



Langfrist-Prognose von Performance-Indizes: Vergleich einiger Verfahren

Günter Bamberg · Sebastian Heiden · Michael Krapp

Eingegangen: 8. Februar 2023 / Angenommen: 7. Juni 2023 / Online publiziert: 13. Juli 2023
© Der/die Autor(en) 2023

Zusammenfassung Langfrist-Prognosen sind typischerweise problematischer als Kurzfrist-Prognosen. Im Kapitalmarktcontext ist die Sachlage jedoch umgekehrt, da verlässliche Kurzfrist-Prognosen durch Arbitrageure sofort zunichte gemacht würden. Ex ante ist der Performance-Index am Prognosehorizont eine extrem rechts-schief verteilte Zufallsvariable. Prognosen, die auf dessen Modalwert abzielen, sind daher viel zu pessimistisch. Prognosen, die auf den Erwartungswert abzielen, sind dagegen zu optimistisch. Von den drei prominenten Lagemaßen ist nur der Median in der Lage, als Basis für eine verlässliche Prognose zu dienen. Es werden einige Praktiker-Verfahren untereinander und mit einem neuen Prognoseverfahren verglichen, welches auf der erwartungstreuen Schätzung des Medians beruht. Zur Illustration der Verfahren und der resultierenden Prognosen werden Daten des DAX bis 2022 verwendet. Es zeigt sich unter anderem, dass der erwartungstreue Median-Schätzer bessere Prognosen als das beste ‚Praktiker-Verfahren‘ liefert.

Schlüsselwörter Langfrist-Prognose · Performance-Indizes · Median-Schätzer · Vergleich

Günter Bamberg · Sebastian Heiden · ✉ Michael Krapp
Institut für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie, Universität Augsburg,
Universitätsstraße 16, 86159 Augsburg, Deutschland
E-Mail: michael.krapp@wiwi.uni-augsburg.de

Long-term forecast of performance indices: comparison of some procedures

Abstract Long-term forecasts are typically more problematic than short-term forecasts. In the capital market context, however, the situation is contrary since reliable short-term forecasts would be exploited by arbitrageurs immediately. The performance index at the forecast horizon is an extremely right-skewed random variable. Forecasts based on the modal value are far too pessimistic. On the other hand, forecasts based on the expected value are too optimistic. Of the three prominent measures of central tendency, only the median is able to serve as a basis for a reliable prognosis. Some practitioners' procedures will be compared with each other and with a new forecasting method based on the unbiased estimation of the median. For an illustration and comparison of the methods and the resulting forecasts, data from the DAX up to 2022 are used. It shows, among other things, that the unbiased median estimator provides better predictions than the best "practitioner method".

Keywords Long-term forecast · Performance indices · Median estimator · Comparison of procedures

1 Einführung

Ende 2017 wurde der DAX dreißig Jahre alt. Anlässlich dieses Geburtstages stellten Journalisten zahlreichen Kapitalmarktexperten die Frage: „Wo wird der DAX in 30 Jahren stehen?“, so zum Beispiel Eckert und Zschäpitz (2018) in einem in der Tageszeitung „Die Welt“ am 01.01.2018 veröffentlichten Artikel. Zur Erinnerung: Ende 1987 wurde der DAX auf den Wert 1000 normiert; Ende 2017 stand er bei etwa 13 000 Punkten. Im erwähnten „Welt“-Artikel prognostizierte kaum ein Experte für Ende 2047 einen DAX-Stand von über 100 000. Die pessimistischste Prognose lag bei 36 000 Punkten (Privatbank Safra Sarasin) und die mit Abstand optimistischste bei 185 000 Punkten (Lothar Koch, Leiter Portfoliomanagement GSAM + Spee Asset Management in Düsseldorf). Die meisten Prognosen bewegten sich zwischen 60 000 Punkten (DekaBank) und 100 000 Punkten (Deutsche Bank sowie Berenberg Bank). Der Durchschnitt lag bei 74 375 Punkten.

Eine simple Trendextrapolation würde den Prognosewert $13 \cdot 13\,000 = 169\,000$ liefern, welcher von fast allen befragten Experten als zu hoch empfunden wurde. Es ist nicht bekannt, ob die Experten-Prognosewerte aus Methoden oder aus reinem ‚Bauchgefühl‘ resultierten. Im Folgenden geht es natürlich nur um wohldefinierte Prognosemethoden sowie um ihre Begründung und ihren (theoretischen und numerischen) Vergleich. Die Verwendung von Kovariaten erscheint in diesem Kontext als wenig aussichtsreich. Eine bedingte Prognose würde letztlich die Prognose der Kovariaten-Werte erfordern, was die Praktikabilität zunichte machen würde. Insofern kommt nur eine autoprojektive Prozedur infrage. Die klassische Vorgehensweise besteht darin, ein mehrparametrisches Modell, z. B. ein ARIMA-Modell, zu schätzen und daraus die optimale Prognose als bedingten Erwartungswert am Prognosehorizont zu berechnen.

Aus folgenden Gründen weichen wir auch von dieser klassischen Vorgehensweise ab: Die im Abschn. 2 genauer diskutierte rechtsschiefe Verteilung der Targetvariablen Y bewirkt, dass die Realisation von Y den Erwartungswert bei großem Prognosehorizont nahezu mit Wahrscheinlichkeit eins unterschreitet; der Erwartungswert liefert also eine zu optimistische Prognose. Analog liefert der Modalwert eine viel zu pessimistische Prognose. Auch eine Intervallprognose erscheint wenig sinnvoll, da eine Intervallprognose gegebener Länge (etwa 1000 DAX-Punkte) unweigerlich dazu führen würde, dass sie im Bereich der maximalen Dichte, also nahe am Modalwert, lokalisiert sein müsste; demnach würde sie ebenfalls zu pessimistisch ausfallen. Deshalb streben wir zur Lösung von Prognoseproblemen, die dem in der Eingangsfrage ähneln, eine *unbedingte Punktprognose* an.

Die Targetvariable Y ist entweder ein Performance-Index oder ein darauf aufbauendes Alterssicherungs-Instrument, wie z. B. ein ETF-Portfolio von Performance-Indizes. Wir verwenden folgende Notation:

$$Y_{n+T} = Y_n \cdot (1 + R_{n+1}) \cdot \dots \cdot (1 + R_{n+T}) \quad (1)$$

ist der Performance-Index zum Zeitpunkt $n+T$ gegeben die Historie $t = 1, \dots, n$ und den resultierenden (bekannten) Index-Stand Y_n . Die Zeit wird in Jahren gemessen, sodass der Prognosehorizont T Jahre beträgt. $1 + R_t$ ist die Bruttorendite für das Jahr t ; infolgedessen ist R_t die gewöhnliche (oder Netto-)Rendite für das Jahr t .

Unter Verwendung von Logrenditen $r_t = \ln(1 + R_t)$ wird aus (1)

$$Y_{n+T} = Y_n \cdot e^{r_{n+1}} \cdot \dots \cdot e^{r_{n+T}} = Y_n \cdot \exp\left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t\right). \quad (2)$$

Geht man von i. i. d. Logrenditen aus, so stellt (2) (bei festem n als Funktion des Prognosehorizonts T betrachtet) einen geometrischen Random Walk mit Drift $\mu = E(r_t)$ dar.

Der Aufsatz ist wie folgt aufgebaut: Nach der Erörterung der Rechtsschiefe der Y -Verteilung in Abschn. 2 werden in Abschn. 3 zwei bekannte Praktiker-Verfahren diskutiert. In Abschn. 4 gehen wir von normalverteilten Logrenditen aus; dort entwickeln wir das von uns präferierte Prognoseverfahren, welches auf der erwartungstreuen Schätzung des Medians von Y beruht. In Abschn. 5 werden die Verfahren und ihre Prognosegüte anhand von Daten des DAX verglichen sowie analytisch geklärt, bis zu welchen Prognosehorizonten das von uns präferierte Verfahren sinnvoll einsetzbar ist. Abschn. 6 schließt mit einer kritischen Würdigung der Ergebnisse.

2 Verteilung des Index-Stands

Bei Hochfrequenzdaten sind die Logrenditen im Allgemeinen nicht i. i. d. Im vorliegenden Fall haben wir es aber mit Jahresdaten zu tun. Durch dieses längere Zeitintervall reduzieren sich ARCH- und GARCH-Effekte, vgl. hierzu Kirchgässner et al. (2014), die eine Vergrößerung der Abtastperiode studieren. Wenn wiederkehrend nur die m -te Beobachtung verwendet wird, so verschwinden im Limes ($m \rightarrow \infty$)

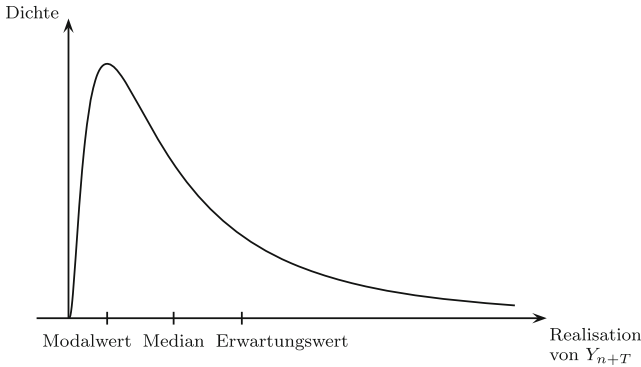


Abb. 1 Dichte der Targetvariablen Y_{n+T}

ARCH- und GARCH-Effekte vollständig, ansonsten schwächen sie sich nur in Abhängigkeit von m ab.

Wir nehmen an, dass die Jahres-Logrenditen i. i. d. sind. Für zukünftige Renditen kann dies natürlich nicht getestet werden. Hughson et al. (2006) haben gezeigt, dass bei $r_t \sim$ i. i. d. und finitem Erwartungswert $\mu = E(r_t)$ die Verteilung von (1) bzw. (2) extrem rechtsschief ist, vgl. Abb. 1. Ferner haben sie gezeigt:

$$P(Y_{n+T} < E(Y_{n+T})) \rightarrow 1 \quad \text{für } T \rightarrow \infty \quad (3)$$

Fasst man (1) bzw. (2) als Vermögensentwicklung einer Buy-and-Hold-Strategie auf, bei der beispielsweise in eine Einzelaktie investiert wird, so gilt weder die Rechtsschiefe noch die Aussage (3). Denn eine Einzelaktie hat stets eine (möglicherweise äußerst kleine) Ausfallwahrscheinlichkeit, d. h.

$$P(1 + R_t = 0) > 0,$$

was für die Logrendite $E(r_t) = -\infty$ bedeutet. Die Verteilung von Y_{n+T} strebt dann gegen eine Einpunktverteilung über den Punkt 0. Bei einem Aktienindex werden jedoch schlecht performende Aktien rechtzeitig ersetzt, sodass kein Survivorship-Risiko besteht¹ und die Rechtsschiefe der Verteilungen von (1) bzw. (2) sowie die Aussage (3) zutreffen.

Für normalverteilte Logrenditen r_t lässt sich zudem zeigen (vgl. Anhang 1):

$$P(Y_{n+T} > \text{Mod}(Y_{n+T})) \rightarrow 1 \quad \text{für } T \rightarrow \infty \quad (4)$$

Aus (3) und (4) geht hervor, dass für Langfrist-Prognosen weder der Erwartungswert (E) noch der Modalwert (Mod) eine verlässliche Orientierung bieten.

¹ Streng genommen existiert ein Restrisiko, wenn der Aktienindex ein Länderindex (und kein Weltindex) ist. Und selbst bei einem Weltindex ist ein Restrisiko denkbar, wenn der Index in Form eines handelbaren Produkts (z. B. ETF) gekauft wird. Auch von diesem Emittentenrisiko wollen wir hier absehen.

3 Zwei traditionelle Prognoseverfahren

Das erste der in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren wird zur besseren notationellen Unterscheidung von den weiteren Verfahren mit $f_1(n, T)$ bezeichnet; f steht dabei für „forecast“. Es ist in der englischsprachigen Literatur als „compounding the arithmetic mean rate of return“ bekannt. Die Prognose \widehat{Y}_{n+T} errechnet sich dann gemäß:

$$f_1(n, T) = Y_n \cdot (\overline{1 + \bar{R}})^T = Y_n \cdot (1 + \bar{R})^T \quad \text{mit} \quad \bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t \quad (5)$$

Die korrekte Bezeichnung wäre demnach „compounding the arithmetic mean rate of gross return“. Für die DAX-Historie bis 2017 würde die eingangs von Abschn. 1 gestellte Frage wegen $\overline{1 + \bar{R}} = 1,117$ folgendermaßen beantwortet:

$$\widehat{\text{DAX}}_{2047} = 13\,000 \cdot 1,117^{30} \approx 360\,000$$

Offensichtlich hat sich keiner der befragten Experten an diesem Prognoseverfahren orientiert. Die Schwäche dieses Verfahrens besteht darin, dass es auf den Erwartungswert abzielt. Ersetzt man nämlich in

$$E(Y_{n+T}) = Y_n \cdot E \left[\prod_{t=n+1}^{n+T} (1 + R_t) \right] \stackrel{\text{i. i. d.}}{=} Y_n \cdot (1 + \mu_R)^T \quad (6)$$

$\mu_R = E(R_t)$ durch die erwartungstreue Schätzung $\widehat{\mu}_R = \bar{R}$, so erhält man die Prognose (5). Berücksichtigt man zudem den Stichprobencharakter von \bar{R} , so ergibt sich auf Grund der Jensenschen Ungleichung eine Überschätzung des (ohnehin zu optimistischen) Erwartungswertes $E(Y_{n+T})$:

$$\begin{aligned} E[f_1(n, T)] &= Y_n \cdot E[(1 + \bar{R})^T] \\ &\geq Y_n \cdot [E(1 + \bar{R})]^T = Y_n \cdot (1 + \mu_R)^T \stackrel{(6)}{=} E(Y_{n+T}) \end{aligned} \quad (7)$$

Insgesamt erscheint dieses Verfahren wenig empfehlenswert zu sein.

Das zweite traditionelle Prognoseverfahren $f_2(n, T)$ ist unter dem Namen „compounding the geometric mean rate of return“ bekannt. Es prognostiziert gemäß

$$f_2(n, T) = Y_n \cdot (e^{\bar{r}})^T = Y_n \cdot e^{T\bar{r}}. \quad (8)$$

Korrekt wäre auch hier die Verwendung von „gross return“ an Stelle von „return“. Die Bezeichnung erklärt sich folgendermaßen: Für das geometrische Mittel GM der Brutto-Renditen

$$\text{GM} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^n (1 + R_t)}$$

gilt

$$\ln(\text{GM}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + R_t) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t = \bar{r},$$

was $\text{GM} = e^{\bar{r}}$ und somit $\text{GM}^T = e^{T\bar{r}}$ impliziert. Da das geometrische Mittel kleiner als das arithmetische Mittel ist, gilt

$$\text{GM} \leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (1 + R_t),$$

sodass die Prognosen des zweiten Verfahrens nicht größer (und im Allgemeinen sehr viel kleiner) als diejenigen des ersten Verfahrens sind:

$$f_2(n, T) \leq f_1(n, T)$$

Für $n = 30$ und die DAX-Daten ist $\bar{r} = 0,085$, und es ergibt sich mit

$$\widehat{\text{DAX}}_{2047} = 13\,000 \cdot e^{30 \cdot 0,085} \approx 166\,500$$

Punkten eine deutlich moderatere Prognose als beim ersten Verfahren (mit $\widehat{\text{DAX}}_{2047} \approx 360\,000$).

In (7) wurde gezeigt, dass $E[f_1(n, T)]$ den Erwartungswert $E(Y_{n+T})$ der Targetvariablen systematisch überschätzt. Bei $f_2(n, T)$ hängt es vom Größenvergleich der Problemdaten n und T ab, ob $E[f_2(n, T)] \geq E(Y_{n+T})$ oder $E[f_2(n, T)] \leq E(Y_{n+T})$ gilt. Mithilfe der Jensenschen Ungleichung kann man jedoch zeigen, dass $f_2(n, T)$ den Median (Med) systematisch überschätzt:

$$E[f_2(n, T)] = Y_n \cdot E(e^{T\bar{r}}) \geq Y_n \cdot e^{E(T\bar{r})} = Y_n \cdot e^{T\mu_r} \approx \text{Med}(Y_{n+T})$$

Die Approximation $Y_n \cdot e^{T\mu_r} \approx \text{Med}(Y_{n+T})$ kann folgendermaßen begründet werden:

$$\text{Med}(Y_{n+T}) = Y_n \cdot \text{Med}\left(\exp \sum_{t=n+1}^{n+T} r_t\right) = Y_n \cdot \exp\left(\text{Med} \sum_{t=n+1}^{n+T} r_t\right) \approx Y_n \cdot e^{T\mu_r}, \tag{9}$$

da der Median-Operator mit einer monotonen Funktion vertauschbar ist und von Hall (1980)

$$\text{Med}\left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t\right) = T\mu_r - \frac{\text{Schiefe}(r_t)}{6 \cdot \text{Var}(r_t)} + o(1)$$

gezeigt wurde. Für große T gilt demnach die Approximation in (9) in sehr guter Annäherung.

Im nächsten Abschnitt werden wir normalverteilte Logrenditen betrachten. Die Approximation (9) wird dann zur Gleichheit. Die Überschätzung des Medians kann dann quantifiziert – und somit auch eliminiert – werden.

4 Normalverteilte Logrenditen

Wie behalten für die Logrenditen r_t die i.i.d.-Annahme bei und verschärfen sie zu $r_t \sim N(\mu; \sigma^2)$. Wir bewegen uns damit in der Black/Scholes-Welt, die seit Black und Scholes (1973) in zahlreichen Papers (z. B. Bamberg und Dorfleitner 1999) zu Grunde gelegt wurde und als Standardmodell zur Optionsbewertung in allen einschlägigen Lehrbüchern (z. B. Braun 2009; Franke et al. 2015; Hirta und Neftci 2014; Rudolph und Schäfer 2010; Trautmann 2007) zu finden ist. Die Annahme i.i.d. normalverteilter Logrenditen ist natürlich heroisch und kann nur eine Approximation an den wahren (aber unbekannt)en stochastischen Prozess für die r_t sein. Zweck dieser häufig geforderten Prämisse ist stets, an Stelle einer kompliziert anzuwendenden iterativen Prozedur eine einfach anwendbare explizite Lösung zu erhalten. Diese muss sich allerdings im Vergleich zu anderen Lösungen empirisch bewähren. Das Motto ist also: „Unter den Blinden ist der Einäugige König.“

Unter den getroffenen Annahmen ist Y_{n+T} lognormalverteilt, genauer:

$$Y_{n+T} = Y_n \cdot \exp\left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t\right) \quad \text{mit} \quad \exp\left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t\right) \sim LN(T\mu; T\sigma^2)$$

Modalwert, Median und Erwartungswert folgen dann aus den bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(Y_{n+T}) &= Y_n \cdot e^{T\mu - T\sigma^2} \\ \text{Med}(Y_{n+T}) &= Y_n \cdot e^{T\mu} \\ E(Y_{n+T}) &= Y_n \cdot e^{T\mu + \frac{1}{2}T\sigma^2} \end{aligned}$$

Wir bleiben zunächst bei Prognoseverfahren $f_2(n, T)$, dem besseren der beiden Praktiker-Verfahren aus Abschn. 3, und untersuchen dessen Eigenschaften: Wegen $\bar{r} \sim N(\mu; \frac{1}{n}\sigma^2)$ und $T\bar{r} \sim N(T\mu; \frac{1}{n}T^2\sigma^2)$ ist $e^{T\bar{r}}$ gemäß $LN(T\mu; \frac{1}{n}T^2\sigma^2)$ verteilt. Der Median der Prognosefunktion $f_2(n, T)$ ist mit dem Median der Targetvariablen identisch:

$$\text{Med}(Y_n \cdot e^{T\bar{r}}) = Y_n \cdot e^{\text{Med}(T\bar{r})} = Y_n \cdot e^{T\mu} = \text{Med}(Y_{n+T})$$

Diese Mediantreue, auf die bereits Hughson et al. (2006) hingewiesen haben, ist allerdings keine besonders überzeugende Eigenschaft. Sie besagt nur, dass mit fifty-fifty-Wahrscheinlichkeit die Prognose über oder unter dem wahren Median liegt; dies kann mit einem relativ großen Schätz- bzw. Prognosefehler einhergehen. Überzeugender ist das Kriterium der Erwartungstreue, da dieses auf einer quadratischen Verlustfunktion bezüglich des Prognosefehlers beruht und somit größere Fehler stärker bestraft, als es die der Mediantreue zu Grunde liegende Betrags-Verlustfunktion vermag.

Erwartungstreu bezüglich des Medians ist $f_2(n, T)$ jedoch nicht, denn es gilt:

$$E[f_2(n, T)] = Y_n \cdot E(e^{T\bar{r}}) = Y_n \cdot e^{T\mu + \frac{1}{2n}T^2\sigma^2} = e^{\frac{1}{2n}T^2\sigma^2} \cdot \text{Med}(Y_{n+T})$$

Man sieht hier die bereits in Abschn. 3 festgestellte Überschätzung des Medians. Diese Überschätzung kann man nun quantifizieren: Sie besteht aus dem Faktor

$$e^{\frac{1}{2n}T^2\sigma^2} > 1. \quad (10)$$

Nun machen wir uns eine Besonderheit von Jahresrenditen zu Nutze. Der Parameter σ , geschätzt durch die Stichproben-Standardabweichung, ist empirisch relativ stabil und pendelt um den Wert 0,20. Für die 30 DAX-Daten bis 2017 ergibt sich beispielsweise der Wert 0,23. Und für den S&P 500 von 1926 bis 2001 erhalten Jacquier et al. (2003) beispielsweise den Schätzwert 0,203.

Der Skalierungsfaktor (10) kann infolgedessen gut abgeschätzt werden, indem man beispielsweise $\sigma = 0,23$ setzt oder einen Schätzwert aus der eigenen Historie verwendet. Damit kann die Überschätzung vermieden werden. Man muss nur $f_2(n, T)$ mit dem Kehrwert von (10) multiplizieren. Der erwartungstreu Schätzer für den Median von Y_{n+T} ist infolgedessen

$$f_3(n, T) = Y_n \cdot e^{T\bar{r} - \frac{1}{2n}T^2\sigma^2}. \quad (11)$$

Analog dazu kann man den Modalwert von Y_{n+T} mit

$$f_4(n, T) = Y_n \cdot e^{T\bar{r} - T\sigma^2 - \frac{1}{2n}T^2\sigma^2}$$

und den Erwartungswert von Y_{n+T} mit

$$f_5(n, T) = Y_n \cdot e^{T\bar{r} + \frac{1}{2}T\sigma^2 - \frac{1}{2n}T^2\sigma^2}$$

erwartungstreu schätzen. Die Prognoseprozedur $f_5(n, T)$ ist bei Jacquier et al. (2003) vorgeschlagen worden. Da der Erwartungswert von Y_{n+T} auf Grund der rechtsschiefen Verteilung auf lange Sicht mit Wahrscheinlichkeit 1 unterschritten wird, ist $f_5(n, T)$ aber trotz der Erwartungstreu kein gutes Prognoseverfahren.

Vergleicht man die beiden Schätzverfahren für den Median, nämlich den median-treuen Schätzer $f_2(n, T)$ und den erwartungstreuen Schätzer $f_3(n, T)$ hinsichtlich der mittleren quadratischen Abweichung (mean squared error, MSE) bezüglich des Medians, so stellt man fest (vgl. Anhang 2):

$$\text{MSE}[f_3(n, T)] < \text{MSE}[f_2(n, T)]$$

Offensichtlich geht das Schätzverfahren $f_3(n, T)$ aus $f_2(n, T)$ durch Multiplikation mit dem Schrumpfungsfaktor $e^{-\frac{1}{2n}T^2\sigma^2}$ hervor. Man kann sich natürlich fragen, ob dies der MSE-optimale Schrumpfungsfaktor ist. Im Anhang 3 wird gezeigt, dass der MSE-optimale Faktor noch kleiner ist, nämlich $e^{-\frac{3}{2n}T^2\sigma^2}$. Vergleicht man den da-

raus resultierenden (verzerrten) Schätzer $Y_n \cdot e^{T\bar{r} - \frac{3}{2n}T^2\sigma^2}$ aber mit dem Modalwert-Schätzer $f_4(n, T)$, so erkennt man, dass eine zu pessimistische Prognose entsteht: Für $T = n$ sind beide Schätzer identisch; für $T > n$ liegt man noch unter dem pessimistischen Modalwert-Schätzer. Der beste Kompromiss ist demnach das Prognoseverfahren $f_3(n, T)$, welches den Median $\text{Med}(Y_{n+T})$ erwartungstreu schätzt.

Die Prognosefunktion $f_3(n, T)$ ist bereits bei Kan und Zhou (2009) zu finden. Primäre Zielsetzung bei Kan und Zhou ist jedoch die Berücksichtigung des Stichprobencharakters von σ in der jeweiligen Prognosefunktion für den Median und die Quantile. Die Komplexität wächst hierdurch beträchtlich. So tritt an die Stelle unseres Korrekturfaktors (10) eine (konvergente) unendliche Summe. Außerdem sind die Prognoseergebnisse von der Länge der Abtastperiode abhängig; die Verwendung von Monatsdaten an Stelle von Jahresdaten kann zu anderen Prognosewerten führen.

Da sich unsere Arbeit an praxisorientierte Anwender richtet, bleiben wir bei der Vereinfachung, σ konstant zu setzen, wobei der numerische Wert von σ empirisch begründet ist. Diese Vereinfachung ermöglicht es zudem, die Frage zu beantworten, bis zu welchem Prognosehorizont T (bei gegebener Historie der Länge n) Prognosen überhaupt sinnvoll sind. Diese Frage werden wir im nächsten Abschnitt (insbesondere in Abschn. 5.2) beantworten.

5 Evaluation der Prognosegüte

5.1 Ex-ante-Prognosen für den DAX

Die Praktiker-Verfahren $f_1(n, T)$ und $f_2(n, T)$ wurden in Abschn. 3 diskutiert, und das von uns präferierte für den Median (Med) erwartungstreu Prognoseverfahren $f_3(n, T)$ wurde in Abschn. 4 begründet. Zu Vergleichszwecken wurden in der Tab. 1 noch drei weitere Prognoseverfahren berücksichtigt, nämlich der erwartungstreu Schätzer $f_4(n, T)$ für den Modalwert (Mod), der erwartungstreu Schätzer $f_5(n, T)$ für den Erwartungswert (E) sowie das von Jacquier et al. (2003) als „textbook rule“ bezeichnete Prognoseverfahren

$$f_6(n, T) = Y_n \cdot e^{T\bar{r} + \frac{1}{2}T\sigma^2},$$

welches aus $f_3(n, T)$ hervorgeht, wenn man $n \rightarrow \infty$ unterstellt und somit den Stichprobencharakter von \bar{r} ausblendet; der Anwender ist dann allwissend und kennt das ‚wahre μ ‘, welches er mit dem beobachteten \bar{r} gleichsetzt. Dann ist

Tab. 1 Prognosen des Veränderungsfaktors; $n = 30$; $\bar{r} = 0,085$; $\bar{R} = 0,117$; $\sigma = 0,23$

T	Prognosen des Veränderungsfaktors					
	Erwartungstreu Schätzer			Praktiker-Verfahren		Lehrbuch-Regel $e^{T\bar{r} + \frac{1}{2}T\sigma^2}$
	Mod	Med	E	$e^{T\bar{r}}$	$(1 + \bar{R})^T$	
10	1,26	2,14	2,79	2,34	3,01	3,05
20	1,34	3,85	6,53	5,47	9,08	9,29
30	1,19	5,79	12,81	12,81	27,35	27,94

$f_6(n, T)$ der Erwartungswert des lognormalverteilten Y_{n+T} . Alle Prognoseverfahren haben die Form $\hat{Y}_{n+T} = Y_n \cdot V$, also ein Produkt aus dem letzten Index-Stand Y_n und einem Veränderungsfaktor V . Der Übersichtlichkeit halber sind in Tab. 1 nur die jeweiligen Prognosen dieses Veränderungsfaktors eingetragen worden.

Um ein Gefühl für die Größenordnung dieser Werte zu entwickeln, sei erwähnt, dass ein Veränderungsfaktor $> 7,7$ bezüglich der Eingangsfrage in Abschn. 1 (unrealistische) Prognosewerte von über 100 000 bewirken würde. Dementsprechend kann man der letzten Zeile von Tab. 1 entnehmen, dass vier der konkurrierenden Verfahren bezüglich der Eingangsfrage viel zu optimistische Prognosen generieren und der erwartungstreue Schätzer für den Modalwert eine viel zu pessimistische Prognose. Ferner erkennt man aus der Tabelle, dass $f_3(30,30)$ die Eingangsfrage folgendermaßen beantwortet:

$$\widehat{\text{DAX}}_{2047} = 13\,000 \cdot 5,79 = 75\,270$$

Diese Prognose liegt sehr nahe an der von Eckert und Zschäpitz (2018) berichteten durchschnittlichen Experten-Erwartung in Höhe von 74 375 Punkten.

5.2 Zum Zusammenhang zwischen Prognosehorizont und Historie

Aus Anwendersicht ist natürlich die Frage bedeutsam, bis zu welchem Prognosehorizont T Prognosen überhaupt sinnvoll sind, d. h. ,wie langfristig‘ Langfrist-Prognosen höchstens sein sollten. Ist andererseits T vorgegeben (wie in der Eingangsfrage in Abschn. 1, welche sich auf einen Prognosehorizont von 30 Jahren bezieht), wäre zu klären, wie viele Jahre n die vorliegende Historie zurückreichen muss, um für diesen Prognosehorizont sinnvoll Prognosen anstellen zu können. Diese Fragen wollen wir im Folgenden für den von uns präferierten und in (11) definierten Median-Schätzer $f_3(n, T)$ klären.

Nahe liegende Antworten erhält man, wenn man die Aussage „Forecasts are useless whenever the forecast error variance fails to be smaller than the unconditional variance of the target variable“ von Breitung und Knüppel (2021) in unseren Kontext überträgt und fordert, dass die Streuung des Median-Schätzers $f_3(n, T)$ kleiner als die der Targetvariablen Y_{n+T} sein soll.

Da hier der Median der Targetvariablen geschätzt werden soll und dieser nicht mit deren Erwartungswert übereinstimmt, ist die Varianz als Streuungsmaß für unsere Zwecke ungeeignet; stattdessen legen wir die mittlere quadratische Abweichung

² Da der Median die erwartete absolute Abweichung minimiert, ist alternativ zur mittleren quadratischen Abweichung die mittlere absolute Abweichung bezüglich des Medians ein nahe liegendes Streuungsmaß. Wir haben deshalb auch für dieses Streuungsmaß den Zusammenhang zwischen Prognosehorizont und Historie untersucht und konnten viele der im Folgenden berichteten Ergebnisse reproduzieren. So etwa, dass das an Breitung und Knüppel (2021) angelehnte Kriterium für Prognosehorizonte $T \leq n$ unabhängig von der konkreten Parametrisierung stets erfüllt ist. Allerdings gestaltete sich die zugehörige Analyse formal deutlich aufwändiger. Weil wir die Arbeit nicht technisch überfrachten und zudem möglichst nahe bei

bezüglich des Medians zu Grunde.² Für die Targetvariable Y_{n+T} ergibt sich dann (vgl. Anhang 4):

$$\text{MSE}(Y_{n+T}) = Y_n^2 \cdot e^{2T\mu} \cdot \left(e^{2T\sigma^2} - 2e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} + 1 \right)$$

Da der Median-Schätzer $f_3(n, T)$ erwartungstreu ist, stimmen seine mittlere quadratische Abweichung und seine Varianz überein. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \text{MSE}[f_3(n, T)] &= Y_n^2 \cdot e^{-\frac{1}{n}T^2\sigma^2} \cdot \text{Var}(e^{T\bar{r}}) \\ &= Y_n^2 \cdot e^{-\frac{1}{n}T^2\sigma^2} \cdot e^{2T\mu + \frac{1}{n}T^2\sigma^2} \cdot \left(e^{\frac{1}{n}T^2\sigma^2} - 1 \right) \\ &= Y_n^2 \cdot e^{2T\mu} \cdot \left(e^{\frac{1}{n}T^2\sigma^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Eine Prognose mit $f_3(n, T)$ ist dann nach dem obigen Kriterium sinnvoll, falls $\text{MSE}[f_3(n, T)] < \text{MSE}(Y_{n+T})$ gilt, d. h. falls

$$e^{\frac{1}{n}T^2\sigma^2} < e^{2T\sigma^2} + 2 \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} \right) \quad (12)$$

zutrifft. Man beachte, dass die rechte Seite von (12) von n unabhängig ist. Wählt man, wie in der Eingangsfrage, einen Prognosehorizont T in Höhe von n , so ist die Bedingung (12) unabhängig von den konkreten Zahlenwerten von T und σ stets erfüllt (vgl. Anhang 5). Für kürzere Prognosehorizonte $T < n$ gilt (12) erst recht. Folglich erfüllt $f_3(n, T)$ das obige Kriterium auf jeden Fall, sofern man nicht weiter in die Zukunft prognostizieren möchte als die vorliegende Historie in die Vergangenheit zurückreicht.

Anderenfalls, falls der Prognosehorizont T also größer als die Historie n ist, existieren Schwellenwerte für T (bei gegebenem n) bzw. für n (bei gegebenem T), mit denen sich die zu Beginn dieses Abschnittes aufgeworfenen Anwendungsfragen nach dem maximal sinnvollen Prognosehorizont bzw. nach der für einen bestimmten

Tab. 2 Schwellenwerte für den Prognosehorizont bei gegebener Historie und vice versa; Prognose mit $f_3(n, T)$; $\sigma = 0,23$

Schwellenwerte für den Prognosehorizont T		Schwellenwerte für die Historie n	
gegebenes n	maximales T	gegebenes T	minimales n
3	3	3	3
5	7	5	4
10	17	10	7
20	39	20	11
30	59	30	16
40	79	40	21
50	99	50	26

dem durch Breitung und Knüppel (2021) inspirierten Kriterium bleiben wollen, beschränken wir uns im Folgenden darauf, die für die mittlere quadratische Abweichung gewonnenen Ergebnisse zu berichten.

Prognosehorizont mindestens benötigten Historie beantworten lassen. Während die letztere Frage offenkundig durch

$$n > \frac{T^2 \sigma^2}{\ln \left[e^{2T\sigma^2} + 2 \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} \right) \right]} \quad (13)$$

beantwortet wird, können exakte Schwellenwerte für T nur numerisch bestimmt werden. Tab. 2 berichtet einige dieser Schwellenwerte unter der Annahme der bereits für Tab. 1 verwendeten Parametrisierung $\sigma = 0,23$. Die Schwellenwerte wurden auf den jeweils nächsten ganzzahligen Wert abgerundet (im Falle von T) bzw. aufgerundet (im Falle von n). Tab. 2 kann beispielsweise entnommen werden, dass Prognosen mit $f_3(30, T)$ für Prognosehorizonte von bis zu 59 Jahren sinnvoll im Sinne des obigen Kriteriums sind. Dies trifft insbesondere auch auf die für Tab. 1 gewählten Werte von T zu.

Des Weiteren legen die in Tab. 2 zusammengetragenen Schwellenwerte für längere Prognosehorizonte bzw. Historien (in der Tabelle jeweils ab 20 Jahren) die Faustregel nahe, dass der Prognosehorizont T das Doppelte der Historie n nicht übersteigen sollte. Diese Faustregel lässt sich folgendermaßen rechtfertigen: Für wachsende Werte von T (und festes σ) wird der Unterschied zwischen $e^{2T\sigma^2} + 2 \cdot (1 - e^{\frac{1}{2}T\sigma^2})$ und $e^{2T\sigma^2}$ immer mehr vernachlässigbar. Anhang 6 belegt, dass das Verhältnis dieser beiden Terme bei $T = \frac{2}{\sigma^2} \cdot \ln \frac{4}{3}$ einen Minimalwert in Höhe von ca. 0,8 erreicht und sodann für wachsendes T gegen den Grenzwert 1 strebt. Im Fall von DAX-Prognosen mit $\sigma = 0,23$ befindet sich dieses Minimum bei einem Prognosehorizont in Höhe von $10,88 \approx 11$ Jahren. Für Langfrist-Prognosen dürfte dies eine eher moderate Einschränkung darstellen, erklärt aber andererseits, wieso die Faustregel $T < 2n$ in den Fällen der ersten Zeilen von Tab. 2 noch keine überzeugenden Abschätzungen liefert.

Substituiert man nun $e^{2T\sigma^2} + 2 \cdot (1 - e^{\frac{1}{2}T\sigma^2})$ in (13) unter Berufung auf obiges Resultat durch $e^{2T\sigma^2}$, so erhält man die Bedingung $n > \frac{T}{2}$, welche natürlich genau der Faustregel

$$T < 2n \quad (14)$$

entspricht. Diese gilt dann (sofern $T > \frac{2}{\sigma^2} \cdot \ln \frac{4}{3}$ gewährleistet ist) unabhängig vom konkreten Wert des Parameters σ .

Schließlich sei noch erwähnt, dass zum Zeitpunkt der Einreichung dieses Aufsatzes (im Jahr 2023) eine DAX-Zeitreihe der Länge $n = 35$ Jahre vorlag. Für diese erfüllt der Median-Schätzer $f_3(n, T)$ (unter der Annahme $\sigma = 0,23$) das an Breitung und Knüppel (2021) angelehnte Kriterium, falls $T \leq 69$ Jahre gilt. Da sich die Eingangsfrage ‚nur‘ auf einen Prognosehorizont von 30 Jahren bezieht, erscheint der Median-Schätzer auch in dieser Hinsicht zur Beantwortung der Eingangsfrage geeignet zu sein.

5.3 Ex-post-Prognosen für den DAX

In den vorangegangenen Abschnitten wurde dargelegt, dass der erwartungstreue Median-Schätzer $f_3(n, T)$ gemäß (11) dem besten ‚Praktiker-Verfahren‘ $f_2(n, T)$ gemäß (8) aus methodischen Gründen vorzuziehen ist. Versucht man, eine solche methodische Präferenz ‚numerisch zu begründen‘, so ist die Versuchung groß, für sehr viele Szenarien Vergleiche durchzuführen, die ‚ungünstigen Ergebnisse‘ beiseite zu schieben und primär die ‚günstigen Ergebnisse‘ zu präsentieren. Gerade in unserem Kontext bietet das Datenmaterial beträchtlichen Spielraum hierfür: Man kann unter vielen Performance-Indizes auswählen, spezielle Zeitperioden betrachten, bestimmte Prognosehorizonte herauspicken, verschiedene Prognosefehler-Maße ausprobieren etc. Der Leser ist natürlich nicht in der Lage, dies zu erkennen. Wir versichern aber, dass wir keinerlei einschlägige Versuche unternommen haben und beschränken uns im Folgenden auf eine ‚anekdotische Evidenz‘. Wir betrachten lediglich den DAX und die zugehörige Zeitreihe von Jahresendkursen. Dies ist nahe liegend, da die vorliegende Arbeit durch den DAX und insbesondere durch die Eingangsfrage „Wo wird der DAX Ende 2047 stehen?“ motiviert wurde.

Wir berechnen Zehnjahres-Prognosen, setzen also $T = 10$. Gemäß Tab. 2 setzt dies eine Historie von mindestens $n = 7$ Jahren voraus. Diesen Schwellenwert überschreiten wir in Tab. 4, indem wir die DAX-Schlussstände von 1987 bis 1997 als ‚Vorlauf‘ nutzen und dann n von Jahr zu Jahr inkrementieren. Ebenso legitim im Sinne von Abschn. 5.2 sind die Prognosen in Tab. 5, in der wir $n = 10$ fixieren. In Tab. 6 berichten wir schließlich Prognosen unter Verwendung einer (im Sinne von Tab. 2 zu kurzen) Historie von $n = 5$ Jahren. In den Tab. 4 und 5 sind die ersten Zehnjahres-Prognosen $\widehat{\text{DAX}}$ für 2007 möglich. Aus Konsistenzgründen beginnen wir auch in Tab. 6 mit Ex-post-Prognosen für 2007. Zur besseren Nachvollziehbarkeit sind in Tab. 3 die DAX-Schlusskurse der Jahre 1987 bis 2006 zusammengestellt. Die späteren Schlusskurse sind in den Tab. 4 bis 6 zu finden.

In Tab. 4 ist das Mittel \bar{r} der Logrenditen jeweils

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{\text{DAX}_n}{\text{DAX}_{1987}} = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{\text{DAX}_n}{1000},$$

wobei n die Anzahl Jahre nach Ultimo 1987 zählt. In Tab. 4 bzw. 5 ist n auf 10 bzw. 5 fixiert, und es werden für die Prognosen im Jahr t die Logrenditen $\frac{1}{10} \cdot \ln(\text{DAX}_t/\text{DAX}_{t-10})$ bzw. $\frac{1}{5} \cdot \ln(\text{DAX}_t/\text{DAX}_{t-5})$ verwendet. Für $n = 10$ erhält man

Tab. 3 DAX-Schlusskurse für die Jahre 1987 bis 2006

Jahr	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Kurs	1000,00	1327,87	1790,37	1398,23	1577,98	1545,05	2266,68	2106,58	2253,88	2888,69
Jahr	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Kurs	4249,69	5002,39	6958,14	6433,61	5160,10	2892,63	3965,16	4256,08	5408,26	6596,92

Tab. 4 Realisierte DAX-Schlusskurse und Ex-post-Prognosen mit inkrementellem n

Jahr	realisierter DAX- Schlusskurs	Ex-post-Prognose mittels $f_2(n, 10)$		Ex-post-Prognose mittels $f_3(n, 10)$		bessere Prog- nose
		Prognose	absoluter Fehler	Prognose	absoluter Fehler	
2007	8 067,32	18 060	9 993	13 863	5 796	f_3
2008	4 810,20	21 617	16 807	16 997	12 187	f_3
2009	5 957,43	35 041	29 084	28 109	22 152	f_3
2010	6 914,19	26 937	20 023	21 978	15 064	f_3
2011	5 898,35	16 661	10 763	13 793	7 895	f_3
2012	7 612,39	5 872	1 740	4 923	2 689	f_2
2013	9 552,16	9 379	173	7 950	1 602	f_2
2014	9 805,55	9 977	171	8 540	1 266	f_2
2015	10 743,01	13 814	3 071	11 926	1 183	f_3
2016	11 481,06	17 806	6 325	15 492	4 011	f_3
2017	12 917,64	22 914	9 996	20 075	7 157	f_3
2018	10 558,96	10 163	396	8 960	1 599	f_2
2019	13 249,01	13 408	159	11 889	1 360	f_2
2020	13 718,78	16 027	2 308	14 286	567	f_3
2021	15 884,86	12 356	3 529	11 066	4 819	f_2
2022	13 923,59	17 145	3 221	15 423	1 499	f_3
mittlerer absoluter Fehler			7 360	5 678		f_3

beispielsweise $\bar{r} = \frac{1}{10} \cdot \ln(4249,69/1000) \approx 0,145$ im Jahr 1997. Die Zehnjahres-Prognosen für 2007 sind dann (ohne Rundung von \bar{r})

$$\widehat{\text{DAX}}_{2007} = 4249,69 \cdot e^{10 \cdot 0,145} \approx 18\,060$$

gemäß (8) bzw.

$$\widehat{\text{DAX}}_{2007} = 4249,69 \cdot e^{10 \cdot 0,145 - \frac{1}{2 \cdot 10} \cdot 10^2 \cdot 0,23^2} \approx 13\,863$$

gemäß (11).

Als Maße für den Prognosefehler verwenden wir nur das binäre Maß („Welche Prognose ist näher an der Realität?“, vgl. die jeweils letzten Spalten der Tab. 4 bis 6) sowie den mittleren absoluten Fehler, nicht jedoch komplexere Maße, welche z. B. auf quadratischen Prognosefehlern (wie die Theilschen Maße) basieren.

In Tab. 4 generierte für insgesamt zehn der 16 betrachteten Jahre der erwartungstreue Median-Schätzer f_3 Prognosen, die näher an den realisierten Schlusskursen lagen, während das beste ‚Praktiker-Verfahren‘ f_2 nur in sechs Fällen die bessere Prognose lieferte. Auch der vergleichsweise deutlich kleinere mittlere absolute Prognosefehler in Höhe von 5678 bei f_3 im Vergleich zu 7360 bei f_2 spricht unseres Erachtens für den erwartungstreuen Median-Schätzer. Ähnlich vorteilhaft stellt sich f_3 auch in Tab. 5 dar. Hier lieferte der erwartungstreue Median-Schätzer für neun der 16 betrachteten Jahre bessere Ex-post-Prognosen, und sein mittlerer ab-

Tab. 5 Realisierte DAX-Schlusskurse und Ex-post-Prognosen mit $n = 10$

Jahr	realisierter DAX- Schlusskurs	Ex-post-Prognose mittels $f_2(10,10)$		Ex-post-Prognose mittels $f_3(10,10)$		bessere Prog- nose
		Prognose	absoluter Fehler	Prognose	absoluter Fehler	
2007	8067,32	18060	9993	13863	5796	f_3
2008	4810,20	18845	14035	14465	9655	f_3
2009	5957,43	27042	21085	20757	14800	f_3
2010	6914,19	29603	22689	22723	15809	f_3
2011	5898,35	16874	10976	12952	7054	f_3
2012	7612,39	5416	2196	4157	3455	f_2
2013	9552,16	6936	2616	5324	4228	f_2
2014	9805,55	8599	1207	6600	3206	f_2
2015	10743,01	12977	2234	9961	782	f_3
2016	11481,06	15065	3584	11564	83	f_3
2017	12917,64	15314	2396	11755	1163	f_3
2018	10558,96	4625	5934	3550	7009	f_2
2019	13249,01	5101	8148	3915	9334	f_2
2020	13718,78	7431	6288	5704	8015	f_2
2021	15884,86	6742	9143	5175	10710	f_2
2022	13923,59	20033	6109	15377	1453	f_3
mittlerer absoluter Fehler			8040		6410	f_3

soluter Prognosefehler ist gegenüber f_2 um fast den gleichen Betrag kleiner wie im Szenario aus Tab. 4. Im Vergleich zu jenem Szenario fallen allerdings bei der hier auf $n = 10$ Jahre fixierten Historie die mittleren Prognosefehler beider Schätzer größer aus. Dies deutet darauf hin, dass die Einbeziehung auch älterer Werte – zumindest im hier betrachteten Anwendungskontext – zu verlässlicheren Prognosen führen kann. Dementsprechend schlägt sich die Halbierung der Historie in Tab. 6 gegenüber Tab. 5 in drastisch höheren Prognosefehlern nieder. Die Beurteilung, ob die in Tab. 6 berichteten Prognosen noch praktisch zu gebrauchen sind, überlassen wir gerne dem Leser. Jedenfalls wird hier sowohl die Empfehlung gemäß Tab. 2 als auch die Faustregel (14) verletzt. Möchte man trotzdem mit einer Historie von nur fünf Jahren eine Zehnjahres-Prognose anstellen, so deuten die Ergebnisse in Tab. 6 darauf hin, dass auch dies mit dem erwartungstreuen Median-Schätzer f_3 besser als mit dem besten ‚Praktiker-Verfahren‘ f_2 gelingen dürfte.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zur Beantwortung der eingangs gestellten Frage: „Wo wird der DAX in 30 Jahren stehen?“ haben wir sechs Prognoseverfahren diskutiert, darunter drei erwartungstreue Schätzer (für den Modalwert, den Median und den Erwartungswert) sowie zwei ‚Praktiker-Verfahren‘. Es zeigt sich, dass Prognosen, die auf den Modalwert der Targetvariablen abzielen, viel zu pessimistisch sind, wenn letztere extrem rechts-

Tab. 6 Realisierte DAX-Schlusskurse und Ex-post-Prognosen mit $n = 5$

Jahr	realisierter DAX- Schlusskurs	Ex-post-Prognose mittels $f_2(5,10)$		Ex-post-Prognose mittels $f_3(5,10)$		bessere Prog- nose
		Prognose	absoluter Fehler	Prognose	absoluter Fehler	
2007	8 067,32	32 150	24 083	18 943	10 876	f_3
2008	4 810,20	24 364	19 554	14 355	9 545	f_3
2009	5 957,43	75 914	69 957	44 728	38 771	f_3
2010	6 914,19	52 421	45 507	30 886	23 972	f_3
2011	5 898,35	16 465	10 567	9 701	3 803	f_3
2012	7 612,39	1 340	6 272	790	6 822	f_2
2013	9 552,16	2 491	7 061	1 468	8 084	f_2
2014	9 805,55	1 592	8 214	938	8 868	f_2
2015	10 743,01	3 822	6 921	2 252	8 491	f_2
2016	11 481,06	10 782	699	6 353	5 128	f_2
2017	12 917,64	62 748	49 830	36 971	24 053	f_3
2018	10 558,96	7 079	3 480	4 171	6 388	f_2
2019	13 249,01	11 672	1 577	6 877	6 372	f_2
2020	13 718,78	11 301	2 418	6 658	7 061	f_2
2021	15 884,86	4 715	11 170	2 778	13 107	f_2
2022	13 923,59	6 778	7 146	3 994	9 930	f_2
mittlerer absoluter Fehler			17 154		11 954	f_3

schief verteilt ist, was insbesondere auf Performance-Indizes am Prognosehorizont zutrifft. Dagegen sind Prognosen, die auf den Erwartungswert abzielen, dann zu optimistisch. Deshalb plädieren wir für den Median als Basis für die Prognose. Die beiden ‚Praktiker-Verfahren‘ $f_1(n, T)$ bzw. $f_2(n, T)$ überschätzen systematisch den Median ($f_2(n, T)$) bzw. gar den Erwartungswert ($f_1(n, T)$) und sind insofern aus unserer Sicht für die Beantwortung der Eingangsfrage weniger geeignet.

Als Alternative schlagen wir mit $f_3(n, T)$ ein Prognoseverfahren vor, welches unter der Annahme normalverteilter Logrenditen erwartungstreu für den Median der Targetvariablen ist. Es zeigt sich, dass die mittlere quadratische Abweichung bezüglich des Medians im Fall von $f_3(n, T)$ geringer als die von $f_2(n, T)$ ist und dass $f_3(n, T)$ im Hinblick auf die Eingangsfrage, wo der DAX Ende 2047 stehen wird, der durchschnittlichen Experten-Erwartung sehr nahe kommt. Dieser Schätzer scheint insofern für Langfrist-Prognosen geeignet(er) zu sein, was die Frage aufwirft, bis zu welchen Prognosehorizonten er sinnvoll eingesetzt werden kann. Zu deren Beantwortung fordern wir in Anlehnung an Breitung und Knüppel (2021), dass die Streuung des Schätzers die der Targetvariablen unterschreitet. Letztere Forderung mündet für $f_3(n, T)$ in der Faustregel, dass der Prognosehorizont das Doppelte der Historie nicht übersteigen sollte.

Zur Illustration vergleichen wir das von uns präferierte Verfahren $f_3(n, T)$ mit dem besten ‚Praktiker-Verfahren‘ $f_2(n, T)$ unter Verwendung von DAX-Daten bis 2022. Es zeigt sich, dass der erwartungstreue Median-Schätzer im Allgemeinen bessere Prognosen liefert. Insbesondere ist sein mittlerer absoluter Prognosefehler

in allen untersuchten Szenarien kleiner als der des besten ‚Praktiker-Verfahrens‘ – selbst wenn die Faustregel, dass der Prognosehorizont das Doppelte der Historie nicht übersteigen sollte, verletzt ist.

Wie die meisten Analysen ist auch die vorliegende nicht frei von Angriffspunkten bzw. Erweiterungsmöglichkeiten. So haben wir die Aussagen über die Eigenschaften des von uns präferierten Prognoseverfahrens $f_3(n, T)$ unter der Annahme normalverteilter Logrenditen getroffen. Weicht man von dieser Annahme ab, insbesondere von der damit verbundenen Rechtsschiefe, wird man zu anderen Schlussfolgerungen gelangen. Somit stellt sich die Frage nach der empfehlenswerten Schätzprozedur, wenn man sich nicht in der Lage sieht, Verteilungsaussagen bezüglich der Targetvariablen zu treffen. Zudem basiert unser Vergleich der beiden Prognoseverfahren $f_2(n, T)$ und $f_3(n, T)$ ausschließlich auf der realisierten DAX-Historie. Man könnte die Untersuchung durch Sensitivitätsanalysen ergänzen, etwa indem man beliebige Renditezeitreihen oder durch Resampling gewonnene Zeitreihen verwendet. Diese Punkte stehen auf unserer Forschungsagenda.

7 Anhang

7.1 Die Targetvariable überschreitet ihren Modalwert asymptotisch fast sicher

Beweis Die Logrenditen r_t seien i. i. d. gemäß $r_t \sim N(\mu; \sigma^2)$. Dann gilt

$$\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t \sim N(T\mu; T\sigma^2)$$

und

$$Y_{n+T} = Y_n \cdot \exp\left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t\right) \sim LN(\ln Y_n + T\mu; T\sigma^2)$$

sowie $\text{Mod}(Y_{n+T}) = Y_n \cdot e^{T\mu - T\sigma^2}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} P(Y_{n+T} > \text{Mod}(Y_{n+T})) &= P(\ln Y_{n+T} > \ln \text{Mod}(Y_{n+T})) \\ &= P\left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t > T\mu - T\sigma^2\right) = 1 - \Phi\left(\frac{T\mu - T\sigma^2 - T\mu}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-\sigma\sqrt{T}) = \Phi(\sigma\sqrt{T}) \rightarrow 1 \quad \text{für } T \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Also überschreitet die Targetvariable Y_{n+T} ihren Modalwert asymptotisch mit Wahrscheinlichkeit 1. \square

7.2 Das Prognoseverfahren $f_3(n, T)$ hat einen geringeren MSE bezüglich des Medians als das Prognoseverfahren $f_2(n, T)$

Beweis Wegen

$$\text{MSE}[f_3(n, T)] = \text{Var}[f_3(n, T)] = Y_n^2 \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{n}T^2\sigma^2}}_{<1} \cdot \text{Var}(e^{T\bar{r}}) < Y_n^2 \cdot \text{Var}(e^{T\bar{r}})$$

und

$$\text{MSE}[f_2(n, T)] = \text{E}(Y_n \cdot e^{T\bar{r}} - Y_n \cdot e^{T\mu})^2 = \text{Var}(Y_n \cdot e^{T\bar{r}}) + \underbrace{\text{Bias}^2}_{>0} > Y_n^2 \cdot \text{Var}(e^{T\bar{r}})$$

folgt

$$\text{MSE}[f_3(n, T)] < \text{MSE}[f_2(n, T)].$$

Also ist die mittlere quadratische Abweichung des erwartungstreuen Schätzers $f_3(n, T)$ bezüglich des Medians geringer als die des mediantreuen Schätzers $f_2(n, T)$. \square

7.3 Der MSE-optimale Schrumpfungsfaktor ist $e^{-\frac{3}{2n}T^2\sigma^2}$

Beweis Lassen wir den für die Minimierung irrelevanten positiven Faktor Y_n weg, so ist

$$\text{MSE}(\beta \cdot e^{T\bar{r}}) = \text{Var}(\beta \cdot e^{T\bar{r}}) + [\text{E}(\beta \cdot e^{T\bar{r}}) - e^{T\mu}]^2$$

bezüglich β zu minimieren. Da diese mittlere quadratische Abweichung konvex in β ist, genügt die Auswertung folgender Bedingung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \text{MSE}(\beta \cdot e^{T\bar{r}}) &= \frac{d}{d\beta} \left[\beta^2 \cdot e^{2T\mu + \frac{1}{n}T^2\sigma^2} \cdot \left(e^{\frac{1}{n}T^2\sigma^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\beta \cdot e^{T\mu + \frac{1}{2n}T^2\sigma^2} - e^{T\mu} \right)^2 \right] \\ &= 2\beta \cdot e^{2T\mu + \frac{1}{n}T^2\sigma^2} \cdot \left(e^{\frac{1}{n}T^2\sigma^2} - 1 \right) \\ &\quad + 2 \cdot \left(\beta \cdot e^{T\mu + \frac{1}{2n}T^2\sigma^2} - e^{T\mu} \right) \cdot e^{T\mu + \frac{1}{2n}T^2\sigma^2} \\ &= 0 \Leftrightarrow \beta = e^{-\frac{3}{2n}T^2\sigma^2} \end{aligned}$$

Also ist der MSE-optimale Schrumpfungsfaktor $e^{-\frac{3}{2n}T^2\sigma^2}$. \square

7.4 Der MSE der Targetvariablen $Y_n^2 \cdot e^{2T\mu} \cdot (e^{2T\sigma^2} - 2e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} + 1)$

Beweis

$$\begin{aligned}
 \text{MSE}(Y_{n+T}) &= \text{MSE} \left[Y_n \cdot \exp \left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t \right) \right] \\
 &= Y_n^2 \cdot \left\{ \text{Var} \left[\exp \left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t \right) \right] + \underbrace{\left(\text{E} \left[\exp \left(\sum_{t=n+1}^{n+T} r_t \right) \right] - e^{T\mu} \right)^2}_{= \text{Bias}^2} \right\} \\
 &= Y_n^2 \cdot \left[e^{2T\mu+T\sigma^2} \cdot (e^{T\sigma^2} - 1) + (e^{T\mu+\frac{1}{2}T\sigma^2} - e^{T\mu})^2 \right] \\
 &= Y_n^2 \cdot e^{2T\mu} \cdot \left[e^{T\sigma^2} \cdot (e^{T\sigma^2} - 1) + (e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} - 1)^2 \right] \\
 &= Y_n^2 \cdot e^{2T\mu} \cdot (e^{2T\sigma^2} - e^{T\sigma^2} + e^{T\sigma^2} - 2e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} + 1) \\
 &= Y_n^2 \cdot e^{2T\mu} \cdot (e^{2T\sigma^2} - 2e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} + 1)
 \end{aligned}$$

□

7.5 Für $T = n$ ist die Bedingung (12) stets erfüllt

Beweis Für $T = n$ vereinfacht sich die linke Seite von (12) zu $e^{T\sigma^2}$. Kürzt man diesen Term mit x ab, so wird die Bedingung (12) zu:

$$x < x^2 + 2 \cdot (1 - \sqrt{x}) \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \cdot (1 - \sqrt{x}) > 0$$

Da die einzige Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - x + 2 \cdot (1 - \sqrt{x})$ bei $x = 1$ (und damit wegen $x = e^{T\sigma^2} > 1$ außerhalb des Definitionsbereichs) liegt und für $x > 1$ zudem

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{>2} - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{<2} > 0$$

gilt, folgt offenkundig $f(x) > 0$ für alle $x > 1$ und mithin die Gültigkeit von (12). □

7.6 $\left[e^{2T\sigma^2} + 2 \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{2}T\sigma^2} \right) \right] : e^{2T\sigma^2}$ **erreicht bei** $T = \frac{2}{\sigma^2} \cdot \ln \frac{4}{3}$ **ein globales Minimum und strebt sodann für wachsendes T gegen eins**

Beweis Substituiert man $e^{T\sigma^2}$ wieder (wie im Anhang 5) durch x , so kann man das Verhältnis $[e^{2T\sigma^2} + 2 \cdot (1 - e^{\frac{1}{2}T\sigma^2})] : e^{2T\sigma^2}$ als Funktion vom Typ

$$f(x) = 1 + \frac{2 \cdot (1 - \sqrt{x})}{x^2}$$

darstellen. Dass $f(x)$ für $T \rightarrow \infty$ (und somit auch $x \rightarrow \infty$) gegen den Grenzwert 1 strebt, ist offenkundig. Allerdings interessiert hier insbesondere, ab welchem Wert von T man x^2 als brauchbare Annäherung an $x^2 + 2 \cdot (1 - \sqrt{x})$ ansehen kann, wann also $f(x)$ dem Grenzwert ‚nahe genug‘ kommt. Um dies zu klären, sei zunächst festgehalten, dass $f(x)$ wegen $x > 1$ und somit

$$f'(x) = \frac{3x - 4\sqrt{x}}{\sqrt{x^7}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}$$

in Verbindung mit $f''(\frac{16}{9}) \approx 0,2 > 0$ an der Stelle $x = \frac{16}{9}$ ein einziges (und damit globales) Minimum besitzt. Während $f(x)$ für $x < \frac{16}{9}$ streng monoton fällt, strebt $f(x)$ für $x > \frac{16}{9}$ streng monoton wachsend gegen den Grenzwert 1. Der Wert von $f(x)$ beträgt an der Minimalstelle bereits $f(\frac{16}{9}) \approx 0,79$. Für $x > \frac{16}{9}$ bewegt sich demnach das interessierende Verhältnis $[e^{2T\sigma^2} + 2 \cdot (1 - e^{\frac{1}{2}T\sigma^2})] : e^{2T\sigma^2}$ (streng monoton wachsend) zwischen ca. 80 und 100 Prozent. Wegen $x = e^{T\sigma^2}$ entspricht $x > \frac{16}{9}$ der Bedingung $T > \frac{2}{\sigma^2} \cdot \ln \frac{4}{3}$ bezüglich des Prognosehorizonts. \square

Danksagung Wir danken dem Herausgeber und zwei anonymen Gutachtern für zahlreiche wertvolle Hinweise.

Funding Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

- Bamberg G, Dorfleitner G (1999) Ein Modell zur Analyse des Limitorder-Tradings in Index-Futures-Märkten. *Oper Res Spectr* 21:239–257
- Black F, Scholes M (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *J Polit Econ* 81:637–654
- Braun T (2009) *Investition und Finanzierung*. Springer, Berlin, Heidelberg
- Breitung J, Knüppel M (2021) How far can we forecast? Statistical tests of the predictive content. *J Appl Econometrics* 36:369–392
- Eckert D, Zschäpitz H (2018) Der Dax als Held des Jahrhunderts. *Die Welt* 01.01.2018, online verfügbar unter: <https://www.welt.de/finanzen/article172060169/Aktienkurse-Der-Dax-als-Held-des-Jahrhunderts.html> zugegriffen 08.02.2023
- Franke J, Härdle WK, Hafner CM (2015) *Statistics of Financial Markets: An Introduction*, 4. Aufl. Springer, Heidelberg et al.
- Hall P (1980) On the limiting behaviour of the mode and median of a sum of independent random variables. *Ann Probab* 8:419–430
- Hirsa A, Neftci SN (2014) *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 3. Aufl. Academic Press, London et al.
- Hughson E, Stutzer M, Yung C (2006) The misuse of expected returns. *Financ Anal J* 62:88–96
- Jacquier E, Kane A, Marcus AJ (2003) Geometric or arithmetic mean: A reconsideration. *Financ Anal J* 59:46–53
- Kan R, Zhou G (2009) What will the likely range of my wealth be? *Financ Anal J* 65:68–77
- Kirchgässner G, Wolters J, Hassler U (2014) *Introduction to Modern Time Series Analysis*, 2. Aufl. Springer, Berlin
- Rudolph B, Schäfer K (2010) *Derivative Finanzmarktinstrumente*, 2. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg
- Trautmann S (2007) *Investitionen*, 2. Aufl. Springer, Berlin et al.
- Hinweis des Verlags** Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.