Erklären in der Mathematik

Reinhard Oldenburg

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Oldenburg, Reinhard. 2023. "Erklären in der Mathematik." In *Erklären als zentrales Vermittlungskonzept der Bildungswissenschaften und Fachdidaktiken: Beiträge für die Lehrkräftebildung*, edited by Julia von Dall'Armi, 139–52. Weinheim: Beltz Juventa.

Erklären in der Mathematik

Reinhard Oldenburg

1. Einleitung

Ein logisch hochgradig strukturiertes Fach, das sich mit abstrakten Objekten und ihren Beziehungen beschäftigt, stellt Lernende vor große Herausforderungen. Deswegen erstaunt es, dass sich die Mathematikdidaktik nur sehr wenig explizit mit Fragen des Erklärens beschäftigt. Insbesondere Erklärungen durch Lehrkräfte werden oft als Ausdruck eines transmissiven-unkonstruktivistischen Verständnisses von Lehr-Lernprozessen gesehen. So warnen Danckwerts und Vogel (2006) in einer Gegenüberstellung von Merkmalen des Mathematikunterrichts davor, Mathematik als Produkt zu sehen, das man den Lernenden vermitteln könne, ohne dass diese entsprechende Konstruktionsprozesse durchlaufen (ebd., S. 8). Schon 13 Jahre zuvor hat Malle (1993) sehr detailliert herausgearbeitet, dass der Glaube, eine gute, „saubere Erklärung" würde automatisch ein Verstehen nach sich ziehen, eine Illusion ist. Malle spricht von der „Ideologie des sauberen Erklärens" (Malle 1993, S. 24) und definiert sie wie folgt: „Sie besteht in der Annahme, daß man durch klare und saubere Erklärungen Verständnisschwierigkeiten weitgehend ausräumen und Fehler vermeiden kann" (ebd., S. 26). Um seine Position zu stützen, gibt er Beispiele von Lernenden, die korrekte fachliche Erklärungen nicht korrekt anwenden, und verweist außerdem auf Blais (1988), der aus konstruktivistischer Perspektive den traditionellen, erklärenden Unterricht kritisiert. Malle macht ein mangelndes Verständnis für die konstruktivistische Natur des Lernens für die Verbreitung der Erklär-Ideologie verantwortlich (ebd., S. 31). Aus dieser Perspektive sind Eigenkonstruktionen der Lernenden zentral und Erklärungen allenfalls als Selbsterklärungen oder Erklärungen zwischen Lernenden anzustreben. Nichtsdestotrotz wird es immer Situationen geben, in denen eine direkte Instruktion nötig ist, sodass die Kompetenz der Lehrkraft, gut erklären zu können, zu ihrer Professionalität gehört. Zur Vielfalt solcher Situationen gehören beispielsweise das schnelle Ausgleichen von Lücken in Vorkenntnissen, die Korrektur falscher Konstruktionen, die sich ohne Eingriff der Lehrperson als viabel erweisen könnten und die Orientierung in komplexen Sachverhalten, für die eine erfolgreiche Selbstkonstruktion besonders herausfordernd ist. Wenn also Erklärungen durch die Lehrkraft doch unentbehrlich sind, stellt sich die Frage, was gutes Erklären in der Mathematik genau ist. In diesem Beitrag wird trotz der nicht optimalen Forschungslage versucht, eine Systematik in das weite Feld mathematischer Erklärungen zu bringen.

2. Zum Konstrukt der ‚Mathematischen Erklärung'

Zunächst können allgemeine Erkenntnisse über gute Erklärungen auf die Mathematik übertragen werden. Der viel zitierte Beitrag von Renkl und Wittwer (2008) destilliert eine Reihe von Kriterien, die auch problemlos auf die Mathematik angewendet werden können, etwa die Passung zu den Vorkenntnissen der Adressat*innen, der Fokus auf Konzepte, kognitive Aktivierung und Unterstützung. Bei mehr ins Detail gehenden Fragen aber scheint es in der Tat wichtig, die Übertragbarkeit von anderen Domänen auf mathematisches Erklären kritisch zu durchdenken.

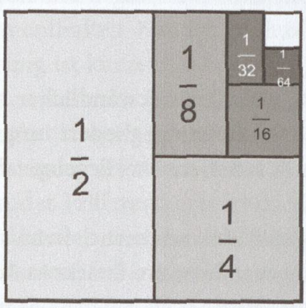
In den wenigen deutschsprachigen Arbeiten zum Erklären (etwa denen der Forschungslinie, deren Ergebnisse und Praxisempfehlungen in Wagner/Wörns (2011) kumulierten) wird häufig aufbauend auf Kiel (1999) das deduktiv-nomologische Modell von Hempel und Oppenheim[1] (1948) als theoretische Grundlage genutzt, obwohl dieses der kausalen Erklärkraft von (naturwissenschaftlichen) Theorien gewidmet ist. Eine Inanspruchnahme dieses Modells durch die Mathematik(didaktik) erscheint aus vielen Gründen problematisch. Marc Lange (2017) etwa argumentiert, dass mathematische Sachverhalte bestimmte Phänomene nicht verursachen, sondern wegen ihrer logischen Notwendigkeit nur Möglichkeiten einschränken. Dieses Argument fußt darauf, dass Mathematik keine Naturwissenschaft ist. Auch Zelcer (2013) bestreitet, dass die Theorie von Hempel/Oppenheim für die Mathematik relevant sein kann. Nach seiner Analyse wird in keiner der Theorien zu naturwissenschaftlicher Erklärung, die auf Hempel und Oppenheim aufbauen, die Frage aufgeworfen, ob das Explanans Einsichten vermittelt und erhellend („illuminating", ebd., S. 174) wirkt, sondern es geht um kausale Erklärungen, d.h. das Erklärte wäre ohne das Erklärende gar nicht da. Dagegen argumentiert Zelcer (ebd., S. 177) mit Bezug zu Hume (1980) und in Einklang mit Lange, dass mathematische Sätze notwendig wahr seien, ihre Wahrheit also nicht durch andere kausal verursacht wird. Bezogen auf mathematische Erklärungen argumentiert er, dass es in der Mathematik jenseits (vielerlei Arten) von Beweisen keinerlei Erklärungen gibt (ebd., S. 178). Diese Position wird in der Mathematikdidaktik nicht breit geteilt; in der Regel geht man hier davon aus, dass es viele Arten von Erklärungen gibt. Es besteht jedoch Konsens, dass das Erklären eine wichtige Funktion mathematischer Beweise ist (Hanna/Barbeau 2008). Weiter argumentiert Zelcer, dass sich mit dem auf die Mathematik übertragenen theoretischen Rahmen von Hempel und Oppenheim allenfalls Implikationen als Erklärung anbieten würden. Gerade in dem

---

1 Extrem kurz dargestellt sagt das Modell, dass die Erklärung eines Sachverhalts (Explanandum) daraus besteht, dass aus einem Explanans, also aus akzeptierten, gültigen Sätzen durch logische Argumentation das Explanandum abgeleitet wird. Es ist also die Begründung, dass z.B. ein Phänomen nicht zufällig, sondern auf Basis des Explanans regelhaft notwendig auftritt.

für die Mathematikdidaktik besonders wichtigen informellen Argumentieren und Erklären sind aber auch andere Erklär-Stimuli wichtig, etwa Bilder ohne weitere Erläuterungen (das liegt letztlich daran, dass mathematische Objekte zwar sprachlich gefasst werden können, aber in der Regel auch außersprachliche Repräsentationen – man denke an die Geometrie – besitzen). Dieses Argument ist meines Erachtens gewichtig. Dies soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden: So gibt es eine kleine Buchreihe mit dem Titel „Proofs without Words",[2] in der Erklärungen (genauer gesagt: erklärende Beweise) für viele mathematische Sachverhalte angegeben werden, ohne ein einziges Wort zu bemühen. Abb. 1 zeigt eine solche Erklärung, allerdings nicht aus den Büchern von Nelsen, sondern eine dadurch inspirierte graphische Darstellung, die in ähnlicher Form in Greefrath et al. (2016) verwendet wurde, um eine einfache Fragestellung aus der Analysis zu erklären, die früher auch in der Schule behandelt wurde. Es scheint also ‚sprach-freie' mathematische Erklärungen zu geben, aber ebenso klar ist, dass nicht alle mathematischen Sachverhalte ohne Sprache erklärt werden können. Insbesondere die Algebra ist mit ihrer formalen Sprache so eng verbunden, dass es strittig ist, ob sich die Algebra nicht ganz in Sprache erschöpft. Letztlich ist ungeklärt, wie groß der nicht-sprachliche Teil der Mathematik ist (Brown/Drouhard 2004). Außerdem könnten Vertreter der These, dass mathematisches Denken generell sprachliches Denken sei (etwa Sfard 2008), einwenden, dass die Erklärung überhaupt erst bei der sprachlichen Umkodierung des Bildes im Kopf des Betrachters entsteht.

Abb. 1: Grafische Erklärung für die Identität $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$



2 Der erste Band ist Nelsen 1997.

3. Sprache in Erklärungen

Die mathematische Sprache ist sowohl *Gegenstand* des Erklärens – die Fachsprache selbst muss erklärt werden, die Lernenden müssen also die mathematische Fachsprache erlernen – als auch *Erklär-Mittel*, also ein Hilfsmittel, um Erklärungen zu geben. Beiden Aspekten wurde schon Aufmerksamkeit zuteil, etwa in Untersuchungen und Empfehlungen zur Sprache in Erklärtexten. Felix Klein hat in seiner viel beachteten dreibändigen „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt" (Klein 1908, 1909, 1929) den Studierenden eine sehr metaphernreiche Sprache gleichsam als Vorbild an die Hand gegeben. Die Rolle von Metaphern für mathematische Erklärungen wird auch von Lakoff/Núñez (2000) gewürdigt.

Ein Klassiker zur Verwendung von Sprache bei mathematischen Erklärungen ist auch das Buch von Schulz von Thun/Götz (1976). Die Autoren geben darin konkrete Anleitungen, wie Texte geschrieben werden sollen, sodass sie den folgenden Gütekriterien entsprechen: Einfachheit, Gliederung, Kürze und vorhandene Stimulanz (ebd., S. 16 f.). Illustrativ ist das Beispiel zur Kommensurabilität von Strecken. Ausgangspunkt ist folgender Text, der einem damaligen Lehrbuch entnommen wurde:

> „Vergleicht man zwei Strecken a und b hinsichtlich ihrer Länge, so kann es vorkommen, dass die eine genau r mal in die andere passt, wobei r eine ganze Zahl ist. Oder es kann sich zeigen, dass man, wenn auch kein ganzes Vielfaches von a genau gleich b ist, doch a in n gleiche Strecken von der Länge $\frac{a}{n}$ teilen kann, so dass ein ganzes Vielfaches der Strecke $\frac{a}{n}$ gleich b wird: $a = \frac{m}{n} \cdot b$
>
> Wenn eine Gleichung dieser Art besteht, sagen wir, dass die beiden Strecken a und b kommensurabel sind" (ebd, S. 13).

Die Autoren empfehlen, diesen Text verständlicher zu machen, indem er mit kürzeren Sätzen und in Sinneinheiten gegliedert umgeschrieben wird. Beispiele sollen zudem beim Verständnis helfen. Das Ergebnis der Umarbeitung ist dann:

> „Man sagt: Zwei Strecken sind kommensurabel, wenn sie ein gemeinsames Maß haben. Was bedeutet das? Angenommen eine Strecke ist 3 cm, die andere 9 cm lang. Die beiden Strecken sind kommensurabel, sie haben als gemeinsames Maß 3 cm. Es passt in die eine Strecke genau einmal, in die andere genau dreimal. Angenommen, eine Strecke ist 6 cm, die andere 10 cm. Auch diese sind kommensurabel. Das gemeinsame Maß ist 2 cm: es steckt dreimal in der ersten und fünfmal in der zweiten Strecke. (Bsp.: 1,67 cm und 4,31 cm, gemeinsames Maß 0,01 cm)" (ebd, S. 27).

Was sagen uns diese Beispiele? Zwei Strecken sind kommensurabel, wenn die eine Strecke oder ein Bruchteil von ihr in der anderen enthalten ist, ohne dass ein Rest bleibt.

Ohne Zweifel ist dieser zweite Text leichter verständlich. Das liegt aber auch daran, dass die Definition mathematisch unpräziser ist (*Was ist ein Bruchteil?*), dass sie nicht ausreicht, den mathematisch interessanten Sachverhalt, der sich mit dem Begriff der Inkommensurabilität erschließt (nämlich, dass es geometrisch konstruierbare irrationale Streckenlängen gibt), zu verstehen. Außerdem sind die Beispiele so gewählt, dass sie nur den in diesem Kontext uninteressanten Spezialfall abbrechender Dezimalbrüche behandeln. Die Lehre, die man hieraus ziehen kann, lautet ganz einfach, dass nicht nur die Psychologie, sondern auch die Mathematik bei Erklärungen berücksichtigt werden sollte.

4. Forschungslage zu mathematischen Erklärungen

Parallel dazu, dass es wenig systematische theoretische Überlegungen zur Struktur des Erklärens in der Mathematik gibt, gibt es nur relativ wenige Publikationen, die sich explizit mit dem Erklären beschäftigen und diese sind über eine Vielzahl von Altersstufen und inhaltlichen Themen verstreut, sodass es schwer ist ein einheitliches Fazit zu ziehen. Es sollen trotzdem einige – aus meiner subjektiven Sicht – interessante Ergebnisse zusammengetragen werden.

Levenson (2010) hat Fünftklässlern zu Fragen der Teilbarkeit durch zwei (gerade und ungerade Zahlen) und zur Frage der Äquivalenz von Brüchen zwei Arten von Erklärungen angeboten, nämlich einerseits handlungsorientierte Erklärungen und andererseits formale mathematische Erklärungen. Unter Handlungserklärungen verstehen die Autoren dabei die Einbettung in eine Realsituation. Beispiel: Wenn man 14 Murmeln auf zwei Kisten aufteilt, ist es möglich, dass beide gleich viele Murmeln enthalten, also ist 14 eine gerade Zahl (ebd., S. 130). Die mathematische Erklärung ist kürzer: 7+7=14 (ebd., S. 129). Die Schüler*innen wurden jeweils befragt, welche der Erklärungen für sie mehr Überzeugungskraft haben. Bei den Teilbarkeitsfragen gab es einen signifikanten Vorzug für die handlungsbasierten Erklärungen, während es bei den Fragen zu Bruchäquivalenz keine Unterschiede in der Präferenz gab (ebd., S. 135). Dies zeigt deutlich, dass man mit pauschalen Urteilen, welche Erklärungen besser sind als andere, vorsichtig sein sollte. Stattdessen ist der jeweilige mathematische Inhalt von entscheidender Bedeutung für die Frage, welche Erklärungen erfolgreich sind.

Wichtig ist die Erkenntnis, dass die Einschätzung einer Erklärung als ‚gut' nicht rein subjektiv ist. Evans/Mejía-Ramos/Inglis (2022) haben neun verschiedene Erklärungen zum Thema „Was ist ein Vektorraum?" sowohl Studierenden als auch Dozierenden vorgelegt und eine verhältnismäßig hohe Korrelation der Bewertungen der beiden Gruppen gefunden (ebd, S. 11). Bei der Interpretation muss man allerdings bedenken, dass die Studierenden bereits gewisse Zeit in universitären Mathematikmilieus sozialisiert waren, also an bestimmte Argumentations- und Erklärformen gewöhnt waren.

Ingram/Andrews/Pitt (2019) haben mit qualitativen Methoden Situationen gesucht, in denen Schüler*Innen Erklärungen geben, ohne von der Lehrkraft dazu aufgefordert worden zu sein. Zum einen finden sie, dass solche Situationen im üblichen Mathematikunterricht sehr selten auftreten. Wenn sie auftreten, werden sie vor allem durch die Gesprächsdynamik erklärt, d. h. Schüler*innen geben dann Erklärungen, wenn sie einen Sachverhalt anders sehen und das für so wichtig halten, dass sie den normalen Ablauf des Unterrichtsgesprächs stören (ebd., S. 62). Dabei wären schüler*innenseitige Erklärungen eine wertvolle didaktische Hilfe. Mehrere Studien zeigen eindrücklich, dass von Lernenden gegebene Erklärungen den Lernprozess wesentlich voranbringen können. Insbesondere im Rahmen von *Peer Instruction* ist das untersucht worden (etwa: Reinholz 2016). In diesen *Peer Instruction*-Situationen (aber nicht nur dort) berühren sich die Aktivitäten des Erklärens und des Argumentierens. Ihr Zusammenhang ist nicht trivial, wie im Folgenden erläutert wird.

5. Erklären und Argumentieren – ein Beispiel

Argumentieren und Erklären hängen zusammen: Bei beiden Prozessen geht es um die Vermittlung von Einsicht und Verstehen. Trotzdem gibt es – je nach genauem Verständnis der beiden Begriffe – Unterschiede. Wenn man Argumente als sprachliche Konstrukte sieht, kann man konstatieren, dass es mathematische Erklärungen gibt, die keine (sprachlichen) Argumente benutzen, etwa die grafische Erklärung in Abb. 1. Wie oben angedeutet, könnte es jedoch auch sein, dass die kognitive Verarbeitung doch sprachbasiert ist. Insofern ist die Frage, ob Argumente beim Erklären immer eine Rolle spielen, weiter offen. Dies erklärt möglicherweise, warum in der Literatur zum Argumentieren in der Mathematikdidaktik in der Regel nicht auf Erklärungen eingegangen wird (beispielsweise in der einflussreichen Monographie von Brunner 2014).

Interessanterweise gibt es (häufig?) Erklärungen, die weder eine Erklärung im Sinne von Hempel-Oppenheim sein können noch eine in das Schema von Toulmin (1996) passende Argumentation, weil sie sich gar nicht mit dem eigentlich zu erklärenden Phänomen beschäftigen, sondern ein ganz anderes Phänomen erklären, das dann aber als Metapher dienen kann, um das fragliche Phänomen zu akzeptieren. Als Beispiel sei die folgende Aufgabe gewählt:[3]

Man kann annehmen, die Erde sei eine Kugel mit einem Äquator-Umfang von 40.000 km und man ignoriere jetzt gedanklich, dass es Berge und Meere gibt und gehe davon aus, die Erde sei überall flach. Dann passt ein exakt 40.000 km langes Seil genau einmal um den Äquator herum und es liegt überall fest auf dem Erdboden auf. Angenommen, man verlängert das Seil um 1 m und hebt es überall

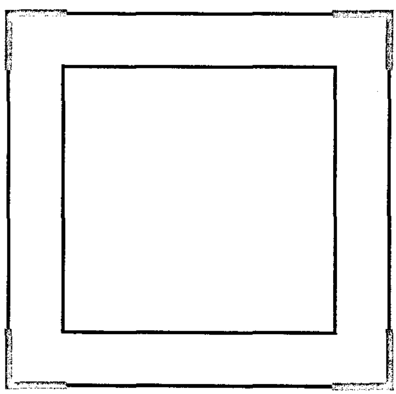
3 Den Hinweis darauf verdanke ich Hans-Georg-Weigand.

gleichmäßig über den Boden an – um wie viel muss man es dann anheben? Viele Menschen denken intuitiv, das seien bestenfalls Millimeter, wenn nicht nur einige Mikrometer.

Die richtige Antwort ist für viele verblüffend, es sind etwa 16 cm. Eine formal völlig korrekte Erklärung des Sachverhalts ist die folgende Rechnung: Es sei U der Erdumfang (also auch die Seillänge) und r der Erdradius, dann gilt also $U = 2\pi r$. Wenn man nun den Umfang um $\Delta U = 1\text{m}$ verlängert, vergrößert sich der Radius um Δr und es gilt auch für den neuen, größeren Kreis wieder die Kreisumfangsformel: $U + \Delta U = 2\pi \cdot (r + \Delta r)$. Man subtrahiert die erste Gleichung und erhält $\Delta U = 2\pi \cdot \Delta r$, also $\Delta r = \frac{\Delta U}{2\pi} = \frac{1m}{2\pi} \approx 16\,\text{cm}$.

Für viele Menschen hat diese Erklärung erfahrungsgemäß nur geringe Erklärkraft, obwohl sie gleich zeigt, dass die Vergrößerung des Radius völlig unabhängig vom Umfang ist. Dagegen finden viele Menschen die folgende Erklärung überzeugend, die im Grunde ein ganz anderes Problem löst, dessen Transferierbarkeit auch noch zu hinterfragen wäre: Angenommen, der Äquator wäre kein Kreis, sondern ein Quadrat, wie in Abb. 2 dargestellt. Wenn man nun von einem Quadrat zu einem größeren übergeht, indem man seinen Umfang um die roten Winkel verlängert, sieht man, dass der Abstand zum ursprünglichen Quadrat überall ein Achtel der roten Verlängerungsstrecke ist. Dass diese Erklärung von vielen Menschen bevorzugt wird, zeigt auf, dass Erklärungen Überzeugungskraft oft nicht durch formale und logische Stringenz gewinnen. Es lohnt sich etwas genauer hinzuschauen, warum diese Erklärung funktioniert: Ein wesentlicher Grund dürfte sein, dass man üblicherweise keine Erfahrung damit hat, mental die Größe eines Kreises kontinuierlich anzupassen, weil es solche Prozesse in der Realität in der Regel nicht gibt. Die Analogie-Erklärung mit dem Quadrat kommt dagegen mit Parallelverschiebung aus, die man sowohl im Alltag wie in der mathematischen Vorbildung häufig antrifft.

Abb. 2: Eine Analogie-Erklärung



6. Eine Theorie des Erklärens

In Ermangelung einer allgemein akzeptierten Theorie des Erklärens im Mathematikunterricht postuliert der vorliegende Aufsatz das folgende ad-hoc-Verständnis: Im weiten Sinne sind mathematische Erklärungen alle Prozesse, die zu einem Verständnis mathematischer Sachverhalte und Konzepte führen. Dies schließt insbesondere auch Selbsterklärungen ein. Für didaktisches Handeln von Lehrpersonen sind aber soziale Erklärprozesse wesentlich wichtiger: Typischerweise gibt es bezogen auf einen mathematischen Gegenstand einen Unterschied bezüglich des Vorwissens zwischen einer Person, die erklärt, und eine Person, der etwas erklärt wird. Während Selbsterklärungen als ein (Teil-)Prozess des Problemlösens gesehen werden können, sind soziale Erklärprozesse eher ein Transfer eines Problemlöseprozesses, den der Erklärende bereits durchlaufen hat, in einer Form, die dem Empfänger der Erklärung beim Problemlösen hilft. In diesem Sinne soll Erklären in der Folge als Äußerung eines gelungenen, abgeschlossenen, kognitiven Problemlöseprozesses gedeutet werden, den der/die Erklärende bereits unternommen hat und nun kommuniziert.[4] Es ist eine naheliegende Hypothese, dass die Erklärmuster von der Art des gelösten und dargelegten Problems abhängig sind. Wenn man das Problemlösen im Sinne von Dörner (1987) sieht, lassen sich vier Erklärformen unterscheiden: Eine einfache „Komplexion" im Sinne Dörners (1987, S. 14) definiert einen Sachverhalt oder eine Erscheinungsform. Eine dabei nützliche Erklärung klärt also über die Natur von Objekten auf, oder vereinfacht gesagt: Es ist eine Was?-Erklärung (mathematisches Beispiel: Was ist eine Winkelhalbierende?). Ist die Klarheit der Zielkriterien sowie der Bekanntheitsgrad der Mittel hoch, spricht Dörner von einer „Interpolationsbarriere" (ebd., S. 14). Hier muss man die richtige Kombination der Mittel finden. Für die Erklärung bedeutet dies, dass prozedurales Wissen zur Zielerreichung vermittelt wird. Mathematisches Beispiel: Wie berechnet man Terme, die Klammern enthalten? (Wie?-Erklärung). Ist die Klarheit der Zielkriterien gering, der Bekanntheitsgrad der Mittel hoch, so spricht Dörner von einer „dialektischen Barriere" (ebd., S. 14). Dies ist dann der Fall, wenn beispielsweise besonders vorteilhaft gerechnet werden soll, der Vorteilsbegriff aber nicht näher definiert ist. Dann müssen Erklärungen das Ziel genauer fassen. (Wozu?-Erklärung).

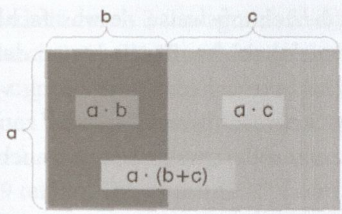
Sind dem Problemlöser/der Problemlöserin zielführende Verfahren und Arbeitsweisen nicht bekannt, so muss er/sie heuristisch arbeiten, also eigene Methoden zur Behebung eines Problems entwickeln. „Weiß man, was man will, kennt aber die Mittel nicht, dann spricht man von einer Synthesebarriere." (Dörner 1976, S. 14). Diese Situation liegt beim klassischen Beweisproblem in der Mathematik vor. Hier müssen Begründungen für einen Sachverhalt im Rahmen des

4 Neben sprachlichen Erklärungen schließt diese Sichtweise auch Erklärungen durch Gesten oder Bilder ein.

Erklärprozesses gefunden bzw. von der erklärenden Person kommuniziert und aufgezeigt werden (Warum?-Erklärung).

Diese vier Formen mathematischer Erklärungen wurden in Dall'Armi & Oldenburg (2020) in Erweiterung der Klassifikation von Kiel, Meyer, Müller-Hill (2015) definiert und auf Beispiele aus der Analysis angewendet. Die folgende Tabelle gibt Beispiele rund um das Distributivgesetz der elementaren Algebra. Dabei wird auch deutlich, dass die verschiedenen Erklärformen typischerweise auf unterschiedliche Wissensarten zielen.

Tab. 1:

Form	*Distributivgesetz*	*Art des Wissens*
Was?	Für alle Zahlen *a*, *b*, *c* gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, beispielsweise $3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4$	Relational (semantisch)
Wie?	Zum Klammerauflösen schreibt man den Faktor außerhalb der Klammer vor jeden Faktor:[5] $a \cdot (b+c) = ab + ac$ Zum Ausklammern arbeitet man umgekehrt.	Prozedural (syntaktisch)
Wozu?	Geschicktes Rechnen: $17 \cdot 96 + 17 \cdot 4 = 17 \cdot 100$ Schriftliches Multiplizieren	Strategisch (pragmatisch)
Warum?	 [6]	Konzeptuell

Die Theorie der vier Erklärformen schließt gut an Aristoteles' Unterscheidung von vier Ursachentypen an. Eine Materialursache erklärt das ‚Was' eines Phänomens, eine Formursache erklärt das ‚Wie' eines Phänomens, eine Wirkursache erklärt das ‚Warum' eines Phänomens und schließlich erklärt eine Zweckursache das ‚Wozu' eines Phänomens. In Dall'Armi/Oldenburg (2020) wurde gezeigt, dass Schulbücher zur Analysis *Warum?*- und *Wozu?*-Erklärungen weitgehend vermeiden und *Wie?*- Erklärungen dominieren. Ganz anders ist die Lage in Lehrbüchern der universitären Analysis, dort dominieren *Warum?*- und *Was?*-Erklärungen. Das liegt daran, dass der schulische Unterricht stark auf die Beherrschung von

5 Bildquelle: https://de.serlo.org/mathe/1677/distributivgesetz (Abfrage: 28.3.2023)

6 Bildquelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Datei:Distributivgesetz.gif (Abfrage: 28.3.2023)

Rechentechniken abzielt (die eigentlich auf Computer ausgelagert werden könnten), während die universitäre Ausbildung auf die argumentative Klärung von Sachverhalten zielt. Offensichtlich wären dies – altersgerecht umgesetzt – auch lohnende Ziele für den Schulunterricht.

7. Praxis des mathematischen Erklärens

Dieser Abschnitt diskutiert verschiedene Empfehlungen und Realisierungen von Erklärungen in der Praxis. Dabei überwiegt die Beschäftigung mit Negativ-Beispielen um die These zu begründen, dass die Mathematikdidaktik mehr Arbeit in gutes Erklären investieren sollte.

7.1 Pseudoerklärungen in Videos

Wir haben oben schon am Beispiel des Seils um den Äquator gesehen, dass eine Erklärung nicht notwendig fachlich stringent sein muss, sondern sie muss vor allem Vertrautheit mit einem ungewohnten Phänomen aufbauen. Eine extreme Form dieser Art der Erklärung kann man in einigen Erklärvideos erleben, die von Lernenden durchaus hoch bewertet werden. Ein Beispiel: Äquivalenzumformung von Gleichungen sind solche Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert, beziehungsweise –etwas fachlich präziser ausgedrückt – sind Äquivalenzumformung solche, die nichts an den Variablenbelegung ändern, die die Gleichung wahr machen. Daniel Jung verwendet in seinen Erklärungen zum Thema[7] aber kein fachliches Konzept, sondern er sagt lediglich, dass die Lernenden das machen sollen, was sie „sonst auch machen“:

> „Tafelbild ist relativ überschaubar. Es geht auch nur um äquivalentes Umformen/Äquivalenzumformungen. Im Prinzip ihr habt [sic!] eine Gleichung. Es geht mir [...] nur um die Interpretation, was dieses Zeichen hier ($\Leftrightarrow$) bedeutet [...]. Also grundsätzlich habt ihr eine Gleichung, löst diese entsprechend. [...] Die Gleichung, die am Anfang präsentiert ist, ist äquivalent zu der Gleichung hier, die ihr hinschreibt, wenn ihr entsprechend umformt, ist äquivalent zu dem, was ihr entsprechend immer weiterschreibt, bis ihr am Ende eine Lösung für x raushabt. Das ist das ganze Geheimnis. Lösen durch Äquivalenzumformungen oder Lösen durch äquivalentes Umformen, ist eigentlich genau das, was ihr sonst immer macht“ (geglättetes und gekürztes Transkript, 0:03–1:20).

7 Das Erklärvideo ist abrufbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=CamVNjwj2zA (Abfrage: 28.3.2023).

Im eigentlichen Sinne des Wortes wird hier nichts erklärt, sondern es wird nur beruhigend gesprochen, dass das Wort „Äquivalenzumformung" nicht schlimm sei, weil es nur dazu auffordere, das Übliche zu tun.

Ein anderer Trick empirisch guter Erklärungen (also von Erklärungen, die evidenzbasiert als positiv zu bewerten sind) besteht darin, fachlich relevante Unterschiede zu ignorieren. Beispielsweise behauptet das Video von Sebastian Schmidt (https://www.youtube.com/watch?v=Zs35WkrmUHk), Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit seien das Gleiche (vgl. Bersch et al. 2020). Darunter finden sich Kommentare von Lernenden, die begeistert sind, und fragen, was ihre Lehrkräfte lange über angebliche Unterschiede herumreden, was nur verwirre.

7.2 Schulbücher

Selbstverständlich ist die Mehrzahl der Erklärvideos mathematisch korrekt. Allerdings findet man eine Schieflage der Erklärarten: *Warum?*- Erklärungen und *Wozu?*-Erklärungen kommen kaum vor. Oben wurde schon erwähnt, dass das in Analysis-Schulbüchern der gymnasialen Oberstufe ebenso ist. In der Tat gilt der Befund auch für Schulbücher anderer Altersstufen. Ein typisches Beispiel zur Teilbarkeitsregel für die Division durch 9 findet sich im Mathematik-Schulbuch „Lambacher Schweizer".[8] Die Schulbuchseite listet mehrere Regeln (z.B. auch für die Teilbarkeit durch 2 und durch 5) auf und schließt auch die Regel für die Teilbarkeit durch 9 ein. Die Regel wird dabei einfach genannt (man könnte das als *Was?*-Erklärung klassifizieren) und durch ein Beispiel der Anwendung der Regel illustriert (eine *Wie?*-Erklärung). Konkret gibt es die minimalistisch formulierte Regel „durch 9, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist" und ein Beispiel „110 nicht durch 9 teilbar, Quersumme: 2" (Lambacher/Schweizer 2016, S. 17f.).

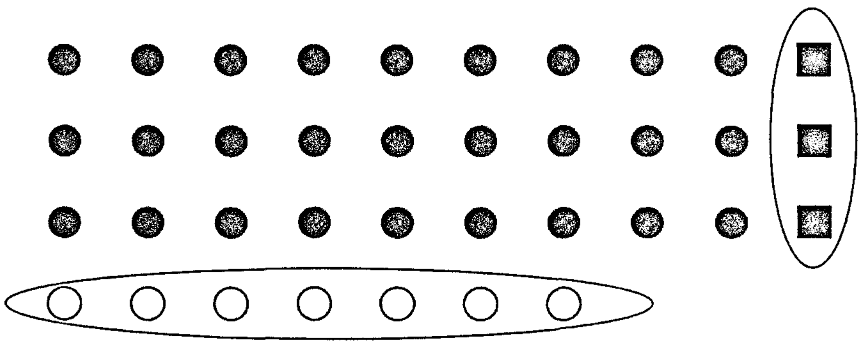
Dieser Umgang des Schulbuches mit der Teilbarkeitsregel erfüllt viele Anforderungen: Die der sprachlichen Einfachheit, die des Lehrplans, die von Eltern, Lernenden und auch von Lehrkräften, die inhaltliche *Warum?*-Begründungen oft als mühsam empfinden und nicht unterrichten wollen. Aus didaktischer Perspektive ist dieser Umgang mit der Regel aber an Absurdität kaum zu übertreffen. Es gibt fast keine denkbare Situation im Leben, in der man von Hand die Teilbarkeit einer Zahl durch neun prüfen müsste. Man kann die Regel alleine auch kaum benutzen, um weitere Zusammenhänge zu erschließen. Die Regel zu kennen, kann daher kein legitimes Bildungsziel sein. Schon gar nicht kann es ein pädagogisches Ziel sein, Kindern beizubringen, unverstandene und unbegründete Regeln strikt zu befolgen. Eine solche Erziehung zum Untertanen ist ein Unding in einem

8 Frohmader, Birgit et al.: Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien – 5. Bayern. Stuttgart: Klett 2016.

demokratischen Gemeinwesen. Das Bildende an der Beschäftigung mit der Neuner-Regel ist gerade das Hinterfragen und Reflektieren: Dass die Regel funktioniert, hängt damit zusammen, dass wir Zahlen im Dezimalsystem notieren. Und warum gilt sie? Das zu begründen kann die Argumentationsfähigkeiten schulen und damit bildend sein. Abb. 3 zeigt, wie diese Argumentation am Beispiel der Division 37:9 visuell unterstützt werden kann. Das Bild kann eine Anregung zur Selbsterklärung sein. Erklärungen können also Selbsterklärungen anregen.

Im Allgemeinen kann man eine Allaussage nicht durch ein einzelnes Beispiel begründen, allerdings zeigt sich in diesem konkreten Fall eine Struktur, die auf andere Zahlen verallgemeinerbar ist. Dies zu erkennen und zu begründen ist eine bildende Herausforderung. Am Übergang von Schule zu Hochschule haben Kempen/Biehler (2019) dies ausführlich untersucht.

Abb. 3: Neuner-Regel der Division



Die „Neuner-Regel der Division" (siehe Abb. 3) sei an einem Beispiel erklärt: 37 Objekte sollen an neun Leute verteilt werden: Von jedem Zehner (der aus neun schwarzen Kreisen und einem Quadrat besteht) werden zunächst neun verteilt, sodass pro Zehner ein Einer übrig bleibt, der zusammen mit den sieben Einern (nicht ausgefüllte Kreise) noch verteilt werden muss – und das ist gerade die Quersumme 3+7 (in den beiden Ovalen).

8. Fazit

Mathematik stellt durch abstrakte Konzepte und komplexe Argumentationsmuster Lernende vor große Probleme. Gute Erklärungen sind wichtig, aber leider ist noch nicht hinreichend klar, was eine gute Erklärung ausmacht. Immerhin gibt es einige Kriterien, die auch in der Lehrkräftebildung vermittelt werden können. In jedem Fall sollten die mathematischen Grundlagen und die didaktisch-pädagogischen Ziele (die über das Bestehen der nächsten Klausur hinausreichen sollten) bedacht werden. Fachliche Richtigkeit ist sicher keine hinreichende, vermutlich aber eine notwendige Eigenschaft von dauerhaft tragfähigen Erklärungen.[9]

Literatur

Bersch, Sabrina/Merkel, Andreas/Oldenburg, Reinhard/Weckerle, Martin (2020): Erklärvideos: Chancen und Risiken – zwischen fachlicher Korrektheit und didaktischen Zielen. In: GDM – Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 109, S. 58–63.

Blais, Donald M. (1988): Constructivism – a Theoretical Revolution for Algebra. In: The Mathematics Teacher 81, H. 8, S. 624–630.

Brown, Laurinda/Drouhard, Jean-Philippe (2004): Responses to 'The Core of Algebra'. In: Kaye Stacey/Helen Chick/Margaret Kendal (Hrsg.): The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study. New ICMI Study Series, vol 8. Boston: Springer. https://www.researchgate.net/profile/Jean-Philippe-Drouhard/publication/226861515_Responses_to_%27The_Core_of_Algebra%27/links/0912f5127981d3d9c8000000/Responses-to-The-Core-of-Algebra.pdf (Abfrage: 14.05.23).

Brunner, Esther (2014): Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Berlin: Springer.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Dall'Armi, Julia v./Oldenburg, Reinhard (2020): Erklären in der Analysis. In: Hans-Stefan Siller, Wolfgang Weigel/Jan Franz Wörler (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2020. Münster: WTM, S. 689–692.

Dörner, Dietrich (1987): Problemlösen als Informationsverarbeitung. 3. Auflage. Stuttgart: Kohlhammer.

Evans, Tanya/Mejía-Ramos, Juan Pablo/Inglis, Matthew (2022): Do mathematicians and undergraduates agree about explanation quality? In: Educational Studies in Mathematics 111, S. 445–467. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-022-10164-2 (Abfrage: 26.3.203).

Greefrath, Gilbert/Oldenburg, Reinhard/Siller, Hans-Stefan/Ulm, Volker/Weigand, Hans-Georg (2016): Didaktik der Analysis. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.

Hanna, Gila (2000): Proof, Explanation and Exploration: An Overview. In: Educational Studies in Mathematics 44, S. 5–23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465 (Abfrage: 26.03.23).

Hanna, Gila/Barbeau, Ed (2008): Proofs as bearers of mathematical knowledge. In: ZDM Mathematics Education 40, S. 345–353. https://link.springer.com/article/10.1023/A:1012737223465 (Abfrage: 26.03.23).

Hempel, Carl G./Oppenheim, Paul (1948): Studies in the Logic of Explanation. In: Philosophy of Science 15, H. 2, S. 135–175.

Hume, David (1779/1980): Dialogues concerning natural religion. Herausgegeben von R.H. Popkin. Indianapolis: Hackett.

Ingram, Jenni/Andrews, Nick/Pitt, Andrea (2019): When students offer explanations without the teacher explicitly asking them to. In: Educational Studies in Mathematics 101, S. 51–66.

Kempen, Leander/Biehler, Rolf (2019): Pre-Service Teachers' Benefits from an Inquiry-Based Transition-to-Proof Course with a Focus on Generic Proofs. In: International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 5, H. 1, S. 27–55.

Kiel, Ewald (1999): Erklären als didaktisches Handeln. Würzburg: Ergon.

Kiel, Ewald/Meyer, Meyer, Michael/Müller-Hill, Eva (2015): Erklären. Was? Wie? Warum? In: Praxis der Mathematik in der Schule 57, H. 64, S. 2–9.

9 Danksagung: Sabrina Bersch und Julia von Dall'Armi haben diesen Beitrag durch zahlreiche Anregungen, kritische Nachfragen und kreative Ideen wesentlich verbessert.

Klein, Felix (1908/1909/1928): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 3 Bände. Leipzig: B. G. Teubner.
Lakoff, George/Núñez, Rafael (2000): Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York: Basic Books.
Lange, Marc (2017): Because without cause. Non-Causal Explanations in Science and Mathematics. Oxford: Oxford University Press.
Levenson, Esther (2010): Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. In: Educational Studies in Mathematics 73, S. 121–142. https://www.researchgate.net/publication/226909734_Fifth-grade_students'_use_and_preferences_for_mathematically_and_practically_based_explanations (Abfrage: 26.3.2023).
Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.
Nelsen, Roger B. (1997): Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking. Washington: The Mathematical Association of America.
Reinholz, Daniel L. (2016): Improving calculus explanations through peer review. In: Journal of Mathematical Behavior 44, S. 34–49.
Schulz von Thun, Frieder/Götz, Wolfgang (1976): Mathematik verständlich erklären. München: Urban & Schwarzenbeck.
Sfard, Anna (2008): Thinking as Communication. Cambridge: Cambridge University Press.
Toulmin, Stephen (1996): Der Gebrauch von Argumenten. 2. Auflage. Weinheim: Beltz Athenäum.
Wagner, Anke/Wörns, Claudia (2011): Erklären lernen – Mathematik verstehen. Stuttgart: Klett-Kallmeyer.
Wittwer, Jörg/Renkl, Alexander (2008): Why Instructional Explanations Often Do Not Work: A Framework for Understanding the Effectiveness of Instructional Explanations, Educational Psychologist 43, H.1, S. 49–64. https://www.researchgate.net/publication/254303556_Why_Instructional_Explanations_Often_Do_Not_Work_A_Framework_for_Understanding_the_Effectiveness_of_Instructional_Explanations (Abfrage: 26.3.2023).
Zelcer, Mark (2013): Against mathematical explanation. In: Journal for General Philosophy of Science 44, H. 1, S. 173–192.