Hierbei wiederholt sich aber die Sinnhaftigkeit der bereitgestellten Satzbausteine. Negativ kritisierte eine Lehrkraft, dass den Schülern durch die Satzbausteine aufgezeigt werde, was sie nicht können und dass es zu viel Hilfestellung sei. Außerdem wurde genannt, dass die Problematik im mathematischen Vorwissen zu suchen sei und nicht bei den sprachlichen Fähigkeiten, und das, obwohl die Schüler sprachlich „nicht sonderlich begabt" (FB0912WSFOSKolBy, Absatz 28) seien.

Bei den Lehrkräften, die entweder beide Varianten einsetzten oder sich nichtsdestotrotz vergleichend zu beiden Varianten äußerten, ist keine Tendenz zu erkennen, welche der beiden Varianten der anderen grundsätzlich vorzuziehen ist. Es gibt Lehrkräfte, deren Vergleich zugunsten der Satzbausteine ausfällt, beispielsweise, da die Schüler damit besser zurechtkamen oder weil sie mehr Hilfestellung für schwächere Schüler bieten und mehr zum Argumentieren anleiten. Es gibt aber auch Lehrkräfte, die sich für den Wortspeicher aussprachen, da bei diesem nicht so viel vorgegeben ist und die Schüler dadurch weniger eingeengt werden. Insgesamt fielen die Vergleiche ausgeglichen aus. Manche Lehrkräfte untermauerten ihre Begründung auch durch Bezug auf ihren speziellen Kurs, sodass die Schlussfolgerung nahe liegt, dass keine der beiden Varianten grundsätzlich besser ist, sondern die Wahl der geeigneten Variante vom jeweiligen Kurs bzw. der jeweiligen Klasse abhängt.

Verbesserungsvorschläge im Bereich der Formulierungshilfen, die wiederum aus Einzelmeinungen bestehen, sind weniger Hilfen vorzugeben, die Hilfen allmählich abzubauen und klarer zwischen Aufgabenstellung und Formulierungshilfen zu trennen. Außerdem wurde von einer Lehrkraft der Wunsch nach Hinweisen auf typische Fehlerquellen im Bereich des Formulierens geäußert.

Trotz der Unterstützung durch die Formulierungshilfen berichteten etwa die Hälfte der Lehrkräfte von Schwierigkeiten der Schüler im Bereich der Sprache und insbesondere beim Formulieren und Verschriftlichen. Dies bestätigt die Ergebnisse der Interviewstudie, dass hier ein Problemfeld im Bereich des Argumentierens liegt, an dem gearbeitet werden muss. Die Formulierungshilfen der vorliegenden Lernumgebung bieten hierzu eine Möglichkeit, können aber durch den einmaligen Einsatz noch keine substanziellen Veränderungen bewirken. Zudem berichteten Lehrkräfte, dass sich inhaltliche Schwierigkeiten der Schüler auf das Begründen und insbesondere auf das Formulieren auswirken, sodass eine Förderung von Sprache und fachlichem Inhalt insbesondere in Verbindung miteinander wichtig ist.

8.4.7 Änderungswünsche der Befragten

Im Fragebogen, der den schriftlichen Interviews zugrunde lag, wurden die Lehrkräfte an mehreren Stellen nach Änderungswünschen hinsichtlich spezifischer Aspekte gefragt und zudem an einer Stelle auch in Bezug auf die gesamte Lernumgebung, und zwar durch die Frage „Würden Sie die Lernumgebung (in gleicher oder ähnlicher Form) noch einmal im Analysisunterricht einsetzen? Wenn ja, was würden Sie ggf. vor einem erneuten Einsatz an der Lernumgebung ändern? Wenn nein, warum nicht?“ In der Hauptkategorie *Änderungswünsche* wurden erst alle genannten Änderungswünsche in den gesamten Interviews gesammelt und dann diejenigen, die bereits an anderer Stelle, beispielsweise in Bezug auf das Lösungsbeispiel oder das Differenzierungspotenzial, kategorisiert waren, in separate Subkategorien eingruppiert, um sie nicht doppelt zu betrachten. Abbildung 8.8 zeigt die resultierenden Subkategorien der Hauptkategorie *Änderungswünsche,* wobei unter *Bereits innerhalb anderer Hauptkategorien als Verbesserungsvorschläge kategorisiert* mehrere Subkategorien zu verstehen sind, die sich jeweils auf Verbesserungsvorschläge zum Lösungsbeispiel, zu den Formulierungshilfen, zu den Aufgaben an sich und zum Differenzierungspotenzial beziehen.

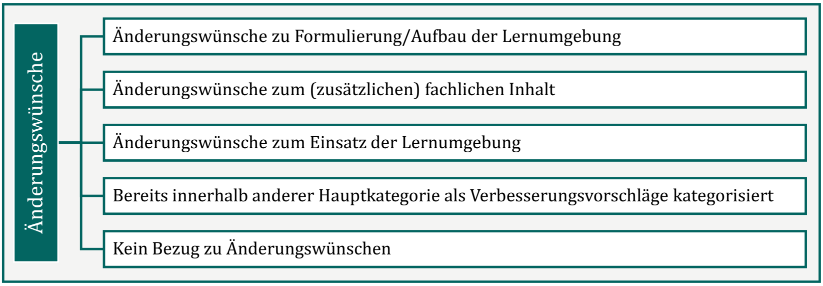


Abbildung 8.8 Subkategorien der Hauptkategorie „Änderungswünsche“

Wie bereits in den vorhergehenden Abschnitten dargestellt wurde, handelt es sich bei den Änderungswünschen zum Lösungsbeispiel, zum Differenzierungspotenzial, zu den Formulierungshilfen und zu den Aufgaben um Einzelmeinungen. Diese könnten zwar umgesetzt werden, allerdings ist unklar, ob damit eine Verbesserung erreicht werden könnte, die tatsächlich ein Großteil der Lehrkräfte als solche ansehen würde, da die Meinungen der einzelnen Befragten sehr weit auseinander gehen. Ähnlich ist es auch mit den Änderungswünschen bezüglich der gesamten Lernumgebung. Die Änderungswünsche konnten unterteilt werden in solche, die tatsächlich im Rahmen der vorliegenden Lernumgebung umgesetzt werden könnten, beispielsweise die Bereitstellung zusätzlicher unterstützender Materialien oder eine andere Einteilung der Teilaufgaben, und in solche, die die Entwicklung einer weiteren Lernumgebung notwendig machen würden, beispielsweise der Wunsch nach ähnlichen Aufgaben zu anderen Themenbereichen. Zudem gibt es Wünsche der Lehrkräfte, die sich nicht durch die Konstruktion oder Abänderung von Lernumgebungen an sich realisieren lassen, wie beispielsweise die Verfügbarkeit solcher Aufgaben oder Materialien in Schulbüchern. Bisher noch nicht genannte, aber in Bezug auf die vorliegende Lernumgebung umsetzbare Änderungswünsche sind zu Beginn einen Fokus auf die wesentlichen Argumentationsschritte zu legen, die dann detaillierter ausgeführt werden, und eine gemeinsame Phase des Lösens von Argumentationsaufgaben zwischen dem Lösungsbeispiel und der eigenständigen Arbeit.

8.5 Diskussion der Evaluationsstudie

In Rückblick auf die Forschungsfragen konnte durch die vorliegende Studie die konstruierte Lernumgebung in ihren verschiedenen Versionen aus Sicht von Lehrkräften evaluiert werden. Dabei zeigten sich durch die positiven Rückmeldungen in den schriftlichen Interviews die Qualität der Lernumgebung und ihre Akzeptanz durch Lehrkräfte. Die sehr wenigen Einzelnennungen hinsichtlich Änderungswünschen bestätigen die Qualität der Lernumgebung. Dadurch ist eine Weiterentwicklung der Lernumgebung und eine anschließende erneute Evaluation nicht als gewinnbringend anzusehen. Vielmehr sollten weitere Lernumgebungen entwickelt werden, die ähnliche Ideen umsetzen und dem Wunsch der Lehrkräfte nach weiteren Materialien zu anderen Themen gerecht werden.

Die unterschiedlichen Varianten wurden in etwa gleich häufig eingesetzt und auch im Rückblick kann keine der Varianten gegenüber den anderen hervorgehoben werden. So hängt es wohl stark von Klasse oder Kurs und der zugehörigen Lehrkraft ab, welche Variante eingesetzt werden sollte. Dies setzt voraus, dass Lehrkräfte eine hohe Kompetenz zur Einschätzung ihrer Schüler besitzen, sodass sie die passenden Materialien und Unterstützungsangebote auswählen oder auch selbst entwickeln können. Aufgabe 3, die weniger stark an Schulbuchaufgaben orientiert war, wurde seltener gewählt als die anderen beiden, die mehr kalkülorientiertes Vorgehen erlauben als Aufgabe 3. Es wäre interessant zu untersuchen, wie Schüler tatsächlich mit diesen unterschiedlichen Aufgaben umgehen, und welche der möglichen Begründungsarten sie verwenden. Es ist anzunehmen, dass dies auch stark von der Sozialisation in der jeweiligen Lerngruppe abhängt. Die Lehrkräfte berichteten von unterschiedlichen Schwierigkeiten, die die Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben hatten. Insbesondere hinderten Lücken im inhaltlichen Grundverständnis schwächere Schüler am eigentlichen Argumentieren. Dies steht in Einklang mit der Erkenntnis von Leuders und Prediger (2012, S. 58), dass bei vertieftem Förderbedarf im Bereich des Grundverständnisses von Inhalten, selbstdifferenzierende Aufgaben allein keine Lösung darstellen. Vielmehr kann das Potenzial selbstdifferenzierender Aufgaben erst dann vollständig genutzt werden, wenn kein vertiefter Förderbedarf im Bereich des Grundverständnisses von Inhalten mehr besteht.

Das vorangestellte Lösungsbeispiel wurde zwar nicht von allen Lehrkräften auf die intendierte Art und Weise eingesetzt, aber trotzdem konnten aus den Rückmeldungen Rückschlüsse über dessen Qualität gezogen werden. Die Rückmeldungen waren überwiegend positiv und zeigten, dass das Lösungsbeispiel seine unterstützende Funktion bei den Schülern durchaus erfüllen kann. Trotz der Formulierungshilfen als sprachliche Unterstützung beobachteten die Lehrkräfte Schwierigkeiten im Bereich des Formulierens und Verschriftlichens von Argumentationen. Dies bestätigt die Erkenntnisse aus der Interviewstudie mit Lehrkräften (siehe Kap. 5), auf welche die vorliegende Evaluationsstudie aufbaut. Die verwendeten Unterstützungsangebote sollten nicht einmalig verwendet, sondern immer wieder in den Unterricht integriert werden. Das Differenzierungspotenzial wurde durchweg als positiv wahrgenommen und dies hinsichtlich diverser Aspekte der Lernumgebung. Auch die hier entwickelten Ideen sollten sich nicht auf die Lernumgebung beschränken, sondern auch in weiteren Unterrichtsmaterialien zum Argumentieren Anwendung finden.

Für die Zukunft wäre es wünschenswert, dass die entwickelten Ideen in weiteren Lernumgebungen oder anderen Materialien zum Argumentieren wieder aufgegriffen werden und so regelmäßig Eingang in den Mathematikunterricht finden. Darüber hinaus ist es sinnvoll, Lehrkräften die Gestaltungsprinzipien zu vermitteln, sodass diese selbständig passende Materialien für ihre Lerngruppen entwickeln und individuell einsetzen können und somit insbesondere das mathematische Argumentieren im Bereich der Analysis fördern[11]. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, Lehrkräften aufzuzeigen, wie Aufgaben in Schulbüchern als leicht zugängliche Basis für Lernumgebungen zum Argumentieren verwendet werden können. Dazu ist es wichtig, das Potenzial dieser Aufgaben zu erkennen und diese entsprechend anzupassen.

[11] Eine bereits durchgeführte Lehrerfortbildung hat gezeigt, dass dies möglich ist und bei Lehrkräften auf positive Reaktionen stößt.

Teil IV
Schlussbetrachtung

9 Zusammenführung, Diskussion und Ausblick

Hauptziel dieser Arbeit war es, durch eine explorative Interviewstudie mit Lehrkräften die aktuelle Situation rund um das mathematische Argumentieren im Analysisunterricht besser zu verstehen und die gewonnenen Einsichten zu nutzen, um einen theoretisch fundierten Unterrichtsvorschlag zu entwickeln und in der Praxis zu evaluieren. Dadurch wurde angestrebt, die in Kapitel 3 herausgearbeitete Forschungslücke zu schließen.

Vorab wurde im ersten Teil dieser Arbeit ein Modell entwickelt, das die Konzepte des Argumentierens, Begründens und Beweisens in Zusammenhang bringt und das Begriffsverständnis dieser Arbeit darstellt. Das Argumentieren wird dabei im weiten Sinne als ein Prozess verstanden, bei dem mit logischen Schlüssen, Argumenten und Gründen für oder gegen Aussagen, Hypothesen, Zusammenhänge oder Meinungen gearbeitet wird. Um von *mathematischem* Argumentieren sprechen zu können, müssen entweder der Gegenstand der Argumentation oder die verwendeten Schlüsse, Argumente und Gründe mathematischer Natur sein (siehe Abschnitt 2.1.1). Das Argumentieren kann somit unterschiedlich ausgestaltet sein, verschiedene Gegenstände betreffen und verschiedene Auslöser haben. Das Beweisen wird als spezifische Form des Begründens verstanden, das wiederum eine spezifische Form des mathematischen Argumentierens ist. So ergibt sich eine Teilmengenrelation, die sich dadurch auszeichnet, dass Prozesse und Produkte des Beweisens strenger als Prozesse und Produkte anderer Formen des Begründens, und Prozesse und Produkte des Begründens strenger als Prozesse und Produkte anderer Formen des Argumentierens beurteilt werden. Diese Beurteilung findet hinsichtlich der Präzision, sprachlicher Aspekte, der verwendeten Argumente und Schlussweisen sowie hinsichtlich der thematisierten Inhalte und der möglichen Teilprozesse statt. Durch die Interviewstudie, die im zweiten Teil

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2_9

dieser Arbeit dargestellt ist, konnte gezeigt werden, dass dieses Begriffsverständnis weitgehend in Übereinstimmung mit dem Begriffsverständnis von Lehrkräften ist und somit auch im weiteren Austausch mit Lehrkräften sinnvoll als Basis dienen kann.

Durch die qualitative, explorativ ausgerichtete Interviewstudie mit Lehrkräften zum Argumentieren im Analysisunterricht können die Forschungsfragen folgendermaßen beantwortet werden:

Welchen Stellenwert nimmt die Förderung des mathematischen Argumentierens derzeit im Analysisunterricht ein?
Die Beantwortung dieser Frage hängt stark vom Begriffsverständnis des Argumentierens der jeweiligen Lehrkraft ab. So zeigte sich bei vielen Lehrkräften eine Zurückhaltung gegenüber dem Beweisen und theoretischen Herleiten, während andere Formen des Argumentierens durchaus positiv bewertet wurden. Durch die Äußerungen zur vorgelegten Schulbuchdoppelseite konnte gezeigt werden, dass die Lehrkräfte Aufgaben mit expliziten Begründungsaufforderungen größtenteils positiv gegenüberstehen und diese sogar geringfügig besser beurteilen als andere Aufgaben. Die sogenannten Begründungsaufgaben werden nach Aussagen der Lehrkräfte auch im Unterricht eingesetzt und spielen dort eine große Rolle. Eher informelle, oft mündliche Argumentationen und Begründungen finden so ihren Platz im Unterricht, beispielsweise auch dadurch, dass Lösungswege begründet werden. Begründungen von Theorie kommen hingegen nicht häufig vor und werden, wenn überhaupt, von der Lehrkraft präsentiert. Während die sogenannten Begründungsaufgaben auch in Klausuren eingesetzt werden, werden Beweise tendenziell nicht geprüft. Insgesamt scheint das Argumentieren im Analysisunterricht in gewisser Weise einem Einüben von Schemata gegenüberzustehen und nimmt deshalb teilweise nicht den gewünschten Stellenwert im Unterricht ein.

Welche Gründe für die Förderung des mathematischen Argumentierens im Analysisunterricht können aus Äußerungen von Lehrkräften abgeleitet werden?
Die Lehrkräfte kennen eine große Bandbreite an Gründen für die Förderung des mathematischen Argumentierens im Analysisunterricht, die sie implizit oder explizit in den Interviews benannten. Bei allen Befragten fanden sich Äußerungen, die darauf schließen lassen, dass ihnen das Argumentieren ein persönliches Anliegen ist. Außerdem sehen fast alle Befragten eine Bedeutung des Argumentierens für die Lernenden, beispielsweise zur Förderung inhaltsbezogener, prozessbezogener und überfachlicher Kompetenzen. Weitere Gründe für die Förderung des mathematischen Argumentierens sehen die Lehrkräfte teilweise in der Eignung zur Lernstandseinschätzung der Schüler und als Grundlage für gelungene Unterrichtsgespräche. Des Weiteren nannten knapp die Hälfte der

Befragten als Begründung für die Förderung des Argumentierens, dass Argumentieren, Begründen und Beweisen typische mathematische Prozesse darstellen und somit charakteristisch für die mathematische Disziplin sind. Insgesamt blieben die Äußerungen der Lehrkräfte hinsichtlich der Gründe für das Argumentieren aber oberflächlich und die Vielfalt der genannten Gründe zeigt sich vor allem durch die Betrachtung der Äußerungen aller Befragten im Gesamten. Die einzelnen Lehrkräfte, die sich alle positiv gegenüber dem Argumentieren äußerten, begründeten dies aber ganz unterschiedlich.

Welche Herausforderungen sehen Lehrkräfte in Zusammenhang mit der Förderung mathematischen Argumentierens im Analysisunterricht?
Durch die Interviewstudie zeigten sich verschiedene Herausforderungen, auf die Lehrkräfte und Schüler im Mathematikunterricht stoßen, wenn sie mathematisch argumentieren wollen oder sollen. Erstens zeigten sich Probleme für Lehrkräfte beim Unterrichten des Argumentierens. Dabei sind vor allem die Korrektur von Leistungserhebungen, in denen Argumentieren gefragt wird, und die Dominanz von kalkülorientiertem Arbeiten im Analysisunterricht zu nennen. Verglichen mit den beiden weiteren Bereichen, scheinen diese Probleme aber nur geringe Bedeutung zu besitzen. Zweitens zeigten sich Herausforderungen, die auf die Rahmenbedingungen des Unterrichts zurückzuführen sind, wobei die Schwerpunkte darin liegen, dass es den Lehrkräften an Unterrichtszeit fehlt und dass der Unterricht auf die (Abitur-)Prüfungsvorbereitung ausgerichtet werden muss, für die das Argumentieren wenig Bedeutung zu haben scheint. Drittens benannten die Lehrkräfte Herausforderungen im Bereich der Schüler. Dieser Bereich ist mit Abstand der am umfangreichsten thematisierte. Dabei berichteten die Lehrkräfte von zahlreichen Schwierigkeiten, die die Schüler beim Argumentieren haben, und zwar verschiedenste Schwierigkeiten während des Argumentationsprozesses sowie Schwierigkeiten durch fehlende, meist inhaltliche, Voraussetzungen der Schüler. Besonders dominant zeigten sich Schülerschwierigkeiten unterschiedlicher Art, die unter dem Oberbegriff *Sprache* zusammengefasst werden können. Dabei handelt es sich besonders um Schwierigkeiten mit der Fachsprache, mit dem (schriftlichen) Formulieren von Argumentationen und mit der nötigen sprachlichen Präzision seitens der Schüler. Neben Schwierigkeiten, die die Schüler selbst beim Argumentieren haben, sprachen die Lehrkräfte von Problemen, die sich in Bezug auf die Schüler ergeben. Hierbei zeigte sich vor allem die Heterogenität der Schüler als besondere Herausforderung für die Lehrkräfte beim Einbinden des Argumentierens in den Analysisunterricht.

Als Reaktion auf die Heterogenität der Schüler und die sprachlichen Schwierigkeiten, die sich in der Interviewstudie als zwei dominante Problemfelder zeigten, wurde im dritten Teil dieser Arbeit eine differenzierende, aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen in sechs Versionen entwickelt. Zur Evaluation der entwickelten Lernumgebung wurde diese von Lehrkräften im Rahmen einer qualitativen Studie im Unterricht eingesetzt. Die Erfahrungen der Lehrkräfte beim Einsatz wurden dann durch Rückmeldungen in schriftlichen Interviews erhoben. Die Auswertung dieser Interviews zeigte die Qualität der entwickelten Lernumgebung sowie die Akzeptanz dieser durch Lehrkräfte. Bezüglich der verschiedenen Versionen, die sich durch alternative Aufgaben und zwei Varianten von Formulierungshilfen ergeben, zeigten sich keine großen Unterschiede in den Rückmeldungen. Vielmehr liegt der Schluss nahe, dass es von Klasse oder Kurs abhängig ist, welche Version der Lernumgebung am besten geeignet ist. Außerdem ist ein inhaltliches Grundverständnis seitens der Schüler notwendig, um sinnvoll mit den Materialien arbeiten zu können. Die entwickelten Formulierungshilfen können Schüler sinnvoll bei sprachlichen Schwierigkeiten im Bereich des Argumentierens unterstützen und das Differenzierungspotenzial zeigt sich als wirksam, um auf die Heterogenität der Schüler angemessen zu reagieren. Auch das entwickelte Lösungsbeispiel wurde von den Lehrkräften weitestgehend positiv beurteilt. Trotzdem kann ein punktueller Einsatz der entwickelten Lernumgebung bestehende Probleme und Schwierigkeiten nicht komplett lösen. Vielmehr konnte gezeigt werden, wie ein Ansetzen an diesen Schwierigkeiten für Lehrkräfte möglich sein kann. Deshalb ist es wichtig, dass die verwendeten Gestaltungsprinzipien Eingang in die Unterrichtsplanung von Lehrkräften finden und bei der Entwicklung weiterer Materialien angewendet werden[1].

Nichtsdestotrotz weisen die Studien in der vorliegenden Arbeit auch Beschränkungen auf, die nun kurz thematisiert und mit möglichen alternativen Herangehensweisen verglichen werden. Die vorliegende erste Interviewstudie wurde so konzipiert, dass die Lehrkräfte vorab nicht darüber informiert waren, dass das Argumentieren im Fokus der Interviews stehen würde. Dies hatte zum Vorteil, dass die Lehrkräfte spontan auf das Thema reagierten und möglichst ihre Aussagen nicht gemäß sozialer Erwünschtheit formulierten. Außerdem wurde zu Beginn keine gemeinsame begriffliche Basis geschaffen, um aus den Interviews ableiten zu können, was die Lehrkräfte mit dem Begriff des *Argumentierens*

[1] Sollten Leser dieser Arbeit die entwickelten Materialien im Unterricht einsetzen oder diese weiterentwickeln, würde ich mich sehr über eine Kontaktaufnahme zum weiteren Austausch freuen.

verbinden. Das hat jedoch gleichermaßen zur Folge, dass nicht alle Lehrkräfte vor dem Hintergrund des gleichen Begriffsverständnisses sprachen und so die Äußerungen in den verschiedenen Interviews nicht ganz problemlos zu vergleichen sind. Möglicherweise hätte eine alternative Interviewkonzeption, in der erst auf Grundlage des in Teil I dieser Arbeit entworfenen Modells eine gemeinsame begriffliche Basis geschaffen wird und dann über die konkrete Situation im Analysisunterricht der Befragten gesprochen wird, andere Erkenntnisse gebracht. Dies hätte auch ermöglicht, verschiedene Aspekte konkret anzusprechen, wenn diese nicht von den Lehrkräften selbst aufgebracht worden wären. Es wäre auch vorteilhaft gewesen, die Lehrkräfte zu Beginn der Interviews explizit darauf hinzuweisen, dass mit dem Argumentieren ein weites Begriffsverständnis verbunden wird, das nicht auf das Beweisen eingeengt ist. Dadurch hätten sich die negativen Konnotationen mancher Lehrkräfte gegenüber dem Beweisen möglicherweise weniger stark auf die Interviews ausgewirkt. Welche Variante letztendlich gewinnbringender ist, lässt sich nicht abschließend bewerten.

Eventuell hätte die Qualität der Interviewstudie und insbesondere der Auswertung und Interpretation der Ergebnisse durch eine kommunikative Validierung weiter gesteigert werden können, wobei die Ergebnisse nach der Analyse mit den Befragten diskutiert worden wären (vgl. Mayring 2016, S. 147). So hätten eventuelle Missverständnisse oder Unklarheiten bei der Interpretation beseitigt werden können. Allerdings hätte solch ein Unterfangen auch in Rechtfertigungen der Befragten im Sinne sozialer Erwünschtheit münden können. Eine Erhöhung der Studiengüte wäre auch dadurch möglich gewesen, dass das gesamte Interviewmaterial von zwei Codierern unabhängig codiert und in einem Prozess konsensuellen Codierens abgeglichen worden wäre[2]. Durch das qualitative Design, das dem gewünschten explorativen Charakter der Studie gerecht wird, lassen sich die Erkenntnisse nicht ohne Weiteres verallgemeinern. Vielmehr ließen sich aus den Ergebnissen Hypothesen für die Grundgesamtheit bayerischer oder deutscher Lehrkräfte formulieren, die sinnvollerweise in einer anschließenden quantitativen Fragebogenstudie überprüft werden sollten. Dabei wäre es sinnvoll, erst eine gemeinsame begriffliche Basis sicherzustellen und anschließend Einschätzungen einer repräsentativen Stichprobe von Lehrkräften zu erheben. So könnten auch die verschiedenen explorativ gefundenen Aspekte gewichtet werden.

Die Evaluationsstudie im dritten Teil dieser Arbeit weist ebenso Beschränkungen auf. Da die entwickelte Lernumgebung von Lehrkräften im regulären

[2] Dies war leider nicht möglich, da die Studie von einer Einzelperson und nicht von einem Team durchgeführt wurde.

Unterricht eingesetzt und dadurch evaluiert wurde, dass die Lehrkräfte ihre Erfahrungen in schriftlichen Interviews rückmeldeten, wurden die Unterrichtsstunden nicht direkt beobachtet und die von den Schülern produzierten Argumentationen nicht analysiert. Da diese Arbeit jedoch beabsichtigte, die Perspektive von Lehrkräften in den Fokus zu nehmen, passte das gewählte Design zu dieser Ausrichtung. So konnten durch die Einschätzungen der Lehrkräfte interessante Erkenntnisse zur Praxistauglichkeit der Lernumgebung im Rahmen des sonstigen Mathematikunterrichts gewonnen werden. Trotzdem wäre es eine interessante Möglichkeit für weitere Forschungen, die Lernumgebung erneut einsetzen zu lassen und dabei mit der Methode von Unterrichtsbeobachtungen weitere Daten zu sammeln. Dadurch könnten insbesondere auch die Umsetzungen durch verschiedene Lehrkräfte in verschiedenen Klassen oder Kursen verglichen werden. Außerdem wäre es spannend, auch die im Rahmen der Lernumgebung produzierten Argumentationen der Schüler zu analysieren.

Aus den Erkenntnissen dieser Arbeit ergeben sich weitere Möglichkeiten für anschließende Studien. In der Interviewstudie mit Lehrkräften zeigte sich, dass der Unterricht häufig verfahrensorientiert ausgerichtet wird und dies vielfach mit einer Orientierung an den bevorstehenden Abiturprüfungen begründet wird, in denen das Argumentieren keine große Rolle zu spielen scheint. In einer Anschlussstudie sollten deshalb Abituraufgaben hinsichtlich der benötigten Argumentationskompetenz analysiert und konstruktiv mögliche Prüfungsaufgaben entwickelt werden, in denen gerade diese Kompetenz stärker gefordert wird. Im Rückschluss könnte durch eine Anpassung der Aufgabenkultur in den Abiturprüfungen eine Anpassung der Unterrichtspraktiken erreicht werden.

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass nach Einschätzung der Lehrkräfte sprachliche Schwierigkeiten Hindernisse beim Argumentieren im Analysisunterricht darstellen. Dies eröffnet einen weiteren Ansatz für künftige Forschungen, in denen Argumentationen von Schülern bezüglich der verwendeten Sprache analysiert werden und darauf aufbauend weitere Materialien zur gezielten sprachlichen Förderung beim Argumentieren entwickelt werden.

Außerdem bietet es sich an, die überblicksartige Schulbuchanalyse, die in Abschnitt 7.1.1 dargestellt ist, auf weitere Themen der Analysis auszuweiten und den Einsatz von Begründungsaufgaben in Schulbüchern im Unterricht zu untersuchen. Dabei könnten sich sowohl *Best-Practice*-Beispiele zeigen als auch Schwierigkeiten identifiziert werden. Beispielsweise könnte analysiert werden, in welchen Phasen des Unterrichts Begründungsaufgaben welche Funktion übernehmen können, welche Rolle bei der Bearbeitung solcher Aufgaben Schüler und Lehrkräfte übernehmen und wie Lehrkräfte auf auftretende Herausforderungen reagieren.

Gleichzeitig ergibt sich eine vielversprechende Forschungsrichtung daraus, Unterrichtsphasen in den Fokus zu nehmen, in denen neue Inhalte eingeführt werden. Gerade für diese Phasen, in denen bislang wenig argumentiert wird, werden Vorschläge benötigt, wie die Kompetenz des mathematischen Argumentierens gefördert werden und gleichzeitig das Argumentieren den Erwerb inhaltsbezogener Kompetenzen unterstützen kann.

Literaturverzeichnis

Abshagen, M. (2015). *Praxishandbuch Sprachbildung Mathematik. Sprachsensibel unterrichten – Sprache fördern.* Stuttgart: Ernst Klett Sprachen.

Altrichter, V., Fielk, W., Ioffe, M., Körner, D., Konstandin, S., Meier, P. et al. (2017). *Mathematik. Berufliche Oberschule Bayern. Nichttechnik, Band 1.* Berlin: Cornelsen.

Anderson, J. R. (1993). *Rules of the Mind*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Andriessen, J., Baker, M. J. & Suther, D. (2003). Argumentation, Computer Support, and the Educational Context of Confronting Cognitions. In J. Andriessen (Hrsg.), *Arguing to Learn* (S. 1–25). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Apel, K.-O. (1989). Begründung. In H. Seiffert & G. Radnitzky (Hrsg.), *Handlexikon zur Wissenschaftstheorie* (S. 14–19). München: Ehrenwirth Verlag.

Atkinson, R., Derry, S., Renkl, A. & Wortham, D. (2000). Learning from Examples. Instructional Principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research*, *70*(2), 181–214.

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education. A Practical Guide for Early Career Researchers.* Abingdon, New York: Routledge.

Barzel, B. (2006). *Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion. Evaluation einer Lernwerkstatt im 11. Jahrgang mit integriertem Einsatz von Computeralgebra.* Verfügbar unter: https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:465-20061218-111432-0 [Letzter Zugriff am 30.03.2022].

Barzel, B. & Ehret, C. (2009). Mathematische Sprache entwickeln. *mathematik lehren*, (156), 4–9.

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Baurmann, J. (2015). Schreiben als Verfassen von Texten. In J. Baurmann, T. von Brand, W. Menzel & K. H. Spinner (Hrsg.), *Methoden im Deutschunterricht. Exemplarische Lernwege für die Sekundarstufe I und II* (S. 145–174). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Becker-Mrotzek, M. (2017). Fazit. In D. Leiss, M. Hagena, A. Neumann & K. Schwippert (Hrsg.), *Mathematik und Sprache. Empirischer Forschungsstand und unterrichtliche Herausforderungen* (S. 213–216). Münster: Waxmann.

Becker-Mrotzek, M., Schramm, K., Thürmann, E. & Vollmer, H. J. (2013). Sprache im Fach. Einleitung. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 7–13). Münster: Waxmann.

S. Bersch, *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1/2), 23–40.

Bersch, S. (2019). Teachers' Perspectives on Mathematical Argumentation, Reasoning and Justifying in Calculus Classrooms. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME 11, 5–10 February 2019, Utrecht, The Netherlands* (S. 128–135). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute. Verfügbar unter http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf [Letzter Zugriff am 29.03.2022].

Bersch, S. (2020a). Entwicklung von differenzierenden Aufgaben zum Argumentieren mit ganzrationalen Funktionen. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 1325–1328). Münster: WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-21230

Bersch, S. (2020b). Sprache beim Argumentieren im (Analysis-)Unterricht. Schwierigkeiten und Förderansätze. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-20679

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Boero, P. (1999). *Argumentation and Mathematical Proof. A Complex, Productive, Unavoidable Relationship in Mathematics and Mathematics Education.* International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof: 7. Verfügbar unter: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Bogner, A. & Menz, W. (2002). Das theoriegenerierende Experteninterview. Erkenntnisinteresse, Wissensformen, Interaktion. In A. Bogner, B. Littig & W. Menz (Hrsg.), *Das Experteninterview. Theorie, Methode, Anwendung* (S. 33–70). Opladen: Leske + Budrich.

Bönsch, M. (1995). *Differenzierung in Schule und Unterricht. Ansprüche Formen Strategien.* München: Ehrenwirth Verlag.

Bortz, J. & Döring, N. (2015). *Forschungsmethoden und Evaluation. für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. Auflage, Sonderausgabe). Berlin: Springer.

Bruder, R. (2003). *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens,* TU Darmstadt, FB Mathematik, AG Fachdidaktik der Mathematik. Verfügbar unter: http://www.math-learning.com/files/Skript.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Bruder, R. (2007). Ein didaktisches Konzept für nachhaltige mathematische Kompetenzentwicklung in aufgabenbasierten Lernumgebungen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26.3. bis 30.3.2007 in Berlin* (S. 719–722). Hildesheim [u. a.]: Franzbecker. https://doi.org/10.17877/DE290R-6084

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In R. Bruder, T. Leuders & A. Büchter (Hrsg.), *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten* (S. 18–52). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R. (2013). Nicht alle üben alles. In Blütenaufgaben unterschiedliche Anforderungsniveaus verbinden. *Mathematik 5–10*, (23), 38–41.

Bruder, R., Linneweber-Lammerskitten, H. & Reibold, J. (2015). Individualisieren und differenzieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 513–534). Berlin: Springer Spektrum.

Bruder, R. & Müller, H. (1983). Zur Entwicklung des Könnens im Lösen von Begründungs- und Beweisaufgaben im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule*, *21*, 886–894.

Bruder, R. & Pinkernell, G. (2011). Die richtigen Argumente finden. *mathematik lehren*, (168), 2–7.

Bruder, R. & Reibold, J. (2010). Weil jeder anders lernt. Ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung. *mathematik lehren*, (162), 2–21.

Bruder, R. & Reibold, J. (2011). Differenzierung im Mathematikunterricht. In M. Eisenmann & T. Grimm (Hrsg.), *Heterogene Klassen. Differenzierung in Schule und Unterricht* (S. 118–136). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Bruder, R. & Reibold, J. (2012). Erfahrungen mit Elementen offener Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I im niedersächsischen Modellprojekt MABIKOM. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 67–92). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I. Mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte*. Münster: Waxmann.

Brunner, E. (2014a). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Brunner, E. (2014b). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *35*, 229–249. https://doi.org/10.1007/s13138-014-0065-6

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Budke, A. (2013). Stärkung von Argumentationskompetenzen im Geographieunterricht – sinnlos, unnötig und zwecklos? In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 353–364). Münster: Waxmann.

Budke, A. & Meyer, M. (2015). Fachlich argumentieren lernen. Die Bedeutung der Argumentation in den unterschiedlichen Schulfächern. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 9–28). Münster: Waxmann.

Bürger, H. (1998). Zur Entwicklung allgemeiner mathematischer Fähigkeiten. Teil 2: Argumentieren und exaktes Arbeiten im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule*, *36*(11), 585–589.

Bürger, H. (2000). Argumentieren im Mathematikunterricht. In L. Flade & W. Herget (Hrsg.), *Mathematik Lehren und Lernen nach TIMMS. Anregungen für die Sekundarstufen* (S. 31–38). Berlin: Volk und Wissen Verlag.

Carroll, W. M. (1994). Using Worked Examples as an Instructional Support in the Algebra Classroom. *Journal of Educational Psychology*, *86*(3), 360–367.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Cobb, P., Jackson, K. & Dunlap Sharpe, C. (2016). Conducting Design Studies to Investigate and Support Mathematics Students' and Teachers' Learning. In J. Cai (Hrsg.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (S. 208–233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cramer, J. (2018). *Mathematisches Argumentieren als Diskurs. Eine theoretische und empirische Betrachtung diskursiver Hindernisse.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Davis, P. J., Hersh, R. & Marchisotto, E. A. (2012). *The Mathematical Experience. Study Edition.* New York: Springer Science+Business Media.

Douek, N. (2002). Context Complexity and Argumentation. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 2* (297–304). Norwich: PME. Verfügbar unter: http://www.igpme.org/publications/current-proceedings/ [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Dresing, T. & Pehl, T. (2015). *Praxisbuch Interview, Transkription und Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende* (6. Auflage). Verfügbar unter: https://www.audiotranskription.de/Praxisbuch-Transkription.pdf [Letzter Zugriff am 02.06.2020]

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N. & Epp, Susanne S., Tanguay, Denis (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (S. 349–367). Dordrecht: Springer.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 233–261.

Eichler, A. & Erens, R. (2014). Teachers' Beliefs towards Teaching Calculus. *ZDM*, *46*(4), 647–659. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0606-y

Eichler, A. & Erens, R. (2015). Domain-Specific Belief Systems of Secondary Mathematics Teachers. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Hrsg.), *From Beliefs to Dynamic Affect Systems in Mathematics Education. Exploring a Mosaic of Relationships and Interactions* (S. 179–200). Cham: Springer.

Eisenmann, M. & Grimm, T. (2011). Vorwort. Differenzierung im Unterricht. In M. Eisenmann & T. Grimm (Hrsg.), *Heterogene Klassen. Differenzierung in Schule und Unterricht* (S. I–VIII). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Elbaz, F. (1983). *Teacher Thinking. A Study of Practical Knowledge.* London, Canberra, New York: Croom Helm & Nichols Publishing Company.

Erens, R. & Eichler, A. (2013a). Belief Systems' Change. From Preservice to Trainee High School Teachers. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 2 (S. 281–288). Kiel: PME.

Erens, R. & Eichler, A. (2013b). Reconstructing Teachers' Beliefs on Calculus. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 1329–1339). Ankara, Türkei: Middle East Technical University.

Erens, R. & Eichler, A. (2014). On the Structure of Secondary High-School Teachers' Belief Systems on Calculus. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Osterle & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 25–32). Vancouver, Canada: PME. Verfügbar unter: http://www.igpme.org/publications/current-proceedings/ [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Erens, R. & Eichler, A. (2019). Belief Changes in the Transition from University Studies to School Practice. In M. S. Hannula, G. C. Leder, F. Morselli, M. Vollstedt & Q. Zhang (Hrsg.), *Affect and Mathematics Education. Fresh Perspectives on Motivation, Engagement, and Identity* (S. 345–373). Cham: Springer.

Feilke, H. (2012). Bildungssprachliche Kompetenzen – fördern und entwickeln. *Praxis Deutsch*, (233), 4–13.

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In A. Fischer, A. Fischer-Buck, K.-H. Schäfer & D. Zöllner (Hrsg.), *Situation – Ursprung der Bildung. Franz Fischer Jahrbuch 2001/6* (S. 151–161). Norderstedt: Fischer.

Fischer, R. (2012). Fächerorientierte Allgemeinbildung. Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen. In R. Fischer, U. Greiner & H. Bastel (Hrsg.), *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung* (S. 9–17). Linz: Trauner. Verfügbar unter: http://www.lehrplanforschung.ch/wp-content/uploads/2015/02/Fischer_Faecherorientierte_Allgemeinbildung.pdf [Letzter Zugriff am 29.05.2020]

Fischer, R. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* München, Wien: Profil-Verlag.

Flick, U. (2004). *Qualitative Sozialforschung.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Flick, U. (2007). Zur Qualität qualitativer Forschung. Diskurse und Ansätze. In U. Kuckartz, H. Grunenberg & T. Dresing (Hrsg.), *Qualitative Datenanalyse: computergestützt. Methodische Hintergründe und Beispiele aus der Forschungspraxis* (2. Auflage, S. 188–209). Wiesbaden: VS Verlag.

Freudenthal, H. (1973a). *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Freudenthal, H. (1973b). *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 2.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Furinghetti, F. & Morselli, F. (2011). Beliefs and Beyond: Hows and Whys in the Teaching of Proof. *ZDM*, *43*(4), 587–599. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0316-7

Gallin, P. & Ruf, U. (1993). Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, (14), 3–33.

Gibbons, P. (2015). *Scaffolding Language, Scaffolding Learning. Teaching English Language Learners in the Mainstream Classroom* (2. Auflage). Portsmouth: Heinemann.

Gogolin, I., Dirim, I., Klinger, T., Lange, I., Lengyel, D., Michel, U. et al. (2011). *Förderung von Kindern und Jugendlichen mit Migrationshintergrund FörMig. Bilanz und Perspektiven eines Modellprogramms.* Münster: Waxmann.

Gogolin, I. & Duarte, J. (2016). Bildungssprache. In J. Kilian, B. Brouër & D. Lüttenberg (Hrsg.), *Handbuch Sprache in der Bildung* (S. 478–499). Berlin: DE GRUYTER.

Gogolin, I. & Duarte, J. (2018). Migration und sprachliche Bildung. In I. Gogolin, V. B. Georgi, M. Krüger-Potratz, D. Lengyel & U. Sandfuchs (Hrsg.), *Handbuch interkulturelle Pädagogik* (S. 67–72). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Gogolin, I., Lange, I., Hawighorst, B., Bainski, C., Heintze, A., Rutten, S. et al. (2011). *Durchgängige Sprachbildung. Qualitätsmerkmale für den Unterricht*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Götz, H., Herbst, M., Kestler, C., Kosuch, H.-G., Novotný, J., Sy, B. et al. (2009). *Lambacher Schweizer 11. Mathematik für Gymnasien. Bayern.* Stuttgart, Leipzig: Klett.

Götze, D. (2013). „Weil ich die Wörter, die ich noch nicht kannte, einfach gebraucht habe" – Förderung (fach-)sprachlicher Kompetenzen im Mathematikunterricht der Grundschule.

In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik* (Bd. 1, S. 368–371). https://doi.org/10.17877/DE290R-1346

Götze, D. (2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Götze, D. (2016). Konzepte und Chancen eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts. In E.-M. Plackner & J. Postupa (Hrsg.), *Kompetenzorientierter Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 7–28). Hildesheim: Franzbecker.

Grave, B. & Thiemann, R. (2010). Erfahrungen mit Blütenaufgaben. Komplexe Aufgaben zugänglich machen. *mathematik lehren*, (162), 18–21.

Gravemeijer, K. & Prediger, S. (2019). Topic-Specific Design Research. An Introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Hrsg.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (S. 33–57). Cham: Springer.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(1), 3–45. Verfügbar unter: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF03338859.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Grundey, S. (2015). *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen. Entwicklung und vergleichend empirische Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der Sekundarstufe.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grundler, E. (2009). Argumentieren lernen – die Bedeutung der Lexik. In M. Krelle & C. Spiegel (Hrsg.), *Sprechen und Kommunizieren. Entwicklungsperspektiven, Diagnosemöglichkeiten und Lernszenarien in Deutschunterricht und Deutschdidaktik* (S. 82–97). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Habermas, J. (1999). *Theorie des kommunikativen Handelns. Band 1: Handlungsrationalität und gesellschaftliche Rationalisierung* (3. Auflage). Suhrkamp.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as Social Semiotic. The Social Interpretation of Language and Meaning*. London: Edward Arnold.

Hammond, J. & Gibbons, P. (2005). Putting Scaffolding to Work. The Contribution of Scaffolding in Articulating ESL Education. *Prospect*, *20*(1), 6–30. Verfügbar unter: http://www.ameprc.mq.edu.au/docs/prospect_journal/volume_20_no_1/20_1_1_Hammond.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Hanna, G. (1983). *Rigorous Proof in Mathematics Education.* Toronto: The Ontario Institute for Studies in Education.

Hanna, G. (1989). Proofs that Prove and Proofs that Explain. In G. Vergnaud, J. Rogaski & M. Artigue (Hrsg.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (13th, Paris, France, July 9–13, 1989), Volume 2* (S. 45–51). Paris: PME. Verfügbar unter: http://www.igpme.org/publications/current-proceedings/ [Letzter Zugriff am 02.04.2022]

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, *21*(1), 6–13.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. In L. Puig & A. Gutiérrez (Hrsg.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 1* (S. 21–34). Valencia: University of Valencia. Verfügbar unter: http://www.igpme.org/publications/current-proceedings/ [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration. An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5–23.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education. Part 2* (S. 877–908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Heckmann, K. & Padberg, F. (2012). *Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. & Hußmann, S. (2011). Beweisen – Argumentieren. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (6. Auflage, S. 93–106). Berlin: Cornelsen.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien: Springer.

Helfferich, C. (2011). *Die Qualität qualitativer Daten. Manual für die Durchführung qualitativer Interviews* (4. Auflage). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / Springer Fachmedien.

Hemmi, K. (2006). *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice*. Stockholm: Department of Mathematics Stockholm University. Verfügbar unter: http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:189608/FULLTEXT01.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Hemmi, K. (2008). Students' Encounter with Proof. The Condition of Transparency. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 413–426.

Hengartner, E. (2007). Lernumgebungen für das ganze Begabungsspektrum. Alle Kinder sind gefordert. In E. Hengartner, U. Hirt, B. Wälti & Primarschulteam Lupsingen (Hrsg.), *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht* (S. 9–15). Zug: Klett und Balmer.

Hennen, M. (2008). Mit Unterschieden rechnen. Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht. In I. Scholz (Hrsg.), *Der Spagat zwischen Fördern und Fordern. Unterrichten in heterogenen Klassen* (S. 122–149). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Hermanns, F. (1988). Schreiben als Denken. Überlegungen zur heuristischen Funktion des Schreibens. *Der Deutschunterricht*, *40*(4), 69–81.

Hersh, R. (1993). Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389–399.

Heymann, H. W. (1991). Innere Differenzierung im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, (49), 63–66.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim, Basel: Beltz.

Hilbert, T., Renkl, A. & Holzäpfel, L. (2008a). Ach so geht das! Üben mit Lösungsbeispielen. *mathematik lehren*, (147), 47–49.

Hilbert, T., Renkl, A., Schworm, S., Kessler, S. & Reiss, K. (2008b). Learning to Teach with Worked-out Examples. A Computer-Based Learning Environment for Teachers. *Journal of Computer Assisted Learning*, *24*, 316–332.

Hilbert, T., Wittwer, J. & Renkl, A. (2006). Kognitiv aktiv – aber wie? Lernen mit Selbsterklärungen und Lösungsbeispielen. *mathematik lehren*, (135), 62–64.

Hirt, U. & Wälti, B. (2016). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte* (5. Auflage). Stuttgart, Seelze-Velber: Klett; Kallmeyer.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen. Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *49*(17), 1–8.

Ilg, S. & Boothe, B. (2010). Qualitative Forschung im psychologischen Feld. Was ist eine gute Publikation? *Forum Qualitative Sozialforschung*, *11*(2). Verfügbar unter: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs1002256 [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Jahnke, H. N. (1978). *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik. Beweisen als didaktisches Problem.* Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Jahnke, H. N. & Krömer, R. (2020). Rechtfertigen in der Mathematik und im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, (41), 459–484. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00157-9

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Berlin: Springer Spektrum.

Jahnke, T. & Scholz, D. (Hrsg.). (2009). *Fokus Mathematik. 11 Gymnasium Bayern.* Berlin: Cornelsen.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A Conceptual Model of Mathematical Reasoning for School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (96), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Jörissen, S. & Schmidt-Thieme, B. (2015). Darstellen und Kommunizieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 385–408). Berlin: Springer Spektrum.

Kallmeyer, W. & Schütze, F. (1976). Konversationsanalyse. *Studium Linguistik*, (1), 1–28.

Kempen, L. (2016). *How do Pre-Service Teachers Rate the Conviction, Verification and Explanatory Power of Different Kinds of Proofs?* Verfügbar unter: https://fddm.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/Didaktik_der_Mathematik/Kempen/Kempen_2016_ICME13.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Kerres, M. (2001). *Multimediale und telemediale Lernumgebungen. Konzeption und Entwicklung* (2. Auflage). München: Oldenbourg.

Kiel, E. (1999). *Erklären als didaktisches Handeln.* Würzburg: Ergon Verlag.

Kiel, E., Meyer, M. & Müller-Hill, E. (2015). Erklären. Was? Wie? Warum? *Praxis der Mathematik in der Schule*, *57*(64), 2–9.

Kleining, G. (1982). Umriss zu einer Methodologie qualitativer Sozialforschung. *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*, *34*, 224–253.

Klieme, E., Neubrand, M. & Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung. Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider et al. (Hrsg.), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 139–190). Opladen: Leske + Budrich.

Knipping, C. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Knuth, E. J. (2002a). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379–405. Verfügbar unter: http://www.jstor.org/stable/4149959?origin=JSTOR-pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022]

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 61–88. Verfügbar unter: https://link.springer.com/content/pdf/10.1023/A:1013838713648.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Koch, P. & Oesterreicher, W. (1986). Sprache der Nähe – Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgeschichte. In O. Deutschmann, H. Flasche, B. König, M. Kruse, W. Pabst & W.-D. Stempel (Hrsg.), *Romanistisches Jahrbuch. Band 36* (S. 15–43). 1985. Berlin: Walter de Gruyter.

Kotelawala, U. (2016). The Status of Proving Among US Secondary Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(6), 1113–1131. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9638-1

Kratz, H. (2011). *Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. Ein Studien- und Praxisbuch für die Sekundarstufe*. Seelze: Klett/Kallmeyer.

Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit „Format". Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie. Diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Krummheuer, G. (1997). *Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *35*(6), 247–256.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Hrsg.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (S. 51–74). Dordrecht: Springer.

Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim, Basel: Beltz.

Kruse, J. (2015). *Qualitative Interviewforschung. Ein integrativer Ansatz* (2. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz Juventa.

Kuckartz, U. (2010). *Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten* (3. Auflage). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften; GWV Fachverlage GmbH.

Kuckartz, U. (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (3. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz Juventa.

Kuckartz, U., Dresing, T., Rädiker, S. & Stefer, C. (2007). *Qualitative Evaluation. Der Einstieg in die Praxis*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Verfügbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Kultusministerkonferenz (KMK). (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife*. Verfügbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Lamnek, S. & Krell, C. (2016). *Qualitative Sozialforschung* (6. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz.

Leisen, J. (2013). *Handbuch Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis.* Stuttgart: Ernst Klett Sprachen.

Leisen, J. (2018). *Handbuch Fortbildung Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis*. Stuttgart: Klett.

Lergenmüller, A. & Schmidt Günter (Hrsg.). (2009a). *Mathematik Neue Wege 6. Arbeitsbuch für Gymnasien.* Baden-Württemberg. Braunschweig: Schroedel.

Lergenmüller, A. & Schmidt Günter (Hrsg.). (2009b). *Mathematik Neue Wege 10. Arbeitsbuch für Gymnasien.* Niedersachsen. Braunschweig: Schroedel.

Leuders, T. (Hrsg.). (2011a). *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (6. Auflage). Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. (2011b). Prozessorientierter Mathematikunterricht. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (6. Auflage, S. 265–276). Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. & Prediger, S. (2012). „Differenziert Differenzieren". Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35–65). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Leuders, T. & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Leuders, T., Schmaltz, C. & Erens, R. (2018). Entwicklung einer Fortbildung zu allgemeindidaktischen und fachdidaktischen Aspekten des Differenzierens. In R. Biehler, T. Lange, T. Leuders, B. Rösken-Winter, P. Scherer & C. Selter (Hrsg.), *Mathematikfortbildungen professionalisieren. Konzepte, Beispiele und Erfahrungen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik* (S. 281–297). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2013). Sprachkompetenz als integrierter Bestandteil der *mathematical literacy*? In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 151–166). Münster: Waxmann.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2014). Darstellen und Kommunizieren, Argumentieren und Begründen, Interpretieren und Reflektieren von Resultaten. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (1. Auflage, S. 179–200). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Lisch, R. & Kriz, J. (1978). *Grundlagen und Modelle der Inhaltsanalyse. Bestandsaufnahme und Kritik*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Lotz, M., Berner, N. E. & Gabriel, K. (2013). Auswertung der PERLE-Videostudien und Überblick über die Beobachtungsinstrumente. In M. Lotz, F. Lipowsky & G. Faust (Hrsg.), *Dokumentation der Erhebungsinstrumente des Projekts „Persönlichkeits- und Lernentwicklung von Grundschülern" (PERLE) – Teil 3. Technischer Bericht zu den PERLE-Videostudien* (S. 83–103). Frankfurt am Main: GFPF; DIPF.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft.

Malle, G. (2009). Mathematiker reden in Metaphern. *mathematik lehren*, (156), 10–15.

Manaster, A. (1998). Some Characteristics of Eighth Grade Mathematics Classes in the TIMSS Videotape Study. *The American Mathematical Monthly*, *105*, 793–805.

Manin, Y. I. (1977). *A Course in Mathematical Logic*. New York: Springer Science+Business Media.

Mayring, P. (2007). Generalisierung in qualitativer Forschung. *Forum Qualitative Sozialforschung*, *8*(3). https://doi.org/10.17169/fqs-8.3.291

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (12. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz.

Mayring, P. (2016). *Einführung in die qualitative Sozialforschung* (6. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz.

Meier, A. (2009). *realmath.de. Konzeption und Evaluation einer interaktiven dynamischen Lehr- Lernumgebung für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Meyer, M. (2007a). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Meyer, M. (2007b). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Zur Rolle der Abduktion und des Arguments. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *28*(3), 286–310.

Meyer, M. (2017). Zur Bedeutung der (Fach-)Sprache im Mathematikunterricht der Sekundarstufen. Forderung und Förderung eines sprachsensiblen Unterrichts. In M. Michalak (Hrsg.), *Sprache als Lernmedium im Fachunterricht. Theorien und Modelle für das sprachbewusste Lehren und Lernen* (2. Auflage, S. 53–71). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Meyer, M. & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *51*(30), 1–7.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *54*(45), 2–9. Verfügbar unter: www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/12-Meyer_Prediger_PM-H45_Webversion.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022]

Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017). *Sprache im Fach Mathematik*. Berlin: Springer Spektrum.

Mittelstraß, J. (Hrsg.). (2005). *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Band 1: A-B*. Stuttgart: Metzler.

Mormann, T. (1981). *Argumentieren Begründen Verallgemeinern. Zum Beweisen im Mathematikunterricht*. Königstein/Ts.: Scriptor.

Mullis, I. V.S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y. & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011. Assessment Framework*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Nagel, K. & Reiss, K. (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften*, (19), 299–327.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Neumann, A. (2017). Theorie und Forschungsstand. Sprach- und Fachlernen im Fach Deutsch und darüber hinaus. In S. Rossack, A. Neumann, D. Leiß & K. Schwippert (Hrsg.), *„!!Fach-an-Sprache-an-Fach!!". Schreibförderung in Deutsch und Mathematik* (S. 9–29). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Oevermann, U. (2002). *Klinische Soziologie auf der Basis der Methodologie der objektiven Hermeneutik. Manifest der objektiv hermeneutischen Sozialforschung,* Institut für Hermeneutische Sozial- und Kulturforschung e. V. Verfügbar unter: https://www.ihsk.de/publikationen/Ulrich_Oevermann-Manifest_der_objektiv_hermeneutischen_Sozialforschung.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Oskar, J. (2021). *Die kindliche Entwicklung verstehen. Praxiswissen über Phasen und Störungen*. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62448-7

Paradies, L. & Linser, H. J. (2005). *Differenzieren im Unterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Pertzel, E. & Schütte, A. U. (2016). *Schreiben in Biologie, Geschichte und Mathematik (Klasse 5/6). Schriftlichkeit im sprachsensiblen Fachunterricht*. Münster, New York: Waxmann.

Peschek, W. (2005). Reflexion und Reflexionswissen in R. Fischers Konzept der Höheren Allgemeinbildung. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 55–68). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Peschek, W., Prediger, S. & Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *50*(20), 1–6.

Prediger, S. (2005). „Was hat die Exponentialfunktion mit mir zu tun?" Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 97–110). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktionen von Bedeutungen und Beziehungen – mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 167–183). Münster: Waxmann.

Prediger, S. (2016). Wer kann es auch erklären? Sprachliche Lernziele identifizieren und fördern. *Mathematik differenziert*, (2), 6–9.

Prediger, S. (2017). „Kapital multiplizirt durch Faktor halt, kann ich nicht besser erklären" – Sprachschatzarbeit für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht. In B. Lütke, I. Petersen & T. Tajmel (Hrsg.), *Fachintegrierte Sprachbildung. Forschung, Theoriebildung und Konzepte für die Unterrichtspraxis* (S. 229–252). Berlin: DE GRUYTER.

Prediger, S., Erath, K. & Moser Opitz, E. (2019). The Language Dimension of Mathematical Difficulties. In A. Fritz, V. G. Haase & P. Räsänen (Hrsg.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties. From the Laboratory to the Classroom* (S. 437–455). Cham: Springer.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU*, *65*(8), 452–457.

Prediger, S. & Scherres, C. (2012). Niveauangemessenheit von Arbeitsprozessen in selbstdifferenzierenden Lernumgebungen. Qualitative Fallstudie am Beispiel der Suche aller Würfelnetze. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 143–173.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung. Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematik-Didaktik*, (36), 77–104.

Pruzina, M. (1981). Zum Unterschied von Herleiten und Beweisen im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule*, *19*, 519–527.

Przyborski, A. & Wohlrab-Sahr, M. (2014). *Qualitative Sozialforschung. Ein Arbeitsbuch* (4. Auflage). München: Oldenbourg.

Rädiker, S. (2013). *Evaluation von Weiterbildungsprozessen. Status quo, Herausforderungen, Kompetenzanforderungen*. Marburg: Tectum Verlag.

Reblin, M. (2013). Wortschatzarbeit im Mathematikunterricht. In Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft (Hrsg.), *Sprachsensibler Fachunterricht. Handreichung zur Wortschatzarbeit in den Jahrgangsstufen 5–10 unter besonderer Berücksichtigung der Fachsprache* (S. 211–235). Berlin-Brandenburg: LISUM.

Reid, D. (2001). Proof, Proofs, Proving and Probing: Research Related to Proof. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I* (S. 360). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.

Reid, D. (2006). The Meaning of Proof in Mathematics Education. In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 458–468). Sant Feliu de Guíxols: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.

Reid, D. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publishers.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch* (4. Auflage, S. 601–646). Weinheim: Beltz.

Reiss, K. (2002). *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht*. Verfügbar unter: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/59/beweis.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe.* Basel: Springer.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 194–208). Münster: Waxmann.

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A. & Groß, C. (2008). Reasoning and Proof in Geometry. Effects of a Learning Environment Based on Heuristic Worked-out Examples. *ZDM Mathematics Education*, *40*(3), 455–467. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0105-0

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to Prove. The Idea of Heuristic Examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29–35.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *JB*, *111*(4), 155–177.

Renkl, A. (2002). Worked-out Examples. Instructional Explanations Support Learning by Self-explanations. *Learning and Instruction*, *12*, 529–556.

Renkl, A., Gruber, H., Weber, S., Lerche, T. & Schweizer, K. (2003). Cognitive Load beim Lernen aus Lösungsbeispielen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *17*(2), 93–101.

Renkl, A., Hilbert, T. & Schworm, S. (2009). Example-Based Learning in Heuristic Domains. A Cognitive Load Theory Account. *Educational Psychology Review*, *21*(1), 67–78. https://doi.org/10.1007/s10648-008-9093-4

Renkl, A. & Schworm, S. (2002). Lernen, mit Lösungsbeispielen zu lehren. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule. Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (S. 259–270). Zeitschrift für Pädagogik, Beiheft 45. Weinheim: Beltz.

Renkl, A., Schworm, S. & Hilbert, T. S. (2004). Lernen aus Lösungsbeispielen. Eine effektive, aber kaum genutzte Möglichkeit, Unterricht zu gestalten. In J. Doll & M. Prenzel

(Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule. Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (S. 77–92). Münster: Waxmann.

Renkl, A., Schworm, S. & Vom Hofe, R. (2001). Lernen mit Lösungsbeispielen. *mathematik lehren*, (109), 14–18.

Ritsert, J. (1972). *Inhaltsanalyse und Ideologiekritik. Ein Versuch über kritische Sozialforschung*. Frankfurt am Main: Athenäum Verlag.

Rossack, S. & Neumann, A. (2017). !!Fach-an-Sprache-an-Fach!! In S. Rossack, A. Neumann, D. Leiß & K. Schwippert (Hrsg.), *„!!Fach-an-Sprache-an-Fach!!". Schreibförderung in Deutsch und Mathematik* (S. 1–8). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Roth, J. (2015). Lernpfade – Definition, Gestaltungskriterien und Unterrichtseinsatz. In J. Roth, E. Süss-Stepancik & H. Wiesner (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 3–25). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Ruwisch, S. (2017). Requests for Mathematical Reasoning in Textbooks for Primary-Level Students. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Hrsg.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 113–120). Singapore: PME.

Sälzer, C., Reiss, K., Schiepe-Tiska, A., Prenzel, M. & Heinze, A. (2013). Zwischen Grundlagenwissen und Anwendungsbezug: Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich. In M. Prenzel, C. Sälzer, E. Klieme & O. Köller (Hrsg.), *PISA 2012. Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland* (S. 47–97). Münster: Waxmann.

Scheffler, S. (2017). Argumentieren im Analysisunterricht – Erkenntnisse aus Lehrerinterviews. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 833–836). Münster: WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-18628

Scheffler, S. (2018). Mathematisch Argumentieren im Analysisunterricht. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1571–1574). Münster: WTM-Verlag. https://doi.org/10.17877/DE290R-19629

Schiek, D. (2014). Das schriftliche Interview in der qualitativen Sozialforschung. The Written Interview in Qualitative Social Research. *Zeitschrift für Soziologie*, *43*(5), 379–395.

Schilcher, A., Röhrl, S. & Krauss, S. (2017). Sprache im Mathematikunterricht – eine Bestandsaufnahme des aktuellen didaktischen Diskurses. In D. Leiss, M. Hagena, A. Neumann & K. Schwippert (Hrsg.), *Mathematik und Sprache. Empirischer Forschungsstand und unterrichtliche Herausforderungen* (S. 11–42). Münster: Waxmann.

Schindler, M. (2016). Stärken beim Begründen. Natürlich differenzierend! *mathematik lehren*, (195), 20–24.

Schmidt-Thieme, B. (2006). Unmathematisches Argumentieren im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 78–81). Hildesheim: Franzbecker.

Schmidt-Thieme, B. (2009). „Definition, Satz, Beweis". Erklärgewohnheiten im Fach Mathematik. In R. Vogt (Hrsg.), *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven* (S. 123–131). Tübingen: Stauffenburg Verlag.

Schmölzer-Eibinger (2013). Sprache als Medium des Lernens im Fach. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 25–40). Münster: Waxmann.

Scholz, I. (2008). Es ist normal, verschieden zu sein. Unterrichten in heterogenen Klassen. In I. Scholz (Hrsg.), *Der Spagat zwischen Fördern und Fordern. Unterrichten in heterogenen Klassen* (S. 7–23). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem Solving in the Mathematics Curriculum. A Report, Recommendations, and an Annotated Bibliography*. MAA Notes, Number 1. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Schreier, M. (2012). *Qualitative Content Analysis in Practice.* London, Thousand Oaks, New Delhi, Singapore: Sage.

Schreier, M. (2014). Varianten qualitativer Inhaltsanalyse: Ein Wegweiser im Dickicht der Begrifflichkeiten. *Forum Qualitative Sozialforschung*, *15*(1).

Schukajlow, S. & Blum, W. (2018). Lernumgebungen: von der Forschung in die Praxis. In S. Schukajlow & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (S. 1–10). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Schwarzkopf, R. (2015). Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule. Ein Einblick. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 31–45). Münster: Waxmann.

Schworm, S. & Renkl, A. (2007). Learning Argumentation Skills Through the Use of Prompts for Self-Explaining Examples. *Journal of Educational Psychology*, *99*(2), 285–296.

Sill, H.-D. (2019). *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Paderborn, Stuttgart: Verlag Ferdinand Schöningh.

Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität. Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *58*(70), 2–8.

Söll, L. (1985). *Gesprochenes und geschriebenes Französisch* (3. Auflage). Berlin: Erich Schmidt Verlag.

Steets, A. (2009). Schreiben. In G. Beste (Hrsg.), *Deutsch Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II* (3. Auflage, S. 53–96). Berlin: Cornelsen.

Steinke, I. (2007). Qualitätssicherung in der qualitativen Forschung. In U. Kuckartz, H. Grunenberg & T. Dresing (Hrsg.), *Qualitative Datenanalyse: computergestützt. Methodische Hintergründe und Beispiele aus der Forschungspraxis* (2. Auflage, S. 176–187). Wiesbaden: VS Verlag.

Stephany, S., Linnemann, M. & Becker-Mrotzek, M. (2013). Schreiben als Mittel des mathematischen Lernens. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 203–222). Münster: Waxmann.

Stephany, S., Linnemann, M. & Wrobbel, L. (2015). Unterstützende Schreibarrangements im Mathematikunterricht. Kriterien, Umsetzung und Grenzen. In S. Schmölzer-Eibinger & E. Thürmann (Hrsg.), *Schreiben als Medium des Lernens. Kompetenzentwicklung durch Schreiben im Fachunterricht* (S. 131–156). Münster: Waxmann.

Storz, R. (2018). *Mathematik kompetenzorientiert unterrichten. Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren.* Seelze: Aulis Verlag.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2016). Research on the Teaching an Learning of Proof. Taking Stock and Moving Forward. In J. Cai (Hrsg.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (S. 237–266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sweller, J. (1988). Cognitive Load During Problem Solving. Effects on Learning. *Cognitive Science*, *12*, 257–285.

Sweller, J. & Cooper, G. (1985). The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *Cognition and Instruction*, *2*(1), 59–89.

Sweller, J., van Merrienboer, J. & Paas, F. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review*, *10*(3), 251–296.

Thürmann, E., Pertzel, E. & Schütte, A. U. (2015). Der schlafende Riese. Versuch eines Weckrufs zum Schreiben im Fachunterricht. In S. Schmölzer-Eibinger & E. Thürmann (Hrsg.), *Schreiben als Medium des Lernens. Kompetenzentwicklung durch Schreiben im Fachunterricht* (S. 17–45). Münster: Waxmann.

Tiedemann, K. (2015). Unterrichtsfachsprache. Zur interaktionalen Normierung von Sprache im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica*, *38*, 37–62.

Tietze, U.-P. (2000). Beweisen, Begründen, Argumentieren. In U.-P. Tietze, M. Klika & H. Wolpers (Hrsg.), *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Auflage, S. 151–177). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Toulmin, S. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten* (2. Auflage). Weinheim: Beltz Athenäum Verlag.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument. Updated Edition.* Cambridge u.a.: Cambridge University Press.

Ufer, S. & Kramer, J. (2015). Die Kompetenz mathematisch Argumentieren. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.), *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II* (S. 83–94). Braunschweig: Schroedel.

Ufer, S., Reiss, K. & Mehringer, V. (2013). Sprachstand, soziale Herkunft und Bilingualität. Effekte auf Facetten mathematischer Kompetenz. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 185–201). Münster: Waxmann.

Ulm, V. (2009). Lernumgebungen für individuelles und kooperatives Arbeiten. In M. Prenzel, A. Friedrich & M. Stadler (Hrsg.), *Von SINUS lernen. Wie Unterrichtsentwicklung gelingt* (CD zum Buch). Seelze-Velber: Klett/Kallmeyer.

Verboom, L. (2008). Sprachbildung im Mathematikunterricht der Grundschule. In C. Bainski & M. Krüger-Potratz (Hrsg.), *Handbuch Sprachförderung* (S. 95–112). Essen: Neue Deutsche Schule Verlagsgesellschaft. Verfügbar unter: https://www.uni-due.de/imperia/md/content/prodaz/verboom_mathe_gs.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Verboom, L. (2012). „Ich kann das jetzt viel besser bedrücken“. Gezielter Aufbau fachbezogener Redemittel. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *54*(45), 13–17.

Verboom, L. (2017). WEGE durch den Sprachförderdschungel. Strukturierung des Fachwortschatz-Lernprozesses. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematik und Sprache. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2017* (S. 57–72). Bamberg: University of Bamberg Press. https://doi.org/10.20378/irbo-50325

Villiers, M. de. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17–24.

Villiers, M. de. (1999). *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Vohns, A. (2015). Argumentationen in der Mathematik – Mathematik in Argumentationen. Ein bildsames Spannungsverhältnis? In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 123–137). Münster: Waxmann.

Vollmer, H. J. & Thürmann, E. (2013). Sprachbildung und Bildungssprache als Aufgabe aller Fächer der Regelschule. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 41–57). Münster: Waxmann.

Vollrath, H.-J. (1980). Eine Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *1*(1/2), 28–41.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Auflage). Heidelberg: Springer Spektrum.

Weinert, F. E. (2001). *Leistungsmessung in Schulen*. Weinheim, Basel: Beltz.

Wessel, L. & Prediger, S. (2017). Differentielle Förderbedarfe je nach Sprachhintergrund? Analysen zu Unterschieden und Gemeinsamkeiten zwischen sprachlich starken und schwachen, einsprachigen und mehrsprachigen Lernenden. In D. Leiss, M. Hagena, A. Neumann & K. Schwippert (Hrsg.), *Mathematik und Sprache. Empirischer Forschungsstand und unterrichtliche Herausforderungen* (S. 165–187). Münster: Waxmann.

Wittmann, E. (1974). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft.

Wittmann, E. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6. Auflage). Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft.

Wittmann, E. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen". Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Wittmann & G. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1 Vom Einspluseins zum Einmaleins* (1. Auflage, S. 152–166). Stuttgart: Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1995. Vorträge auf der 29. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. bis 10. März 1995 in Kassel* (S. 528–531). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule. vom FACH aus. *Grundschulunterricht*, *43*(6), 3–7.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16*(3), 329–342.

Wittmann, E. C. (2007). Vorwort. In E. Hengartner, U. Hirt, B. Wälti & Primarschulteam Lupsingen (Hrsg.), *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht* (S. 5–6). Zug: Klett und Balmer.

Wittmann, E. C. & Müller, N. G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–358). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2008). *Das Zahlenbuch 1. Lehrerband*. Ausgabe Bayern. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Wittmann, G. (2018). Beweisen und Argumentieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth et al. (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, 3. Auflage, S. 35–54). Berlin: Springer Spektrum.

Wollring, B. (2007). *Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule,* Universität Kassel. Verfügbar unter: http://www.sinus-transfer.de/fileadmin/MaterialienIPN/Lernumgebungen_Wo_f_Erkner_070621.pdf [Letzter Zugriff am 02.04.2022].

Wuttke, E. (2005). *Unterrichtskommunikation und Wissenserwerb. Zum Einfluss von Kommunikation auf den Prozess der Wissensgenerierung*. Frankfurt am Main, Berlin, Bern, Bruxelles, New York, Oxford, Wien: Peter Lang.

Zöttl, L. (2010). *Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.