ISSN 2701-9012

ZMFP, Vol.4 (2023)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Reinhard Oldenburg

Die Bedeutung der Substitution für die elementare Algebra

Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg.
e-mail: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Zusammenfassung

Substitution ist der Prozess, der in einem algebraischen Ausdruck einen Teilterm durch einen anderen Term ersetzt. Substitutionen lassen sich in einem einfachen Schema klassifizieren. Ihre Bedeutung lässt sich aus theoretischer, pragmatischer und empirischer Sicht begründen. Aus diesen Erkenntnissen lassen sich Vorschläge zur Förderung des Verständnisses der Substitution im Unterricht ableiten. Dabei lassen sich auch digitale Mathematikwerkzeuge sinnvoll einsetzen.

Schlagworte

Algebra; CAS; Substitution; Technologieeinsatz

1. Einführung

Ein wesentliches Ziel des Unterrichts zur Algebra in der Sekundarstufe I ist ein Verständnis für Gleichungen und des Gleichheitszeichens. Weigand et al. (2022) beschreiben dazu Grundvorstellungen von Gleichungen, die entwickelt werden sollen: Die operationale Grundvorstellung besteht darin, das Gleichheitszeichen als eine Aufforderung zum Rechnen, also als „ergibt-Zeichen", zu interpretieren. Die relationale Grundvorstellung dagegen sieht eine Gleichung als Gebilde aus zwei Termen, die denselben Wert besitzen. Die funktionale Grundvorstellung sieht eine Gleichung als Verbindung zweier Funktionen und schließlich wird unter der Objekt-Grundvorstellung eine Gleichung gesehen als ein eigenständiges Objekt, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf. In der mathematikdidaktischen Forschung wurde schon vielfach belegt, dass Lernende aus der Grundschule vor allem die Auffassung mitbringen, dass das Gleichheitszeichen zum Rechnen auffordert, während die relationale Sicht sich erst mit der Zeit entwickelt (z.B. Borromeo Ferri & Blum, 2011).

Die relationale Grundvorstellung kann man noch einmal aufteilen in eine Vorstellung zur Wertgleichheit und eine Vorstellung zur Substituierbarkeit (Jones & Pratt, 2012). Die Vorstellung der Wertgleichheit ist eine statische: Die einfache Gleichung $10 + 10 = 20$ bedeutet etwa im finanziellen Kontext, dass zwei 10-Euro-Scheine den gleichen Wert besitzen wie ein 20-Euro-Schein. Die Substitutionsvorstellung dagegen ist dynamisch, sie leitet einen Prozess an: Man kann einen 20-Euro-Schein gegen zwei 10-Euro-Scheine eintauschen – und umgekehrt!

Dieser Beitrag analysiert das Konzept des Substituierens und damit die relationale Grundvorstellung von Gleichungen zunächst theoretisch. Dadurch wird seine Bedeutung in der (elementaren) Mathematik deutlich. Anschließend werden einige empirische Erkenntnisse zum Verständnis der Substitution dargestellt. Zum Schluss werden Vorschläge unterbreitet, wie die Kompetenz des Substituierens im Unterricht gefördert werden kann.

2. Theorie der Substitution

Substitution ist ein Prozess innerhalb der mathematischen Formelsprache, bei der ein Teil eines Terms oder einer Gleichung durch einen anderen Term ersetzt wird. In den Lehrbüchern der mathematischen Logik gibt es dazu unterschiedliche Schreibweisen[1], ich verwende hier die Folgende: $t[a \to b]$ bedeutet, dass im Term t (oder in der Gleichung t) jedes freie Auftreten von a durch b ersetzt wird. Frei bedeutet, dass die Variable nicht durch einen Quantor, ein Integral- oder Summenzeichen gebunden ist. Diese Bedingung ist im schulischen Kontext fast immer erfüllt, aber es ist doch wichtig, dass man sie versteht: Man darf etwa in $\exists x: x > 2$ oder in $\int x^2 \mathrm{d}x$ nicht einfach $x \to 1$ substituieren, denn $\exists 1: 1 > 2$ und $\int 1^2 \mathrm{d}1$ sind sinnlos.

Man kann verschiedene Verwendungen von Substitutionen unterscheiden:

- Variablen werden durch (Zahl-)Werte ersetzt. Beispiele:

  $x^2 + 1[x \to 3]$ wird zu $3^2 + 1$, also zu 10
  $x^2 + x \cdot y[x \to 3]$ wird zu $9 + 3y$
  $x^2 + x \cdot y[x \to 3, y \to 2]$ wird zu 15
  $x^2 = 2 \cdot x[x \to 3]$ wird zu falsch
  $x^2 = 2 \cdot x[x \to 2]$ wird zu wahr.

- Diese Form der Substitution nennt man auch Belegung von Variablen mit Werten. Dies legt die Bedeutung von Termen und Gleichungen fest. Beispielsweise sind zwei Terme äquivalent oder zwei Gleichungen äquivalent, wenn sie unter allen Belegungen der Variablen den gleichen Wert bzw. Wahrheitswert liefern.
  Man benötigt diese Form der Substitution auch, wenn man eine Formel zum Beispiel aus einer Formelsammlung nutzen möchte,

[1] Statt meiner Schreibweise $t[a \to b]$ verwendet etwa Bundy (1983) $(t)\{a/b\}$, Leary & Kristiansen (2015) schreiben dafür t_b^a, Rautenberg (2010) schreibt $t\frac{b}{a}$, Beckermann (2014) schreibt $[t]_a^b$ und Crabbé (2004) schließlich $t[a := b]$.

um einen Wert auszurechnen, in dem man alle bekannten Werte einsetzt.

- Variablen werden durch Terme ersetzt. Beispiele:

$$x^2 + 1[x \to a + b] \text{ wird zu } (a + b)^2 + 1$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3[r \to r_0 + \Delta r] \text{ wird zu } V = \frac{4}{3}\pi(r_0 + \Delta r)^3$$

  Die Ersetzung von Variablen durch Terme ist, wie das letzte Beispiel zeigt, typisch für die Anwendung von Formeln zur Herleitung neuer Beziehungen. Außerdem ist diese Operation beim Lösen von Gleichungssystemen (Einsetzungsverfahren) sehr nützlich.

- Teilterme werden durch Terme oder Variablen ersetzt. Beispiele:

$$\frac{1}{x^2+y^2}[x^2 + y^2 \to r^2] \text{ wird zu } \frac{1}{r^2}$$
$$x^4 + 3x^2 - 1 = 0[x^2 \to u] \text{ wird zu } u^2 + 3u - 1 = 0$$

- Diese Form der Substitution wird zum einen beim Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen benötigt, aber auch bei der Integration durch die Substitutionsmethode. Sie ist auch relevant, wenn man eine durch einen Term definierte Funktion auf einen anderen Term anwendet. Ist etwa die Funktion f definiert durch $f(x) = 2x + 1$, dann ist $f(x + 1)$ gerade das Ergebnis der Substitution $2x + 1[x \to x + 1]$, also $2(x + 1) + 1$.

Diese drei Fälle des allgemeinen Substitutionsprinzips machen schon deutlich, dass es sich um ein sehr weitreichendes, aber auch aspektreiches und damit für Lernende schwieriges Thema handelt (zu den Schwierigkeiten findet man mehr im vierten Abschnitt). Dies gilt umso mehr als neben der Anwendung der Substitution auch das Finden von passenden Substitutionen zu den Herausforderungen in diesem Bereich gehört. Wenn etwa die Gleichung $(x + 1)^4 + x^2 + 2x + 1 = 0$ gelöst werden soll, erweist es sich als äußerst hilfreich, wenn man sieht, dass diese durch $(x + 1)^2 \to u$ übergeht in $u^2 + u = 0$, deren Lösung $u = 0 \vee u = -1$ durch Rücksubstitution $(x + 1)^2 = 0 \vee (x + 1)^2 = -1$ sehr schnell zeigt, dass $x = -1$ die einzige reelle Lösung ist.

Substitution ist zudem aufs engste mit der Bedeutung von Gleichungen verbunden. So ist a eine Lösung der x enthaltenden Gleichung g, wenn

$g[x \to a]$ „wahr“ ergibt. Die oben angesprochene substitutionelle Auslegung des relationalen Gleichungsverständnisses bedeutet, dass man eine Gleichung $a = b$ als mögliche Substitution interpretiert. Das ist das Substitutionsprinzip:

> Wenn $a = b$ gilt, dann haben die Terme t und $t[a \to b]$ den gleichen Wert, und die Gleichungen g und $g[a \to b]$ haben den gleichen Wahrheitswert.

Dieses Prinzip geht auf Leibniz zurück, der auch den umgekehrten Schluss gemacht hat: Wenn man zwei Ausdrücke überall durcheinander ersetzen kann, ohne dass sich die Wahrheitswerte von Aussagen ändern, dann sind diese identisch[2] (Künne, 2010).

3. Substitution in Computeralgebrasystemen

Die Bedeutung der Substitution für die Informatik wird daraus erkennbar, dass allein durch Substitutionen universelle Berechnungen möglich sind (Baader & Nipkow, 1999). Einfache Konsequenzen davon lassen sich bereits in der Grundschule erfahren: Man legt z. B. 4 blaue Plättchen hin und gibt die Substitutionsregel, dass man ein blaues Plättchen durch 3 rote ersetzen darf, dann endet man bei $4 \cdot 3 = 12$ roten Plättchen. Startet man mit 14 roten Plättchen und wendet die umgekehrte Substitutionsregel an, landet man bei 4 blauen und 2 roten Plättchen. Multiplikation und Division mit Rest sind also sehr leicht durch Substitution realisierbar. Mit etwas mehr Arbeit zeigt sich, dass überhaupt jede mit Computern mögliche Berechnung durch Substitutionen durchgeführt werden

[2] Dieses Prinzip, dass Ununterscheidbarkeit Identität impliziert, gilt weitgehend, aber nicht uneingeschränkt: Die Quantenphysik verletzt es (so sind etwa die Teilchen in einem Bose-Einstein-Kondensat ununterscheidbar, aber nicht identisch, weil man ihre Anzahl zählen kann), aber auch die axiomatische Algebra gibt ein Gegenbeispiel: Wenn man etwa die die komplexen Zahlen als Körpererweiterung $\mathbb{C} \coloneqq \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ einführt, sind die komplexe Einheit und ihr Konjugiertes ununterscheidbar, aber nicht identisch (unterscheidbar werden sie erst, wenn man $\mathbb{C}$ in einem konkreten Modell, z.B. $\mathbb{R}^2$, realisiert).

kann. In der Tat leisten dies sogar verblüffend einfache Substitutionsregeln (Wolfram, 2002).

Praktische Bedeutung gewinnen Substitutionen in Computeralgebrasystemen, und zwar sowohl für die praktische Arbeit wie für deren Verständnis. In dem Prototypen SCAS (Oldenburg, 2017; Quellcode: https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~oldenbre/SCAS.zip) kann man Substitutionsregeln in einer Tabelle spezifizieren und damit ein eigenes Computeralgebrasystem bauen und gewissermaßen dabei zuschauen, wie es seine Arbeit durch fortgesetztes Substituieren erledigt. Abbildung 1 zeigt eine komplexe Anwendung auf Basis einer Vielzahl eingebauter Regeln (die man aber alle einzeln aus- und einschalten kann). Löscht man alle Regeln, wird etwa der Term $0 * x + 1 * y$ unverändert zurückgegeben. Man kann sich dann überlegen, dass z.B. die Regeln $0 * A \to 0, 1 * A \to A$ nützlich sind. Man braucht gut 100 Regeln, um den Großteil der Schulalgebra und Schulanalysis abzudecken.

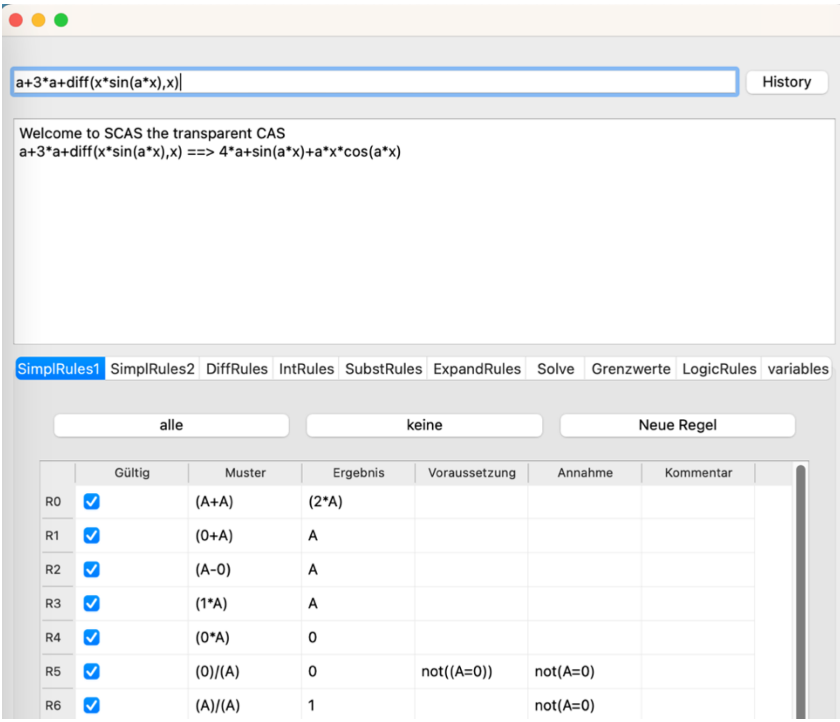

Abbildung 1: Eine Anwendung von SCAS mit vielen eingebauten Regeln

Fortgesetzte Substitution ist nicht nur eine Möglichkeit, sich vorzustellen, wie ein Computeralgebrasystem (CAS) arbeitet, sondern man muss Substitutionen auch systematisch anwenden, wenn man mit einem solchen System Probleme löst. Drijvers & Gravemeijer (2005) sprechen in diesem Zusammenhang vom Solve-Subst-Schema, das für eine erfolgreiche Nutzung von CAS entwickelt werden muss. Das Schema beschreibt, dass man bei vielen Aufgaben zunächst eine Gleichung löst und die gefundene Lösung durch Substitution anwendet. Die folgende Steckbriefaufgabe zeigt ein Beispiel (Abb. 2)

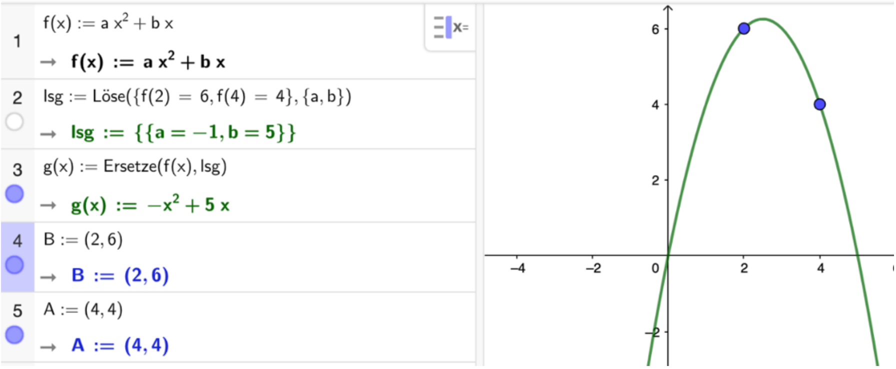

Abbildung 2: Lösung einer Steckbriefaufgabe mit CAS

Die Notation von Substitutionen ist in den verschiedenen Computeralgebrasystemen unterschiedlich. In Mathematica liefert etwa

```
x^2+y^2 /. {x->1,y->2}
```

das Ergebnis 5, während im CAS-Rechner von GeoGebra die Syntax dafür lautet:

```
Ersetze(x^2+y^2,{x=1,y=2}).
```

Dass das Gleichheitszeichen in einigen Systemen die Doppelrolle aus Ausdruck von Gleichheit (also der Feststellung eines Wahrheitswerts, Aussageform) und Beschreibung eines Substitutionsprozesses spielt, ist unglücklich, führt aber nach aller Erfahrung nicht zu Schwierigkeiten bei den Lernenden. Technologieeinsatz fächert die Bedeutungsvielfalt dieses Zeichens generell noch weiter auf, als dies schon traditionell der Fall ist (Bardini et al., 2013).

CAS bieten damit ein Umfeld, in dem man eigene Substitutionen kontrollieren kann, Substitution automatisiert durchführen lassen kann und innerhalb komplexer Problemlösungen anwenden kann. Dabei bewährt sich die obige Klassifikation von Substitutionen. Während die beiden ersten Substitutionsformen von allen Computeralgebrasystemen problemlos korrekt durchgeführt werden, führt die letzte Variante, also die Ersetzung von Teiltermen durch andere Terme, gelegentlich zu überraschenden Ergebnissen. So liefert das CAS von GeoGebra bei

```
Ersetze(x^4+x^2,x^2=u)
```

als Ergebnis $x^4 + u$. Bei

```
Ersetze(x^2+y^2+1,x^2+y^2=u)
```

wird der Ausgangsterm $x^2 + y^2 + 1$ unverändert zurückgegeben. Beides liegt daran, dass die Substitution in allen üblichen CAS rein syntaktisch durchgeführt wird: Eine Ersetzung $a \to b$ findet nur dann Anwendung, wenn a ein Teilterm ist, d.h. die Systeme wenden keine Umformungen an, um etwa x^4 als $(x^2)^2$ umzuschreiben, so dass die Substitution $x^2 \to u$ angewendet werden könnte. Analog müsste das CAS den Term $x^2 + y^2 + 1$ zu $(x^2 + y^2) + 1$ umstrukturieren, um $x^2 + y^2 \to u$ anwenden zu können. Deswegen erreicht man solche Substitutionen, die einen erheblich höheren Rechenaufwand erfordern, nur mit speziellen Befehlen, in Maple etwa mit

```
algsubs(x^2+y^2=u,x^2+y^2+1)
```

oder in Mathematica mit

```
Simplify[x^2+y^2+1,x^2+y^2==u].
```

GeoGebra verfügt nicht über solche Hilfsmittel. Wenn solche Umformungen gewünscht sind, muss man sich durch Umstellen der Gleichung in eine Form behelfen, in der ein echter Teilterm ersetzt wird:

```
Ersetze(x^2+y^2+1,x^2=u-y^2).
```

Wenn solche Phänomene beim Substituieren im Unterricht beobachtet werden, kann man dies zum Anlass nehmen, Termstrukturen und die Operationen mit Termen zu reflektieren.

4. Zur Bedeutung der Substitution für das Erlernen der Algebra

Schon in dem didaktischen Klassiker von Malle zur elementaren Algebra (Malle, 1993) wurde aus stoffdidaktischer Sicht ausführlich auf die Bedeutung der Substitution hingewiesen, die sich nach seiner Meinung – wie im Folgenden beschrieben – aus verschiedenen Quellen speist. Zum einen hilft Substitution bei der bewussten Anwendung von Regeln (Malle, 1993, S. 227ff, 242ff, Weigand et al., 2022, S. 83). Wenn etwa der Term $2x \cdot (x^2 + 1)$ auszumultiplizieren ist, spielt Substitution gleich mehrfach eine Rolle: Das Distributivgesetz $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ wird von links nach rechts gerichtet angewendet, also als Substitutionsregel $A \cdot (B + C) \to A \cdot B + A \cdot C$, um den Prozess des Ausmultiplizierens zu formalisieren. Damit diese Regel auf den vorliegenden Term passt, sind weitere Substitutionen durch Mustererkennung (pattern matching) zu identifizieren: $\{A \to 2x, B \to x^2, C \to 1\}$. Wendet man diese auf die Regel $A \cdot (B + C) \to A \cdot B + A \cdot C$ an, erhält man das Gewünschte: $2x \cdot (x^2 + 1) \to 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 1$.

Die weitere Bedeutung des Substituierens kommt nach Malle aus den nützlichen Anwendungen, beispielsweise um zunächst unverbundene Größen miteinander in Beziehung zu setzen. Die Beispiele, die es dazu gibt, werden im nächsten Abschnitt noch genauer diskutiert.

Eine der ersten Arbeiten, die das Substituieren aus empirischer Sicht beleuchtet hat, war Oldenburg (2010). In einer Studie mit 141 Schülerinnen und Schülern einer elften Jahrgangsstufe eines deutschen Gymnasiums wurden verschiedene Teildimensionen algebraischer Fähigkeiten erhoben. Es gab Aufgaben zum Rechnen mit Brüchen, zum Vereinfachen von Termen, zum Aufstellen und Interpretieren von Termen und Gleichungen. Die Erhebung der Substitutionskompetenz erfolgte in dem Test durch mehrere Items. Einige Beispiele:

- Die Funktion f ist definiert durch $f(x) = x^3 - 2$. Was ist dann $f(x + 1)$?
- Man weiß, dass $r = s + t$ und $r + t + s = 30 + 2x$. Bestimmen Sie r.
- Man weiß, dass $x = 6$ eine Lösung ist von $(x + 1)^3 + x = 349$. Wie kann man dann möglichst einfach eine Lösung finden von $(5x + 1)^3 + 5x = 349$?

Insgesamt gab es acht solche Items und die daraus gebildete Skala hat eine gute interne Konsistenz (Cronbach $\alpha = 0.72$). Auch die anderen im Test erhobenen Skalen konnten reliabel gemessen werden. Es hat sich dabei gezeigt, dass die Fähigkeit zum Substituieren recht hoch mit $r = 0.54$ mit der Leistung im Rest des Algebratests korreliert. Insgesamt zeigt sich, dass die Fähigkeit zum Substituieren eine zentrale Komponente algebraischer Kompetenz ist: Auch Implikationsanalysen (SIA, siehe Gras et al., 2008) zeigen, dass die Substitutionsskala das Lösen von Gleichungen, das Aufstellen von Gleichungen und die Arbeit mit Funktionen impliziert. Das bedeutet, dass im statistischen Querschnitt Lernende, die erfolgreich Substitutionsaufgaben lösen, auch in den anderen Bereichen erfolgreich sind (aber nicht notwendig umgekehrt).

Da dies keine Interventionsstudie war, kann man keine Kausalität als bewiesen ansehen, aber es wird doch nahegelegt, dass Substituieren eine entscheidende Teilkompetenz in der elementaren Algebra ist. Dieses Ergebnis wurde bei mehreren Testwiederholungen bestätigt. In einer Folge-Studie mit 171 Schülerinnen und Schülern der 10. Jahrgangsstufe wurde weiter gezeigt, dass eine hohe Kompetenz im Substituieren eine hohe Algebraleistung gut vorhersagt, aber insbesondere dann, wenn zusätzlich auch die Fähigkeit im Aufstellen und Interpretieren von Formeln hoch ist (Oldenburg, 2022). Auch in dieser Stichprobe zeigte sich eine hohe Korrelation zwischen Algebraleistung insgesamt und der Fähigkeit beim Substituieren.

Simsek et al. (2019) haben untersucht, wie die verschiedenen Konzeptionen des Gleichheitszeichens (Operationszeichen, Gleichheit, Substitution) nach Jones et al. (2012) mit der Leistung in einem Algebra-Test zusammenhängen. Dazu haben sie 57 14-16-jährige Jugendliche untersucht. Zunächst wurden ähnlich wie bei Jones et al. (2012) die Zustimmung zu Aussagen gemäß der drei Konzeptionen über das Gleichheitszeichen abgefragt. Im restlichen Test wurden algebraische Fähigkeiten, insbesondere im Umgang mit linearen Gleichungen, geprüft. Dabei zeigte sich, dass eine starke Zustimmung zur Interpretation des Gleichheitszeichens als Operationszeichen signifikant negativ mit der Algebraleistung korreliert (r = -0.34), während die Gleichheitsinterpretation ($r = 0.38$) und insbesondere die Substitutionsinterpretation ($r = 0.46$) signifikant positiv mit der Leistung korrelieren. Das bedeutet, dass Lernende, die die Rolle der Gleichung für die Substitution sehen, insgesamt besser sind in Algebra, aber es beweist noch nicht, dass expliziter Substitutionsunterricht die Algebraleistung insgesamt verbessern kann – aber die Vermutung, dass dem so ist, wird deutlich gestärkt. Weiter haben die Autoren gefunden, dass die Korrelation der Substitution mit der Algebra-leistung vor allem für solche Aufgaben hoch ist, die ein konzeptuelles Verständnis der Algebra erfordern, während es bei Aufgaben zu reinen Rechenroutinen eine geringere Korrelation gibt.

Oben wurde darauf hingewiesen, dass Gleichungen Substitutionen ermöglichen. Es ist deswegen von Interesse, ob Lernende diese Bedeutung erkennen. Jones et al. (2012) konnten nachweisen, dass es zwischen englischen und chinesischen Schulkindern im Alter von 11-12 Jahren substanzielle Unterschiede gibt bei der Interpretation des Gleichheitszeichens. Den Kindern wurden Aussagen zum Gleichheitszeichen vorgelegt, z.B. „= bedeutet, dass danach die Antwort kommt" (Operationszeichen), „= bedeutet, dass beide Seiten den gleichen Wert haben" (Gleichheit) und „= bedeutet, dass das auf der einen Seite das auf der anderen Seite ersetzen kann" (Substitution). Es zeigte sich, dass die Sätze zum Operationszeichen unter englischen Kindern mehr Zustimmung fanden als unter chinesischen, die Gleichheitsinterpretation war etwa gleich ausgeprägt, aber die Sätze zur Substitution fanden stärkere Zustimmung bei den chinesischen Kindern. Diese Unterschiede belegen nicht die Wichtigkeit der Substitutionsauffassung, aber sie zeigen, dass unterschiedlicher Unterricht offensichtlich die Interpretation von Gleichungen als Substitutionsregeln erschweren oder erleichtern kann.

Jones & Pratt (2012) haben mehrere digitale Lernumgebungen entwickelt, mit denen Schüler und Schülerinnen der unteren Sekundarstufe (ca. 10 Jahre) arithmetische Beziehungen zwischen Zahlen mithilfe von Substitutionen erkennen können. Die an einem Computer zu bearbeitenden Aufgaben bestanden aus arithmetischen Rechnungen, etwa $21 + 9$ und einer Auswahl an Gleichungen, z. B. $21 = 11 + 10$, $9 + 10 = 19$, $11 + 9 = 20$. Die Schüler mussten die Gleichungen wählen, die die Rechnung leichter machten. Die Autoren schlussfolgern aus ihren Beobachtungen, dass solche Aktivitäten das relationale Verständnis des Gleichheitszeichens fördern und so den Übergang zur symbolischen Algebra fördern können.

Es sei aber angemerkt, dass an dieser Studie auch Kritik geübt wurde: Kieran und Martínez-Hernández (2022) behaupten, Gleichsein und Substituierbarkeit seien exakt das Gleiche. Nun gibt es auch Substitutionen wie $x \to x + 1$ die gar keine Gleichheit ausdrücken sollen und die daher gänzlich abseits des Disputs von Jones et al. (2012) und Kieran und Martínez-Hernández (2022) liegen. Wie am Ende von Abschnitt 2 diskutiert, kann man in der Tat für weite Bereiche der Mathematik feststellen, dass Substituierbarkeit unter Erhaltung aller (Wahrheits-)Werte und Gleichheit synonym sind, und damit haben Kieran und Martínez-Hernández (2022) auf mathematischer Ebene Recht, ich denke aber, dass sie auf didaktischer Ebene Unrecht haben: Gleichheit ist ein statisches Konzept, Substituieren ein dynamischer Prozess. Die Verbindung von Prozess und Konzept nennt Tall (2013) ein Procept – und genau das könnte hier vorliegen. Es wäre ein didaktischer Fehler, die Bedeutung der Prozesse im Lernprozess zu unterschätzen.

Wie in der Forschung üblich kann jede einzelne Studie nur einen Aspekt beleuchten, aber die Zusammenschau der Ergebnisse zeigt doch ein weitgehend konsistentes Bild: Gleichungen (auch) als Substitutionsregeln sehen zu können und Substitutionen sinnvoll durchführen zu kennen, hängt eng mit der Leistung in Algebra insgesamt zusammen.

5. Vorschläge für den Unterricht

Die wissenschaftliche Erkenntnislage zu Unterrichtsmethoden, die das Substituieren besonders fördern, ist noch dünn. Dennoch lassen sich aus den Vorhandenen Studien und der fachlogischen Struktur einige Empfehlungen ableiten. Diese sind nicht so gemeint, dass es eine eigene Unterrichtseinheit zum Substituieren geben sollte – ein solches „Stricken ohne Wolle“ ist nie empfehlenswert – sondern dass die Rolle der Substitution bei den verschiedenen algebraischen Arbeitsprozessen bewusst gemacht wird. Bevor dies erfolgreich geschehen kann, ist es wichtig, ein Verständnis für Termstrukturen aufzubauen. Nur wenn der rekursive Aufbau[3] von Termen klar ist, kann erfolgreich substituiert werden. Das

[3] Terme haben eine rekursive Struktur, das bedeutet, dass man z.B. für jede Variable eines Terms einen beliebigen anderen Term einsetzen kann. Deutlich wird das, wenn man die Terme als Termbäume darstellt: Eine Variable ist dann ein Blatt des Baumes und man kann an seine Stelle einen beliebigen anderen Termbaum setzen. Eine andere Art, die

zeigt sich beispielsweise, wenn Lernende die Frage beantworten sollen, wie sich der Flächeninhalt eines Rechtecks vergrößert, wenn jede Seite um 1 verlängert wird, und sie in der Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks $A = a \cdot b$ die Substitution $\{a \to a + 1, b \to b + 1\}$ fehlerhaft ausführen mit dem Ergebnis $A = a + 1 \cdot b + 1$. Solche Fehler auf syntaktischer Ebene lassen sich vermeiden, wenn die Bedeutung der Formeln klargemacht wird, hier etwa durch eine Skizze des Rechtecks und seiner Vergrößerung. Das Ziel, die algebraische Formelsprache zu erlernen, bedeutet aber gerade, dass auch ohne solche Unterstützung korrekt gearbeitet wird. Und selbst, wenn die Substitution korrekt ausgeführt wird, muss verstanden werden, dass Substitutionen nicht immer Äquivalenzumformungen einer Gleichung darstellen und dass daher die Referenz von A in beiden Gleichungen verschieden ist: In $A = a \cdot b$ steht A Für den Inhalt des kleinen Rechtecks, in $A = (a + 1) \cdot (b + 1)$ für den des großen.

Schon Malle hat eine ganze Reihe von Aufgaben bereitgestellt, die den Lernenden den Sinn der Substitution nahebringen sollen (Malle, 1993, S. 259ff). Er gliedert seine Aufgaben nach pragmatischen Zielen dessen, was mit den Substitutionen erreicht werden soll. Diese werden hier kurz in der Formulierung von Malle (1993) mit teilweise eigenen Beispielen rekapituliert:

- Substitution ermöglicht es, Sachverhalte mit unterschiedlicher Detailliertheit allgemein zu beschreiben. Ein Beispiel ist die Gleichung für den Oberflächeninhalt eines Zylinders, die entweder in einer groben, aber die Struktur des Zylinders gut reflektierenden Art[4] als $O = 2G + M$ angegeben werden kann, oder detaillierter als $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Der Wechsel zwischen beiden Varianten gelingt durch die Substitutionen $\{G \to \pi r^2, M \to 2\pi rh\}$ bzw. $\{\pi r^2 \to G, 2\pi rh \to M\}$.

---

rekursive Struktur zu betonen, ist eine Beschreibung der Syntax in folgender Form: Ein Term ist eine Zahl oder eine Variable oder eine Folge eines Terms, eines Operators und eines weiteren Terms, etc. Kurz: Term:=Zahl | Variable | (Term) | Term+Term | Term – Term |…

[4] Hier stehen O, G, M für die Flächeninhalte der gesamten Oberfläche, der Grundfläche und des Mantels.

- Durch Substitution kann man die Anwendung von Regeln erklären (etwa im obigen Beispiel zum Distributivgesetz).
- Durch Substituieren kann man kompliziertere Formeln in einfache zerlegen oder einfache Formen zu komplizierteren zusammensetzen. Insbesondere kann man deutlich zum Ausdruck bringen, von welchen Größen ein komplexer Funktionsterm abhängt. Ein eigenes Beispiel, das sich nicht bei Malle findet: Für die untere bzw. oberer Grenze des 95%-Konfidenzintervalls zur Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit bei einer Bernoullikette mit k Erfolgen bei n Versuchen findet man z.B. in einer Formelsammlung die Gleichung

  $$p_{u,o} = \frac{k}{n} \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$

  Durch die Substitution $\frac{k}{n} \to \hat{p}$ erkennt man die Rolle des Schätzwertes deutlicher und die Formel wird übersichtlicher und daher verständlicher:

  $$p_{u,o} = \hat{p} \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}.$$

- Durch Substituieren kann man Größen aus einem System von Formeln eliminieren. Auch hier sei ein eigenes Beispiel herangezogen: In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Standardbezeichnungen a, b für die Längen der Katheten und c für die Länge der Hypotenuse sei die Höhe h über der Hypotenuse eingezeichnet. Dadurch zerfällt die Hypotenuse in zwei Abschnitte: $c = p + q$. Außerdem entstehen durch die Höhe zwei kleinere Dreiecke, die ebenfalls rechtwinklig sind, so dass die Beziehungen gelten: $a^2 + b^2 = c^2, a^2 = h^2 + p^2, b^2 = h^2 + q^2$. Wenn man aus diesen vier Gleichungen die Variablen a, b, c durch wiederholtes Substituieren eliminiert, ergibt sich recht leicht $h^2 = pq$, also die Aussage des Höhensatzes.
- Durch Substituieren kann man zunächst unverbundene Größen miteinander in Beziehung setzen. Dies illustriert Malle an der folgenden, interessanten Aufgabe: Gib eine Beziehung zwischen dem Flächeninhalt $A = \pi r^2$ und dem Umfang $U = 2\pi r$ eines Kreises an. Durch Umstellen der zweiten Gleichung zu $r = \frac{U}{2\pi}$

ergibt sich eine Form, die in die erste Gleichung eingesetzt werden kann: $A = \frac{U^2}{4\pi}$.

Diese 30 Jahre alte Liste wurde hier wiederholt, um zu zeigen, dass sie immer noch aktuell ist. Insbesondere ist es heute möglich zu sehen, dass diese Funktionen des Substituierens gerade auch durch Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht unterstützt werden können, und gleichzeitig wichtiger werden. Ein typisches algebraisches Vorgehen zur Bearbeitung einer Problemsituation besteht bekanntlich darin, zunächst für alle unbekannten Größen Variablen einzuführen und systematisch nach allen Beziehungen zwischen diesen zu suchen. Durch Substitution kann man dann aus diesen Beziehungen neue erschließen und so gegebenenfalls das Problem lösen. Dies wird nun an einfachen und komplexen Aufgaben illustriert.

Substitution hilft insbesondere beim schrittweisen Lösen eines Problems. Ein einfaches Beispiel: Es soll der Gewinn eines Unternehmens berechnet werden. Dann kann man in einem ersten Schritt die einfache Gleichung $G = E - A$ für den Gewinn berechnet aus Einnahmen und Ausgaben aufschreiben und im nächsten Schritt für E und A sinnvolle Terme substituieren. In einem einfachen Fall könnten sich etwa die Einnahmen schlicht aus der Anzahl n der verkauften Einheiten und dem Verkaufspreis P einer Einheit ergeben: $E \rightarrow n \cdot P$.

Schrittweises Substituieren kann auch helfen, in komplexen Situationen zielgerichtet vorzugehen. Anders als Gleichungen drücken Substitutionen eine Richtung der Umformung aus. Dies hilft etwa bei der korrekten Berechnung von Größen mit physikalischen Einheiten. Ein nicht triviales Beispiel: Wie groß ist die Masse der Atmosphäre? Die Gewichtskraft der Luft übt einen Druck von etwa $p = 10000\ \mathrm{Pa}$ aus. Der Druck ist die Kraft pro Fläche $p = \frac{F}{A}$ und die Gewichtskraft einer Masse ist

$$F = m \cdot g, g = 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}.$$

Diese Gleichungen, sinnvoll als Substitutionen gedeutet, liefert eine Kette aus Substitutionen:

$$m = \frac{F}{g} = \frac{pA}{g} = \frac{p \cdot 4\pi r^2}{g} = \frac{100000\ \mathrm{Pa} \cdot 4\pi(6380\ \mathrm{km})^2}{\frac{9.81\ \mathrm{N}}{\mathrm{kg}}}$$

$$= \frac{\frac{100000\ \mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 4\pi(6380 \cdot 1000\ \mathrm{m})^2}{\frac{9.81\ \mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 5.2 \cdot 10^{18}\mathrm{kg}.$$

Dabei wurde nur beim letzten Gleichheitszeichen algebraisch umgeformt und gerechnet, die Gleichheitszeichen davor ergeben sich allein aus Substitutionen. Durch das Substituieren erspart man sich auch Denkfehler im Umrechnen der Einheiten. Es sei bemerkt, dass diese Rechnung nicht nur von mathematischem Interesse ist, sondern man darauf aufbauend weiter leicht ausrechnen kann, wie viel 1ppm davon ist und wieviel CO_2 dem entspricht.

Substitutionen laden zum Spielen ein. Der Heron-Algorithmus zur Approximation der Quadratwurzel aus a besteht darin, einen approximativen Wert x zu verbessern, indem ihn durch eine Substitution $x \to \frac{x+\frac{a}{x}}{2}$ ersetzt. Diese Iteration wiederholt anzuwenden ist von Hand mühsam, aber mit einem CAS ein Kinderspiel. In Mathematica schreibt man einfach:

```
H= x-> (x+a/x)/2; (x/.H/.H/.H)/.x->1.
```

Dabei wurde am Ende noch 1 als ersten Näherungswert eingesetzt. Das Ergebnis ist ein Term in der Variablen a, der die Wurzelfunktion sehr gut approximiert (es ist eine sogenannte Pade-Approximation). Die entsprechende Lösung in GeoGebra erfordert etwas mehr Tipparbeit (die letzte Zeile ist notwendig, weil ein Term in a nicht geplottet werden kann), geht ansonsten aber leicht, wie die Abbildung 3 zeigt.

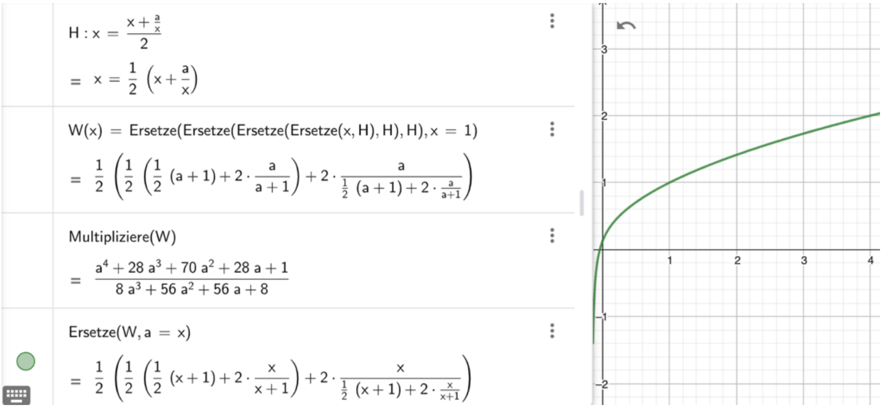

Abbildung 3: Iterierte Substitutionen, die die Wurzelfunktion approximieren

Im dritten Abschnitt wurde darauf hingewiesen, dass Computeralgebrasysteme im Hinblick auf Substitutionen interessant sind. In Oldenburg (2023, und Verweise darin) wurde ein Curriculumsentwurf vorgeschlagen, der Computertechnologie intensiv einbezieht.

Im obigen Beispiel der Lösung der Gleichung $(x+1)^4 + x^2 + 2x + 1 = 0$ wurde offensichtlich, dass das Erkennen von gemeinsamen Teilausdrücken eine wesentliche Voraussetzung für geschickte Substitutionen ist. Dieser Aspekt wird auch von Liang (2021) hervorgehoben. Sie argumentiert beispielsweise, dass man die Bedeutung der Periode in $x = 0,\overline{7} = 0{,}777\ldots$ produktiv nutzen kann, wenn man sieht, dass $x = 0,\overline{7} = 0{,}7 + 0{,}0\overline{7} = 0{,}7 + \frac{x}{10}$, also $10x = 7 + x$, oder $x = \frac{7}{9}$.

Wie aber können Lernende erkennen, was geeignete Substitutionen sind, welche Strategien dazu kann man vermitteln? Dazu gibt es nach meinem Kenntnisstand keine systematischen didaktischen Überlegungen, auch wenn die Rolle der Substitution für das Strukturverständnis diskutiert wird (Weigand et al, 2022, S. 103). Die Notwendigkeit, Strategien zum Finden von Substitutionen zu explizieren, ergibt sich aber dann, wenn Computer programmiert werden sollen, dies zu tun. Insofern ist es nicht überraschend, dass man ausführlichere Überlegungen zu dem Thema in der mathematischen Informatik findet. Bundy (1983) listet eine Vielzahl von Strategien im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen auf, von denen etliche aber auch auf Substitutionen zielen:

- Generell bietet sich Substitution an, wenn ein Term mehrfach in einem größeren enthalten ist.
- Homogenisierung: zur Vorbereitung von Substitution kann es sinnvoll sein, Rechnungen aufzulösen. Kommt etwa in einem Term $\boldsymbol{x}^2$ und $\boldsymbol{x}^4$ vor, bietet es sich an, $\boldsymbol{x}^4 = (\boldsymbol{x}^2)^2$ umzuformen und zu substituieren. Generell ist es sinnvoll, Teilterme möglichst einander ähnlich zu machen.
- Substitution und Kombination abwägen: Wenn gleiche Teilterme auftreten, bietet sich immer Substitution an, manchmal aber auch – falls möglich – die Kombination, die die Zahl des Auftretens der gleichen Terme reduziert, z. B.:

  $$\mathbf{sin}(\boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{cos}(\boldsymbol{A}) \to \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{sin}\ (\mathbf{2}\boldsymbol{A}).$$

6. Fazit

Die hier zusammengetragenen Befunde belegen deutlich, dass Substituieren eine zentrale algebraische Operation ist. Sie sollte im Unterricht durch geeignete Übungen gefestigt und als Strategie zur algebraischen Problemlösung behandelt werden. Dabei bieten sich Computeralgebrasysteme in vielfältiger Weise an.

Leider gibt es noch keine wissenschaftlich systematisch ausgewerteten Interventionsstudien, die in Kombination mit einer Leistungsmessung untersuchen, inwieweit eine gezielte Förderung der Substitutionsfähigkeiten die Algebraleistungen insgesamt erhöht. Die vorliegende Arbeit zeigt aber, wie stoffdidaktische Analysen und empirische Befunde zusammenspielen können, um ein stimmiges und differenziertes Bild zu geben, aus dem Handlungsempfehlungen abgeleitet werden können. Für die Substitution kann man aus den konsistenten Ergebnissen schlussfolgern, dass sie eine algebraische Teilkompetenz ist, die in ihrer Bedeutung oft noch unterschätzt wird, und deren gezielte Förderung das Erlernen der schulischen Algebra fördern kann.

7. Literaturverzeichnis

Baader, F., & Nipkow, T. (1999). *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press.

Bardini, B., Oldenburg, R., Stacey, K. & Pierce, R. (2013). Technology prompts new understandings: The case of Equality. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Hrsg.) *Mathematics education: yesterday, today and tomorrow: proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (S. 82-89). MERGA.

Beckermann, A. (2014). *Einführung in die Logik*. De Gruyter Verlag. https://doi.org/10.1515/9783110354096

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2011 (S. 127–130). WTM.

Bundy, A. (1983). *The Computer Modeling of Mathematical Reasoning*. Academic Press.

Crabbé, M. (2004). On the Notion of Substitution. *Logic Journal of the IGPL*, 12, 111–124. https://doi.org/10.1093/jigpal/12.2.111

Donovan, A.M., Stephens, A., Alapala, B. et al. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM – Mathematics Education* 54, 1199–1213. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y

Drijvers P., & Gravemeijer K. (2005). Computer Algebra as an Instrument: Examples of Algebraic Schemes. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Hrsg.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* Mathematics Education Library, vol 36. Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_8

Gras, R. Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (2008). *Statistical Implicative Analysis.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 166–176. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.05.003

Jones, I., & Pratt, D. (2012). A substituting meaning for the equals sign in arithmetic notating tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(1), 2–33. https://doi.org/10.5951/jresematheduc. 43.1.0002

Kieran, C., & Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM – Mathematics Education*, 54, 1215–1227. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5

Künne, W. (2010). „Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate.“ – Leibniz über Identität und Austauschbarkeit. *Jahrbuch der Göttinger Akademie der Wissenschaften,* 2009(1), 110-119. https://doi.org/10.1515/9783110222968.110

Leary, C.C., & Kristiansen, L. (2015). *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. Milne Library.

Liang, S. (2021). Equivalence and substitution: tools for teaching meaningful mathematics. *For the Learning of mathematics*, 41(1), 41-43.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.

Oldenburg, R. (2010). Structure of algebraic competencies. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne and F. Arzarello (Hrsg.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 579-588). Institut National de Recherche Pédagogique Lyon.

Oldenburg, R. (2017). Transparent rule-based CAS to support formalization of knowledge. *Mathematics in Computer Science* 11, 393-399. https://doi.org/10.1007/s11786-017-0300-x

Oldenburg, R. (2022). Do fuzzy-logic non-linear models provide a benefit for the modelling of algebraic competency? *International Journal of Research in Education Methodology,* 13, 1-10. https://doi.org/10.24297/ijrem.v13i.9198

Oldenburg, R. (2023). A Technology-oriented Algebra Curriculum. In J. Morska, & A. Rogerson (Hrsg.), *Innovative Teaching Practices, Proceedings of the First International Symposium of The Mathematics Education for the Future Project*, (S. 168-173). WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959872508.0.32

Rautenberg, W. (2010). *A concise introduction to mathematical logic*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1221-3

Simsek, E., Xenidou-Dervou, I., Karadeniz, I., & Jones, I. (2019). The Conception of Substitution of the Equals Sign Plays a Unique Role in Students’ Algebra Performance. *Journal of Numerical Cognition*, 5(1), 24-37. https://doi.org/10.5964/jnc.v5i1.147

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press. https://doi:10.1017/CBO9781139565202

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media.

Zitation:

Oldenburg, R. (2023). Die Bedeutung der Substitution für die elementare Algebra. *Zeitschrift für Mathematik in Forschung und Praxis*, Nr. 4, https://doi.org/10.48648/b2sf-h035