Digitalisierung und Digitalität –Lehrmethode oder Lerngegenstand?

Reinhard Oldenburg

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Oldenburg, Reinhard. 2023. “Digitalisierung und Digitalität –Lehrmethode oder Lerngegenstand?” In *Digitaler Mathematikunterricht in Forschung und Praxis: Tagungsband zur Vernetzungstagung 2022 in Siegen*, edited by Frederik Dilling, Daniel Thurm, and Ingo Witzke, 155–67. Münster: WTM. https://doi.org/10.37626/ga9783959872041.0.16.

FREDERIK DILLING, DANIEL THURM
& INGO WITZKE (HRSG.)

DIGITALER MATHEMATIKUNTERRICHT IN FORSCHUNG UND PRAXIS

TAGUNGSBAND ZUR VERNETZUNGSTAGUNG 2022 IN SIEGEN

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster

3

Mathematiklernen mit digitalen Medien

Mathematiklernen
mit
digitalen Medien

Herausgegeben von
Martin Stein

Band 3

Frederik Dilling, Daniel Thurm & Ingo Witzke (Hrsg.)

Digitaler Mathematikunterricht in Forschung und Praxis

Tagungsband zur Vernetzungstagung 2022 in Siegen

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte
und Medien Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.de abrufbar

ISBN 978-3-95987-204-1
https://doi.org/10.37626/GA9783959872041.0

Vorwort

Die fortschreitende Digitalisierung in nahezu allen Lebensbereichen tangiert in besonderer Weise auch den Bildungsbereich. So hat Schule die Aufgabe auf das Leben in einer digitalen Welt vorzubereiten (digitale Bildung als Lehr-Lerninhalt) und gleichzeitig eröffnen sich durch den Einsatz digitaler Medien auch neue Möglichkeiten, mathematische Lernprozesse zu unterstützen. Das Thema Digitalisierung hat dabei insbesondere auch durch die Corona-Pandemie noch einmal ganz erheblich an Bedeutung gewonnen. Es gilt mehr denn je, die Chancen digitaler Medien für mathematische Lehr-Lernprozesse zu identifizieren und gezielt zu nutzen. Gleichzeitig stellt die Digitalisierung jedoch alle beteiligten Akteure, insbesondere Lehrer*innen und Schüler*innen vor große Herausforderungen. Um diesen Herausforderungen zu begegnen und die Chancen der Digitalisierung im Mathematikunterricht bestmöglich zu realisieren, ist ein intensiver Austausch und eine konstruktive Zusammenarbeit zwischen allen beteiligten Akteuren wie z.B. Mathematikdidaktiker*innen, Lehrer*innen, Schüler*innen, Akteuren der Schulpolitik und Eltern notwendig.

Wir freuen uns daher besonders Ihnen den Tagungsband der „Vernetzungstagung 2022 - Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen in Schule und Forschung“ präsentieren zu dürfen. Die Tagung, die von der Mathematikdidaktik der Universität Siegen vom 6.-7. Mai 2022 im Rahmen des Projekts DigiMath4Edu (www.digimath4edu.de) ausgerichtet wurde, war unsere erste Vernetzungsveranstaltung in Präsenz nach der Corona-Pandemie und zielte darauf ab, eine Plattform für den Austausch von Ideen und Erfahrungen zu bieten. Fokus der Tagung war dabei ganz im Sinne des Tagungstitels die Zusammenführung und Vernetzung verschiedener Akteure aus Forschung und Schulpraxis. Dabei wurden konkrete Ideen für den Mathematikunterricht sowie spannende übergeordnete Fragestellungen diskutiert und verschiedene Perspektiven auf die Digitalisierung im Mathematikunterricht eingenommen. Das Programm umfasste neben Vorträgen, Workshops und Postervorstellungen auch zwei Podiumsdiskussionen sowie Hauptvorträge zu den Themen Digitalisierung als Lehrmethode vs. Lerngegenstand und SocialMedia im Mathematikunterricht.

Die Breite der Beiträge in diesem Tagungsband zeigt, dass das Thema Digitalisierung im Mathematikunterricht ein sehr aktives Forschungsfeld in Deutschland ist. Die verschiedenen Beiträge reichen von konkreten Unterrichtsideen über theoretische Beiträge bis hin zu empirischen Forschungsarbeiten. Ebenso lässt sich eine große Vielfalt von unterschiedlichen Medienarten identifizieren, die in den Beiträgen betrachtet werden (z.B. 3D-Drucker, Lernvideos, Audio-Podcast, Apps). In seiner Gesamtheit bildet der Tagungsband somit eine hervorragende Basis für die weitere Entwicklung des Themas.

Wir möchten uns bei allen Teilnehmer*innen, Referent*innen sowie den Organisator*innen für ihre wertvollen Beiträge und ihr Engagement bedanken. Ohne ihre Unterstützung wäre diese Tagung nicht möglich gewesen. Wir hoffen, dass dieser Tagungsband dazu beiträgt, den Austausch und die Zusammenarbeit auf diesem wichtigen Gebiet weiter zu fördern und freuen uns schon auf die nächste Vernetzungstagung.

Wir wünschen viel Freude beim Lesen,

Die Herausgeber des Tagungsbandes.

Inhaltsverzeichnis

Reinhard Oldenburg

Universität Augsburg, reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Digitalisierung und Digitalität – Lehrmethode oder Lerngegenstand?

Digitalisierung kann im Mathematikunterricht methodisch und inhaltlich umgesetzt werden. Der Beitrag plädiert dafür, neben methodischen Innovationen der Digitalisierung mittels digitaler Medien auch die inhaltlichen Impulse didaktisch zu bearbeiten. Zentral dafür ist ein Verständnis, wie Mathematik und ihre Anwendungen durch die Digitalisierung verändert werden und welche gesellschaftlichen Auswirkungen das hat.

1. Die Pole der Digitalisierung

Es gibt zwei Pole der Digitalisierung des Mathematikunterrichts, nämlich einerseits den medienpädagogischen Pol, der vor allem den Einsatz von Medien zum Lernen zum Gegenstand hat, und zum anderen den (stoffdidaktischen) mathematisch-informatischen Pol, der auf die Wechselwirkung der Digitalisierung mit mathematischen Inhalten fokussiert. Wie das Bild der Pole suggerieren soll, gibt es dazwischen ein Kontinuum von Mischformen und Überlagerungen. These des Beitrags ist, dass der mathematisch-informative Pol noch deutliches Entwicklungspotenzial hat. Das Bild der Pole kann unterschied Bewusst machen, aber es überdeckt möglicherweise, dass beide Pole einander bedingen, erst wenn beide angemessen bedacht sind, kann der Bildungsauftrag umfassend erfüllt werden. Insbesondere soll nicht gesagt werden, dass der medienpädagogische Pol unwichtig ist – im Gegenteil, gerade die Pandemiesituation hat gezeigt, wie wichtig digitale Methoden der Kommunikation sind, und dass digitale Lernformen keineswegs nur ein Notbehelf sind, sondern interessante Perspektiven aufzeigen. Beispielsweise können Erklärvideos eine Bereicherung des Unterrichts sein, insbesondere wenn sie medienpädagogischen und mathematikdidaktischen Qualitätskriterien genügen und der Versuchung widerstehen, Mathematik als Fertigprodukt zu verkaufen, das nur in Form fertiger Wissensbestandteile bei den Lernenden abgeladen wird, sondern Möglichkeiten der aktiven Erarbeitung anregen. Dieses weite Feld soll im vorliegenden Beitrag aber nicht diskutiert werden, sondern es soll um den zweiten Pol gehen. Dazu folgt zunächst eine Begriffsklärung, bevor einige wichtige Aspekte behandelt werden.

1.1 Medien und Werkzeuge: Eine Begriffsklärung

Es ist üblich geworden, den Medienbegriff sehr weit zu verwenden. Beispielsweise subsumieren auch die Bildungsstandards der KMK (2022) digitale Werkzeuge wie Tabellenkalkulation oder Geometriesoftware unter dem Oberbegriff der digitalen Medien. Die Tendenz, den Medienbegriff sehr weit zu fassen, wird auch in der Medienwissenschaft kritisch gesehen (Hickethier, 2010, Seite 19) und erscheint mir insbesondere für die Mathematikdidaktik nur angemessen, wenn man auch einen engeren Medienbegriff in Abgrenzung zu den Werkzeugen verwendet. In diesem Beitrag wird der Begriff Medien generell als Medien im engeren Sinne verwendet, nämlich solche Medien, die primär dem Transport von Information dienen, wobei das Medium selbst dann von hoher Qualität ist, wenn es die Information möglichst wenig verändert. Im Gegensatz dazu wird von Werkzeugen gesprochen, wenn von mathematischen Medien im weiteren Sinne die Rede ist, deren Qualität sich gerade darin zeigt, dass sie Informationen in einem bestimmten gewünschten Sinn verändern. Übertragen auf die Musik wäre eine CD oder eine MP3-Datei ein musikalisches Medium im engeren Sinne, ein Klavier dagegen ein musikalisches Werkzeug. Im üblichen weiteren Sinne ist auch ein Klavier ein musikalisches Medium. Abbildung 1 fasst die charakteristischen Unterschiede dieser beiden Arten von Artefakten graphisch zusammen, nämlich den Medien im engeren Sinne oben und Medien im weiteren, Werkzeuge einschließenden Sinne der KMK, unten. Mathematische Objekte werden in den digitalen Artefakten in einer nicht menschenlesbaren Form repräsentiert. Deswegen sind für die Kommunikation zwischen Mensch und Maschine pro-menschliche (also für Menschen lesbare) mediale Darstellungsformen notwendig. Charakteristisch für ein digitales Mathematikwerkzeug ist, dass die im Computer repräsentierten mathematischen Objekte auch transformiert werden können. Im Grunde können alle von Kieran (2004) für die Algebra beschriebenen Prozesse auch digital umgesetzt werden.

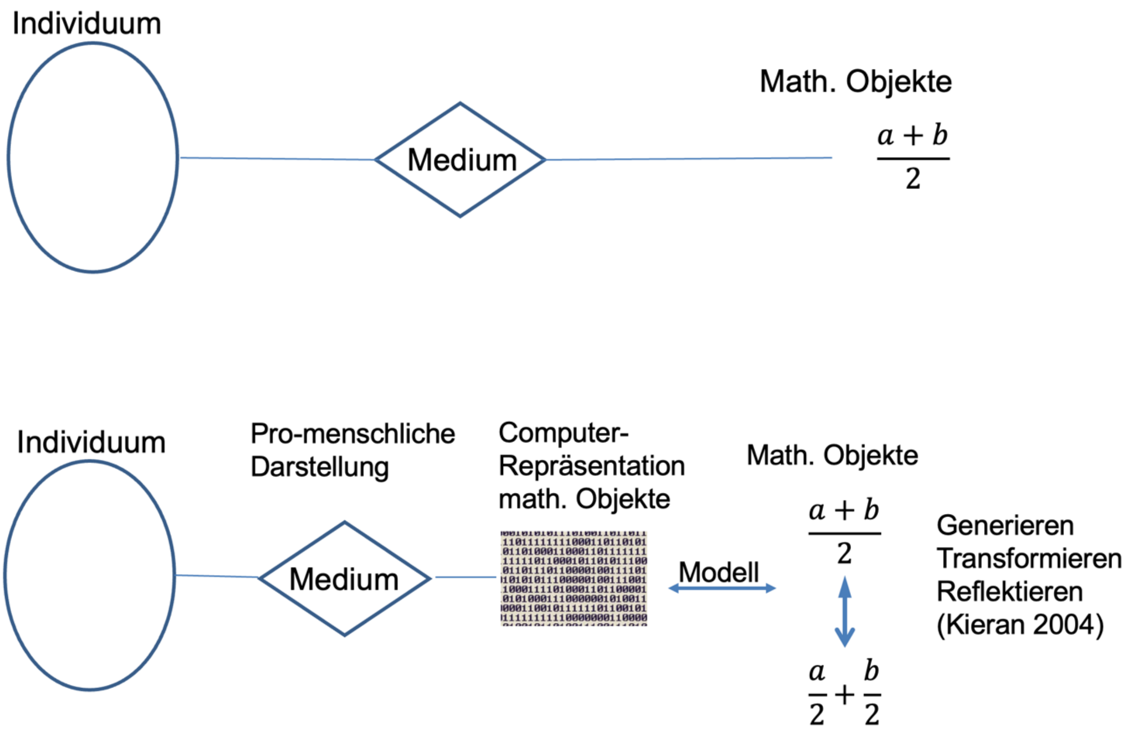

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Prozesse, wenn ein Individuum mit einem Medium im engen Sinne mathematisch arbeitet (oben) und wenn es mit einem digitalen Werkzeug mathematisch arbeitet.

Der Grund, diese Medienarten sorgfältig auseinander zu halten, liegt in der Besonderheit der Mathematik, dass die digitalen Artefakte viel Mathematik in sich tragen und das Potenzial haben, Mathematik zu verändern (siehe z.B. Elschenbroich, Gawlick & Henn, 2001). Deswegen gibt es im Bereich der mathematischen Werkzeuge viel mehr didaktische Fragen zu erörtern und zu erforschen als im Bereich der allgemeinen Medien, über deren Einsatz viel mehr aus der allgemeinen Medienforschung und Medienpädagogik entnommen werden kann.

1.2 Die Pole im Kontext der didaktischen Diskussion

In diesem Abschnitt werden die oben kurz charakterisierten Pole der Digitalisierung eingebettet in die allgemeine didaktische Theorie der Digitalisierung. Eine einflussreiche pädagogische Klassifikation der Nutzung digitaler Artefakte ist das SAMR-Modell von Puentedura (siehe z. B. Hamilton et al., 2016), das die Stufen Substitution, Augmentation, Modification und Redefinition postuliert. Diese Stufen können bezogen auf den Mathematikunterricht sowohl methodisch als auch inhaltlich gedacht werden. Tabelle 1 gibt ein Beispiel anhand der Problemstellung, zu einer Menge von Datenpunkten eine Regressionsgeraden zu finden. Das Beispiel illustriert u.a., dass eine inhaltliche Modifikation es ermöglicht von reinen Rechenformeln wegzukommen und hin zu konzeptuell relevanten Formeln.

Stufe	Methodisch	Inhaltlich/Informatisch
S	Wertetabelle in Excel statt auf Papier	Werte in Datenstrukturen wie Listen
A	Datenpunkte erscheinen automatisch in Diagramm, Fehler einzeichnen	Fehlerfunktion wird automatisch berechnet; Explorative Ideen werden umgesetzt[5]
M	Regressionsgerade wird automatisch gezeichnet, Koeffizienten aus Formel automatisch berechnet	Formeln für Koeffizienten werden ersetzt durch $\min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a + b \cdot x_i)\right)^2$ und numerische Optimierung
R	Experimentelle Suche nach einem weiteren Datenpunkt, der das Ergebnis wesentlich ändert	Nicht lineare Regression ergibt sich einfach durch Verwendung eines anderen Modells

Tabelle 1: Die SAMR-Stufen medial/methodisch und inhaltlich gedeutet am Beispiel des Erstellens einer Regressionsgeraden

Gut einordnen lassen sich die beiden Pole auch in die Konzeption von Heinrich Winter (1992) zu den didaktischen Funktionen des Sachrechnens. Unter dem Schlagwort „Sachrechnen als Lernprinzip“ beschreibt er, dass man die Sache als

[5] Neben der naheliegenden Idee, Abweichungen zu minimieren, lassen sich auch alternative Ideen algorithmisch leicht umsetzen, etwa jeweils Paare von Datenpunkten zu betrachten und den Mittelwert der durch je ein solches Paar definierten Steigung zu berechnen.

Mittel nutzt, um Mathematik zu lernen. Dies ist die Sichtweise der Medienpädagogik: die Artefakte der digitalen Welt werden genutzt, um (traditionelle) Mathematik zu vermitteln. Darüber hinaus hat Winter aber auch „Sachrechnen als Lernstoff“ betrachtet. In Übertragung dieser Perspektive geht es also darum, etwas über die digitalen Artefakte zu lernen, darüber welche Rolle Mathematik darin spielt und wie diese auf die Mathematik verändernd einwirken. Eine ähnliche Gegenüberstellung findet sich bei Hischer (2002), der einerseits von Mediendidaktik spricht (also der Nutzung als Lehrmittel), andererseits von Medienkunde, in der es darum geht, etwas über die Medien und Werkzeuge, ihre Funktions- und Wirkungsweise zu erlernen. Offensichtlich kann man diese Medienkunde sehr unterschiedlich weit denken: minimal bedeutet es, dass man die Bedienfähigkeiten erwirbt, um mit digitalen Artefakten etwas zu machen und die Resultate richtig zu interpretieren. Vertieft interpretiert bedeutet es, dass man die Arbeitsweise versteht, das Potenzial einschätzen kann, und gegebenenfalls eigene Veränderungen vornehmen kann.

Sowohl Winter als auch Hischer ergänzen die bipolare Sicht um eine Synthese, bei Winter heißt sie „Sachrechnen als Lernziel“, bei Hischer „Medienerziehung“. In beiden Fällen geht es um das, was generelles Ziel der Kompetenzorientierung ist, nämlich die Dinge kritisch und kompetent einsetzen, bewerten und gestalten zu können.

2. Computer modellieren Mathematik

Die Idee einer reinen medienpädagogischen Nutzung von digitalen Fakten im Mathematikunterricht kommt recht schnell an ihre Grenzen: wäre ein dynamisches Geometrieprogramm etwa allein ein neutrales Medium, das den Umgang mit geometrischen Objekten erleichtert und flexibler macht als das Medium Papier, müsste man keinerlei neue Konzepte lernen. Dem ist aber nicht so, es wurde schon früh darauf hingewiesen (Elschenbroich et al., 2001), dass sich die Geometrie der dynamischen Geometrieprogramme von der euklidischen Geometrie unterscheidet. Auf elementarer Benutzerebene bedeutet das, dass zwischen Basispunkten, halb-freien Punkten und abhängigen Punkten unterschieden werden muss, und dass ein optisch sichtbarer Schnittpunkt noch nicht ein Schnittpunkt im Sinne des DGS ist. Dies hat unterrichtspraktische Konsequenzen, wie schon die Arbeiten von Hölz (1994, 1995) gezeigt haben. Jenseits der elementaren Benutzerschulung sind gegebenenfalls Einsichten hilfreich, die erklären, warum der Zugmodus sich manchmal unstetig verhält, also Punkte springen können. Dass es solche Unterschiede zwischen der Mathematik und der im Computer repräsentierten Mathematik gibt, ist kein Zufall, sondern prinzipbedingt: mathematische Objekte müssen mit Mitteln der Informatik modelliert werden, um im Computer aktiv werden zu können. Abbildung 2 illustriert dies anhand eines Modellbildungskreislaufs, der sich auf die Modellierung geometrischer Objekte bezieht. Beispiele der Modellbeziehung werden weiter unten ausführlich diskutiert. Es lohnt sich aber an dieser Stelle zu bemerken, dass auch die axiomatisch charakterisierten mathematischen Objekte oft als Ergebnis einer Modellierung von intuitiven Konzepten verstanden werden können. Beispielweise gibt es verschiedene mathematische Modellierungen des intuitiven Begriffs der Geraden.

Eines der ältesten Werke, das den Gesichtspunkt betont, dass mathematische Konzepte durch den Computer modelliert werden, ist das Buch von Bundy (1986), in dem insbesondere Fragen der Termumformung und das Lösen von Gleichungen betrachtet werden. Die Sichtweise ist aber weit darüberhinausgehend tragend und relevant. Jedes mathematische Objekt, das in mathematischer Werkzeugsoftware repräsentiert und manipuliert werden soll, muss mit den Mitteln der Informatik modelliert werden. Schon für die natürlichen Zahlen ist diese Repräsentation keineswegs trivial. Die Modellierer*in (also die Programmierer*in der mathematischen Werkzeugsoftware) muss sich überlegen, ob eine Modellierung mit einer festen Anzahl von Bits ausreicht (was impliziert, dass es eine größte repräsentierbare natürliche Zahl gibt), oder ob eine Modellierung beliebig großer natürlicher Zahlen notwendig ist. Noch gravierender ist die Frage, wie reelle Zahlen modelliert werden sollen: Da die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist, muss man ohnehin immer mit einem speziellen Modell arbeiten, die meisten einfachen Mathematik- Programme ersetzen die reellen Zahlen durch eine endliche (!) Menge von Fließpunktzahlen. In aller Regel stören die damit einhergehenden Modellierungsfehler (und die durch sie implizierten Rundungsfehler) nicht. Man kann aber relativ leicht Beispiele konstruieren, bei denen die Artefakte der Modellierung doch zum Tragen kommen. In Oldenburg (2022) habe ich dazu die Rekursionsgleichung $x_1 \coloneqq 0.2; x_{n+1} \coloneqq 11x_n - 2$ genutzt. Die Zahl 0,2 ist ein Fixpunkt dieser Folge. In Excel umgesetzt zeigen sich aber schon etwa nach 20 Berechnungsschritten gravierende Abweichungen: der Fehler wächst in jedem Rechenschritt etwa um den Faktor zehn, so dass schon $x_{20} > 10000$. Dies ist eine Folge davon, dass die Zahlen im Dualsystem modelliert sind und $0.2 = \frac{1}{5}$ im Dualsystem eine nicht abbrechende, periodische Darstellung besitzt, die notwendig gerundet werden muss. Tabellenkalkulationsprogramme wie GNU Gnumeric oder Apple Numbers modellieren Fließpunktzahlen als Dezimalzahlen, sind also von diesem Rundungsfehler nicht betroffen, aber wie man aus jeder Didaktik der Arithmetik weiß, sind auch nicht alle rationalen Zahlen im Dezimalsystem mit endlich vielen Stellen exakt darstellbar, d.h. diese Programme zeigen bei anderen Beispielen entsprechende Fehlervergrößerungen. Dies zeigt, dass die Modellierung von rationalen Zahlen durch Brüche große Vorteile hat: sie ermöglicht das effektive und exakte Rechnen mit rationalen Zahlen und deswegen wird dieser Weg von allen Computeralgebrasystemen gewählt. Das ist eine technologische Motivation der Bruchrechnung, die Lernenden in der Schule in der Regel verborgen bleibt.

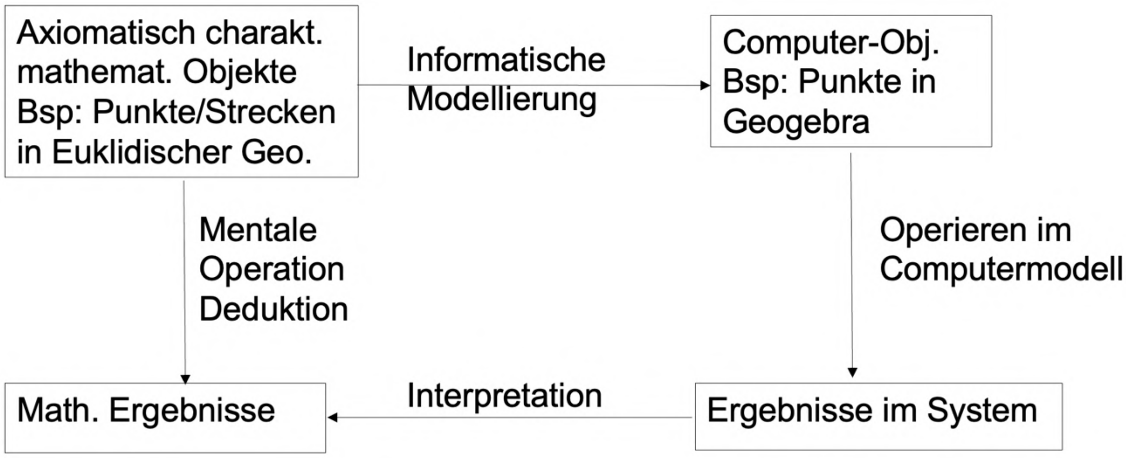

Abbildung 2: Ein Modell-Bildungskreislauf für die Modellierung von Mathematik im Computersystem.

Die Darstellung von Funktionsgrafen erzeugt wegen der notwendigen Diskretisierung (Pixelgrafik) und der Berechnung der Funktionswerte an (nur) endlich vielen Stützstellen notwendig ebenfalls Artefakte, die bereits von Hischer (2002) ausführlich untersucht worden sind. Weniger ausführlich wurde bisher in der Didaktik diskutiert, dass auch die Darstellung von Termen in jedem Computeralgebrasystem nicht triviale Modellierungsentscheidungen erfordert (dies betrifft z.B. die Frage, ob Terme schulnah als Binärbäume gespeichert werden (z.B. TI-CAS-Rechner) oder effizienter als allgemeine Bäume (z.B. GeogebraCAS) oder gar Graphen, die keine Bäume sind (z.B. Maple)) und je nach Modellierung das Verhalten der Systeme unterschiedlich ist. Um kompetent mit einem Computeralgebrasystem umgehen zu können, braucht man also auch etwas Wissen über Fragen der Implementierung. Exemplarisch sei das erläutert an der Termrepräsentation im CAS von Geogebra. Zu den grundlegenden Operationen mit Termen gehört das Substituieren. Das CAS in Geogebra besitzt dazu die Funktion `Ersetze(term,teilterm,neu)`, mit der ein Teilterm durch einen anderen Term ersetzt werden kann. Abbildung 3 (links) zeigt zwei Anwendungen des Befehls. Schon die erste Anwendung oben mag Lernende verwirren, die als Antwort Systems $x^2 + u + z^2$ erwartet hätten. Computeralgebrasysteme ordnen in der Regel aber Summanden und Faktoren nach bestimmten Regeln (welche, das variiert von System zu System und kann bei einigen Systemen auch verändert werden – in der algebraischen Geometrie ist die Untersuchung von Termordnungen sogar Gegenstand der Mathematik). Noch gravierender ist, dass die Terme intern anders repräsentiert werden als das der schulische Umgang mit Termen nahelegt: fast alle Computeralgebrasysteme eliminieren Subtraktion und Division und drücken diese aus durch die Beziehungen $a - b = a + (-1) \cdot b, \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. Des Weiteren wird intern nicht mit binären Operatoren gearbeitet, sondern ein Operator wie die Addition kann beliebig viele Operanten haben. Dies erleichtert und beschleunigt gerade auch im Zusammenspiel mit der eben angesprochenen Termordnung die automatische Termumformung ungemein. Eine Folge davon ist, dass im unteren Beispiel von Abbildung 3 (links) der Ersetze-Befehl keinerlei Wirkung zeigt. Das liegt daran, dass der Term $x^2 + y^2$ kein echter Teilterm von $x^2 + y^2 + z^2$ ist. Im CAS Mathematica (Wolfram Research, 2022) kann die Termstruktur leicht als Baum dargestellt werden (Abb. 3 recht) und das zeigt, dass $x^2 + y^2$ kein Teilbaum ist.

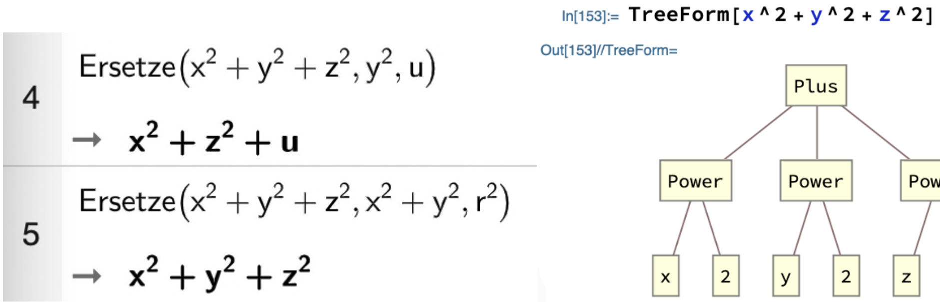

Abbildung 3: Der Ersetze-Befehl in Geogebra (links) und die Termrepräsentation in Mathematica.

Die interne Modellierung von Termen hat also Auswirkungen, die an der Benutzeroberfläche spürbar sind. Dieses Wissen kann im Unterricht nützlich sein, wenn Lernende vom Verhalten eines Computeralgebraystems überrascht sind, es kann aber auch ganz grundlegend genutzt werden, um über Terme und ihre Struktur nachzudenken. Fundamental für Terme ist ihre rekursive Struktur, die beliebiges Substituieren ermöglicht. Malle (1993) empfiehlt die Strukturierung von Termen zu üben, etwa indem Teilterme eingezeichnet werden wie in Abbildung 4. Die gleiche Einsicht in die Strukturierung und noch darüber hinaus die Erkenntnis, dass es verschiedene Termstrukturen gibt, wird durch digitale Werkzeuge nahegelegt. Abbildung 4 zeigt dazu rechts einen im Programmiersystem Scratch aufgebauten Term.

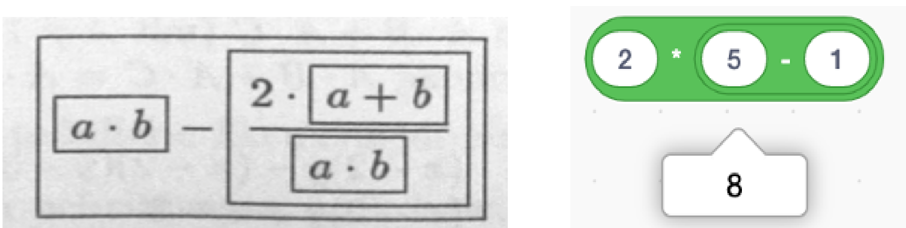

Abbildung 4: Termstrukturierung nach Malle (1993, S. 255) und in Scratch (https://scratch.mit.edu/)

Zu den Eigenschaften von Modellen im Allgemeinen (Stachowiak, 1973) gehört nicht nur, dass sie ein Abbildungs- und Verkürzungsmerkmal besitzen, sondern auch ihre pragmatische Dimension: je nach Ziel des Modells sind andere Modellierungsentscheidungen sinnvoll. Darüber nachzudenken, warum welche Entscheidungen von den Entwicklern von Programmen getroffen worden sind, kann auch helfen, die mathematisch motivierten Objekte genauer zu verstehen. Zur Illustration sollen Gleichungen betrachtet werden: Was ist die angemessene Antwort eines CAS, wenn man die Gleichung 1=1 eingibt? GeogebraCAS reagiert gar nicht, Mathematica antwortet `True` und Maxima gibt 1=1 unverändert zurück (es gibt aber in Maxima noch die Funktion `is`, und `is(1=1)` liefert `true`). Noch diverser ist die Antwort auf die Eingabe `solve(1=1)`: Maxima liefert `all`, Mathematica `{{}}` und Geogebra `{x=x}`. Es soll an dieser Stelle nicht diskutiert werden, was die jeweiligen Vor- und Nachteile dieser Designentscheidungen sind, es soll aber vor Augen geführt werden, dass es nicht trivial ist, was das jeweils beste Modell ist, und dass es sehr viele Modellierungsentscheidungen gibt. Ein Unterricht, der die Existenz von Computeralgebrasystemen nicht ignoriert, sollte meines Erachtens auch solche Reflektionsanlässe nutzen, um die digitalisierte Mathematik aus der Metaperspektive zu betrachten. Dies kann dazu beitragen, die Ergebnisse der Maschinen mit der nötigen kritischen Distanz zu bewerten. Ob es notwendig ist, ein mentales Modell der Arbeitsweise des CAS zu entwickeln, mit dessen Hilfe man solche Ergebnisse vorhersagen kann, ist eine offene didaktische Frage. Nicht auf Schulniveau, aber für die Lehramtsausbildung durchaus interessant mag die Reflektion der unterschiedlichen Antwortstrukturen von Geogebra und Mathematica bei der Lösung der gleichen polynomiellen Gleichung sein, die in Abbildung 5 dargestellt wird. Die Lösungen in Mathematica sind algebraische Zahlen, die zum Zwecke der Lesbarkeit durch approximative komplexe Zahlen dargestellt werden, man kann sich aber bei Bedarf auch die symbolische Darstellung anzeigen lassen und mit dieser kann exakt gerechnet werden. Das Beispiel zeigt erneut, dass es einen Unterschied zwischen Zahlen und Zahlrepräsentationen gibt, und dass diese Unterscheidung nicht nur philosophisch spitzfindig ist, sondern Auswirkungen auf die Arbeit mit mathematischer Werkzeugsoftware hat.

Es könnten jetzt noch ganz viele weitere Beispiele angeführt werden, wie Mathematik in Computern modelliert wird und welche Auswirkung das hat. An dieser Stelle sollen die gezeigten Beispiele aber ausreichen, um zu begründen, dass für eine kompetente Benutzung der Werkzeuge (nicht immer aber zumindest gelegentlich) ein vertieftes Verständnis dieser Modelle hilfreich sein kann. Des weiteren können diese Modellierungen Reflektionsanlass für das Erlernen der Mathematik sein. Jedenfalls scheint es so, dass hier mehr didaktische Herausforderungen liegen als nur eine reine Benutzerschulung: Computermathematik ist etwas anderes als Mathematik und die Beziehungen dazwischen sollten verstanden werden, um die Resultate kompetent interpretieren zu können. Digitalisierung als Lernstoff sollte also mehr sein als elementare Benutzerschulung.

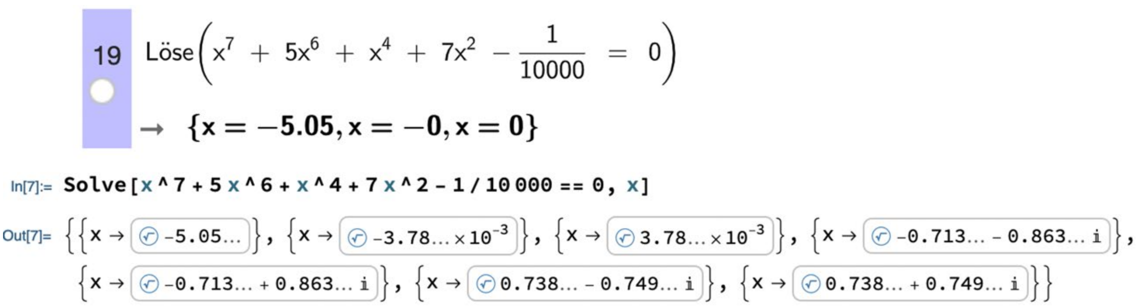

Abbildung 5: Zwei Verschiedene CAS lösen die gleiche Gleichung.

3. Mathematische Bildung für die digitale Welt

Der vorhergehende Abschnitt hat sich der digitalen Umsetzung von Mathematik gewidmet gewidmet (Digitalisierung als Lernstoff) soweit dieser Lernstoff sich an die Benutzung von digitalen Werkzeugen direkt anschließt. Darüberhinausgehend werden aber durch die Digitalisierung der Lebenswelt neue Fragen aufgeworfen und es muss geklärt werden, welche davon in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht sinnvollerweise behandelt werden. Unter den Kriterien für allgemeinbildenden Unterricht, die Heymann (1996) aufgestellt hat, gibt es eine Reihe, die direkt in Bezug dazu stehen: Lebensvorbereitung, Stiftung kultureller Kohärenz, Weltorientierung, kritische Vernunftgebrauch. Angesichts des Umstandes, dass die Transformation der Gesellschaft und der Wissenschaften durch die Digitalisierung fast alle Lebensbereiche durchdringt, ist es eine Herausforderung für alle Schulfächer, angemessene Antworten zu finden. Es wäre eine Verkürzung, wenn man dies allein dem Informatikunterricht zur Aufgabe machen würde. Die Auswirkungen von Telearbeit etwa auf den Arbeitsmarkt oder die Auswirkungen von Kryptowährungen auf die Wirtschaft sollten im Gesellschaftskundeunterricht besprochen werden. Was aber bleibt für den Mathematikunterricht? Es ist offensichtlich, dass es auf eine solche Frage keine einfache Antwort gibt. Rahwan et al. (2019) haben eine Reihe von Herausforderungen der Bildung für die digitale Welt formuliert, beispielsweise ein Verständnis dafür, wie Algorithmen Informationen in sozialen Netzwerken steuern, wie algorithmische Gerechtigkeit funktionieren könnte, wie autonome Fahrzeuge und Waffen arbeiten, wie automatisierte Geschäftsabläufe (zum Beispiel automatischer Aktienhandel) die Wirtschaftswelt beeinflussen und so weiter. In all diesen Themengebieten stecken mathematische Theorien drin, oft sogar als fundamentale Blöcke. Künstliche Intelligenz sowohl in der symbolischen Form als auch in der numerischen Form des maschinellen Lernens ist im Wesentlichen Mathematik und vieles davon kann zumindest bis zum Abitur einigermaßen authentisch unterrichtet werden. Die geeignete Auswahl stellt aber eine große Herausforderung dar. Es scheint aber in jedem Falle sehr wichtig, zumindest exemplarisch die Bedeutung von Mathematik in der modernen Welt aufzuzeigen, weil es vielen Lernenden nicht klar ist, wie groß die Bedeutung mathematischer Methoden in der Welt sind. Während der Informatikunterricht beispielsweise Motivation der Lernenden daraus gewinnen kann, dass Fragen des Datamining oder der künstlichen Intelligenz ständig in den Nachrichten präsent sind, verzichtet der Mathematikunterricht bisher auf diese Motivationsquelle.

Eine zentrale Frage bei der unterrichtlichen Betrachtung solcher neuen und komplexer Inhalte ist dabei, auf welcher Auflösungsstufe die Dinge verstanden werden sollen. Rahwan et al. (2019) sehen diese Frage als zentral an und betrachten die Biologie als eine Wissenschaft, die paradigmatisch darauf eine Antwort geben kann: ein Verständnis des Lebens muss die Phänomene auf unterschiedlichen Auflösungsstufen verstehen, von der molekularen Ebene der Biochemie über die Funktionen des einzelnen Organismus bis hin zu populationsbiologischen und ökologischen Fragen. In der Informatik liegen die Dinge ähnlich mit einer Spannbreite von einzelnen Bits und ihrer Verarbeitung in Gattern und Flipflops, über einzelne sequentielle Algorithmen zu komplexen Netzwerken mit hochgradig parallelen Abläufen. Eine ähnliche Breite kann man auch für die Mathematik festhalten: Man kann grundlegend verstehen, warum überhaupt Maschinen in der Lage sind zu rechnen, wie Computer Zahlen repräsentieren, multiplizieren oder Logarithmus berechnen, wie interaktive Verfahren Probleme der Analysis, etwa Differenzialgleichungen, lösen oder wie neuronale Netze trainiert werden. Es ist dabei keineswegs notwendig, jeweils die optimalen Verfahren zu verstehen. Schon bei den Grundrechenarten gibt es optimale Varianten, die nicht mehr viel mit den Herangehensweisen der Schule zu tun haben. Die Art, wie in modernen Prozessoren Multiplikationen gerechnet werden, ist eben nicht mehr analog zu den schriftlichen Rechenverfahren, die in der Schule gelernt werden, trotzdem kann man auf Basis des schulischen Multiplikationsverfahrens verstehen, dass Systeme aus einfachen logischen Schaltungen Multiplikation berechnen können – und welche Grenzen solche Systeme haben. Mit dem Wissen über die Welt kann außerdem das Wissen über die mathematischen Konzepte wachsen, etwa in dem man algorithmische Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen aufbaut (Weber, 2016).

Wesentliche politische Entscheidungen hängen heutzutage von den Vorhersagen von Klimamodellen ab. Wie solche Modelle im Detail funktionieren, entzieht sich der allgemeinbildenden Mathematik. Was aber an der Schule vermittelt werden kann, ist die Einsicht darin, dass physikalische Systeme diskretisiert und durch numerisches Rechnen vorhergesagt werden können. Unterschiede von Modellfehlern und Approximationsfehlern können verstanden werden und so Grundlage für die Kommunikation mit Experten bilden. Wesentlich elementarer sind viele Artefakte der digitalen Lebenswelt: das Verhalten der automatischen Rechtschreibkorrektur lässt sich mit bedingten Wahrscheinlichkeiten besser verstehen, und damit lassen sich viele Fehlbedienungen antizipieren und vermeiden. Die Grundlagen von Bild- und Videoverarbeitung lassen sich mit Mathematik der Sekundarstufe I verstehen und bieten damit gleichzeitig ein Betätigungsfeld für elementares algebraisches Arbeiten (https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~oldenbre/webBV/index.html). Komplexe Systeme zu strukturieren ist mit mathematischen Methoden möglich. Die Bedeutung des Systemischen Denkens wurde schon von Ossimitz (2000) erkannt. Neue fachliche Entwicklungen, etwa die Theorie kausaler Zusammenhänge (Pearl & Mackkenzie, 2018), lassen sich elementar darstellen und erklären viele Phänomene der Welt. Das Gleiche gilt für viele der Methoden des Datamining. Häufig sind es relativ einfache Algorithmen, die es ermöglichen, Simulationen von Sachverhalten zu erstellen, um diese besser zu verstehen. Die nötigen Grundkenntnisse aus der Informatik sind überschaubar. Insbesondere kann man sich einer Gerüstdidaktik (Kutzler, 1995) bedienen: In Oldenburg (2011) wurden für eine Reihe von mathematischen Verfahren elementare Implementationen gezeigt, die nur einen minimalen Satz von Kenntnissen einer Programmiersprache voraussetzen. Zu den Algorithmen, die dort behandelt werden, gehören beispielsweise multivariate numerische Optimierung. Durch solche einfachen Implementationen können Lernende Grundvorstellungen dazu aufbauen, was es bedeutet, ein

Optimierungsproblem numerisch zu lösen. Beispielsweise, dass man prinzipbedingt nur eine Lösung finden wird, auch wenn es mehrere Minima gibt, dass die Lösung ggfs. von einem Startwert abhängt und dass die erhaltenen Werte nicht exakt sind. Wenn dies alles verstanden ist, kann man problemlos einen schnelleren Algorithmus als Blackbox benutzen und damit komplexe Fragestellungen bearbeiten. Da sich sehr viele naturwissenschaftliche Fragestellungen als Optimierungsproblem formulieren lassen, erschließt sich damit ein riesiges Feld von Gegenständen, die modelliert werden können.

Fragestellungen der diskreten Mathematik, etwa der kombinatorischen Optimierung sind in der digitalen Lebenswelt von größter Bedeutung und es wurden bereits umfangreiche didaktische Arbeiten dazu gemacht (zum Beispiel Hußmann & Lutz-Westphal, 2007).

4. Fazit

In den obigen Abschnitten wurde eine ganze Reihe von Themen angesprochen, die im Mathematikunterricht behandelt werden könnten, um sowohl den Blick auf die Mathematik als auch auf ihre Bedeutung in der modernen digitalen Welt zu schärfen. Im Gegensatz zu einem Einsatz digitaler Medien, zur Verbesserung des Lernens der traditionellen Inhalte der Mathematik, der ohnehin an Grenzen stößt, wenn die in den mathematischen Medien versteckten Modellierungen an die Oberfläche treten, würde das also eine deutliche Neuausrichtung des Curriculums bedeuten. Für eine solche Neuausrichtung ist es sinnvoll, wenn auch der Mathematikunterricht sich an der Umsetzung der großen Idee des Computational Thinking (Wing, 2008) beteiligt, Ein Aspekt davon ist das algorithmische Denken, das durch elementares Programmieren geschult wird. In dem Maße, in den Informatik als Pflichtfach etabliert wird, steht dem Mathematikunterricht dies zur Verfügung und sollte entsprechend genutzt werden. Die Zeit, die für das Erlernen einer Programmiersprache nötig ist, wird dann also nicht mehr vom Mathematikunterricht aufzubringen sein, dies sollte eine Umgestaltung erleichtern. Des Weiteren kann man darüber nachdenken, ob man noch alle alten Inhalte im gleichen Umfang unterrichten will. Conrad Wolfram (2020) hat darauf hingewiesen, dass viele der aktuellen Bemühungen der Didaktik darauf hinauslaufen, mit Computerhilfe (also medienpädagogisch) den Kindern beizubringen, wie man Probleme gelöst hat, als es noch keine Computer als Hilfsmittel gab. Natürlich sind historische Ausflüge von Interesse. Ich denke man kann kaum überschätzen, wie viel man über menschliche Erkenntnisprozesse und Argumentationsweisen lernen kann, wenn man sich klarmacht, mit welch elementaren Argumenten Eratosthenes den Erdumfang bestimmt hat. Aber wozu man jenseits der elementaren Begriffsbildung mit Zirkel und Lineal konstruieren sollte, ist in der modernen digitalen Welt unklar. Sicher ist, dass man Lernende mit DGS nicht auf CAD Programme in der heutigen Berufswelt vorbereitet, weil diese eine ganz andere Bedienlogik haben.

Es ist klar, dass die hier angedachte Neujustierung der inhaltlichen Ausrichtung des Mathematikunterrichts nur in einem langen Aushandlungsprozess aller Beteiligten gelingen kann. Es scheint mir aber wichtig, dies in Angriff zu nehmen, weil der Mathematikunterricht sowohl gegenüber Lernenden als auch gegenüber Eltern und Bildungspolitikern seine Existenzberechtigung legitimieren muss, in dem er nachweist, dass er die Bildung vermittelt, die nötig ist, um sich in unserer Welt orientieren zu können.

Literatur:

Bersch, S., Merkel, A., Oldenburg, R. Weckerle, M. (2020). Erklärvideos: Chancen und Risiken – zwischen fachlicher Korrektheit und didaktischen Zielen. GDM - Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 109, 58–63.

Bundy, A. (1986). The Computer Modelling of Mathematical Reasoning. London: Academic Press.

Elschenbroich, H.-J., Gawlick, Th., Henn, H.-W. (2001): Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software. Hildesheim: Franzbecker.

Hamilton, E.R., Rosenberg, J.M. & Akcaoglu, M.: The Substitution Augmentation Modification Redefinition (SAMR) Model: a Critical Review and Suggestions for its Use. TechTrends (2016) 60: doi:10.1007/s11528-016-0091-y

Hickethier, K. (2010). Einführung in die Medienwissenschaft. Stuttgart: J. B. Metzler.

Hischer, H. (2002). Mathematikunterricht und Neue Medien. Franzbecker.

Heymann, H.-W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Beltz.

Hölzl, R. (1994). Im Zugmodus der Cabri-Geometrie: Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Hölzl, R. (1995). Eine empirische Untersuchung zum Schülerhandeln mit Cabri-géomètre. Journal für Mathematikdidaktik, 16(1/2), 79–113.

Hußmann, S., Lutz-Westphal, B. (eds) (2007). Kombinatorische Optimierung erleben. Vieweg+Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9120-4

Kieran, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? Math. Educ. 2004, 8, 139–151.

KMK (Hrsg.). (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA), Berlin: KMK. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Kutzler, B. (1995). Mathematik unterrichten mit DERIVE. New York: Addison-Wesley.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Oldenburg, R. (2011). Mathematische Algorithmen im Unterricht. Wiesbaden: Teubner.

Oldenburg, R. (2019). Vernetzungen zwischen Mathematik- und Informatikunterricht. Der Mathematikunterricht, 65(4).

Oldenburg, R. (2022). Informatisches Denken im Mathematikunterricht. In: Pinkernell, G., Reinhold, F., Schacht, F., Walter, D. (eds) Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_13

Ossimitz, G. (2000): Entwicklung systemischen Denkens. München.

Pearl, J., Mackkenzie, D. (2018). The book of Why. Penguin.

Rahwan, I., Cebrian, M., Obradovich, N. et al. Machine behaviour. Nature 568, 477–486 (2019). https://doi.org/10.1038/s41586-019-1138-y

Stachowiak, H. (1973). Allgemeine Modelltheorie. Wien: Springer.

Weber, C. (2016). Making Logarithms Accessible - Operational and Structural Basic Models for Logarithms. Journal für Mathematik-Didaktik, 37(1), 69–98. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0104-6.

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. Philosophical transactions of the royal society of London A: mathematical, physical and engineering sciences, 366(1881), 3717–3725.

Winter, H. (1992). Sachrechnen in der Grundschule, Berlin.

Wolfram Research, Inc. (2022). Mathematica, Version 13.1, Champaign, IL (2022).

Wolfram, C. (2020). The Math(s) Fix. Wolfram Media Inc.