Technische Universität München

Universität Augsburg

Elite-Masterstudiengang Mathematik
mit zusätzlichem Promotionsstudiengang Mathematik

MASTERARBEIT

Skalarkrümmung auf Mannigfaltigkeiten mit nicht-kompaktem Rand

vorgelegt von Helge Tilmann Frerichs

Themensteller: Prof. Dr. Bernhard Hanke
Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Abgabedatum: 21. September 2022

MASTERARBEIT

Skalarkrümmung auf Mannigfaltigkeiten mit nicht-kompaktem Rand

vorgelegt von Helge Tilmann Frerichs

Themensteller: Prof. Dr. Bernhard Hanke
Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Abgabedatum: 21. September 2022

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Helge Tilmann Frerichs

Augsburg, den 21. September 2022

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit beruht auf den Resultaten von Bär-Hanke über Randbedingungen für Metriken mit unteren Skalarkrümmungsschranken. Auf Mannigfaltigkeiten mit kompaktem Rand entwickeln Bär und Hanke ein weitgehendes Deformationsprinzip zur Klärung der Frage, ob und wie vorgegebene Riemannsche Metriken unter Einhaltung unterer Skalarkrümmungsschranken verformt werden können, sodass sie im Ergebnis bestimmte Randbedingungen erfüllen.
In meiner Arbeit verallgemeinere ich dieses Deformationsprinzip auf Mannigfaltigkeiten mit nicht-kompaktem Rand. Dazu werden bekannte Techniken aus der Arbeit von Bär und Hanke mit einer geschickten Konstruktion von Kragenumgebungen und Überdeckungen des Randes kombiniert.

Abstract. This thesis is based on work of Bär-Hanke on boundary conditions for scalar curvature. The research question is about deforming given Riemannian metrics into new ones with additional boundary conditions, the whole process preserving lower scalar curvature bounds. For metrics on manifolds with compact boundary, this problem has been solved, to a large extent, by recent Bär-Hanke deformation results.
In fact, it is possible to generalize such deformation principle to the noncompact case. I will do so by using appropriate collar neighbourhoods and covers of the boundary together with techniques known from Bär and Hanke.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Skalarkrümmung ist ein zentraler und in der modernen mathematischen Forschung viel Beachtung findender Aspekt im Studium der Geometrie von Mannigfaltigkeiten. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im Speziellen mit der Skalarkrümmungsgeometrie auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Ein Ausgangspunkt für dieses Forschungsgebiet ist die klassische Fragestellung, welche kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand eine Riemannsche Metrik positiver Skalarkrümmung zulassen. Ohne zusätzliche Forderungen an die Metrik ist dieses Problem durch Gromovs h-Prinzip gelöst: Auf jeder kompakten zusammenhängenden Mannigfaltigkeit der Dimension mindestens zwei mit nicht-leerem Rand existiert eine Riemannsche Metrik positiver Skalarkrümmung, und der Raum all dieser Metriken ist zusammenziehbar.

Interessanter gestaltet sich die Situation, wenn zusätzliche Randbedingungen an die Metrik gestellt werden; etwa an die zweite Fundamentalform oder die mittlere Krümmung. In einem solchen Rahmen lassen sich Erkenntnisse darüber gewinnen, wie die Geometrie einer umgebenden Mannigfaltigkeit – vertreten durch die Skalarkrümmung – und die Geometrie ihres Randes – vertreten durch die zweite Fundamentalform oder die mittlere Krümmung – zusammen- beziehungsweise wechselwirken.

Konkrete Resultate liefert unter anderem die Arbeit [1] von Bär und Hanke, auf der diese Masterarbeit aufgebaut ist. Die Autoren beweisen darin einen Deformationssatz für Riemannsche Metriken auf Mannigfaltigkeiten mit kompaktem Rand, mithilfe dessen eine vorgegebene Metrik in eine Metrik mit vorgegebener zweiter Fundamentalform des Randes im Sinne einer Homotopie verformt werden kann; siehe [1, Theorem 27]. Die Krux bei dem Unterfangen ist, dass der gesamte Deformationsprozess unter der Einhaltung unterer Skalarkrümmungsschranken stattfinden soll. Der Deformationssatz ist auch nur anwendbar, sofern die vorgegebene zweite Fundamentalform kein Ansteigen der mittleren Krümmung entlang des Randes bezüglich der nach innen zeigenden Einheitsnormale verlangt.

Weil der Deformationssatz für kompakte Familien von Metriken formuliert und bewiesen wird, gewinnen Bär und Hanke Ergebnisse über die topologische Struktur von Räumen Riemannscher Metriken mit unteren Skalarkrümmungsschranken und vorgegebenen Randbedingungen (bis auf Homotopie). So führen einige unterschiedliche Randbedingungen – wie zum Beispiel die Forderung nach einem total geodätischen Rand und die Forderung nach nicht-negativer mittlerer Krümmung („mean convex“) – zu schwach homotopieäquivalenten Räumen von Metriken positiver Skalarkrümmung; siehe [1, Abschnitt 4]. Diese Resultate finden dadurch Berechtigung, dass die Homotopiegruppen der betrachteten Räume zumindest für gewisse kompakte Spin-Mannigfaltigkeiten nicht-triviale Elemente enthalten. Letzteres diskutieren Bär und Hanke in Abschnitt 4.6 ihrer Arbeit.

Das Ziel dieser Masterarbeit ist es, den Deformationssatz 27 aus [1] auf Mannigfaltigkeiten mit nicht-kompaktem Rand zu verallgemeinern. Dabei wird folgende Strategie verfolgt: Zunächst deformiert man eine vorgegebene Metrik in einer Art und Weise, dass sie anschließend eine besser zugängliche Form nahe des Randes besitzt. Genauer werden alle Ableitungen in Normalenrichtung der Ordnung ≥ 3 eliminiert und die zweite Ableitung so angepasst, dass sich mit ihrer Hilfe die Skalarkrümmung nahe des Randes leichter kontrollieren lässt. Der 1-jet bleibt beim ersten Deformationsprozess unberührt, d.h. insbesondere ändert sich die zweite Fundamentalform nicht. Möglich wird die Deformation unter Einhaltung der Skalarkrümmungsschranken aufgrund des Flexibilitätslemmas von Bär-Hanke aus [2, Theorem 1.2 und Addendum 3.4]. Da das Flexibilitätslemma keine Kompaktheitsbedingungen an die Mannigfaltigkeit stellt, besteht bis zu dieser Stelle kein substantieller Unterschied zur Arbeit [1].

Im zweiten Schritt erfolgt eine Deformation im Stil von [1, Proposition 26]: Mithilfe geeigneter Überdeckungen des Randes einer Mannigfaltigkeit können die Betrachtungen zur Skalarkrümmung deformierter Metriken dabei zunächst isoliert über einzelnen offenen und relativ kompakten Randstücken vonstatten gehen. In dieser Situation bringt man die von Bär und Hanke entwickelten Techniken zur Anwendung, wodurch endlich viele Bedingungen an die Konstruktion über dem gewählten Randstück gestellt werden. Da die Überdeckung des Randes so gewählt ist, dass jede zugehörige Menge nur endlich viele andere Mengen in der Überdeckung schneidet, ergeben sich auch global gesehen nur endlich viele Bedingungen an jedes Randstück. Dies ist ein entscheidendes Argument im Beweis.

Die Inhalte der letzten beiden Absätze bilden das Kernstück dieser Arbeit und werden in Kapitel 3 behandelt. Ein wichtiges Hilfsmittel bei den Konstruktionen sind Kragenumgebungen, welche durch die normale Exponentialabbildung einer Riemannschen Metrik entlang des Randes definiert sind. Sie hängen explizit von der Wahl der Riemannschen Metrik ab, sodass bei einer Familie von Metriken auch eine Familie von Kragenumgebungen vorliegt. Dieser Umstand bringt für die Konstruktionen im dritten Kapitel einen gewissen technischen Aufwand mit sich. Um zu klären, wie man damit umgehen kann, beschäftigt sich Kapitel 2 ausführlich mit solchen *geodätischen Kragenumgebungen.* Die Beweise nutzen auch grundlegende Sätze der Analysis – zum Beispiel den Umkehrsatz – beziehungsweise deren Pendants für kompakte Familien von Funktionen. Diese finden sich in Appendix A und B.

Als Ausblick können zukünftig ähnliche Untersuchungen zu Homotopiegruppen von Räumen Riemannscher Metriken angestellt werden wie in Abschnitt 4 von [1] – nur eben auf Mannigfaltigkeiten mit nicht-kompaktem Rand. Die Grundlage dafür ist mit Satz 3.11 aus dieser Arbeit gelegt.

Kapitel 2

Geodätische Kragenumgebungen

Ein wichtiges Werkzeug in der vorliegenden Arbeit sind spezielle Kragenumgebungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Rand, welche durch die normale Exponentialfunktion entlang des Randes bereitgestellt werden. In einer derartigen Kragenumgebung ist die zugehörige Riemannsche Metrik – oder genauer die Pullbackmetrik – nämlich als eine verallgemeinerte Zylindermetrik gegeben. Solche Kragenumgebungen sollen als *geodätische Kragenumgebungen* bezeichnet werden.

2.1 Unparametrisierte Riemannsche Struktur

Das zweite Kapitel erarbeitet einen rigorosen Beweis der oben genannten Tatsachen, indem Aussagen über tubulare Umgebungen in unberandeten Riemannschen Mannigfaltigkeiten auf Ränder übertragen werden. Die Beweisidee besteht darin, den Rand durch Ankleben eines Zylinders in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand einzubetten. Diese Klebekonstruktion wird in Lemma 2.2 und Proposition 2.4 durchgeführt, und sie verwendet das grundlegende Resultat aus Lemma 2.1.
Der erste Teil des Kapitels beschränkt sich auf eine unparametrisierte Riemannsche Struktur, also auf die Wahl einer einzigen, festen Riemannschen Metrik auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit.

Lemma 2.1
Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von glatten Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension n (hierbei ist I eine beliebige Indexmenge). Gegeben seien außerdem offene Teilmengen $U_i \subset M, i \in I$ mit $M = \cup_{i\in I} U_i$, und Homöomorphismen

$$\phi_i \colon M_i \to U_i \ , \ i \in I$$

derart, dass sämtliche Wechselabbildungen

$$\phi_j^{-1} \circ \phi_i \colon \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \ , \ i, j \in I$$

Diffeomorphismen sind.

Dann erlaubt M genau eine glatte Struktur, bezüglich derer alle Abbildungen $\phi_i, i \in I$ Diffeomorphismen sind.

Beweis. Auf den Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. □

Lemma 2.2 *Jede glatte Mannigfaltigkeit mit Rand M lässt sich durch Ankleben eines Zylinders in eine glatte Mannigfaltigkeit M^+ ohne Rand derselben Dimension einbetten.*

Beweis. Sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Der durch Ankleben eines Zylinders $(-1,0] \times \partial M$ an M entstehende Anheftungsraum

$$M^+ := M \cup_{\partial M} \big((-1,0] \times \partial M\big)$$

ist eine topologische n-Mannigfaltigkeit ohne Rand (siehe [3, Theorem 3.79]). Um eine glatte Struktur auf M zu schaffen, wird zunächst eine Kragenumgebung von ∂M gewählt, also ein Diffeomorphismus

$$c\colon [0,1) \times \partial M \to U_1$$

auf eine offene Umgebung $U_1 \subset M$ von ∂M mit $c(0,p) = p$ für alle $p \in \partial M$. Wichtig an dieser Stelle ist, dass eine solche Kragenumgebung unabhängig von der Exponentialabbildung realisiert werden kann! Ein möglicher Weg findet sich in [4, Theorem 6.1]. Der entscheidende Schritt besteht nun darin, die Abbildung c zu einer Abbildung

$$c^+\colon (-1,1) \times \partial M \to \pi\big(U_1 \amalg \big((-1,0] \times \partial M\big)\big)\ ,\ c^+(\lambda,p) = \begin{cases} \pi(\lambda,p), & \lambda \le 0 \\ \pi(c(\lambda,p)), & \lambda \ge 0 \end{cases}$$

auf der unberandeten Mannigfaltigkeit $(-1,1) \times \partial M$ fortzusetzen, wobei

$$\pi\colon M \amalg \big((-1,0] \times \partial M\big) \to M^+$$

die kanonische Quotientenabbildung bezeichnet. Die Menge

$$U_1^+ := \pi\big(U_1 \amalg \big((-1,0] \times \partial M\big)\big)$$

ist dabei offen in M^+, da $\pi^{-1}(U_1^+) = U_1 \amalg ((-1,0] \times \partial M)$ offen in $M \amalg ((-1,0] \times \partial M)$ ist. Die Abbildung c^+ ist wegen $c(0,p) = p$ für alle $p \in \partial M$ wohldefiniert und offensichtlich bijektiv. Sie ist stetig auf $(-1,0] \times \partial M$ und $[0,1) \times \partial M$ und damit nach dem Klebelemma für stetige Funktionen stetig. Die Umkehrabbildung $(c^+)^{-1}$ ist stetig aufgrund der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie, d.h. insgesamt ist c^+ ein Homöomorphismus.
Daneben ist auch $U_2 := \pi(\mathrm{int}(M))$ offen in M^+, $\pi : \mathrm{int}(M) \to U_2$ ein Homöomorphismus, und es gilt $M^+ = U_1^+ \cup U_2$. Also findet Lemma 2.1 Anwendung auf M^+ mit

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= c^+\colon (-1,1) \times \partial M \to U_1^+, \\ \phi_2 &:= \pi|_{\mathrm{int}(M)}\colon\ \mathrm{int}(M) \to U_2, \end{aligned}$$

da $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 = c|_{(0,1)\times\partial M}\colon (0,1) \times \partial M \to U_1 - \partial M$ ein Diffeomorphismus ist. Bezüglich der so definierten glatten Struktur auf M^+ sind ϕ_1 und ϕ_2 Diffeomorphismen, und die kanonische Abbildung

$$F := \pi|_M \colon M \to M^+$$

ist glatt, da sie sich auf der offenen Überdeckung $(\mathrm{int}(M), U_1)$ von M zu glatten Abbildungen $F|_{\mathrm{int}(M)} = \phi_2 \colon \mathrm{int}(M) \to M^+$ und $F|_{U_1} = \phi_1|_{[0,1)\times\partial M} \circ c^{-1} \colon U_1 \to M^+$ einschränkt. Wie sich leicht begründen lässt, sind $F|_{\mathrm{int}(M)}$ und vor allem $F|_{U_1}$ Immersionen, weshalb auch F eine Immersion ist. Da die Abbildung F gemäß [3, Theorem 3.79] ohnehin eine topologische Einbettung ist, handelt es sich bei ihr also um eine glatte Einbettung. $\square$

Bemerkung 2.3 Neben einer gesuchten Mannigfaltigkeit M^+ ohne Rand und einer glatten Einbettung $F \colon M \to M^+$ liefert der Beweis des Lemmas die Konstruktion

- ▷ einer Kragenumgebung $c \colon [0,1) \times \partial M \to M$ von ∂M, sowie
- ▷ einer offenen Überdeckung $M^+ = U_1^+ \cup U_2$ mit zugehörigen Diffeomorphismen $\phi_1 \colon (-1,1) \times \partial M \to U_1^+$ und $\phi_2 \colon \mathrm{int}(M) \to U_2$,

sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{int}(M) \arrow[dl, hook'] \arrow[dd, "\phi_2"] \\
 & M \arrow[dr, "F"] & \\
{[0,1)\times\partial M} \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, hook] & & M^+ \\
 & {(-1,1)\times\partial M} \arrow[ur, "\phi_1"] &
\end{tikzcd}$$

Das obere Dreieck lässt sich auch so lesen, dass $F|_{\mathrm{int}(M)} \colon \mathrm{int}(M) \to U_2$ ein Diffeomorphismus ist. Als zusätzliche Eigenschaft erfüllt die Abbildung ϕ_1 die Inklusionen $\phi_1([0,1) \times \partial M) \subset F(M)$ und $\phi_1((-1,0) \times \partial M) \subset M^+ - F(M)$.

Als Sprachregelung wird vereinbart, dass das Wort „Mannigfaltigkeit“ von nun an immer eine *glatte* Mannigfaltigkeit meint. Topologische Mannigfaltigkeiten treten nicht mehr auf. In der Definition einer Mannigfaltigkeit mit Rand sei $\mathbb{H}^n$ der rechte Halbraum

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0\}.$$

Die nächste Proposition weitet die Konstruktion aus Lemma 2.2 auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten aus.

Proposition 2.4 *Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand (M, g) lässt sich durch Ankleben eines Zylinders isometrisch in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^+, g^+) ohne Rand derselben Dimension einbetten.*

Beweis. Sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Gemäß Lemma 2.2 existiert eine glatte Einbettung $F \colon M \to M^+$, wobei M^+ aus M durch Ankleben eines Zylinders entsteht. Die Einbettung ist so konstruiert, dass es eine Kragenumgebung c und Diffeomorphismen ϕ_1 und ϕ_2 wie in Bemerkung 2.3 gibt.

Im Beweis wird der Idee gefolgt, die Riemannsche Metrik c^*g auf $[0,1) \times \partial M$ zu einer Riemannschen Metrik auf $(-1,1) \times \partial M$ fortzusetzen. Er besteht aus drei Schritten.

1.Schritt: Die Fortsetzung erfolgt zunächst lokal um jeden Randpunkt: Sei $p \in \partial M$ und

$$\varphi_p = (x^2, \dots, x^n)\colon U_p \to \widetilde{U}_p \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

eine lokale Karte für ∂M um p, sowie

$$\phi_p\colon [0,1) \times U_p \to [0,1) \times \widetilde{U}_p \;,\; \phi_p(\lambda = x^1, q) = (x^1, \varphi_p(q))$$

eine zugehörige lokale Karte für $[0,1) \times \partial M$ und

$$\begin{aligned} \Phi_p\colon T^{(0,2)}\big([0,1) \times \partial M\big)|_{[0,1)\times U_p} &\to [0,1) \times \widetilde{U}_p \times \mathbb{R}^{n^2}, \\ \Phi_p\big(x^1, q, A_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j\big) &= \big(\phi_p(x^1,q), (A_{ij})_{i,j}\big) \end{aligned}$$

eine zugehörige lokale Karte für $T^{(0,2)}([0,1) \times \partial M)$. Die Metrik $g_p := (c^*g)|_{[0,1)\times U_p}$ in den gewählten lokalen Karten wird mit $\widetilde{g}_p$ bezeichnet, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} {[0,1) \times U_p} \arrow[r, "g_p"] \arrow[d, "\phi_p"] & T^{(0,2)}\big([0,1) \times \partial M\big)|_{[0,1)\times U_p} \arrow[d, "\Phi_p"] \\ {[0,1) \times \widetilde{U}_p} \arrow[r, "\widetilde{g}_p"] & {[0,1) \times \widetilde{U}_p \times \mathbb{R}^{n^2}} \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\widetilde{g}_p$ erfüllt die Bedingung $\mathrm{pr}_{[0,1)\times\widetilde{U}_p} \circ \widetilde{g}_p = \mathrm{id}_{[0,1)\times\widetilde{U}_p}$. Sie ist glatt, weshalb auch ihre letzten Komponenten

$$\widetilde{g}_p^2 := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n^2}} \circ \widetilde{g}_p\colon [0,1) \times \widetilde{U}_p \to \mathbb{R}^{n^2}$$

glatt sind. Definitionsgemäß gibt es also eine offene Umgebung $\widetilde{V}_p \subset (-1,1) \times \widetilde{U}_p$ von $[0,1) \times \widetilde{U}_p$ und eine glatte Abbildung $(\widetilde{g}_p^2)^+\colon \widetilde{V}_p \to \mathbb{R}^{n^2}$ mit $(\widetilde{g}_p^2)^+ = \widetilde{g}_p^2$ auf $\{x^1 \geq 0\}$. Die so erhaltene Abbildung

$$\widetilde{g}_p^+\colon \widetilde{V}_p \to \widetilde{V}_p \times \mathbb{R}^{n^2} \;,\; \widetilde{g}_p^+(x) := (x, (\widetilde{g}_p^2)^+(x))$$

ist glatt mit $\mathrm{pr}_{\widetilde{V}_p} \circ \widetilde{g}_p^+ = \mathrm{id}_{\widetilde{V}_p}$ und $\widetilde{g}_p^+ = \widetilde{g}_p$ auf $\{x^1 \geq 0\}$. Sei nun

$$\begin{aligned} V_p &:= \big(\mathrm{id}_{(-1,1)} \times \varphi_p\big)^{-1}\big(\widetilde{V}_p\big), \\ \phi_p^+ &:= \big(\mathrm{id}_{(-1,1)} \times \varphi_p\big)|_{V_p}\colon V_p \to \widetilde{V}_p \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_p^+\colon T^{(0,2)}\big((-1,1) \times \partial M\big)|_{V_p} &\to \widetilde{V}_p \times \mathbb{R}^{n^2}, \\ \Phi_p^+\big(x^1, q, A_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j\big) &= \big(\phi_p^+(x^1,q), (A_{ij})_{i,j}\big). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist ϕ_p^+ eine lokale Karte von $(-1,1)\times\partial M$ um $(0,p)$ mit $\phi_p^+ = \phi_p$ auf $\{x^1 \geq 0\}$ und Φ_p^+ eine lokale Karte von $T^{(0,2)}((-1,1)\times\partial M)$ mit $\Phi_p^+ = \Phi_p$ auf $T^{(0,2)}((-1,1)\times\partial M)|_{\{x^1\geq 0\}}$. Zuletzt wird die Abbildung

$$g_p^+ := (\Phi_p^+)^{-1} \circ \widetilde{g}_p^+ \circ \phi_p^+ \colon V_p \to T^{(0,2)}\big((-1,1)\times\partial M\big)|_{V_p}$$

definiert, mit der das nachstehende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V_p \arrow[r, "g_p^+"] \arrow[d, "\phi_p^+"] & T^{(0,2)}\big((-1,1)\times\partial M\big)|_{V_p} \arrow[d, "\Phi_p^+"] \\
\widetilde{V}_p \arrow[r, "\widetilde{g}_p^+"] & \widetilde{V}_p \times \mathbb{R}^{n^2} \\
{[0,1)\times\widetilde{U}_p} \arrow[r, "\widetilde{g}_p"] \arrow[u, hook] & {[0,1)\times\widetilde{U}_p\times\mathbb{R}^{n^2}} \arrow[u, hook] \\
{[0,1)\times U_p} \arrow[r, "g_p"] \arrow[u, "\phi_p"] & T^{(0,2)}\big([0,1)\times\partial M\big)|_{[0,1)\times U_p} \arrow[u, "\Phi_p"']
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung g_p^+ ist glatt, sie erfüllt die Projektionsbedingung $\pi^{(0,2)} \circ g_p^+ = \mathrm{id}_{V_p}$ und es gilt $g_p^+ = g_p$ auf $\{x^1 \geq 0\}$. Dabei bezeichnet $\pi^{(0,2)}\colon T^{(0,2)}((-1,1)\times\partial M)|_{V_p} \to V_p$ die Tensorbündelprojektion. Mit anderen Worten ist g_p^+ ein glattes $(0,2)$-Tensorfeld auf V_p mit $g_p^+ = g_p$ auf $\{x^1 \geq 0\}$.
Wegen der Möglichkeit der Symmetrisierung kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass g_p^+ punktweise symmetrisch ist. Zudem kann nach etwaigem Verkleinern von V_p auch die punktweise positive Definitheit von g_p^+ angenommen werden. Letzteres ist dadurch begründet, dass die punktweisen Riemannschen Metriken eine offene Teilmenge im Bündel der symmetrischen $(0,2)$-Tensoren – oder genauer in dessen Totalraum – bilden. Folglich ist g_p^+ eine Riemannsche Metrik auf V_p mit $g_p^+ = g_p$ auf $\{x^1 \geq 0\}$, und das lokale Fortsetzungsproblem ist gelöst.

2.Schritt: Im Weiteren werden die lokalen Metriken zu einer Metrik auf $(-1,1)\times\partial M$ verklebt: Sei dazu $(g_p^+)_{p\in\partial M}$ eine Familie von Riemannschen Metriken wie im ersten Schritt, sei $g_{<0}^+$ eine beliebige Riemannsche Metrik auf $(-1,0)\times\partial M$ und sei $g_{>0} := (c^*g)|_{(0,1)\times\partial M}$ die Pullbackmetrik auf $(0,1)\times\partial M$.

Zudem sei $(\psi_{<0}, \psi_{>0}, (\psi_p)_{p\in\partial M})$ eine der Überdeckung $((-1,0)\times\partial M, (0,1)\times\partial M, (V_p)_{p\in\partial M})$ von $(-1,1)\times\partial M$ untergeordnete Teilung der Eins.[1] Dann ist durch

$$g_1^+ := \psi_{<0}\cdot g_{<0}^+ + \psi_{>0}\cdot g_{>0} + \sum_{p\in\partial M}\psi_p\cdot g_p^+$$

eine gesuchte Riemannsche Metrik auf $(-1,1)\times\partial M$ mit $g_1^+|_{[0,1)\times\partial M} = c^*g$ gegeben.

3.Schritt: Im letzten Schritt des Beweises müssen lediglich die Riemannschen Metriken g_1^+ auf $(-1,1)\times\partial M$ und $g_2 := g|_{\mathrm{int}(M)}$ auf $\mathrm{int}(M)$ zu einer Riemannschen Metrik auf M^+ zusammengefügt werden. Sei also

$$g^+ := \begin{cases} (\phi_1^{-1})^* g_1^+ & \text{auf } U_1^+, \\ (\phi_2^{-1})^* g_2 & \text{auf } U_2. \end{cases}$$

Hier sind ϕ_1 und ϕ_2 die Diffeomorphismen aus Bemerkung 2.3. Wegen $g_1^+|_{[0,1)\times\partial M} = c^*g$ ist $(\phi_1^{-1})^*g_1^+ = (\phi_2^{-1})^*g_2$ auf $U_1^+\cap U_2$. Somit handelt es sich bei g^+ um eine wohldefinierte Riemannsche Metrik auf M^+, und nach Konstruktion ist die glatte Einbettung $F\colon (M,g)\to(M^+,g^+)$ isometrisch. □

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Als erste Anwendung von Proposition 2.4 wird die Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten bewiesen, die am Rand mit einem nach innen zeigenden Geschwindigkeitsvektor starten.

Lemma 2.5 *Sei $p\in\partial M$ und $v\in T_pM - T_p\partial M$ ein nach innen zeigender Tangentialvektor. Dann existiert eine Geodäte $\gamma\colon I\to M$ mit $\gamma(0)=p$ und $\dot\gamma(0)=v$. Das Intervall I ist zwingend links abgeschlossen bei $t=0$, und je zwei Geodäten mit den obigen Anfangsbedingungen stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.*

Beweis. Sei $F\colon (M,g)\to(M^+,g^+)$ eine isometrische Einbettung in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^+,g^+) ohne Rand wie in Lemma 2.2 und Proposition 2.4. Insbesondere kann angenommen werden, dass eine Kragenumgebung c und Diffeomorphismen ϕ_1 und ϕ_2 wie in Bemerkung 2.3 existieren. Der Beweis nutzt die Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für Geodäten auf der unberandeten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^+,g^+) und transferiert diese in geeigneter Weise nach (M,g).
Im ersten Teil wird die Existenzaussage des Lemmas bewiesen: Zunächst existieren zu dem Punkt $F(p)\in M^+$ und dem Tangentialvektor $\mathrm{d}_pF(v)\in T_{F(p)}M^+$ ein offenes Intervall $0\in J\subset\mathbb{R}$ und eine Geodäte $\gamma^+\colon J\to M^+$ mit $\gamma^+(0)=F(p)$ und $\dot\gamma^+(0)=\mathrm{d}_pF(v)$.
Es lässt sich leicht zeigen, dass für ein genügend kleines $\varepsilon>0$ die Inklusionen $\gamma^+([0,\varepsilon))\subset F(M)$ und $\gamma^+((-\varepsilon,0))\subset M^+ - F(M)$ gelten: Dafür bezeichne $\varphi_p\colon U_p\to\widetilde{U}_p\subset\mathbb{R}^{n-1}$ eine lokale Karte für ∂M um p. Wegen der Stetigkeit von γ^+ kann nach möglichem Verkleinern

[1] Die Teilmenge $(0,1)\times\partial M$ in der offenen Überdeckung von $(-1,1)\times\partial M$ ist für den Beweis von Proposition 2.4 nicht unbedingt notwendig, wohl aber für den späteren Beweis von Proposition 2.8.

von J ohne Einschränkung $\gamma^+(J) \subset \phi_1((-1,1)\times U_p)$ angenommen werden. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\big((\mathrm{id}_{(-1,1)} \times \varphi_p) \circ \phi_1^{-1} \circ \gamma^+\big)^{\cdot}(0) \\
=\ &\big(\mathrm{d}_{(0,p)}(\mathrm{id}_{(-1,1)} \times \varphi_p) \circ \mathrm{d}_{F(p)}\phi_1^{-1} \circ \mathrm{d}_p F\big)(v) \\
=\ &\big(\mathrm{d}_{(0,p)}(\mathrm{id}_{[0,1)} \times \varphi_p) \circ \mathrm{d}_{F(p)}\phi_1^{-1}|_{\phi_1([0,1)\times U_p)} \circ \mathrm{d}_p F|_{c([0,1)\times U_p)}\big)(v) \\
=\ &\big(\mathrm{d}_{(0,p)}(\mathrm{id}_{[0,1)} \times \varphi_p) \circ \mathrm{d}_p c^{-1}|_{c([0,1)\times U_p)}\big)(v) \\
=\ &\ \mathrm{d}_p\big((\mathrm{id}_{[0,1)} \times \varphi_p) \circ c^{-1}|_{c([0,1)\times U_p)}\big)(v).
\end{aligned}$$

Dabei ist $(\mathrm{id}_{[0,1)} \times \varphi_p) \circ c^{-1}|_{c([0,1)\times U_p)}$ eine lokale Karte für M um p. Da v nach innen zeigt, ist die erste Komponente von

$$\big((\mathrm{id}_{(-1,1)} \times \varphi_p) \circ \phi_1^{-1} \circ \gamma^+\big)^{\cdot}(0) = \mathrm{d}_p\big((\mathrm{id}_{[0,1)} \times \varphi_p) \circ c^{-1}|_{c([0,1)\times U_p)}\big)(v)$$

positiv, und es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\big((\mathrm{id}_{(-1,1)} \times \varphi_p) \circ \phi_1^{-1} \circ \gamma^+\big)([0,\varepsilon)) \subset [0,1) \times \widetilde{U}_p \quad \text{und} \\
&\big((\mathrm{id}_{(-1,1)} \times \varphi_p) \circ \phi_1^{-1} \circ \gamma^+\big)((-\varepsilon,0)) \subset (-1,0) \times \widetilde{U}_p.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\gamma^+([0,\varepsilon)) \subset F(M)$ und $\gamma^+((-\varepsilon,0)) \subset M^+ - F(M)$. Das Karten-Argument verwendet nicht die geodätischen Eigenschaften von γ^+, und es zeigt in ähnlicher Weise, dass ein Intervall I wie aus dem Lemma immer links abgeschlossen bei $t = 0$ sein muss. Nun ist die glatte Kurve $\gamma^+|_{[0,\varepsilon)} \colon [0,\varepsilon) \to F(M)$ eine Geodäte in $F(M)$, und

$$\gamma := F^{-1} \circ \gamma^+|_{[0,\varepsilon)} \colon [0,\varepsilon) \to M$$

ist eine Geodäte in M, da $F\colon M \to F(M)$ als Isometrie Geodäten auf Geodäten abbildet. Zudem gelten $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$. Dies beweist die Existenzaussage.

Der zweite Teil widmet sich der Eindeutigkeit: Seien $\gamma_1 : I_1 \to M$ und $\gamma_2 : I_2 \to M$ zwei Geodäten in M mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ und $\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0) = v$. Beide Intervalle I_1 und I_2 sind links abgeschlossen bei $t = 0$. Dann sind die Kurven $F \circ \gamma_1 \colon I_1 \to M^+$ und $F \circ \gamma_2 \colon I_2 \to M^+$ Geodäten in M^+ mit $(F\circ\gamma_1)(0) = (F\circ\gamma_2)(0) = F(p)$ und $(F\circ\gamma_1)^{\cdot}(0) = (F\circ\gamma_2)^{\cdot}(0) = \mathrm{d}_pF(v)$. Ersteres ist dadurch begründet, dass $F\colon M \to F(M)$ eine Isometrie ist und dass $F(M)$ die Kodimension 0 in M^+ besitzt.
Da $F\circ\gamma_1$ und $F\circ\gamma_2$ die Anfangsbedingungen am Rand ihrer Definitionsintervalle erfüllen, wird die Eindeutigkeit über einen Umweg gezeigt: Sei $\gamma_1^+ : J_1 \to M^+$ die maximale Geodäte mit $\gamma_1^+(0) = F(p)$ und $\dot\gamma_1^+(0) = \mathrm{d}_pF(v)$. Dabei ist $0 \in J_1 \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Neben $\gamma_1^+(0) = (F\circ\gamma_1)(0)$ und $\dot\gamma_1^+(0) = (F\circ\gamma_1)^{\cdot}(0)$ gilt in beliebigen, fest gewählten lokalen Koordinaten um $F(p)$ auch $\ddot\gamma_1^+(0) = (F\circ\gamma_1)^{\cdot\cdot}(0)$ aufgrund der lokalen Geodätengleichung, die von γ_1^+ und $F\circ\gamma_1$ erfüllt wird. Somit definiert

$$I_1 \cup (J_1 \cap \mathbb{R}_{\leq 0}) \to M^+ \ ,\ t \mapsto \begin{cases} \gamma_1^+(t), & t \leq 0 \\ (F\circ\gamma_1)(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

eine C^2-Kurve, die in $t = 0$ den Punkt $F(p)$ mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathrm{d}_pF(v)$ durchläuft und die um $F(p)$ die lokale Geodätengleichung erfüllt.

Nun ist aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannt, dass die lokale Geodätengleichung genau eine C^2-Lösung besitzt und dass die eindeutige C^2-Lösung bereits glatt ist. Somit ist die obige Kurve glatt um $t = 0$. Da sie sich auf I_1 und $J_1 \cap \mathbb{R}_{<0}$ ohnehin zu glatten Geodäten einschränkt, bildet sie also eine Geodäte auf ihrem gesamten Definitionsintervall.

Mithilfe üblicher Eindeutigkeitsresultate für Geodäten folgt, dass $I_1 \cup (J_1 \cap \mathbb{R}_{\leq 0}) \subset J_1$ gilt und dass die Kurve auf ganz $I_1 \cup (J_1 \cap \mathbb{R}_{\leq 0})$ mit γ_1^+ übereinstimmt. Insbesondere gelten $I_1 \subset J_1$ und $\gamma_1^+|_{I_1} = F \circ \gamma_1$. In gleicher Weise existiert eine maximale Geodäte $\gamma_2^+ \colon J_2 \to M^+$ mit $\gamma_2^+(0) = F(p), \dot{\gamma}_2^+(0) = \mathrm{d}_pF(v), I_2 \subset J_2$ und $\gamma_2^+|_{I_2} = F \circ \gamma_2$. Da γ_1^+ und γ_2^+ die gleichen Anfangsbedingungen erfüllen, ist $J_1 = J_2$ und $\gamma_1^+ = \gamma_2^+$. Demnach gilt $F \circ \gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = F \circ \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$ und somit $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$. □

Da ∂M eine Untermannigfaltigkeit von M und die Inklusion $\iota \colon \partial M \to M$ somit eine glatte Einbettung ist, bildet auch die Komposition $F|_{\partial M} = F \circ \iota \colon \partial M \to M^+$ eine glatte Einbettung. Folglich ist $P := F(\partial M)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M^+ und $F|_{\partial M} \colon \partial M \to P$ ein Diffeomorphismus. Weiterhin definiert das nach innen zeigende Einheitsnormalenfeld N von ∂M vermöge

$$N^+ := \mathrm{d}F \circ N \circ (F|_{\partial M})^{-1} \colon P \to NP$$

ein glattes Einheitsnormalenfeld von P in M^+. Dabei ist die Abbildung

$$\mathrm{d}F \colon N\partial M \to NP$$

wohldefiniert, da F isometrisch ist, und sie ist glatt, da $N\partial M$ und NP Untermannigfaltigkeiten von TM bzw. von TM^+ sind. Die Normierung von N^+ folgt ebenfalls aus der Isometrie von F. Im Ergebnis liefert N^+ eine Trivialisierung $NP \cong \mathbb{R} \times P$.

Nun besitzt P nach [5, Theorem 5.25] eine tubulare Umgebung U^{g^+} in M^+. Unter Berücksichtigung des obigen Isomorphismus $NP \cong \mathbb{R} \times P$ existiert also eine positive stetige Funktion $\eta^+ \colon P \to \mathbb{R}$, sodass

$$\phi_{g^+} \colon V_{\eta^+} \to U^{g^+} = U^{g^+}_{\eta^+}, \ \phi_{g^+}(t,p) = \exp_p(tN^+(p))$$

mit

$$V_{\eta^+} = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times P : |t| < \eta^+(p)\}$$

ein Diffeomorphismus ist. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass sich ϕ_{g^+} auf $V_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\}$ zu einem Diffeomorphismus

$$\phi_{g^+} \colon V_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\} \to U^{g^+}_{\eta^+} \cap F(M)$$

zwischen Untermannigfaltigkeiten mit Rand einschränkt. Sei dazu $p \in P$.

Angenommen, es gibt ein $0 < t < \eta^+(p)$, sodass $\phi^+(t,p) \notin F(M)$. Sei dann

$$t_0 := \inf\{0 < t < \eta^+(p) : \phi_{g^+}(t,p) \notin F(M)\}.$$

Wie im Beweis von Lemma 2.5 lässt sich argumentieren, dass die Kurve $\phi_{g^+}(\bullet, p)$ mit dem Startvektor $N^+(p)$ für kleine Werte t in $F(M)$ verläuft, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\phi_{g^+}(t,p) \in F(M)$ für alle $t \in [0,\varepsilon)$. Daher ist $t_0 > 0$.
Zudem muss $\phi_{g^+}(t_0,p) \in F(M)$ gelten, da $M^+ - F(M)$ offen, ϕ_{g^+} stetig und t_0 ein Infimum ist. Aus den gleichen Gründen ist $\phi_{g^+}(t_0,p) \notin F(\mathrm{int}(M))$, d.h. es gilt $\phi_{g^+}(t_0,p) \in P$. Allerdings ist ϕ_{g^+} bijektiv mit $\phi_{g^+}(0,q) = q$ für alle $q \in P$. Somit folgt $t_0 = 0$. Dies steht im Widerspruch zu $t_0 > 0$.
Analog zeigt man $\phi_{g^+}(V_{\eta^+} \cap \{t < 0\}) \subset U^{g^+}_{\eta^+} - F(M)$, sodass $\phi_{g^+}(V^{g^+}_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\}) = U^{g^+}_{\eta^+} \cap F(M)$ gilt. Die eingeschränkte Abbildung und ihre Umkehrabbildung sind glatt, da $V_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\}$ und $U^{g^+}_{\eta^+} \cap F(M)$ Untermannigfaltigkeiten mit Rand von V_{η^+} bzw. von $U^{g^+}_{\eta^+}$ sind. Insgesamt ist die eingeschränkte Abbildung also ein Diffeomorphismus.

Um daraus ein Resultat für M zu erhalten, seien

- ▹ $\eta := \eta^+ \circ F|_{\partial M} \colon \partial M \to \mathbb{R}$,
- ▹ $V_\eta := (\mathrm{id}_{[0,\infty)} \times F|_{\partial M})^{-1}\big(V_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\}\big) = \{(t,p) \in [0,\infty) \times \partial M : t < \eta(p)\}$,
- ▹ $U^g_\eta := F^{-1}\big(U^{g^+}_{\eta^+} \cap F(M)\big)$.

Für $p \in \partial M$ ist $F^{-1} \circ \phi_{g^+}(\bullet, F(p)) : [0, \eta(p)) \to U^g_\eta$ eine Geodäte in M mit

$$\begin{aligned} &\big(F^{-1} \circ \phi_{g^+}(\bullet, F(p))\big)(0) = p, \\ &\big(F^{-1} \circ \phi_{g^+}(\bullet, F(p))\big)^{\cdot}(0) = N(p), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $(F^{-1} \circ \phi_{g^+})(t, F(p)) = \exp_p(tN(p)) \in U^g_\eta$ für alle $0 \leq t < \eta(p)$. Diese Schreibweise wird durch die Eindeutigkeitsaussage in Lemma 2.5 gerechtfertigt. Demnach stellt

$$\phi_g \colon V_\eta \to U^g_\eta \ , \ \phi_g(t,p) = \exp_p(tN(p))$$

eine wohldefinierte Abbildung dar, mit der das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\} \arrow[r, "\phi_{g^+}"] & U^{g^+}_{\eta^+} \cap F(M) \\ V_\eta \arrow[u, "\mathrm{id}_{[0,\infty)} \times F|_{\partial M}"] \arrow[r, "\phi_g"] & U^g_\eta \arrow[u, "F|_{U^g_\eta}"'] \end{tikzcd}$$

Da ϕ_{g^+} und die beiden vertikalen Abbildungen Diffeomorphismen sind, ist auch ϕ_g ein Diffeomorphismus. Damit wurde die nachfolgende Proposition bewiesen.

Proposition 2.6 *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und N das nach innen zeigende Einheitsnormalenfeld von ∂M. Dann existiert eine positive stetige Funktion $\eta\colon \partial M \to \mathbb{R}$, sodass $\exp_p(tN(p))$ für alle $(t,p) \in V_\eta := \{(t,p) \in [0,\infty) \times \partial M : t < \eta(p)\}$ definiert, die Menge $U_\eta^g = \{\exp_p(tN(p)) : (t,p) \in V_\eta\}$ offen in M und*

$$\phi_g\colon V_\eta \to U_\eta^g\ ,\ \phi_g(t,p) = \exp_p(tN(p))$$

ein Diffeomorphismus ist. Wegen $\phi_g(0,p) = p$ für alle $p \in \partial M$ ist ϕ_g eine Kragenumgebung von ∂M.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die Aussage in Proposition 2.6 sprachlich abgekürzt. Ist g eine Riemannsche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit mit Rand M, so sagt man nur: „Es existiert eine positive stetige Funktion $\eta\colon \partial M \to \mathbb{R}$, sodass $\phi_g\colon V_\eta \to U_\eta^g$ eine (geodätische) Kragenumgebung ist.“ Gemeint ist damit die gesamte Konklusion von Proposition 2.6.

Bezüglich einer geodätischen Kragenumgebung nimmt die Metrik g nahe des Randes ∂M eine vereinfachte Gestalt an.

Proposition 2.7 *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und $\phi_g\colon V_\eta \to U_\eta^g$ eine geodätische Kragenumgebung mit der Breitenfunktion η. Dann gilt*

$$\phi_g^* g = \mathrm{d}t^2 + g_t,$$

wobei t die Standardkoordinate in $[0,\infty)$ bezeichnet und $g_\bullet\colon V_\eta \to T^*\partial M \otimes T^*\partial M$ mit

$$g_t(p)(v,w) = (\phi_g^* g)(t,p)(v,w) \quad \text{für alle } (t,p) \in V_\eta \text{ und } v,w \in T_p\partial M$$

eine glatte Familie von Skalarprodukten entlang ∂M ist.

Um die Notation übersichtlich zu halten, werden die Pullbacks im dritten Kapitel meist unterdrückt, d.h. es wird nur g anstelle von $\phi_g^* g$ geschrieben.

Beweis. Genau wie in vorherigen Beweisen sei M^+ eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, die durch Zylinderanklebung aus M hervorgeht, und $F\colon (M,g) \to (M^+, g^+)$ eine zugehörige isometrische Einbettung. Hierfür sei wieder auf Lemma 2.2, Bemerkung 2.3 und Proposition 2.4 verwiesen. Sei $P := F(\partial M), N^+ := \mathrm{d}F \circ N \circ (F|_{\partial M})^{-1}$ und $\eta^+ := \eta \circ (F|_{\partial M})^{-1}$. Für jedes $p \in P$ bezeichne $\phi_{g^+}(\bullet, p)$ die eindeutige maximale Geodäte in M^+ mit $\phi_{g^+}(0,p) = p$ und $\dot{\phi}_{g^+}(0,p) = N^+(p)$. Insbesondere ist $\phi_{g^+}(0,p)$ nach Bogenlänge parametrisiert. Zugleich kann ϕ_{g^+} als glatte Abbildung auf einer offenen Umgebung von P in $\mathbb{R} \times P$ aufgefasst werden.
Wie im Eindeutigkeitsteil von Lemma 2.5 zeigt man, dass ϕ_{g^+} für jedes Element in $(\mathrm{id}_{[0,\infty)} \times F|_{\partial M})(V_\eta) = \{(t,p) \in [0,\infty) \times P : t < \eta^+(p)\}$ definiert ist und dass

$$\phi_{g^+}(t, F(p)) = F(\phi(t,p))$$

für alle $(t,p) \in V_\eta$ gilt. Sei nun $(t_0, p_0) \in (\mathrm{id}_{[0,\infty)} \times F|_{\partial M})(V_\eta)$. Die Proposition basiert auf dem verallgemeinerten Gauß-Lemma, nach dem die Geodäte $\phi_{g^+}(\bullet, p_0)$ die t_0-Hyperfläche $\phi_{g^+}(\{t_0\} \times \{p \in P : t_0 < \eta^+(p)\})$ orthogonal schneidet. Ein Beweis findet sich in [5, Theorem 6.38]. Für $v, w \in T_{p_0}P$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$\begin{aligned}
&(\phi_{g^+}^* g^+)(t_0, p_0)(a\partial_t + v, b\partial_t + w) \\
&= (\phi_{g^+}^* g^+)(t_0, p_0)(a\partial_t, b\partial_t) + (\phi_{g^+}^* g^+)(t_0, p_0)(v, w) \\
&= ab \cdot g^+(\phi_{g^+}(t_0, p_0))(\dot{\phi}_{g^+}(t_0, p_0), \dot{\phi}_{g^+}(t_0, p_0)) + (\phi_{g^+}^* g^+)(t_0, p_0)(v, w) \\
&= ab + (\phi_{g^+}^* g^+)(t_0, p_0)(v, w).
\end{aligned}$$

Für $(t_0, p_0) \in V_\eta, v, w \in T_{p_0}\partial M$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
&(\phi_g^* g)(t_0, p_0)(a\partial_t + v, b\partial_t + w) \\
&= \big((F^{-1} \circ \phi_{g^+} \circ (\mathrm{id}_{[0,\infty)} \times F|_{\partial M}))^* g\big)(t_0, p_0)(a\partial_t + v, b\partial_t + w) \\
&= \big((\mathrm{id}_{[0,\infty)} \times F|_{\partial M})^* \big((F^{-1} \circ \phi_{g^+})^* g\big)\big)(t_0, p_0)(a\partial_t + v, b\partial_t + w) \\
&= \big((F^{-1} \circ \phi_{g^+})^* g\big)(t_0, F(p_0))(a\partial_t + \mathrm{d}_{p_0}F|_{\partial M}(v), b\partial_t + \mathrm{d}_{p_0}F|_{\partial M}(w)) \\
&= ab + \big((F^{-1} \circ \phi_{g^+})^* g\big)(t_0, F(p_0))(\mathrm{d}_{p_0}F|_{\partial M}(v), \mathrm{d}_{p_0}F|_{\partial M}(w)) \\
&= ab + (\phi_g^* g)(t_0, p_0)(v, w).
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung. □

2.2 Parametrisierte Riemannsche Struktur

Der zweite Teil des Kapitels verallgemeinert die vorherigen Betrachtungen auf eine parametrisierte Riemannsche Struktur. So wird etwa gleich zu Beginn des Abschnitts eine parametrisierte Version der Zylinderanklebung aus Proposition 2.4 bewiesen. Mit einer parametrisierten Riemannschen Struktur ist dabei eine stetige Abbildung $g \colon K \to \mathscr{R}(M)$ von einem topologischen Raum K in den Raum $\mathscr{R}(M)$ der Riemannschen Metriken auf einer Mannigfaltigkeit M (mit oder ohne Rand) gemeint. In dieser Arbeit ist K stets ein kompakter Hausdorffraum. Der Raum $\mathscr{R}(M)$ ist mit der schwachen C^∞-Topologie ausgestattet.

Grundsätzlich wird dem Funktionenraum $C^\infty(M; N)$ von glatten Funktionen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N mit oder ohne Rand im weiteren Verlauf – und sofern nicht explizit anders angegeben – *immer* die schwache C^∞-Topologie aufgeprägt. Sie ist auch unter dem Namen „C^∞-Kompakt-Offen-Topologie“ bekannt. Die Beweise des zweiten und dritten Kapitels bedienen sich grundlegender Eigenschaften dieser Topologie, von denen einige unten zusammengestellt sind. Da die Arbeit ihren Fokus auf die Geometrie Riemannscher Metriken legt, werden solche rein differentialtopologischen Aussagen ohne Beweis verwendet. Für eine ausführliche Diskussion der Topologie von Funktionenräumen sei auf die Bücher von Hirsch [4] oder Michor [6] verwiesen, auch wenn sie nicht alle der unten stehenden Aussagen enthalten.

Zu den Eigenschaften der C^∞-Topologie: Seien M, N, L und $N_1, \ldots, N_\ell$ Mannigfaltigkeiten mit oder ohne Rand, und sei K ein kompakter Hausdorffraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- Die Kompositionsabbildung

$$\begin{aligned} C^\infty(N;L) \times C^\infty(M;N) &\to C^\infty(M;L), \\ (g,f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

  ist stetig. Insbesondere induziert jede glatte Abbildung $g\colon N \to L$ eine stetige Abbildung

$$g_*\colon C^\infty(M;N) \to C^\infty(M;L)\ ,\ g_*(f) = g \circ f,$$

  und jede glatte Abbildung $f\colon M \to N$ induziert eine stetige Abbildung

$$f^*\colon C^\infty(N;L) \to C^\infty(M;L)\ ,\ f^*(g) = g \circ f.$$

  Als Beispiel ist die Einschränkungsabbildung $\mathrm{restr}_P = \iota^*\colon C^\infty(M;N) \to C^\infty(P;N)$ einer Untermannigfaltigkeit $\iota\colon P \hookrightarrow M$ stetig.

- Die Pullbackabbildung ist stetig:

$$\begin{aligned} C^\infty(M;N) \times C^\infty(N;T^*N \otimes T^*N) &\to C^\infty(M;T^*M \otimes T^*M), \\ (\phi,h) &\mapsto \phi^* h. \end{aligned}$$

- Die folgende Produktabbildung ist stetig:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\ell} C^\infty(M;N_i) &\to C^\infty\Big(M;\prod_{i=1}^{\ell} N_i\Big), \\ (f_1,\ldots,f_\ell) &\mapsto \big[x \mapsto (f_1(x),\ldots,f_\ell(x))\big]. \end{aligned}$$

- Eine Abbildung

$$F\colon K \to C^\infty(M;N)$$

  ist genau dann stetig, wenn es um jeden Punkt in M eine (von $\xi \in K$ unabhängige) offene Umgebung $U \subset M$ gibt, sodass

$$F|_U\colon K \to C^\infty(U;N)\ ,\ F|_U(\xi) = F(\xi)|_U$$

  stetig ist.

▷ Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist

$$F\colon K \to C^\infty(U;\mathbb{R}^m)$$

stetig, falls jede der folgenden Abbildungen stetig ist:

$$\begin{aligned}
&K \times U \to \mathbb{R}^m\ ,\ (\xi,x) \mapsto F(\xi)(x),\\
&K \times U \to \mathbb{R}^m\ ,\ (\xi,x) \mapsto \frac{\partial F(\xi)}{\partial x^i}(x), \quad i = 1,\dots,n,\\
&\vdots\\
&K \times U \to \mathbb{R}^m\ ,\ (\xi,x) \mapsto \frac{\partial^k F(\xi)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}(x), \quad i_1,\dots,i_k = 1,\dots,n\\
&\vdots
\end{aligned}$$

In diesen Zusammenhängen wird das einzige Mal im Laufe der Arbeit verwendet, dass K hausdorffsch ist. Wie angekündigt beginnen die Verallgemeinerungen von Abschnitt 2.1 mit der parametrisierten Zylinderanklebung.

Proposition 2.8 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, K ein kompakter Hausdorffraum und $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf M.*

Dann existieren eine glatte Mannigfaltigkeit M^+ ohne Rand der Dimension $\dim M^+ = \dim M$*, eine glatte Abbildung $F\colon M \to M^+$ und eine stetige Familie*

$$g^+\colon K \to \mathscr{R}(M^+)$$

von Riemannschen Metriken auf M^+, sodass $F\colon (M, g(\xi)) \to (M^+, g^+(\xi))$ für jedes $\xi \in K$ eine isometrische Einbettung ist.

Der Beweis dieser Proposition nutzt ein Lemma, welches man als Folgerung aus dem Fortsetzungsresultat [7] von Seeley gewinnt. In der nachstehenden Aussage sei $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.9 *Es existiert ein stetiger Fortsetzungsoperator*

$$E_1\colon C^\infty(\mathbb{H}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

d.h. E_1 ist stetig, und es gilt $E_1(f)|_{\mathbb{H}^n} = f$ für alle $f \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$.

Beweis des Lemmas. Wie in [7] sei

$$\begin{aligned}
D^+ := \{f \in C^\infty(\mathbb{H}^n_+)\ :\ &f \text{ und all ihre (gemischt) partiellen Ableitungen}\\
&\text{lassen sich stetig auf } \mathbb{H}^n \text{ fortsetzen}\},
\end{aligned}$$

wobei $\mathbb{H}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 > 0\}$. Dann existiert gemäß [7] eine stetige Abbildung

$$E\colon D^+ \to C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit } E(f)|_{\mathbb{H}^n_+} = f \text{ für alle } f \in D^+.$$

Da die Einschränkungsabbildung $\mathrm{restr}_{\mathbb{H}^n_+}\colon C^\infty(\mathbb{H}^n) \to D^+$ stetig ist, ist auch die Komposition $E_1 := E \circ \mathrm{restr}_{\mathbb{H}^n_+}\colon C^\infty(\mathbb{H}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig, und es gilt $E_1(f)|_{\mathbb{H}^n_+} = f|_{\mathbb{H}^n_+}$ für alle $f \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$. Wegen der Stetigkeit von f und $E_1(f)$ gilt bereits $E_1(f) = f$ auf dem gesamten Halbraum $\mathbb{H}^n$. □

Das Lemma lässt sich unmittelbar auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Korollar 2.10 *Für jedes $m \geq 1$ existiert ein stetiger Fortsetzungsoperator*

$$E_m\colon C^\infty(\mathbb{H}^n;\mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m).$$

Beweis des Korollars. Sei $m \geq 1$. Jede der m Projektionen $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ induziert eine stetige Abbildung $(\mathrm{pr}_i)_*\colon C^\infty(\mathbb{H}^n;\mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{H}^n;\mathbb{R})$. Die Komposition mit E_1 aus Lemma 2.9 ergibt m stetige Abbildungen $E_1 \circ (\mathrm{pr}_i)_*\colon C^\infty(\mathbb{H}^n;\mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Da zudem auch die Produktabbildung

$$(C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}))^m \to C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\ ,\ (f^1,\dots,f^m) \mapsto \big[x \mapsto (f^1(x),\dots,f^m(x))\big]$$

stetig ist, stellt

$$\begin{aligned} E_m\colon C^\infty(\mathbb{H}^n;\mathbb{R}^m) &\to C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\ ,\\ E_m(f)(x) &:= \big((E_1 \circ (\mathrm{pr}_1)_*)(f)(x),\dots,(E_1 \circ (\mathrm{pr}_m)_*)(f)(x)\big) \end{aligned}$$

eine gesuchte Fortsetzungsabbildung dar. □

Es folgt der Beweis der Proposition.

Beweis von Proposition 2.8. Der Beweis funktioniert im Wesentlichen wie der Beweis von Proposition 2.4. Insbesondere sind die Wahlen der Mannigfaltigkeit M^+, der glatten Einbettung $F\colon M \to M^+$ und der weiteren Abbildungen aus Bemerkung 2.3 identisch zum unparametrisierten Fall. Lediglich der erste Schritt des Beweises von Proposition 2.4 muss angepasst werden: Sei zunächst $n := \dim M$. In dem lokalen Fortsetzungsproblem sei $p \in \partial M$ und

$$\varphi_p = (x^2,\dots,x^n)\colon U_p \to \widetilde{U}_p \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

eine lokale Karte für ∂M um p, sowie

$$\phi_p\colon [0,1) \times U_p \to [0,1) \times \widetilde{U}_p\ ,\ \phi_p(\lambda = x^1, q) = (x^1, \varphi_p(q))$$

eine zugehörige lokale Karte für $[0,1) \times \partial M$ und

$$\begin{aligned} \Phi_p\colon T^{(0,2)}\big([0,1) \times \partial M\big)|_{[0,1)\times U_p} &\to [0,1) \times \widetilde{U}_p \times \mathbb{R}^{n^2},\\ \Phi_p\big(x^1, q, A_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j\big) &= \big(\phi_p(x^1,q),(A_{ij})_{ij}\big) \end{aligned}$$

eine zugehörige lokale Karte für $T^{(0,2)}([0,1)\times\partial M)$. Ohne Einschränkung sei $\widetilde{U}_p$ beschränkt. Für jedes $\xi \in K$ wird mit $\widetilde{g}_p(\xi)$ die Metrik $g_p(\xi) := (c^*g(\xi))|_{[0,1)\times U_p}$ in den gewählten lokalen Karten bezeichnet, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
[0,1) \times U_p \arrow[r, "g_p(\xi)"] \arrow[d, "\phi_p"] & T^{(0,2)}\big([0,1) \times \partial M\big)|_{[0,1)\times U_p} \arrow[d, "\Phi_p"] \\
[0,1) \times \widetilde{U}_p \arrow[r, "\widetilde{g}_p(\xi)"] & [0,1) \times \widetilde{U}_p \times \mathbb{R}^{n^2}
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\widetilde{g}_p(\xi)$ erfüllt die Bedingung $\mathrm{pr}_{[0,1)\times\widetilde{U}_p} \circ \widetilde{g}_p(\xi) = \mathrm{id}_{[0,1)\times\widetilde{U}_p}$. Bis zu dieser Stelle stimmt der Beweis mit dem von Proposition 2.4 überein.

Anders als im unparametrisierten Fall genügt es nun jedoch nicht, die Metrik $\widetilde{g}_p(\xi)$ für jedes $\xi \in K$ ad hoc glatt fortzusetzen. Solche beliebigen Fortsetzungen müssen nämlich nicht stetig mit ξ variieren. Stattdessen wird das Fortsetzungsresultat von Seeley aus [7] bzw. aus Korollar 2.10 verwendet: Für dessen Anwendung sei $\widetilde{U}'_p \subset \widetilde{U}_p$ eine offene Umgebung von $\varphi_p(p)$ mit $\mathrm{cl}(\widetilde{U}'_p) \subset \widetilde{U}_p$, und es sei $h_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Abschneidefunktion mit $h_p \equiv 1$ auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \widetilde{U}'_p$ und $\operatorname{supp} h_p \subset (-1,1) \times \widetilde{U}_p$.

Für jedes $\xi \in K$ ist die Abbildung $h_p \cdot \widetilde{g}^2_p(\xi)\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{n^2}$ glatt mit $h_p \cdot \widetilde{g}^2_p(\xi) = \widetilde{g}^2_p(\xi)$ auf $((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \widetilde{U}'_p) \cap \mathbb{H}^n$. Dabei bezeichnet $\widetilde{g}^2_p(\xi) := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n^2}} \circ \widetilde{g}_p(\xi)$ die Projektion von $\widetilde{g}_p(\xi)$ auf die letzten n^2 Koordinaten. Aufgrund der Stetigkeit von $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ ist

$$h_p \cdot \widetilde{g}^2_p\colon K \to C^\infty(\mathbb{H}^n; \mathbb{R}^{n^2})$$

eine stetige Familie von glatten Funktionen. Auf einen strengen Beweis wird hier verzichtet. Gemäß Korollar 2.10 bildet daraufhin

$$E_{n^2} \circ (h_p \cdot \widetilde{g}^2_p)\colon K \to C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n^2})$$

eine stetige Familie von glatten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $E_{n^2}(h_p \cdot \widetilde{g}^2_p(\xi)) = \widetilde{g}^2_p(\xi)$ auf $((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \widetilde{U}'_p) \cap \mathbb{H}^n$ für alle $\xi \in K$.

Sei nun $\widetilde{V}_p \subset ((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \widetilde{U}'_p)$ eine weitere offene Umgebung von $(0, \varphi_p(p))$. Weil die Einschränkungsabbildung $\mathrm{restr}_{\widetilde{V}_p}\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\widetilde{V}_p)$ und auch Produktabbildungen stetig sind, erhält man eine stetige Familie

$$\widetilde{g}^+_p\colon K \to C^\infty(\widetilde{V}_p; \widetilde{V}_p \times \mathbb{R}^{n^2}),\ \widetilde{g}^+_p(\xi)(x) = \big(x, E_{n^2}\big(h_p \cdot \widetilde{g}^2_p(\xi)\big)(x)\big)$$

von glatten Funktionen auf $\widetilde{V}_p$ mit $\widetilde{g}^+_p(\xi) = \widetilde{g}_p(\xi)$ auf $\widetilde{V}_p \cap \mathbb{H}^n$ für alle $\xi \in K$. Analog zum unparametrisierten Fall induziert der Symmetrisierungsoperator $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^T)$ eine stetige Abbildung $C^\infty(\widetilde{V}_p; \widetilde{V}_p \times \mathbb{R}^{n^2}) \to C^\infty(\widetilde{V}_p; \widetilde{V}_p \times \mathbb{R}^{n^2})$. Daher kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $\widetilde{g}^+_p(\xi)(x)$ für jedes $\xi \in K$ und $x \in \widetilde{V}_p$ symmetrisch ist.

Zuletzt bilden die positiv definiten Matrizen eine offene Teilmenge im Raum der quadratischen Matrizen. Wegen der Stetigkeit von $\widetilde{g}^+_p$ und der Kompaktheit von K kann $\widetilde{V}_p$ so klein (und von ξ unabhängig) gewählt werden, dass $\widetilde{g}^+_p(\xi)(x)$ für jedes $\xi \in K$ und $x \in \widetilde{V}_p$ positiv definit ist. Der Rest des Beweises überträgt sich vom unparametrisierten Fall in Proposition 2.4, mutatis mutandis. $\square$

Das nächste Ziel besteht darin, einen auf die parametrisierte Riemannsche Struktur angepassten Existenzsatz für geodätische Kragenumgebungen zu beweisen.
Aus Proposition 2.6 ist bereits bekannt, dass zu jeder Riemannschen Metrik g auf einer Mannigfaltigkeit mit Rand M eine Kragenumgebung $\phi_g \colon V_\eta \to U^g_\eta$ existiert. Falls nun $g \colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie Riemannscher Metriken ist, so kann nicht erwartet werden, dass es eine Familie $\phi_{g(\xi)} \colon V \to U, \xi \in K$ von Kragenumgebungen mit zwei uniformen Teilmengen $V \subset [0, \infty) \times \partial M$ und $U \subset M$ gibt. Als Minimalbeispiel kann man zum Beispiel $M = \mathbb{H}^n$ mit den beiden Metriken g_{eukl} und $2 \cdot g_{\text{eukl}}$ betrachten.
Allerdings wird Satz 2.14 zeigen, dass eine von ξ unabhängige positive stetige Funktion $\eta \colon \partial M \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $\phi_{g(\xi)} \colon V_\eta \to U^{g(\xi)}_\eta$ für jedes $\xi \in K$ eine geodätische Kragenumgebung ist. Mit anderen Worten lässt sich die Umgebung V im Modell $[0, \infty) \times \partial M$ unabhängig von $g(\xi)$ wählen. Dies erklärt das fehlende Superskript „g“ in der Notation von „V_η“. Im Sinne von Proposition 2.15 kann umgekehrt auch die Teilmenge U (oder $\mathscr{U}$) der Mannigfaltigkeit M uniform in $g(\xi)$ gewählt werden. Dann hängt die Urbildmenge $\phi^{-1}_{g(\xi)}(\mathscr{U})$ natürlich wieder von ξ ab.
Benötigt werden die geodätischen Kragenumgebungen, wie bereits mehrfach angedeutet, in den Beweisen des dritten Kapitels. Dabei lässt sich vereinfacht gesprochen aber nur in uniformen Umgebungen gut arbeiten. Deshalb werden Satz 2.14 und Proposition 2.15 im Wechsel angewendet: Wie bei einem Ping-Pong-Spiel muss man fortlaufend zwischen dem Modell $[0, \infty) \times \partial M$ und der Mannigfaltigkeit M hin- und herspringen, während sich immer kleiner werdende Kragenumgebungen ineinander schachteln. All dies konkretisieren später die Beweise von Proposition 3.2 und 3.10.

In der Vorbereitung auf Satz 2.14 sind drei Lemmata zu behandeln. Im zweiten Lemma (Lemma 2.12) wird Appendix A zur Anwendung kommen. Der Appendix B tritt erst in den Beweisen von Satz 2.14 und Proposition 2.15 in Erscheinung.

Lemma 2.11 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, K ein kompakter Hausdorffraum und $g \colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf M.*

Die nach innen zeigenden Einheitsnormalenfelder $N(\xi)$ bezüglich $g(\xi)$ entlang ∂M bilden eine stetige Familie
$$N \colon K \to C^\infty(\partial M; TM).$$

Beweis. Sei $p \in \partial M$ und $\varphi_p \colon U_p \to \widetilde{U}_p \subset \mathbb{H}^n$ eine lokale Karte von M um p. Der Pullback von Metriken entlang φ_p^{-1} vermittelt eine stetige Abbildung
$$\left(\varphi_p^{-1}\right)^* \colon \mathscr{R}(U_p) \to \mathscr{R}(\widetilde{U}_p).$$

Daher ist
$$\widetilde{g}_p := \left(\varphi_p^{-1}\right)^* \circ g|_{U_p} \colon K \to \mathscr{R}(\widetilde{U}_p)$$
eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf $\widetilde{U}_p$. Mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens lässt sich die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von $T_x\widetilde{U}_p = \mathbb{R}^n$ für jedes $\xi \in K$ und $x \in \widetilde{U}_p$ in eine orthogonale Basis bezüglich $\widetilde{g}_p(\xi)(x)$ überführen. Hierbei werden für $\xi \in K$

und $x \in \widetilde{U}_p$ die Vektoren

$$\begin{aligned}
v_n &:= e_n, \\
v_{n-1} &:= e_{n-1} - \widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_n, e_{n-1}) \cdot \big(\widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_n, v_n)\big)^{-1} \cdot v_n, \\
v_{n-2} &:= e_{n-2} - \widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_n, e_{n-2}) \cdot \big(\widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_n, v_n)\big)^{-1} \cdot v_n \\
&\qquad\quad - \widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_{n-1}, e_{n-2}) \cdot \big(\widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_{n-1}, v_{n-1})\big)^{-1} \cdot v_{n-1}, \\
&\vdots \\
v_1 &:= e_1 - \sum_{i=2}^{n} \widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_i, e_1) \cdot \big(\widetilde{g}_p(\xi)(x)(v_i, v_i)\big)^{-1} \cdot v_i
\end{aligned}$$

definiert. Dies ist eine orthogonale Basis von $T_x\widetilde{U}_p = \mathbb{R}^n$ bezüglich $\widetilde{g}_p(\xi)(x)$, deren letzte $n-1$ Vektoren $(v_2, \ldots, v_n)$ eine orthogonale Basis von $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ bilden. Zudem ist die erste Koordinate von v_1 positiv, d.h. für $x \in \widetilde{U}_p \cap \partial\mathbb{H}^n$ zeigt v_1 nach innen. Aus den Berechnungsformeln ist ersichtlich, dass mit $\widetilde{g}_p$ auch

$$v_1, \ldots, v_n \colon K \to C^\infty(\widetilde{U}_p; \widetilde{U}_p \times \mathbb{R}^n)$$

stetige Familien von glatten Objekten – hier Vektorfeldern – sind. Entsprechend bilden die normierten Vektorfelder $\widetilde{N}_p(\xi)$ mit

$$\widetilde{N}_p(\xi)(x) := \Big(x, \Big(\widetilde{g}_p(\xi)(x)\Big(v_1(\xi)(x), v_1(\xi)(x)\Big)\Big)^{-1/2} \cdot v_1(\xi)(x)\Big)$$

eine stetige Familie $\widetilde{N}_p \colon K \to C^\infty(\widetilde{U}_p; \widetilde{U}_p \times \mathbb{R}^n)$. Da $\widetilde{U}_p$ und $\widetilde{U}_p \times \mathbb{R}^n$ Koordinatenumgebungen von M bzw. von TM sind, ist dies gleichbedeutend mit einer stetigen Familie $N_p \colon K \to C^\infty(U_p; TM)$.

Nach Konstruktion ist $N_p(\xi)(q)$ für jedes $\xi \in K$ und $q \in U_p \cap \partial M$ ein nach innen zeigender Einheitsnormalenvektor bezüglich $g(\xi)$. Damit gilt $N_p|_{U_p \cap \partial M} = N|_{U_p \cap \partial M}$. Zusammenfassend gibt es um jeden Punkt $p \in \partial M$ eine offene Umgebung $p \in U_p \cap \partial M \subset \partial M$, sodass die eingeschränkte Abbildung

$$N|_{U_p \cap \partial M} \colon K \to C^\infty(U_p \cap \partial M; TM)$$

stetig ist. Hieraus folgt die Stetigkeit von

$$N \colon K \to C^\infty(\partial M; TM). \qquad \square$$

Lemma 2.12 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand), K ein kompakter Hausdorffraum und $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf M. Es gilt: Die Teilmenge*

$$\mathscr{E} := \{(p,v) \in TM : \exp^{g(\xi)}(p,v) \text{ ist definiert für alle } \xi \in K\} \subset TM$$

ist offen, und die Abbildung

$$\mathrm{Exp}\colon K \to C^\infty(\mathscr{E}; M)\ ,\ \mathrm{Exp}(\xi) = \exp^{g(\xi)}$$

ist stetig.

Beweis. (nach [5, Proposition 5.19]) Der Beweis fußt auf den grundlegenden Sätzen A.4 und A.5 in Appendix A. Dabei kommt das aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen bekannte Reduktionsprinzip für Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Systeme erster Ordnung zum Einsatz. Im konkreten Fall ist die Geodätengleichung in lokalen Koordinaten äquivalent zu einem System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei $n = \dim M$.
Diese Korrespondenz lässt sich für die Geodätengleichung sogar invariant formulieren: Die Geodäten einer Riemannschen Metrik $g(\xi)$ sind nämlich Projektionen von Integralkurven des geodätischen Vektorfeldes $G(\xi)$ unter der kanonischen Bündelabbildung $\pi\colon TM \to M$. Das geodätische Vektorfeld ist seinerseits ein Vektorfeld auf dem Totalraum des Tangentialbündels TM, das in Standardkoordinaten $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ über einer Koordinatenumgebung $p = (x^1, \dots, x^n) \in U$ durch die Formel

$$G(\xi)(p,v) = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}(p,v) - v^i v^j \Gamma^k_{ij}(\xi)(p) \frac{\partial}{\partial v^k}(p,v)$$

gegeben ist. Details dazu finden sich in [5, Proposition 5.19]. Weil die Christoffel-Symbole $\Gamma = (\Gamma^k_{ij})$ nach der Cramerschen Regel rationale Funktionen in den metrischen Koeffizienten und ihren partiellen Ableitungen sind, ist mit $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ auch $\Gamma\colon K \to C^\infty(U; \mathbb{R}^{n^3})$ stetig. Deshalb bilden die geodätischen Vektorfelder auf TU eine stetige Familie $G\colon K \to C^\infty(TU; T(TM))$. Nach Anwendung für jede Koordinatenumgebung in einem Atlas von M gilt dieses Resultat auch global, d.h. $G\colon K \to C^\infty(TM; T(TM))$ ist stetig. Gemäß Satz A.5 ist die Teilmenge

$$\begin{aligned}\mathscr{D} = \{(t,p,v) \in \mathbb{R} \times TM : &\text{ Die maximale Integralkurve von } G(\xi) \text{ mit Startpunkt } (p,v) \\ &\text{ ist für alle } \xi \in K \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ definiert}\} \subset \mathbb{R} \times TM\end{aligned}$$

offen und die zugehörige Flussabbildung $\theta_G\colon K \to C^\infty(\mathscr{D}; TM)$ stetig. Ist nun $(p,v) \in \mathscr{E}$, so gilt $(1,(p,v)) \in \mathscr{D}$ und daher $I \times \mathscr{E}_{(p,v)} \subset \mathscr{D}$ für ein offenes Intervall $1 \in I \subset \mathbb{R}$ und eine offene Umgebung $\mathscr{E}_{(p,v)} \subset TM$ von (p,v). Insbesondere ist $\{1\} \times \mathscr{E}_{(p,v)} \subset \mathscr{D}$ oder $\mathscr{E}_{(p,v)} \subset \mathscr{E}$. Dies zeigt die Offenheit von $\mathscr{E}$.
Des Weiteren induziert die kanonische Abbildung $\mathscr{E} \to \mathscr{D}, (p,v) \mapsto (1,(p,v))$ eine stetige Abbildung $C^\infty(\mathscr{D}; TM) \to C^\infty(\mathscr{E}; TM)$, weshalb $\theta_G(1,\cdot)\colon K \to C^\infty(\mathscr{E}; TM)$ stetig ist. Schließlich ist auch die Komposition $\mathrm{Exp} = \pi_* \circ \theta_G(1,\cdot)\colon K \to C^\infty(\mathscr{E}; M)$ stetig. □

Ist g eine Riemannsche Metrik auf M, so bezeichne $B_g(p,r)$ den offenen Riemannschen Ball um $p \in M$ vom Radius $r > 0$.

Lemma 2.13 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand), K ein kompakter Hausdorffraum und $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf M.*

(a) Für jeden Punkt $p \in M$ und jede offene Umgebung $U \subset M$ von p existiert ein $r > 0$, sodass

$$B_\xi(p,r) := B_{g(\xi)}(p,r) \subset U$$

für alle $\xi \in K$.

(b) Umgekehrt gibt es für jeden Punkt $p \in M$ und jedes $R > 0$ eine offene Umgebung $U \subset M$ von p, sodass

$$U \subset B_\xi(p,R)$$

für alle $\xi \in K$.

Beweis. Zu Teil (a): Sei $p \in M$ und $U \subset M$ ohne Einschränkung eine offene Koordinatenumgebung von p. Darüber hinaus sei $A \subset U$ eine kompakte Umgebung von p. Für jedes $\xi \in K$, jeden Punkt $q \in A$ und jeden Tangentialvektor $v \in T_qM$ gilt (mit der Einsteinschen Summenkonvention)

$$g(\xi)(q)(v,v) = g_{ij}(\xi)(q)v^iv^j.$$

Hier bezeichnen $g_{ij}\colon K \times A \to \mathbb{R}$ die metrischen Koeffizienten von g und $v^1,\dots,v^n$ die Koordinaten von v bezüglich der Standard-Koordinatenbasis von T_qM. Wie sonst auch ist $n := \dim M$. Mit den Konstanten

$$\ell := \min_{\substack{(\xi,q)\in K\times A\\ (v^1,\dots,v^n)\in S^{n-1}}} g_{ij}(\xi)(q)v^iv^j \qquad \text{und} \qquad L := \max_{\substack{(\xi,q)\in K\times A\\ (v^1,\dots,v^n)\in S^{n-1}}} g_{ij}(\xi)(q)v^iv^j$$

findet man für alle $\xi,\xi' \in K$, alle Punkte $q \in A$ und alle $(v^1,\dots,v^n) \in S^{n-1}$ die beiden Ungleichungen

$$\frac{\ell}{L} \le \frac{g_{ij}(\xi)(q)v^iv^j}{g_{ij}(\xi')(q)v^iv^j} \le \frac{L}{\ell} =: C^2.$$

Nach möglichem Kürzen gelten diese jedoch nicht nur auf der euklidischen $(n-1)$-Sphäre S^{n-1}, sondern bei vorgegebenem $\xi \in K$ und $q \in A$ bereits für alle $(v^1,\dots,v^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Somit ergibt sich für die Normen $|\cdot|_\xi$ und $|\cdot|_{\xi'}$ von Tangentialvektoren bezüglich der Metriken $g(\xi)$ und $g(\xi')$ eine Bilipschitz-Bedingung. Genauer gilt:

Es existiert eine Konstante $C \ge 1$, sodass für alle $\xi,\xi' \in K$, alle Punkte $q \in A$ und alle Tangentialvektoren $v \in T_qM$ die Normungleichung

$$\frac{1}{C}\cdot|v|_{\xi'} \le |v|_\xi \le C\cdot|v|_{\xi'}$$

erfüllt ist.

Als direkte Folgerung erhält man die Längenungleichung

$$\frac{1}{C} \cdot \ell_{\xi'}(\gamma) \leq \ell_\xi(\gamma) \leq C \cdot \ell_{\xi'}(\gamma)$$

für alle Wege γ in A. Sei nun $\xi_0 \in K$ beliebig, aber fest. Sei $R > 0$ so, dass $B_{\xi_0}(p, R) \subset A$, und sei $r := R/3C$. Dann lässt sich zeigen, dass $B_\xi(p, r) \subset U$ für alle $\xi \in K$ gilt.
Der Beweis dieser Aussage wird per Widerspruch geführt: Angenommen, es existieren ein $\xi \in K$ und ein $q \in B_\xi(p, r)$, sodass $q \notin U$. Um einen Widerspruch zu erzeugen, wird ein von p nach q verlaufender Weg γ in M mit $l_\xi(\gamma) \leq \frac{3}{2}r$ betrachtet. Wegen $q \notin U$ liegt dessen Orbit nicht vollständig in A, d.h. es gibt ein $t > 0$ mit $\gamma(t) \notin A$. Sei dann

$$t_0 := \inf\{t : \gamma(t) \notin A\}.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist $\gamma(t_0) \in A$ und $\gamma(t_0) \notin \mathrm{int}(A)$, also $\gamma(t_0) \in \partial A$. Es gilt

$$\frac{1}{C} \cdot \ell_{\xi_0}(\gamma|_{[0,t_0]}) \leq \ell_\xi(\gamma|_{[0,t_0]}) \leq \ell_\xi(\gamma) \leq \frac{3}{2}r$$

oder

$$\ell_{\xi_0}(\gamma|_{[0,t_0]}) \leq \frac{3C}{2}r = \frac{1}{2}R < R.$$

Daher ist $\gamma(t_0) \in B_{\xi_0}(p, R)$ und somit $\gamma(t_0) \in \mathrm{int}(A)$. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von t_0.

Zu Teil (b): Sei $p \in M$ und $R > 0$. Sei $A \subset M$ eine kompakte Koordinatenumgebung von p. Wie in Teil (a) existiert eine Konstante $C \geq 1$, sodass

$$\frac{1}{C} \cdot |v|_{\xi'} \leq |v|_\xi \leq C \cdot |v|_{\xi'}$$

für alle $\xi, \xi' \in K$, alle Punkte $q \in A$ und alle $v \in T_qM$. Somit gilt

$$\frac{1}{C} \cdot \ell_{\xi'}(\gamma) \leq \ell_\xi(\gamma) \leq C \cdot \ell_{\xi'}(\gamma)$$

für alle Wege γ in A. Im Weiteren sei $\xi_0 \in K$ und $r < 2R/3C$ ein Radius mit $B_{\xi_0}(p, 2r) \subset A$. Es wird gezeigt, dass

$$U := B_{\xi_0}(p, r) \subset B_\xi(p, R) \quad \text{für alle } \xi \in K.$$

Sei dazu $q \in B_{\xi_0}(p, r)$. Dann gibt es einen von p nach q verlaufenden Weg γ in M mit $\ell_{\xi_0}(\gamma) \leq \frac{3}{2}r$. Wegen $B_{\xi_0}(p, 2r) \subset A$ beträgt die $g(\xi_0)$-Länge jedes von p ausgehenden Weges, der A verlässt, mindestens $2r$. Daher verläuft γ vollständig in A. Für alle $\xi \in K$ gilt

$$d_\xi(p, q) \leq \ell_\xi(\gamma) \leq C \cdot \ell_{\xi_0}(\gamma) \leq \frac{3C}{2}r < \frac{3C}{2} \cdot \frac{2R}{3C} = R.$$

Dies zeigt $q \in B_\xi(p, R)$ für alle $\xi \in K$. $\square$

Mithilfe der drei Lemmata kann der Beweis von Satz 2.14 erbracht werden. Er richtet sich nach [5, Theorem 5.25].

Satz 2.14 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, K ein kompakter Hausdorffraum und $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf M.*

Zu jeder Umgebung $\mathscr{U} \subset M$ von ∂M existiert eine positive stetige Funktion $\eta\colon \partial M \to \mathbb{R}$, sodass für alle $\xi \in K$ gilt:

- ▷ *$\phi_{g(\xi)}\colon V_\eta \to U_\eta^{g(\xi)}$ ist eine Kragenumgebung von ∂M;*
- ▷ *$U_\eta^{g(\xi)} \subset \mathscr{U}$.*

Beweis. (nach [5, Theorem 5.25]) Sei $\mathscr{U} \subset M$ eine offene Umgebung von ∂M. Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt:

1.Schritt: Wie im unparametrisierten Fall wird das zu behandelnde Problem durch Zylinderanklebung auf eine Mannigfaltigkeit ohne Rand übertragen. Genauer existieren nach Proposition 2.8

- ▷ eine glatte Mannigfaltigkeit M^+ ohne Rand der Dimension $\dim M^+ = \dim M$,
- ▷ eine glatte Abbildung $F\colon M \to M^+$ und
- ▷ eine stetige Familie $g^+\colon K \to \mathscr{R}(M^+)$ von Riemannschen Metriken auf M^+,

sodass $F\colon (M, g(\xi)) \to (M^+, g^+(\xi))$ für jedes $\xi \in K$ eine isometrische Einbettung ist. Den Beweisen von Proposition 2.4 und 2.8 folgend wird angenommen, dass M^+ wie in Lemma 2.2 konstruiert ist. Insbesondere existieren also Abbildungen ϕ_1, ϕ_2 und c wie in Bemerkung 2.3. Gegenstand der folgenden Betrachtungen ist die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$P := F(\partial M) \quad \text{von } M^+.$$

Diese Teilmenge stellt tatsächlich eine Untermannigfaltigkeit dar, da die Inklusion $\partial M \hookrightarrow M$ und die Abbildung $F\colon M \to M^+$ glatte Einbettungen sind. Im gleichen Zuge ist $F|_{\partial M}\colon \partial M \to P$ ein Diffeomorphismus.
Wegen $\partial M \subset c^{-1}(\mathscr{U})$ bildet $c^{-1}(\mathscr{U}) \cup ((-1,0) \times \partial M)$ eine offene Umgebung von ∂M in $(-1,1) \times \partial M$ und

$$\begin{aligned} \mathscr{U}^+ &:= \phi_1\big(c^{-1}(\mathscr{U}) \cup \big((-1,0) \times \partial M\big)\big) \\ &= \phi_1\big(c^{-1}(\mathscr{U})\big) \cup \phi_1\big((-1,0) \times \partial M\big) \end{aligned}$$

eine offene Umgebung von P in M^+. Des Weiteren liefert die nach Lemma 2.11 stetige Familie $N\colon K \to C^\infty(\partial M; TM)$ von Einheitsnormalenfeldern eine stetige Familie

$$N^+ := (\mathrm{d}F)_* \circ \big(F|_{\partial M}^{-1}\big)^* \circ N\colon K \to C^\infty(P; TM^+).$$

Die Familie N^+ besteht aus Einheitsvektorfeldern, und es gilt $N^+(\xi)(p) \in N_p^{g^+(\xi)} P$ für alle $\xi \in K$ und $p \in P$. Dies ist durch die Isometrie von $F\colon (M, g(\xi)) \to (M^+, g^+(\xi))$ für alle $\xi \in K$ begründet. Insbesondere folgt die Trivialität des Normalenbündels $N^{g^+(\xi)}P$ bezüglich jeder Metrik $g^+(\xi)$.

2.Schritt: Als nächstes wird gezeigt, dass die Teilmenge

$$\mathscr{E}_P := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times P : (p, tN^+(\xi)(p)) \in \mathscr{E} \text{ für alle } \xi \in K\} \subset \mathbb{R} \times P$$

offen ist. Dabei bezeichnet $\mathscr{E}$ die Definitionsmenge von Exp aus Lemma 2.12 (mit M^+ statt M und g^+ statt g). Für den Beweis sei $(t_0, p_0) \in \mathscr{E}_P$, d.h. es gilt $(p_0, t_0 N^+(\xi)(p_0)) \in \mathscr{E}$ für alle $\xi \in K$. Sei $\xi_1 \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von N^+ ist die Abbildung

$$K \times \mathbb{R} \times P \to TM^+ \ , \ (\xi, t, p) \mapsto (p, tN^+(\xi)(p))$$

stetig. Zudem ist $\mathscr{E} \subset TM^+$ nach Lemma 2.12 offen. Daher gibt es offene Umgebungen $\xi_1 \in F_{\xi_1} \subset K$ und $(t_0, p_0) \in V^+_{\xi_1} \subset \mathbb{R} \times P$, sodass $(p, tN^+(\xi)(p)) \in \mathscr{E}$ für alle $\xi \in F_{\xi_1}$ und $(t,p) \in V^+_{\xi_1}$. Als kompakter Raum wird K bereits von endlich vielen der Teilmengen F_{ξ_1} überdeckt, etwa von l Mengen $F_{\xi_1^1}, \dots, F_{\xi_1^l}$. Setze $V_0^+ := V^+_{\xi_1^1} \cap \cdots \cap V^+_{\xi_1^l}$. Dann gilt $(p, tN^+(\xi)(p)) \in \mathscr{E}$ für alle $\xi \in K$ und $(t,p) \in V_0^+$ beziehungsweise gilt $V_0^+ \subset \mathscr{E}_P$. Als Schnitt von endlich vielen offenen Umgebungen ist V_0^+ selbst eine offene Umgebung von (t_0, p_0). Dies zusammen zeigt die Offenheit von $\mathscr{E}_P$.
Im Anschluss lässt sich zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi^+ \colon K &\to C^\infty(\mathscr{E}_P; M^+), \\ \Phi^+(\xi)(t,p) &= \exp_p^{g^+(\xi)}(tN^+(\xi)(p)) \end{aligned}$$

stetig ist. Hierzu wird Φ^+ als Komposition

$$\Phi^+ \colon K \xrightarrow{\mathrm{id} \times \mathrm{Exp}} K \times C^\infty(\mathscr{E}; M^+) \longrightarrow C^\infty(\mathscr{E}_P; M^+)$$

dargestellt, wobei die zweite Abbildung durch

$$\begin{aligned} K \times C^\infty(\mathscr{E}; M^+) &\to C^\infty(\mathscr{E}_P; M^+), \\ (\xi, f) &\mapsto \big[(t,p) \mapsto f(p, tN^+(\xi)(p))\big] \end{aligned}$$

gegeben ist. Deren Stetigkeit kann man händisch nachweisen. Darauf soll an dieser Stelle jedoch verzichtet werden. Da die erste Abbildung $\mathrm{id} \times \mathrm{Exp}$ nach Lemma 2.12 ebenfalls stetig ist, folgt die Stetigkeit von Φ^+.

3.Schritt: Das Ziel ist es, den Umkehrsatz aus Korollar B.2 auf die Familie Φ^+ entlang der Untermannigfaltigkeit $\{0\} \times P$ von $\mathscr{E}_P$ anzuwenden. Bevor dies geschehen kann, müssen die Differentiale von Φ^+ untersucht werden: Sei $\xi \in K$. Das Differential von $\Phi^+(\xi)$ in einem beliebigen Punkt $(0, p_0) \in \mathscr{E}_P$ besitzt unter dem kanonischen Isomorphismus $T_{(0,p_0)}\mathscr{E}_P \cong \mathbb{R} \oplus T_{p_0}P$ die Darstellung

$$\mathrm{d}_{(0,p_0)}\Phi^+(\xi) = \Big(N^+(\xi)(p_0) \quad \mathrm{d}_{p_0}\iota\Big) ,$$

wobei $\iota\colon P \hookrightarrow M^+$ die Inklusion bezeichnet. Da $T_{p_0}M^+ = N_{p_0}^{g^+(\xi)}P \oplus \mathrm{d}_{p_0}\iota(T_{p_0}P)$ gilt und $N^+(\xi)(p_0)$ den Normalraum $N_{p_0}^{g^+(\xi)}P$ erzeugt, ist $\mathrm{d}_{(0,p_0)}\Phi^+(\xi)$ surjektiv. Aus Dimensionsgründen muss $\mathrm{d}_{(0,p_0)}\Phi^+(\xi)$ dann schon bijektiv sein. In dieser Situation lässt sich Korollar B.2(b) anwenden mit

- ▷ $\mathscr{E}_P$ statt M;
- ▷ M^+ statt N;
- ▷ Φ^+ statt F;
- ▷ $(0, p_0)$ statt p;
- ▷ p_0 statt q;
- ▷ $\mathscr{U}^+$ statt $\mathscr{U}$.

Demnach existiert eine (von ξ unabhängige) Umgebung $V_{p_0}^+ \subset \mathscr{E}_P$ von $(0, p_0)$, sodass

- ▷ $U_{p_0}^{g^+(\xi)} := \{\exp_p^{g^+(\xi)}(tN^+(\xi)(p)) : (t, p) \in V_{p_0}^+\}$ für alle $\xi \in K$ offen in M^+ ist;
- ▷ $\Phi^+(\xi)\colon V_{p_0}^+ \to U_{p_0}^{g^+(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist;
- ▷ $U_{p_0}^{g^+(\xi)} \subset \mathscr{U}^+$ für alle $\xi \in K$ gilt.

4.Schritt: Um eine Familie von Tubenumgebungen von P zu erhalten, ist noch etwas mehr Aufwand nötig. Bisher sind die Abbildungen $\Phi^+(\xi)$ nämlich nur *lokale* Diffeomorphismen auf einer (in ξ uniformen) Umgebung von $\{0\} \times P$ in $\mathscr{E}_P$.
Für die weiterführenden Betrachtungen sei erneut $p_0 \in P$. Ohne Einschränkung wird angenommen, dass $V_{p_0}^+$ eine Produktumgebung von $(0, p_0)$ ist. Es gelte also

$$V_{p_0}^+ = I_{p_0} \times U_{p_0}$$

mit einem offenen Intervall $0 \in I_{p_0} \subset \mathbb{R}$ und einer offenen Umgebung $p_0 \in U_{p_0} \subset P$. Definitionsgemäß ist $U_{p_0} = U_{p_0}^+ \cap P$ für eine offene Umgebung $U_{p_0}^+ \subset M^+$ von p_0. Nach Lemma 2.13(a) (mit M^+ statt M) gibt es ein $r > 0$, sodass

$$B_\xi(p_0, r) := B_{g^+(\xi)}(p_0, r) \subset U_{p_0}^+$$

für alle $\xi \in K$. Folglich gilt $B_\xi(p_0, r) \cap P \subset U_{p_0}$ für alle $\xi \in K$. Zusammen mit dem dritten Beweisschritt kann als Zwischenresultat festgehalten werden:

Für jeden Punkt $p \in P$ gibt es ein $r > 0$, sodass für alle $\xi \in K$ gilt:

- ▷ $(-r, r) \times (B_\xi(p, r) \cap P) \subset \mathscr{E}_P$;
- ▷ *Die Teilmenge* $\Phi^+(\xi)\big((-r, r) \times (B_\xi(p, r) \cap P)\big)$ *ist offen in* M^+*;*

▷ *Die Abbildung*

$$\Phi^+(\xi)\colon (-r,r)\times(B_\xi(p,r)\cap P)\to\Phi^+(\xi)\big((-r,r)\times(B_\xi(p,r)\cap P)\big)$$

ist ein Diffeomorphismus;

▷ $\Phi^+(\xi)\big((-r,r)\times(B_\xi(p,r)\cap P)\big)\subset\mathscr{U}^+$.

Offensichtlich sind die vier Bedingungen in dem Fall auch für alle $0<r'<r$ erfüllt.

5.Schritt: Definiere nun

$$R\colon P\to\mathbb{R}\,,\ R(p):=\sup\{0<r\leq 1 : r \text{ genügt den Bedingungen aus dem Zwischenresultat}\}.$$

Nach dem gerade Gezeigten ist dies eine wohldefinierte positive Funktion. Im Folgenden wird bewiesen, dass R unterhalbstetig ist: Sei dazu $p_0\in P$ und $0<\varepsilon<R(p_0)$. Mit Lemma 2.13(b) findet man eine offene Umgebung $U'_{p_0}\subset P$ von p_0, sodass $U'_{p_0}\subset B_\xi(p_0,\frac{\varepsilon}{4})\cap P$ für alle $\xi\in K$. Sei $p\in U'_{p_0}$ und $\xi\in K$. Für $q\in B_\xi(p,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2})$ gilt dann

$$\begin{aligned} d_\xi(p_0,q)&\leq d_\xi(p_0,p)+d_\xi(p,q)\\ &<\frac{\varepsilon}{4}+\Big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\\ &=R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Also ist $B_\xi(p,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2})\subset B_\xi(p_0,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4})$, und es gelten

▷ $\big(-\big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big),R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big)\times\big(B_\xi\big(p,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big)\cap P\big)\subset\mathscr{E}_P$;

▷ $\Phi^+(\xi)\big(\big(-\big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big),R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big)\times\big(B_\xi\big(p,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big)\cap P\big)\big)$ ist offen in M^+;

▷ Die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi^+(\xi)\colon &\Big(-\Big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big),R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\times\Big(B_\xi\Big(p,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\cap P\Big)\\ &\to\Phi^+(\xi)\Big(\Big(-\Big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big),R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\times\Big(B_\xi\Big(p,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\cap P\Big)\Big)\end{aligned}$$

ist ein Diffeomorphismus;

▷ $\Phi^+(\xi)\big(\big(-\big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big),R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big)\times\big(B_\xi\big(p,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}\big)\cap P\big)\big)\subset\mathscr{U}^+$.

Diese Eigenschaften sind erfüllt, da

$$\begin{aligned}\Phi^+(\xi)\colon &\Big(-\Big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4}\Big),R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4}\Big)\times\Big(B_\xi\Big(p_0,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4}\Big)\cap P\Big)\\ &\to\Phi^+(\xi)\Big(\Big(-\Big(R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4}\Big),R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4}\Big)\times\Big(B_\xi\Big(p_0,R(p_0)-\frac{\varepsilon}{4}\Big)\cap P\Big)\Big)\end{aligned}$$

sie erfüllt. Da $\xi\in K$ beliebig war, folgt

$$R(p)\geq R(p_0)-\frac{\varepsilon}{2}>R(p_0)-\varepsilon$$

oder

$$R(p_0) < R(p) + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \geq R(p_0)$ ist die letzte Ungleichung mit jedem Element $p \in P$ erfüllt. Somit existiert für jedes $p_0 \in P$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung $U'_{p_0} \subset P$ von p_0, sodass $R(p_0) < R(p) + \varepsilon$ für alle $p \in U'_{p_0}$. Mit anderen Worten ist R unterhalbstetig.

6.Schritt: Im nächsten Schritt sei $(U_i^1)_{i\in I}$ eine Überdeckung von P durch offene, relativ kompakte Teilmengen und $(\psi_i)_{i\in I}$ eine dieser Überdeckung untergeordnete Partition der Eins. Dabei bezeichnet I eine beliebige Indexmenge. Die Abbildung

$$\eta^+\colon P \to \mathbb{R}\ ,\ \eta^+ := \frac{1}{4}\sum_{i\in I}\psi_i \cdot \inf_{q\in U_i^1} R(q)$$

ist stetig und überall positiv, da R auf jeder der kompakten Mengen $\overline{U_i^1}$ sein Minimum annimmt. Es gilt $\eta^+(p) \leq \frac{1}{4}R(p)$ für alle $p \in P$. Mit der Funktion η^+ wird die Teilmenge

$$V_{\eta^+} := \{(t,p) \in \mathbb{R}\times P : |t| < \eta^+(p)\} \subset \mathbb{R}\times P$$

definiert. Sie ist als Urbild von $(0,\infty)$ unter der stetigen Abbildung $\mathbb{R}\times P \to \mathbb{R}, (t,p) \mapsto \eta^+(p) - |t|$ offen. Zudem gelten nach Konstruktion von R folgende Tatsachen:

- ▷ $V_{\eta^+} \subset \mathscr{E}_P$, denn für jedes $(t,p) \in V_{\eta^+}$ ist

$$\begin{aligned}(t,p) &\in \big(-\eta^+(p), \eta^+(p)\big) \times \big(B_\xi\big(p, \eta^+(p)\big) \cap P\big)\\ &\subset \Big(-\frac{1}{4}R(p), \frac{1}{4}R(p)\Big) \times \Big(B_\xi\Big(p, \frac{1}{4}R(p)\Big) \cap P\Big)\\ &\subset \mathscr{E}_P \quad \text{für alle } \xi \in K.\end{aligned}$$

- ▷ Die Teilmenge

$$U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} := \Phi^+(\xi)(V_{\eta^+}) = \{\exp_p^{g^+(\xi)}(tN^+(\xi)(p)) : (t,p) \in V_{\eta^+}\}$$

  ist für alle $\xi \in K$ offen in M^+, denn für jedes $(t,p) \in V_{\eta^+}$ ist

$$\Phi^+(\xi)\Big(V_{\eta^+} \cap \Big(\Big(-\frac{1}{4}R(p), \frac{1}{4}R(p)\Big) \times \Big(B_\xi\Big(p, \frac{1}{4}R(p)\Big) \cap P\Big)\Big)\Big)$$

  eine in M^+ offene Umgebung von $\Phi^+(\xi)(t,p)$, welche vollständig in $\Phi^+(\xi)(V_{\eta^+})$ enthalten ist.

- ▷ $U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} \subset \mathscr{U}^+$ für alle $\xi \in K$, denn für jedes $(t,p) \in V_{\eta^+}$ ist

$$\Phi^+(\xi)(t,p) \in \Phi^+(\xi)\Big(\Big(-\frac{1}{4}R(p), \frac{1}{4}R(p)\Big) \times \Big(B_\xi\Big(p, \frac{1}{4}R(p)\Big) \cap P\Big)\Big) \subset \mathscr{U}^+.$$

Es soll gezeigt werden, dass

$$\phi_{g^+(\xi)} := \Phi^+(\xi)\colon V_{\eta^+} \to U_{\eta^+}^{g^+(\xi)}$$

für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus und damit eine geodätische Tubenumgebung von P ist. Dabei ist nur die Injektivität von Interesse, die Glattheit der Umkehrabbildung folgt danach – ähnlich wie bei der letzten Aufzählung – aus dem vierten respektive fünften Beweisschritt.
Sei also $\xi \in K$ und seien $(t_1, p_1), (t_2, p_2) \in V_{\eta^+}$ mit $\phi_{g^+(\xi)}(t_1, p_1) = \phi_{g^+(\xi)}(t_2, p_2)$. Ohne Einschränkung gelte $\eta^+(p_2) \leq \eta^+(p_1)$. Dann ist

$$[0, t_1] \to M^+ \ , \ t \mapsto \exp_{p_1}^{g^+(\xi)}(tN^+(\xi)(p_1))$$

eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von p_1 nach $\phi_{g^+(\xi)}(t_1, p_1)$ der $g^+(\xi)$-Länge t_1 und

$$[0, t_2] \to M^+ \ , \ t \mapsto \exp_{p_2}^{g^+(\xi)}(tN^+(\xi)(p_2))$$

eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von p_2 nach $\phi_{g^+(\xi)}(t_2, p_2)$ der $g^+(\xi)$-Länge t_2. Nach Verknüpfung beider Wege erhält man also eine stückweise glatte Kurve von p_1 nach p_2 der $g^+(\xi)$-Länge $t_1 + t_2$. Somit gilt

$$\begin{aligned} d_\xi(p_1, p_2) &\leq t_1 + t_2 \\ &< \eta^+(p_1) + \eta^+(p_2) \\ &\leq 2\eta^+(p_1) \\ &\leq \frac{1}{2} R(p_1) \end{aligned}$$

und deshalb $(t_2, p_2) \in (-\frac{1}{2}R(p_1), \frac{1}{2}R(p_1)) \times (B_\xi(p_1, \frac{1}{2}R(p_1)) \cap P)$. Da

$$\begin{aligned} \Phi^+(\xi)\colon & \Big(-\frac{1}{2}R(p_1), \frac{1}{2}R(p_1)\Big) \times \Big(B_\xi\Big(p_1, \frac{1}{2}R(p_1)\Big) \cap P\Big) \\ & \to \Phi^+(\xi)\Big(\Big(-\frac{1}{2}R(p_1), \frac{1}{2}R(p_1)\Big) \times \Big(B_\xi\Big(p_1, \frac{1}{2}R(p_1)\Big) \cap P\Big)\Big) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus ist, folgt hieraus $(t_1, p_1) = (t_2, p_2)$, was zu zeigen war.

7.Schritt: Zuletzt erfolgt der Transfer zurück auf die Mannigfaltigkeit M: Wie im unparametrisierten Fall kann man argumentieren, dass sich $\phi_{g^+(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ zu einem Diffeomorphismus

$$\phi_{g^+(\xi)}\colon V_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\} \to U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} \cap F(M)$$

zwischen Untermannigfaltigkeiten mit Rand einschränkt. Mit

- ▷ $\eta := \eta^+ \circ F|_{\partial M}\colon \partial M \to \mathbb{R}$,
- ▷ $V_\eta := \big(\mathrm{id}_{[0,\infty)} \times F|_{\partial M}\big)^{-1}(V_{\eta^+} \cap \{t \geq 0\}) = \{(t, p) \in [0, \infty) \times \partial M : t < \eta(p)\}$ und
- ▷ $U_\eta^{g(\xi)} := F^{-1}\big(U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} \cap F(M)\big)$

ist $\phi_{g(\xi)}\colon V_\eta \to U_\eta^{g(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ eine Kragenumgebung. Auch dies zeigt man wie im unparametrisierten Fall. Ferner gilt

$$\begin{aligned} U_\eta^{g(\xi)} &= F^{-1}\Big(U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} \cap F(M)\Big) \\ &\subset F^{-1}(\mathscr{U}^+) \\ &= F^{-1}\Big(\phi_1\big(c^{-1}(\mathscr{U})\big) \cup \phi_1\big((-1,0)\times\partial M\big)\Big) \\ &\subset F^{-1}\big(F(\mathscr{U}) \cup \phi_1\big((-1,0)\times\partial M\big)\big) \\ &= F^{-1}(F(\mathscr{U})) = \mathscr{U} \end{aligned}$$

für alle $\xi \in K$. Hier wird am Schluss die Inklusion $\phi_1((-1,0)\times\partial M) \subset M^+ - F(M)$ verwendet. Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Proposition 2.15 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, K ein kompakter Hausdorffraum und $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf M. Sei $\eta\colon \partial M \to \mathbb{R}$ eine positive stetige Funktion, mit der $\phi_{g(\xi)}\colon V_\eta \to U_\eta^{g(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ eine Kragenumgebung von ∂M ist.*

Dann existiert eine (von ξ unabhängige) Umgebung $\mathscr{U} \subset M$ von ∂M, sodass

- ▷ *$\mathscr{U} \subset U_\eta^{g(\xi)}$ für alle $\xi \in K$ gilt;*
- ▷ *die Abbildung $K \to C^\infty(\mathscr{U}; V_\eta), \xi \mapsto \phi_{g(\xi)}^{-1}$ stetig ist.*

Beweis. Für den Beweis können die ersten drei Beweisschritte von Satz 2.14 Wort für Wort übertragen werden. Anschließend existieren gemäß Korollar B.2(a) zu jedem $p \in P$ zwei (von ξ unabhängige) offene Umgebungen $(0,p) \in V_p^+ \subset \mathscr{E}_P$ und $p \in U_p^+ \subset M^+$, sodass

$$\Phi^+(\xi)\colon V_p^+ \cap \Phi^+(\xi)^{-1}(U_p^+) \to U_p^+$$

für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus und

$$K \to C^\infty(U_p^+; V_p^+)\ ,\ \xi \mapsto \Phi^+(\xi)^{-1}$$

stetig ist. Des Weiteren kann nach dem sechsten Beweisschritt von Satz 2.14 ohne Einschränkung angenommen werden, dass

$$\Phi^+(\xi)\colon V_{\eta^+} \to U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} \quad \text{mit } \eta^+ := \eta \circ F|_{\partial M}^{-1}\colon P \to \mathbb{R}$$

für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist. Die Umgebungen U_p^+ lassen sich aufgrund der Stetigkeit von $K \to C^\infty(U_p^+; V_p^+), \xi \mapsto \Phi^+(\xi)^{-1}$ und der Kompaktheit von K so verkleinern, dass $\Phi^+(\xi)^{-1}(U_p^+) \subset V_{\eta^+}$ für alle $\xi \in K$ und $p \in P$ gilt. Wenn um jeden Punkt $p \in P$ eine derartige Umgebung $U_p^+ \subset M^+$ gegeben ist, bildet

$$\mathscr{U}^+ := \bigcup_{p\in P} U_p^+$$

eine offene Umgebung von P in M^+ mit $\mathscr{U}^+ \subset U_{\eta^+}^{g^+(\xi)}$ für alle $\xi \in K$. Zudem ist die Abbildung

$$K \to C^\infty(\mathscr{U}^+; V_{\eta^+}) \ , \ \xi \mapsto \Phi^+(\xi)^{-1}$$

stetig, da sie sich auf allen Mengen U_p^+ zu stetigen Abbildungen einschränkt. Wie in vorherigen Beweisen lässt sich argumentieren, dass

$$\mathscr{U} := F^{-1}(\mathscr{U}^+ \cap F(M))$$

eine gesuchte Umgebung von ∂M in M ist. $\square$

Kapitel 3

Deformationen der Metrik

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n \geq 2$, wobei der Rand ∂M explizit nicht als kompakt vorausgesetzt wird. Zudem sei $\sigma\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Diese Daten sind unabänderlich im Verlauf des Kapitels.

Ist g eine Riemannsche Metrik auf M, so bezeichne

- ▷ $\mathrm{scal}_g\colon M \to \mathbb{R}$ die Skalarkrümmung von g,
- ▷ $g_{|\partial M} \in C^\infty(\partial M; (T^*M \otimes T^*M)|_{\partial M})$ die Einschränkung von g auf ∂M,
- ▷ $g_0 \in C^\infty(\partial M; T^*\partial M \otimes T^*\partial M)$ die auf ∂M induzierte Metrik,
- ▷ II_g die zweite Fundamentalform von $\partial M \subset M$ bezüglich des nach innen zeigenden Einheitsnormalenfeldes,
- ▷ $H_g = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{tr}_g(\mathrm{II}_g)\colon \partial M \to \mathbb{R}$ die mittlere Krümmung von ∂M.

Mithilfe der normalen Exponentialabbildung von g entlang des Randes ∂M erhält man eine geodätische Kragenumgebung U^g von ∂M. Genauer existiert eine positive stetige Funktion $\eta\colon \partial M \to \mathbb{R}$, sodass $U^g = U^g_\eta$ das diffeomorphe Bild von

$$V_\eta = \{(t,p) \in [0,\infty) \times \partial M : t < \eta(p)\}$$

unter der normalen Exponentialabbildung ist, d.h. sodass

$$\phi_g : V_\eta \to U^g_\eta\ ,\ \phi_g(t,p) = \exp_p(tN(p)) \tag{3.1}$$

ein Diffeomorphismus ist (siehe Proposition 2.6). Unter der Identifizierung (3.1) nimmt die Metrik g in der Kragenumgebung U^g_η die Gestalt

$$g = \mathrm{d}t^2 + g_t \tag{3.2}$$

an, wobei t die kanonische Koordinate in $[0,\infty)$ bezeichnet und $g_\bullet\colon V_\eta \to T^*\partial M \otimes T^*\partial M$ eine glatte Familie von Skalarprodukten entlang ∂M ist. Konkret gilt

$$g_t(p)(v,w) = (\phi_g^* g)(t,p)(v,w) \quad \text{für alle } (t,p) \in V_\eta,\ v,w \in T_p\partial M.$$

Die Gleichung (3.2) folgt aus dem verallgemeinerten Gauss-Lemma (siehe Proposition 2.7). Aus der Familie $g_\bullet$ ergeben sich neue Familien $\dot{g}_\bullet, \ddot{g}_\bullet, g_\bullet^{(\ell)} : V_\eta \to T^*\partial M \otimes T^*\partial M$ von $(0,2)$-Tensoren entlang ∂M, die durch die Vorschriften

$$\begin{aligned}
\dot{g}_t(p)(v,w) &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_t(p)(v,w)), \\
\ddot{g}_t(p)(v,w) &:= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(g_t(p)(v,w)), \\
g_t^{(\ell)}(p)(v,w) &:= \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}t^\ell}(g_t(p)(v,w))
\end{aligned}$$

für alle $(t,p) \in V_\eta,\ v,w \in T_p\partial M$ definiert sind. Mit dieser Schreibweise ist

$$\mathrm{II}_g = -\frac{1}{2}\dot{g}_0 \tag{3.3}$$

als $(0,2)$-Tensorfeld auf ∂M (siehe [8, Proposition 4.1]). Die nächste Definition etabliert eine Standardform für Riemannsche Metriken in dieser Arbeit.

Definition 3.1 Sei $C \in C^\infty(\partial M)$. Eine Riemannsche Metrik g auf M heißt C-normal, falls die Metriken $g_\bullet$ bezüglich einer genügend kleinen Kragenumgebung U^g gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
g_t(p) &= g_0(p) + t \cdot \dot{g}_0(p) - C(p)t^2 \cdot g_0(p) \\
&= g_0(p) - 2t \cdot \mathrm{II}_g(p) - C(p)t^2 \cdot g_0(p)\ ,\ (t,p) \in V.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Hierbei muss V nicht zwangsläufig durch eine stetige Funktion berandet sein.

Anstelle einer einzelnen Metrik g behandeln die Deformationsaussagen in Proposition 3.2, Proposition 3.10 und Satz 3.11 ganze Familien von Riemannschen Metriken. Zu diesem Zweck bezeichnet $\mathscr{R}(M)$ den Raum aller Riemannschen Metriken auf M, versehen mit der schwachen C^∞-Topologie, und

$$\mathscr{R}_{>\sigma}(M) := \{g \in \mathscr{R}(M) : \mathrm{scal}_g > \sigma\}$$

den Teilraum aller Riemannschen Metriken auf M, deren Skalarkrümmung punktweise größer als σ ist.
Als erstes wichtiges Resultat lässt sich jede Familie von Riemannschen Metriken in $\mathscr{R}_{>\sigma}(M)$ in eine Familie von C-normalen Metriken in $\mathscr{R}_{>\sigma}(M)$ deformieren. Genauer gilt die folgende Proposition:

Proposition 3.2 *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und sei $g\colon K \to \mathscr{R}_{>\sigma}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken, deren Skalarkrümmungen größer als σ sind.*

Dann gibt es eine glatte Funktion $C_0 \in C^\infty(\partial M)$ derart, dass für jede glatte Funktion $C \in C^\infty(\partial M), C \geq C_0$ und jede Umgebung $\mathscr{U}$ von ∂M eine stetige Abbildung $f\colon K \times [0,1] \to \mathscr{R}_{>\sigma}(M)$ existiert, sodass für alle $\xi \in K$ und alle $s \in [0,1]$ gilt:

(a) $f(\xi, 0) = g(\xi)$;

(b) $f(\xi, 1)$ ist C-normal;

(c) *falls* $g(\xi)$ $\widetilde{C}$*-normal ist, so ist* $f(\xi,s)$ *eine* $((1-s)\widetilde{C}+sC)$*-normale Metrik;*

(d) $f(\xi,s)|_{\partial M} = g(\xi)|_{\partial M}$*, also insbesondere* $f(\xi,s)_0 = g(\xi)_0$*, und* $\mathrm{II}_{f(\xi,s)} = \mathrm{II}_{g(\xi)}$*;*

(e) $\ddot{f}(\xi,s)_0 = (1-s)\ddot{g}(\xi)_0 - 2sCg(\xi)_0$*;*

(f) $f(\xi,s)_0^{(\ell)} = (1-s)g(\xi)_0^{(\ell)}$ *für alle* $\ell \geq 3$*;*

(g) $f(\xi,s) = g(\xi)$ *auf* $M \setminus \mathscr{U}$*.*

Beweis von Proposition 3.2. Sei $\mathscr{U} \subset M$ eine offene Umgebung von ∂M.
Wie im zweiten Kapitel bereits häufiger verwendet, bettet M mittels Zylinderanklebung in eine Mannigfaltigkeit M^+ ohne Rand ein. Dabei wird der speziellen Konstruktion aus Lemma 2.2 und Bemerkung 2.3 mit einer Kragenumgebung $c\colon [0,1)\times\partial M \to M$ und zwei Diffeomorphismen $\phi_1\colon (-1,1)\times\partial M \to U_1^+$ und $\phi_2\colon \mathrm{int}(M) \to U_2$ gefolgt. Ausnahmsweise soll die Einbettung

$$h\colon M \to M^+$$

und nicht F heißen. Gemäß Proposition 2.8 existiert eine stetige Familie $g^+\colon K \to \mathscr{R}(M^+)$ von Riemannschen Metriken auf M^+, sodass $h\colon (M, g(\xi)) \to (M^+, g^+(\xi))$ für jedes $\xi \in K$ eine isometrische Einbettung ist.

Darüber hinaus werden folgende Daten gesammelt:

- $\sigma^+\colon M^+ \to \mathbb{R}$ soll eine stetige Fortsetzung der Abbildung $\sigma\circ h^{-1}\colon h(M)\to\mathbb{R}$ sein. Um eine solche zu erhalten, setzt man $\sigma\circ h^{-1}$ am einfachsten konstant auf den Fasern des an M angeklebten Zylinders fort.
- $P := h(\partial M)$ ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M^+. Die Abgeschlossenheit stellt man bei der Durchsicht des Beweises von Lemma 2.2 fest.
- $N^+ := (\mathrm{d}h)_* \circ (h|_{\partial M}^{-1})^* \circ N\colon K \to C^\infty(P; TM^+)$ ist ein Einheitsvektorfeld mit $N^+(\xi)(p) \in N_p^{g^+(\xi)}P$ für alle $\xi \in K$ und $p \in P$.
- $\mathscr{U}^+ := \phi_1\big(c^{-1}(\mathscr{U})\big) \cup \phi_1\big((-1,0)\times\partial M\big)$ ist eine offene Umgebung von P in M^+.

Für alle $\xi \in K$ und $p \in P$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{scal}\big(g^+(\xi)\big)(p) &= \mathrm{scal}\big(\phi_1^* g^+(\xi)\big)(0, h^{-1}(p)) \\
&= \mathrm{scal}\big(\phi_1^* g^+(\xi)|_{[0,1)\times\partial M}\big)(0, h^{-1}(p)) \\
&= \mathrm{scal}\big(c^* g(\xi)\big)(0, h^{-1}(p)) \\
&> \sigma(h^{-1}(p)) = \sigma^+(p),
\end{aligned}$$

da h isometrisch ist. Dies wird beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile verwendet.
Für alle $p \in h(M) - P$ gilt ohnehin

$$\begin{aligned}
\mathrm{scal}(g^+(\xi))(p) &= \mathrm{scal}\big(\phi_2^* g^+(\xi)\big)(h^{-1}(p)) \\
&= \mathrm{scal}\big(g(\xi)\big)(h^{-1}(p)) \\
&> \sigma(h^{-1}(p)) = \sigma^+(p).
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{scal}_{g^+(\xi)}|_{h(M)} > \sigma^+|_{h(M)}$. Da mit g^+ und σ^+ auch die Abbildung

$$K \times M^+ \to \mathbb{R}\ ,\ (\xi, q) \mapsto \mathrm{scal}_{g^+(\xi)}(q) - \sigma^+(q)$$

stetig und K kompakt ist, gibt es eine offene Umgebung von $h(M)$ in M^+, auf der $\mathrm{scal}_{g^+(\xi)} - \sigma^+$ für alle $\xi \in K$ strikt positiv ist. Aufgrund dessen kann nach möglichem Verkleinern von M^+ ohne Einschränkung angenommen werden, dass $\mathrm{scal}_{g^+(\xi)} > \sigma^+$ auf ganz M^+ gilt.
Als letzte Vorbereitung wird eine – nach dem Beweis von Satz 2.14 existente – positive und stetige Funktion $\eta^+ \colon P \to \mathbb{R}$ ausgewählt, mit der $\phi_{g^+(\xi)} \colon V_{\eta^+} \to U_{\eta^+}^{g^+(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ eine geodätische Tubenumgebung ist und mit der $U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} \subset \mathscr{U}^+$ für alle $\xi \in K$ gilt.

Nun zum eigentlichen Beweis:

1.Schritt: Im Folgenden sei $(U_i^1)_{i\in I}$ eine Überdeckung von P durch offene, relativ kompakte Teilmengen und $(\psi_i)_{i\in I}$ eine der Überdeckung $(U_i^1)_{i\in I}$ untergeordnete Partition der Eins. Hier bezeichnet I eine beliebige Indexmenge. Für $i \in I$ sei

$$C_i := \sup_{\xi\in K} \| \operatorname{tr}_{g^+(\xi)_0}\big(\ddot{g}^+(\xi)_0\big)\|_{C^0(U_i^1)}.$$

Da die Teilmenge $\overline{U_i^1}$ kompakt und die Funktion $K\times\overline{U_i^1} \to \mathbb{R}, (\xi, p) \mapsto \operatorname{tr}_{g^+(\xi)_0(p)}(\ddot{g}^+(\xi)_0(p))$ stetig ist, gilt $C_i < \infty$. Die Stetigkeit folgt dabei – mit ein klein wenig Überlegung – aus der Stetigkeit von g^+. Definiere damit

$$C_0^+ \colon P \to \mathbb{R}\ ,\ C_0^+ := \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i\in I} \psi_i \cdot C_i.$$

Die Funktion C_0^+ ist glatt, und es gilt

$$2(n-1) \cdot C_0^+(p) \geq \left|\operatorname{tr}_{g^+(\xi)_0(p)}\big(\ddot{g}^+(\xi)_0(p)\big)\right|$$

für alle $\xi \in K$ und $p \in P$. Sei $C \colon P \to \mathbb{R}$ glatt mit $C \geq C_0^+$. Die nun durchzuführende Deformation von g^+ wird besonders plausibel mithilfe der Taylor-Entwicklung von $g^+_\bullet$ um $t = 0$:

$$g^+(\xi)_t = g^+(\xi)_0 + \dot{g}^+(\xi)_0 \cdot t + \frac{1}{2}\ddot{g}^+(\xi)_0 \cdot t^2 + R(\xi)_t.$$

Formal ist $R(\xi)_\bullet$ also definiert durch

$$\begin{aligned} &R(\xi)_\bullet \colon V_{\eta^+} \to T^*P \otimes T^*P, \\ &\qquad R(\xi)_t(p) = g^+(\xi)_t(p) - g^+(\xi)_0(p) - \dot{g}^+(\xi)_0(p) \cdot t - \frac{1}{2}\ddot{g}^+(\xi)_0(p) \cdot t^2. \end{aligned}$$

Es gilt $R(\xi)_0 = \dot{R}(\xi)_0 = \ddot{R}(\xi)_0 = 0$. Für $\xi \in K$ und $s \in [0, 1]$ sei

$$F(\xi, s) := g^+(\xi) - s\left(\left(\frac{1}{2}\ddot{g}^+(\xi)_0 + C \cdot g^+(\xi)_0\right) \cdot t^2 + R(\xi)_t\right).$$

Diese Vorschrift erklärt eine stetige Familie $F\colon K \to C^\infty(V_{\eta^+}; T^*V_{\eta^+} \otimes T^*V_{\eta^+})$ von symmetrischen $(0,2)$-Tensorfeldern. Alternativ kann man $F(\xi, s)$ als ein $(0,2)$-Tensorfeld auf $U_{\eta^+}^{g^+(\xi)}$ auffassen. Allerdings ist von dem Standpunkt aus nicht unmittelbar klar, dass es eine gemeinsame Umgebung von P in M^+ gibt, auf der alle Tensorfelder $F(\xi, s)$ definiert sind. Dies ist eine Folgerung aus Proposition 2.15 bzw. ihrem Beweis: Demnach existiert eine Umgebung $\mathscr{U}_1^+ \subset M^+$ von P mit $\mathscr{U}_1^+ \subset U_{\eta^+}^{g^+(\xi)}$ für alle $\xi \in K$ derart, dass die Abbildung

$$K \to C^\infty(\mathscr{U}_1^+; V_{\eta^+}) \;,\; \xi \mapsto \phi_{g^+(\xi)}^{-1} \tag{3.5}$$

stetig ist. Für $\xi \in K$ und $s \in [0,1]$ gibt der Pullback von $F(\xi, s)$ entlang $\phi_{g^+(\xi)}^{-1}$ ein $(0,2)$-Tensorfeld auf $\mathscr{U}_1^+$, das wieder mit $F(\xi, s)$ bezeichnet wird. Genauer ist die Familie

$$F\colon K \times [0,1] \to C^\infty(\mathscr{U}_1^+; T^*\mathscr{U}_1^+ \otimes T^*\mathscr{U}_1^+)$$

definiert als Komposition

$$\begin{array}{ccccc} K \times [0,1] & \longrightarrow & C^\infty(\mathscr{U}_1^+; V_{\eta^+}) \times C^\infty(V_{\eta^+}; T^*V_{\eta^+} \otimes T^*V_{\eta^+}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathscr{U}_1^+; T^*\mathscr{U}_1^+ \otimes T^*\mathscr{U}_1^+) \\ (\xi, s) & \longmapsto & \left(\phi_{g^+(\xi)}^{-1}, F(\xi, s)\right) & & \\ & & (\phi, k) & \longmapsto & \phi^* k \end{array} .$$

Insbesondere ist $F\colon K \times [0,1] \to C^\infty(\mathscr{U}_1^+; T^*\mathscr{U}_1^+ \otimes T^*\mathscr{U}_1^+)$ stetig.

2.Schritt: Entlang der Untermannigfaltigkeit P ist F punktweise positiv definit, da F dort mit g^+ übereinstimmt. Bekannt ist auch, dass die positiv definiten Tensoren eine offene Teilmenge im Totalraum des $(0,2)$-Tensorbündels bilden. Zusammen mit der Stetigkeit von F und der Kompaktheit von $K \times [0,1]$ kann deshalb ohne Einschränkung angenommen werden, dass $F\colon K \times [0,1] \to \mathscr{R}(\mathscr{U}_1^+)$ eine Familie von Riemannschen Metriken ist. Seien $\xi \in K$ und $s \in [0,1]$. Nach Konstruktion von F ist $N^+(\xi)$ ein Einheitsnormalenfeld von P bezüglich $F(\xi, s)$, und die zweite Fundamentalform von P bezüglich $F(\xi, s)$ und $N^+(\xi)$ ist gemäß [8, Proposition 4.1] gegeben durch

$$\mathrm{II}_{F(\xi,s)} = -\frac{1}{2}\dot{F}(\xi, s)_0 = -\frac{1}{2}\dot{g}^+(\xi)_0 - s\dot{R}(\xi)_0 = -\frac{1}{2}\dot{g}^+(\xi)_0 = \mathrm{II}_{g^+(\xi)}.$$

Wegen $F(\xi, s)|_P = g^+(\xi)|_P$ ist damit auch $W_{F(\xi,s)} = W_{g^+(\xi)}$. Hier bezeichnet $W_\bullet$ die Weingartenabbildung von P bezüglich $N^+(\xi)$. Wiederum mit [8, Proposition 4.1] berechnet sich die Skalarkrümmung von $F(\xi, s)$ entlang P zu

$$\begin{aligned} \mathrm{scal}_{F(\xi,s)}\big|_P &= \mathrm{scal}_{F(\xi,s)_0} + 3\,\mathrm{tr}(W_{F(\xi,s)}^2) - \mathrm{tr}(W_{F(\xi,s)}) - \mathrm{tr}_{F(\xi,s)_0}(\ddot{F}(\xi, s)_0) \\ &= \mathrm{scal}_{g^+(\xi)_0} + 3\,\mathrm{tr}(W_{g^+(\xi)}^2) - \mathrm{tr}(W_{g^+(\xi)}) - \mathrm{tr}_{g^+(\xi)_0}(\ddot{g}^+(\xi)_0) \\ &\quad - \mathrm{tr}_{g^+(\xi)_0}\big(-s\ddot{g}^+(\xi)_0 - 2sC \cdot g^+(\xi)_0\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{scal}_{g^+(\xi)}\big|_P + s\big(\mathrm{tr}_{g^+(\xi)_0}(\ddot{g}^+(\xi)_0) + 2C\cdot(n-1)\big)\\
&\geq \mathrm{scal}_{g^+(\xi)}\big|_P + s\big(\mathrm{tr}_{g^+(\xi)_0}(\ddot{g}^+(\xi)_0) + 2C_0^+\cdot(n-1)\big)\\
&\geq \mathrm{scal}_{g^+(\xi)}\big|_P\\
&> \sigma^+\big|_P\,.
\end{aligned}
$$

Beachte hierbei, dass $\mathrm{tr}_{g^+(\xi)_0}(\dots)$ punktweise definiert und damit $C^\infty(\partial M)$-linear ist. Wegen der Stetigkeit von F ist

$$K\times[0,1]\times\mathscr{U}_1^+\to\mathbb{R}\,,\ (\xi,s,q)\mapsto \mathrm{scal}_{F(\xi,s)}(q)-\sigma^+(q)$$

eine stetige Funktion, die entlang P strikt positiv ist. Die Kompaktheit von $K\times[0,1]$ ermöglicht nach etwaigem Verkleinern von $\mathscr{U}_1^+$ erneut die Annahme, dass die Funktion bereits auf ganz $K\times[0,1]\times\mathscr{U}_1^+$ strikt positiv ist. Insgesamt bilden die Metriken $F(\xi,s)$ also eine stetige Familie

$$F\colon K\times[0,1]\to\mathscr{R}_{>\sigma^+}(\mathscr{U}_1^+).$$

Die Eigenschaften $(b)-(f)$ aus Proposition 3.2 mit F statt f lassen sich im Prinzip elementar nachprüfen; Die genauen Rechnungen werden auch nicht vorgeführt. Es sei nur auf eine Spitzfindigkeit hingewiesen:
In den Aussagen $(b)-(f)$ ist die Darstellung von $F(\xi,s)$ bezüglich einer geodätischen Tubenumgebung involviert. Damit ist teilweise jedoch eine Tubenumgebung bezüglich der Metrik $F(\xi,s)$ und nicht der Metrik $g^+(\xi)$ gemeint, mithilfe derer $F(\xi,s)$ definiert wurde. Dies macht deshalb keinen Unterschied, weil die normalen Exponentialabbildungen der jeweiligen Metriken übereinstimmen: Für den Beweis sei $\xi\in K, s\in[0,1], p\in P$ und $\gamma\colon I\to\mathscr{U}_1^+$ eine $F(\xi,s)$-Geodäte mit $\gamma(0)=p$ und $\dot\gamma(0)=N^+(\xi)(p)$. Da die Abbildung

$$
\begin{aligned}
\phi^{-1}_{g^+(\xi)}\colon &\big(\mathscr{U}_1^+, F(\xi,s)\colon\mathscr{U}_1^+\to T^*\mathscr{U}_1^+\otimes T^*U^+\big)\\
&\to\big(V_{\eta^+}\cap\phi^{-1}_{g^+(\xi)}(\mathscr{U}_1^+), F(\xi,s)\colon V_{\eta^+}\cap\phi^{-1}_{g^+(\xi)}(\mathscr{U}_1^+)\to T^*V_{\eta^+}\otimes T^*V_{\eta^+}\big)
\end{aligned}
$$

eine Isometrie ist, schiebt sie γ auf eine Geodäte $\phi^{-1}_{g^+(\xi)}\circ\gamma$ in $(V_{\eta^+}\cap\phi^{-1}_{g^+(\xi)}(\mathscr{U}_1^+), F(\xi,s))$ mit

$$
\begin{aligned}
&(\phi^{-1}_{g^+(\xi)}\circ\gamma)(0)=p\quad\text{und}\\
&(\phi^{-1}_{g^+(\xi)}\circ\gamma)^{\cdot}(0)=\mathrm{d}_p\phi^{-1}_{g^+(\xi)}\big(N^+(\xi)(p)\big)=\partial_t.
\end{aligned}
$$

Per definitionem ist $F(\xi,s)\colon V_{\eta^+}\cap\phi^{-1}_{g^+(\xi)}(\mathscr{U}_1^+)\to T^*V_{\eta^+}\otimes T^*V_{\eta^+}$ eine verallgemeinerte Zylindermetrik auf $V_{\eta^+}\cap\phi^{-1}_{g^+(\xi)}(\mathscr{U}_1^+)$. Wie in Kapitel 4 von [8] gezeigt wird, ist in dem Fall $t\mapsto(t,p)$ eine Geodäte, die bei $t=0$ in p mit dem Geschwindigkeitsvektor ∂_t startet. Aufgrund der Eindeutigkeit von Geodäten gilt also

$$\big(\phi^{-1}_{g^+(\xi)}\circ\gamma\big)(t)=(t,p)$$

für alle $t \in I$ oder

$$\begin{aligned}\exp_p^{F(\xi,s)}(tN^+(\xi)(p)) &= \gamma(t)\\ &= \phi_{g^+(\xi)}(t,p) = \exp_p^{g^+(\xi)}(tN^+(\xi)(p)).\end{aligned}$$

3.Schritt: Die Bedingung $\mathrm{scal} > \sigma^+$ definiert eine offene partielle Differentialrelation zweiter Ordnung auf dem Raum der punktweisen Riemannschen Metriken über M^+. Die Familie von Schnitten g^+ löst die Relation global, die Familie F löst sie lokal über $\mathscr{U}_1^+$. Des Weiteren ist $g^+(\xi)|_{\mathscr{U}_1^+} = F(\xi, 0)$ für alle $\xi \in K$. Schließlich stimmen die 1-jets von $F(\xi, s)$ und $g^+(\xi)$ für alle $\xi \in K$ und $s \in [0, 1]$ entlang P überein, da $F(\xi, s)|_P = g^+(\xi)|_P$ und $\dot{F}(\xi, s)_0 = \dot{g}^+(\xi)_0$ gelten.
Nach dem Flexibilitätslemma für Familien von Bär und Hanke aus [2, Addendum 3.4] existieren eine offene Umgebung $P \subset \mathscr{U}_0^+ \subset \mathscr{U}_1^+$ und eine stetige Familie

$$f^+ \colon K \times [0, 1] \to C^\infty(M^+; T^*M^+ \otimes T^*M^+),$$

sodass für alle $\xi \in K$ und $s \in [0, 1]$ gilt:

- ▷ $f^+(\xi, s) \in \mathscr{R}_{>\sigma^+}(M^+)$;
- ▷ $f^+(\xi, 0) = g^+(\xi)$;
- ▷ $f^+(\xi, s)\big|_{\mathscr{U}_0^+} = F(\xi, s)\big|_{\mathscr{U}_0^+}$;
- ▷ $f^+(\xi, s)\big|_{M^+ \setminus \mathscr{U}_1^+} = g^+(\xi)\big|_{M^+ \setminus \mathscr{U}_1^+}$.

Wegen $\mathscr{U}_1^+ \subset U_{\eta^+}^{g^+(\xi)} \subset \mathscr{U}^+$ ist insbesondere $f^+(\xi, s)\big|_{M^+ \setminus \mathscr{U}^+} = g^+(\xi)\big|_{M^+ \setminus \mathscr{U}^+}$.

Zuletzt erfolgt der Rücktransfer von M^+ nach M: Ähnlich wie bei den Beweisen im zweiten Kapitel lässt sich zeigen, dass die Familie von Metriken

$$f := h^* f^+ \colon K \times [0, 1] \to C^\infty(M; T^*M \otimes T^*M)$$

alle Eigenschaften $(a) - (g)$ besitzt. Dass $f(\xi, s)$ für jedes $\xi \in K$ und $s \in [0, 1]$ der Bedingung $\mathrm{scal}_{f(\xi,s)} > \sigma$ genügt, folgt analog zum ersten Beweisschritt. Mit

$$C_0 := C_0^+ \circ h \colon \partial M \to \mathbb{R}$$

ist die Proposition erfüllt. □

Die nächste Proposition 3.10 gebraucht vier Lemmata, welche nacheinander vorgestellt werden. Die ersten beiden Lemmata sind der Arbeit [1] von Bär und Hanke entnommen. Der hier präsentierte Beweis von Lemma 3.4 stimmt bis auf wenige Ergänzungen mit dem Beweis aus [1, Lemma 25] überein.

Lemma 3.3 *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und seien g_1 und g_2 zwei Skalarprodukte auf V derart, dass $\|g_1 - g_0\|_{g_0} \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt*

$$|\operatorname{tr}_{g_1}(h) - \operatorname{tr}_{g_0}(h)| \leq 2 \cdot \|g_1 - g_0\|_{g_0} \cdot \|h\|_{g_0}$$

für alle symmetrischen Bilinearformen h auf V. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_{g_0}$ die von g_0 auf dem Raum der symmetrischen Bilinearformen induzierte Norm.

Beweis. Siehe [1, Lemma 24]. Im Beweis ist das letzte „=“ durch „≤“ zu ersetzen. □

Lemma 3.4 *Es gibt eine Konstante $c_0 > 0$, sodass für jede reelle Zahl $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ eine glatte Funktion $\chi_\delta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:*

- ▷ $\chi_\delta(t) = t$ *für* t *nahe* 0, $\chi_\delta(t) = 0$ *für* $t \geq \sqrt{\delta}$ *und* $0 \leq \chi_\delta(t) \leq \frac{\delta}{2}$ *für alle* t,
- ▷ $|\dot\chi_\delta(t)| \leq c_0$ *für alle* t,
- ▷ $-\frac{2}{\delta} \leq \ddot\chi_\delta(t) \leq 0$ *für alle* $t \in [0, \delta]$ *und* $|\ddot\chi_\delta(t)| \leq c_0$ *für alle* $t \in [\delta, \sqrt{\delta}]$.

Beweis. Die Funktion $\tilde\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde\varphi(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2} & \text{für } t \leq \frac{1}{10}, \\ \frac{1}{10240}(10t + 7)(10t - 9)^3 & \text{für } \frac{1}{10} \leq t \leq \frac{9}{10}, \\ 0 & \text{für } t \geq \frac{9}{10}, \end{cases}$$

ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt $-\frac{1}{2} \leq \tilde\varphi \leq 0$ auf $[0, \infty)$ und $-\frac{15}{8} \leq \ddot{\tilde\varphi} \leq 0$ auf ganz $\mathbb{R}$. Insbesondere ist die Funktion konkav. Mittels Faltung lässt sich $\tilde\varphi$ durch eine glatte konkave Funktion $\varphi_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approximieren, die auf $(-\infty, \frac{1}{20}]$ und $[\frac{19}{20}, \infty)$ mit $\tilde\varphi$ übereinstimmt und deren zweite Ableitung der Bedingung $\|\ddot\varphi_1 - \ddot{\tilde\varphi}\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{8}$ genügt.
Für den Beweis sei $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine nirgends negative glatte und gerade Funktion mit $\operatorname{supp} u \subset [-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}]$ und $\int_{\mathbb{R}} u = 1$. Die Integrationstheorie lehrt, dass das Faltprodukt $\varphi_1 := u * \tilde\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist. Die Konkavität von φ_1 folgt wegen $\ddot\varphi_1(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(u * \tilde\varphi)(t) = (u * \ddot{\tilde\varphi})(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t \leq \frac{1}{20}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = (u * \tilde\varphi)(t) &= \int_{\mathbb{R}} u(\tau) \cdot \tilde\varphi(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{20}}^{\frac{1}{20}} u(\tau) \cdot \tilde\varphi(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{20}}^{\frac{1}{20}} u(\tau) \cdot \Big(t - \frac{1}{2} - \tau\Big)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \Big(t - \frac{1}{2}\Big) \int_{\mathbb{R}} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \int_{-\frac{1}{20}}^{\frac{1}{20}} u(\tau) \cdot \tau\, \mathrm{d}\tau \\ &= t - \frac{1}{2} = \tilde\varphi(t). \end{aligned}$$

Dabei verschwindet das letzte Integral in der Rechnung, da die Funktion $u \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ungerade ist. Für $t \geq \frac{19}{20}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) = (u * \tilde{\varphi})(t) &= \int_{\mathbb{R}} u(\tau) \cdot \tilde{\varphi}(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{20}}^{\frac{1}{20}} u(\tau) \cdot \tilde{\varphi}(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \\ &= 0 = \tilde{\varphi}(t),\end{aligned}$$

weil $\tilde{\varphi}(t - \bullet)$ auf dem Integrationsintervall $[-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}]$ identisch Null ist. Zuletzt findet sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\tilde{\varphi}}\|_{C^0(\mathbb{R})} = \|u * \ddot{\tilde{\varphi}} - \ddot{\tilde{\varphi}}\|_{C^0([0,1])} &= \sup_{t\in[0,1]} \int_{\mathbb{R}} u(\tau)(\ddot{\tilde{\varphi}}(t-\tau) - \ddot{\tilde{\varphi}}(t))\, \mathrm{d}\tau \\ &\leq \sup_{\substack{t\in[0,1]\\ \tau\in\operatorname{supp} u}} |\ddot{\tilde{\varphi}}(t-\tau) - \ddot{\tilde{\varphi}}(t)|.\end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von $\ddot{\tilde{\varphi}}$ auf Kompakta kann nach möglichem Verkleinern von $\operatorname{supp} u$ angenommen werden, dass $\|\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\tilde{\varphi}}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$. Speziell ist $-2 \leq \ddot{\varphi}_1 \leq 0$. Im Weiteren wird die Funktion φ_1 auf das Intervall $[0, \infty)$ eingeschränkt und die neue Funktion wieder mit φ_1 bezeichnet. Aus der Konkavität folgt $1 = \dot{\varphi}_1(0) \geq \dot{\varphi}_1(t) \geq \dot{\varphi}_1(1) = 0$ für alle t, d.h. insbesondere ist φ_1 monoton wachsend und erfüllt daher $-\frac{1}{2} = \varphi_1(0) \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_1(1) = 0$ für alle t.
Sei nun $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ und sei $\varphi_\delta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi_\delta(t) := \delta\varphi_1(t/\delta)$. Es gelten

- ▷ $\varphi_\delta(t) = t - \frac{\delta}{2}$ für $t \in [0, \frac{1}{20}\delta]$;
- ▷ $\varphi_\delta(t) = 0$ für $t \geq \frac{19}{20}\delta$;
- ▷ $-\frac{\delta}{2} \leq \varphi_\delta \leq 0$ überall;
- ▷ $0 \leq \dot{\varphi}_\delta \leq 1$ überall;
- ▷ $-\frac{2}{\delta} \leq \ddot{\varphi}_\delta \leq 0$ überall.

Als nächstes sei $\psi_1\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\psi_1(t) = \frac{1}{2}$ für $t \in [0, \frac{19}{20}]$, $\psi_1(t) = 0$ für $t \geq 1$ und $0 \leq \psi_1 \leq \frac{1}{2}$ überall. Sei $\psi_\delta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\psi_\delta(t) := \delta\psi_1(t/\sqrt{\delta})$. Dann gelten

- ▷ $\psi_\delta(t) = \frac{\delta}{2}$ für $t \in [0, \frac{19}{20}\sqrt{\delta}]$;
- ▷ $\psi_\delta(t) = 0$ für $t \geq \sqrt{\delta}$;
- ▷ $0 \leq \psi_\delta \leq \frac{\delta}{2}$ überall;
- ▷ $|\dot{\psi}_\delta| \leq \sqrt{\delta}\|\dot{\psi}_1\|_{C^0([0,1])}$ überall;
- ▷ $|\ddot{\psi}_\delta| \leq \|\ddot{\psi}_1\|_{C^0([0,1])}$ überall.

Das Lemma wird erfüllt mit $\chi_\delta := \varphi_\delta + \psi_\delta$ und $c_0 := \max\{1 + \|\dot{\psi}_1\|_{C^0([0,1])}, \|\ddot{\psi}_1\|_{C^0([0,1])}\}$. Insbesondere gilt $\ddot{\chi}_\delta(t) = \ddot{\varphi}_\delta(t) \in [-\frac{2}{\delta}, 0]$ für alle $t \in [0,\delta] \subset [0, \frac{19}{20}\sqrt{\delta}]$. □

Bemerkung 3.5 In der Situation von Lemma 3.4 gilt

$$\chi_\delta(t) \leq t \quad \text{für alle } 0 < \delta \leq \frac{1}{2} \text{ und alle } t \in [0, \infty).$$

Beweis. Sei $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Auf dem Intervall $[0, \delta]$ ist $\ddot{\chi}_\delta \leq 0$, d.h. $\dot{\chi}_\delta$ ist monoton fallend, und es gilt $\dot{\chi}_\delta(t) \leq \dot{\chi}_\delta(0) = 1$ für alle $t \in [0, \delta]$. Die Aussage folgt mithilfe des Mittelwertsatzes. Für $t \in (\delta, \infty)$ gilt ohnehin $\chi_\delta(t) \leq \frac{\delta}{2} \leq t$. □

Als Vorbereitung auf den Beweis von Proposition 3.10 werden drei abzählbare Überdeckungen $(U_i^1)_{i\in\mathbb{N}}, (U_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(U_i^3)_{i\in\mathbb{N}}$ von ∂M mit folgenden Eigenschaften fixiert:

- ▷ Alle Teilmengen $U_i^1, U_i^2, U_i^3 \subset \partial M, i \in \mathbb{N}$ sind offen und relativ kompakt.
- ▷ Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Menge $I_i := \{j \in \mathbb{N} : U_i^3 \cap U_j^3 \neq \varnothing\}$ endlich.
- ▷ Es gilt $\overline{U_i^1} \subset U_i^2$ und $\overline{U_i^2} \subset U_i^3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Zudem sei $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine der Überdeckung $(U_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ untergeordnete Partition der Eins.

Die Existenz solcher Überdeckungen lässt sich zum Beispiel wie folgt begründen: Sei $F\colon \partial M \to \mathbb{R}^N$ eine eigentliche Einbettung von ∂M in einen euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$ (siehe [9, Theorem 6.15]). Mögliche Schranken an die Dimension N sind hier unerheblich. In $\mathbb{R}^N$ bezeichne $B(z, r)$ den offenen Ball um $z \in \mathbb{Z}^N$ vom Radius $r > 0$.
Mit $U_z^1 := F^{-1}(B(z, \sqrt{N})), U_z^2 := F^{-1}(B(z, 2\sqrt{N}))$ und $U_z^3 := F^{-1}(B(z, 3\sqrt{N}))$ sind $(U_z^1)_{z\in\mathbb{Z}^N}, (U_z^2)_{z\in\mathbb{Z}^N}$ und $(U_z^3)_{z\in\mathbb{Z}^N}$ Überdeckungen von ∂M, die alle geforderten Eigenschaften erfüllen. Insbesondere sind die Teilmengen $\overline{U_z^1} \subset F^{-1}(\mathrm{cl}(B(z, \sqrt{N})))$ kompakt aufgrund der Eigentlichkeit von F (analog für U_z^2 und U_z^3). Abschließend werden die Mengen $(U_z^1)_z, (U_z^2)_z$ und $(U_z^3)_z$ gemäß einer beliebig gewählten Bijektion $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}^N$ nummeriert.

Für eine feste Riemannsche Metrik g auf M sind über den Randstücken aus dem letzten Absatz noch weitere geometrische Größen definiert: Sei dazu $i \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, sei $\phi_g\colon V_\eta \to U_\eta^g$ eine Kragenumgebung wie in Gl.(3.1) und sei $0 < \eta_i < \inf_{p\in U_i^3} \eta(p)$. Hierbei gilt $\inf_{p\in U_i^3} \eta(p) > 0$ aufgrund der relativen Kompaktheit von U_i^3.
Auf dem verallgemeinerten Zylinder $([0, \eta_i) \times U_i^2, g = \mathrm{d}t^2 + g_t)$ ist die Abbildung $g_\bullet$ als eine Familie $(g_t)_{t\in[0,\eta_i)}$ von Riemannschen Metriken auf U_i^2 zu verstehen. Die zweite Fundamentalform II_t einer Hyperfläche $N_t := \{t\} \times U_i^2, 0 \leq t < \eta_i$ bezüglich der Normalen ∂_t ist damit gegeben durch

$$\mathrm{II}_t = -\frac{1}{2}\dot{g}_t.$$

Die Weingartenabbildung $W_t\colon TN_t \to TN_t$ ist als assoziierter selbstadjungierter Endomorphismus durch die Gleichung

$$\langle W_t(v), w\rangle_{g_t} = \mathrm{II}_t(v, w) = -\frac{1}{2}\dot{g}_t(v, w)$$

definiert. Zuletzt ist

$$H_t = \frac{1}{n-1}\operatorname{tr}(W_t) = -\frac{1}{2(n-1)}\operatorname{tr}_{g_t}(\dot{g}_t)$$

die mittlere Krümmung von N_t. Offensichtlich gilt $\mathrm{II}_0 = \mathrm{II}_g|_{U_i^2}$ und $H_0 = H_g|_{U_i^2}$. Mithilfe der beschriebenen Größen berechnet sich die Skalarkrümmung von g auf $[0,\eta_i) \times U_i^2$ zu

$$\mathrm{scal}_g = \mathrm{scal}_{g_t} + 3\operatorname{tr}(W_t^2) - \operatorname{tr}(W_t)^2 - \operatorname{tr}_{g_t}(\ddot{g}_t).$$

Die Formeln und ihre Beweise sind in [8, Proposition 4.1] ausgeführt.

Das dritte Lemma liefert eine mögliche Konstruktion abgeschlossener Kragenumgebungen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Vor dem Beweis soll kurz illustriert werden, warum dies kein triviales Problem ist: Sei dazu g eine Riemannsche Metrik auf M. Angenommen, es existiert eine Kragenumgebung der uniformen Breite $\varepsilon > 0$:

$$\phi_g \colon [0,\varepsilon) \times \partial M \to M.$$

Falls ∂M kompakt ist, so ist $\phi_g([0,\frac{\varepsilon}{2}] \times \partial M)$ als Bild einer kompakten Menge kompakt und damit abgeschlossen in M. Im nicht-kompakten Fall hingegen ist $\phi_g([0,\frac{\varepsilon}{2}] \times \partial M)$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen. Als Gegenbeispiel dienen

$$M = \mathbb{H}^n \setminus \big(\{0\} \times \mathbb{R}_{\leq 0}\big) \quad \text{und} \quad g = g_{\mathrm{eukl}}.$$

Trotzdem existiert in diesem Beispiel eine abgeschlossene Kragenumgebung von ∂M, nämlich die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y\}$. Alternativ ist auch

$$\Big(\bigcup_{i\geq 2}\Big[0,\frac{1}{i}\Big] \times \Big[\frac{1}{i},\frac{1}{i-1}\Big]\Big) \cup \Big(\Big[0,\frac{1}{2}\Big] \times [1,\infty)\Big)$$

eine abgeschlossene Kragenumgebung. Hiervon inspiriert gelangt man zu Lemma 3.6.

Lemma 3.6 *Sei g eine Riemannsche Metrik auf M und $\phi_g \colon V_\eta \to U_\eta^g$ eine Kragenumgebung von ∂M wie in* Gl.(3.1). *Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei*

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_i &< \min\Big\{\frac{1}{i}, \inf_{p\in U_i^3} \eta(p)\Big\} \quad \textit{und} \\ \overline{U}_{\varepsilon_i}^{1,g} &:= \phi_g\big([0,\varepsilon_i] \times \overline{U_i^1}\big). \end{aligned}$$

Dann ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U}_{\varepsilon_i}^{1,g} \subset M$ eine abgeschlossene Umgebung von ∂M.

Beweis. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U}_{\varepsilon_i}^{1,g}$ mit $p_n \to p \in M$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist $p \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U}_{\varepsilon_i}^{1,g}$. Für den Beweis wird die Urbildfolge $(\phi_g^{-1}(p_n))_n = (p_n^{(1)}, p_n^{(2)})_n$ betrachtet. Dann sind zwei Fälle denkbar:

1.Fall: Es gibt ein $L \in \mathbb{N}$, sodass $p_n^{(2)} \in \bigcup_{i \leq L} \overline{U_i^1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$: In diesem Fall ist

$$\phi_g^{-1}(p_n) \in \bigcup_{\substack{j \in I_i, \\ i \leq L}} \left([0, \varepsilon_j] \times \overline{U_j^1}\right) \quad \text{bzw.} \quad p_n \in \bigcup_{\substack{j \in I_i, \\ i \leq L}} \overline{U}_{\varepsilon_j}^{1,g}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Menge ist als endliche Vereinigung kompakter Teilmengen von M kompakt und damit abgeschlossen. Es folgt $p \in \bigcup_{j \in I_i, i \leq L} \overline{U}_{\varepsilon_j}^{1,g} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{U}_{\varepsilon_i}^{1,g}$.

2. Fall: Es gibt kein solches $L \in \mathbb{N}$ wie im ersten Fall: Aufgrund der Wahl der lokalen Kragenbreiten ε_i existiert eine Teilfolge $p_{\varphi(n)}^{(1)}$ von $p_n^{(1)}$ mit $p_{\varphi(n)}^{(1)} \to 0$ für $n \to \infty$. Daher gilt $d_g(p_{\varphi(n)}, \partial M) \to 0$ für $n \to \infty$, und mit der Dreiecksungleichung

$$d_g(p, \partial M) \leq d_g(p, p_{\varphi(n)}) + d_g(p_{\varphi(n)}, \partial M) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist folglich $d_g(p, \partial M) = 0$. Die Konklusion $p \in \partial M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{U}_{\varepsilon_i}^{1,g}$ ergibt sich mithilfe der nachstehenden elementaren Aussage aus der Theorie der metrischen Räume, angewendet auf $(X, d) = (M, d_g)$ und $A = \partial M$. □

Fakt 3.7 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $x \in X$ derart, dass $d(x, A) = 0$. Dann gilt $x \in A$.*

Beweis. Wegen $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$ existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ mit $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Also ist $(x_n)_n$ eine Folge in A, die gegen $x \in X$ konvergiert. Die Abgeschlossenheit von A liefert $x \in A$. □

Es folgt das letzte Lemma.

Lemma 3.8 *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und $g\colon K \to \mathscr{R}(M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei A_i eine Umgebung von U_i^3 in M.*

Dann existiert eine positive stetige Funktion $\eta\colon \partial M \to \mathbb{R}$, sodass für alle $\xi \in K$ gilt:

- ▷ *$\phi_{g(\xi)}\colon V_\eta \to U_\eta^{g(\xi)}$ ist eine geodätische Kragenumgebung von ∂M;*
- ▷ *$\phi_{g(\xi)}(\{(t, p) \in [0, \infty) \times U_i^2 \colon t < \eta(p)\}) \subset A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Zunächst existiert nach Satz 2.14 eine positive stetige Funktion $\eta^1\colon \partial M \to \mathbb{R}$, sodass $\phi_{g(\xi)}\colon V_{\eta^1} \to U_{\eta^1}^{g(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ eine geodätische Kragenumgebung ist. Anschließend sei $i \in \mathbb{N}$. Wieder wird Satz 2.14 angewendet, diesmal allerdings auf die Mannigfaltigkeit

$$M_i := M - (\partial M \setminus U_i^3)$$

und die Umgebung A_i. Demzufolge existiert eine Funktion $\eta_{U_i^3}\colon U_i^3 \to \mathbb{R}$, sodass

$$\phi_{g(\xi)}(\{(t, p) \in [0, \infty) \times U_i^3 \colon t < \eta_{U_i^3}(p)\}) \subset A_i$$

für alle $\xi \in K$. Sei $\eta_i^2 := \min_{p \in \overline{U_i^2}} \eta_{U_i^3}(p)$. Dann ist

$$\eta^2 \colon \partial M \to \mathbb{R}\ ,\ \eta^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i \cdot \min_{j \in I_i} \eta_j^2$$

eine positive stetige Funktion mit $\eta^2|_{U_i^2} \leq \eta_i^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Hierbei ist zu beachten, dass $j \in I_i$ äquivalent ist zu $i \in I_j$. Dieses Argument wird im Beweis von Proposition 3.10 erneut auftauchen. Mit der Funktion η^2 gilt

$$\phi_{g(\xi)}(\{(t,p) \in [0,\infty) \times U_i^2 : t < \eta^2(p)\}) \subset A_i$$

für alle $\xi \in K$ und $i \in \mathbb{N}$. Schließlich erfüllt $\eta := \min\{\eta^1, \eta^2\} \colon \partial M \to \mathbb{R}$ die Aussage des Lemmas. □

Zuletzt sei noch kurz an die C^k-Norm von Schnitten in Vektorbündeln – hier nur Tensorbündeln – erinnert. Die Definitionen werden als bekannt vorausgesetzt.

Bemerkung 3.9 Ist (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so lässt sich auf dem Raum $C^\infty(M; T^*M \otimes T^*M)$ der $(0,2)$-Tensorfelder in kanonischer Weise eine C^2-Norm definieren. Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ von g induziert nämlich Zusammenhänge auf dem Kotangentialbündel $T^*M \to M$ und auf allen Tensorbündeln $T^*M^{\otimes} \to M$, die sämtlich mit ∇ notiert werden. Zudem induziert g ein inneres Produkt auf T^*M und $T^*M^{\otimes}$. Die C^2-Norm eines $(0,2)$-Tensorfeldes h ist dann definiert durch

$$|||h|||_{C^2(M)} = \max\left\{|||h|||_{C^0(M)}, |||\nabla h|||_{C^0(M)}, |||\nabla^2 h|||_{C^0(M)}\right\}.$$

Wie üblich zeigt $C^0(\dots)$ an, dass eine Supremumsnorm gebildet wird. Der Vorteil dieser Definition besteht darin, dass sie ohne die Wahl lokaler Rahmen oder lokaler Koordinaten auskommt. Falls $\psi \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion ist, so gilt die folgende Abschätzung:

$$|||\psi \cdot h|||_{C^2(M)} \leq \Big(|||\psi|||_{C^0(M)} + 2 \cdot |||\mathrm{d}\psi|||_{C^0(M)} + |||\nabla(\mathrm{d}\psi)|||_{C^0(M)}\Big) \cdot |||h|||_{C^2(M)}.$$

Hierbei ist zu beobachten, dass $\mathrm{d} \colon C^\infty(M; M \times \mathbb{R}) \to C^\infty(M; T^*M)$ ein Differentialoperator erster Ordnung und $\nabla \circ \mathrm{d} \colon C^\infty(M; M \times \mathbb{R}) \to C^\infty(M; T^*M \otimes T^*M)$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist – nicht zu verwechseln mit $\mathrm{d}^2 = 0 \colon C^\infty(M; M \times \mathbb{R}) \to C^\infty(M; \Lambda^2 T^*M)$. Die Abschätzung folgt aus den Ungleichungen

$$|||\psi h|||_{C^0} \leq |||\psi|||_{C^0} \cdot |||h|||_{C^0} \leq |||\psi|||_{C^0} \cdot |||h|||_{C^2}$$

und

$$\begin{aligned} |||\nabla(\psi h)|||_{C^0} &= |||\mathrm{d}\psi \otimes h + \psi \otimes \nabla h|||_{C^0} \\ &\leq |||\mathrm{d}\psi \otimes h|||_{C^0} + |||\psi \otimes \nabla h|||_{C^0} \\ &\leq |||\mathrm{d}\psi|||_{C^0} \cdot |||h|||_{C^0} + |||\psi|||_{C^0} \cdot |||\nabla h|||_{C^0} \\ &\leq \big(|||\psi|||_{C^0} + |||\mathrm{d}\psi|||_{C^0}\big) \cdot |||h|||_{C^2}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|||\nabla^2(\psi h)|||_{C^0} &= |||\nabla(\mathrm{d}\psi \otimes h) + \nabla(\psi \otimes \nabla h)|||_{C^0} \\
&= |||\nabla(\mathrm{d}\psi) \otimes h + \mathrm{d}\psi \otimes \nabla h + \mathrm{d}\psi \otimes \nabla h + \psi \otimes \nabla^2 h|||_{C^0} \\
&\leq |||\nabla(\mathrm{d}\psi) \otimes h|||_{C^0} + 2 \cdot |||\mathrm{d}\psi \otimes \nabla h|||_{C^0} + |||\psi \otimes \nabla^2 h|||_{C^0} \\
&\leq |||\nabla(\mathrm{d}\psi)|||_{C^0} \cdot |||h|||_{C^0} + 2 \cdot |||\mathrm{d}\psi|||_{C^0} \cdot |||\nabla h|||_{C^0} + |||\psi|||_{C^0} \cdot |||\nabla^2 h|||_{C^0} \\
&\leq \big(|||\psi|||_{C^0} + 2 \cdot |||\mathrm{d}\psi|||_{C^0} + |||\nabla(\mathrm{d}\psi)|||_{C^0}\big) \cdot |||h|||_{C^2}.
\end{aligned}
$$

Bezüglich der Notation von Normen wird folgende Vereinbarung getroffen:

- ▷ $|||\cdot|||_{C^k}$ notiert die von g induzierte C^k-Norm von Tensorfeldern;
- ▷ $\|\cdot\|_g$ notiert die von g induzierte punktweise Norm auf einem Tensorbündel;
- ▷ $|\cdot|$ notiert den reellen Absolutbetrag.

Nach allen Vorbereitungen kann nun das zweite Deformationsresultat für Familien von C-normalen Metriken bewiesen werden.

Proposition 3.10 *Sei K ein kompakter Hausdorffraum.*
Sei $g_0\colon K \to C^\infty(\partial M; T^*\partial M \otimes T^*\partial M)$ eine stetige Familie von Riemannschen Metriken auf ∂M und seien $h, k\colon K \to C^\infty(\partial M; T^*\partial M \otimes T^*\partial M)$ Familien von symmetrischen $(0,2)$-Tensorfeldern mit $\mathrm{tr}_{g_0}(h) \geq \mathrm{tr}_{g_0}(k)$.

Dann gibt es eine glatte Funktion $C_0 = C_0(g_0, h, k) \in C^\infty(\partial M), C_0 > 0$ derart, dass

- ▷ *für jede stetige Familie*
$$g\colon K \to \mathscr{R}_{>\sigma}(M)$$
von C-normalen Metriken mit $C \in C^\infty(\partial M), C \geq C_0$, deren Skalarkrümmungen größer als σ sind, und die $g(\xi)_0 = g_0(\xi)$ und $\mathrm{II}_{g(\xi)} = h(\xi)$ für alle $\xi \in K$ erfüllen, und
- ▷ *für jede Umgebung $\mathscr{U}$ von ∂M*

eine stetige Abbildung
$$f\colon K \times [0,1] \to \mathscr{R}_{>\sigma}(M)$$
existiert, sodass für alle $\xi \in K$ und alle $s \in [0,1]$ gilt:

(a) $f(\xi, 0) = g(\xi)$*;*

(b) $f(\xi, s)$ *ist C-normal;*

(c) $f(\xi, s)|_{\partial M} = g(\xi)|_{\partial M}$*, also insbesondere* $f(\xi, s)_0 = g_0(\xi)$*;*

(d) $\mathrm{II}_{f(\xi,s)} = (1-s)\mathrm{II}_{g(\xi)} + sk(\xi)$*;*

(e) $f(\xi, s) = g(\xi)$ *auf* $M \setminus \mathscr{U}$*.*

Beweis. Sei $\mathscr{U}$ eine Umgebung von ∂M. Sei $C \in C^\infty(\partial M)$ eine positive glatte Funktion auf ∂M und sei $g : K \to \mathscr{R}_{>\sigma}(M)$ eine stetige Familie von C-normalen Metriken, deren Skalarkrümmungen größer als σ sind. Zudem mögen $g(\xi)_0 = g_0(\xi)$ und $\mathrm{II}_{g(\xi)} = h(\xi)$ für alle $\xi \in K$ gelten.
Da Proposition 3.10 im späteren Beweis von Satz 3.11 im Anschluss an Proposition 3.2 angewendet wird, kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass die Riemannschen Metriken $g(\xi)$ die C-Normalitätsbedingung (3.4) auf einer gemeinsamen offenen Umgebung $\mathscr{U}_0$ von ∂M erfüllen. Diese Umgebung $\mathscr{U}_0$ liefert das Flexibilitätslemma im Beweis von Proposition 3.2.
Des Weiteren sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine kompakte Umgebung A_i von U_i^3 in M gegeben. Nach Satz 2.14 und Lemma 3.8 existiert eine (von ξ unabhängige) positive stetige Funktion $\eta^3 \colon \partial M \to \mathbb{R}$, sodass

- ▷ $\phi_{g(\xi)} \colon V_{\eta^3} \to U_{\eta^3}^{g(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ eine Kragenumgebung von ∂M ist;
- ▷ $U_{\eta^3}^{g(\xi)} \subset \mathscr{U}_0 \cap \mathscr{U}$ für alle $\xi \in K$ gilt;
- ▷ $\phi_{g(\xi)}(\{(t,p) \in [0,\infty) \times U_i^2 : t < \eta^3(p)\}) \subset A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\xi \in K$ gilt.

Somit ist

$$g(\xi) = \mathrm{d}t^2 + g_0(\xi) - 2t \cdot h(\xi) - Ct^2 \cdot g_0(\xi) \quad \text{auf } U_{\eta^3}^{g(\xi)} \text{ für alle } \xi \in K. \tag{3.6}$$

Um später präzise argumentieren zu können, beschafft man sich geeignete Kragenumgebungen per „Ping-Pong-Prinzip“:

1. Sei $\mathscr{U}_1 \subset M$ eine offene Umgebung von ∂M, sodass $\mathscr{U}_1 \subset U_{\eta^3}^{g(\xi)}$ für alle $\xi \in K$ gilt und sodass $K \to C^\infty(\mathscr{U}_1; V_{\eta^3}), \xi \mapsto \phi_{g(\xi)}^{-1}$ eine stetige Abbildung ist.
2. Sei $\eta^2 \colon \partial M \to \mathbb{R}, \eta^2 \leq \eta^3$ eine stetige Funktion derart, dass $\phi_{g(\xi)} \colon V_{\eta^2} \to U_{\eta^2}^{g(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ eine geodätische Kragenumgebung ist und dass $U_{\eta^2}^{g(\xi)} \subset \mathscr{U}_1$ für alle $\xi \in K$ gilt.
3. Sei $\xi_0 \in K$ beliebig, aber fest, und sei $A := \cup_{i \in \mathbb{N}} \overline{U}_{\varepsilon_i}^{1,g(\xi_0)}$ mit $0 < \varepsilon_i < \min\{i^{-1}, \inf_{p \in U_i^3} \eta^2(p)\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $A \subset M$ eine abgeschlossene Umgebung von ∂M mit $A \subset \mathscr{U}_1$, siehe Lemma 3.6.
4. Abschließend sei $\eta = \eta^1 \colon \partial M \to \mathbb{R}, \eta^1 \leq \eta^2$ eine stetige Funktion, sodass $\phi_{g(\xi)} \colon V_{\eta^1} \to U_{\eta^1}^{g(\xi)}$ für jedes $\xi \in K$ eine geodätische Kragenumgebung ist und sodass $U_{\eta^1}^{g(\xi)} \subset A$ für alle $\xi \in K$ gilt.

Zusammenfassend hat man für alle $\xi \in K$ die folgende Kette von Inklusionen:

$$\boxed{U_\eta^{g(\xi)} \subset A \subset \mathscr{U}_1 \subset U_{\eta^3}^{g(\xi)} \subset \mathscr{U}_0 \cap \mathscr{U}.}$$

Die beiden mittleren Umgebungen A und $\mathscr{U}_1$ sind wie $\mathscr{U}_0 \cap \mathscr{U}$ unabhängig von ξ. Das Vorgehen basiert auf Satz 2.14 und Proposition 2.15. Sei nun

$$C_i := \|\!|C|\!\|_{C^0(U_i^3)}, \quad (\mathrm{d}C)_i := \|\!|\mathrm{d}C|\!\|_{C^0(U_i^3)}, \quad \big(\nabla(\mathrm{d}C)\big)_i := \|\!|\nabla(\mathrm{d}C)|\!\|_{C^0(U_i^3)}$$

und $0 < \eta_i < \inf_{p \in U_i^3} \eta(p)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, wobei die Suprema und Infima aufgrund der relativen Kompaktheit der Mengen U_i^3 sämtlich kleiner als unendlich bzw. größer als Null sind.
Die Deformation der Metriken $g(\xi)$ findet zunächst lokal über jedem Randstück U_i^2 in dem Kragen $U_{\eta_i}^{2,g(\xi)} := \phi_{g(\xi)}([0,\eta_i) \times U_i^2)$ statt. Anschließend verklebt die Partition der Eins $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die lokal deformierten Metriken zu einer (deformierten) Metrik über dem gesamten Rand ∂M. Für die nachfolgende Konstruktion sei $\delta = (\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von reellen Zahlen mit

$$\boxed{\begin{aligned} 0 < \delta_i < \min\Big\{&\frac{1}{2}, i^{-2}, \big(\min_{j\in I_i} \eta_j\big)^2\}, \big(\max_{j\in I_i} C_j\big)^{-2}, \\ &\big(\max_{j\in I_i} (\mathrm{d}C)_j\big)^{-2}, \big(\max_{j\in I_i} \big(\nabla(\mathrm{d}C)\big)_j\big)^{-2}\Big\} \end{aligned}}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Falls $(\mathrm{d}C)_j$ oder $(\nabla(\mathrm{d}C))_j$ für alle $j \in I_i$ gleich Null sein sollte, fallen die entsprechenden Bedingungen einfach weg. Der Beweis wird in vier Schritte aufgeteilt.

1.Schritt: Im ersten Schritt sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Zu betrachten ist die Familie lokaler $(0,2)$-Tensorfelder

$$\begin{gathered} f^{\delta_i} : K \times [0,1] \to C^\infty(V_{\eta_i}^2; T^*M \otimes T^*M), \\ f^{\delta_i}(\xi, s) = \mathrm{d}t^2 + (1 - Ct^2) \cdot g_0(\xi) - 2t \cdot h(\xi) + 2s\chi_{\delta_i}(t) \cdot (h(\xi) - k(\xi)), \end{gathered}$$

wobei $V_{\eta_i}^2 = [0,\eta_i) \times U_i^2$. Für alle $\xi \in K, s \in [0,1]$ und $(t,p) \in V_{\eta_i}^2$ gilt

$$\begin{aligned} &\|f^{\delta_i}(\xi,s)(t,p) - g(\xi)(t,p)\|_{g(\xi)(t,p)} \\ = {}&\|2s\chi_{\delta_i}(t) \cdot (h(\xi)(p) - k(\xi)(p))\|_{g(\xi)(t,p)} \\ = {}& \ 2s\chi_{\delta_i}(t) \cdot \|h(\xi)(p) - k(\xi)(p)\|_{g(\xi)_t(p)} \\ \le {}& \ \delta_i \cdot \sup_{\xi\in K, (t,p)\in V_{\eta_i}^2} \|h(\xi)(p) - k(\xi)(p)\|_{g(\xi)_t(p)}, \end{aligned}$$

wobei das letzte Supremum kleiner als unendlich ist. Hier kommen die relative Kompaktheit von U_i^2 und $[0,\eta_i)$ zum Tragen.
In einer Orthonormalbasis bezüglich $g(\xi)(t,p)$ ist $\|f^{\delta_i}(\xi,s)(t,p) - g(\xi)(t,p)\|_{g(\xi)(t,p)}$ gleich der Frobeniusnorm $\|F^{\delta_i}(\xi,s)(t,p) - I_n\|$ von Matrizen, wobei $F^{\delta_i}(\xi,s)(t,p)$ die darstellende Matrix von $f^{\delta_i}(\xi,s)(t,p)$ in der gewählten Basis und I_n die Einheitsmatrix bezeichnet. Da die positiv definiten Matrizen eine offene Teilmenge im Raum der quadratischen Ma-

trizen bilden und I_n natürlich positiv definit ist, kann δ_i so klein gewählt werden, dass $f^{\delta_i}(\xi,s)(t,p)$ für alle $\xi \in K, s \in [0,1]$ und $(t,p) \in V^2_{\eta_i}$ positiv definit ist. Mit anderen Worten ist f^{δ_i} dann eine Familie von Riemannschen Metriken.

2.Schritt: Im zweiten Schritt werden verklebte Metriken auf ganz M definiert: Es sei

$$f^\delta \colon K \times [0,1] \to C^\infty(M; T^*M \otimes T^*M),$$

$$f^\delta(\xi,s) = \begin{cases} \mathrm{d}t^2 + (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \psi_i \cdot 2s\chi_{\delta_i}(t)\cdot(h(\xi)-k(\xi)) \\ \qquad \text{auf} \quad \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}, \\ g(\xi) \qquad \text{auf} \quad M - \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}. \end{cases}$$

Dabei sollen die Zahlen δ_i so klein wie im ersten Beweisschritt sein. Die punktweise positive Definitheit von $f^\delta(\xi,s)$ auf $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}$ lässt sich leicht mittels der Darstellung

$$f^\delta(\xi,s) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i \cdot \Big(\mathrm{d}t^2 + (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + 2s\chi_{\delta_i}(t)\cdot(h(\xi)-k(\xi))\Big)$$

zeigen. Sei dazu $(t,p) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}$. Dann ist die Bilinearform in der großen Klammer positiv definit für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $p \in U^2_j$. Dies folgt aus dem ersten Beweisschritt, falls $t < \eta_j$. Für $t \geq \eta_j$ ist $\chi_{\delta_j}(t) = 0$ und die restlichen drei Summanden ergeben das (positiv definite) Skalarprodukt $g(\xi)(t,p)$. Wegen $\psi_j(p) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $p \notin U^2_j$ sind keine weiteren Summanden in der großen Summe zu beachten.
Des Weiteren ist nachzuprüfen, dass die Metriken $f^\delta(\xi,s)$ tatsächlich glatt sind. Dies ist auf der Menge $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}$ offensichtlich, sodass die Glattheit um jeden Punkt aus dem Komplement $M - \cup_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}$ zu zeigen bleibt. Dafür genügt wiederum die (zu beweisende) Aussage, dass $f^\delta(\xi,s)$ auf $M - \cup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U}^{1,g(\xi)}_{\sqrt{\delta_i}}$ mit $g(\xi)$ übereinstimmt. Gemäß Lemma 3.6, angewendet auf $\varepsilon_i = \sqrt{\delta_i}$, ist die Menge $\cup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U}^{1,g(\xi)}_{\sqrt{\delta_i}}$ nämlich abgeschlossen in M. Dann ist $f^\delta(\xi,s)$ glatt auf der offenen Überdeckung $(\cup_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}, M - \cup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U}^{1,g(\xi)}_{\sqrt{\delta_i}})$ von M und somit glatt.
Für den Beweis der noch fehlenden Aussage sei $(t,p) \in \cup_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i} - \cup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U}^{1,g(\xi)}_{\sqrt{\delta_i}}$. Also ist $(t,p) \in U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Jeder Summand in der Summe

$$f^\delta(\xi,s)(t,p) = \sum_{j\in I_i} \psi_j(p) \cdot \Big(\mathrm{d}t^2 + (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + 2s\chi_{\delta_j}(t)\cdot(h(\xi)-k(\xi))\Big)$$

ist entweder gleich $\psi_j(p)\cdot g(\xi)(t,p)$ (falls $p \in U^1_j$) oder gleich Null (falls $p \notin U^1_j$). Somit gilt

$$f^\delta(\xi,s)(t,p) = \sum_{j\in I_i} \psi_j(p)\cdot g(\xi)(t,p) = g(\xi)(t,p).$$

3.Schritt: Als nächstes soll gezeigt werden, dass die Familie

$$f^\delta \colon K \times [0,1] \to C^\infty(M; T^*M \otimes T^*M)$$

stetig ist. Dafür beobachtet man zuerst, dass $f^\delta(\xi,s)|_{M\setminus A} = g(\xi)|_{M\setminus A}$ für alle $\xi \in K$ und $s \in [0,1]$ gilt. Folglich ist $f^\delta|_{M\setminus A}\colon K \times [0,1] \to C^\infty(M \setminus A; T^*M \otimes T^*M)$ stetig. Zum anderen lässt sich die Familie $f^\delta|_{\mathscr{U}_1}$ als Komposition stetiger Abbildungen darstellen:

$$\begin{array}{ccccc} K \times [0,1] & \longrightarrow & C^\infty(\mathscr{U}_1; V_{\eta^3}) \times C^\infty(V_{\eta^3}; T^*V_{\eta^3} \otimes T^*V_{\eta^3}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathscr{U}_1; T^*M \otimes T^*M) \\ (\xi, s) & \longmapsto & \left(\phi^{-1}_{g(\xi)}, f^\delta(\xi,s)\right) & & \\ & & (\phi, f) & \longmapsto & \phi^* f \end{array}.$$

Dabei ist $f^\delta(\xi,s)\colon V_{\eta^3} \to T^*V_{\eta^3} \otimes T^*V_{\eta^3}$ gegeben durch

$$f^\delta(\xi,s) = \begin{cases} \mathrm{d}t^2 + (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \psi_i \cdot 2s\chi_{\delta_i}(t)\cdot(h(\xi)-k(\xi)) \\ \qquad\qquad \text{auf} \quad \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \left([0,\eta_i) \times U_i^2\right), \\ \phi^*_{g(\xi)} g(\xi) \quad \text{auf} \quad V_{\eta^3} - \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \left([0,\eta_i)\times U_i^2\right). \end{cases}$$

Diese Familie ist stetig, da sie sich zu stetigen Familien auf $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}([0,\eta_i)\times U_i^2)$ und $V_{\eta^3} - \cup_{i\in\mathbb{N}}([0,\sqrt{\delta_i}] \times \overline{U_i^1})$ einschränkt. Dabei gilt zu beachten, dass auch

$$K \times [0,1] \to C^\infty(V_{\eta^3}; T^*V_{\eta^3} \otimes T^*V_{\eta^3})\ ,\ (\xi,s) \mapsto \phi^*_{g(\xi)} g(\xi)$$

als Komposition stetiger Abbildungen stetig ist. Insgesamt folgt die Stetigkeit von $f^\delta\colon K \times [0,1] \to \mathscr{R}(M)$.

4.Schritt: Im vierten Schritt wird bewiesen, dass die Skalarkrümmung der Riemannschen Metriken $f^\delta(\xi,s)$ für genügend großes C und genügend kleine Zahlen $\delta = (\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ punktweise größer als σ ist. Da $f^\delta(\xi,s)$ auf $M - \cup_{i\in\mathbb{N}}\overline{U}^{1,g(\xi)}_{\sqrt{\delta_i}}$ mit $g(\xi)$ übereinstimmt, muss nur das Verhalten auf $\cup_{i\in\mathbb{N}} U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}$ betrachtet werden. Sei dazu $i \in \mathbb{N}$. Auf $U^{2,g(\xi)}_{\eta_i}$ gilt

$$f^\delta(\xi,s) = \mathrm{d}t^2 + (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + \sum_{j\in I_i} \psi_j \cdot 2s\chi_{\delta_j}(t)\cdot(h(\xi)-k(\xi)).$$

In den gleich durchgeführten Rechnungen wird das Vergleichszeichen „$\lesssim$“ verwendet, falls die linke Seite kleiner oder gleich der rechten Seite, multipliziert mit einer positiven Konstanten, ist. Diese Konstante darf nur von den Familien g_0, h und k auf U_i^2 abhängen. Insbesondere ist sie unabhängig von δ, t, p, ξ, s, C. Darüber hinaus soll eine Aussage als „für genügend kleine $(\delta_j)_{j\in I_i}$ erfüllt“ bezeichnet werden, falls die Aussage für alle Tupel $(\delta_j)_{j\in I_i}$ erfüllt ist, deren Maximum kleiner als eine gewisse Konstante ist. Diese Konstante hängt wiederum nur von g_0, h und k auf U_i^2 und von C auf $\bigcup_{j\in I_i} U_j^2$ ab.
Im Folgenden sei $(\gamma_t)_{t\in[0,\eta_i)}$ die Familie von Riemannschen Metriken auf U_i^2 mit

$$\gamma_t := f^\delta(\xi,s)_t = (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + \sum_{j\in I_i} \psi_j \cdot 2s\chi_{\delta_j}(t)\cdot(h(\xi)-k(\xi)).$$

Zudem bezeichne II_t die zweite Fundamentalform und W_t die Weingartenabbildung der Hyperfläche $N_t = \{t\} \times U_i^2$ bezüglich $\gamma := f^\delta(\xi, s)$. Gemäß [8, Proposition 4.1] ist die Skalarkrümmung von γ gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{scal}_\gamma &= \mathrm{scal}_{\gamma_t} + 3\,\mathrm{tr}(W_t^2) - \mathrm{tr}(W_t)^2 - \mathrm{tr}_{\gamma_t}(\ddot{\gamma}_t)\\ &\geq \mathrm{scal}_{\gamma_t} - \mathrm{tr}_{\gamma_t}(\mathrm{II}_t)^2 - \mathrm{tr}_{\gamma_t}(\ddot{\gamma}_t).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass W_t ein Feld selbstadjungierter Endomorphismen ist. Mit Vielfachheit gezählt besitzt W_t^2 also punktweise $n-1$ nicht-negative reelle Eigenwerte. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_t &= -\frac{1}{2}\dot{\gamma}_t = h(\xi) + Ct \cdot g_0(\xi) - \sum_{j \in I_i} \psi_j \cdot s\dot{\chi}_{\delta_j}(t) \cdot (h(\xi) - k(\xi)),\\ \ddot{\gamma}_t &= -2C \cdot g_0(\xi) + \sum_{j \in I_i} \psi_j \cdot 2s\ddot{\chi}_{\delta_j}(t)(h(\xi) - k(\xi)).\end{aligned}$$

Nun können die drei Terme in Gl.(3.7) separat untersucht werden. Dabei ist wiederum nur die Teilmenge $[0, \max_{j\in I_i}\sqrt{\delta_j}) \times U_i^2$ zu betrachten, da γ auf $[\max_{j\in I_i}\sqrt{\delta_j}, \eta_i) \times U_i^2$ mit $g(\xi)$ übereinstimmt.[1]

Zu scal_{γ_t}*:* Für alle $t \in [0, \max_{j\in I_i}\sqrt{\delta_j})$ gilt mit der von $\gamma_0 = g_0(\xi)$ induzierten C^2-Norm

$$\begin{aligned}|||\gamma_t - \gamma_0|||_{C^2} &= |||-Ct^2 \cdot \gamma_0 - 2t \cdot h(\xi) + \sum_{j\in I_i} \psi_j \cdot 2s\chi_{\delta_j}(t) \cdot (h(\xi) - k(\xi))|||_{C^2}\\ &\leq t^2 \cdot |||C \cdot \gamma_0|||_{C^2} + 2t \cdot |||h(\xi)|||_{C^2} + 2s \sum_{j\in I_i} \chi_{\delta_j}(t) |||\psi_j \cdot (h(\xi) - k(\xi))|||_{C^2}\\ &\leq t^2 \cdot \big(C_i + 2(\mathrm{d}C)_i + (\nabla(\mathrm{d}C))_i\big) \cdot |||\gamma_0|||_{C^2} + 2t \cdot |||h(\xi)|||_{C^2}\\ &\quad + 2s \sum_{j\in I_i} \chi_{\delta_j}(t) \big(|||\psi_j|||_{C^0} + 2|||\mathrm{d}\psi_j|||_{C^0} + |||\nabla(\mathrm{d}\psi_j)|||_{C^0}\big) \cdot |||h(\xi) - k(\xi)|||_{C^2}.\end{aligned}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}&t^2 \cdot C_i \leq t \cdot \max_{j\in I_i} \sqrt{\delta_j} \cdot C_i \leq t,\\ &t^2 \cdot (\mathrm{d}C)_i \leq t \cdot \max_{j\in I_i} \sqrt{\delta_j} \cdot (\mathrm{d}C)_i \leq t,\\ &t^2 \cdot \big(\nabla(\mathrm{d}C)\big)_i \leq t \cdot \max_{j\in I_i} \sqrt{\delta_j} \cdot \big(\nabla(\mathrm{d}C)\big)_i \leq t,\end{aligned}$$

sofern $(\mathrm{d}C)_i \neq 0$ und $(\nabla(\mathrm{d}C))_i \neq 0$. Andernfalls können die letzten beiden Ungleichungen

[1] Um einen Punkt $(\max_{j\in I_i}\sqrt{\delta_j}, p)$ mit $p \in U_i^2$ gibt es keine offene Umgebung, die vollständig in $[\max_{j\in I_i}\sqrt{\delta_j}, \eta_i) \times U_i^2$ liegt. Allerdings gehen in die Formel für die Skalarkrümmung in lokalen Koordinaten nur die metrischen Koeffizienten und ihre ersten und zweiten Ableitungen ein. Entscheidend ist, dass die Ableitungen in t-Richtung schon durch die rechtsseitigen t-Ableitungen festgelegt sind.

ignoriert werden. Für alle $j \in I_i$ gilt nach Bemerkung 3.5 zudem $2s\chi_{\delta_j}(t) \leq 2t$, sodass

$$\begin{aligned}
|||\gamma_t - \gamma_0|||_{C^2} \leq 4t \cdot |||\gamma_0|||_{C^2} + 2t \cdot |||h(\xi)|||_{C^2} \\
+ 2t \sum_{j\in I_i} \big(|||\psi_j|||_{C^0} + 2|||\mathrm{d}\psi_j|||_{C^0} + |||\nabla(\mathrm{d}\psi_j)|||_{C^0} \big) \cdot |||h(\xi) - k(\xi)|||_{C^2}.
\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist – nach Bilden des Supremums über ξ – eine von ξ und p unabhängige positive Konstante. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
|||\gamma_t - \gamma_0|||_{C^2} &\lesssim t + t + t = 3t \\
&\leq 3 \max_{j\in I_i} \sqrt{\delta_j} \leq 3. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{scal}_{\gamma_t} \gtrsim -1. \qquad (3.9)$$

Zu $\mathrm{tr}_{\gamma_t}(\mathrm{II}_t)$*:* Von nun an seien die Zahlen $(\delta_j)_{j\in I_i}$ so klein, dass $\|\gamma_t - \gamma_0\|_{C^2} \leq \frac{1}{2}$ für alle $(t,p) \in [0, \max_{j\in I_i} \sqrt{\delta_j}) \times U_i^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{tr}_{\gamma_t}(\mathrm{II}_t)| &\leq |\,\mathrm{tr}_{\gamma_0}(\mathrm{II}_t)| + |\,\mathrm{tr}_{\gamma_t}(\mathrm{II}_t) - \mathrm{tr}_{\gamma_0}(\mathrm{II}_t)| \\
&\lesssim |\,\mathrm{tr}_{\gamma_0}(\mathrm{II}_t)| + \|\gamma_t - \gamma_0\|_{\gamma_0} \cdot \|\mathrm{II}_t\|_{\gamma_0} \\
&\lesssim |\,\mathrm{tr}_{\gamma_0}(\mathrm{II}_t)| + \|\mathrm{II}_t\|_{\gamma_0}.
\end{aligned}$$

Für die einzelnen Summanden findet man unter Berücksichtigung von $|\dot\chi_{\delta_j}(t)| \leq c_0$ (siehe Lemma 3.4) die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{II}_t\|_{\gamma_0} &= \|h(\xi) + Ct \cdot \gamma_0 - \sum_{j\in I_i} \psi_j \cdot s\dot\chi_{\delta_j}(t) \cdot (h(\xi) - k(\xi))\|_{\gamma_0} \\
&\leq \|h(\xi)\|_{\gamma_0} + \sqrt{n-1} \cdot Ct + \sum_{j\in I_i} \psi_j \cdot s|\dot\chi_{\delta_j}(t)| \cdot \|h(\xi) - k(\xi)\|_{\gamma_0} \\
&\lesssim 1 + C_i \cdot \max_{j\in I_i} \sqrt{\delta_j} + \sum_{j\in I_i} \psi_j \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

und

$$|\,\mathrm{tr}_{\gamma_0}(\mathrm{II}_t)| \leq \sqrt{n-1} \cdot \|\mathrm{II}_t\|_{\gamma_0} \lesssim 1.$$

Daher ist

$$|\,\mathrm{tr}_{\gamma_t}(\mathrm{II}_t)| \lesssim |\,\mathrm{tr}_{\gamma_0}(\mathrm{II}_t)| + \|\mathrm{II}_t\|_{\gamma_0} \lesssim 1. \qquad (3.10)$$

Zu $-\mathrm{tr}_{\gamma_t}(\ddot\gamma_t)$*:* In dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
-\mathrm{tr}_{\gamma_t}(\ddot\gamma_t) &= \mathrm{tr}_{\gamma_t}(-\sum_{j\in I_i} \psi_j \cdot 2s\ddot\chi_{\delta_j}(t) \cdot (h(\xi) - k(\xi)) + 2C \cdot \gamma_0) \\
&= -\sum_{j\in I_i} \psi_j \cdot 2s\ddot\chi_{\delta_j}(t) \cdot \mathrm{tr}_{\gamma_t}(h(\xi) - k(\xi)) + 2C \cdot \mathrm{tr}_{\gamma_t}(\gamma_0) \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

werden zunächst die Summanden in der ersten Summe betrachtet. Sei dazu $j_0 \in I_i$ fest. Für $t \in [0, \delta_{j_0}]$ gilt wegen $\operatorname{tr}_{\gamma_0}(h) \geq \operatorname{tr}_{\gamma_0}(k), \ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t) \leq 0$ und Gl.(3.8)

$$\begin{aligned}
\ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t) \cdot \operatorname{tr}_{\gamma_t}(h(\xi) - k(\xi)) &\leq \ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t) \cdot \operatorname{tr}_{\gamma_t}(h(\xi) - k(\xi)) - \ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t) \cdot \operatorname{tr}_{\gamma_0}(h(\xi) - k(\xi)) \\
&\leq |\ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t)| \cdot |\operatorname{tr}_{\gamma_t}(h(\xi) - k(\xi)) - \operatorname{tr}_{\gamma_0}(h(\xi) - k(\xi))| \\
&\lesssim |\ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t)| \cdot \|\gamma_t - \gamma_0\|_{\gamma_0} \cdot \|h(\xi) - k(\xi)\|_{\gamma_0} \\
&\lesssim \frac{2}{\delta_{j_0}} \cdot t \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Für $t \in [\delta_{j_0}, \sqrt{\delta_{j_0}})$ gilt

$$\begin{aligned}
|\ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t) \cdot \operatorname{tr}_{\gamma_t}(h(\xi) - k(\xi))| &\lesssim |\operatorname{tr}_{\gamma_t}(h(\xi) - k(\xi))| \\
&\lesssim |\operatorname{tr}_{\gamma_0}(h(\xi) - k(\xi))| + \|\gamma_t - \gamma_0\|_{\gamma_0} \cdot \|h(\xi) - k(\xi)\|_{\gamma_0} \\
&\lesssim 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Für alle $t \geq \sqrt{\delta_{j_0}}$ ist $\ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t) = 0$. Insgesamt gilt

$$\ddot{\chi}_{\delta_{j_0}}(t) \cdot \operatorname{tr}_{\gamma_t}(h(\xi) - k(\xi)) \lesssim 1$$

auf ganz $[0, \max_{j \in I_i} \sqrt{\delta_j}) \times U_i^2$ und somit

$$\sum_{j \in I_i} \psi_j \cdot 2s\ddot{\chi}_{\delta_j}(t) \cdot (h(\xi) - k(\xi)) \lesssim 1. \tag{3.12}$$

Der zweite Summand in Gl.(3.11) erfüllt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\operatorname{tr}_{\gamma_t}(\gamma_0) - n + 1| &= |\operatorname{tr}_{\gamma_t}(\gamma_0) - \operatorname{tr}_{\gamma_0}(\gamma_0)| \\
&\lesssim \|\gamma_t - \gamma_0\|_{\gamma_0} \cdot \|\gamma_0\|_{\gamma_0} \\
&\lesssim \max_{j \in I_i} \sqrt{\delta_j}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Für genügend kleine $(\delta_j)_{j \in I_i}$ ist daher

$$|\operatorname{tr}_{\gamma_t}(\gamma_0) - n + 1| \leq \frac{1}{2}$$

oder

$$2C \cdot \operatorname{tr}_{\gamma_t}(\gamma_0) \geq 2\Big(n - \frac{3}{2}\Big)C. \tag{3.14}$$

Die Gleichungen (3.12) und (3.14) ergeben zusammen

$$-\operatorname{tr}_{\gamma_t}(\ddot{\gamma}_t) \gtrsim C, \tag{3.15}$$

falls C auf U_i^2 genügend groß ist.[2] Insgesamt gilt nach Gl.(3.7), (3.9), (3.10) und (3.15)

$$\mathrm{scal}_\gamma \gtrsim C, \tag{3.16}$$

sofern C auf U_i^2 genügend groß ist.

Die Familien g_0, h und k stellen in den Gleichungen (3.15) und (3.16) eine Bedingung an C auf U_i^2. Durch Wiederholung der Rechnung für jede der Mengen $U_{\eta_j}^{2,g(\xi)}, j \in \mathbb{N}$ kommen noch weitere – jedoch endlich viele! – Bedingungen an C auf U_i^2 dazu. Es gilt nämlich $i \in I_j$ genau dann, wenn $j \in I_i$. Deshalb gibt es eine positive glatte Funktion $C_0' \in C^\infty(\partial M)$, sodass C_0' auf allen Randstücken $U_j^2, j \in \mathbb{N}$ genügend groß im Sinne der obigen Rechnung ist. Es ist noch einmal zu betonen, dass C_0' nur von den Familien g_0, h und k abhängt.
Nachdem $C \geq C_0'$ gewählt ist, werden im Verlauf der Rechnung an jede der Zahlen $\delta_j, j \in I_i$ und insbesondere an δ_i endlich viele Bedingungen gestellt, um die Abschätzung aus Gl.(3.16) zu erhalten. Bei der Wiederholung der Rechnung für jede der Mengen $U_{\eta_j}^{2,g(\xi)}, j \in \mathbb{N}$ kommen mit dem gleichen Argument wie gerade nur endlich viele Bedingungen an δ_i hinzu. Insgesamt erhält man das folgende Resultat:

Sei $C \in C^\infty(\partial M), C \geq C_0'$. Dann existiert eine Folge von positiven Konstanten $(m_i)_{i\in\mathbb{N}} = m_i\big(g_0|_{U_i^2}, h|_{U_i^2}, k|_{U_i^2}\big)$, sodass für genügend kleine $\delta = (\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{scal}_\gamma \geq m_i \cdot C \quad \textit{auf} \quad [0, \max_{j\in I_i} \sqrt{\delta_j}) \times U_i^2.$$

Auf Grundlage dieser Aussage kann nachgeprüft werden, dass

$$C_0 \colon \partial M \to \mathbb{R}\ ,\ C_0 = C_0' + \sum_{i\in\mathbb{N}} 2\psi_i \cdot \max_{j\in I_i}\Big(m_j^{-1} \cdot \max\big\{|\sigma(p)| : p \in A_j\big\}\Big)$$

eine gesuchte Funktion wie in der Proposition ist. Dafür muss man sich nur klar machen, dass $C_0 \geq C_0'$ ist und dass für jedes feste $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$C_0 \geq 2 \cdot m_i^{-1} \cdot \max\big\{|\sigma(p)| : p \in A_i\big\} \quad \text{auf } U_i^2.$$

4.Schritt: Zuletzt müssen noch die Bedingungen $(a)-(e)$ behandelt werden, wobei $(a), (c)$ und (e) aus der Definition der Metriken $f^\delta(\xi, s)$ offensichtlich sind. Die zweite Fundamen-

[2]Genaue Begründung: Nach Gl.(3.12) und (3.14) gibt es eine Konstante $m > 0$, sodass

$$-\,\mathrm{tr}_{\gamma_t(p)}(\ddot{\gamma}_t(p)) \geq -m + C(p)$$

für alle $p \in U_i^2$. Unter der Bedingung $C \geq m+1$ auf U_i^2 gilt dann $-m + C(p) \geq \frac{1}{m+1}C(p)$ für alle $p \in U_i^2$. Dies folgt etwa mit der Tatsache, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -m + x - \frac{1}{m+1}x$ monoton wachsend ist.

talform des Randes bezüglich $f^\delta(\xi,s)$ ist nach Gl.(3.3) gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_{f^\delta(\xi,s)} = -\frac{1}{2}\dot{f}^\delta(\xi,s)_0 &= h(\xi) - s\sum_{i\in\mathbb{N}}\psi_i\cdot\dot{\chi}_{\delta_i}(0)\cdot(h(\xi)-k(\xi))\\ &= h(\xi) - s\sum_{i\in\mathbb{N}}\psi_i\cdot(h(\xi)-k(\xi))\\ &= (1-s)h(\xi)+sk(\xi) = (1-s)\mathrm{II}_{g(\xi)}+sk(\xi),\end{aligned}$$

da $\chi_{\delta_i}(t) = t$ für alle $t \leq \frac{1}{20}\delta_i$. Die C-Normalitätsbedingung (3.4) wird durch ebenso einfache Rechnung bestätigt: Ist $i \in \mathbb{N}$ und $t \leq \frac{1}{20}\min_{j\in I_i}\delta_j$, so gilt auf U_i^2:

$$\begin{aligned}f^\delta(\xi,s)_t &= (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + \sum_{i\in\mathbb{N}}\psi_i\cdot 2s\chi_{\delta_i}(t)\cdot(h(\xi)-k(\xi))\\ &= (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + \sum_{i\in\mathbb{N}}\psi_i\cdot 2st\cdot(h(\xi)-k(\xi))\\ &= (1-Ct^2)\cdot g_0(\xi) - 2t\cdot h(\xi) + 2st\cdot(h(\xi)-k(\xi))\\ &= g_0(\xi) - 2t((1-s)h(\xi)+sk(\xi)) - Ct^2\cdot g_0(\xi)\\ &= f^\delta(\xi,s)_0 - 2t\cdot\mathrm{II}_{f^\delta(\xi,s)} - Ct^2\cdot f^\delta(\xi,s)_0.\end{aligned}$$

□

Mithilfe von Proposition 3.2 und Proposition 3.10 kann das Endresultat dieser Arbeit bewiesen werden. In seiner Formulierung treten zwei Hilfsfunktionen $S_1, S_2\colon [0,1]\to[0,1]$ auf. Sie sind definiert durch

$$S_1(t) = \begin{cases} 1, & 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 2(1-t), & \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases} \quad\text{und}\quad S_2(t) = \begin{cases} 1-2t, & 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}.$$

Satz 3.11 *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und sei*

$$g\colon K\to\mathscr{R}_{>\sigma}(M)$$

eine stetige Familie von Riemannschen Metriken, deren Skalarkrümmungen größer als σ sind. Sei $k\colon K\to C^\infty(\partial M; T^*\partial M\otimes T^*\partial M)$ eine stetige Familie von symmetrischen $(0,2)$-Tensorfeldern mit $\frac{1}{n-1}\operatorname{tr}_{g_0}(k(\xi))\leq H_{g(\xi)}$ für alle $\xi\in K$.

Dann gibt es eine glatte Funktion $C_0\in C^\infty(\partial M), C_0>0$ derart, dass für jede glatte Funktion $C\in C^\infty(\partial M)$ mit $C\geq C_0$ und jede Umgebung $\mathscr{U}$ von ∂M eine stetige Abbildung

$$f\colon K\times[0,1]\to\mathscr{R}_{>\sigma}(M)$$

existiert, sodass für alle $\xi\in K$ und alle $s\in[0,1]$ gilt:

(a) $f(\xi,0)=g(\xi)$;

(b) $f(\xi,1)$ *ist C-normal;*

(c) $f(\xi,s)|_{\partial M} = g(\xi)|_{\partial M}$, *also insbesondere* $f(\xi,s)_0 = g(\xi)_0$;

(d) $\mathrm{II}_{f(\xi,s)} = S_1(s)\mathrm{II}_{g(\xi)} + (1 - S_1(s))k(\xi)$, *also insbesondere* $\mathrm{II}_{f(\xi,1)} = k(\xi)$*;*

(e) falls $g(\xi)$ $\widetilde{C}$*-normal ist, so ist* $f(\xi, s)$ *eine* C_s*-normale Metrik, wobei* $C_s = S_2(s)\widetilde{C} + (1 - S_2(s))C$*;*

(f) $\ddot{f}(\xi, s)_0 = S_2(s)\ddot{g}(\xi)_0 - 2(1 - S_2(s))Cg(\xi)_0$*;*

(g) $f(\xi, s)_0^{(\ell)} = S_2(s) \cdot g(\xi)_0^{(\ell)}$ *für alle* $\ell \geq 3$*;*

(h) $f(\xi, s) = g(\xi)$ *auf* $M \setminus \mathscr{U}$.

Beweis. Sei $\mathscr{U} \subset M$ eine Umgebung von ∂M. Der Beweis überträgt sich nahezu Wort für Wort aus [1, Theorem 27]. Sei $C_0 \in C^\infty(\partial M), C_0 > 0$ so groß, dass die Aussage aus Proposition 3.10 für die Familien $g_0(\xi) := g(\xi)_0, h(\xi) := \mathrm{II}_{g(\xi)}$ und $k(\xi)$ erfüllt ist. Nach möglichem Vergrößern von C_0 existiert gemäß Proposition 3.2 zu jeder glatten Funktion $C \in C^\infty(\partial M)$ mit $C \geq C_0$ eine stetige Abbildung

$$f_1 \colon K \times [0, 1] \to \mathscr{R}_{>\sigma}(M),$$

sodass für alle $\xi \in K$ und $s \in [0, 1]$ folgende Bedingungen gelten:

(i) $f_1(\xi, 0) = g(\xi)$;

(ii) $f_1(\xi, 1)$ ist C-normal;

(iii) $f_1(\xi, s)|_{\partial M} = g(\xi)|_{\partial M}$ und $\mathrm{II}_{f_1(\xi,s)} = \mathrm{II}_{g(\xi)}$;

(iv) $\ddot{f}_1(\xi, s)_0 = (1 - s)\ddot{g}(\xi)_0 - 2sCg(\xi)_0$;

(v) $f_1(\xi, s)_0^{(\ell)} = (1 - s)g(\xi)_0^{(\ell)}$ für alle $\ell \geq 3$;

(vi) $f_1(\xi, s) = g(\xi)$ auf $M \setminus \mathscr{U}$.

Aufgrund von Punkt (ii) und (iii) kann Proposition 3.10 mit derselben Funktion C_0 angewendet werden. Man erhält eine stetige Abbildung

$$f_2 \colon K \times [0, 1] \to \mathscr{R}_{>\sigma}(M),$$

sodass für alle $\xi \in K$ und $s \in [0, 1]$ gilt:

(vii) $f_2(\xi, 0) = f_1(\xi, 1)$;

(viii) $f_2(\xi, s)$ ist C-normal;

(ix) $f_2(\xi, s)|_{\partial M} = f_1(\xi, 1)|_{\partial M} = g(\xi)|_{\partial M}$;

(x) $\mathrm{II}_{f_2(\xi,s)} = (1 - s)\mathrm{II}_{f_1(\xi,1)} + sk(\xi) = (1 - s)\mathrm{II}_{g(\xi)} + sk(\xi)$;

(xi) $f_2(\xi, s) = f_1(\xi, 1) = g(\xi)$ auf $M \setminus \mathscr{U}$.

Die Verkettung von f_1 und f_2 bezüglich des s-Parameters liefert eine gesuchte Abbildung f. □

Appendix A

Parametrisierte Flüsse

Die Appendizes dokumentieren, wie sich zwei grundlegende Resultate der Analysis – nämlich der Fundamentalsatz für Flüsse und der Umkehrsatz – für Familien von Vektorfeldern beziehungsweise Funktionen verallgemeinern lassen. Beide Appendizes bauen auf einer parametrisierten Version des Banachschen Fixpunktsatzes auf. Die hier geführten Beweise sind eine Zusammenstellung aus dem Buch von Lee [9] und dem Analysis 2-Skript von Grieser [10].

Der parametrisierte Fundamentalsatz für Flüsse in Appendix A wird zunächst für Familien von Vektorfeldern auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (in Satz A.4) und anschließend für solche auf Mannigfaltigkeiten bewiesen (in Satz A.5). Im ersten Fall bedeutet dies, sich mit der Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zu beschäftigen. Als Hinweis zur Notation bezeichnet $\|\cdot\|$ von hier an die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Satz A.1 ***(Banachscher Fixpunktsatz mit Parametern)***
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, Y ein topologischer Raum und

$$T\colon Y \times X \to X$$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- ▷ *Es existiert eine Konstante $L < 1$, sodass*

  $$d(T(y, x_1), T(y, x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

  für alle $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$;

- ▷ *Für jedes $x \in X$ ist $T(\cdot, x)\colon Y \to X$ stetig.*

Dann besitzt die Abbildung $T(y, \cdot)\colon X \to X$ für jedes $y \in Y$ genau einen Fixpunkt p_y, und die Abbildung $Y \to X$, $y \mapsto p_y$ ist stetig.

Beweis. (nach [10, Satz 8.3.2]) Der erste Teil der Aussage ist der bekannte (unparametrisierte) Banachsche Fixpunktsatz. Daher wird nur die Stetigkeit der Abbildung $Y \to X$, $y \mapsto p_y$ bewiesen: Für alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} d(p_{y_1}, p_{y_2}) &= d(p_{y_1}, T(y_2, p_{y_2})) \\ &\leq d(p_{y_1}, T(y_2, p_{y_1})) + d(T(y_2, p_{y_1}), T(y_2, p_{y_2})) \\ &\leq d(p_{y_1}, T(y_2, p_{y_1})) + L \cdot d(p_{y_1}, p_{y_2}) \end{aligned}$$

oder

$$(1 - L) \cdot d(p_{y_1}, p_{y_2}) \leq d(p_{y_1}, T(y_2, p_{y_1})).$$

Wegen $L < 1$ folgt hieraus

$$d(p_{y_1}, p_{y_2}) \leq \frac{1}{1 - L} \cdot d(p_{y_1}, T(y_2, p_{y_1})).$$

Ist nun $y \in Y$ und $(y_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein gegen y konvergentes Netz in Y, so konvergiert das Bildnetz $(T(y_\alpha, p_y))_{\alpha \in D}$ gegen $T(y, p_y) = p_y$ aufgrund der Stetigkeit von $T(\cdot, p_y)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\beta \in D$, sodass $T(y_\alpha, p_y) \in B_X(p_y, (1-L)\varepsilon)$ für alle $\alpha \geq \beta$. Hierbei notiert $B_X(\cdot, \cdot)$ einen d-offenen Ball in X. Für alle $\alpha \geq \beta$ gilt

$$d(p_y, p_{y_\alpha}) \leq \frac{1}{1 - L} \cdot d(p_y, T(y_\alpha, p_y)) < \varepsilon$$

beziehungsweise $p_{y_\alpha} \in B_X(p_y, \varepsilon)$. Da die d-offenen Bälle eine Umgebungsbasis von p_y bilden, ist die Abbildung $y \mapsto p_y$ netzstetig und somit stetig in y. □

Für den Beweis von Satz A.4 werden zwei Hilfsaussagen benötigt.

Lemma A.2 *Sei (X, d_X) ein kompakter metrischer Raum, K ein kompakter Hausdorffraum und $f \colon K \times X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen metrischen Raum (Y, d_Y).*
Dann ist $f(\xi, \cdot) \colon X \to Y$ für jedes $\xi \in K$ gleichmäßig stetig. Mehr noch existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$ und alle $\xi \in K$ gilt:

$$d_Y(f(\xi, x_1), f(\xi, x_2)) < \varepsilon.$$

Die Zahl $\delta > 0$ kann also uniform in ξ gewählt werden.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $\xi_0 \in K$ und jedes $x_0 \in X$ gibt es eine offene Umgebung $\xi_0 \in F_{\xi_0} \subset K$ und ein $\delta_{\xi_0, x_0} > 0$, sodass

$$d_Y(f(\xi, x), f(\xi_0, x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \xi \in F_{\xi_0} \text{ und } x \in B_X(x_0, \delta_{\xi_0, x_0}).$$

Da der Raum $K \times X$ kompakt ist, erlaubt seine offene Überdeckung durch die Mengen $F_{\xi_0} \times B_X(x_0, \delta_{\xi_0, x_0}/2)$ eine endliche Teilüberdeckung

$$K \times X = \Big(F_{\xi_0^1} \times B_X\big(x_0^1, \delta_{\xi_0^1, x_0^1}/2\big)\Big) \cup \cdots \cup \Big(F_{\xi_0^l} \times B_X\big(x_0^l, \delta_{\xi_0^l, x_0^l}/2\big)\Big).$$

Setze $\delta := \frac{1}{2}\min\{\delta_{\xi_0^1,x_0^1},\ldots,\delta_{\xi_0^l,x_0^l}\}$. Sei $\xi \in K$ und seien $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1,x_2) < \delta$. Ohne Einschränkung gelte $(\xi, x_1) \in F_{\xi_0^1} \times B_X(x_0^1, \delta_{\xi_0^1,x_0^1}/2)$. Dann ist

$$d_X(x_2,x_0^1) \le d_X(x_0^1,x_1) + d_X(x_1,x_2) < \frac{1}{2}\delta_{\xi_0^1,x_0^1} + \delta \le \delta_{\xi_0^1,x_0^1},$$

also $x_2 \in B_X(x_0^1, \delta_{\xi_0^1,x_0^1})$, und somit

$$\begin{aligned} d_Y(f(\xi,x_1), f(\xi,x_2)) &\le d_Y(f(\xi,x_1), f(\xi_0^1,x_0^1)) + d_Y(f(\xi_0^1,x_0^1), f(\xi,x_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Das zweite Lemma ist eine Variante der differentiellen Gronwall-Ungleichung.

Lemma A.3 *Sei $0 \in I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion mit $u(0) = 0$. Falls*

$$\|\dot u(t)\| \le E \cdot \|u(t)\| + B \quad \textit{für alle } t \in I,$$

wobei $E, B > 0$ Konstanten sind, so gilt

$$\|u(t)\| \le \frac{B}{E}\big(e^{E|t|} - 1\big) \quad \textit{für alle } t \in I.$$

Beweis. Seien $E, B > 0$, und es gelte $\|\dot u(t)\| \le E\cdot\|u(t)\| + B$ für alle $t \in I$. Auf der offenen Menge $\{\|u(t)\| > 0\}$ ist $\|u\|$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\| &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u(t), u(t)\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}\langle u(t), u(t)\rangle^{-1/2}\big(2\langle u(t), \dot u(t)\rangle\big) \\ &\le \frac{1}{2}\|u(t)\|^{-1}\big(2\|u(t)\|\cdot\|\dot u(t)\|\big) = \|\dot u(t)\| \\ &\le E\cdot\|u(t)\| + B. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Ungleichung von Cauchy-Schwarz verwendet. Ist nun $t_0 > 0$ ein Zeitpunkt mit $\|u(t_0)\| > 0$ und ist $a = \sup\{0 \le t < t_0 : u(t) = 0\}$, so gilt aus Stetigkeitsgründen $u(a) = 0$ und $\|u\| > 0$ auf $(a, t_0]$. Die differentielle Gronwall-Ungleichung, angewendet auf die Funktion $\|u\| + B/E$ im Intervall $[a, t_0]$, liefert

$$\|u(t_0)\| + \frac{B}{E} \le \Big(\|u(a)\| + \frac{B}{E}\Big)e^{E(t_0-a)} \le \frac{B}{E}e^{Et_0}$$

oder

$$\|u(t_0)\| \le \frac{B}{E}\big(e^{Et_0} - 1\big).$$

Der Fall $t_0 < 0$ lässt sich analog behandeln. Auf der Menge $\{u(t) = 0\}$ ist die Ungleichung ohnehin erfüllt. □

Satz A.4 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, K ein kompakter Hausdorffraum und*

$$V\colon K \to C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$$

eine stetige Familie von Vektorfeldern. Dann existieren zu jedem $p \in U$ eine offene Umgebung $p \in U_0 \subset U$ und ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$, sodass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}^i(t) &= V^i(\xi)(y^1(t),\ldots,y^n(t)), \quad && i = 1,\ldots,n, \\ y^i(0) &= x_0^i, && i = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{A.1}$$

für jedes $\xi \in K$ und jedes $x_0 \in U_0$ eine eindeutige Lösung $y_{\xi,x_0}\colon I \to U$ besitzt, und sodass die Flussabbildung

$$\theta\colon K \to C^\infty(I \times U_0;U)\ ,\ \theta(\xi)(t,x_0) = y_{\xi,x_0}(t)$$

wohldefiniert und stetig ist. Zu gegebenen $\xi \in K$ und $x_0 \in U$ stimmen je zwei lokale Lösungen des Systems (A.1) *auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.*

Beweis. Sei $p \in U$. Der Beweis wird in drei Schritten geführt:

1.Schritt: (nach [10, Satz 8.3.4]) Zu Beginn zeigt der Banachsche Fixpunktsatz mit Parametern A.1 die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen y_{ξ,x_0}, die auf einem gewissen Intervall I definiert sind, und er zeigt die Stetigkeit der Abbildung $(\xi,t,x_0) \mapsto y_{\xi,x_0}(t)$. In der Vorbereitung auf seine Anwendung sei $R > 0$ so, dass $B(p,3R) \subset U$. Aufgrund der Stetigkeit von $V\colon K \to C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ und der Kompaktheit von K existieren die Maxima

$$C := \max_{i,j=1,\ldots,n} \max\left\{ \left| \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^j}(y) \right| : \xi \in K, y \in \overline{B}(p,2R) \right\}$$

und

$$M := \max\left\{ \|V(\xi)(y)\| : \xi \in K, y \in \overline{B}(p,2R) \right\}.$$

Gemäß dem Schrankensatz ist

$$\|V(\xi)(y_1) - V(\xi)(y_2)\| \leq \Big(\sup_{\substack{\xi \in K \\ y \in \overline{B}(p,2R)}} \|\mathrm{d}_y V(\xi)\|_{\mathrm{op}} \Big) \cdot \|y_1 - y_2\|$$

für alle $\xi \in K$ und $y_1, y_2 \in \overline{B}(p,2R)$. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für alle $\xi \in K$ und $y \in \overline{B}(p,2R)$ gilt (ohne Beweis der ersten Ungleichung)

$$\|\mathrm{d}_y V(\xi)\|_{\mathrm{op}} \leq \|\mathrm{d}_y V(\xi)\| \leq nC,$$

sodass

$$\|V(\xi)(y_1) - V(\xi)(y_2)\| \leq nC \cdot \|y_1 - y_2\|$$

für alle $\xi \in K$ und $y_1, y_2 \in \overline{B}(p,2R)$. Sei nun $T_0 > 0$ mit $MT_0 < R$ und $L := nCT_0 < 1$.

Zudem sei $U_0 := B(p,R), I := (-T_0, T_0)$ und

$$\begin{aligned} X &:= \big(C^0\big(I; \overline{B}(p,2R)\big), \|\cdot\|_\infty\big), \\ Y &:= K \times U_0. \end{aligned}$$

Nachfolgend wird Schritt um Schritt gezeigt, dass sich der Banachsche Fixpunktsatz mit Parametern auf die Abbildung

$$T\colon Y \times X \to X \ , \ T(\xi, x_0, y)(t) = x_0 + \int_0^t V(\xi)(y(s)) \,\mathrm{d}s$$

anwenden lässt:

- ▷ X ist ein vollständiger metrischer Raum: Bekannt. Hier ist die Vollständigkeit von $\overline{B}(p,2R)$ zentral.

- ▷ T ist wohldefiniert: Für alle $(\xi, x_0) \in Y$ und $y \in X$ und alle $t \in I$ gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} \|T(\xi,x_0,y)(t) - p\| &\leq \|T(\xi,x_0,y)(t) - x_0\| + \|x_0 - p\| \\ &< \|\int_0^t V(\xi)(y(s)) \,\mathrm{d}s\| + R \\ &\leq \int_0^t \|V(\xi)(y(s))\| \,\mathrm{d}s + R \\ &\leq MT_0 + R < 2R. \end{aligned}$$

  Die Stetigkeit von $T(\xi, x_0, y)$ für feste $(\xi, x_0, y) \in Y \times X$ ist klar. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $T(\xi, x_0, y)$ sogar stetig differenzierbar.

- ▷ T erfüllt eine Lipschitz-Bedingung: Für alle $(\xi, x_0) \in Y$ und alle $y_1, y_2 \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \|T(\xi,x_0,y_1) - T(\xi,x_0,y_2)\|_\infty &= \sup_{t\in I} \left\| \int_0^t V(\xi)(y_1(s)) \,\mathrm{d}s - \int_0^t V(\xi)(y_2(s)) \,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \sup_{t\in I} \int_0^t \|V(\xi)(y_1(s)) - V(\xi)(y_2(s))\| \,\mathrm{d}s \\ &\leq \sup_{t\in I} \int_0^t nC \cdot \|y_1(s) - y_2(s)\| \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{T_0} nC \cdot \|y_1(s) - y_2(s)\| \,\mathrm{d}s \\ &\leq nCT_0 \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty = L \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

  Nach Konstruktion ist $L < 1$, und L hängt nicht von ξ (und x_0) ab.

- ▷ Für jedes $y \in X$ ist $T(\cdot, y)\colon Y \to X$ stetig: Sei $y \in X$ und $(\xi, x_0) \in Y$. Für alle $(\xi', x_0') \in Y$ gilt

$$\begin{aligned}
&\|T(\xi,x_0,y) - T(\xi',x_0',y)\|_\infty \\
&\quad = \sup_{t\in I}\left\| x_0 + \int_0^t V(\xi)(y(s))\,\mathrm{d}s - x_0' - \int_0^t V(\xi')(y(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\quad \le \|x_0 - x_0'\| + \sup_{t\in I}\int_0^t \|V(\xi)(y(s)) - V(\xi')(y(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\quad \le \|x_0 - x_0'\| + T_0 \cdot \max_{y\in\overline{B}(p,2R)} \|V(\xi)(y) - V(\xi')(y)\|.
\end{aligned}$$

  Ähnlich wie im Beweis von Satz A.1 lässt sich mithilfe dieser Abschätzung die (Netz-)Stetigkeit von $T(\cdot, y)$ zeigen. Natürlich ist die Stetigkeit von V dabei essentiell.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz mit Parametern besitzt die Abbildung $T(\xi, x_0, \cdot)$ für jede Wahl von Parametern und Anfangswerten $(\xi, x_0) \in Y$ einen eindeutigen Fixpunkt $y_{\xi,x_0} \in X$, d.h. y_{ξ,x_0} ist eine stetige Funktion $y_{\xi,x_0}\colon I \to \overline{B}(p, 2R)$ mit

$$y_{\xi,x_0}(t) = x_0 + \int_0^t V(\xi)(y_{\xi,x_0}(s))\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist y_{ξ,x_0} stetig differenzierbar, und y_{ξ,x_0} löst das Anfangswertproblem (A.1).
Darüber hinaus ist die Abbildung $Y \to X, (\xi, x_0) \mapsto y_{\xi,x_0}$ nach Satz A.1 stetig. Wegen der Stetigkeit der Einsetzungsabbildung $I \times X \to U, (t, y) \mapsto y(t)$ folgt daraus die Stetigkeit von

$$K \times I \times U_0 \to U\ ,\ (\xi, t, x_0) \mapsto y_{\xi,x_0}(t).$$

2.Schritt: (nach [9, Theorem D.5]) Als nächstes wird bewiesen, dass jede stetige Flussabbildung

$$\theta\colon K \to C^0(I \times U_0; U)$$

der Familie V für jedes $\xi \in K$ partiell differenzierbar in den x_0-Koordinaten ist und dass alle Abbildungen

$$K \times I \times U_0 \to \mathbb{R}^n\ ,\ (\xi, t, x_0) \mapsto \frac{\partial\theta(\xi)}{\partial x^i}(t, x_0), \quad i = 1, \dots, n$$

stetig sind. Sei also θ eine solche Abbildung. Vorweg ist die Existenz der partiellen t-Ableitung nach Voraussetzung klar, und die Stetigkeit von

$$K \times I \times U_0 \to \mathbb{R}^n\ ,\ (\xi, t, x_0) \mapsto \frac{\partial\theta(\xi)}{\partial t}(t, x_0) = V(\xi)\big(\theta(\xi)(t, x_0)\big)$$

folgt aus der Stetigkeit von V und θ. Für den Beweis der gewünschten Differenzierbarkeits- und Stetigkeitsaussagen genügt es, für jeden beliebigen Punkt (t_1, x_1) aus $I \times U_0$ eine offene Umgebung $x_1 \in U_1 \subset U_0$ und ein offenes Intervall $t_1 \in I_1 \subset I$ zu finden, sodass die Aussagen auf $K \times I_1 \times U_1$ gültig sind.

In diesem Zusammenhang ist eine weitere Tatsache von Bedeutung: Im ersten Beweisschritt wurden Lösungen des Anfangswertproblems (A.1) konstruiert, deren Orbits in einer kompakten und konvexen Teilmenge von U liegen. Beliebige Lösungen erfüllen diese Eigenschaft nicht global, allerdings noch lokal. Dies wird im nächsten Abschnitt präzisiert. Im Folgenden sei $(t_1, x_1) \in I \times U_0$ und I_1 ein offenes Intervall mit $0, t_1 \in I_1$ und $\overline{I_1} \subset I$. Für jedes $\xi_0 \in K$ und $t_0 \in \overline{I_1}$ sei R_{ξ_0,t_0} ein Radius mit

$$\overline{B}_{\xi_0,t_0} := \overline{B}(\theta(\xi_0)(t_0, x_1), R_{\xi_0,t_0}) \subset U.$$

Wegen der Stetigkeit von θ existieren bei gegebenen $(\xi_0, t_0) \in K \times \overline{I_1}$ eine offene Umgebung $\xi_0 \in F_{\xi_0} \subset K$, ein Radius $r_{\xi_0,t_0} > 0$ mit $B(x_1, 2r_{\xi_0,t_0}) \subset U_0$ und ein offenes Intervall $t_0 \in I_{t_0} \subset I$, sodass

$$\theta(\xi)(t, x_0) \in B_{\xi_0,t_0} \quad \text{für alle } (\xi, t, x_0) \in F_{\xi_0} \times I_{t_0} \times B(x_1, 2r_{\xi_0,t_0}).$$

Entscheidend ist, dass sich der kompakte Raum $K \times \overline{I_1}$ durch endlich viele Mengen $F_{\xi_0^1} \times I_{t_0^1}, \ldots, F_{\xi_0^l} \times I_{t_0^l}$ überdecken lässt. Es werden

$$\begin{aligned} r_1 &:= \min\{r_{\xi_0^1,t_0^1}, \ldots, r_{\xi_0^l,t_0^l}\} \quad \text{und} \\ A_1 &:= \overline{B}_{\xi_0^1,t_0^1} \cup \cdots \cup \overline{B}_{\xi_0^l,t_0^l} \end{aligned}$$

definiert. Dann gilt $\theta(\xi)(t, x_0) \in A_1$ für alle $(\xi, t, x_0) \in K \times I_1 \times B(x_1, 2r_1)$. Da A_1 kompakt ist, existiert das Maximum

$$C_1 := \max_{i,j=1,\ldots,n} \max \left\{ \left| \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^j}(y) \right| : \xi \in K, y \in A_1 \right\}.$$

Wie im ersten Beweisschritt gilt

$$\|V(\xi)(y_1) - V(\xi)(y_2)\| \leq nC_1 \cdot \|y_1 - y_2\|$$

für alle $\xi \in K$ und $y_1, y_2 \in A_1$. Nach dieser Vorbereitung kann die stetige partielle Differenzierbarkeit um den Punkt (t_1, x_1) gezeigt werden. Zu untersuchen sind dabei die Differenzenquotienten

$$(\Delta_h)^i_j(\xi, t_1, x_1) = \frac{\theta^i(\xi)(t_1, x_1 + he_j) - \theta^i(\xi)(t_1, x_1)}{h} \quad , i, j = 1, \ldots, n \tag{A.2}$$

für betragsmäßig genügend kleine $h \in \mathbb{R}$. Um eine rigorose Argumentation zu ermöglichen, werden diese Differenzenquotienten – auch auf einer Umgebung von (t_1, x_1) – in einer matrixwertigen Funktion

$$\Delta_h \colon K \times I_1 \times U_1 \to \mathbb{R}^{n^2}$$

gesammelt. Dabei ist $U_1 := B(x_1, r_1)$. Außerdem ist $0 < |h| < r_1$ fest. Für $1 \leq i, j \leq n$ bildet $(\Delta_h)^i_j(\xi, t_1, x_1)$ aus Gl.(A.2) die (i, j)-Komponente von Δ_h, ausgewertet in (ξ, t_1, x_1). Die Funktion $\Delta_h(\xi, t, \cdot)$ soll also eine Approximation an die Jacobi-Matrix von $\theta(\xi)(t, \cdot)$ sein.

Wegen der Stetigkeit von θ ist Δ_h stetig, und Δ_h ist stetig partiell nach t differenzierbar. Zudem lässt sich leicht begründen, dass Δ_h beschränkt ist (auch uniform in h): Für alle $(\xi, t, x_0) \in K \times I_1 \times U_1$ und alle $1 \leq j \leq n$ folgt aus den Identitäten

$$\begin{aligned} \theta(\xi)(t, x_0 + he_j) &= x_0 + he_j + \int_0^t V(\xi)\big(\theta(\xi)(s, x_0 + he_j)\big)\, \mathrm{d}s, \\ \theta(\xi)(t, x_0) &= x_0 + \int_0^t V(\xi)\big(\theta(\xi)(s, x_0)\big)\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

die Differentialungleichung

$$\begin{aligned} &\|\theta(\xi)(t, x_0 + he_j) - \theta(\xi)(t, x_0)\| \\ &\quad\leq\ |h| + \int_0^t \big\|V(\xi)\big(\theta(\xi)(s, x_0 + he_j)\big) - V(\xi)\big(\theta(\xi)(s, x_0)\big)\big\|\, \mathrm{d}s \\ &\quad\leq\ |h| + nC_1 \int_0^t \|\theta(\xi)(s, x_0 + he_j) - \theta(\xi)(s, x_0)\|\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Die integrale Gronwall-Ungleichung gibt

$$\|\theta(\xi)(t, x_0 + he_j) - \theta(\xi)(t, x_0)\| \leq |h| \cdot e^{nC_1 t} \leq |h| \cdot e^{nC_1 T} = |h| \cdot e^{L_1}$$

mit $T_0 := \sup(I \cup -I)$ und $L_1 := nC_1 T_0$. Daher gilt

$$|(\Delta_h)^i_j(\xi, t, x_0)| \leq e^{L_1}$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Hieraus folgt

$$\|\Delta_h(\xi, t, x_0)\| \leq ne^{L_1}. \tag{A.3}$$

Das Ziel der nachfolgenden Rechnungen ist es, mithilfe einer Differentialungleichung von $\partial\Delta_h/\partial t$ nützliche Abschätzungen an Δ_h für kleine h zu erhalten. Dieser Transfer gelingt durch das Gronwall-Lemma A.3. Die partielle t-Ableitung von Δ_h ist aufgrund des Gleichungssystems (A.1) zugänglicher als Δ_h selbst. Für alle $(\xi, t, x_0) \in K \times I_1 \times U_1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_h)^i_j(\xi, t, x_0) &= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial\theta^i(\xi)}{\partial t}(t, x_0 + he_j) - \frac{\partial\theta^i(\xi)}{\partial t}(t, x_0)\right) \\ &= \frac{1}{h}\Big(V^i(\xi)\big(\theta(\xi)(t, x_0 + he_j)\big) - V^i(\xi)\big(\theta(\xi)(t, x_0)\big)\Big). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Der Mittelwertsatz, angewendet auf die Funktion

$$u_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}\ ,\ u_1(s) = V^i(\xi)\big((1-s)\theta(\xi)(t, x_0) + s\theta(\xi)(t, x_0 + he_j)\big)$$

bei festen $(\xi, t, x_0) \in K \times I_1 \times U_1$, liefert die Existenz eines $c \in (0,1)$ mit $u_1(1) - u_1(0) = \mathrm{d}u_1/\mathrm{d}s(c)$.[1] Unter der Substitution $y_0 = (1-c)\theta(\xi)(t, x_0) + c\theta(\xi)(t, x_0 + he_j)$ und gemäß

[1]Man beachte, dass $\theta(\xi)(t, x_0)$ und $\theta(\xi)(t, x_0 + he_j)$ gemeinsam in einem der konvexen Bälle $B_{\xi^1_0, t^1_0}, \ldots, B_{\xi^l_0, t^l_0}$ liegen. Deshalb ist u_1 definiert.

der Kettenregel ist dies äquivalent zu der Gleichung

$$
\begin{aligned}
&V^i(\xi)\big(\theta(\xi)(t, x_0 + he_j)\big) - V^i(\xi)\big(\theta(\xi)(t, x_0)\big) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0)\big(\theta^k(\xi)(t, x_0 + he_j) - \theta^k(\xi)(t, x_0)\big) \\
&\quad = h \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0)(\Delta_h)^k_j(\xi, t, x_0).
\end{aligned}
$$

Einsetzen in Gl.(A.4) ergibt

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_h)^i_j(\xi, t, x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0)(\Delta_h)^k_j(\xi, t, x_0).
$$

Ist $\widetilde{h} \in \mathbb{R}$ eine weitere Zahl mit $0 < |\widetilde{h}| < r_1$, so gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\big((\Delta_h)^i_j(\xi, t, x_0) - (\Delta_{\widetilde{h}})^i_j(\xi, t, x_0)\big) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0)(\Delta_h)^k_j(\xi, t, x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(\widetilde{y}_0)(\Delta_{\widetilde{h}})^k_j(\xi, t, x_0) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0)\big((\Delta_h)^k_j(\xi, t, x_0) - (\Delta_{\widetilde{h}})^k_j(\xi, t, x_0)\big) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0) - \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(\widetilde{y}_0)\right)(\Delta_{\widetilde{h}})^k_j(\xi, t, x_0). \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

Dabei besitzt $\widetilde{y}_0$ die gleiche Eigenschaft bezüglich $\widetilde{h}$ wie y_0 bezüglich h.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Jede der partiellen Ableitungen $\partial V^i(\xi)/\partial y^k$ ist gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge A_1. Nach Lemma A.2 gibt es sogar ein $\delta > 0$, sodass für alle $y_1, y_2 \in A_1$ mit $\|y_1 - y_2\| < \delta$, alle $\xi \in K$ und alle $1 \leq i, k \leq n$ gilt:

$$
\left|\frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_1) - \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_2)\right| < \varepsilon.
$$

Für $|h|, |\widetilde{h}| < \delta e^{-L_1}/n$ ist

$$
\|y_0 - \theta(\xi)(t, x_0)\| = c\|\theta(\xi)(t, x_0 + he_j) - \theta(\xi)(t, x_0)\| \leq c\,|h|\,\|\Delta_h(\xi, t, x_0)\| < \delta
$$

und $\|\widetilde{y}_0 - \theta(\xi)(t, x_0)\| < \delta$, siehe Gl.(A.3). Daher gilt

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0) - \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(\widetilde{y}_0)\right| \\
&\quad \leq \left|\frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(y_0) - \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(\theta(\xi)(t, x_0))\right| + \left|\frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(\theta(\xi)(t, x_0)) - \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^k}(\widetilde{y}_0)\right| < 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Aus Gl.(A.5) erhält man zusammen mit Gl.(A.3) und der letzten Abschätzung die Differentialungleichung

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}\big(\Delta_h(\xi,t,x_0) - \Delta_{\widetilde{h}}(\xi,t,x_0)\big) \right\| \leq n^2 C_1 \|\Delta_h(\xi,t,x_0) - \Delta_{\widetilde{h}}(\xi,t,x_0)\| + 2\varepsilon n^3 e^{L_1}.$$

Diese Ungleichung ist bei vorgegebenen $(\xi, x_0) \in K \times U_1$ für alle $t \in I_1$ erfüllt. Deshalb ist die Funktion

$$u_2 \colon I_1 \to \mathbb{R}^{n^2}\ ,\ u_2(t) = \Delta_h(\xi,t,x_0) - \Delta_{\widetilde{h}}(\xi,t,x_0)$$

differenzierbar mit $\|\dot{u}_2(t)\| \leq n^2 C_1 \|u_2(t)\| + 2\varepsilon n^3 e^{L_1}$ für alle $t \in I_1$. Zudem lässt sich leicht nachprüfen, dass u_2 der Anfangsbedingung $u_2(0) = 0$ genügt. Sofern $C_1 \neq 0$ ist, folgt aus dem Gronwall-Lemma A.3 mit $E = n^2 C_1$ und $B = 2\varepsilon n^3 e^C$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Delta_h(\xi,t,x_0) - \Delta_{\widetilde{h}}(\xi,t,x_0)\| &\leq \frac{2\varepsilon n e^{L_1}}{C_1}(e^{n^2 C_1 |t|} - 1) \\ &\leq \frac{2\varepsilon n e^{L_1}}{C_1}(e^{n^2 C_1 T_0} - 1) = \frac{2\varepsilon n e^{L_1}}{C_1}(e^{n L_1} - 1). \end{aligned}$$

Im Fall $C_1 = 0$ ist V eine stetige Funktion $V|_{\mathrm{int}(A_1)} \colon K \to \mathbb{R}^n$. Die lokale Lösung θ des Anfangswertproblems (A.1) lässt sich dann explizit angeben, und die stetige partielle Differenzierbarkeit um (t_1, x_1) kann direkt bewiesen werden. Für $C_1 \neq 0$ wurde insgesamt folgende Aussage gezeigt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $h, \widetilde{h} \in \mathbb{R}$ mit $|h|, |\widetilde{h}| < \delta e^{-L_1}/n$ und alle $(\xi, t, x_0) \in K \times I_1 \times U_1$ gilt:

$$\|\Delta_h(\xi,t,x_0) - \Delta_{\widetilde{h}}(\xi,t,x_0)\| \leq \frac{2\varepsilon n e^{L_1}}{C_1}(e^{n L_1} - 1). \tag{A.6}$$

Bei der Reihenfolge der Quantoren kommen die im Anschluss an Gl.(A.5) diskutierte gleichmäßige Stetigkeit und – zum ersten Mal – die uniforme Wahl von δ in ξ zum Tragen. Mit dem Zwischenresultat kann der zweite Beweisschritt abgeschlossen werden: Sei $(h_k)_k$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$. Aus Gl.(A.6) schließt man, dass $(\Delta_{h_k})_k$ eine Cauchy-Folge von Funktionen bezüglich der Supremumsnorm ist. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$ konvergiert $(\Delta_{h_k})_k$ also gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion

$$\Delta \colon K \times I_1 \times U_1 \to \mathbb{R}^{n^2}.$$

Mithilfe von Gl.(A.6) und eines „$\varepsilon/2$-Arguments“ ist ersichtlich, dass die Grenzfunktion nicht von der speziellen Wahl der Nullfolge $(h_k)_k$ abhängt. Somit existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \theta(\xi)}{\partial x^j}(t, x_0) = \lim_{h \to 0} (\Delta_h)_j(\xi,t,x_0) = (\Delta)_j(\xi,t,x_0), \quad j = 1, \ldots, n$$

für alle $(\xi, t, x_0) \in K \times I_1 \times U_1$. Darüber hinaus sind die Abbildungen

$$(\Delta)_j \colon K \times I_1 \times U_1 \to \mathbb{R}^n \ , \ (\Delta)_j(\xi, t, x_0) = \frac{\partial \theta(\xi)}{\partial x^j}(t, x_0), \quad j = 1, \ldots, n$$

stetig. Dies schließt den zweiten Beweisschritt ab.

3.Schritt: (nach [9, Theorem D.5]) Bisher wurde Satz A.4 mit der schwächeren Schlussfolgerung bewiesen, dass

$$\theta \colon K \to C^1(I \times U_0; U)$$

wohldefiniert und stetig ist. Eine höhere Regularität im Ziel der Abbildung kann durch vollständige Induktion erreicht werden. Die dabei zu beweisende Aussage $A(k), k \in \mathbb{N}$ ist Satz A.4 mit der geänderten Passage

„...Dann existieren zu jedem $p \in U$ eine offene Umgebung $p \in U_0 \subset U$ und ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$, sodass das Anfangswertproblem (A.1) *für jedes $\xi \in K$ und jedes $x_0 \in U_0$ eine eindeutige Lösung $y_{\xi,x_0} \colon I \to U$ besitzt, und sodass die Flussabbildung*

$$\theta \colon K \to C^0(I \times U_0; U) \ , \ \theta(\xi)(t, x_0) = y_{\xi,x_0}(t)$$

wohldefiniert und stetig ist. Jede derartige Flussabbildung ist auch als Abbildung

$$\theta \colon K \to C^k(I \times U_0; U)$$

wohldefiniert und stetig.“

Die Aussagen $A(0)$ und $A(1)$ sind mit dem ersten und zweiten Beweisschritt abgehandelt. Es gelte also $A(k)$ für ein beliebiges, aber festes $k \geq 1$. Zu einer stetigen Familie $V \colon K \to C^\infty(U; \mathbb{R}^n)$ von Vektorfeldern und einem Punkt $p \in U$ sei

$$\theta \colon K \to C^0(I \times U_0; U)$$

eine stetige Flussabbildung des Systems (A.1). Die Abbildung

$$K \times I \times U_0 \to \mathbb{R}^n \ , \ (\xi, t, x_0) \mapsto \frac{\partial \theta(\xi)}{\partial t}(t, x_0) = V(\xi)\big(\theta(\xi)(t, x_0)\big)$$

ist stetig partiell differenzierbar nach allen x_0-Koordinaten. Nach dem Satz von Schwarz existiert für alle $1 \leq i, j \leq n$ auch die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \theta^i(\xi)}{\partial x^j}$, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \theta^i(\xi)}{\partial x^j}(t, x_0) &= \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \theta^i(\xi)}{\partial t}(t, x_0) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^l}\big(\theta(\xi)(t, x_0)\big)\frac{\partial \theta^l(\xi)}{\partial x^j}(t, x_0). \qquad \text{(A.7)}\end{aligned}$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} W\colon K &\to C^\infty(U\times\mathbb{R}^{n^2};\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n^2}),\\ W(\xi) &= (W^1(\xi),\dots,W^n(\xi),W_1^1(\xi),\dots,W_n^n(\xi)) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} W^i(\xi)(y,A) &= V^i(\xi)(y), && i=1,\dots,n,\\ W_j^i(\xi)(y,A) &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial V^i(\xi)}{\partial y^l}(y)A_j^l, && i,j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $V\colon K\to C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ ist dies tatsächlich eine stetige Familie von Vektorfeldern. Eine Flussabbildung für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}^i(t) &= W^i(\xi)(y(t),A(t)), & y^i(0) &= x_0^i, & i&=1,\dots,n\\ \dot{A}_j^i(t) &= W_j^i(\xi)(y(t),A(t)), & A_j^i(0) &= A_j^i, & i,j&=1,\dots,n \end{aligned} \tag{A.8}$$

ist gegeben durch

$$\Theta\colon K\to C^0(I\times U_0\times\mathbb{R}^{n^2};U\times\mathbb{R}^{n^2})\ ,\ \Theta(\xi)(t,x_0,A)=\big(\theta(\xi)(t,x_0),\mathrm{d}_{(t,x_0)}\theta(\xi)\cdot A\big),$$

wobei $\mathrm{d}_{(t,x_0)}\theta(\xi)\in\mathbb{R}^{n^2}$ die Jacobi-Matrix bezüglich der x_0-Koordinaten am Punkt (t,x_0) meint. Die Lösungseigenschaft von Θ ist durch Gl.(A.7) begründet. Gemäß der Induktionsvoraussetzung $A(k)$ ist Θ eine wohldefinierte und stetige Abbildung

$$\Theta\colon K\to C^k(I\times U_0\times\mathbb{R}^{n^2};U\times\mathbb{R}^{n^2}).$$

Insbesondere schließt man für $A=I_n$, dass jede der Abbildungen

$$K\times I\times U_0\to\mathbb{R}\ ,\ (\xi,t,x_0)\mapsto\frac{\partial\theta^i(\xi)}{\partial x^j}(t,x_0),\quad i,j=1,\dots,n$$

k-mal stetig partiell differenzierbar ist.[2] Wegen $\frac{\partial\theta(\xi)}{\partial t}(t,x_0)=V(\xi)(\theta(\xi)(t,x_0))$ und der Induktionsvoraussetzung $A(k)$ ist

$$K\times I\times U_0\to\mathbb{R}\ ,\ (\xi,t,x_0)\mapsto\frac{\partial\theta(\xi)}{\partial t}(t,x_0)$$

sowieso k-mal stetig partiell differenzierbar. Dies zusammen zeigt die Aussage $A(k+1)$. Aus der Gültigkeit der Aussage $A(k)$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$ folgt die Existenz einer stetigen Flussabbildung $\theta\colon K\to C^\infty(I\times U_0;U)$.
Es verbleibt die letzte Aussage aus Satz A.4, nach der je zwei lokale Lösungen des Systems (A.1) zu gegebenen $\xi\in K$ und $x_0\in U$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen. Diese Eigenschaft ist aus der Theorie der (unparametrisierten) gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannt. Insgesamt folgt Satz A.4. $\square$

[2]Damit ist folgendes gemeint: Für alle $\xi\in K$ und $i,j=1,\dots,n$ ist $\frac{\partial\theta^i(\xi)}{\partial x^j}$ k-mal (gemischt) partiell differenzierbar nach t und nach den x_0-Koordinaten, und all diese höheren Ableitungen sind als Abbildungen $K\times I\times U_0\to\mathbb{R}$ stetig.

Satz A.5 ***(Fundamentalsatz für parametrisierte Flüsse)***
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit (ohne Rand), K ein kompakter Hausdorffraum und

$$V\colon K \to C^\infty(M;TM)$$

eine stetige Familie von Vektorfeldern. Zu jedem solchen Vektorfeld bezeichne $\gamma_{\xi,p}$ die eindeutige maximale Integralkurve mit $\gamma_{\xi,p}(0) = p \in M$. Dann gilt: Die Teilmenge

$$\mathscr{D} := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M : \gamma_{\xi,p}(t) \text{ ist definiert für alle } \xi \in K\} \subset \mathbb{R} \times M$$

ist offen, und die Abbildung

$$\theta\colon K \to C^\infty(\mathscr{D};M)\ ,\ \theta(\xi)(t,p) = \gamma_{\xi,p}(t)$$

ist wohldefiniert und stetig.

Beweis. (nach [9, Theorem 9.12]) Es genügt zu zeigen, dass die folgende Teilmenge $W \subset \mathscr{D}$ mit $\mathscr{D}$ übereinstimmt:

$$\begin{aligned} W = \{(t,p) \in \mathscr{D} :\ & \text{Es gibt eine Produktumgebung } I \times U \subset \mathscr{D} \text{ von } (t,p) \text{ mit } 0,t \in I, \\ & \text{sodass die eingeschränkte Abbildung } \theta|_{I\times U}\colon K \to C^\infty(I \times U;M) \\ & \text{wohldefiniert und stetig ist.}\} \end{aligned}$$

Da W offen ist und da die Stetigkeit von θ durch Einschränkung auf offene Umgebungen geprüft werden kann, folgt daraus die Behauptung. Der Beweis der Mengengleichheit wird per Widerspruch geführt, d.h. es wird die Existenz eines $(\tau,p_0) \in \mathscr{D} \setminus W$ angenommen. Dabei sei ohne Einschränkung $\tau \geq 0$. Der Fall $\tau < 0$ funktioniert analog.
In den weiteren Betrachtungen sei $t_0 := \inf\{t \geq 0 : (t,p_0) \notin W\}$. Nach Satz A.4 – angewendet in einer lokalen Karte um p_0 – gibt es eine Umgebung von $(0,p_0)$, die vollständig in W enthalten ist. Deshalb ist $t_0 > 0$. Zudem gilt $(t_0,p_0) \in \mathscr{D}$ wegen $t_0 \leq \tau$, und es gilt $(t_0,p_0) \notin W$ wegen der Offenheit von W.
Sei nun $\xi_0 \in K$ und $q_0 := \gamma_{\xi_0,p_0}(t_0)$. Wiederum nach Satz A.4 gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $U_0 \subset M$ von q_0, sodass durch jeden Punkt aus U_0 und für jedes $\xi \in K$ eine Integralkurve von $V(\xi)$ mit der Lebensdauer $(-\varepsilon,\varepsilon)$ existiert, und sodass die Abbildung

$$\theta|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times U_0}\colon K \to C^\infty\big((-\varepsilon,\varepsilon) \times U_0;M\big)$$

wohldefiniert und stetig ist. Danach wird ein Zeitpunkt $0 < t_1 < t_0$ mit $t_1 + \varepsilon > t_0$ und $\gamma_{\xi_0,p_0}(t_1) \in U_0$ ausgewählt. Dies ist möglich aufgrund der Stetigkeit von γ_{ξ_0,p_0}. Ohne, dass es sich in der Notation niederschlägt, hängen U_0, ε und t_1 von ξ_0 ab.
Gemäß der Wahl von t_0 ist $(t_1,p_0) \in W$, d.h. es existieren ein offenes Intervall $0,t_1 \in I_1 \subset \mathbb{R}$ und eine offene Umgebung $p_0 \in U_1 \subset M$, mit denen die Abbildung $\theta|_{I_1\times U_1}\colon K \to C^\infty(I_1 \times U_1;M)$ stetig ist. In der Folge findet man offene Umgebungen $\xi_0 \in F_{\xi_0} \subset K$ und $p_0 \in U_{\xi_0} \subset U_1$, sodass $\gamma_{\xi,p}(t_1) \in U_0$ für alle $\xi \in F_{\xi_0}$ und $p \in U_{\xi_0}$.

Darüber hinaus sei $I_{\xi_0} := (\inf I_1, t_1 + \varepsilon)$. Nach allen vorherigen Überlegungen ist durch

$$\widetilde{\theta}_{\xi_0} \colon F_{\xi_0} \times I_{\xi_0} \times U_{\xi_0} \to M \ ,$$
$$\widetilde{\theta}_{\xi_0}(\xi, t, p) = \begin{cases} \theta(\xi)(t, p), & \inf I_1 < t < t_1 \\ \theta(\xi)\big(t - t_1, \theta(\xi)(t_1, p)\big), & t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon \end{cases}$$

eine Flussabbildung definiert. Aufgrund der Eindeutigkeit von Integralkurven und der Konstruktion aller Umgebungen ist $\widetilde{\theta}_{\xi_0}$ tatsächlich wohldefiniert und unendlich oft stetig partiell differenzierbar. Insbesondere sind die beiden unterschiedenen Fälle kompatibel auf Überlappungen.
Zuletzt lässt sich K durch endlich viele Mengen $F_{\xi_0^1}, \dots, F_{\xi_0^l}$ überdecken. Mit

$$I := I_{\xi_0^1} \cap \cdots \cap I_{\xi_0^l} \quad \text{und}$$
$$U := U_{\xi_0^1} \cap \cdots \cap U_{\xi_0^l}$$

wird durch die Vorschrift

$$\widetilde{\theta}(\xi)(t, p) := \widetilde{\theta}_{\xi_0^i}(\xi, t, p)$$

eine stetige Flussabbildung $\widetilde{\theta} \colon K \to C^\infty(I \times U; M)$ erklärt, wobei $1 \leq i \leq l$ eine beliebige natürliche Zahl mit $\xi \in F_{\xi_0^i}$ ist. Die Wohldefiniertheit folgt erneut aus der Eindeutigkeit von Integralkurven.
Somit gilt $I \times U \subset \mathscr{D}$, und darüber hinaus ist $\theta|_{I \times U} = \widetilde{\theta} \colon K \to C^\infty(I \times U; M)$ wohldefiniert und stetig. Das steht aber im Widerspruch zu $(t_0, p_0) \notin W$. $\square$

Appendix B

Umkehrsatz mit Parametern

Satz B.1 ***(Umkehrsatz mit Parametern)***
Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, K ein kompakter Hausdorffraum und

$$F\colon K \to C^\infty(V;\mathbb{R}^n)$$

eine stetige Familie von glatten Funktionen. Angenommen, alle Abbildungen $F(\xi)$ bilden einen gewissen Punkt $p \in V$ auf denselben Punkt $q \in \mathbb{R}^n$ ab. Sei $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von q. Zuletzt sei $\mathrm{d}_pF(\xi)$ für alle $\xi \in K$ invertierbar.

(a) Dann gibt es (von ξ unabhängige) offene Umgebungen $p \in V_p \subset V$ und $q \in U_q \subset \mathbb{R}^n$, sodass

- ▷ *$F(\xi)\colon V_p \cap F(\xi)^{-1}(U_q) \to U_q$ für alle $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist;*
- ▷ *die Abbildung $K \to C^\infty(U_q, V_p), \xi \mapsto F(\xi)^{-1}$ stetig ist.*

(b) Es gibt eine (von ξ unabhängige) offene Umgebung $p \in V_p \subset V$, sodass

- ▷ *$F(\xi)(V_p)$ für alle $\xi \in K$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist;*
- ▷ *$F(\xi)\colon V_p \to F(\xi)(V_p)$ für alle $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist;*
- ▷ *$F(\xi)(V_p) \subset \mathscr{U}$ für alle $\xi \in K$ gilt.*

Beweis. (nach [9, Theorem C.34]) Zu Teil (a): Eingangs wird in zwei vorbereitenden Schritten gezeigt, dass der Beweis in einer spezielleren Situation genügt.

1. Vorbereitung: Hier wird bewiesen, dass die nachstehende Behauptung B.1.1 die Aussage von Satz B.1(a) impliziert.

B.1.1 *Sei $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ offen, K ein kompakter Hausdorffraum und $F\colon K \to C^\infty(V;\mathbb{R}^n)$ eine stetige Familie von glatten Funktionen. Angenommen, es gilt $F(\xi)(0) = 0$ für alle $\xi \in K$. Zudem sei $\mathrm{d}_0F(\xi)$ für alle $\xi \in K$ invertierbar.*

Dann gibt es (von ξ unabhängige) offene Umgebungen $0 \in V_0 \subset V$ und $0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$, sodass

▷ *$F(\xi)\colon V_0 \cap F(\xi)^{-1}(U_0) \to U_0$ für alle $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist;*

▷ *die Abbildung $K \to C^\infty(U_0, V_0), \xi \mapsto F(\xi)^{-1}$ stetig ist.*

Angenommen, die Behauptung B.1.1 ist wahr. Seien V, K, F, p und q wie in Satz B.1. Für den Beweis der Konklusion von Satz B.1 sei $F_1\colon K \to C^\infty(V_1; \mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$F_1(\xi)(x) = F(\xi)(x+p) - q \quad \text{für alle } \xi \in K \text{ und } x \in V_1 := V - p.$$

Hierbei ist $V_1 = V - p = \{v - p : v \in V\}$. Es gilt $F_1(\xi)(0) = 0$ und $\mathrm{d}_0 F_1(\xi) = \mathrm{d}_p F(\xi)$ für alle $\xi \in K$. Deshalb ist $\mathrm{d}_0 F_1(\xi)$ für alle $\xi \in K$ invertierbar. Nach Behauptung B.1.1 existieren offene Umgebungen $0 \in V_{0,1} \subset V_1$ und $0 \in U_{0,1} \subset \mathbb{R}^n$, sodass F_1 die beiden obigen Aussagen erfüllt.
Wie sich leicht nachprüfen lässt, sind $V_p := V_{0,1} + p$ und $U_q := U_{0,1} + q$ daraufhin gesuchte Umgebungen von p und q: Zum einen ist

$$\begin{aligned} F(\xi)\colon V_p \cap F(\xi)^{-1}(U_q) &\to U_q, \\ F(\xi) &= [y \mapsto y + q] \circ F_1(\xi) \circ [x \mapsto x - p] \end{aligned}$$

für jedes $\xi \in K$ als Komposition von Diffeomorphismen ein Diffeomorphismus, zum anderen ist die Abbildung

$$K \to C^\infty(U_q; V_p)\ ,\ \xi \mapsto F(\xi)^{-1} = F_1(\xi)^{-1}(\bullet - q) + p$$

als Komposition stetiger Abbildungen stetig. Vermittels Translation im Definitions- und Zielbereich kann also ohne Einschränkung $p = 0$ und $F(\xi)(p) = F(\xi)(0) = 0$ für alle $\xi \in K$ angenommen werden.

2. Vorbereitung: Des Weiteren bedeutet auch die Annahme $\mathrm{d}_0 F(\xi) = I_n$ für alle $\xi \in K$ keine Einschränkung. Genauer lässt sich zeigen, dass die Behauptung B.1.1 aus der nächsten Behauptung B.1.2 folgt.

B.1.2 *Sei $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ offen, K ein kompakter Hausdorffraum und $F\colon K \to C^\infty(V; \mathbb{R}^n)$ eine stetige Familie von glatten Funktionen. Angenommen, es gilt $F(\xi)(0) = 0$ für alle $\xi \in K$. Zudem sei $\mathrm{d}_0 F(\xi) = I_n$ für alle $\xi \in K$ die Einheitsmatrix.*

Dann gibt es (von ξ unabhängige) offene Umgebungen $0 \in V_0 \subset V$ und $0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$, sodass

▷ *$F(\xi)\colon V_0 \cap F(\xi)^{-1}(U_0) \to U_0$ für alle $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist;*

▷ *die Abbildung $K \to C^\infty(U_0, V_0), \xi \mapsto F(\xi)^{-1}$ stetig ist.*

Analog zum ersten Vorbereitungsschritt gelte die Behauptung B.1.2. Seien V, K und F wie in B.1.1. Definiere damit

$$F_2\colon K \to C^\infty(V; \mathbb{R}^n)\ ,\ F_2(\xi) = (\mathrm{d}_0 F(\xi))^{-1} \cdot F(\xi).$$

Aufgrund der Cramerschen Regel ist F_2 tatsächlich stetig. Es gilt $F_2(\xi)(0) = 0$ und $\mathrm{d}_0F_2(\xi) = I_n$ für alle $\xi \in K$. Nach Annahme gibt es also offene Umgebungen $0 \in V_{0,2} \subset V$ und $0 \in U_{0,2} \subset \mathbb{R}^n$, sodass die Schlussfolgerungen aus B.1.2 erfüllt sind.
Es bleibt die Aufgabe, geeignete Umgebungen $0 \in V_0 \in V$ und $0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$ für die Familie F zu finden: Wegen der Stetigkeit von $F\colon K \to C^\infty(V; \mathbb{R}^n)$ und der Cramerschen Regel ist

$$K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ , \ (\xi, x) \mapsto (\mathrm{d}_0F(\xi))^{-1} \cdot x$$

eine stetige Abbildung. Deshalb existieren zu jedem $\xi_0 \in K$ offene Umgebungen $\xi_0 \in F_{\xi_0} \subset K$ und $0 \in U_{\xi_0} \subset \mathbb{R}^n$, sodass $(\mathrm{d}_0F(\xi))^{-1} \cdot U_{\xi_0} \subset U_{0,2}$ für alle $\xi \in F_{\xi_0}$. Wie in vorherigen Beweisen lässt sich K durch endlich viele Mengen $F_{\xi_0^1}, \dots, F_{\xi_0^l}$ überdecken. Mit $U_0 := U_{\xi_0^1} \cap \dots \cap U_{\xi_0^l}$ gilt dann $(\mathrm{d}_0F(\xi))^{-1} \cdot U_0 \subset U_{0,2}$ für alle $\xi \in K$.
Hieraus schließt man auf die Inklusion $V_{0,2} \cap F(\xi)^{-1}(U_0) \subset V_{0,2} \cap F_2(\xi)^{-1}(U_{0,2})$ für alle $\xi \in K$ und darauf, dass

$$F_2(\xi)\colon V_{0,2} \cap F(\xi)^{-1}(U_0) \to (\mathrm{d}_0F(\xi))^{-1} \cdot U_0$$

für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist. In der Folge ist

$$F(\xi) = \mathrm{d}_0F(\xi) \cdot F_2(\xi)\colon V_{0,2} \cap F(\xi)^{-1}(U_0) \to U_0$$

für jedes $\xi \in K$ als Komposition von Diffeomorphismen ein Diffeomorphismus. Gleichermaßen ist die Abbildung

$$K \to C^\infty(U_0; V_{0,2}) \ , \ \xi \mapsto F(\xi)^{-1}$$

als Komposition stetiger Abbildungen stetig:

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & C^\infty(U_{0,2}; V_{0,2}) \times C^\infty(U_0; U_{0,2}) & \xrightarrow{\ \circ\ } & C^\infty(U_0; V_{0,2}) \\ \xi & \longmapsto & \big(F_2(\xi)^{-1}, [y \mapsto (\mathrm{d}_0F(\xi))^{-1} \cdot y]\big) & & \end{array} .$$

Also ist B.1.1 für $V_0 := V_{0,2}$ erfüllt.

Beweis von Behauptung B.1.2: Nach den beiden Vorbereitungen soll im weiteren Verlauf $p = 0, F(\xi)(0) = 0$ und $\mathrm{d}_0F(\xi) = I_n$ für alle $\xi \in K$ gelten. Überdies wird ohne Einschränkung angenommen, dass $\mathrm{d}_xF(\xi)$ für alle $\xi \in K$ und $x \in V$ invertierbar ist. Letzteres lässt sich durch die Stetigkeit von F, die Kompaktheit von K und die Tatsache begründen, dass die invertierbaren Matrizen eine offene Teilmenge im Raum der quadratischen Matrizen bilden. Für den Beweis von Behauptung B.1.2 sei

$$H\colon K \to C^\infty(V; \mathbb{R}^n) \ , \ H(\xi)(x) := F(\xi)(x) - x.$$

Wegen $\mathrm{d}_0F(\xi) = I_n$ ist $\mathrm{d}_0H(\xi) = 0$ für alle $\xi \in K$. Mit der Stetigkeit von H und der

Kompaktheit von K folgt die Existenz eines $\delta > 0$, sodass $\overline{B}(0, 2\delta) \subset V$ und

$$\|\mathrm{d}_x H(\xi)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } \xi \in K \text{ und } x \in X := \overline{B}(0, 2\delta).$$

Nach dem Schrankensatz gilt damit $\|H(\xi)(x_1) - H(\xi)(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ für alle $\xi \in K$ und $x_1, x_2 \in X$, vergleiche den ersten Beweisschritt von Satz A.4. Insbesondere erhält man für $x_2 = 0$ die Ungleichung $\|H(\xi)(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| \leq \delta$ für alle $\xi \in K$ und $x \in X$. Sei nun $y \in B(0, \delta)$ und

$$T \colon K \times X \to \mathbb{R}^n \ , \ T(\xi, x) := y - H(\xi)(x).$$

Auf diese Abbildung kann der Banachsche Fixpunktsatz mit Parametern angewendet werden, was kurz nachgeprüft werden soll: Zunächst ist X ein vollständiger metrischer Raum, und es gilt

$$\|T(\xi, x)\| = \|y - H(\xi)(x)\| \leq \|y\| + \|H(\xi)(x)\| < \delta + \delta = 2\delta$$

für alle $\xi \in K$ und $x \in X$. Deshalb ist T eine Abbildung $T \colon K \times X \to X$. Des Weiteren genügt T der Lipschitz-Bedingung

$$\|T(\xi, x_1) - T(\xi, x_2)\| = \|H(\xi)(x_1) - H(\xi)(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

mit der Lipschitz-Konstanten $L := \frac{1}{2} < 1$. Dabei sind $x_1, x_2 \in X$ beliebig. Zuletzt ist

$$T(\cdot, x) \colon K \to X \ , \ \xi \mapsto y - H(\xi)(x)$$

für jedes $x \in X$ stetig aufgrund der Stetigkeit von H. Somit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit Parametern erfüllt, und zu jedem $\xi \in K$ existiert genau ein $x \in X$ mit $T(\xi, x) = x$. Äquivalent dazu ist $F(\xi)(x) = y$. Wegen $T(K \times X) \subset B(0, 2\delta)$ gilt sogar $x \in B(0, 2\delta)$.
Zusammenfassend gibt es für jedes $\xi \in K$ und $y \in U_0 := B(0, \delta)$ genau ein $x \in V_0 := B(0, 2\delta)$ mit $F(\xi)(x) = y$. Daher ist die Abbildung

$$F(\xi) \colon V_0 \cap F(\xi)^{-1}(U_0) \to U_0 \tag{B.1}$$

für jedes $\xi \in K$ bijektiv. Wie im Beweis des unparametrisierten Umkehrsatzes kann man zeigen, dass jede der Abbildungen (B.1) ein Diffeomorphismus ist, siehe [9, Theorem C.34]. Der Banachsche Fixpunktsatz mit Parametern zeigt zugleich, dass die Abbildung

$$K \to V_0 \ , \ \xi \mapsto F(\xi)^{-1}(y) \tag{B.2}$$

für jedes feste $y \in U_0$ stetig ist. Um zu zeigen, dass auch die Abbildung

$$K \times U_0 \to V_0 \ , \ (\xi, y) \mapsto F(\xi)^{-1}(y) \tag{B.3}$$

stetig ist, wird folgende Beobachtung verwendet: Für alle $\xi \in K$ und $x_1, x_2 \in V_0$ gilt

$x_1 - x_2 = F(\xi)(x_1) - F(\xi)(x_2) + H(\xi)(x_2) - H(\xi)(x_1)$. Mit $\|H(\xi)(x_1) - H(\xi)(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ folgt daher

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &\leq \|F(\xi)(x_1) - F(\xi)(x_2)\| + \|H(\xi)(x_2) - H(\xi)(x_1)\| \\ &\leq \|F(\xi)(x_1) - F(\xi)(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \cdot \|F(\xi)(x_1) - F(\xi)(x_2)\|.$$

Im Speziellen findet man

$$\|F(\xi)^{-1}(y_1) - F(\xi)^{-1}(y_2)\| \leq 2 \cdot \|y_1 - y_2\| \tag{B.4}$$

für alle $y_1, y_2 \in U_0$. Seien nun $(\xi_0, y_0), (\xi, y) \in K \times U_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\|F(\xi_0)^{-1}(y_0) - F(\xi)^{-1}(y)\| \\ &\qquad \leq \|F(\xi_0)^{-1}(y_0) - F(\xi)^{-1}(y_0)\| + \|F(\xi)^{-1}(y_0) - F(\xi)^{-1}(y)\| \\ &\qquad \leq \|F(\xi_0)^{-1}(y_0) - F(\xi)^{-1}(y_0)\| + 2 \cdot \|y_0 - y\|.\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von Abbildung (B.2) und aus der Abschätzung (B.4) lässt sich schließen, dass Abbildung (B.3) stetig in (ξ_0, y_0) ist. Als nächstes folgt die Stetigkeit von

$$K \times U_0 \to \mathbb{R}^{n^2}\ ,\ (\xi, y) \mapsto \mathrm{d}_y(F(\xi)^{-1}) = \big(\mathrm{d}_{F(\xi)^{-1}(y)}F(\xi)\big)^{-1}$$

mittels der Darstellung als Komposition stetiger Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccccc} K \times U_0 & \longrightarrow & K \times V_0 & \longrightarrow & \mathrm{GL}(n) & \xrightarrow{(\ )^{-1}} & \mathbb{R}^{n^2} \\ & & & & & & \\ (\xi, y) & \longmapsto & \big(\xi, F(\xi)^{-1}(y)\big) & & & & \\ & & & & & & \\ & & (\xi, x) & \longmapsto & \mathrm{d}_x F(\xi) & & \end{array} .$$

Entsprechende Stetigkeitsaussagen für höhere Ableitungen von $F(\xi)^{-1}$ lassen sich induktiv beweisen. Dafür muss man sich klar machen, dass die partiellen Ableitungen von $F(\xi)^{-1}$ der Ordnung k koordinatenweise rationale Funktionen in den partiellen Ableitungen von $F(\xi)^{-1}$ der Ordnung $\leq k-1$ und den partiellen Ableitungen von $F(\xi)$ sind. Dies soll nicht mehr im Detail diskutiert werden. Insgesamt ist der Beweis von Teil (a) abgeschlossen.

Zu Teil (b): Wähle zwei – nach Teil (a) existente und von ξ unabhängige – offene Umgebungen $p \in V'_p \subset V$ und $q \in U'_q \subset \mathbb{R}^n$, sodass $F(\xi)\colon V'_p \cap F(\xi)^{-1}(U'_q) \to U'_q$ für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist. Ein Kompaktheitsargument, das in ähnlicher Weise bereits häufiger präsentiert wurde, liefert eine Umgebung $p \in V_p \subset V'_p$ mit $F(\xi)(V_p) \subset \mathscr{U} \cap U'_q$ für alle $\xi \in K$. Da die Abbildungen $F(\xi)\colon V'_p \cap F(\xi)^{-1}(U'_q) \to U'_q$ Diffeomorphismen sind, ist $F(\xi)(V_p) \subset \mathbb{R}^n$ für jedes $\xi \in K$ offen und $F(\xi)\colon V_p \to F(\xi)(V_p)$ für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus. Darüber hinaus gilt $F(\xi)(V_p) \subset \mathscr{U}$ für alle $\xi \in K$. $\square$

Korollar B.2 *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) derselben Dimension, sei K ein kompakter Hausdorffraum und sei*

$$F\colon K \to C^\infty(M;N)$$

eine stetige Familie von glatten Funktionen. Angenommen, alle Abbildungen $F(\xi)$ bilden einen gewissen Punkt $p \in M$ auf denselben Punkt $q \in N$ ab. Sei $\mathscr{U} \subset N$ eine offene Umgebung von q. Zuletzt sei $\mathrm{d}_p F(\xi)$ für alle $\xi \in K$ bijektiv.

(a) Dann gibt es (von ξ unabhängige) offene Umgebungen $p \in V_p \subset M$ und $q \in U_q \subset N$, sodass

- ▷ *$F(\xi)\colon V_p \cap F(\xi)^{-1}(U_q) \to U_q$ für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist;*
- ▷ *die Abbildung $K \to C^\infty(U_q, V_p), \xi \mapsto F(\xi)^{-1}$ stetig ist.*

(b) Es gibt eine (von ξ unabhängige) offene Umgebung $p \in V_p \subset M$, sodass

- ▷ *$F(\xi)(V_p)$ für alle $\xi \in K$ offen in N ist;*
- ▷ *$F(\xi)\colon V_p \to F(\xi)(V_p)$ für jedes $\xi \in K$ ein Diffeomorphismus ist;*
- ▷ *$F(\xi)(V_p) \subset \mathscr{U}$ für alle $\xi \in K$ gilt.*

Beweis. Die Aussage folgt durch Anwendung von Satz B.1 in Koordinatenumgebungen von p und q. □

Literaturverzeichnis

[1] C. Bär und B. Hanke. Boundary conditions for scalar curvature. *ArXiv preprint:* `https://arxiv.org/pdf/2012.09127v3.pdf`, 2021.

[2] C. Bär und B. Hanke. Local Flexibility for Open Partial Differential Relations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **75**:1377–1415, 2022.

[3] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds.* Springer, New York, 2. Auflage, 2011.

[4] M. W. Hirsch. *Differential Topology.* Springer, New York, 1976.

[5] J. M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds.* Springer, Cham, 2. Auflage, 2018.

[6] P. W. Michor. *Manifolds of Differentiable Mappings.* Shiva Publ. Ltd., Orpington, Kent, 1980.

[7] R. T. Seeley. Extension of C^∞ functions defined in a half space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:625–626, 1964.

[8] C. Bär, P. Gauduchon, und A. Moroianu. Generalized cylinders in semi-Riemannian and Spin geometry. *Math. Z.*, **249**:545–580, 2005.

[9] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, New York, 2. Auflage, 2012.

[10] D. Grieser. Analysis II. Unveröffentlichte Notizen, `https://uol.de/f/5/inst/mathe/personen/daniel.grieser/Lehre/Skripte/skript-ana2-Juli-2018.pdf`, 2018. Abgerufen am 21.09.22.