UNIVERSITÄT AUGSBURG
Universitätsbibliothek

OPEN ACCESS
OPUS AUGSBURG

Von der Schönheit der Kunst der Logik

Uwe Meixner

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Meixner, Uwe. 2024. *Von der Schönheit der Kunst der Logik*. Augsburg: Universität Augsburg.

Nutzungsbedingungen / Terms of use:

licgercopyright

Dieses Dokument wird unter folgenden Bedingungen zur Verfügung gestellt: / This document is made available under these conditions:
Deutsches Urheberrecht
Weitere Informationen finden Sie unter: / For more information see:
https://www.uni-augsburg.de/de/organisation/bibliothek/publizieren-zitieren-archivieren/publiz/

Uwe Meixner

Von der Schönheit der Kunst der Logik

Universität Augsburg 2024

Ad pulchritudinem tria requiruntur: integritas, consonantia, claritas.

(Vgl. *A Portrait of the Artist as a Young Man*, Kap. V, und *Summa Theologiae* I, 39, 8.)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort ……5

0. Sätze, Schlüsse, Folgerungsverhältnisse zwischen Schlüssen bzw. Sätzen – Satzformeln, Schlussformeln, Regelformeln – logische Validität – die Formelsprache *Sigma* ……..10

Teil 1: Aussagenlogiken ……28

1. Allgemeines zu den Kalkülen; sodann der Schlussformelkalkül **Alpha** der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik ……29

2. Der Satzformelkalkül **Beta** (**Frege-Łukasiewicz**) der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik, der Satzformelkalkül **Beta*** und der Kalkül **Alpha-Beta*-Hybrid** ……49

3. Der Schlussformelkalkül **Gamma** einer alethisch-modalen Aussagenlogik, sowie der Schlussformelkalkül **Gamma*** einer anderen alethisch-modalen Aussagenlogik ……..75

4. Der Kalkül **Delta** der intuitionistischen Aussagenlogik, und der Kalkül **Delta*** ……..104

5. **Delta** in **Gamma*** ……..130

6. Kalküle im Umkreis von **Alpha** und **Delta** und der Hauptsatz über das Verhältnis zwischen **Alpha** und **Delta** ……..152

Teil 2: Prädikatenlogiken ……167

7. Der Schlussformelkalkül **Pi-Alpha** der klassischen Prädikatenlogik (1. Stufe) mit Identität und Kennzeichnung ……168

8. Die Schlussformelkalküle **Pi*-Alpha** und **Pi*2-Alpha** einer *existenziellen* Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung ……202

9. Die Schlussformelkalküle **Pi**-Alpha** und **Pi**2-Alpha** einer *meinongschen* Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung ……226

10. Die Schlussformelkalküle **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** einer alethisch-modalen Prädikatenlogik mit Identität, aber ohne Kennzeichnung ……249

11. Das Substitutionsproblem modaler Prädikatenlogik und die Kalküle **Pi+-Gamma** und **Pi*+-Gamma**, sowie **Pi++-Gamma** ……..276

12. Der Kalkül **Pi-Delta** der intuitionistischen Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung ……..332

Index der kalkülbezogen gelisteten Prinzipiennamen (gemäß ihrem ersten erklärten Auftreten) ……370
Index der inhaltlich beschreibenden Prinzipiennamen (gemäß ihrem ersten erklärten Auftreten) ……373
Ein Beispiel logischer Argumentationsanalyse ……376
Einige Aufgaben……385

Vorwort

Der Titel dieses Buches ist das – modifizierende – Echo des Titels eines spätmittelalterlichen Werkes zur Logik: Walter Burleighs *De puritate artis logicae*. Außer dieser Anähnlichung der Titel haben die beiden Bücher manches gemeinsam, und vieles nicht, jedenfalls aber beide den gewissermaßen liebenden Blick auf *das formal Logische* in seiner Reinheit und Schönheit. Gemeint damit ist *im vorliegenden Buch* zum einen die Reinheit und Schönheit logischer Formen, die in der heutigen Zeit sinnlich veranschaulicht werden in den Formeln einer Symbolsprache (wovon Burleigh noch weit entfernt ist); zum anderen die Reinheit und Schönheit rein syntaktischer, rein nach Formelgestalt geführter strenger Beweise. Deren Schönheit ist schon typographisch anschaulich und dadurch sinnlich; wird aber eine Formelfolge als Beweis nachvollzogen, dann verbindet sich mit der sinnlichen Freude an der Gestalt von Zeichen und Zeichenfolgen und Folgen von Zeichenfolgen die reinste geistige Freude: diejenige, die verbunden ist mit der erstaunenden Einsicht in die strenge Gesetzmäßigkeit der Konstruktion eines formalen Gebildes, das zunächst aus den vorgegebenen „Materialien“ gar nicht nach Gesetzen konstruierbar schien. Und potenziert ist diese Freude, wenn man *selbst* den Beweis nach Gesetzen konstruiert hat; es tritt dann hinzu die Befriedigung durch das Erreichen des gesetzten Ziels.

Zugleich kann der Vorwurf der Inhaltslosigkeit – des bloßen „Glasperlenspiels“ – nicht erhoben werden; denn die Formeln haben ja eine Bedeutung, welche jederzeit vergegenwärtigt werden kann, indem der rein syntaktische Blick auf sie sich zu einem syntaktisch-*cum*-semantischen Blick modifiziert. Dabei ist die Bedeutung der Formeln zudem eine *bedeutende*: Sofern die Formeln in Beweisen konstruierbar sind, handelt es sich bei ihnen um logische Gesetze – bei deren Nichtbeachtung wir im Denken fehlgehen, indem wir eine Konsequenz, die wir ziehen, für eine *logische* Konsequenz halten, obwohl sie gar keine solche ist; oder eine logische Konsequenz, die wir ziehen sollten, nicht ziehen, weil wir sie gar nicht sehen.

Dieses Buches führt die – nun eben keineswegs „leere“ und „oberflächliche“, sondern tiefsignifikante – Schönheit der Kunst der Logik phänomenologisch breit vor Augen: durch die Präsentation vieler Beweise vieler logischer Gesetze in mehreren verschiedenen, dabei aber an der Wurzel miteinander verbundenen logischen und symbolsprachlichen Beweissystemen. Die logische Phänomenologie – zu der auch gehört, den logischen Gesetzen einen

Namen zu geben – kommt ja bei der, gewissermaßen, *lieblosen* Art und Weise, in der Logik heutzutage an den Universitäten den Studierenden vermittelt wird, sehr zu kurz. Wer für die Aussagenlogik ein „Entscheidungsverfahren“ und für die Prädikatenlogik ein „mechanisches Beweisverfahren“ beherrscht, weiß von Logik tatsächlich nicht viel. Man ist dann zwar *im Prinzip* imstande, die Schritte einer mathematischen, philosophischen, juristischen oder sonst wie gearteten Argumentation auf ihre Schlüssigkeit zu überprüfen – nur wird man diese Überprüfung wegen der übermäßigen Beschwerlichkeit, die mit mechanischen Prozeduren in realistischen Fällen verbunden ist, nur allzu gerne unterlassen. Davon, wie Logik *tatsächlich* in Argumentationen zum Einsatz kommt, hat man, wenn man nur mit mechanischen Überprüfungsverfahren ausgerüstet ist, noch keine Ahnung, weil man die Anwendungen der logischen Gesetze überhaupt nicht sieht, und zwar deshalb nicht sieht, weil man gar nicht in nennenswertem Umfang weiß, was – welche Gesetze – die logischen Gesetze überhaupt sind. Erst recht werden mechanische Überprüfungsverfahren nicht nennenswert behilflich sein, wenn man *selbst* logisch korrekt argumentieren möchte, *selbst* eine logisch schlüssige Argumentation hinstellen möchte. Dazu muss man vielmehr die logischen Gesetze im geistigen Werkzeugkasten *zuhanden* haben – was *nicht* der Fall ist, wenn man nur mechanische Überprüfungsverfahren beherrscht; man muss für das eigene Argumentieren die logischen Gesetze – sie verstehend nachvollziehend – in hinreichender Vielfalt gut kennengelernt haben, in solcher Weise, dass man sie auch wiedererkennt (also sie am besten *unter einem Namen* kennenlernt). Nur dann, wenn man *Umgang* mit ihnen hatte, wird man sie in eigenen Argumentationen *anwenden* können.

Die Stärkung der logischen Intuition durch vielfachen aufmerksamen Umgang mit den „Blumen des Logischen“ – kurz: durch logische Phänomenologie – ist eines der Anliegen dieses Buches. Vielleicht kann dadurch der eine oder die andere dazu angeregt werden, selbst *das Spiel des Beweisens* in einem der dargebotenen Kalküle – einem der symbolsprachlichen logischen Beweissysteme – zu spielen. Dieses Spiel – kein Glückspiel, sondern konstituiert durch Zugfreiheit im Rahmen der Regeln, in diesem Sinne Raum bietend für intelligente Kreativität – ist wegen des damit verbundenen echten Erkenntnisgewinns allemal geistig nahrhafter als gängige Computerspiele – und macht gewiss nicht weniger Freude, sobald man es beherrscht. Sein Spielfeld ist unendlich groß. Die in diesem Buch einzeln bewiesenen „Blumen des Logischen“ erschöpfen ja noch nicht einmal die logischen Gesetze, die in mathematischen, philosophischen, juristischen oder anderen Argumentationen *tatsächlich*

zum Einsatz kommen; in den Kalkülen aber sind noch unendlich viel mehr als diese beweismäßig implizit.

Für die Kunst der Logik gilt der Spruch gewiss: „Kunst kommt von Können" – ein Können, das durch dieses Buch gründlich gefördert werden soll. Ein anderes – theorieorientierteres – Anliegen dieses Buches ist die Ablösung der Logik von der mengentheoretischen Modelltheorie. Es ist dabei unbestritten, dass der modelltheoretische Zugang zur Logik in sich interessant ist, interessante Fragen aufwirft und beantwortet. Eine große Stärke von ihm ist die quasi-anschauliche Widerlegung der logischen Validität von Formeln durch die Findung von mengentheoretisch konstruierten relevanten Modellen, die von den Formeln nicht erfüllt werden. Aber zur *Begründung* der Logik kann der modelltheoretische Zugang nichts beitragen; denn, was auch immer das logische System sein mag, die zugehörige modelltheoretische Semantik wird sich schon finden: Modelltheoretisch kann man Beliebiges begründen. Die Begründung der Logik – oder *einer* Logik – muss vielmehr sein, dass sie in Gesetzesformeln widerspiegelt, was *schon rein aus formal-analytischen Gründen* in einem *ausgewählten*, eventuell auch *zubereiteten*, Teil der Umgangssprache – im Buch wird es „Normalsprache" genannt – an Sätzen, Schlüssen und Schlussregeln *valide* ist.

Zudem: In diesem Buch geht es nicht nur um die Schönheit und Reinheit logischer Formen, sondern auch um die Reinheit *der Methoden* in deren Betrachung (der Anklang des Titels dieses Buches an den Titel des mittelalterlichen Werkes bezieht gerade auch von dorther Berechtigung). Die Reinheit der Kunst der Logik besteht *auch* in einem Sich-Enthalten von für Logikbetrachtung und -begründung *ontologisch voraussetzungsreichen* Rahmentheorien, insbesondere von der Axiomatischen Mengenlehre (in deren Rahmen die modelltheoretische Semantik eines Logiksystem standardmäßig formuliert wird). Es sei ausdrücklich festgehalten: Die Legitimität der Anwendung *solcher* Rahmentheorien auf die Logik wird durch das Sich-Enthalten von ihnen nicht bestritten; ohne diese Anwendung wären ja auch viele bedeutende gesicherte Erkenntnisse *über* die Logik kaum zu erreichen gewesen. Doch gehören diese Resultate entschieden der *Meta*logik an, nicht der Logik selbst; und sie sind nun eben nicht *rein logisch* gewonnen.

„Von der Reinheit der Kunst der Logik" wäre also sehr wohl *ebenfalls* ein passender Titel für dieses Buch gewesen; aber der genannte Titel ist ja schon besetzt – und das seit vielen Jahrhunderten. Der Inhalt des Buches nun weist einige Besonderheiten auf; sechs dieser Besonderheiten seien vorab angedeutet: (1.) die Begründung der betrachteten Logiken –

ohne modelltheoretische Ausmalung – auf der Grundlage des je zugehörigen Begriffs der formal-analytischen (oder: logischen) Validität, bezogen auf eine gewisse zugehörige Normalsprache (davon war gerade schon die Rede); (2.) die Darstellung der betrachteten Logiken durch Kalküle, mit denen das syntaktische (kalkülmäßige) Beweisen tatsächlich Freude macht, weil es leicht „in Fluss kommt“ und „fließt“; (3.) die Darstellung der alethisch-modalen Aussagen- und Prädikatenlogiken *ohne* eine Erweiterung der Ausdrucksmittel: es wird dafür *kein* neuer Operator hinzugenommen; (4.) die unorthodoxe Behandlung der Logik der Kennzeichnungsterme (und mitfolgend: der Quantifikation) im Rahmen verschiedener Prädikatenlogiken; (5.) die umfassende Betrachtung und Begründung der intuitionistischen Aussagen- und Prädikatenlogik; (6.) die umfassende Betrachtung und (für verschiedene Normalsprachen) mehrfache Lösung des Substitutionsproblems modaler Prädikatenlogik.

Einiges in diesem Buch – dieser Verbundbetrachtung logischer Systeme – könnte neu sein. Doch überblicke ich nicht annähernd die Literatur, die auch in einer Nischendisziplin – wie der *mit philosophischem Impetus* betriebenen formalen Logik – unüberblickbar geworden ist. Immerhin bin ich mir – jeden Neuheitsanspruch von vornherein einschränkend – bewusst, außer durch meine logische Grundausbildung (durch die Schriften von Franz von Kutschera und M. J. Cresswell/G. E. Hughes) und die weitschweifende Gelegenheitslektüre logischer Texte, von Ideen der folgenden Autoren in Teilen dieses Buches inspiriert worden zu sein: Gerhard Gentzen (was die beweistechnisch effiziente Darstellung der Logiken in Kalkülen angeht); Kurt Gödel (was die Einbettung der intuitionistischen Logik in eine Modallogik angeht); Bertrand Russell, Willard van Orman Quine und Saul Kripke (was das Substitutionsproblem modaler Prädikatenlogik angeht). – Was die Einführung des – den orthodoxen Kennzeichnungsoperator verallgemeinernden – *Selektors* betrifft, so glaube ich mich zu erinnern, dazu einen Text bei David Hilbert (sei es als Autor oder Ko-Autor, oder sei es auch nur als Herausgeber oder Mitherausgeber) gelesen zu haben. Texte von Karel Lambert und von Alexius Meinong wirkten zweifellos inspirierend bei meiner Darstellung der freilogischen bzw. meinongschen Modifikation klassischer Prädikatenlogik.

Ludwig Wittgenstein sagt im Vorwort zu seinen *Philosophischen Untersuchungen*: „Daß es dieser Arbeit in ihrer Dürftigkeit und der Finsternis dieser Zeit beschieden sein sollte, Licht in ein oder das andere Gehirn zu werfen, ist nicht unmöglich; aber freilich nicht wahr-

scheinlich.“ Es sind dies bescheiden auftretende, aber untergründig stolze Worte. Doch will ich mich ihnen, was mein eigenes Buch, das vorliegende, angeht, anschließen. Wie weit ich mit ihnen recht habe, ist eine andere Frage.

Uwe Meixner Augsburg, im Januar 2024

0. Sätze, Schlüsse, Folgerungsverhältnisse zwischen Schlüssen bzw. Sätzen – Satzformeln, Schlussformeln, Regelformeln – logische Validität – die Formelsprache *Sigma*

Allen in diesem Buch betrachteten Logiken – den axiomatisch angegebenen Logiksystemen – liegt eine einheitliche Formelsprache [oder: Symbolsprache] *Sigma* zugrunde; keine der Logiken verwendet Material, das nicht in dieser Formelsprache angebbar ist. *Sigma* umfasst auf der obersten Ausdrucksebene Satzformeln, Schlussformeln und Regelformeln. Die Satzformeln *stellen* Satzformen der (jeweiligen) Normalsprache *dar*, die Schlussformeln Schlussformen der Normalsprache, die Regelformeln Formen von Folgerungsverhältnissen zwischen normalsprachlichen Schlüssen bzw. Sätzen bei hypothetischer logischer Validität dieser Schlüsse bzw. Sätze. Die Darstellung von Formen durch Formeln ermöglicht die Anwendung der angegebenen Logiken bei der Kritik fremder, oder bei der Rechtfertigung eigener, normalsprachlicher Argumentationen.

Das „Übersetzen“ nach *Sigma* von normalsprachlichen Sätzen, Schlüssen und auf logische Validität bezogenen Folgerungsverhältnissen zwischen Schlüssen bzw. Sätzen nennt man „Formalisieren [in *Sigma*]“; für die Anwendung der Logiken ist es von entscheidender Bedeutung. Formalisieren ist eine Sache der logischen Praxis, und die Fähigkeit dazu ist durch Üben und nur durch Üben zu erwerben. Das gilt auch für das, was beim Formalisieren an erster Stelle steht: An erster Stelle steht da das Erkennen, das „Herausschauen“ der vollständigen logischen Form des normalsprachlichen Satzes, Schlusses, Folgerungsverhältnisses zwischen Schlüssen bzw. Sätzen bei ihrer hypothetischen logischen Validität. Daran schließt sich eine akkurate Darstellung in *Sigma* der erkannten Form (will sagen: das Suchen, Finden, Aufzeichnen einer solchen Darstellung) an, freilich nur so weit, wie jene Form sich in *Sigma* darstellen lässt: nur mit dem Grad an Vollständigkeit, der sich in *Sigma* erreichen lässt. In einem gewissen Sinn, also, kann man von einem – bestmöglichen – „Übersetzen“ des vorfindlichen normalsprachlichen Satzes, Schlusses, Folgerungsverhältnisses zwischen Schlüssen bzw. Sätzen bei ihrer hypothetischen logischen Validität in eine Satzformel, Schlussformel, Regelformel von *Sigma* sprechen (von einem Übersetzen im eigentlichen Sinn – einem so weit wie möglich *sinnbewahrenden* – kann natürlich keine Rede sein).

Ein Wort zur *Normalsprache*: Die – oder besser gesagt: eine – Normalsprache (*stets* handelt es sich hierbei um eine *rein deskriptive Sprache*) ist hier *in erster Linie* eine für die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien *ideale* Sprache – kurz: *eine ideale Wissenschaftssprache –*, *nicht* die vorfindliche Umgangssprache (wobei mit „die Umgangssprache" in diesem Buch der *rein deskriptive Teil* der vollen Umgangsprache gemeint ist). *In erster Linie* werden in diesem Buch Logiken betrachtet, die zu einer Normalsprache *erster Linie* – einer idealen Wissenschaftssprache – gehören. Anders als die Umgangssprache erfüllt eine Normalsprache *erster Linie* diejenigen Forderungen, die eine für die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien ideale Sprache nun eben erfüllen sollte: (1) Inhaltseindeutigkeit aller Sätze, ja aller Ausdrücke (mindestens bei vorgegebenem Äußerungskontext, am besten aber unabhängig von jedem Äußerungskontext): Jeder Satz, jeder Ausdruck hat einen eindeutig bestimmten Sinn: *einen und nur einen* Sinn und einen *bestimmten* Sinn (also: Mehrdeutigkeit und Vagheit kommt nicht vor). (2) Bivalenz aller Sätze: Von jedem Satz ist entweder er selbst oder seine Negation valide (wobei hier Validität nicht unbedingt *Wahrheit* im klassischen Verständnis sein muss, sehr wohl aber sein kann). (3) Referenz aller Namen [singulären Terme]: Jeder Name bezeichnet etwas (worin schon liegt: *genau ein* Etwas). (4) Freiheit [Abwesenheit] von alethischer und deontischer Modalität: Kein Satz enthält einen alethischen (ontischen) oder deontischen Modalausdruck. (5) Freiheit [Abwesenheit] von propositionaler Stellungnahme: Kein Satz enthält einen Ausdruck propositionaler Stellungnahme (epistemischer, doxastischer oder anderer Art).

{Warum (1), (2) und (3) zu den genannten Idealitätsaspekten – „Idealen" – zählen, versteht sich gewissermaßen von selbst, ist man doch in der objektivontischen-wissenschaftlichen Theoriebildung an eindeutiger und bestimmter und valider lückenloser Thematisierung des objektiv Seienden interessiert. Und (5) zählt deshalb zu ihnen, weil die stets auf wollende, meinende, erkennende Subjekte bezogenen propositionalen Stellungnahmen in einer objektivontischen-wissenschaftlichen Theorie nichts zu suchen haben (während sie natürlich *in der Diskussion* einer solchen Theorie eine große und unabdingbare Rolle spielen). (4) schließlich zählt deshalb zu den Idealitätsaspekten einer idealen Wissenschaftssprache – einer Normalsprache *erster Linie* –, weil alethische [ontische] und deontische Modalausdrücke allzu sehr Anlass zu radikaler intersubjektiver Varianz in der, vorgeblich, objektivontisch-wissenschaftlichen Theoriebildung geben würden, nämlich je nach persönlicher Weltanschauung – man könnte auch sagen: je nach persönlicher Metaphysik+Ethik. Zwei prominente Beispiele seien angeführt: (1.) Der eine hat in seiner Theorie den Satz „Es ist [ontisch!] möglich, dass ein menschliches Subjekt körperlos bewusst ist"; die andere hat in ihrer Theorie den Satz „Es ist [ontisch] unmöglich, dass ein menschliches Subjekt körperlos bewusst ist"; wer Recht hat, ist endlos umstritten. (2.) Die eine hat in ihrer

Theorie den Satz „Es ist einem Menschen beim Handeln manchmal [ontisch] möglich anders zu handeln, als er schließlich handelt"; der andere hat in seiner Theorie: „Es ist keinem Menschen beim Handeln jemals [ontisch] möglich anders zu handeln, als er schließlich handelt"; wer Recht hat, ist abermals endlos umstritten.

Bei einem umfassenderen, inklusiveren Wissenschaftsverständnis, als es nun gerade das in der Rede von einer *idealen Wissenschaftssprache*, wie diese Rede hier soeben gemeint war, vorausgesetzte Wissenschaftsverständnis ist, also bei einem Wissenschaftsverständnis, bei dem insbesondere die Metaphysik *eine Wissenschaft* ist (wenn auch gewiss keine ideale), wird man den Idealitätsaspekt (4) einer idealen Wissenschaftssprache allerdings fallen lassen müssen, obwohl doch nach wie vor die Formulierung valider objektivontischer-wissenschaftlicher Theorien das Ziel – nun aber eben das *weitherziger* aufgefasste (nämlich bleibende Kontroversen nicht ausschließende) Ziel – der *wissenschaftlichen* Bemühungen ist.}

In zweiter Linie werden in diesem Buch aber auch eine (durchaus wohlmotivierte) Logik betrachtet, welche zu einer Normalsprache gehört, die (in gewisser Interpretation) konstitutionell das Ideal (2) nicht erfüllt; *sowie* Logiken, welche zu Normalsprachen gehören, die konstitutionell das Ideal (4) nicht erfüllen; *sowie* eine Logik, welche (in einer Interpretation von ihr) zu einer Normalsprache gehört, die das Ideal (3) nicht erfüllt; *sowie* eine Logik, welche (in einer Interpretation von ihr) zu einer Normalsprache gehört, die sowohl das Ideal (3) als auch das Ideal (4) nicht erfüllt. Auch eine Logik, welche aus einer normalsprachlichen Nichterfüllung – allerdings in besonderer Weise – des Ideals (5) erwächst, wird zur Sprache kommen. Die eben (über ihre Logiken) angesprochenen Normalsprachen *zweiter Linie* kommen der Umgangssprache jeweils in dieser oder jener Hinsicht näher als eine für die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien ideale Sprache, halten aber doch auch an diesem oder jenem wissenschaftssprachlichen Idealitätsaspekt fest.

Was die Anwendung der Logiken angeht, so ist zu sagen: Für die Anwendung kommt alles darauf an, vorliegende (den Logiken jeweils angemessene) normalsprachliche Sätze, normalsprachliche Schlüsse, normalsprachliche Folgerungsverhältnisse zwischen Schlüssen bzw. Sätzen bei Hypothese ihrer logischen Validität als *Instanzen* (*nicht* als Einsetzungsfälle; Instanz und Einsetzungsfall – oder: Spezialisierung, Spezialfall – sind zu unterscheiden[1]) von

[1] Einsetzungsfälle/Spezialfälle/Spezialisierungen gibt es nicht nur bei Formeln (gemeint sind damit in diesem Buch stets *Sigma*-Formeln), sondern auch bei Schemata von solchen (insbesondere bei Schemata von Regelformeln). Bei der Bildung von Einsetzungsfällen eines [*Sigma*-]Schemas ist, wenn das Schema einen Gewinn an Allgemeinheit erbringt, *mehr* im Spiel als die durch uniforme Substitution erfolgende Bildung von Einsetzungsfällen der in ihm *explizit* auftretenden Formeln. Ein (sehr einfaches) Beispiel: Γ, A $\rightarrow$ A ist ein Schema unendlich vieler (in jeder vernünftigen Logik) logisch valider Schlussformeln; aber diese Schlussformeln gehen – als *entschematisierende* Spezialisierungen des Schemas – nicht schon jeweils durch eine uniforme Substitution für die Satzformel „A" aus dem Schema hervor, sondern erst dadurch, dass zudem „Γ" durch eine *beliebige* endliche – d. h.: endlich-mehrgliedrige [und durch Komma gegliederte], eingliedrige oder nullgliedrige – Folge von Satz-

logisch validen Satzformeln, Schlussformeln, Regelformeln von *Sigma* zu erkennen – oder eben auch als Nichtinstanzen von solchen. Grundlegend sind die folgenden Festlegungen [samt Erläuterungen], wobei „Logik X" in (I) – (IV) für eine beliebige der in diesem Buch betrachteten Logiken steht:

(I)

Ein normalsprachlicher Satz [ein Satz einer Normalsprache, zu der eine Logik X gehört] ist in der Weise der [zugehörigen] Logik X genau dann logisch valide, wenn eine Satzformel, die eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung von ihm – eine „Übersetzung" von ihm – in *Sigma* ist, in der Weise der Logik X logisch valide ist.

Ein normalsprachlicher Schluss ist in der Weise der Logik X genau dann logisch valide, wenn eine Schlussformel, die eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung von ihm in *Sigma* ist, in der Weise der Logik X logisch valide ist.

Ein normalsprachliches Folgerungsverhältnis zwischen Schlüssen bzw. Sätzen bei Hypothese ihrer logischen Validität ist in der Weise der Logik X genau dann logisch valide, wenn eine Regelformel [Schlussregelformel oder Satzregelformel], die eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung von ihm in *Sigma* ist, in der Weise der Logik X logisch valide ist.

(II)

Eine Satzformel von *Sigma* ist in der Weise der Logik X logisch valide genau dann, wenn sie in einem [axiomatischen] Kalkül der Logik X beweisbar [*anders – aber synonym – gesagt*: ableitbar] ist – dort einen Beweis [*anders gesagt*: eine Ableitung] hat.

Eine Schlussformel von *Sigma* ist in der Weise der Logik X logisch valide genau dann, wenn sie in einem Kalkül der Logik X beweisbar ist.

Eine Regelformel von *Sigma* ist in der Weise der Logik X logisch valide genau dann, wenn sie in einem Kalkül der Logik X beweisbar ist.

Was es heißt, dass eine Satzformel, Schlussformel, Regelformel von *Sigma* in einem Kalkül der Logik X beweisbar [ableitbar] ist – dort einen Beweis [eine Ableitung] hat –, wird bei der Präsentation der Logik X deutlich werden. Schon hier sei festgehalten, dass alle Kalküle *einer* Logik *deduktiv äquivalent* sind: dass in ihnen genau dieselben Satzformeln,

formeln ersetzt wird. [Spezialisierungen, aber keine *entschematisierenden* Spezialisierungen des Beispielschemas, wären etwa die folgenden Gebilde: Γ, B $\supset$ C $\rightarrow$ B $\supset$ C; Γ', D, A $\rightarrow$ A. Diese Gebilde sind immer noch Schemata von Schlussformeln, *keine* Schlussformeln!]

Schlussformeln, Regelformeln beweisbar sind [ganz direkt, oder wenigstens bei Berücksichtigung von Repräsentationsverhältnissen zwischen den Kalkülen: sodass im Kalkül K´ die im Kalkül K direkt beweisbare Formel Φ *insofern* beweisbar ist, als in K´ der Repräsentant r(Φ) von Φ direkt beweisbar ist, nicht aber Φ selbst]. Kalküle sind hier jeweils *Darstellungen* oder *Formulierungen* einer gewissen Logik, *kurz*: sie sind Kalküle dieser gewissen Logik. Sind sie Kalküle *derselben (derselben einen, ein und derselben)* Logik, so müssen sie deduktiv äquivalent sein, und umgekehrt: Sind sie deduktiv äquivalent, so müssen sie Kalküle *derselben* Logik sein.

(III)

Ist eine Satzformel, Schlussformel, Regelformel von *Sigma*, die eine gewisse Bedingung Y erfüllt, in der Weise der Logik X logisch valide / im X-Kalkül K beweisbar, so ist auch jeder *Sigma*-Einsetzungsfall davon, der die gewisse Bedingung Y erfüllt, in der Weise der Logik X logisch valide / im X-Kalkül K beweisbar.

In den meisten – aber nicht in allen – Fällen ist Y eine trivialerweise allgemein erfüllte Bedingung, oder mit anderen Worten: die in den Relativsätzen zum Ausdruck kommende Einschränkung kann entfallen, die Relativsätze selbst können entfallen. Dann gilt auch: Ist jeder *Sigma*-Einsetzungsfall einer Satzformel, Schlussformel, Regelformel von *Sigma* in der Weise der Logik X logisch valide, so ist auch die Satzformel, Schlussformel, Regelformel selbst in der Weise der Logik X logisch valide; denn jede Satzformel, Schlussformel, Regelformel von *Sigma* ist ein *Sigma*-Einsetzungsfall von sich selbst.[2]

{Erfüllen nicht alle *Sigma*-Einsetzungsfälle einer Satzformel, Schlussformel, Regelformel die gewisse Bedingung Y, so wird zwischen in der Weise der Logik X logisch validen *Sigma*-Einsetzungsfällen der Formel und anderen *Sigma*-Einsetzungsfällen von ihr unterschieden; oder mit anderen Worten: zwischen im X-Kalkül K beweisbaren *Sigma*-Einsetzungsfällen der Formel und anderen *Sigma*-Einsetzungsfällen von ihr. Die erstgenannten Einsetzungsfälle sind bei beiden Weisen, die Unterscheidung zum Ausdruck zu bringen, diejenigen, die die Bedingung Y erfüllen, die zweitgenannten diejenigen, die sie nicht erfüllen. Bezogen auf den Kalkül K der Logik X spricht man dann auch von den Y erfüllenden „Einsetzungsfällen [einer axiomatischen Schlussformel etwa] in Beweisen [mit dem Kalkül K]“ und, unterscheidend, von den übrigen – Y nicht erfüllenden – *Sigma*-Einsetzungsfällen [der fraglichen Formel], die zwar syntaktisch möglich, aber *keine* „Einsetzungsfälle in Beweisen“ sind, m. a. W.:

[2] Bei Einbringung der Relativierung auf die Bedingung Y gilt analog: Ist jeder *Sigma*-Einsetzungsfall einer Satzformel, Schlussformel, Regelformel von *Sigma*, *der eine gewisse Bedingung* Y *erfüllt*, in der Weise der Logik X logisch valide, so ist auch die Satzformel, Schlussformel, Regelformel selbst in der Weise der Logik X logisch valide, *sofern sie die Bedingung* Y *erfüllt*.

in Beweisen nicht zulässig sind. Leistet hingegen die Bedingung Y bei einer axiomatischen oder theorematischen Formel keine Einschränkung der *Sigma*-Einsetzungsfälle der Formel hinsichtlich Beweisbarkeit (oder ist die Bedingung Y für sie gar nicht angegeben), so sind *alle* syntaktisch möglichen *Sigma*-Einsetzungsfälle der fraglichen Formel „Einsetzungsfälle [von ihr] in Beweisen".}

Dabei ist ein *Sigma*-Einsetzungsfall einer Satzformel, Schlussformel, Regelformel von *Sigma* eine Satz- bzw. Schluss- bzw. Regelformel von *Sigma*, die durch uniforme Substitution – uniforme *Einfach*substitution – eines *Sigma*-Ausdrucks *in* die ursprüngliche Satzformel, Schlussformel, Regelformel *für* einen dort vorkommenden *unstrukturierten* [natürlich *nicht* simpliciter typographisch unstrukturierten, sondern, *was semantische Relevanz angeht*, typographisch unstrukturierten] und *sinnunbestimmten Sigma*-Ausdruck passender syntaktischer Grundkategorie (d. h.: Satzformel, Namenformel, Prädikatformel, Variable) hervorgeht. *Uniform* ist die Substitution deshalb, weil die Substitution einheitlich *alle* Vorkommnisse des fraglichen unstrukturierten und sinnunbestimmten *Sigma*-Ausdrucks in der ursprünglichen Formel betrifft. Eine uniforme Substitution kann (wenn die Gegebenheiten es zulassen) auch gleichzeitig hinsichtlich mehrerer Vorkommnispfade von *gestaltverschiedenen* unstrukturierten und sinnunbestimmten *Sigma*-Ausdrücken (in derselben Satzformel, Schlussformel, Regelformel) erfolgen; auch dann ist das Resultat ein *Sigma*-Einsetzungsfall der ursprünglichen Satz- bzw. Schluss- bzw. Regelformel, *sofern* das Resultat eine Satz- bzw. Schluss- bzw. Regelformel von *Sigma* ist und die uniforme *Mehrfach*substitution hinsichtlich jedes der dabei uniform substituierten *Sigma*-Ausdrücke gerade so wie für die uniforme *Einfach*substitution beschrieben vorgenommen wurde.[3] Zudem gilt offensichtlich: Ist δ'' ein *Sigma*-Einsetzungsfall von δ', und δ' ein *Sigma*-Einsetzungsfall von δ, so ist auch δ'' ein *Sigma*-Einsetzungsfall von δ.

(IV)

Ein normalsprachlicher Satz ist eine Instanz einer Satzformel σ von *Sigma* dann, und nur dann, wenn eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung in *Sigma* von ihm ein *Sigma*-Einsetzungsfall von σ ist.

[3] Eine gleichzeitige uniforme Mehrfachsubstitution kann sehr wohl ein anderes Ergebnis zeitigen als eine Kette von mehreren uniformen Einfachsubstitutionen, bei denen nach der ersten Substitution jeweils auf das unmittelbar vorausgehende Substitutionsergebnis zugegriffen wird, und zwar auch dann, wenn das „Substitutionsgut" ein und dasselbe ist: Substituiert man gleichzeitig uniform in „(A ⊃ B)" „A" für „B" und „B" für „A", so erhält man „(B ⊃ A)"; substituiert man aber zunächst uniform „A" für „B" in „(A ⊃ B)" und im resultierenden *Sigma*-Einsetzungsfall sodann uniform „B" für „A", so erhält man „(B ⊃ B)".

Ein normalsprachlicher Schluss ist eine Instanz einer Schlussformel χ von *Sigma* dann, und nur dann, wenn eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung in *Sigma* von ihm ein *Sigma*-Einsetzungsfall von χ ist.
Ein normalsprachliches Folgerungsverhältnis zwischen Schlüssen bzw. Sätzen bei Hypothese ihrer logischen Validität ist eine Instanz einer Regelformel ρ von *Sigma* dann, und nur dann, wenn eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung in *Sigma* von ihm ein *Sigma*-Einsetzungsfall von ρ ist.

Nach dem in (I) – (IV) Gesagten ist die „Begründungsmechanik" einer Logik X ersichtlich. Ersichtlich ist insbesondere, wie es zu begründen wäre, dass ein normalsprachlicher Satz (ein Satz einer Normalsprache, zu der die Logik X gehört / die zu der Logik X gehört), ein normalsprachlicher Schluss, ein normalsprachliches Folgerungsverhältnis zwischen Schlüssen bzw. Sätzen (bei Hypothese ihrer logischen Validität) in der Weise der Logik X *logisch valide* ist.

Eine andere Frage ist es, wie eine Logik X *selbst* zu begründen wäre. Grundlegend für eine Antwort ist, zu welcher Normalsprache mit welchen „Idealen" und welchem Sinn der logischen Konstanten X gehören soll [anders gesagt: welche Normalsprache mit welchen „Idealen" und welchem Sinn der logischen Konstanten zu X gehören soll], wobei für den Sinn der logischen Konstanten nicht zuletzt bedeutsam ist, von welchem Begriff von *Validität* – von der *logische Validität in der Weise der Logik* X nur eine besondere Ausprägung ist und für die *die Validität von [Aussage]Sätzen* grundlegend ist – ausgegangen wird. Der Rest ist die auf größtmögliche Vollständigkeit gehende *Erfassung der* in der zugrundegelegten Normalsprache *intuitiv* („in logischer Anschauung") *logisch validen* normalsprachlichen (um die vorgegebenen logischen Konstanten herum gebildeten) Satz*formen*, Schluss*formen*, *Formen* von Folgerungsverhältnissen zwischen Schlüssen bzw. Sätzen bei hypothetischer logischer Validität dieser Schlüsse bzw. Sätze; *also*: die Erfassung dieser *Formen* mittels einer axiomatischen Darstellung, Repräsentation von ihnen unter Verwendung von (um die vorgegebenen *Sigma*-symbolisierten logischen Konstanten herum gebildeten) Satz*formeln*, Schluss*formeln*, Regel*formeln* von *Sigma*.

Man beachte, dass alle *so* zustande gekommenen axiomatischen Systeme – *so* gewordenen *Kalküle* – in gewissem Sinn (nämlich „in ausschließlich je eigener Sache") trivialerweise widerspruchsfrei und vollständig sind; denn jedes von ihnen (und jedes seiner jeweiligen deduktiven Äquivalente) definiert schon eo ipso eine Logik X, deren Kalkül (axioma-

tische Formulierung) es ist, und *beweisbar in einem Kalkül der Logik* X und *logisch valide in der Weise der Logik* X fallen ja für alle Satzformeln, Schlussformeln, Regelformeln von *Sigma* zusammen: siehe (II). Freilich wird eine Logik – und jeder ihrer Kalküle – nicht akzeptabel sein können, wenn *alle* Satzformeln in der Weise dieser Logik logisch valide sind; oder wenn auch nur eine einzige Satzformel in der Weise dieser Logik logisch valide ist, die einen Satz der Normalsprache, zu der die fragliche Logik unbedingt gehören soll, als Instanz hat, welcher *intuitiv* nicht logisch valide ist. Es kommt zudem vor, dass die so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung eines *intuitiv* logisch validen normalsprachlichen Satzes *nicht* in der Weise der Logik X logisch valide ist: in keinem Kalkül von X beweisbar ist; nun, dann muss man eben zu einer Logik X´ übergehen, *in deren Weise* sie (die Satzformel) nun logisch valide ist, oder anders gesagt: zu einem Kalkül der Logik X´, in dem sie beweisbar ist.

Wie es zu zeigen ist, dass eine Satzformel, Schlussformel, Regelformel in der Weise der Logik X logisch valide ist, ist klar: durch Konstruktion eines Beweises für die Satzformel, Schlussformel, Regelformel in einem Kalkül der Logik X. Wie es zu zeigen ist, dass eine Satzformel, Schlussformel, Regelformel *nicht* in der Weise der Logik X logisch valide ist, ist hingegen weniger klar. Eine Methode, zunächst für Satzformeln σ, ist die folgende: Man hat schon eine Satzformel σ', von der man weiß, dass sie nicht in der Weise der Logik X logisch valide ist; man zeigt, dass wenn die Satzformel σ in der Weise der Logik X logisch valide wäre, auch die Satzformel σ' in der Weise der Logik X logisch valide wäre – entgegen dem, was schon festgestellt ist. Folglich: Die Satzformel σ ist nicht in der Weise der Logik X logisch valide.

Selbstverständlich ist diese Methode *mutatis mutandis* nicht nur bei Satzformeln, sondern auch bei Schluss- und Regelformeln anwendbar. Ihr Nachteil ist, dass sie *relativ* ist: man muss von einer gewissen Satzformel, Schlussformel, Regelformel schon wissen (wenigstens korrekt voraussetzen), dass sie *nicht* in der Weise der Logik X logisch valide ist, um die Methode anwenden zu können und wie beschrieben von einer weiteren Satzformel, Schlussformel, Regelformel zu zeigen, dass sie nicht in der Weise der Logik X logisch valide ist.

Es folgt nun die Beschreibung von *Sigma* selbst. Da *Sigma* die einzige in diesem Buch betrachtete Formelsprache ist, wird die explizite Bezugnahme auf *Sigma* [„… von *Sigma*“, wie in „Satzformel von *Sigma*“, und „*Sigma*-…“, wie in „*Sigma*-Einsetzungsfall“, oder noch anders] in diesem Buch mehrheitlich weggelassen.

Logische Grundkonstanten:

$\rightarrow$, $\Rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\forall$, $\exists$, =, ι; keine anderen Ausdrücke sind logische Grundkonstanten. Die logischen Grundkonstanten sind zwar *unstrukturiert* – insofern logisch einfach –, aber nicht *sinnunbestimmt*, sondern haben jeweils eine Lesart (die als Interpretation gilt oder gegebenenfalls erst zu einer Interpretation zu vervollständigen ist); hervorgehoben, weil weniger üblich, seien die folgenden drei dieser Lesarten: „$\rightarrow$“ steht für „also [folglich, ergo, demnach, …]“ zwischen Sätzen bei ihrer hypothetischen Validität; „$\Rightarrow$“ steht für „also“ zwischen Schlüssen oder auch zwischen Sätzen bei ihrer hypothetischen *logischen* Validität; „ι“ steht für „beispielsweise diese/s/r [So-und-so]“ bzw., im Grenzfall, für „der/die/das [So-und-so]“.

Unstrukturierte und sinnunbestimmte Satzformeln:
A, B, C, D, A´, B´, C´, D´, A´´, …; keine anderen Ausdrücke sind unstrukturierte und sinnunbestimmte Satzformeln.

Unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln:
a, b, c, d, a´, b´, c´, d´, a´´, ...; keine anderen Ausdrücke sind unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln.

Variablen:
x, y, z, u, x´, y´, z´, u´, x´´, …; keine anderen Ausdrücke sind Variablen.
[Variablen sind per se unstrukturierte und sinnunbestimmte Ausdrücke.]

Unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln:
Einstellige: F, G, H, J, F´, G´, H´, J´, F´´, …; keine anderen Ausdrücke sind einstellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln.
Zweistellige: P, Q, R, W, P´, Q´, R´, W´, P´´, …; keine anderen Ausdrücke sind zweistellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln.
Dreistellige: P_3, Q_3, R_3, W_3, $P_3´$, $Q_3´$, $R_3´$, $W_3´$, $P_3´´$, …; keine anderen Ausdrücke sind dreistellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln.
Vierstellige: P_4, Q_4, R_4, W_4, $P_4´$, $Q_4´$, $R_4´$, $W_4´$, $P_4´´$, …; keine anderen Ausdrücke sind vierstellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln.
Usw.

Andere unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln, als in obiger (begonnener) Sequenz irgendwann zum Auftritt kommen, sind nicht da.

Satzformeln (1. Teil):

(0) Die unstrukturierten und sinnunbestimmten Satzformeln, wie sie weiter oben definiert wurden, sind Satzformeln.

(1) Ist φ eine *n*-stellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel und sind α_1 … α_n unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln, so ist $\varphi(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ eine logisch einfache strukturierte Satzformel; keine anders (als eben angegeben) gebildeten Ausdrücke sind logisch einfache strukturierte Satzformeln. [$n \geq 1$; bei $n > 1$ werden die Namenformeln durch Komma voneinander abgesetzt.]

(2) Ist σ eine Satzformel, so ist $\neg\sigma$ eine Negationssatzformel; keine anders (als eben angegeben) gebildeten Ausdrücke sind Negationssatzformeln.

(3) Sind σ und σ' Satzformeln, so ist $(\sigma \wedge \sigma')$ eine Konjunktionssatzformel; keine anders gebildeten Ausdrücke sind Konjunktionssatzformeln.

(4) Sind σ und σ' Satzformeln, so ist $(\sigma \vee \sigma')$ eine Disjunktionssatzformel; keine anders gebildeten Ausdrücke sind Disjunktionssatzformeln.

(5) Sind σ und σ' Satzformeln, so ist $(\sigma \supset \sigma')$ eine Implikationssatzformel; keine anders gebildeten Ausdrücke sind Implikationssatzformeln.

(6) Ist $\sigma[\alpha]$ eine Satzformel, in der an gewissen Stellen [möglicherweise auch nur an einer einzigen Stelle] die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α vorkommt, und υ eine Variable, die in $\sigma[\alpha]$ nicht vorkommt, so ist $\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ eine Allsatzformel (wobei υ die Namenformel α an jenen gewissen [nicht unbedingt allen] Stellen ihres Vorkommens in $\sigma[\alpha]$ *ersetzt*); keine anders gebildeten Ausdrücke sind Allsatzformeln.

(7) Ist $\sigma[\alpha]$ eine Satzformel, in der an gewissen Stellen die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α vorkommt, und υ eine Variable, die in $\sigma[\alpha]$ nicht vorkommt, so ist $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ eine „Mindestens ein“-Satzformel (wobei υ die Namenformel α an jenen gewissen Stellen ihres Vorkommens in $\sigma[\alpha]$ ersetzt); keine anders gebildeten Ausdrücke sind „Mindestens ein“-Satzformeln.

Namenformeln:

(0) Die unstrukturierten und sinnunbestimmten Namenformeln, wie sie weiter oben definiert wurden, sind Namenformeln.

(1) Ist $\sigma[\alpha]$ eine Satzformel, in der an gewissen Stellen die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α vorkommt, und υ eine Variable, die in $\sigma[\alpha]$ nicht vorkommt, so ist $\iota\upsilon\sigma[\upsilon]$ eine Kennzeichnungsnamenformel (wobei υ die Namenformel α an jenen gewissen Stellen ihres Vorkommens in $\sigma[\alpha]$ ersetzt); keine anders gebildeten Ausdrücke sind Kennzeichnungsnamenformeln.

(2) Die Ausdrücke gemäß (0) – (1) sind sämtliche *primären* Namenformeln [von *Sigma*].

(3) Ist $\nu[\alpha]$ eine Namenformel – aber keine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel –, in der an gewissen Stellen die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α vorkommt, und υ eine Variable, die in $\nu[\alpha]$ nicht vorkommt, so ist $\nu[\upsilon]$ eine *sekundäre* Namenformel (wobei υ die Namenformel α an jenen gewissen Stellen ihres Vorkommens in $\nu[\alpha]$ ersetzt); keine anders gebildeten Ausdrücke sind sekundäre Namenformeln.

(4) Die primären und die sekundären Namenformeln sind sämtliche Namenformeln.

Satzformeln (2. Teil):

(8) Ist φ eine *n*-stellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel und sind $\nu_1 \ldots \nu_n$ primäre Namenformeln, so ist $\varphi(\nu_1 \ldots \nu_n)$ eine atomare strukturierte Satzformel; keine anders (als eben angegeben) gebildeten Ausdrücke – *außer* Identitätssatzformeln – sind atomare strukturierte Satzformeln. [$n \geq 1$; bei $n > 1$ werden die Namenformeln durch Komma voneinander abgesetzt.]

(9) Sind ν_1 und ν_2 primäre Namenformeln, so ist $(\nu_1 = \nu_2)$ eine Identitätssatzformel; keine anders gebildeten Ausdrücke sind Identitätssatzformeln.

(10) Die Ausdrücke gemäß (0) – (9) sind sämtliche Satzformeln [von *Sigma*].

Prädikatformeln:

(0) Die unstrukturierten und sinnunbestimmten Prädikatformeln, wie sie weiter oben definiert wurden, sind Prädikatformeln.

(1) Ist $\sigma[\alpha]$ eine Satzformel, in der an gewissen Stellen die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α vorkommt, und υ eine Variable, die in $\sigma[\alpha]$ nicht vorkommt, so ist $\sigma[\upsilon]$ eine *einstellige* strukturierte Prädikatformel (wobei υ die Namenformel α an jenen ge-

wissen Stellen ihres Vorkommens in $\sigma[\alpha]$ ersetzt); keine anders gebildeten Ausdrücke sind einstellige strukturierte Prädikatformeln.

(2) Ist $\varphi[\alpha]$ eine einstellige strukturierte Prädikatformel, in der an gewissen Stellen die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α vorkommt, und υ eine Variable, die in $\varphi[\alpha]$ nicht vorkommt, so ist $\varphi[\upsilon]$ eine *zweistellige* strukturierte Prädikatformel (wobei υ die Namenformel α an jenen gewissen Stellen ihres Vorkommens in $\varphi[\alpha]$ ersetzt); keine anders gebildeten Ausdrücke sind zweistellige strukturierte Prädikatformeln.

(3) Ist $\varphi[\alpha]$ eine zweistellige strukturierte Prädikatformel, in der an gewissen Stellen die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α vorkommt, und υ eine Variable, die in $\varphi[\alpha]$ nicht vorkommt, so ist $\varphi[\upsilon]$ eine *dreistellige* strukturierte Prädikatformel (wobei υ die Namenformel α an jenen gewissen Stellen ihres Vorkommens in $\varphi[\alpha]$ ersetzt); keine anders gebildeten Ausdrücke sind dreistellige strukturierte Prädikatformeln.

Usw.

Andere Prädikatformeln, als in obiger (begonnener) Sequenz irgendwann zum Auftritt kommen, sind nicht da.

Prädikatstockformeln:

Neben Prädikatformeln sind auch *Prädikatstock*formeln als *Sigma*-Ausdrücke zu berücksichtigen, die aber an dieser Stelle, wo die Notwendigkeit ihrer Berücksichtigung noch nicht ersichtlich ist, noch nicht eingeführt seien. Siehe aber weiter unten den Erläuterungsabschnitt III.

Schlussformeln:

Sind $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ und σ' Satzformeln, so sind $\rightarrow \sigma'$ und $\sigma_1 \ldots \sigma_n \rightarrow \sigma'$ Schlussformeln; keine anders gebildeten Ausdrücke sind Schlussformeln. [$n \geq 1$; bei $n > 1$ werden die Satzformeln vor „$\rightarrow$“ *durch Komma* voneinander abgesetzt.]

Regelformeln:

(1) Sind $\chi_1 \ldots \chi_n$ und χ' Schlussformeln, so ist $\chi_1 \ldots \chi_n \Rightarrow \chi'$ eine Schlussregelformel; keine anders gebildeten Ausdrücke sind Schlussregelformeln.

(2) Sind $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ und σ' Satzformeln, so ist $\sigma_1 \ldots \sigma_n \Rightarrow \sigma'$ eine Satzregelformel; keine anders gebildeten Ausdrücke sind Satzregelformeln.[4]
(3) Keine anderen Ausdrücke als die gemäß (1) bzw. (2) gebildeten Ausdrücke sind Regelformeln. [$n \geq 1$; bei $n > 1$ werden die Schlussformeln bzw. Satzformeln *durch Semikolon* voneinander abgesetzt.]

Ausdrücke auf der Grundlage von Definitionen und sonstigen abkürzenden Festlegungen:
Die bisherigen Bestimmungen liefern die basalen (oder „primitiven“) Ausdrücke von *Sigma*. Ausdrücke von *Sigma* sind aber auch alle durch Anwendung einer Definition, oder mehrerer Definitionen, aus basalen Ausdrücken von *Sigma* gebildeten Ausdrücke sowie überhaupt alle (bis auf Variablenwahl) *eindeutig* auflösbaren Abkürzungen von basalen Ausdrücken von *Sigma*. Die derivative Zugehörigkeit solcher Ausdrücke zu *Sigma* ergibt sich aus der (bis auf Variablenwahl) eindeutigen Rückführbarkeit von ihnen auf je einen basalen Ausdruck von *Sigma*.

Es folgen einige weiterführende Bemerkungen zur Sprache *Sigma* sowie zu den Festlegungen (I) – (IV) vor *Sigmas* soeben erfolgter, sie definierender Beschreibung:

I. Unstrukturierte und sinnunbestimmte Satzformeln sind logisch einfach; die Umkehrung gilt aber nicht; denn logisch einfache strukturierte Satzformeln (siehe (1) unter *Satzformeln*, 1. Teil) sind zwar immer noch sinnunbestimmt, aber eben nicht unstrukturiert. Logisch einfache strukturierte Satzformeln wiederum sind atomare strukturierte Satzformeln (siehe (8) unter *Satzformeln*, 2. Teil); die Umkehrung gilt aber nicht; denn *manche* atomare strukturierte Satzformel ist ja eine Identitätssatzformel oder enthält eine Kennzeichnungsnamenformel, die ihrerseits auf jeden Fall „ι“ enthält und womöglich auch noch andere logische Konstanten; die logische Einfachheit ist in beiden Fällen „dahin“. „Dahin“ ist bei einer

[4] Zwischen den Schlussformeln mit mindestens einer Prämisse und den Satzregelformeln besteht offensichtlich ein eineindeutiges Zuordnungsverhältnis. Das darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass die logische Bedeutung etwa der Satzregelformel $A \Rightarrow B$ (um den einfachsten Fall zu betrachten) eine wesentlich andere ist als die der Schlussformel $A \rightarrow B$. Die erstere Formel besagt: „Angenommen, dass es *logisch valide* [in der Weise der Logik, auf die man sich bezieht] ist, dass A; unter dieser Voraussetzung ist es auch *logisch valide*, dass B“; die letztere Formel hingegen besagt: „Angenommen, dass es *valide* [z. B. wahr] ist, dass A; unter dieser Voraussetzung ist es auch *valide*, dass B“. [Eine Logik, welche die Satzregelformel $A \Rightarrow B$ oder die Schlussformel $A \rightarrow B$ als *logisch valide* führte, wäre übrigens gänzlich unbrauchbar.] Allerdings bleiben nicht wenige logisch valide Satzregelformeln logisch valide, wenn man sie wie Schlussformeln liest, z. B.: A; $A \supset B \Rightarrow B$ (*nicht* aber, z. B., $A \Rightarrow \Box A$).

solchen atomaren strukturierten Satzformel auch die Sinnunbestimmtheit; denn „Sinnunbestimmtheit“ ist im Sinne von *vollständiger* Sinnunbestimmtheit gemeint, und da „=“ bzw. „ι“ – beides eine logische Grundkonstante mit bestimmtem Sinn – in ihr vorkommt, ist sie sicherlich *nicht* vollständig sinnunbestimmt. [Man beachte: Ein formaler Ausdruck kann vollständig sinnunbestimmt – in diesem Sinne also: (simpliciter) *sinnunbestimmt* – sein, obwohl er kategorial einordenbar ist – etwa als Satzformel oder Prädikatformel – und obwohl er zudem eine semantisch relevante typographische Struktur aufweist; so ist beispielsweise „F(a)“ vollständig sinnunbestimmt, ist aber kategorial einordenbar – F(a) ist eine Satzformel – und weist offensichtlich eine semantisch relevante typographische Struktur auf.]

II. Variablen sind unstrukturierte und sinnunbestimmte Ausdrücke; deshalb ist die Einsetzungsfälle (von Satz-, Schluss-, Regelformeln) erzeugende uniforme Substitution – vgl. oben (III) – bzgl. Variablen möglich (wobei das dabei Substituierte wiederum eine Variable sein muss). Allerdings ist Vorsicht geboten: Die uniforme Substitution von „y“ für „x“ in „∃y∀xR(x, y)“ ergibt keinen Einsetzungsfall von „∃y∀xR(x, y)“, sondern syntaktischen Unsinn: „∃y∀yR(y, y)“. Zudem kann die uniforme Substitution von Ausdrücken, die eine Variable (echt) enthalten, leicht *nicht* zu Einsetzungsfällen führen: Die uniforme Substitution von „ιxF(x)“ für „a“ in „∀xR(x, a)“ ergibt „∀xR(x, ιxF(x))“ – was abermals syntaktischer Unsinn ist (denn „∀xR(x, ιxF(x))“ ist nach den syntaktischen Regeln [insbesondere *Satzformeln*, 1. Teil, (6)] nicht bildbar).

III. Eine *n*-stellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel kommt in Satzformeln, Schlussformeln, Regelformeln oftmals mehrfach vor. Dabei wird sie nicht selten an verschiedenen Vorkommnisstellen in diesen Formeln von anderen Namenformeln/Variablen begleitet (in den runden Klammern, die auf sie folgen), von bloßen Variationen der Reihenfolge der „Argumente“ gar nicht zu reden. Und wenn es auch stets *n Vorkommnisse* von Namenformeln/Variablen sind, die bei ihr stehen, so wird es doch geschehen, dass an verschiedenen Stellen in der Satzformel, Schlussformel, Regelformel Variablen [man beachte, dass nun von Variablen die Rede ist, *nicht* von Variablenvorkommnissen] in verschiedener Anzahl bei der unstrukturierten und sinnunbestimmten Prädikatformel stehen: dass da und dort nicht *n* Variablen [$n \geq 1$] bei ihr stehen, sondern weniger, oder auch gar keine Variablen

(sondern nur Namenformeln). Diesen Komplikationen ist bei der uniformen Substitution für unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln Rechnung zu tragen.

Eine *Prädikatstockformel* geht aus einer *strukturierten* Prädikatformel dadurch hervor, dass die freien Vorkommnisse von Variablen in dieser durch eine einheitliche Leerstellenmarkierung, nämlich „_“, ersetzt werden; die Stellenzahl einer Prädikatstockformel ist die Anzahl der *Vorkommnisse* von „_“ in ihr. [Man beachte, dass solcherweise z. B. aus einer 1-stelligen *Prädikat*formel eine 2-stellige *Prädikatstock*formel werden kann: Aus der 1-stelligen Prädikatformel „R(x, x)“ wird die 2-stellige Prädikatstockformel „R(_, _)“.] Für *n*-stellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformeln werden nun bei der Bildung von Einsetzungsfällen Prädikatstockformeln uniform substituiert. Eine uniform substituierte Prädikatstockformel ist an jeder Substitutionsstelle mit denjenigen *n* Vorkommnissen von Namenformeln/Variablen in zugehöriger Reihenfolge verbunden, mit denen die dortige unstrukturierte und sinnunbestimmte *n*-stellige Prädikatformel, für die sie uniform substituiert wird, dort verbunden ist. Wie die Leerstellen in der Prädikatstockformel zu füllen wären, um aufgrund des Gegebenen eine Prädikatformel oder gegebenenfalls ein Satzformel zu erhalten, muss dabei stets eindeutig ersichtlich sein. [Selbstverständlich muss die verwendete Prädikatstockformel für all dies *syntaktisch geeignet* sein; sie kann vor allem keine geringere Stellenzahl haben als die unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel, für die sie uniform substituiert wird. Die Syntax von *Sigma* darf in keinem Fall verletzt werden.]

Dazu ein Beispiel: „$\forall$xR(x, a) $\rightarrow$ R(b, a)“; hierin haben wir eine zweimal vorkommende 2-stellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel: „R“; nun nehmen wir, um durch uniforme Substitution einen gewissen (aus irgendwelchen Gründen gerade erforderlichen) Einsetzungsfall von „$\forall$xR(x, a) $\rightarrow$ R(b, a)“ zu erhalten, eine 2-stellige Prädikatstockformel her: „(P(b, _) $\wedge$ Q(_, a))“. Das Ergebnis der uniformen Substitution von „(P(b, _) $\wedge$ Q(_, a))“ für „R“ in der fraglichen Formel ist dies: „$\forall$x(P(b, _) $\wedge$ Q(_, a))(x, a) $\rightarrow$ (P(b, _) $\wedge$ Q(_, a))(b, a)“, mit anderen Worten [indem das, was nun „ausgelagert“, „exportiert“ ist – nämlich „(x, a)“ bzw. „(b, a)“ – exakt der ersichtlichen Reihenfolge nach nahtlos „wieder eingelagert“, „importiert“ wird]: „$\forall$x(P(b, x) $\wedge$ Q(a, a)) $\rightarrow$ (P(b, b) $\wedge$ Q(a, a))“.

Sowohl „$\forall$x(P(b, x) $\wedge$ Q(a, a)) $\rightarrow$ (P(b, b) $\wedge$ Q(a, a))“ als auch „$\forall$xR(x, a) $\rightarrow$ R(b, a)“ lässt sich übrigens als Einsetzungsfall von „$\forall$xF(x) $\rightarrow$ F(b)“ gewinnen: indem für die 1-stellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel „F“ die 1-stellige Prädikatstockformel „R(_, a)“ uniform substituiert wird: „$\forall$xR(_, a)(x) $\rightarrow$ R(_, a)(b)“, mit anderen Worten: „$\forall$xR(x,

a) → R(b, a)“; *bzw.* indem für die 1-stellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel „F“ die 1-stellige Prädikatstockformel „(P(b, _) ∧ Q(a, a))“ uniform substituiert wird: „∀x(P(b, _) ∧ Q(a, a))(x) → (P(b, _) ∧ Q(a, a))(b)“, mit anderen Worten: „∀x(P(b, x) ∧ Q(a, a)) → (P(b, b) ∧ Q(a, a))“. Ein Einsetzungsfall von „∀xF(x) → F(b)“ ist auch „∀xR(x, x) → R(b, b)“; denn durch uniforme Substitution von „R(_, _)“ Für „F“ geht aus „∀xF(x) → F(b)“ „∀xR(_, _)(x) → R(_, _)(b)“ hervor, was [nach nahtlosem Import des Exportierten] nichts anderes ist als „∀xR(x, x) → R(b, b)“.

Nota bene (aus soeben ersichtlich gewordenem Anlass): „(F(_) ⊃ F(_))(x)“, z. B., ist syntaktisch ebenso in Ordnung wie „(F(_) ⊃ F(_))(x, y)“, *obwohl* die Prädikatstockformel „(F(_) ⊃ F(_))“ ja 2-stellig ist: „(F(_) ⊃ F(_))(x)“ ist „(F(x) ⊃ F(x))“, „(F(_) ⊃ F(_))(x, y)“ ist „(F(x) ⊃ F(y))“. Alternativ kann man „(F(x) ⊃ F(x))“ auch als „(F(_) ⊃ F(_))(x, x)“ schreiben. Prädikatstockformeln stellen offensichtlich keine echte Erweiterung der ohne sie schon gegebenen Syntax von *Sigma* dar, tauchen sie doch nur *zwischenstufig* bei der uniformen Substitution auf; im Endresultat sind sie wieder verschwunden.

IV. Den verschiedenen in diesem Buch betrachteten Logiken liegt, wie gesagt, eine einheitliche Formelsprache zugrunde: *Sigma* (allerdings in zwei verschiedenen „Registern“ sozusagen: dem aussagenlogischen und dem prädikatenlogischen). Diese Formelsprache wird *niemals* erweitert, sie wird durch die verschiedenen Logiken nur verschieden interpretiert; wobei Teil einer solchen Interpretation durch eine Logik der interpretierenden Logik eigentümliche explizite Definitionen sein können, die „neue“ logische Konstanten einführen. (*Neu* sind diese, sobald durch ihre – allerdings – neue Gestalt definitionsgemäß „hindurchgeschaut“ wird, höchstens der neuen Interpretation der zugrundeliegenden „alten“ Formel nach.)

Der Grundnotation nach sind also z. B. die **Pi-Gamma**-Satzformeln, also die in der Logik **Pi-Gamma** – *genauer*: in der durch den *Kalkül* **Pi-Gamma** formulierten Logik – figurierenden Satzformeln, keine anderen als die Satzformeln von *Sigma* (wie oben gegeben); *aber so*, wie sie im Kalkül **Pi-Gamma** verstanden werden. Und die **Pi-Alpha**-Satzformeln, also die in der Logik **Pi-Alpha** – *genauer*: in der durch den *Kalkül* **Pi-Alpha** formulierten Logik – figurierenden Satzformeln, sind ebenfalls *der Grundnotation nach* keine anderen als die Satzformeln von *Sigma* (wie oben gegeben); *aber so*, wie sie im Kalkül **Pi-Alpha** verstanden werden. *Rein syntaktisch* (gestaltmäßig) hat man es der Grundnotation nach in **Pi-Gamma** und in **Pi-Alpha** mit genau denselben Satzformeln zu tun, *semantisch-syntaktisch* hingegen durchaus

nicht mit denselben. Darüber hinaus figurieren in **Pi-Gamma** aufgrund systemeigener Definitionen gewisse Satzformeln, die durch jene Definitionen definierte logische Konstanten enthalten – Satzformeln, die schon rein syntaktisch in **Pi-Alpha** nicht figurieren (einfach deshalb nicht, weil **Pi-Alpha** die fraglichen Definitionen nicht mitmacht); manche **Pi-Gamma**-Satzformeln (aber *keine* **Pi-Gamma**-Satzformeln *in Grundnotation*) sind also schon rein syntaktisch keine **Pi-Alpha**-Satzformeln.

Allerdings gibt es auch systemübergreifende Definitionen, reine *Sigma*-Definitionen. Diese sind zunächst die folgenden (mittels Definitionsschemata angegebenen) Definitionen (weitere können hinzukommen):

$\sigma \equiv \sigma' =_{Def} (\sigma \supset \sigma') \wedge (\sigma' \supset \sigma)$ [DEF≡][5]

$\tau \neq \tau' =_{Def} \neg(\tau = \tau')$ [DEF≠]

$\sigma \leftrightarrow \sigma' =_{Def} \sigma \rightarrow \sigma'; \sigma' \rightarrow \sigma$ [DEF↔]

$\chi \Leftrightarrow \chi' =_{Def} \chi \Rightarrow \chi'$ und $\chi' \Rightarrow \chi$ [DEF⇔].[6]

Definierte Ausdrücke können den sie jeweils definierenden Ausdruck an beliebiger Vorkommensstelle im Text *salva significatione* ersetzen. Und umgekehrt: Definierende Ausdrücke können den durch sie jeweils definierten Ausdruck an beliebiger Vorkommensstelle im Text *salva significatione* ersetzen. Folglich: Ein definierter Ausdruck und der ihn definierende Ausdruck sind *logisch* (und bei Kenntnis der Definition auch *epistemisch*) völlig gleichwertig. Das gilt jedenfalls dann, wenn, *wie stets in diesem Buch*, der definierte Ausdruck als bloße Abkürzung für den ihn definierenden Ausdruck eingeführt wird. Es verdient eigens erwähnt zu werden: Kommt in einer Textpassage ein Ausdruck mehrfach vor, der durch einen anderen Ausdruck definitorisch ersetzt werden kann, so braucht die Substitution des einen Ausdrucks für den anderen keineswegs durchgehend (alle Vorkommnisse betreffend: „uniform“) zu sein, um *salva significatione* zu sein.

{Aus *salva significatione* ergibt sich *salva validitate* [und *salva veritate*, wenn *validitas* = *veritas*] und *salva invaliditate*, sowie *salva validitate logica* und *salva invaliditate logica*, und zwar Letztere gleichgültig, ob man „ist logisch invalide“ im Sinne von „ist logisch *nichtvalide*“ [„ist aus logischen Gründen nicht valide“] oder im Sinne

[5] Da die Bedeutung von „⊃“ von [gewissem] System zu [gewissem] System variiert, variiert auch die Bedeutung von „≡“ von System zu System – *trotz* der stets gleichlautenden Definition.

[6] Jedes dieser vier Definitionsschemata befasst unendlich viele Definitionen unter sich: nämlich alle Definitionen, die dem jeweiligen Definitionsschema genügen.

von „ist nicht *logischvalide*“ [„ist nicht aus logischen Gründen valide“] versteht. Auf symbolsprachliche Satz*formeln*, Schlussf*ormeln*, Regel*formeln* – in diesem Buch sind das die primären Objekte der Betrachung – ist „logisch valide [ob in der Weise der Logik X, oder aber unmittelbar intuitiv aus der Normalsprache]“ und „logisch invalide“ sinnvoll anwendbar, nicht hingegen – jedenfalls nicht ohne Weiteres – das schlichte „valide“ bzw. „invalide“; diese beiden sind ihrem Sinn nach zunächst nur auf Normalsprachliches beziehbar.}

V. Systemübergreifend sind auch die folgenden Regeln der Klammerersparnis (durch deren Anwendung sehr viele Formeln signifikant übersichtlicher werden): (i) Jeder einstellige Satzoperator [¬, ◊, ❒, …] bindet stärker als jeder zweistellige Satzoperator (und alle einstelligen Satzoperatoren binden gleichstark). (ii) Unter den zweistelligen Satzoperatoren herrscht folgende Ordnung abnehmender Bindungsstärke: ∧, ∨, ⊃ bzw. >, ≡. (iii) *Uneingeschränkt äußere* Klammern – also: syntaktisch geforderte Klammern [nämlich „(“und sein unerlässliches Pendant „)“], die aber nicht *innerhalb* einer Satzformel [z. B. die Grenzen einer *echten Teilsatzformel* von ihr ausmachend] auftreten – können stets weggelassen werden (müssen aber natürlich nicht weggelassen werden). (iv) In Identitätsformeln [das sind Formeln, die per Variablenwechsel und/oder partieller oder vollständiger Füllung durch – primäre oder sekundäre – Namenformeln aus „(x = y)“ hervorgehen] und in Verschiedenheitsformeln [Formeln, die per Variablenwechsel und/oder partieller oder vollständiger Füllung durch Namenformeln aus „(x ≠ y)“ hervorgehen] werden die einschließenden [die Formel begrenzenden, *an ihr äußeren*] Klammern weggelassen (obwohl sie natürlich auch geschrieben werden dürfen); aber sie dürfen nicht weggelassen werden in Anwendungen von einstelligen Satzoperatoren auf Identitäts- bzw. Verschiedenheitsformeln, wie auch dann nicht, wenn direkt vor der Identitäts- bzw. Verschiedenheitsformel ein Quantor steht [etwa ∀x, ∃y, ∀y, ∃x, …], dessen Bereich sie bildet.

{Ein Wort noch zu einer häufig anzutreffenden Ambiguität, deren Vereindeutigung auch in diesem Buch nur im jeweiligen lokalen Kontext erfolgt: Unter *Quantoren* werden meistens „∃“ und „∀“ [und syntaktisch gleich funktionierende Ausdrücke, wie „∃!“] *mit beigefügter Variable* [der jeweiligen *Quantor-Variable*] verstanden, eben: ∀x, ∃y, ∀y, ∃x, … . Nicht selten heißen aber auch schon die reinen logischen Operatoren „∃“ und „∀“ – *ohne* beigefügte Variable – *Quantoren*.}

Teil 1: Aussagenlogiken

1. Allgemeines zu den Kalkülen; sodann der Schlussformelkalkül **Alpha** der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik

Die Kalküle der in diesem Buch betrachteten Logiken sind gemischt axiomatischer Art: sie sind aus Axiomen *und* axiomatischen Regelformeln aufgebaut. Die Axiome und axiomatischen Regelformeln eines Kalküls der Logik X sind seine *Grundprinzipien*, oder auch: *Grundgesetze*; seine *Prinzipien*, oder: *Gesetze*, hingegen umfassen darüber hinaus auch die Theoreme und echtabgeleiteten [„theorematischen"] Regelformeln, die auf der Basis der Grundprinzipien gewinnbar sind. Auch *axiomatische Schemata* von Axiomen bzw. axiomatischen Regelformeln und *hergeleitete Schemata* von Theoremen bzw. echtabgeleiteten Regelformeln können (in sekundärer, analogischer Sprechweise) als „Prinzipien" und „Gesetze" bezeichnet werden, und gegebenenfalls auch als „Grundprinzipien" und „Grundgesetze".

Bei den axiomatischen Regelformeln und den echtabgeleiteten Regelformeln handelt es sich offensichtlich stets um *Regelformeln* (von *Sigma*); bei den Axiomen und Theoremen wird es sich *bei den meisten* der in diesem Buch betrachteten Kalkülen um *Schlussformeln* handeln. Satzformeln sind dadurch aber in den fraglichen Kalkülen – Schlussformelkalkülen – nicht wirklich von der Beweisbarkeit ausgeschlossen: deshalb nicht, weil in ihnen auch prämissenlose Schlussformeln beweisbar sind und Satzformeln durch prämissenlose Schlussformeln eins-zu-eins darstellbar sind.

Die Grundprinzipien eines Kalküls der Logik X sind logisch valide in der Weise der Logik X; sie sind im Kalkül beweisbar (ihr Beweis besteht einfach darin, dass man sie hinschreibt).

{Dadurch, dass die Grundprinzipien eines Kalküls trivialerweise in dem Kalkül *beweisbar* und *bewiesen* sind, sind sie auch trivialerweise in dem Kalkül *ableitbar* und *abgeleitet*; denn „beweisbar im Kalkül" und „ableitbar im Kalkül", „bewiesen im Kalkül" und „abgeleitet im Kalkül" (und „Beweis im Kalkül" und „Ableitung im Kalkül") werden hier als (technische) Synonyme behandelt. Die Grundprinzipien eines Kalküls sind aber weder *echtbeweisbar* noch *echtableitbar* in ihm, und in ihm weder *echtbewiesen* noch *echtabgeleitet*. *Echtbeweisbar* und *echtableitbar*, *echtbewiesen* und *echtabgeleitet* sind nur Prinzipien des Kalküls, die keine Grundprinzipien von ihm sind.}

Mit ihnen sind logisch valide in der Weise der Logik X – sind beweisbar im fraglichen Kalkül der Logik X – auch alle Einsetzungsfälle von ihnen, oder *eventuell* nur alle Einsetzungsfälle, die eine gewisse *einschränkende* Bedingung Y erfüllen.[7] Im Folgenden wird in Beweisen die explizite Differenzierung zwischen einem Grundprinzip und einem zulässigen [d. h.: die einschränkende oder auch gar nicht einschränkende Bedingung Y erfüllenden] Einsetzungsfall des Grundprinzips *in der Regel* weggelassen: ein zulässiger Einsetzungsfall des Grundprinzips wird im Beweisprotokoll einfach unter dem Namen des Grundprinzips selbst verbucht. Und dies für die Grundprinzipien Gesagte gilt auch für die echtabgeleiteten Prinzipien [Theoreme und echtabgeleiteten Regelformeln]. Freilich: Wenn die verwendete uniforme Substitution in ein Prinzip – Grundprinzip oder nicht – nicht leicht erkennbar ist oder eine der Erinnerung bedürftige einschränkende Bedingung erfüllt, dann wird die Einsetzungsfallbildung im Beweisprotokoll explizit vermerkt. (Sonst aber wird eben nur die Bezeichnung des verwendeten Prinzips angegeben.)

Eine Satz- bzw. Schlussformel, die kein Axiom des Kalküls ist, ist in einem Kalkül der Logik X genau dann beweisbar / logisch valide in der Weise der Logik X, wenn sie schrittweise unter jeweils einmaliger Anwendung ausschließlich eines Axioms oder einer axiomatischen Regelformel des Kalküls erzeugbar ist. [In der Formulierung eines Beweises können mehrere solche Schritte der Übersichtlichkeit halber als *ein* Schritt wiedergegeben werden – mit entsprechender Protokollierung.] Axiome setzen dabei Anfänge; axiomatische Regelformeln greifen auf schon erzeugte Formeln – ihre Prämissen / ihre Prämisse – zu, um im nächsten Schritt eine Formel als ihre Konklusion zu setzen. Eine Regelformel wiederum, die keine axiomatische Regelformel des Kalküls ist, ist in einem Kalkül der Logik X genau dann beweisbar / logisch valide in der Weise der Logik X, wenn ihre Konklusion *aus ihren Prämissen* oder *aus ihrer Prämisse* schrittweise unter jeweils einmaliger Anwendung ausschließlich eines Axioms oder einer axiomatischen Regelformel des Kalküls erzeugbar ist.

Beim Beweisen im Kalkül der Logik X müssen ausschließlich Grundprinzipien des Kalküls verwendet werden [genauer gesagt: Grundprinzipien oder in Beweisen zulässige Einsetzungsfälle von diesen]. Dagegen wird nicht verstoßen, wenn beim Beweisen im Kalkül echtabgeleitete Prinzipien des Kalküls [genauer gesagt: echtabgeleitete Prinzipien oder in Beweisen zulässige Einsetzungsfälle von diesen] zum Einsatz kommen (selbstverständlich müssen diese vom Beweisziel ganz unabhängig gewonnen sein); denn deren Einsatz dient offensicht-

[7] Siehe dazu (III) im vorausgehenden Kapitel.

lich rein der Abkürzung des Beweisweges. Der rein unter Einsatz von Axiomen und axiomatischen Regelformeln verlaufende Beweisweg kann ja jederzeit unter Verwendung der rein axiomatisch verlaufenden Beweise der zum Einsatz kommenden Theoreme bzw. echtabgeleiteten Regelformeln rekonstruiert werden. Um zu letzteren Beweisen zu gelangen, kann es freilich notwendig sein, im Gebäude der Theoreme bzw. echtabgeleiteteten Regelformeln viele Stufen nach unten zu gehen – bis man endlich bei ihnen ist.

Hier nun der Kalkül **Alpha** der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik:

A1	$A \rightarrow A$	*1. Trivialität* (TRV1)
R1	$\Gamma<\sigma, \sigma'> \rightarrow C \Rightarrow \Gamma<\sigma', \sigma> \rightarrow C$	*Gesetz der Prämissenumplatzierung* (PP)
R2	$\Gamma \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, B \rightarrow C$	*Gesetz der Prämissenerweiterung* (PW)
R3	$\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$	*Strukturelles Schnittgesetz* (SSG)
A2	$B, B \supset C \rightarrow C$	*Modus ponens* (MP)
R4	$\Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow B \supset C$	*Deduktionsprinzip* (DP)
A3	$B, \neg B \rightarrow C$	*Ex contradictione quodlibet* (ECQ)
R5	$\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$	*Inhaltliches Schnittgesetz* (ISG)
A4	$A \rightarrow A \vee B; B \rightarrow A \vee B$	*Introductio disjunctionis* (ID)
R6	$\Gamma, A \rightarrow C; \Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \vee B \rightarrow C$	*Gesetz des vorderen „oder“* (VOG)
A5	$A, B \rightarrow A \wedge B$	*Introductio conjunctionis* (IC)
R7	$\Gamma, A, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \wedge B \rightarrow C$	*Gesetz des vorderen „und“* (VUG)

Die Axiome von **Alpha** sind A1 – A5, die axiomatischen Regelformeln von **Alpha** sind durch R1 – R7 gegeben. *Rein strukturelle* Grundprinzipien von **Alpha** sind A1 und die durch R1 – R3 gegebenen axiomatischen Regelformeln; auf logische Konstanten bezogene (und somit „inhaltliche“) Grundprinzipien von **Alpha** sind A2 – A5 und die durch R4 – R7 gegebenen axiomatischen Regelformeln. Die Axiome von **Alpha** sind ersichtlich Schlussformeln (unter Verwendung der Regeln der Klammerersparnis geschriebene). Was hingegen auf den ersten Blick so aussieht wie die axiomatischen Regelformeln von **Alpha** (nämlich R1 – R7), sind tat-

sächlich noch nicht diese Regelformeln (das müssten ja Schlussregelformeln sein), sondern vielmehr *Schemata* von solchen – welche Schemata unendlich viele Schlussregelformeln als axiomatische Regelformeln unter sich befassen, und zwar *schon vor* jeder Bildung von Einsetzungsfällen durch uniforme Substitution: „Γ“ steht nämlich für eine *beliebige* endlich lange Folge von Satzformeln [wiederholtes Auftreten derselben Satzformel ist erlaubt], dabei auch für die *leere* Folge von Satzformeln. [Ist die Satzformelfolge nicht leer und nicht eingliedrig, so sind ihre Satzformeln – deren Vorkommnisse in ihr – durch Komma voneinander abgeteilt.] Freilich gibt es auch bzgl. „Γ“ [oder auch „Γ'“, „Γ''“, …] *eine Art von* uniformer Substitution und e*ine Art von* Einsetzungsfallbildung. Nämlich: Wenn man von einem Schlussregelformel-*Schema* (ob axiomatisch oder hergeleitet) zu einer konkreten Schlussregelformel übergeht, so ist „Γ“ überall im Schema durch ein und dieselbe konkrete endliche [leere, eingliedrige, oder endlich mehrgliedrige] Satzformelfolge zu ersetzen; gleiches gilt, wenn man von einem Beweisschema für Schlussregelformeln zu einem konkreten Beweis für eine konkrete Schlussregelformel übergeht: „Γ“ ist überall im Schema durch ein und dieselbe konkrete endliche Satzformelfolge zu ersetzen.

Das in R1 vorkommende „$\Gamma<\sigma, \sigma'>$“ wiederum steht für eine endliche Folge von Satzformeln, in der an einer gewissen Stelle die Satzformel σ vorkommt, unmittelbar gefolgt von einem Komma und dann von einem Vorkommnis der Satzformel σ'. Und „$\Gamma<\sigma', \sigma>$“ ist relativ zu „$\Gamma<\sigma, \sigma'>$“ *mutatis mutandis* zu verstehen; es handelt sich also bei $\Gamma<\sigma', \sigma>$ um beinahe dieselbe Folge von Satzformeln wie bei $\Gamma<\sigma, \sigma'>$, nämlich um die Satzformelfolge $\Gamma<\sigma, \sigma'>$ *mit einem einzigen vollzogenen lokalen Positionswechsel* – „nur um dieses bestimmte Komma(vorkommnis) herum“ – der Satzformeln σ und σ'.

Zur Illustration des Beweisens von Schlussformeln und Schlussregelformeln in **Alpha** sei eine Reihe von Beweisen bzw. von Beweis*schemata* angegeben:

RT1:[8] $\Gamma, B, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, B \rightarrow C$ — *Gesetz der Prämissenkontraktion* (PK)

1. $\Gamma, B, B \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, B \rightarrow B$	A1, R2 {ggf. [wenn Γ nicht leer ist], und ggf. *mehrfach*: mit den Satzformel*n* in Γ}, R1 {ggf., und ggf. mehrfach}

[8] „RT“ (plus nachfolgende Ziffer in der Beweisreihenfolge) steht hier und im Folgenden für „Regeltheoreme“: echtabgeleitete Regelformeln. Die, eigentlich, noch voranzustellende Anzeige des verwendeten Kalküls, hier: **Alpha**, wird wegen der Fundamentalität von **Alpha** weggelassen.

3. Γ, B $\rightarrow$ C R3 (1, 2)

{Wie in aller Regel bei Beweisen von Schlussregelformeln handelt es sich beim Obigen *direkt* um den Beweis eines *Schemas* von unendlich vielen Schlussregelformeln. Ebenso handelt es sich beim Obigen *direkt* um ein *Schema* von unendlich vielen Beweisen für Schlussregelformeln; nur *indirekt* (mittels des Schemas) sind die Beweise für diese Schlussregelformeln selbst gegeben. Wenn auch „Γ“ (oder auch „Γ'“, „Γ''“, …) in schematischen Regelgesetzen für eine beliebige endliche Folge von Satzformeln steht [bei PK muss es nun gerade eine mehrgliedrige sein], so ist doch mit verschiedenen Vorkommnissen von „Γ“ in einem Beweisschema für Schlussregelformeln – dem Beweis eines Schemas von Schlussregelformeln, eines schematischen Regelgesetzes – wie auch natürlich in den schematischen Regelgesetzen selbst stets *dieselbe* Satzformelfolge gemeint.

Die Anwendung von R2 in Zeile 2 des obigen Beweises entfällt natürlich, wenn Γ leer ist; das sei hier im Blick auf die vielen noch kommenden Einfügungen von Satzformelfolgen in Schlussformeln im Progress von Beweisschemata für Schlussregelformeln *einmal* gesagt, um es nicht immer wieder sagen zu müssen.}

RT2: $\Gamma \rightarrow A; \Gamma \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \rightarrow A \wedge B$ IC-*Regelgesetz*

1. $\Gamma \rightarrow A$ Annahme

2. $\Gamma \rightarrow B$ Annahme

3. Γ, A, B $\rightarrow$ A $\wedge$ B A5, R2, R1[9]

4. Γ, A $\rightarrow$ B R2 (2)

5. Γ, A $\rightarrow$ A $\wedge$ B R3 (3, 4) {R3 mit der Satzformelfolge Γ': Γ, A}

6. $\Gamma \rightarrow A \wedge B$ R3 (5, 1)

{Im Kalkül **Alpha mit IC-*Regelgesetz* //**[10] **IC** ist – umgekehrt – IC beweisbar:

IC: A, B $\rightarrow$ A $\wedge$ B

1. A, B $\rightarrow$ A A1, R2

2. A, B $\rightarrow$ B A1, R2, R1

3. A, B $\rightarrow$ A $\wedge$ B IC-*Regelgesetz* (1, 2)}

[9] Anwendungen von R2 oder R1 (und von Entsprechungen von R1 bzw. R2 in manchen anderen Kalkülen) bekommen nicht immer eine eigene Zeile, sondern werden zusammen mit der Anwendung anderer Prinzipien oft „in einem Aufwasch“ durchgeführt. Zudem werden bei R2 und R1 mehrfache Anwendungen hintereinander gewöhnlich wie eine einzige Anwendung notiert. Voraussetzung dieser „Bequemlichkeiten“ ist, dass die Sache klar ist, wie sie es z. B. im hier vorliegenden Fall ist: Von A5 wird ausgegangen; dann werden die Satzformeln aus Γ der in Γ gegebenen Von-links-nach-rechts-Reihenfolge nach in Anwendung von R2 Schritt für Schritt hinzugefügt (stets unmittelbar vor dem Pfeil eingefügt); dann werden sie derselben Reihenfolge nach in Anwendung von R1 Schritt für Schritt allesamt nach hinten (nach links) verschoben (stets bis unmittelbar hinter „A“, nicht weiter). (Im Fall, dass Γ leer ist, läuft die Anwendung von R2 und R1 *leer*.)

[10] „**//**“ in dem fettgedruckten Ausdruck besagt, dass das, was *links von* „**//**“, aber – in Leserichtung – nach dem „**mit**“ genannt ist, das, was *rechts von* „**//**“ genannt ist, bei den Grundprinzipien des Kalküls (um den es sich gerade handelt: hier ist es **Alpha**) *ersetzt*, während alles Übrige bei diesen Grundprinzipien gleichbleibt.

T1:[11] $\rightarrow A \vee \neg A$ *Tertium non datur* (TND)

1. $A \rightarrow A \vee \neg A$	A4
2. $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$	A4
3. $\rightarrow A \vee \neg A$	R5 (1, 2)

{Im Kalkül **Alpha mit TND // ISG** ist – umgekehrt – ISG beweisbar:

ISG: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$

1. $\Gamma, B \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$	Annahme
3. $\Gamma, B \vee \neg B \rightarrow C$	R6 (1, 2)
4. $\Gamma \rightarrow B \vee \neg B$	TND, R2
5. $\Gamma \rightarrow C$	R3 (3, 4)}

T2: $\neg\neg A \rightarrow A; \rightarrow \neg\neg A \supset A$ *Eliminatio duplicis negationis* (EDN)

1. $\neg\neg A, A \rightarrow A$	A1, R2, R1
2. $\neg\neg A, \neg A \rightarrow A$	A3 {„$\neg A$“ für „B“, „A“ für „C“}, R1
3. $\neg\neg A \rightarrow A$	R5 (1, 2)
4. $\rightarrow \neg\neg A \supset A$	R4 (3)

T3: $A \rightarrow \neg\neg A; \rightarrow A \supset \neg\neg A$ *Introductio duplicis negationis* (IDN)

1. $A, \neg A \rightarrow \neg\neg A$	A3
2. $A, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	A1, R2, R1
3. $A \rightarrow \neg\neg A$	R5 (1, 2)
4. $\rightarrow A \supset \neg\neg A$	R4 (3)

T4: $\neg\neg A \leftrightarrow A; \rightarrow \neg\neg A \equiv A$ *Lex duplicis negationis* (LDN)

1. $\neg\neg A \rightarrow A$	T2
2. $A \rightarrow \neg\neg A$	T3
3. $\neg\neg A \leftrightarrow A$	DEF$\leftrightarrow$ (1, 2)

[11] „T“ (plus nachfolgende Ziffer in der Beweisreihenfolge) steht hier und im Folgenden für „Theorem“ (sei es, wie hier, ein Schlussformeltheorem, oder sei es ein Satzformeltheorem: beim Beweisen in Satzformelkalkülen). Die, eigentlich, noch voranzustellende Anzeige des verwendeten Kalküls, hier: **Alpha**, wird wegen der Fundamentalität von **Alpha** weggelassen.

4. $\rightarrow \neg\neg A \supset A$ T2, 2. Hälfte

5. $\rightarrow A \supset \neg\neg A$ T3, 2. Hälfte

6. $\rightarrow (\neg\neg A \supset A) \wedge (A \supset \neg\neg A)$ RT2 (4, 5)

7. $\rightarrow \neg\neg A \equiv A$ DEF≡ (6)

RT3: $\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ *Aufsteigende Kontraposition* (AUKP)

1. $\Gamma, A \rightarrow B$ Annahme

2. $\Gamma, A, \neg B \rightarrow B$ R2 (1)

3. $\Gamma, A, \neg B, B \rightarrow \neg A$ A3, R2, R1

4. $\Gamma, A, \neg B \rightarrow \neg A$ R3 (3, 2)

5. $\Gamma, \neg B, A \rightarrow \neg A$ R1 (4)

6. $\Gamma, \neg B, \neg A \rightarrow \neg A$ A1, R2, R1

7. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ R5 (5, 6)

RT4: $\Gamma, A \rightarrow \neg B \Rightarrow \Gamma, B \rightarrow \neg A$ *Gesetz der Rechtskontraposition* (RKP)

1. $\Gamma, A \rightarrow \neg B$ Annahme

2. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg A$ RT3 (1)

3. $\Gamma, B, \neg\neg B \rightarrow \neg A$ R2, R1 (2)

4. $\Gamma, B \rightarrow \neg\neg B$ T3, R2, R1

5. $\Gamma, B \rightarrow \neg A$ R3 (3, 4)

RT5: $\Gamma, \neg A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow A$ *Gesetz der Linkskontraposition* (LKP)

1. $\Gamma, \neg A \rightarrow B$ Annahme

2. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg\neg A$ RT3 (1)

3. $\Gamma, \neg B, \neg\neg A \rightarrow A$ T2, R2, R1

4. $\Gamma, \neg B \rightarrow A$ R3 (3, 2)

RT6: $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow B$ *Absteigende Kontraposition* (ABKP)

1. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ Annahme

2. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ RT3 (1)

3. $\Gamma, A, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ R2, R1 (2)

4. $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg A$ T3, R2, R1

5. $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg B$ R3 (3, 4)

6. $\Gamma, A, \neg\neg B \rightarrow B$ T2, R2, R1

7. $\Gamma, A \rightarrow B$ R3 (6, 5)

{Man beachte, dass ABKP eine Konsequenz von LKP und RKP ist, und zwar ohne Verwendung von ISG:

ABKP: $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow B$

1. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ Annahme

2. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow B$ LKP (1)

3. $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg A$ A1, R2, R1

4. $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg A$ RKP (3)

5. $\Gamma, A \rightarrow B$ RT7 (4, 2) [gleich unten ohne ISG bewiesen].

In der auf RT11 folgenden Anmerkung wird weiter unten gezeigt, dass AUKP eine Konsequenz von RKP allein – ohne ISG – ist.}

RT7: $\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow C$ *Kettenschlussgesetz* (KSG)

1. $\Gamma, A \rightarrow B$ Annahme

2. $\Gamma, B \rightarrow C$ Annahme

3. $\Gamma, A, B \rightarrow C$ R2, R1 (2)

4. $\Gamma, A \rightarrow C$ R3 (3, 1)

T5: $\rightarrow A \supset A$ *2. Trivialität* (TRV2)

1. $A \rightarrow A$ A1

2. $\rightarrow A \supset A$ R4 (1)

{Im Kalkül **Alpha mit EDN und RKP // ISG** ist IDN und TND beweisbar und mit TND auch ISG (hinsichtlich letzterer Beweisbarkeit siehe die Deduktion in der Anmerkung unterhalb von T1):

IDN: $A \rightarrow \neg\neg A$

1. $\neg A \rightarrow \neg A$ A1

2. $A \rightarrow \neg\neg A$ RKP (1)

TND: $\rightarrow A \vee \neg A$

1. $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$ A4

2. $A \vee \neg A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ IDN [soeben bewiesen; „$(A \vee \neg A)$“ für „A“]

3. $\neg A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ RT7 (1, 2)

4. $A \rightarrow A \vee \neg A$ A4

5. $A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ RT7 (4, 2)

6. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A$ RKP (5)

7. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A$ RKP (3)

8. $\neg A, \neg\neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$ A3

9. $\neg(A \vee \neg A), \neg A \rightarrow \neg\neg A$ R2 (7)

10. $\neg(A \vee \neg A), \neg A, \neg\neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$ R2, R1 (8)

11. $\neg(A \vee \neg A), \neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$ R3 (10, 9)

12. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \supset A)$ R3 (11, 6)

13. $A \supset A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ RKP (12)

14. $\rightarrow A \supset A$ T5

15. $\rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ R3 (13, 14)

16. $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ EDN [„$(A \vee \neg A)$“ für „A“]

17. $\rightarrow A \vee \neg A$ R3 (16, 15)}

{Im Kalkül **Alpha mit LKP und RKP // ISG** ist EDN und IDN beweisbar, und somit (wie gesehen) TND und somit (wie ebenfalls schon gesehen) ISG. Dazu ist nur noch EDN zu zeigen (IDN ergibt sich mit RKP ohne LKP, wie gerade gezeigt):

EDN: $\neg\neg A \rightarrow A$

1. $\neg A \rightarrow \neg A$ A1

2. $\neg\neg A \rightarrow A$ LKP (1)}

T6: $\neg(A \supset B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$ *Negation der 1. Implikationsdef.* (NIMD1)

1. $A, A \supset B \rightarrow B$ A2

2. $A, \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$ RT3 (1)

3. $A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$ R7 (2)

4. $\neg A, A \rightarrow B$ A3, R1

5. $\neg A \rightarrow A \supset B$ R4 (4)

6. $B, A \rightarrow B$ A1, R2

7. $B \rightarrow A \supset B$ R4 (6)

8. $\neg(A \supset B) \rightarrow A$ RT5 (5)

9. $\neg(A \supset B) \rightarrow \neg B$ RT3 (7)

10. $\neg(A \supset B) \rightarrow A \wedge \neg B$ RT2 (8, 9)

11. $\neg(A \supset B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$ DEF$\leftrightarrow$ (10, 3)

T7: $A \supset B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ *1. Implikationsdefinition* (IMD1)

1. $\neg(A \supset B) \rightarrow A \wedge \neg B$	T6 {1. Hälfte: „von links nach rechts“}
2. $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow A \supset B$	RT5 (1)
3. $A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$	T6 {2. Hälfte: „von rechts nach links“}
4. $A \supset B \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$	RT4 (3)
5. $A \supset B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$	DEF$\leftrightarrow$ (4, 2)

T8: $A \supset B \leftrightarrow \neg A \vee B$ *2. Implikationsdefinition* (IMD2)

1. $\neg A \rightarrow A \supset B$	A3, R1, R4
2. $B \rightarrow A \supset B$	A1, R2, R4
3. $\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$	R6 (1, 2)
4. $A \supset B, \neg A \rightarrow \neg A \vee B$	A4, R2, R1
5. $A \supset B, A \rightarrow B$	A2, R1
7. $A \supset B, A, B \rightarrow \neg A \vee B$	A4, R2, R1
8. $A \supset B, A \rightarrow \neg A \vee B$	R3 (7, 5)
9. $A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$	R5 (8, 4)
10. $A \supset B \leftrightarrow \neg A \vee B$	DEF$\leftrightarrow$ (9, 3)

T9: $A \wedge B \rightarrow A; A \wedge B \rightarrow B$ *Eliminatio conjunctionis* (EC)

1. $A, B \rightarrow A$	A1, R2
2. $A \wedge B \rightarrow A$	R7 (1)
3. $A, B \rightarrow B$	A1, R2, R1
4. $A \wedge B \rightarrow B$	R7 (3)

{Im Kalkül **Alpha mit EC // VUG** ist – umgekehrt – VUG beweisbar:

VUG: $\Gamma, A, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \wedge B \rightarrow C$

1. $\Gamma, A, B \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, A, A \wedge B, B \rightarrow C$	R2, R1 (1)
3. $\Gamma, A, A \wedge B \rightarrow B$	EC, R2, R1
4. $\Gamma, A, A \wedge B \rightarrow C$	R3 (2, 3)
5. $\Gamma, A \wedge B, A \rightarrow C$	R1 (4)
6. $\Gamma, A \wedge B \rightarrow A$	EC, R2, R1
7. $\Gamma, A \wedge B \rightarrow C$	R3 (5, 6)}

T10: $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — *1. Gesetz von De Morgan* (GDM1)

1. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg A$	T9
2. $A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	RT4 (1)
3. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg B$	T9
4. $B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	RT4 (3)
5. $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	R6 (2, 4)
6. $A \rightarrow A \vee B$	A4
7. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$	RT3 (6)
8. $B \rightarrow A \vee B$	A4
9. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$	RT3 (8)
10. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$	RT2 (7, 9)
11. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$	RT5 (10)
12. $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	DEF$\leftrightarrow$ (5, 11)

T11: $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ — *2. Gesetz von De Morgan* (GDM2)

1. $\neg A \rightarrow \neg A \vee \neg B$	A4
2. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A$	RT5 (1)
3. $\neg B \rightarrow \neg A \vee \neg B$	A4
4. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow B$	RT5 (3)
5. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \wedge B$	RT2 (2, 4)
6. $A \wedge B \rightarrow A$	T9
7. $\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$	RT3 (6)
8. $A \wedge B \rightarrow B$	T9
9. $\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$	RT3 (8)
10. $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$	R6 (7, 9)
11. $A \wedge B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$	RT4 (10)
12. $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$	DEF$\leftrightarrow$ (11, 5)

T12: $B \vee C, \neg B \rightarrow C;\ B \vee C, \neg C \rightarrow B$ — *Exklusionsprinzip* (EP)

1. $\neg B, B \rightarrow C$	A3, R1

2. $\neg B, C \rightarrow C$ A1, R2, R1

3. $\neg B, B \vee C \rightarrow C$ R6 (1, 2)

4. $B \vee C, \neg B \rightarrow C$ R1 (3)

5. $\neg C, C \rightarrow B$ A3, R1

6. $\neg C, B \rightarrow B$ A1, R2, R1

7. $\neg C, B \vee C \rightarrow B$ R6 (6, 5)

8. $B \vee C, \neg C \rightarrow B$ R1 (7)

{Im Kalkül **Alpha mit EP // ECQ** ist – umgekehrt – ECQ beweisbar:

ECQ: $B, \neg B \rightarrow C$

1. $B \rightarrow B \vee C$ A4

2. $B, \neg B \rightarrow B \vee C$ R2 (1)

3. $B \vee C, \neg B \rightarrow C$ EP

4. $B, \neg B, B \vee C \rightarrow C$ R2, R1 (3)

5. $B, \neg B \rightarrow C$ R3 (4, 2)}

T13: $\rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$ *Principium contradictionis* (PC)

1. $A, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ A3

2. $A \wedge \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ R7 (1)

3. $B \supset B \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$ RT4 (2)

4. $\rightarrow B \supset B$ T5

5. $\rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$ R3 (3, 4)

T14: $B \leftrightarrow B \vee A \wedge \neg A$ *1. Paradox* (PX1)

1. $B \rightarrow B \vee A \wedge \neg A$ A4

2. $B \vee A \wedge \neg A, \neg(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ T12

3. $B \vee A \wedge \neg A \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$ T13, R2

4. $B \vee A \wedge \neg A \rightarrow B$ R3 (2, 3)

5. $B \leftrightarrow B \vee A \wedge \neg A$ DEF$\leftrightarrow$ (1, 4)

T15: $A \vee B \leftrightarrow \neg A \supset B$ $\vee$-*per*-$\supset$-*Definition* (IMPOD)

1. $A, \neg A \rightarrow B$ A3

2. $A \rightarrow \neg A \supset B$	R4 (1)
3. $B, \neg A \rightarrow B$	A1, R2
4. $B \rightarrow \neg A \supset B$	R4 (3)
5. $A \vee B \rightarrow \neg A \supset B$	R6 (2, 4)
6. $\neg A \supset B, \neg A \rightarrow B$	A2, R1
7. $\neg A \supset B, \neg A, B \rightarrow A \vee B$	A4, R2, R1
8. $\neg A \supset B, \neg A \rightarrow A \vee B$	R3 (7, 6)
9. $\neg A \supset B, A \rightarrow A \vee B$	A4, R2, R1
10. $\neg A \supset B \rightarrow A \vee B$	R5 (9, 8)
11. $A \vee B \leftrightarrow \neg A \supset B$	DEF$\leftrightarrow$ (5, 10)

T16: $A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$ — *$\wedge$-per-$\supset$-Definition* (IMPUD)

1. $\neg B, A \rightarrow \neg B$	A1, R2
2. $\neg B \rightarrow A \supset \neg B$	R4 (1)
3. $\neg(A \supset \neg B) \rightarrow B$	RT5 (2)
4. $\neg A, A \rightarrow \neg B$	A3, R1
5. $\neg A \rightarrow A \supset \neg B$	R4 (4)
6. $\neg(A \supset \neg B) \rightarrow A$	RT5 (5)
7. $\neg(A \supset \neg B) \rightarrow A \wedge B$	RT2 (6, 3)
8. $A \wedge \neg\neg B \rightarrow \neg(A \supset \neg B)$	T6 {2. Hälfte, „$\neg B$“ für „B“}
9. $A, B \rightarrow A$	A1, R2
10. $A, B \rightarrow \neg\neg B$	T3, R2, R1
11. $A, B \rightarrow A \wedge \neg\neg B$	RT2 (9, 10)
12. $A \wedge B \rightarrow A \wedge \neg\neg B$	R7 (11)
13. $A \wedge B \rightarrow \neg(A \supset \neg B)$	RT7 (12, 8)
14. $A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$	DEF$\leftrightarrow$ (13, 7)

T17a: $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ — *„oder“-Kommutativität* (OKOM)

1. $A \rightarrow B \vee A$	A4 {in $B \rightarrow A \vee B$ uniform substituieren: „B“ für „A“ und „A“ für „B“}
2. $B \rightarrow B \vee A$	A4 {in $A \rightarrow A \vee B$ uniform substituieren: „B“ für „A“ und „A“ für „B“}
3. $A \vee B \rightarrow B \vee A$	R6 (1, 2)

4. $B \rightarrow A \vee B$ A4

5. $A \rightarrow A \vee B$ A4

6. $B \vee A \rightarrow A \vee B$ R6 (4, 5)

7. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ DEF$\leftrightarrow$ (3, 6)

T17b: $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ *„und"-Kommutativität* (UKOM)

1. $A \wedge B \rightarrow A$ T9 {EC}

2. $A \wedge B \rightarrow B$ T9

3. $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$ RT2 (2, 1)

4. $B \wedge A \rightarrow B$ T9

5. $B \wedge A \rightarrow A$ T9

6. $B \wedge A \rightarrow A \wedge B$ RT2 (5, 4)

7. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ DEF$\leftrightarrow$ (3, 6)

T18: $B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg A) \supset B$ *2. Paradox* (PX2)

1. $B \rightarrow B \vee A \wedge \neg A$ T14 {1. Hälfte; oder schlicht mit A4}

2. $B \vee A \wedge \neg A \rightarrow A \wedge \neg A \vee B$ T17a

3. $B \rightarrow A \wedge \neg A \vee B$ RT7 (1, 2)

4. $A \wedge \neg A \vee B \rightarrow \neg(A \wedge \neg A) \supset B$ T15

5. $B \rightarrow \neg(A \wedge \neg A) \supset B$ RT7 (3, 4)

6. $B \vee A \wedge \neg A \rightarrow B$ T14 {2. Hälfte}

7. $A \wedge \neg A \vee B \rightarrow B \vee A \wedge \neg A$ T17a

8. $A \wedge \neg A \vee B \rightarrow B$ RT7 (7, 6)

9. $\neg(A \wedge \neg A) \supset B \rightarrow A \wedge \neg A \vee B$ T15 {2. Hälfte: „von rechts nach links"; Einsetzungsfall}

10. $\neg(A \wedge \neg A) \supset B \rightarrow B$ RT7 (9, 8)

11. $B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg A) \supset B$ DEF$\leftrightarrow$ (5, 10)

T19: $\rightarrow (B \supset C) \vee (\neg B \supset C)$ *3. Paradox* (PX3)

1. $B, \neg B \rightarrow C$ A3

2. $B \rightarrow \neg B \supset C$ R4 (1)

3. $\neg B \supset C \rightarrow (B \supset C) \vee (\neg B \supset C)$ A4

4. $B \rightarrow (B \supset C) \vee (\neg B \supset C)$ RT7 (2, 3)

5. $\neg B, B \rightarrow C$ A3, R1

6. $\neg B \rightarrow B \supset C$ R4 (5)

7. $B \supset C \rightarrow (B \supset C) \vee (\neg B \supset C)$ A4

8. $\neg B \rightarrow (B \supset C) \vee (\neg B \supset C)$ RT7 (6,7)

9. $\rightarrow (B \supset C) \vee (\neg B \supset C)$ R5 (4, 8)

T20: $\rightarrow (B \supset C) \vee (B \supset \neg C)$ *4. Paradox* (PX4)

1. $C, B \rightarrow C$ A1, R2

2. $C \rightarrow B \supset C$ R4 (1)

3. $B \supset C \rightarrow (B \supset C) \vee (B \supset \neg C)$ A4

4. $C \rightarrow (B \supset C) \vee (B \supset \neg C)$ RT7 (2, 3)

5. $\neg C, B \rightarrow \neg C$ A1, R2

6. $\neg C \rightarrow B \supset \neg C$ R4 (5)

7. $B \supset \neg C \rightarrow (B \supset C) \vee (B \supset \neg C)$ A4

8. $\neg C \rightarrow (B \supset C) \vee (B \supset \neg C)$ RT7 (6,7)

9. $\rightarrow (B \supset C) \vee (B \supset \neg C)$ R5 (4, 8)

T21: $\rightarrow (B \supset C) \vee (C \supset B)$ *5. Paradox* (PX5)

1. $\neg B, B \rightarrow C$ A3, R1

2. $\neg B \rightarrow B \supset C$ R4 (1)

3. $B \supset C \rightarrow (B \supset C) \vee (C \supset B)$ A4

4. $\neg B \rightarrow (B \supset C) \vee (C \supset B)$ RT7 (2, 3)

5. $B, C \rightarrow B$ A1, R2

6. $B \rightarrow C \supset B$ R4 (5)

7. $C \supset B \rightarrow (B \supset C) \vee (C \supset B)$ A4

8. $B \rightarrow (B \supset C) \vee (C \supset B)$ RT7 (6, 7)

9. $\rightarrow (B \supset C) \vee (C \supset B)$ R5 (8, 4)

RT8: $\Gamma, A \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A$ *1. Gesetz indirekten Schließens* (GIS1)

1. $\Gamma, A \rightarrow \neg(B \supset B)$ Annahme

2. $\Gamma, B \supset B \rightarrow \neg A$ RT4 (1)

3. $\Gamma \rightarrow B \supset B$ T5, R2

4. $\Gamma \rightarrow \neg A$ R3 (2, 3)

RT9: $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow A$ *2. Gesetz indirekten Schließens* (GIS2)

1. $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ Annahme

2. $\Gamma \rightarrow \neg\neg A$ RT8 (1)

3. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow A$ T2, R2, R1

4. $\Gamma \rightarrow A$ R3 (3, 2)

RT10: $\Gamma, A \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A$ *3. Gesetz indirekten Schließens* (GIS3)

1. $\Gamma, A \rightarrow \neg A$ Annahme

2. $\Gamma, A, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ A3 {„A“ für „B“, „$\neg(B \supset B)$“ für „C“}, R2, R1

3. $\Gamma, A \rightarrow \neg(B \supset B)$ R3 (2, 1)

4. $\Gamma \rightarrow \neg A$ RT8 (3)

RT11: $\Gamma, \neg A \rightarrow A \Rightarrow \Gamma \rightarrow A$ *4. Gesetz indirekten Schließens* (GIS4)

1. $\Gamma, \neg A \rightarrow A$ Annahme

2. $\Gamma, \neg A, A \rightarrow \neg(B \supset B)$ A3, R2, R1

3. $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ R3 (2, 1)

4. $\Gamma \rightarrow A$ RT9 (3)

{Im Kalkül **Alpha mit AUKP und GIS4 // ISG** ist ISG beweisbar:

ISG: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$

1. $\Gamma, B \rightarrow C$ Annahme

2. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$ Annahme

3. $\Gamma, \neg C \rightarrow \neg B$ AUKP (1)

4. $\Gamma, \neg C \rightarrow \neg\neg B$ AUKP (2)

5. $\neg B, \neg\neg B \rightarrow C$ A3

6. $\Gamma, \neg B, \neg C \rightarrow \neg\neg B$ R2, R1 (4)

7. $\Gamma, \neg B, \neg C, \neg\neg B \rightarrow C$ R2, R1 (5)

8. $\Gamma, \neg B, \neg C \rightarrow C$ R3 (7, 6)

9. $\Gamma, \neg C, \neg B \rightarrow C$ R1 (8)

10. $\Gamma, \neg C \rightarrow C$ R3 (9, 3)

11. $\Gamma \rightarrow C$ GIS4 (10).

Der Beachtung wert ist in diesem Zusammenhang, dass AUKP eine Konsequenz von RKP – und zwar ohne Verwendung von ISG – ist:

AUKP: $\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$

1. $\Gamma, A \rightarrow B$ Annahme

2. $\neg B \rightarrow \neg B$ A1

3. $B \rightarrow \neg\neg B$ RKP (2) [„$\neg B$“ (uniform substituiert) für „A“ in: $\Gamma, A \rightarrow \neg B \Rightarrow \Gamma, B \rightarrow \neg A$]

4. $\Gamma, B \rightarrow \neg\neg B$ R2, R1 (3)

5. $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg B$ RT7 (1, 4)

6. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ RKP (5)}

T22: $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ *1. Distributivgesetz* (DG1)

1. $A, B \rightarrow A \wedge B$ A5

2. $A, B, A \wedge B \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ A4, R2, R1

3. $A, B \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ R3 (2, 1)

4. $B \vee C, A, \neg B \rightarrow C$ T12, R2, R1

5. $B \vee C, A, \neg B \rightarrow A$ A1, R2, R1

6. $B \vee C, A, \neg B \rightarrow A \wedge C$ RT2 (5, 4)

7. $B \vee C, A, \neg B, A \wedge C \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ A4, R2, R1

8. $B \vee C, A, \neg B \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ R3 (7, 6)

9. $A, B \vee C, \neg B \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ R1 (8)

10. $A, B \vee C, B \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ R2, R1 (3)

11. $A, B \vee C \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ R5 (10, 9)

12. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ R7 (11)

13. $A \wedge B \rightarrow A$ T9

14. $A \wedge B \rightarrow B$ T9

15. $B \rightarrow B \vee C$ A4

16. $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ RT7 (14, 15)

17. $A \wedge B \rightarrow A \wedge (B \vee C)$ RT2 (13, 16)

18. $A \wedge C \rightarrow A$ T9

19. $A \wedge C \rightarrow C$ T9

20. $C \rightarrow B \vee C$ A4

21. $A \wedge C \rightarrow B \vee C$ RT7 (19, 20)

22. $A \wedge C \rightarrow A \wedge (B \vee C)$ RT2 (18, 21)

23. $A \wedge B \vee A \wedge C \rightarrow A \wedge (B \vee C)$ R6 (17, 22)

24. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ DEF$\leftrightarrow$ (12, 23)

{Das *2.Distributivgesetz* – DG2 – lautet: $A \vee B \wedge C \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Dessen Beweis in **Alpha** sei den Lesern überlassen. Gelingt ihnen der Beweis, so ist dies der Nachweis ihrer Exzellenz in der Handhabung von **Alpha**. Für die Von-*links*-nach-*rechts*-Hälfte von DG1 – $A \wedge (B \vee C) \rightarrow A \wedge B \vee A \wedge C$ – braucht man R5, für die Von-*rechts*-nach-*links*-Hälfte von DG1 – $A \wedge B \vee A \wedge C \rightarrow A \wedge (B \vee C)$ – braucht man es nicht. Bei DG2 ist es hingegen wie folgt: Für die Von-*rechts*-nach-*links*-Hälfte von DG2 – $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee B \wedge C$ – braucht man R5, für die Von-*links*-nach-*rechts*-Hälfte von DG2 – $A \vee B \wedge C \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ braucht man es nicht.}

RT12: $\Gamma \rightarrow A; \Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \rightarrow A \wedge B$ *Hintere* $\wedge$*-Erweiterung* (HUE)

1. $\Gamma \rightarrow A$ Annahme

2. $\Gamma, A \rightarrow B$ Annahme

3. $\Gamma \rightarrow B$ R3 (2, 1)

4. $\Gamma \rightarrow A \wedge B$ RT2 (1, 3)

RT13: $\Gamma \rightarrow A \supset B \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow B$ *Umkehrung von* DP (UDP)

1. $\Gamma \rightarrow A \supset B$ Annahme

2. $\Gamma, A \rightarrow A \supset B$ R2 (1)

3. $\Gamma, A, A \supset B \rightarrow B$ A2, R2, R1

4. $\Gamma, A \rightarrow B$ R3 (3, 2)

RT14: $\Gamma, A \wedge B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A, B \rightarrow C$ *Umkehrung von* VUG (UVUG)

1. $\Gamma, A \wedge B \rightarrow C$ Annahme

2. $\Gamma, A, B, A \wedge B \rightarrow C$ R2, R1 (1)

3. $\Gamma, A, B \rightarrow A \wedge B$ A5, R2, R1

4. $\Gamma, A, B \rightarrow C$ R3 (2, 3)

RT15a: $\Gamma \rightarrow C \Rightarrow \rightarrow \wedge(\Gamma) \supset C$ *Prämissenexportationsgesetz* (PEG)

1. $\Gamma \rightarrow C$ Annahme

2. $\wedge(\Gamma) \rightarrow C$ Ist die Folge Γ leer, dann ist [dann sei festsetzungsgemäß] $\wedge(\Gamma)$ identisch mit $B \supset B$ und 2. ergibt sich aus 1. mit R2. Umfasst die Folge Γ nur die Satzformel γ, dann ist $\wedge(\Gamma)$ wie Γ identisch mit γ und 2. entfällt (bzw. ist eine schlichte Wiederholung der Annahme). In allen anderen Fällen geht 2. aus 1. durch (n–1)-fache Anwendung von R7 hervor (wobei n die Länge – d. h.: die Anzahl der durch Komma abgeteilten Satzformelvorkommnisse – der Folge Γ ist und $n \geq 2$).

3. $\rightarrow \wedge(\Gamma) \supset C$ R4 (2)

RT15b: $\rightarrow \wedge(\Gamma) \supset C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$ *Prämissenimportationsgesetz* (PIG)

1. $\rightarrow \wedge(\Gamma) \supset C$ Annahme

2. $\wedge(\Gamma) \rightarrow C$ RT13 (1)

3. $\Gamma \rightarrow C$ Ist die Folge Γ leer, dann ist $\wedge(\Gamma)$ identisch mit $B \supset B$ und 3. geht mit R3 aus 2. und $\rightarrow B \supset B$ [T5 als Zwischenschritt] hervor. Umfasst die Folge Γ nur die Satzformel γ, dann ist $\wedge(\Gamma)$ identisch mit γ, und ebenso Γ selbst, und 3. entfällt (bzw. ist eine schlichte Wiederholung von 2.). In allen anderen Fällen geht 3. durch (n–1)-fache Anwendung von RT14 – der Umkehrung von R7 – hervor (wobei n die Länge der Folge Γ ist und $n \geq 2$).

{$\wedge(\Gamma)$ sieht für $n = 3$ [Γ: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$] wie folgt aus [unter Weglassung der äußeren Klammern von $\wedge(\Gamma)$]: $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3)$; für $n = 4$ wie folgt: $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4))$; für $n = 5$ wie folgt: $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge (\sigma_4 \wedge \sigma_5)))$; usw. Nach der Anwendung von RT14 auf $\wedge(\Gamma) \rightarrow C$ hat man also bei $n = 5$: $\sigma_1, \sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge (\sigma_4 \wedge \sigma_5)) \rightarrow C$; nach der Anwendung von RT14 auf *diese letztere Schlussformel*: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \wedge (\sigma_4 \wedge \sigma_5) \rightarrow C$; nach der Anwendung von RT14 auf *wiederum diese letztere Schlussformel*: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \wedge \sigma_5 \rightarrow C$; nach der Anwendung von RT14 *wiederum hierauf* hat man: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \rightarrow C$, also: $\Gamma \rightarrow C$ – nach (n–1)-facher Anwendung von RT14. Die Prozedur kann man mit (n–1)-facher Anwendung von R7 selbstverständlich auch wieder rückwärts laufen lassen.}

Manche Gesetze von **Alpha** geben manchen Logikern Anlass zu intuitivem Befremden. Das gilt insbesondere für die „Paradoxien“ T14, T18, T19, T20, T21 [oder: PX1, PX2, PX3, PX4, PX5]. Diese Gesetze – und viele andere mehr, darunter T7 und T8 und die sehr einfach zu beweisenden Gesetze $B \rightarrow A \supset B$ und $\neg A \rightarrow A \supset B$ – werden als „paradox“ empfunden, weil von einem intuitiven Vorverständnis von „$\supset$“ – der *Implikation*: des für wissenschaftssprachliche, *nicht* für umgangssprachliche, Zwecke zu verwendenden „Wenn, dann“ – ausgegangen wird, zu welchem Vorverständnis die fraglichen Gesetze nun eben zutiefst nicht

passen (wobei dieses Vorverständnis, obwohl wissenschaftssprachlich orientiert, doch vor allem umgangssprachlich motiviert sein dürfte). Das gilt auch für T14 [PX1], obwohl „$\supset$“ darin gar nicht vorkommt; denn *implizit* ist *die Implikation* wegen T15 [IMPOD] in T14 sehr wohl präsent. [Das „eigentliche Paradox“ ist freilich T18, das aus T14 mit T17a und T15 leicht zu gewinnen ist, wie auch umgekehrt T14 mit T15 und T17a aus T18: $B \leftrightarrow B \vee A \wedge \neg A \leftrightarrow A \wedge \neg A \vee B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg A) \supset B$ und $B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg A) \supset B \leftrightarrow A \wedge \neg A \vee B \leftrightarrow B \vee A \wedge \neg A$.]

Auf Kalküle, die die Erzeugung der „Paradoxien“ in mehr oder minder großem Maße *nicht* zulassen, wird im Weiteren ausführlich eingegangen. Zunächst soll es aber um eine wesentlich andere kalkülmäßige *Darstellung* der aktuell thematisierten Logik – der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik – gehen.

2. Der Satzformelkalkül **Beta** (**Frege-Łukasiewicz**) der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik, der Satzformelkalkül **Beta*** und der Kalkül **Alpha-Beta*-Hybrid**

Der Kalkül **Beta** (oder **Frege-Łukasiewicz**) ist durch drei Axiome [FA1, FA2, FA3] und eine axiomatische Regelformel [FR1] gegeben; hinzukommen zwei Definitionen [FD1, FD2], deren inhaltliche Angemessenheit *für die wahrheitsfunktionale Aussagenlogik* anhand der **Alpha**-Theoreme T15 und T16 ersichtlich ist. Die Axiome und Theoreme von **Beta** sind *Satzformeln*, *keine* Schlussformeln wie bei **Alpha**, und die axiomatischen wie auch die theorematischen Regelformeln von **Beta** sind „$\Rightarrow$"- Verknüpfungen zwischen *Satzformeln*, *nicht* zwischen Schlussformeln wie bei **Alpha**. Trotz dieser Unterschiede besteht zwischen **Alpha** und **Beta** eine durch Repräsentationsverhältnisse vermittelte deduktive Äquivalenz – was im Folgenden gezeigt werden wird. Hier nun aber erst einmal die Präsentation des Kalküls **Beta**:

FA1 $A \supset (B \supset A)$

FA2 $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

FA3 $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

FR1 $A;\ A \supset B \Rightarrow B$

{Man beachte, dass FR1 *kein* Schema für axiomatische Satzregelformeln ist, sondern eine Satzregelformel selbst; in **Alpha** hingegen werden alle axiomatischen Regelgesetze *schematisch* gegeben.}

FD1 $\sigma \vee \sigma' =_{Def} \neg\sigma \supset \sigma'$

FD2 $\sigma \wedge \sigma' =_{Def} \neg(\sigma \supset \neg\sigma')$

Jede Satzformel σ ist eins-zu-eins als (prämissenlose) Schlussformel $\rightarrow \sigma$ repräsentierbar, und umgekehrt jede Schlussformel $\rightarrow \sigma$ als Satzformel σ. Deshalb kann der Satzformelkalkül **Beta** aus dem Schlussformelkalkül **Alpha** abgeleitet werden (in einem gewissen, offensichtlichen Sinn):

T23: $\rightarrow A \supset (B \supset A)$ FA1 {in Schlussformel-Darstellung}

1. $A, B \rightarrow A$ A1, R2
2. $A \rightarrow B \supset A$ R4 (1)
3. $\rightarrow A \supset (B \supset A)$ R4 (2)

T24: $\rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ FA2 {in Schlussformel-Darstellung}

1. $A, A \supset (B \supset C) \rightarrow B \supset C$ A2
2. $B, B \supset C \rightarrow C$ A2
3. $A, A \supset B \rightarrow B$ A2
4. $A, A \supset B, B \supset C, B \rightarrow C$ R2, R1 (2)
5. $A, A \supset B, B \supset C \rightarrow B$ R2 (3)
6. $A, A \supset B, B \supset C \rightarrow C$ R3 (4, 5)
7. $A, A \supset (B \supset C), A \supset B, B \supset C \rightarrow C$ R2, R1 (6)
8. $A, A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow B \supset C$ R2 (1)
9. $A, A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow C$ R3 (7, 8)
10. $A \supset (B \supset C), A \supset B, A \rightarrow C$ R1 (9)
11. $A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow A \supset C$ R4 (10)
12. $A \supset (B \supset C) \rightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$ R4 (11)
13. $\rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ R4 (12)

T25: $\rightarrow (\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ FA3 {in Schlussformel-Darstellung}

1. $\neg A, \neg A \supset \neg B \rightarrow \neg B$ A2
2., $\neg A \supset \neg B, \neg A \rightarrow \neg B$ R1 (1)
3. $\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A$ RT6 (2)
4. $\neg A \supset \neg B \rightarrow B \supset A$ R4 (3)
5. $\rightarrow (\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ R4 (4)

RT16: $\rightarrow A; \rightarrow A \supset B \Rightarrow \rightarrow B$ FR1 {in Schlussregelformel-Darstellung}

1. $\rightarrow A$ Annahme
2. $\rightarrow A \supset B$ Annahme
3. $A, A \supset B \rightarrow B$ A2

4. $A \rightarrow A \supset B$	R2 (2)
5. $A \rightarrow B$	R3 (3, 4)
6. $\rightarrow B$	R3 (5, 1)

Da **Beta** aus **Alpha** ableitbar ist, kann alles, was in **Beta** beweisbar ist, auch in **Alpha** bewiesen werden – und in **Alpha** gewöhnlich viel einfacher bewiesen werden als in **Beta**. Es folgen einige Kostproben des mindestens am Anfang – wenn erst weniges bewiesen ist – *schwierigen* Beweisens in **Beta**. Die Schwierigkeit dabei besteht darin, die Einsetzungsfälle für die Axiome und die axiomatische Regelformel von **Beta** zu finden, die der Erreichung des Beweisziels dienlich sind; *da* den richtigen Einfall zu haben, ist in **Beta** um einiges schwieriger als in **Alpha**.

FT1:[12] $A \supset A$	*Trivialität für* **Beta**
1. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$	FA1
2. $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$	FA2
3. $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$	FR1 (1, 2)
4. $A \supset (A \supset A)$	FA1
5. $A \supset A$	FR1 (3, 4)

FRT1: $A \supset B; B \supset C \Rightarrow A \supset C$	*Kettenschlussgesetz für* **Beta**
1. $A \supset B$	Annahme
2. $B \supset C$	Annahme
3. $(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$	FA1
4. $A \supset (B \supset C)$	FR1 (2, 3)
5. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$	FA2
6. $(A \supset B) \supset (A \supset C)$	FR1 (4, 5)
7. $A \supset C$	FR1 (1, 6)

FT2: $C \supset (B \supset B)$

[12] Wie schon weiter oben, zeigt hier und im Weiteren das vorangestellte „F“ bei derjenigen Benennungsweise der Kalkülprinzipien, welche nummerierend der Reihenfolge der Bewiesenheit folgt, die Verwendung von **Beta** an – *zu Ehren von Gottlob Frege*. Die Voranstellung von „B“ hingegen ist für den (in diesem Kapitel noch folgenden) Kalkül **Beta*** reserviert.

1. $(B \supset B) \supset (C \supset (B \supset B))$ FA1

2. $B \supset B$ FT1

3. $C \supset (B \supset B)$ FR1 (2, 1)

FT3: $(\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset A$

1. $(\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset ((B \supset B) \supset A)$ FA3

2. $((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset ((B \supset B) \supset A)) \supset (((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset (B \supset B)) \supset ((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset A))$ FA2[13]

3. $(\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset (B \supset B)$ FT2

4. $((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset (B \supset B)) \supset ((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset A)$ FR1 (1, 2)

5. $(\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset A$ FR1 (3, 4)

FT4: $\neg C \supset (C \supset \neg(B \supset B))$

1. $\neg C \supset (\neg\neg(B \supset B) \supset \neg C)$ FA1

2. $(\neg\neg(B \supset B) \supset \neg C) \supset (C \supset \neg(B \supset B))$ FA3

3. $\neg C \supset (C \supset \neg(B \supset B))$ FRT1 (1, 2)

FT5: $\neg\neg A \supset A$ *Eliminatio duplicis negationis für* **Beta**

1. $(\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset A$ FT3

2. $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg(B \supset B))$ FT4 {„$\neg A$“ [uniform] für „C“}

3. $\neg\neg A \supset A$ FRT1 (2, 1)

FT6: $A \supset \neg\neg A$ *Introductio duplicis negationis für* **Beta**

1. $\neg\neg\neg A \supset \neg A$ FT5 {„$\neg A$“ für „A“}

2. $(\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset (A \supset \neg\neg A)$ FA3

3. $A \supset \neg\neg A$ FR1 (1, 2)

FRT2: $A \supset \neg B \Rightarrow B \supset \neg A$ *Implikationskontraposition rechtsseitig*

[13] Der vorliegende Einsetzungsfall von FA2 geht aus $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ [FA2] dadurch hervor, dass *gleichzeitig* für „A“ uniform „$(\neg A \supset \neg(B \supset B))$“ substituiert wird, für „B“ uniform „$(B \supset B)$” und für „C“ uniform „A“; das ergibt $((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset ((B \supset B) \supset A)) \supset (((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset (B \supset B)) \supset ((\neg A \supset \neg(B \supset B)) \supset A))$.

1. $A \supset \neg B$	Annahme
2. $\neg\neg A \supset A$	FT5
3. $\neg\neg A \supset \neg B$	FRT1 (2, 1)
4. $(\neg\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$	FA3
5. $B \supset \neg A$	FR1 (3, 4)

FRT3: $A \supset B \Rightarrow \neg B \supset \neg A$	*Aufsteigende Implikationskontraposition*
1. $A \supset B$	Annahme
2. $\neg\neg A \supset A$	FT5
3. $B \supset \neg\neg B$	FT6
4. $\neg\neg A \supset B$	FRT1 (2, 1)
5. $\neg\neg A \supset \neg\neg B$	FRT1 (4, 3)
6. $(\neg\neg A \supset \neg\neg B) \supset (\neg B \supset \neg A)$	FA3
7. $\neg B \supset \neg A$	FR1 (5, 6)

FRT4: $\neg A \supset B \Rightarrow \neg B \supset A$	*Implikationskontraposition linksseitig*
1. $\neg A \supset B$	Annahme
2. $B \supset \neg\neg B$	FT6
3. $\neg A \supset \neg\neg B$	FRT1 (1, 2)
4. $(\neg A \supset \neg\neg B) \supset (\neg B \supset A)$	FA3
5. $\neg B \supset A$	FR1 (3, 4)

Dies möge genügen. Ersichtlich ist der Satzformelkalkül **Beta** nicht gerade derjenige Kalkül der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik, der in der Anwendung leicht zu handhaben ist. Weitaus besser steht es diesbezüglich um den Satzformelkalkül **Beta***, der aus dem Schlussformelkalkül **Alpha** – *genauer gesagt*: aus dem zu **Alpha** deduktiv äquivalenten Schlussformelkalkül **Alpha mit IC-*Regelgesetz* und EC // IC und VUG**[14] – hervorgeht, wenn man **Alpha** zum Satzformelkalkül *umschreibt*. Dazu müssen die in den Axiomen und axioma-

[14] Die fragliche deduktive Äquivalenz wird ersichtlich aus der Anmerkung unmittelbar im Anschluss an den Beweis von RT2 [vom IC-*Regelgesetz*] in Kapitel 1 *zusammen mit* der Anmerkung unmittelbar im Anschluss an den Beweis von T9 [von EC] in Kapitel 1: Man kann aus **Alpha** axiomatisch ohne IC und VUG, aber stattdessen axiomatisch mit IC-*Regelgesetz* und EC [und alles übrige Axiomatische an **Alpha** gleichbleibend] IC und VUG herleiten – hinzukommend dazu, dass man umgekehrt IC-*Regelgesetz* und EC in Alpha herleiten kann (siehe RT2 und T9).

tischen Regelformeln auftretenden Schlussformeln unter Ersetzung von „$\rightarrow$“ durch „$\supset$“ und unter Ersetzung der Kommata durch Vorkommnisse von „$\wedge$“ in Satzformeln umgeschrieben werden, wobei – *außer im Fall von* R1 – statt der Satzformelreihe Γ, sofern diese nicht leer ist, stets einfach eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Satzformel geschrieben werden kann, die in der ursprünglichen Formulierung von **Alpha** (siehe Kapitel 1) nicht verwendet wird, z. B. „D“. Der Fall *der Leere von* Γ muss allerdings gesondert behandelt werden; siehe dazu weiter unten. Hier sei aber schon festgehalten: Wenn ein Schlussformelkalkül, der in seinen Prinzipien prämissenlose Schlussformeln $\rightarrow \sigma$ – „Schlussformeln mit leerem Γ“ – zulässt [wie **Alpha** oder ein mit **Alpha** deduktiv äquivalenter Schlussformelkalkül], in einen Satzformelkalkül umgeschrieben wird, dann geht $\rightarrow \sigma$ schlicht in σ über.

Im Fall von R1 hinwiederum geht die nichtleere Satzformelreihe $\Gamma<\sigma, \sigma'>$ (die mindestens zwei Vorkommnisse von Satzformeln umfasst und in der σ und σ' durch Komma getrennt wie angegeben unmittelbar aufeinander folgen) über in den *satzformelähnlichen* Ausdruck $\wedge^*(\Gamma<\sigma, \sigma'>)$. Sei $\Gamma<\sigma, \sigma'>$ die Satzformelreihe $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ (mit $n \geq 2$);[15] dann ist $\wedge^*(\Gamma<\sigma, \sigma'>)$ bei $n = 2$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2$; bei $n = 3$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$; bei $n = 4$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4$; usw.[16] Und „$\wedge^*(\Gamma<\sigma', \sigma>)$“ ist relativ zu „$\wedge^*(\Gamma<\sigma, \sigma'>)$“ *mutatis mutandis* zu verstehen; somit: die aus der Satzformelreihe $\Gamma<\sigma, \sigma'>$ durch lokale einmalige Umplatzierung hervorgehende Satzformelreihe $\Gamma<\sigma', \sigma>$ wird derselben (eben beschriebenen) Umformulierungsprozedur unterzogen wie $\Gamma<\sigma, \sigma'>$ selbst (mit entsprechendem, ein wenig anderem Resultat).

Obwohl mittels „$\wedge$“ aus den Satzformelvorkommnissen $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ wie beschrieben gebildet (aus Satzformel*vorkommnissen*, denn die Prozedur ist ja auch anwendbar, wenn *positionsverschiedene* Glieder in der Folge $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ *dieselbe* Satzformel sein sollten), sind bei $n \geq 3$ die Ausdrücke $\wedge^*(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n)$ *keine* Satzformeln; in der Definition der (basalen) Satzformeln von *Sigma* werden sie nicht angesprochen, und sie sind auch keine durch weitere Definitionen gewonnenen (derivativen) Satzformeln. Sie sind aber einsetzungstechnisch (bei der Bildung von Einsetzungsfällen mittels uniformer Substitution) Satzformeln *in strikt begrenzter Weise gleichgestellt*. *Jedes* Auftreten eines $\wedge^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n)$-Ausdrucks inner-

[15] Bei $n = 2$ (als Länge von $\Gamma<\sigma, \sigma'>$) kann sich „$<\sigma, \sigma'>$“ in „$\Gamma<\sigma, \sigma'>$“ nur auf σ_1, σ_2 beziehen; bei $n = 3$ kann es sich auf σ_1, σ_2, oder auf σ_2, σ_3 beziehen; bei $n = 4$ kann es sich auf σ_1, σ_2, oder auf σ_2, σ_3, oder auf σ_3, σ_4 beziehen; usw.

[16] Vgl. in Kapitel 1 den Beweis von RT15a und den Beweis von RT15b und die unmittelbar auf die beiden Beweise folgende Anmerkung; man beachte aber den Unterschied zwischen $\wedge(\Gamma)$ und $\wedge^*(\Gamma)$, also zwischen $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ und $\wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$, bei Γ-Länge $n \geq 3$.

halb einer Satzformel hat die Gestalt $\wedge^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n) \supset \sigma'$, *wobei* zudem $\wedge^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n) \supset \sigma'$ nicht weiter eingebettet sein darf; ein anderes Auftreten eines $\wedge^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n)$-Ausdrucks in Satzformeln kommt festlegungsgemäß (*per fiat*) nicht vor. Die Ausdrücke $\wedge^*(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n)$ sind bei $n \geq 3$ [handle es sich um $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$, oder um $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4$, oder um $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \wedge \sigma_5$, usw.] Abkürzungen von *gewissen* (jeweils mehreren!) Satzformeln in *gewissen* Kontexten; von *welchen* Satzformeln in *welchen* Kontexten – das wird kompakt noch einmal in dem besonderen **Beta***-Grundprinzip B*R0 spezifiziert (siehe weiter unten).

Wir erhalten somit – in der eben beschriebenen Weise – aus dem Kalkül **Alpha** den Kalkül **Beta***. Hinzukommt freilich aufseiten von **Beta*** ein Grundgesetz – nämlich das eben angesprochene B*R0 –, welches aufseiten von **Alpha** kein Vorbild hat; siehe unten. Die geschweiften Einklammerungen in gewissen Regelgesetzen von **Beta*** (siehe unten) bedeuten, dass nicht nur diejenige Satzregelformel ein Gesetz ist, die entsteht, wenn aus dem Regelgesetz mit Vorkommnissen geschweifter Klammern *alle Vorkommnisse geschweifter Klammern (und nur diese Vorkommnisse)* entfernt werden [die entstehende Formel ist nach den Regeln der Klammerersparnis zu lesen], sondern dass auch diejenige Satzregelformel ein Gesetz ist, die entsteht, wenn *alle Vorkommnisse von geschweift Eingeklammertem samt Klammern (und nur diese Vorkommnisse)* aus dem besagten Regelgesetz entfernt werden. Diese Komplikation ist notwendig, um dem Fall *der Leere von* Γ im Kalkül **Alpha** bei der Übersetzung von **Alpha** nach **Beta*** gerecht zu werden. [Bei der Übersetzung von R4 in B*R4 allerdings entfällt die Komplikation: weil R4 *mit leerem* Γ bei seiner Übersetzung nach **Beta*** trivial wird.]

Die Regeln der Klammerersparnis kommen im Folgenden zur Anwendung, wo immer es ohne Weiteres möglich ist [in B*R6 ist es in „{D $\wedge$} (A $\vee$ B) $\supset$ C“ *nicht* ohne Weiteres möglich!]. Außerdem kommt, wie erwähnt, auf der Seite von **Beta*** ein Grundgesetz hinzu, das ohne Vorbild auf der Seite von **Alpha** ist – ein Gesetz, das zu einer Klammerersparnis genutzt werden kann, die noch weiter geht als diejenige, die durch die kalkülübergreifenden, allgemeinen Regeln der Klammerersparnis [siehe Kapitel 0, V.] ermöglicht wird. Das Gesetz dient der bestmöglichen Repräsentation in **Beta*** auch der mindestens dreigliedrigen Γ-Folgen in **Alpha**, die ja alle – wie auch die ein- und zweigliedrigen und nullgliedrigen Γ-Folgen in **Alpha** – *gewissermaßen klammerfrei* sind: Klammern kommen in den Γ-Folgen in **Alpha** nur *innerhalb* der in ihnen aufgelisteten [ab Γ-Länge 2 durch Kommata getrennnten] Satzformeln vor [sofern man die Klammern, die diese Satzformeln umschließen, also *an ihnen äußere* Klam-

mern sind, weglässt – was hier stets praktiziert wurde und was man darf, da diese Klammern ja auch *uneingeschränkt äußere* sind]. Das Gesetz, von dem die Rede ist, ist in der Reihe der Grundgesetze von **Beta*** gleich das erste:

B*R0 Lässt sich aus den Satzformelvorkommnissen σ_1, σ_2, σ_3 … σ_n [$n \geq 3$] in der angegebenen Reihenfolge durch reine Verwendung von „$\wedge$“ und ohne verbleibenden Rest eine Satzformel syntaktisch bilden, die das Antezedens einer Implikationssatzformel ist, welche Letztere im gegebenen Kontext nicht in einer anderen Satzformel als Teilsatzformel auftritt, so dürfen in ihr (der Antezedensformel) die Klammern, die in ihr gegenüber σ_1, σ_2, σ_3 … σ_n *neu hinzukommen*,[17] *alle* gelöscht werden (B*R0-*Klammerlöschung*). [Schon ohnehin dürfen nach den allgemeinen Regeln der Klammerersparnis die Umfassungsklammern der Antezedensformel, die eine Konjunktionssatzformel ist, im gegebenen Kontext der Implikationssatzformel gelöscht werden.] Ist ein Ausdruck $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \ldots \wedge \sigma_n \supset \sigma'$ in der beschriebenen Weise entstanden, so dürfen Klammern in ihm gesetzt werden (B*R0-*Klammersetzung*), wenn und nur wenn ihre Setzung eine Satzformel [von *Sigma*] ergibt [und sei es eine nach den allgemeinen Regeln der Klammerersparnis geschriebene].

Klammergesetz für „$\wedge$“-Ketten im Antezedens

B*A1 $A \supset A$ *Trivialstes Satzformelgesetz*

B*R1 $\wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_j, \sigma_k \ldots \sigma_n) \supset C \Rightarrow \wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_k, \sigma_j \ldots \sigma_n) \supset C$ *Gesetz der Umplatzierung im Antezedens* [$n \geq 2$][18]

B*R2 $\{D \supset\}\ C \Rightarrow \{D \wedge\}\ B \supset C$ *Gesetz der Antezedenserweiterung*[19]

B*R3 $\{D \wedge\}\ B \supset C;\ \{D \supset\}\ B \Rightarrow \{D \supset\}\ C$ *1. Antezedensschnittgesetz*

[17] Eine Klammer tritt aber dann da *nicht neu* auf, wenn eine Klammer, die zunächst – als uneingeschränkt äußere Klammer – nicht geschrieben wurde (sondern eingespart wurde), nun im Satzformelkontext geschrieben werden muss. Z. B.: Wenn aus „B, $B \supset \neg A$, $A \vee D$“ die folgende Satzformel wird: „$(B \wedge (B \supset \neg A)) \wedge (A \vee D)$“, so ist in ihr gegenüber „B, $B \supset \neg A$, $A \vee D$“ *neu hinzukommend* allein die farblich herausgehobene Klammer. Und sie darf gelöscht werden, wenn „$(B \wedge (B \supset \neg A)) \wedge (A \vee D)$“ das Antezedens einer (nach den Regeln der Klammerersparnis geschriebenen) Implikationssatzformel ist, wie z. B. „$(B \wedge (B \supset \neg A)) \wedge (A \vee D) \supset D$“; das Resultat der Löschung ist: „$B \wedge (B \supset \neg A) \wedge (A \vee D) \supset D$“.

[18] Das Gesetz B*R1 ist erst ab $n \geq 2$ sinnvoll (bei $n = 2$ fällt σ_j mit σ_1 und σ_k mit σ_2 [= σ_n] zusammen). Man beachte, dass B*R1 ein *Schema* von Regelgesetzen ist, durch welches unendlich viele axiomatische Regelgesetze auf einmal gegeben werden. Dabei ist zum rechten Verständnis B*R0 zu berücksichtigen.

[19] In B*R2 sind zwei Grundgesetze von **Beta*** in *einen* Gesetzesausdruck geschrieben: (a) $D \supset C \Rightarrow D \wedge B \supset C$; (b) $C \Rightarrow B \supset C$. Gleiches gilt für sämtliche axiomatische Regelgesetze von **Beta***, die geschweifte Klammern enthalten, z. B. auch für B*R5: (a) $D \wedge B \supset C$; $D \wedge \neg B \supset C \Rightarrow D \supset C$; (b) $B \supset C$; $\neg B \supset C \Rightarrow C$; z. B. auch für B*R6: (a) $D \wedge A \supset C$; $D \wedge B \supset C \Rightarrow D \wedge (A \vee B) \supset C$; (b) $A \supset C$; $B \supset C \Rightarrow (A \vee B) \supset C$, oder [da hier bei (b) Klammerersparnis möglich ist]: (b) $A \supset C$; $B \supset C \Rightarrow A \vee B \supset C$.

B*A2 $B \wedge (B \supset C) \supset C$ *Modus ponens als Satzformel*

B*R4 $D \wedge B \supset C \Rightarrow D \supset (B \supset C)$ *Exportationsgesetz für Satzformeln*

B*A3 $B \wedge \neg B \supset C$ *Ex contradictione quodlibet als Satzformel*

B*R5 $\{D \wedge\}\ B \supset C;\ \{D \wedge\}\ \neg B \supset C \Rightarrow \{D \supset\}\ C$ *2. Antezedensschnittgesetz*

B*A4 $A \supset A \vee B;\ B \supset A \vee B$ *Introductio disjunctionis als Satzformeln*

B*R6 $\{D \wedge\}\ A \supset C;\ \{D \wedge\}\ B \supset C \Rightarrow \{D \wedge\}\ (A \vee B) \supset C$ *Vord.-„oder"-Gesetz f. Satzformeln*

B*A5´ $A \wedge B \supset A;\ A \wedge B \supset B$ *Eliminatio conjunctionis als Satzformeln*

B*R7´ $\{D \supset\}\ A;\ \{D \supset\}\ B \Rightarrow \{D \supset\}\ A \wedge B$ *Hint.-„und"-Gesetz f. Satzformeln*

{B*A5´ ist keine Umschrift von A5: $A, B \rightarrow A \wedge B$; die wäre nämlich trivial: eine Einsetzungsfall von B*A1. B*A5´ ist aber eine Umschrift des **Alpha**-Theorems T9, wobei der Inhalt von T9 [EC] mit dem Inhalt von R7 [VUG] – vorausgesetzt **Alpha** *ohne Konjunktionsgrundprinzipien* – deduktiv äquivalent ist (siehe den Beweis von T9 und den daran gleich anschließenden Kommentar zu EC). B*R7´ wiederum ist keine Umschrift von R7: $\Gamma, A, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \wedge B \rightarrow C$; die wäre nämlich ebenfalls trivial. B*R7´ ist aber eine Umschrift des in **Alpha** echtableitbaren Regelgesetzes RT2, wobei der Inhalt von RT2 [IC-*Regelgesetz*] mit A5 [IC] – vorausgesetzt **Alpha** *ohne Konjunktionsgrundprinzipien* – deduktiv äquivalent ist (siehe den Beweis von RT2 und den daran gleich anschließenden Kommentar zum IC-*Regelgesetz*).}

In **Beta*** lassen sich die Beweise in **Alpha** *direkt* – übersetzungsartig – nachbauen; nur bei Verwendungen von A5 und R7 sind kleine Umwege vorzunehmen, um mit B*R7´ (statt A5) und B*A5´ (statt R7) das genau Äquivalente dessen zu erreichen, was in **Alpha** mit A5 und R7 erreicht wird. Es folgen einige Übersetzungsbeispiele.

In **Alpha**:

<u>T23: $\rightarrow A \supset (B \supset A)$</u> FA1 {in Schlussformel-Darstellung}

1. $A, B \rightarrow A$ A1, R2

2. $A \rightarrow B \supset A$ R4 (1)

3. $\rightarrow A \supset (B \supset A)$ R4 (2).

In **Beta***:

<u>B*T1: $A \supset (B \supset A)$</u> FA1 {*es selbst*: als Satzformel}

1. $A \wedge B \supset A$ B*A1, B*R2

2. $A \supset (B \supset A)$ B*R4 (1)

{Die komprimierten Schritte des Beweises von B*T1 seien „aufgedröselt“: B*A1 ist $A \supset A$. Der verwendete Einsetzungsfall von B*R2, also von $\{D \supset\}\ C \Rightarrow \{D \wedge\}\ B \supset C$, ist $\{A \supset\}\ A \Rightarrow \{A \wedge\}\ B \supset A$ [„A“ uniform für „D“, und „A“ uniform für „C“], also unter Weglassung der geschweiften Klammern: (i) $A \supset A \Rightarrow A \wedge B \supset A$. Der verwendete Einsetzungsfall von B*R4, also von $D \wedge B \supset C \Rightarrow D \supset (B \supset C)$, ist: (ii) $A \wedge B \supset A \Rightarrow A \supset (B \supset A)$ [„A“ uniform für „D“, „A“ uniform für „C“]. Mit (i) gelangt man von $A \supset A$ nach $A \wedge B \supset A$; mit (ii) gelangt man von $A \wedge B \supset A$ nach $A \supset (B \supset A)$.}

Im Beweis von B*T1 zeigt sich nun, dass das Axiom B*A5´ überflüssig – nicht unabhängig – ist: dass die Schlussformel, die es beinhaltet, in Wahrheit ein Theorem von **Beta*** *ohne* B*A5´ ist. Denn entfaltet man den Weg zur ersten Zeile jenes Beweises, so gewinnt man einen **Beta***-Beweis der ersten Hälfte von B*A5´ (*ohne* Verwendung dieses Prinzips):

$\underline{A \wedge B \supset A}$ EC, 1. Hälfte

1. $A \supset A$ B*A1

2. $A \wedge B \supset A$ B*R2 {Einsetzungsfall} (1)

Und der Beweis der zweiten Hälfte von B*A5´ (*ohne* Verwendung dieses Prinzips) sieht so aus (nämlich fast gleich):

$\underline{A \wedge B \supset B}$ EC, 2. Hälfte

1. $B \supset B$ B*A1 {Einsetzungsfall}

2. $B \wedge A \supset B$ B*R2 (1)

3. $A \wedge B \supset B$ B*R1 (2).

Nach diesen Feststellungen geht es weiter mit Beispielen von Beweisübersetzungen von **Alpha** nach **Beta***:

In **Alpha**:

$\underline{\text{T24: } \rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))}$ FA2 {in Schlussformel-Darstellung}

1. $A, A \supset (B \supset C) \rightarrow B \supset C$ A2

2. $B, B \supset C \rightarrow C$ A2

3. $A, A \supset B \rightarrow B$ A2

4. $A, A \supset B, B \supset C, B \rightarrow C$ R2, R1 (2)

5. $A, A \supset B, B \supset C \rightarrow B$ R2 (3)

6. $A, A \supset B, B \supset C \rightarrow C$ R3 (4, 5)

7. $A, A \supset (B \supset C), A \supset B, B \supset C \rightarrow C$ R2, R1 (6)

8. $A, A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow B \supset C$ R2 (1)

9. $A, A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow C$ R3 (7, 8)

10. $A \supset (B \supset C), A \supset B, A \rightarrow C$ R1 (9)

11. $A \supset (B \supset C), A \supset B \rightarrow A \supset C$ R4 (10)

12. $A \supset (B \supset C) \rightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C)$ R4 (11)

13. $\rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ R4 (12).

In **Beta***:

B*T2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ FA2 {*es selbst*: als Satzformel}

1. $A \wedge (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset C)$ B*A2

2. $B \wedge (B \supset C) \supset C$ B*A2

3. $A \wedge (A \supset B) \supset B$ B*A2

4. $A \wedge (A \supset B) \wedge (B \supset C) \wedge B \supset C$ B*R2, B*R0, B*R1 (2)[20]

5. $A \wedge (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset B$ B*R2, B*R0 (3)

6. $A \wedge (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset C$ B*R3, B*R0 (4, 5)[21]

7. $A \wedge (A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset C$ B*R2, B*R0, B*R1 (6)

8. $A \wedge (A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B) \supset (B \supset C)$ B*R2, B*R0 (1)

9. $A \wedge (A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B) \supset C$ B*R3, B*R0 (7, 8)

[20] In Auflösung der Komprimierung ist zu sagen: $B \wedge (B \supset C) \supset C \Rightarrow (B \wedge (B \supset C)) \wedge A \supset C$ ist der relevante Einsetzungsfall der 1. Anwendung von B*R2; $(B \wedge (B \supset C)) \wedge A \supset C \Rightarrow ((B \wedge (B \supset C)) \wedge A) \wedge (A \supset B) \supset C$ ist der relevante Einsetzungsfall der 2. Anwendung von B*R2. Aus 2. [d. h. aus $B \wedge (B \supset C) \supset C$] ergibt sich also zunächst mit zweimaliger Anwendung von B*R2: $((B \wedge (B \supset C)) \wedge A) \wedge (A \supset B) \supset C$. Nun lässt sich die Satzformel $((B \wedge (B \supset C)) \wedge A) \wedge (A \supset B)$ durch reine Verwendung von „$\wedge$“ und ohne verbleibenden Rest aus den Satzformelvorkommnissen $B, (B \supset C), A, (A \supset B)$ in der angegebenen Reihenfolge bilden [oder auch aus $B, B \supset C, A, A \supset B$; vgl. Fußnote 17]. Gemäß B*R0 erhält man also als nächsten Schritt: $B \wedge (B \supset C) \wedge A \wedge (A \supset B) \supset C$. Durch mehrfache Anwendung von B*R1 geht schließlich hervor: 4. $A \wedge (A \supset B) \wedge (B \supset C) \wedge B \supset C$.

[21] Die Satzformel „$((A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C))$“ wird uniform für „D“ substituiert in B*R3 *ohne geschweifte Klammern*, d. h.: in „$D \wedge B \supset C; D \supset B \Rightarrow D \supset C$“. Es geht hervor: $((A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C)) \wedge B \supset C; ((A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C)) \supset B \Rightarrow ((A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C)) \supset C$. Das ist der relevante Einsetzungsfall von B*R3. Von 4. geht man gemäß B*R0-*Klammersetzung* über zu: $((A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C)) \wedge B \supset C$; und von 5. geht man gemäß B*R0-*Klammersetzung* über zu: $((A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C)) \supset B$. Gemäß dem relevanten Einsetzungsfall von B*R3 erhält man dann: $((A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C)) \supset C$, also mit Anwendung der Regeln der Klammerersparnis: $(A \wedge (A \supset B)) \wedge (B \supset C) \supset C$. Daraus wiederum gewinnt man gemäß B*R0-*Klammerlöschung*: 6. $A \wedge (A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset C$.

10. $(A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B) \wedge A \supset C$ B*R1 (9)

11. $((A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B)) \wedge A \supset C$ B*R0 (10)[22]

12. $(A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B) \supset (A \supset C)$ B*R4 (11)

13. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ B*R4 (12)

In **Alpha**:

T2: $\neg\neg A \rightarrow A; \rightarrow \neg\neg A \supset A$ *Eliminatio duplicis negationis* (EDN)

1. $\neg\neg A, A \rightarrow A$ A1, R2, R1

2. $\neg\neg A, \neg A \rightarrow A$ A3, R1

3. $\neg\neg A \rightarrow A$ R5 (1, 2)

4. $\rightarrow \neg\neg A \supset A$ R4 (3).

In **Beta***:

B*T3: $\neg\neg A \supset A$ EDN *als Satzformel*

1. $\neg\neg A \wedge A \supset A$ B*A1, B*R2, B*R1

2. $\neg\neg A \wedge \neg A \supset A$ B*A3, B*R1

3. $\neg\neg A \supset A$ B*R5 (1, 2)

In **Alpha**:

T3: $A \rightarrow \neg\neg A; \rightarrow A \supset \neg\neg A$ *Introductio duplicis negationis* (IDN)

1. $A, \neg A \rightarrow \neg\neg A$ A3

2. $A, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$ A1, R2, R1

3. $A \rightarrow \neg\neg A$ R5 (1, 2)

4. $\rightarrow A \supset \neg\neg A$ R4 (3).

In **Beta***:

B*T4: $A \supset \neg\neg A$ IDN *als Satzformel*

1. $A \wedge \neg A \supset \neg\neg A$ B*A3

2. $A \wedge \neg\neg A \supset \neg\neg A$ B*A1, B*R2, B*R1

3. $A \supset \neg\neg A$ B*R5 (1, 2)

[22] Die Satzformel $((A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B)) \wedge A$ lässt sich durch reine Verwendung von „$\wedge$“ und ohne verbleibenden Rest aus den Satzformelvorkommnissen $(A \supset (B \supset C))$, $(A \supset B)$, A in der angegebenen Reihenfolge bilden. Die dabei neu auftretenden Klammern dürfen im gegebenen Satzformelkontext weggelassen werden [B*R0-*Klammerlöschung*], mit dem Ergebnis: $(A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B) \wedge A \supset C$; und sie dürfen auch wieder gesetzt werden [B*R0-*Klammersetzung*], mit dem Ergebnis: $((A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset B)) \wedge A \supset C$.

In **Alpha**:

RT3: $\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ *Aufsteigende Kontraposition* (AUKP)

1. $\Gamma, A \rightarrow B$ Annahme
2. $\Gamma, A, \neg B \rightarrow B$ R2 (1)
3. $\Gamma, A, \neg B, B \rightarrow \neg A$ A3, R2, R1
4. $\Gamma, A, \neg B \rightarrow \neg A$ R3 (3, 2)
5. $\Gamma, \neg B, A \rightarrow \neg A$ R1 (4)
6. $\Gamma, \neg B, \neg A \rightarrow \neg A$ A1, R2, R1
7. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ R5 (5, 6).

In **Beta***:

B*RT1: $\{D' \wedge\} A \supset B \Rightarrow \{D' \wedge\} \neg B \supset \neg A$ AUKP *als Satzregelformel*

1. $\{D' \wedge\} A \supset B$ Annahme
2. $\{D' \wedge\} A \wedge \neg B \supset B$ B*R2 (1) {im Fall $D' \wedge A \wedge \neg B \supset B$ auch B*R0}
3. $\{D' \wedge\} A \wedge \neg B \wedge B \supset \neg A$ B*A3, B*R2, B*R0, B*R1
4. $\{D' \wedge\} A \wedge \neg B \supset \neg A$ B*R3, B*R0 (3, 2)
5. $\{D' \wedge\} \neg B \wedge A \supset \neg A$ B*R1 (4)
6. $\{D' \wedge\} \neg B \wedge \neg A \supset \neg A$ B*A1, B*R2, B*R1 {im Fall $D' \wedge \neg B \wedge \neg A \supset \neg A$ auch B*R0}
7. $\{D' \wedge\} \neg B \supset \neg A$ B*R5 (5, 6) {und gegebenenfalls auch B*R0}

{Was ist in der obigen Herleitung der relevante Einsetzungsfall von B*R3? *Antwort*:
In Zeile 2 und Zeile 3 steht (nach Auflösung der die geschweiften Klammern involvierenden komprimierten Schreibweise) *entweder* $A \wedge \neg B \supset B$ und $A \wedge \neg B \wedge B \supset \neg A$ [*erster Fall*], *oder aber* $D' \wedge A \wedge \neg B \supset B$ und $D' \wedge A \wedge \neg B \wedge B \supset \neg A$ [*zweiter Fall*]. Einschlägig ist in beiden Fällen B*R3 in der Form $D \wedge B \supset C$; $D \supset B \Rightarrow D \supset C$.
Für den ersten Fall ist der relevante Einsetzungsfall von B*R3: $(A \wedge \neg B) \wedge B \supset \neg A$; $A \wedge \neg B \supset B \Rightarrow A \wedge \neg B \supset \neg A$ [„$(A \wedge \neg B)$“ für „D“, „$\neg A$“ für „C“; Klammern, die nach den allgemeinen Regeln der Klammerersparnis weggelassen werden dürfen, sind weggelassen].
Für den zweiten Fall ist der relevante Einsetzungsfall von B*R3: $(D' \wedge (A \wedge \neg B)) \wedge B \supset \neg A$; $D' \wedge (A \wedge \neg B) \supset B \Rightarrow D' \wedge (A \wedge \neg B) \supset \neg A$ [„$(D' \wedge (A \wedge \neg B))$“ für „D“, „$\neg A$“ für „C“; Klammern, die nach den allgemeinen Regeln der Klammerersparnis weggelassen werden dürfen, sind weggelassen].
Im ersten Fall ergibt sich nach B*R0-*Klammersetzung* in $A \wedge \neg B \wedge B \supset \neg A$ [in der Zeile 3]: $(A \wedge \neg B) \wedge B \supset \neg A$. Also resultiert wegen $A \wedge \neg B \supset B$ [in der Zeile 2] mit dem *für den ersten Fall* relevanten Einsetzungsfall von B*R3: $A \wedge \neg B \supset \neg A$ (vgl. Zeile 4).

Im zweiten Fall ergibt sich nach B*R0-*Klammersetzung* in $D' \wedge A \wedge \neg B \wedge B \supset \neg A$ [in der Zeile 3]: $(D' \wedge (A \wedge \neg B)) \wedge B \supset \neg A$, und nach B*R0-*Klammersetzung* in $D' \wedge A \wedge \neg B \supset B$ [in der Zeile 2]: $D' \wedge (A \wedge \neg B) \supset B$. Also resultiert mit dem *für den zweiten Fall* relevanten Einsetzungsfall von B*R3: $D' \wedge (A \wedge \neg B) \supset \neg A$ (vgl. Zeile 4).}

In **Alpha:**

RT6: $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow B$ *Absteigende Kontraposition* (ABKP)

1. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ Annahme
2. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ RT3 (1)
3. $\Gamma, A, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ R2, R1 (2)
4. $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg A$ T3, R2, R1
5. $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg B$ R3 (3, 4)
6. $\Gamma, A, \neg\neg B \rightarrow B$ T2, R2, R1
7. $\Gamma, A \rightarrow B$ R3 (6, 5).

In **Beta***:

B*RT2: $\{D' \wedge\} \neg B \supset \neg A \Rightarrow \{D' \wedge\} A \supset B$ ABKP *als Satzregelformel*

1. $\{D' \wedge\} \neg B \supset \neg A$ Annahme
2. $\{D' \wedge\} \neg\neg A \supset \neg\neg B$ B*RT1 (1)
3. $\{D' \wedge\} A \wedge \neg\neg A \supset \neg\neg B$ B*R2, B*R1 (2) {im Fall $D' \wedge A \wedge \neg\neg A \supset \neg\neg B$ auch B*R0}
4. $\{D' \wedge\} A \supset \neg\neg A$ B*T4, B*R2, B*R1[23]
5. $\{D' \wedge\} A \supset \neg\neg B$ B*R3 (3, 4) {und gegebenenfalls B*R0}
6. $\{D' \wedge\} A \wedge \neg\neg B \supset B$ B*T3, B*R2, B*R1 {im Fall $D' \wedge A \wedge \neg\neg B \supset B$ auch B*R0}
7. $\{D' \wedge\} A \supset B$ B*R3 (6, 5) {und gegebenenfalls B*R0}

In **Alpha**:

T25: $\rightarrow (\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ FA3 {in Schlussformel-Darstellung}

1. $\neg A, \neg A \supset \neg B \rightarrow \neg B$ A2
2. $\neg A \supset \neg B, \neg A \rightarrow \neg B$ R1 (1)
3. $\neg A \supset \neg B, B \rightarrow A$ RT6 (2)
4. $\neg A \supset \neg B \rightarrow B \supset A$ R4 (3)
5. $\rightarrow (\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ R4 (4).

In **Beta*:**

[23] B*R2 und B*R1 kommen nur ins Spiel, wenn im Antezedens „D'" als Konjunktionsglied stehen soll.

B*T5: $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ FA3 {*es selbst*: als Satzformel}

1. $\neg A \wedge (\neg A \supset \neg B) \supset \neg B$ B*A2
2. $(\neg A \supset \neg B) \wedge \neg A \supset \neg B$ B*R1 (1)
3. $(\neg A \supset \neg B) \wedge B \supset A$ B*RT2 (2)
4. $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ B*R4 (3)

{Was ist in der obigen Herleitung der relevante Einsetzungsfall von B*RT2? *Antwort*:
In $D' \wedge \neg B \supset \neg A \Rightarrow D' \wedge A \supset B$ ist (simultan uniform) zu setzen: „$(\neg A \supset \neg B)$“ für „D´“, „A“ für „B“ und „B“ für „A“. Das Ergebnis ist $(\neg A \supset \neg B) \wedge \neg A \supset \neg B \Rightarrow (\neg A \supset \neg B) \wedge B \supset A$, was beim Übergang von der Zeile 2 zur Zeile 3 zum Einsatz kommt.}

In **Alpha**:

RT16: $\rightarrow A; \rightarrow A \supset B \Rightarrow \rightarrow B$ FR1 {durch Schlussregelformel dargestellt}

1. $\rightarrow A$ Annahme
2. $\rightarrow A \supset B$ Annahme
3. $A, A \supset B \rightarrow B$ A2
4. $A \rightarrow A \supset B$ R2 (2)
5. $A \rightarrow B$ R3 (3, 4)
6. $\rightarrow B$ R3 (5, 1).

In **Beta***:

B*RT3: $A; A \supset B \Rightarrow B$ FR1 {*es selbst*: als Satzregelformel}

1. A Annahme
2. $A \supset B$ Annahme
3. B B*R3 (2, 1)

{B*RT3 koinzidiert bis auf die Reihenfolge der Prämissen und die Wahl der auftretenden unstrukturierten und sinnunbestimmten Satzformeln mit der einen Hälfte von B*R3: derjenigen *ohne* „D“-Ergänzung [d. h.: mit dem, was aus B*R3 hervorgeht, wenn man aus B*R3 – wie es für einen der beiden durch B*R3 intendierten Inhalte erlaubt ist – die geschweiften Klammern samt dem durch sie Eingeklammerten weglässt].}

Mit den Theoremen B*T1, B*T2, B*T5 und B*RT3 ist ersichtlich, dass **Beta** in **Beta*** deduktiv enthalten ist. Das Umgekehrte gilt ebenfalls; aber von dem äußerst langwierigen und komplizierten Beweis dafür (unter alleiniger Verwendung von **Beta**!) sehe ich ab.

Im Einzelnen ist, um das Enthaltensein von **Beta*** in **Beta** zu beweisen, in **Beta** vor Anwendung der **Beta**-Definitionen FD1 und FD2 das Folgende zu zeigen:

{Die nachfolgende Auflistung ist auch eine Gelegenheit, eine Modifikation von **Beta*** vorzuführen, nämlich die Gestalt, die **Beta*** *in der Grundnotation* hätte, wenn „∨“ und „∧“ in **Beta*** durch „¬“ und „⊃“ wie in **Beta** definiert wären. Die kompakte Schreibweise gewisser Grundprinzipien – die Schreibweise mit den geschweiften Klammern: „zwei Grundprinzipien in einem“ – ist *in diesem modifizierten* **Beta*** in der Grundnotation nicht mehr realisierbar, sondern es ist da jeweils die „zweifüßige“ Schreibweise zu verwenden: die Aufspaltung in **(a)**-Grundprinzip und in **(b)**-Grundprinzip. Was B*R0 und B*R1 angeht, so muss auf die Verwendung der Grundnotation verzichtet werden (aus naheliegenden Gründen).}

B*R0 [*siehe unten*]

B*A1 $A \supset A$

B*R1 [*siehe unten*]

B*R2 (**a**) $D \supset C \Rightarrow \neg(D \supset \neg B) \supset C$ (**b**) $C \Rightarrow B \supset C$

B*R3 (**a**) $\neg(D \supset \neg B) \supset C;\ D \supset B \Rightarrow D \supset C$ (**b**) $B \supset C;\ B \Rightarrow C$

B*A2 $\neg(B \supset \neg(B \supset C)) \supset C$

B*R4 $\neg(D \supset \neg B) \supset C \Rightarrow D \supset (B \supset C)$

B*A3 $\neg(B \supset \neg\neg B) \supset C$

B*R5 (**a**) $\neg(D \supset \neg B) \supset C;\ \neg(D \supset \neg\neg B) \supset C \Rightarrow D \supset C$ (**b**) $B \supset C;\ \neg B \supset C \Rightarrow C$

B*A4 $A \supset (\neg A \supset B);\ B \supset (\neg A \supset B)$

B*R6 (**a**) $\neg(D \supset \neg A) \supset C;\ \neg(D \supset \neg B) \supset C \Rightarrow \neg(D \supset \neg(\neg A \supset B)) \supset C$

(**b**) $A \supset C;\ B \supset C \Rightarrow (\neg A \supset B) \supset C$

B*A5´ $\neg(A \supset \neg B) \supset A;\ \neg(A \supset \neg B) \supset B$

B*R7´ (**a**) $D \supset A;\ D \supset B \Rightarrow D \supset \neg(A \supset \neg B)$ (**b**) $A;\ B \Rightarrow \neg(A \supset \neg B)$

All dies in **Beta** zu beweisen ist keine Kleinigkeit.

Was nun B*R0 angeht, so sind dessen zwei einfachsten Fälle diese: (I) $A \wedge B \wedge D$ darf $(A \wedge B) \wedge D$ in $(A \wedge B) \wedge D \supset C$ ersetzen, *und* $(A \wedge B) \wedge D$ darf $A \wedge B \wedge D$ in $A \wedge B \wedge D \supset C$ ersetzen. (II) $A \wedge B \wedge D$ darf $A \wedge (B \wedge D)$ in $A \wedge (B \wedge D) \supset C$ ersetzen, *und* $A \wedge (B \wedge D)$ darf $A \wedge B \wedge D$

in $A \wedge B \wedge D \supset C$ ersetzen. Zur Rechtfertigung dieser einfachsten zwei Fälle (I) und (II) von B*R0 ist in **Beta** zu zeigen: $(A \wedge B) \wedge D \equiv A \wedge (B \wedge D)$; denn wenn dies etabliert ist, so spricht nichts gegen eine konveniente Abkürzung (*dann*, wenn sie konvenient ist) sowohl *von* $(A \wedge B) \wedge D$ *in* $(A \wedge B) \wedge D \supset C$ als auch *von* $A \wedge (B \wedge D)$ *in* $A \wedge (B \wedge D) \supset C$ durch $A \wedge B \wedge D$; denn auf die Klammersetzung kommt es dann offensichtlich logisch nicht an. Es ist, mit anderen Worten (angesichts von FD2), in **Beta** zu zeigen: $\neg(\neg(A \supset \neg B) \supset \neg D) \equiv \neg(A \supset \neg\neg(B \supset \neg D))$. Aber diese Aufgabe hat sichtlich einen demotivierenden Charakter, insbesondere im Hinblick auf das *gefühlt* äußerst Geringfügige, was durch deren Erfüllung inhaltlich erbracht würde, nämlich: der Beweis in **Beta** des *Assoziativgesetzes* [als Satzformel] *für* „und" [$\wedge$] – welches Gesetz *intuitiv* eine vollkommene Selbstverständlichkeit ist.

Was B*R1 angeht, so ist dessen einfachster Fall dieser: $A \wedge B \supset C \Rightarrow B \wedge A \supset C$. Zur Rechtfertigung dieses einfachsten Falls ist in **Beta** zu zeigen: $\neg(A \supset \neg B) \supset C \Rightarrow \neg(B \supset \neg A) \supset C$. Die Lösung *dieser* Aufgabe, immerhin, ist besser absehbar als die Lösung der im vorausgehenden Absatz hingestellten Aufgabe; aber mit ihrer Lösung ist nur der Anfang einer Rechtfertigung von B*R1 *auf der Grundlage von* **Beta** gemacht. Wie ja auch mit der Rechtfertigung der einfachsten Fälle von B*R0 nur der Anfang einer Rechtfertigung von B*R0 *auf der Grundlage von* **Beta** gemacht ist. Der Rest der Rechtfertigung von B*R1 ist unter Rückgriff auf schon Bewiesenes für jede beliebige Anzahl $n \geq 2$ der [durch Komma abgeteilten] Satzformelvorkommnisse in $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ vorzunehmen. Bei $n = 4$, beispielsweise, ist $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ identisch mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$; und $\wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ ist dementsprechend identisch mit $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4$. Was den Rest der Rechtfertigung von B*R0 betrifft, so ist – bei $n = 4$ – in **Beta** unter Rückgriff auf schon Bewiesenes zu zeigen: (i) ≡ (ii), (ii) ≡ (iii), (iii) ≡ (i), und zwar *für* (i): $(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3)) \wedge \sigma_4$, (ii): $(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)$, (iii): $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4))$. Was aber B*R1 bei $n = 4$ betrifft, so ist in **Beta** unter Rückgriff auf schon Bewiesenes zu zeigen: (a) $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \supset C \Rightarrow \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_4 \wedge \sigma_3 \supset C$; (b) $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \supset C \Rightarrow \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_4 \supset C$; (c) $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \supset C \Rightarrow \sigma_2 \wedge \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4 \supset C$.

Freilich: Auch ohne ausgeführten Beweis ist davon auszugehen, dass nicht nur **Beta** in **Beta***, sondern auch umgekehrt **Beta*** in **Beta** deduktiv enthalten ist. *Somit* haben wir mit **Beta** – dem **Frege-Łukasiewicz**-Kalkül – auch **Alpha** „in der Tasche" (wie ja doch nicht anders zu erwarten ist, wenn bereits Gottlob Frege ein Beschreiber der *kompletten* wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik war); denn **Beta*** ist nichts anderes als die getreue Übersetzung ins

„Satzformelige“ des in „Schlussformelig“ formulierten Kalküls **Alpha**[24] – oder genauer gesagt: des Kalküls **Alpha mit IC-*Regelgesetz* und EC // IC und VUG**, welcher Kalkül aber, wie gesagt (und gezeigt), mit **Alpha** deduktiv äquivalent ist. (Man beachte: Während in **Alpha mit IC-*Regelgesetz* und EC // IC und VUG** das IC-*Regelgesetz* deduktiv äquivalent IC – eine Schlussformel – ersetzt, und EC – zwei Schlussformeln – deduktiv äquivalent das Regelgesetz VUG ersetzen, wird *in der Formulierung* des Kalküls **Alpha mit IC-*Regelgesetz* und EC // IC und VUG** EC [$A \wedge B \rightarrow A$; $A \wedge B \rightarrow B$] auf die axiomatische Listenposition von IC gesetzt [könnte dort zur Unterscheidung „A5´“ heißen] und das IC-*Regelgesetz* [$\Gamma \rightarrow A$; $\Gamma \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \rightarrow A \wedge B$] auf die axiomatische Listenposition von VUG [wo es zur Unterscheidung „R7´“ heißen könnte]. Diese Platzierungsmaßnahme, die die besagten deduktiven Äquivalenzen *nicht* augenfällig macht, dient der weitestmöglichen *formulierungsmäßigen* Kontinuität von **Alpha mit IC-*Regelgesetz* und EC // IC und VUG** mit **Alpha**.)

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass R3 (das Strukturelle Schnittgesetz: SSG) bezüglich des Restes von **Alpha** (**Alpha** ohne R3), *aber ergänzt um* UDP *und* UVUG, mit R3* – d. h.: $\rightarrow$ {D $\wedge$} B $\supset$ C; $\rightarrow$ {D $\supset$} B $\Rightarrow \rightarrow$ {D $\supset$} C [m. a. W.: B*R3 *in Schlussregelformel-Darstellung*, statt, wie original, als Satzregelformel] – deduktiv äquivalent ist; R3 ist also in diesem (*gewissen*) Sinne „eliminierbar“:

<u>Bei R3 *ohne* „Γ“ und Komma, und R3* *ohne* „{D $\wedge$}“ und „{D $\supset$}“:[25]</u>

R3* *aus* R3:

1. $\rightarrow$ B $\supset$ C	Annahme	
2. $\rightarrow$ B	Annahme	
3. B, B $\supset$ C $\rightarrow$ C	A2	
4. B $\rightarrow$ B $\supset$ C	R2 (1)	
5. B $\rightarrow$ C	R3 (3, 4)	
6. $\rightarrow$ C	R3 (5, 2)	{Vgl. den Beweis von RT16.}

R3 *aus* R3*:

1. B $\rightarrow$ C	Annahme
2. $\rightarrow$ B	Annahme

[24] Das *Extraprinzip* B*R0 in **Beta*** dient allein der Vollendung der Übersetzung von **Alpha** nach **Beta***.

[25] Die hiermit angesprochenen Fälle sind durch die Standardformulierung von R3 bzw. R3* abgedeckt. Statt „R3 ohne ‚Γ‘ und Komma“ kann man auch sagen „R3 mit leerem Γ“.

3. $\rightarrow$ B $\supset$ C R4 (1)

4. $\rightarrow$ C R3* (3, 2)

Bei R3 *mit* „Γ“ und Komma, und R3* *mit* „D $\wedge$“ und „D $\supset$“, aber ohne geschweifte Klammern:[26]

R3* *aus* R3:

1. $\rightarrow$ D $\wedge$ B $\supset$ C Annahme

2. $\rightarrow$ D $\supset$ B Annahme

3. D $\wedge$ B $\rightarrow$ C RT13 {UDP} (1)

4. D, B $\rightarrow$ C RT14 {UVUG} (3)

5. D $\rightarrow$ B RT13 {UDP} (2)

6. D $\rightarrow$ C R3 (4, 5)

7. $\rightarrow$ D $\supset$ C R4 (6)

R3 *aus* R3*:

1. Γ, B $\rightarrow$ C Annahme

2. $\Gamma \rightarrow$ B Annahme

3. B, $\Gamma \rightarrow$ C R1 (1) {ggf. mehrfach hintereinander oder, wenn Γ leer ist, *leer* angewendet}

4. B, $\wedge(\Gamma) \rightarrow$ C R7 (3) {ggf. mehrfach hintereinander; eventuell ist aber auch 4. gleich 3.}[27]

5. $\wedge(\Gamma)$, B $\rightarrow$ C R1 (4)

6. $\wedge(\Gamma) \wedge$ B $\rightarrow$ C R7 (5)

7. $\wedge(\Gamma) \rightarrow$ B R7 (2) {ggf. mehrfach hintereinander; eventuell ist aber auch 7. gleich 2.}

8. $\rightarrow \wedge(\Gamma) \wedge$ B $\supset$ C R4 (6)

9. $\rightarrow \wedge(\Gamma) \supset$ B R4 (7)

10. $\rightarrow \wedge(\Gamma) \supset$ C R3* (8, 9)

11. $\wedge(\Gamma) \rightarrow$ C UDP (10)

12. $\Gamma \rightarrow$ C UVUG (11) {ggf. mehrfach hintereinander; eventuell ist aber auch 12. gleich 11.}

{Falls Γ leer ist, ergibt sich 12. aus 11. mit der beweisbaren Schlussregelformel B $\supset$ B $\rightarrow$ C $\Rightarrow \rightarrow$ C, und 7. aus 2. und 4. aus 3. mit R2 (die eingefügte Satzformel ist B $\supset$ B). Siehe dazu die Erläuterungen bei RT15a.}

[26] Die hiermit angesprochenen Fälle sind durch die Standardformulierung von R3 bzw. R3* ebenfalls abgedeckt. In diesem zweiten Fall wird davon ausgegangen, dass Γ in R3 nichtleer ist; dass hingegen Γ in R3 leer ist, wird im zuvor behandelten ersten Fall angenommen.

[27] Die Beweiszeile 4 ist gleich der Beweiszeile 3, wenn Γ nur eine einzige Satzformel umfasst. Zu $\wedge(\Gamma)$ siehe in Kapitel 1 die Beweise von RT15a und RT15b und die Anmerkung zu diesen.

Von einer Eliminierbarkeit von R3 (aus **Alpha**) in einem *eigentlichen* (nicht bloß in einem *gewissen*) Sinn aufgrund des Gezeigten kann natürlich keine Rede sein, sondern eigentlich nur von der deduktiven Äquivalenz von **Alpha mit R3*, UDP, UVUG // R3** mit **Alpha** (UDP und UVUG sind ja in **Alpha** beweisbar: siehe RT13 und RT14).

Sei nun **Alpha-Beta*-Hybrid** der Kalkül, der aus **Alpha** aufgrund der folgenden fünf Modifikationen bzw. Konventionen hervorgeht:

[0] Das *Klammergesetz für „∧"-Ketten im Antezedens* – B*R0 von **Beta*** – wird auch in **Alpha-Beta*-Hybrid** als Grundprinzip aufgestellt, unter der Bezeichnung „R0".[28]

[1] A5 wird ersetzt durch A5´: $A \wedge B \rightarrow A$; $A \wedge B \rightarrow B$; R7 wird ersetzt durch R7´: $\Gamma \rightarrow A$; $\Gamma \rightarrow B \Rightarrow A \wedge B$.[29]

[2] Ein Komma in der Satzformelfolge *links von* „→" [in einer Schlussformel] kann stets durch ein Vorkommnis von „∧" ersetzt werden; ein Vorkommnis von „∧" in der Satzformelfolge *links von* „→" [in einer Schlussformel], welches in der Satzformel, in der es vorkommt, Hauptkonnektiv ist, kann stets durch ein Komma ersetzt werden.[30]

[3] Wenn links von „→" nur *eine* Satzformel steht [und sei es eine *verkappte* Satzformel: eine mindestens dreigliedrige „∧"-Kette], wie ohnehin rechts von „→" nur *eine* Satzformel steht, dann kann „→" durch „⊃" ersetzt werden; in Satzformeln der Gestalt $\sigma \supset \sigma'$, die

[28] Bei dem *Klammergesetz für „∧"-Ketten im Antezedens* handelt es sich um eine Regel der Klammerersparnis (und -setzung), die anders als die allgemeinen Regeln der Klammerersparnis nicht rein durch typographische Konvenienz moviert ist. Sie hat unerlässlich auch inhaltliche, erst durch den Sinn des „∧"-Symbols gegebene Gründe.

[29] Der durch die beiden Ersetzungen aus **Alpha** hervorgehende Kalkül ist mit **Alpha** deduktiv äquivalent (wie schon gezeigt); in ihm ist genau dasselbe beweisbar wie in **Alpha**.

[30] Wenn es da kein Hauptkonnektiv ist, kann es natürlich nicht durch ein Komma ersetzt werden, weil nach den fortbestehenden syntaktischen Regeln Kommata *eingebettet* in Satzformeln nicht vorkommen dürfen. Man beachte, dass in einer – wie festgelegt – ohne Klammern geschriebenen „∧"-Kette $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \sigma_n$ [$n \geq 3$] es dennoch immer ein Vorkommnis von „∧" gibt, welches in der Kette als Hauptkonnektiv gelten kann: *Jedes* der Vorkommnisse von „∧" kann als Hauptkonnektiv *gewählt* werden. Z. B.: Wenn die „∧"-Kette $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$ ist, so ergibt sich bei der einen Hauptkonnektiv-Wahl als Resultat der „∧"-durch-Komma-Ersetzung in $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \rightarrow \sigma'$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \sigma'$; bei der anderen Hauptkonnektiv-Wahl hingegen: $\sigma_1, \sigma_2 \wedge \sigma_3 \rightarrow \sigma'$. Wie man hier auch wählt, im *sichtlich naheliegenden* nächsten Schritt der Ersetzung eines Hauptkonnektiv-Vorkommnisses von „∧" durch ein Komma ist man in beiden Fällen bei genau demselben Ergebnis: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \sigma'$.

weder in Satzformeln noch in Schlussformeln eingebettet sind, kann „$\supset$“ durch „$\rightarrow$“ ersetzt werden.[31]

[4] Wenn links von „$\rightarrow$“ keine Satzformel steht (rechts von „$\rightarrow$“ steht selbstverständlich sehr wohl eine), dann kann „$\rightarrow$“ entfallen; vor jede Satzformel, die weder in einer Satzformel noch in einer Schlussformel eingebettet ist, kann „$\rightarrow$“ gesetzt werden.

Das erste Ergebnis für **Alpha-Beta*-Hybrid** ist, dass A5´ als Axiom eingespart werden kann; denn es ist wegen [2] nur eine andere Schreibweise der trivialen Theoreme A, B $\rightarrow$ A (mit A1, R2) und A, B $\rightarrow$ B (mit A1, R2, R1). Wie steht es aber in **Alpha-Beta*-Hybrid** mit dem Verhältnis von R3, B*R3 [wie es in **Beta*** heißt] und R3*, welche Schlussregelformel man aus B*R3 durch Voranstellen von „$\rightarrow$“ vor dessen Prämissen und Konklusion erhält (siehe oben)? Die Antwort ist das Folgende:

[A] Wegen [4] sind B*R3 und R3* bloße Formulierungsvarianten voneinander.

[B] *Bei leerem* Γ beläuft sich R3 auf B $\rightarrow$ C; $\rightarrow$ B $\Rightarrow$ $\rightarrow$ C [denn „Γ“ samt Komma kann da schlicht weggelassen werden], oder m. a. W. (gemäß [3], [4]): auf B $\supset$ C; B $\Rightarrow$ C,[32] also auf B*R3 *ohne* „{D $\wedge$}“ und „{D $\supset$}“.

[C] *Bei nichtleerem* Γ beläuft sich R3 auf σ_1 …, σ_n, B $\rightarrow$ C; σ_1 …, $\sigma_n \rightarrow$ B $\Rightarrow$ σ_1 …, $\sigma_n \rightarrow$ C, oder m. a. W. (gemäß [2], [3]): auf $\sigma_1 \ldots \wedge \sigma_n \wedge$ B $\supset$ C; $\sigma_1 \ldots \wedge \sigma_n \supset$ B $\Rightarrow$ $\sigma_1 \ldots \wedge \sigma_n \supset$ C [bei n = 1 entfallen die Kommata, die die σ_i voneinander abteilen, und die „$\wedge$“-Vorkommnisse, welche diese Kommata ersetzen], also auf einen Einsetzungsfall *im erweiterten Sinn* von B*R3 *mit* „D $\wedge$“ und „D $\supset$“, aber ohne geschweifte Klammern. [$\sigma_1 \ldots \wedge \sigma_n$ ist da zwar bei $n \geq 3$ nicht selbst für „D“ einsetzbar – da es unter der fraglichen Bedingung gar keine Satzformel ist –, aber einsetzbar ist für „D“ z. B. die (definierte) Satzformel $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$.[33] In $\wedge(\sigma_1$

[31] In *eingebetteten* (also *als echter Teil* einer Satzformel oder Schlussformel stehenden) Satzformeln $\sigma \supset \sigma'$ kann „$\supset$“ natürlich nicht durch „$\rightarrow$“ ersetzt werden, weil nach den fortbestehenden syntaktischen Regeln „$\rightarrow$“ *eingebettet* in Satzformeln bzw. Schlussformeln nicht vorkommen darf.

[32] Das ist nicht A2 *nach Anwendung von* R1; denn A2 – und A2 *nach Anwendung von* R1 – ist eine Schlussformel, keine Satzregelformel. Unverkennbar sind aber Schlussformeln und Satzregelformeln *Bilder* voneinander (freilich nur *typographische*, keine auch *semantischen*).

[33] Man beachte den Unterschied zwischen $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ [was σ_1 ist, oder $\sigma_1 \wedge \sigma_2$, oder $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3)$, oder $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4))$, oder …] und $\wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ [was σ_1 ist, oder $\sigma_1 \wedge \sigma_2$, oder $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$, oder $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \sigma_4$, oder …]. $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ ist stets eine Satzformel, $\wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ ist für $n \geq 3$ keine Satzformel, sondern nur eine Abkürzung einer solchen – eine Abkürzung, die zudem nur in bestimmten Kontexten verwendet werden darf und deren Auflösung nicht eindeutig bestimmt ist (aber die Auflösungs*menge* ist für jedes $n \geq 3$ sehr wohl endlich *und* eindeutig bestimmt!). *Dadurch* unterscheidet sie sich erheblich von den Abkürzungen von Satzformeln, die

… σ_n) $\wedge$ B $\supset$ C, $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \supset$ B und $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \supset$ C dürfen dann die Klammern im – unabgekürzt geschriebenen – Antezedens gemäß R0 gelöscht werden, sofern sie bei der Bildung von $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \wedge$ B aus $\sigma_1 \ldots \sigma_n$, B – bzw. bei der Bildung von $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ aus $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ – neu hinzukommen; die Löschungen ergeben den fraglichen Einsetzungsfall *im erweiterten Sinn* von B*R3.]

[D] *Ohne* „{D $\wedge$}“ und „{D $\supset$}“ beläuft sich B*R3 auf B $\supset$ C; B $\Rightarrow$ C, oder m. a. W. (gemäß [3], [4]): auf B $\rightarrow$ C; $\rightarrow$ B $\Rightarrow \rightarrow$ C, also auf R3 *bei leerem* Γ.

[E] *Mit* „D $\wedge$“ und „D $\supset$“, aber ohne geschweifte Klammern, beläuft sich B*R3 auf D $\wedge$ B $\supset$ C; D $\supset$ B $\Rightarrow$ D $\supset$ C, wovon $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \wedge$ B $\supset$ C; $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \supset$ B $\Rightarrow \wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \supset$ C ein Einsetzungsfall ist. Die Klammern in den drei – unabgekürzt geschriebenen – Antezedentia dürfen gemäß R0 gelöscht werden, sofern die Klammern bei der Bildung von $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n) \wedge$ B aus $\sigma_1 \ldots \sigma_n$, B – bzw. bei der Bildung von $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ aus $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ – neu hinzukommen; ihre Löschung ergibt: $\sigma_1 \ldots \wedge \sigma_n \wedge$ B $\supset$ C; $\sigma_1 \ldots \wedge \sigma_n \supset$ B $\Rightarrow \sigma_1 \ldots \wedge \sigma_n \supset$ C, oder m. a. W. (gemäß [3], [2]; man beachte Fußnote 30): $\sigma_1 \ldots, \sigma_n$, B $\rightarrow$ C; $\sigma_1 \ldots, \sigma_n \rightarrow$ B $\Rightarrow \sigma_1 \ldots, \sigma_n \rightarrow$ C – was nichts anderes ist als R3 *bei nichtleerem* Γ.

{Man beachte: [D] ist die Umkehrung von [B], [E] die Umkehrung von [C]. Wegen [A] gelten diese Resultate nicht nur für B*R3, sondern auch für R3*.}

Im Kalkül **Alpha-Beta*-Hybrid** sind also R3, B*R3 und R3* nichts weiter als Formulierungsvarianten voneinander, und zeigte man eine Überflüssigkeit – d. h.: eine Eliminierbarkeit *im eigentlichen Sinn* – von R3 für **Alpha-Beta*-Hybrid**, so auch die von B*R3 bzw. R3*, *und vice versa*.

Zu unterscheiden ist allerdings die Überflüssigkeit *im schwachen Sinn* eines Grundprinzips für einen Kalkül und dessen Überflüssigkeit *im starken Sinn*.

{Die Grundprinzipien eines Kalküls sind Grundprinzipien durch Setzung, Festlegung, Deklaration. Da kann es durchaus vorkommen, dass sich ein Grundprinzip des Kalküls nachträglich als überflüssig erweist. Wenn es vorkommt, so bedeutet das nur, dass sich ein Grundprinzip des Kalküls als kein „echtes“, „wirkliches“, „eigentliches“ Grundprinzip erwiesen hat; ein Grundprinzip [per Festlegung] des Kalküls ist es aber immer noch.}

---

durch Anwendung der allgemeinen Regeln der Klammerersparnis hervorgehen. (Letztere sind freilich, strenggenommen, ebenfalls keine [*Sigma*-]Satzformeln; aber von dieser Strenge wird bei ihnen abgesehen: siehe den Schluss der Beschreibung von *Sigma* in Kapitel 0.)

Im starken Sinn überflüssig für einen Kalkül ist ein Grundprinzip genau dann, wenn es zirkelfrei aufgrund der übrigen Grundprinzipien des Kalküls beweisbar ist. Das dürfte bei R3 für **Alpha**, bei B*R3 für **Beta*** und bei R3/B*R3/R3* für **Alpha-Beta*-Hybrid** *nicht* der Fall sein. Denn wie will man z. B. die folgende in **Alpha** beweisbare (aber hoffentlich in **Alpha** *niemals* anwendbare) Schlussregelformel *ohne* R3 zirkelfrei in **Alpha** beweisen: $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B? Offenbar ist es nicht möglich – während es doch möglich sein müsste, wenn R3 zirkelfrei aufgrund der übrigen Grundprinzipien von **Alpha** beweisbar wäre. *Mit* R3 ist der Beweis von $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B in **Alpha** ganz einfach:

1. $\rightarrow$ A	Annahme
2. $\rightarrow \neg$A	Annahme
3. A, $\neg$A $\rightarrow$ B	A3
4. A $\rightarrow \neg$A	R2 (2)
5. A $\rightarrow$ B	R3 (3, 4)
6. $\rightarrow$ B	R3 (5, 1).

Im schwachen Sinn (oder: *im Gentzen'schen Sinn*) überflüssig für einen Kalkül ist ein Grundprinzip hingegen genau dann, wenn jede *Schlussformel* bzw. *Satzformel*, die *ein Theorem* des Kalküls ist, auch ohne jenes Grundprinzip – ohne jede Spezialisierung von ihm – im Kalkül echtbeweisbar ist (was aber eben noch nicht bedeutet, dass auch jede *Schlussregelformel* bzw. *Satzregelformel*, die im Kalkül echtableitbar ist, auch ohne jenes Grundprinzip im Kalkül echtableitbar ist). *In diesem Sinn* von „überflüssig" könnte man auf den Gedanken kommen (von Resultaten angeregt, die auf Gerhard Gentzen zurückgehen), dass R3 für **Alpha**, B*R3 für **Beta*** und R3/B*R3/R3* für **Alpha-Beta*-Hybrid** überflüssig ist (*im selben Sinn*, wie $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B in jedem brauchbaren – *nicht* „allbeweisenden" – Schlussformelkalkül, der diese Formel als Grundprinzip führt, überflüssig ist,[34] und A; $\neg$A $\Rightarrow$ B in jedem brauchbaren diese letztere Satzregelformel als Grundprinzip führenden Satzformelkalkül).

[34] Diese Überflüssigkeit von $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B ergibt sich insbesondere dann, wenn *keine* Satzformel σ da ist, sodass sowohl $\rightarrow \sigma$ als auch $\rightarrow \neg\sigma$ im Schlussformelkalkül K beweisbar ist. Denn dann ist $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B in K nie anwendbar, und folglich ist *trivialerweise* jedes Theorem von K auch ohne $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B in K echtbeweisbar. Man könnte, wie gesagt, auf den Gedanken kommen, dass R3 *im selben Sinn* wie $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B (dem eben verwendeten Sinn) überflüssig für **Alpha** ist; aber gewiss wäre da R3 *in anderer Weise* als $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B in jenem Sinn überflüssig für **Alpha***, nicht trivialerweise* wie $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B, *obwohl* doch in **Alpha** – wovon auszugehen ist – für keine Satzformel σ sowohl $\rightarrow \sigma$ als auch $\rightarrow \neg\sigma$ beweisbar ist.

{Betrachten wir den zu **Alpha** deduktiv äquivalenten Schlussformelkalkül **Alpha mit TND // ISG** (siehe T1 und die zugehörige Anmerkung im vorausgehenden Kapitel; ISG ist R5 in **Alpha**). Wobei *deduktive Widerspruchsfreiheit* für **Alpha mit TND // ISG** (wie für **Alpha**) bedeute, dass für keine Satzformel σ die Schlussformel $\rightarrow \sigma$ und die Schlussformel $\rightarrow \neg\sigma$ in **Alpha mit TND // ISG** beweisbar ist. [Die *Prämissenlosigkeit* ist hier entscheidend, denn selbstverständlich gibt es unendlich viele Schlussformeln der Gestalt $\Gamma \rightarrow \sigma$ und der Gestalt $\Gamma \rightarrow \neg\sigma$, die beide mit identischem Γ in **Alpha mit TND // ISG** beweisbar sind – wo aber Γ stets *nichtleer* ist!] Wegen $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ A $\wedge \neg$A (gemäß RT2) *zum einen*, und $\rightarrow$ A $\wedge \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ A sowie $\rightarrow$ A $\wedge \neg$A $\Rightarrow \rightarrow \neg$A[35] *zum anderen*, lässt sich die deduktive Widerspruchsfreiheit für **Alpha mit TND // ISG** äquivalent auch so ausdrücken: Für keine Satzformel σ ist die Schlussformel $\rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma$ in **Alpha mit TND // ISG** beweisbar.[36] Und (drittens) ist die deduktive Widerspruchsfreiheit von **Alpha mit TND // ISG** auch wie folgt ausdrückbar: $\rightarrow$ A ist in **Alpha mit TND // ISG** nicht beweisbar.[37]

Wenn R3 für **Alpha mit TND // ISG** im *schwachen (Gentzen'schen) Sinn* überflüssig wäre, im *schwachen* (nämlich dem *Gentzen'schen*) *eigentlichen Sinn eliminierbar* wäre [obzwar es im starken Sinn offenbar nicht überflüssig, im starken eigentlichen Sinn nicht eliminierbar ist], dann ist **Alpha mit TND // ISG** *deduktiv widerspruchsfrei*. Wäre nämlich R3 für **Alpha mit TND // ISG** im schwachen Sinn überflüssig und zugleich **Alpha mit TND // ISG** *nicht* deduktiv widerspruchsfrei, also $\rightarrow$ A in **Alpha mit TND // ISG** beweisbar, so müsste sich $\rightarrow$ A auch *ohne* Verwendung von R3 in **Alpha mit TND // ISG** als Theorem beweisen lassen. Das ist aber nicht möglich: Im letzten Schritt eines R3-freien Beweises von $\rightarrow$ A in **Alpha mit TND // ISG** müsste $\rightarrow$ A erreicht werden, und das einzige Grundprinzip, das in **Alpha mit TND // ISG** neben R3 Prämissenlosigkeit (wie sie bei $\rightarrow$ A gegeben ist) *herbeiführen* (nicht, wie TND, bloß *setzen*) kann, ist R4. Doch mit R4 lässt sich $\rightarrow$ A nicht erreichen, da R4 rechts vom „$\rightarrow$" stets eine Implikationssatzformel einführt, „A" aber eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Satzformel ist. Nun könnte vielleicht ohne Verwendung von R3 für eine Satzformel σ' $\sigma' \vee \neg\sigma' \rightarrow$ A in **Alpha mit TND // ISG** beweisbar sein;[38] zudem ist $\rightarrow \sigma' \vee \neg\sigma'$ – wie auch immer σ' beschaffen ist – ein Einset-

[35] Gemäß T9: A $\wedge \neg$A $\rightarrow$ A und A $\wedge \neg$A $\rightarrow \neg$A; also unter der Annahme $\rightarrow$ A $\wedge \neg$A mit R3: $\rightarrow$ A sowie $\rightarrow \neg$A. Mithin sind $\rightarrow$ A $\wedge \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ A sowie $\rightarrow$ A $\wedge \neg$A $\Rightarrow \rightarrow \neg$A echtableitbare Schlussregelformeln von **Alpha** – wie auch von **Alpha mit TND // ISG**.

[36] Angenommen, für eine Satzformel σ ist sowohl $\rightarrow \sigma$ als auch $\rightarrow \neg\sigma$ in **Alpha** beweisbar; dann ergibt sich damit und $\rightarrow \sigma$; $\rightarrow \neg\sigma \Rightarrow \rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma$ [will sagen: dem relevanten Einsetzungsfall des **Alpha**-Regelgesetzes $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ A $\wedge \neg$A] die Beweisbarkeit von $\rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma$ in **Alpha**. Angenommen umgekehrt, für eine Satzformel σ ist $\rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma$ in **Alpha** beweisbar; dann ergibt sich mit $\rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma \Rightarrow \rightarrow \sigma$ sowie $\rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma \Rightarrow \neg\sigma$ [will sagen: den relevanten Einsetzungsfällen der **Alpha**-Regelgesetze $\rightarrow$ A $\wedge \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ A und $\rightarrow$ A $\wedge \neg$A $\Rightarrow \rightarrow \neg$A] die Beweisbarkeit von sowohl $\rightarrow \sigma$ als auch $\rightarrow \neg\sigma$ in **Alpha**. – *Die vorgelegte Äquivalenzdemonstration gilt selbstverständlich auch für* **Alpha mit TND // ISG**.

[37] Angenommen, $\rightarrow$ A ist in **Alpha** beweisbar; dann ist neben $\rightarrow$ A auch $\rightarrow \neg$A [als Einsetzungsfall von $\rightarrow$ A] in **Alpha** beweisbar; also ist für eine Satzformel σ sowohl $\rightarrow \sigma$ als auch $\rightarrow \neg\sigma$ in **Alpha** beweisbar. Angenommen umgekehrt, für eine Satzformel σ ist sowohl $\rightarrow \sigma$ als auch $\rightarrow \neg\sigma$ in **Alpha** beweisbar; nun ist, wie auch immer σ beschaffen ist, $\rightarrow \sigma$; $\rightarrow \neg\sigma \Rightarrow \rightarrow$ A ein Einsetzungsfall des oben im Haupttext für **Alpha** bewiesenen Regelgesetzes $\rightarrow$ A; $\rightarrow \neg$A $\Rightarrow \rightarrow$ B; folglich ist $\rightarrow$ A in **Alpha** beweisbar [was per Einsetzungsfallbildung etc. damit äquivalent ist, dass für jede Satzformel σ' die Schlussformel $\rightarrow \sigma'$ in **Alpha** beweisbar ist]. – *Die vorgelegte Äquivalenzdemonstration gilt selbstverständlich auch für* **Alpha mit TND // ISG**.

[38] Das ist allerdings schwer vorstellbar. Ausgangspunkt müsste der folgende Einsetzungsfall von A3 sein: σ', $\neg\sigma' \rightarrow$ A. Mit $\sigma' \rightarrow \neg\sigma'$ *und* R3 erhielte man daraus $\sigma' \rightarrow$ A; und hat man auch $\neg\sigma' \rightarrow \sigma'$, so erhielte man mit R1 *und* R3 aus σ', $\neg\sigma' \rightarrow$ A auch $\neg\sigma' \rightarrow$ A. Aus $\sigma' \rightarrow$ A und $\neg\sigma' \rightarrow$ A wiederum erhielte man mit R6 schließlich: $\sigma' \vee \neg\sigma' \rightarrow$ A. Doch ohne R3 kommt man in dieser Herleitung nun gerade *nicht* aus.

zungsfall eines Axioms von **Alpha mit TND // ISG**. Aber ohne R3 geht es spätestens jetzt keinen Schritt mehr weiter auf dem Weg, der zu $\rightarrow$ A führen soll. Freilich würde der folgende Spezialfall von R3 dafür schon ausreichen: $B \vee \neg B \rightarrow A; \rightarrow B \vee \neg B \Rightarrow \rightarrow A$ – mit σ' eingesetzt für „B".

Es ergibt sich in **Alpha mit TND // ISG** mit jenem Spezialfall auch das Regelgesetz $B \vee \neg B \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A$; wie bei $\rightarrow A; \rightarrow \neg A \Rightarrow \rightarrow B$ ist es auch bei $B \vee \neg B \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A$ nicht zu sehen, wie es *ohne* R3 aus den restlichen Grundprinzipien von **Alpha mit TND // ISG** zirkelfrei herleitbar sein könnte (*mit* R3 ist die Herleitung ganz einfach). Einen Umweg über ISG zu gehen, das in **Alpha mit TND // ISG** echtableitbar ist, führt nicht weiter:

1. $B \vee \neg B \rightarrow A$	Annahme
2. $B \rightarrow B \vee \neg B$	A4
3. $\neg B \rightarrow B \vee \neg B$	A4
4. $B \rightarrow A$	KSG [echtableitbar in **Alpha mit TND // ISG**] (2, 1)
5. $\neg B \rightarrow A$	KSG (3, 1)
6. $\rightarrow A$	ISG [echtableitbar in **Alpha mit TND // ISG**] (4, 5).

Es so zu machen, führt deshalb nicht weiter, weil ja im Beweis von KSG in **Alpha mit TND // ISG** R3 in Anspruch genommen werden muss (wie in **Alpha**: siehe den Beweis von RT7). Außerdem muss auch im Beweis von ISG in **Alpha mit TND // ISG** R3 in Anspruch genommen werden (siehe die Anmerkung zu T1). R3 kann also kaum *im starken Sinn* überflüssig für **Alpha mit TND // ISG** sein, denn, wenn es so wäre, müsste $B \vee \neg B \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A$ *ohne* R3 aus den restlichen Grundprinzipien von **Alpha mit TND // ISG** zirkelfrei herleitbar sein – was es offenbar nicht ist.

Aber auch um die *schwache, Gentzen'sche* Überflüssigkeit von R3 – der strukturellen Schnittregel –, um deren *schwache, Gentzen'sche [eigentliche] Eliminierbarkeit* für **Alpha** bzw. für sein deduktives Äquivalent **Alpha mit TND // ISG** steht es – gegeben, wie diese Kalküle beschaffen sind – nicht gut. Betrachten wir zwei einfache Beweise (vgl. den Beweis von T8, genauer: der Hälfte „von links nach rechts" des Theorems):

In **Alpha**:

$\underline{A \supset B \rightarrow \neg A \vee B}$

1. $A \supset B, \neg A \rightarrow \neg A \vee B$	A4, R2, R1
2. $A \supset B, A \rightarrow B$	A2, R1
3. $A \supset B, A, B \rightarrow \neg A \vee B$	A4, R2, R1
4. $A \supset B, A \rightarrow \neg A \vee B$	R3 (3, 2)
5. $A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$	R5 [ISG] (4, 1).

In **Alpha mit TND // ISG**:

$\underline{A \supset B \rightarrow \neg A \vee B}$

1. $A \supset B, \neg A \rightarrow \neg A \vee B$	A4, R2, R1
2. $A \supset B, A \rightarrow B$	A2, R1
3. $A \supset B, A, B \rightarrow \neg A \vee B$	A4, R2, R1
4. $A \supset B, A \rightarrow \neg A \vee B$	R3 (3, 2)
5. $A \supset B, A \vee \neg A \rightarrow \neg A \vee B$	R6 (4, 1)
6. $A \supset B \rightarrow A \vee \neg A$	TND, R2
7. $A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$	R3 (5, 6).

Wie will man hier in **Alpha** bzw. **Alpha mit TND // ISG** *ohne* R3 ans selbe Ziel kommen wie *mit* R3? Es ist nicht zu sehen, *wie*.

Doch offenbar [um von da an mit dem Haupttext fortzufahren, wo er vor der soeben abgeschlossenen Anmerkung aufhörte] *ist*, wie die vorstehenden Überlegungen nahelegen, R3 für

Alpha (und mitfolgend B*R3 für **Beta***, R3/B*R3/R3* für **Alpha-Beta*-Hybrid**) *nicht* überflüssig als Grundprinzip, nicht im starken, und *nicht* im schwachen Sinn – wie ja ebenso auch FR1 für **Beta** als Grundprinzip *nicht* überflüssig ist (und zwar offensichtlicherweise; wobei allerdings **Alpha** in einem allgemeinen Sinn als ein Kalkül „des natürlichen Schließens" angesehen werden kann, **Beta** gewiss nicht). Will man *Gentzen'sche Eliminierbarkeit* von R3 für einen Kalkül der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik, so muss dieser Kalkül anders als **Alpha** gebaut sein – worauf im Rahmen dieses Buches aber nicht weiter eingegangen sei.

Es scheint intuitiv evident, dass in **Alpha** und in **Alpha mit TND // ISG** die Schlussformel $\rightarrow$ A nicht bewiesen werden kann [und in **Beta** und **Beta*** nicht die *Satzformel* A]; und wenn $\rightarrow$ A [bzw. A] da nicht bewiesen werden kann, dann sind (siehe die obige, längere Anmerkung) **Alpha** und **Alpha mit TND // ISG** [bzw. *mutatis mutandis* **Beta** und **Beta***] *deduktiv widerspruchsfrei*. *Bewiesen* ist die deduktive Widerspruchsfreiheit von **Alpha mit TND // ISG**, z. B., hiermit freilich nicht. Will man einen beweistheoretischen Beweis für das Fragliche, so kann man wie folgt vorgehen: Man gibt einen Schlussformelkalkül K* *ohne* $\rightarrow$ A als Axiom an, der *bzgl. Schlussformeln* bewiesenermaßen deduktiv äquivalent mit **Alpha mit TND // ISG** ist und in dem R3, wie in **Alpha mit TND // ISG**, die einzige Weise darstellt, in Beweisen im Übergang von vorausgehenden Zeilen zur nächsten in einer Schlussformel ein Satzformelvorkommnis ohne Änderung ihrer Konklusion „herauszuschneiden" – wobei aber nun R3 für K* *bewiesenermaßen* im schwachen Sinne überflüssig ist. Im Kalkül K* ist dann die Schlussformel $\rightarrow$ A nicht beweisbar (vgl. dazu die Ausführungen in der obigen Anmerkung); also ist sie wegen der deduktiven Äquivalenz von K* und **Alpha mit TND // ISG** *bzgl.Schlussformeln* auch nicht in **Alpha mit TND // ISG** beweisbar (also auch nicht in **Alpha** wegen der deduktiven Äquivalenz von **Alpha** und **Alpha mit TND // ISG**); und also ist **Alpha mit TND // ISG** (und damit auch **Alpha** selbst) *deduktiv widerspruchsfrei*.

3. Der Schlussformelkalkül **Gamma** einer alethisch-modalen Aussagenlogik, sowie der Schlussformelkalkül **Gamma*** einer anderen alethisch-modalen Aussagenlogik

Der Kalkül **Gamma** geht aus dem Kalkül **Alpha** dadurch hervor, dass *in einem ersten Schritt* das Axiom A2 – $B, B \supset C \rightarrow C$ (*Modus ponens*, MP) – und das Schema für axiomatische Schlussregelformeln R4 – $\Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow B \supset C$ (*Deduktionsprinzip*, DP) – *um einiges* modifiziert und die übrigen Grundprinzipien von **Alpha** nach **Gamma** übernommen werden (die Kalkülbildung für **Gamma** ist dadurch aber noch nicht abgeschlossen):

GA2a $B, B \supset C \rightarrow C$

GA2b $\neg B \supset B, \neg(\neg B \vee C) \supset \neg B \vee C \rightarrow \neg C \supset C$

GR4 $B \rightarrow C \Rightarrow \rightarrow B \supset C$

GA2a ist *typographisch* (*nur* typographisch) identisch mit dem Axiom A2 in **Alpha**. Die Schlussformel in GA2b ist ein in **Alpha** (mit **Alpha**-Deutung der Satzformeln) beweisbares Theorem; der Beweis ist umständlich, aber ohne besondere Schwierigkeiten, wenn man vom **Alpha**-Theorem $B, \neg B \vee C \rightarrow C$ ausgeht[39] und berücksichtigt, dass auch $D \leftrightarrow \neg D \supset D$ ein (leicht zu zeigendes) Theorem von **Alpha** ist (und dass $B \leftrightarrow \neg B \supset B$, $C \leftrightarrow \neg C \supset C$ und $\neg B \vee C \leftrightarrow \neg(\neg B \vee C) \supset \neg B \vee C$ Einsetzungsfälle dieses Theorems sind). Zu den Axiomen GA2a und GA2b werden später noch weitere Axiome – deren Listenbezeichnungen ebenfalls mit „GA2“ beginnen – hinzukommen; die Aufstellung von **Gamma** ist also, was die Axiome angeht, noch nicht abgeschlossen!

GR4 wiederum ist eine Spezialisierung von R4 (nämlich R4 *für leeres* Γ) und darum in **Alpha** (mit **Alpha**-Deutung der Satzformeln) trivialerweise beweisbar. Umgekehrt ist R4 eine Verallgemeinerung von GR4 – eine Verallgemeinerung, die sich in **Gamma** *nicht* beweisen lässt: Von $\Gamma, B \rightarrow C$ *für nichtleeres* Γ kommt man in **Gamma** nicht zu $\Gamma \rightarrow B \supset C$ (*nicht* für *beliebiges* nichtleeres Γ), denn das für den fraglichen Schritt entscheidende **Gamma**-

[39] Der **Alpha**-Beweis für dieses Theorem ist unten im Beweis von GT1 enthalten: Das fragliche Theorem steht – formgleich, nur mit einer anderen Auswahl an unstrukturierten und sinnunbestimmten Satzformeln geschrieben – in der 5. Zeile jenes Beweises.

Grundprinzip GR4 verlangt für seine Anwendbarkeit *die Leere von* Γ, die vorausgesetztermaßen nun gerade nicht gegeben ist.

{Nur in speziellen Fällen lässt sich auch bei nichtleerem Γ auf dem Deduktionsweg von Γ, $B \rightarrow C$ zu $\Gamma \rightarrow B \supset C$ eine Situation herstellen, bei der GR4 anwendbar wird. Man lasse, z. B. (es ist das einfachste Beispiel), Γ nur die Satzformel $D \supset D$ umfassen.}

Sehr wohl aber lässt sich in **Gamma** beweisen:

GRT1: $\wedge(\Gamma^*) \rightarrow C \Leftrightarrow \rightarrow \wedge(\Gamma^*) \supset C$, wobei $\wedge(\Gamma^*)$ diejenige Satzformel ist, die aus der *nichtleeren* (eventuell nur eingliedrigen) Folge von Satzformeln Γ^* in der Weise hervorgeht, die im Kapitel 1 im Anschluss an RT15a und RT15b (und auch schon in den Beweisen dieser Gesetze) beschrieben wird.[40]

1. $\wedge(\Gamma^*) \rightarrow C \Rightarrow \rightarrow \wedge(\Gamma^*) \supset C$	GR4-Einsetzungsfall {damit bewiesen: die 1. Hälfte von GRT1}
2. $\rightarrow \wedge(\Gamma^*) \supset C$	Annahme
3. $\wedge(\Gamma^*), \wedge(\Gamma^*) \supset C \rightarrow C$	GA2a
4. $\wedge(\Gamma^*) \rightarrow \wedge(\Gamma^*) \supset C$	R2[41] (2)
5. $\wedge(\Gamma^*) \rightarrow C$	R3 (3, 4)

Der Kalkül **Gamma** ist nun zwar deduktionsschwächer als der Kalkül **Alpha** (woran auch das im weiteren Verlauf zu **Gamma** noch axiomatisch Hinzugefügte nichts ändern wird), ist doch GR4 deduktionsschwächer als R4. Andererseits lässt sich aber *die gesamte* **Alpha**-*Logik* in der **Gamma**-Logik *abbilden*, unter Verwendung der folgenden Definition:

GD1 $\sigma > \sigma' =_{Def} \neg\sigma \vee \sigma'$,

und bei *Repräsentation* von „$\supset$" (so, wie es in **Alpha** gedeutet wird, nämlich als sogenannte *materiale Implikation*) durch „>" (so, wie es durch GD1 definiert wird). Dazu muss man nur zeigen:

[40] Demnach ist $\wedge(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ bei $n = 1$: σ_1; bei $n = 2$: $\sigma_1 \wedge \sigma_2$; bei $n = 3$: $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3)$: bei $n = 4$: $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4))$; bei $n = 5$: $\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge (\sigma_4 \wedge \sigma_5)))$; … .

[41] Da **Gamma** mit **Alpha** in axiomatischer Hinsicht identisch ist bis auf die Grundprinzipien, die „$\supset$" betreffen, entfällt für diejenigen Grundprinzipien von **Gamma**, die nicht Grundprinzipien von **Gamma** für „$\supset$" sind, die Kennzeichnung mit „G".

GT1: A, A > B → B — *Die A2-Analogie für* **Gamma**

1. ¬A ∨ B, ¬¬A → B	T12[42] {*Exklusionsprinzip*: EP}
2. A → ¬¬A	T3
3. A, ¬A ∨ B → ¬¬A	R2 (2)
4. A, ¬A ∨ B, ¬¬A → B	R2, R1 (1)
5. A, ¬A ∨ B → B	R3 (4, 3)
6. A, A > B → B	GD1 (5)

GRT2: Γ, A → B ⇒ Γ → A > B — *Die R4-Analogie für* **Gamma**

1. Γ, A → B	Annahme
2. Γ, B → ¬A ∨ B	A4,[43] R2, R1
3. Γ, A → ¬A ∨ B	RT7 {*Kettenschlussgesetz*: KSG} (1, 2)
4. Γ, ¬A → ¬A ∨ B	A4, R2, R1
5. Γ → ¬A ∨ B	R5 (3, 4)
6. Γ → A > B	GD1 (5)

Die Abbildung der **Alpha**-Logik in der **Gamma**-Logik verläuft dann so,

dass (1.) **Alpha**-Beweise, *die weder* A2 *noch* R4 *involvieren* [sei es direkt, oder sei es *indirekt*: sofern nämlich in ihnen Prinzipien beweisabkürzend zur Anwendung kommen, deren Beweise ihrerseits A2 oder R4 direkt oder indirekt involvieren], als **Gamma**-Beweise übernommen werden, und zwar so, dass die bewiesenen Prinzipien in **Alpha** und **Gamma** dieselben Namen tragen;

dass (2.) **Alpha**-Beweise, *die* A2 *oder* R4 *(oder beide) involvieren*, in ihrer gesamten jeweiligen Ableitungsgeschichte (inklusive der Ableitungsgeschichten der Beweise von in ihnen eventuell verwendeten anderweitig bewiesenen Prinzipien, *sofern* die Beweise dieser letzteren A2 oder R4 involvieren) in **Gamma**-Beweise umgeschrieben werden, und zwar wird dabei jedes Vorkommnis von „⊃“ durch ein Vorkommnis von „>“ ersetzt, und jede Berufung

[42] Wird beim Beweis einer Schlussformel oder Schlussregelformel in **Alpha** R4 und A2 nicht verwendet (auch nicht indirekt, etwa beim vorausgehenden Beweis eines im aktuellen Beweis hilfsweise verwendeten Prinzips), so ist jene Schlussformel oder Schlussregelformel auch in **Gamma** beweisbar und ihre Listenbezeichnung ist genau dieselbe wie die schon für **Alpha** gegebene („T…“ bzw. „RT…, wo für „…“ ein mit arabischen Ziffern geschriebenes Numerale zu setzen ist).

[43] Man beachte die vorletzte Fußnote.

auf A2 wird ersetzt durch eine Berufung auf *die A2-Analogie für* **Gamma** (also auf GT1), jede Berufung auf R4 durch eine Berufung auf *die R4-Analogie für* **Gamma** (also auf GRT2);
dass (3.) die *in dieser Weise* gewonnenen Theoreme und echtabgeleiteten Schlussregelformeln [bzw. Schemata von solchen] von **Gamma** werden mit denselben Listenbezeichnungen und inhaltlichen Kennzeichnungen benannt wie ihre Originale aufseiten von **Alpha**; z. B. hat $\rightarrow$ A > $\neg\neg$A aufseiten von **Gamma** dieselbe Listenbezeichnung wie $\rightarrow$ A $\supset$ $\neg\neg$A aufseiten von **Alpha**, nämlich „T3“, und auch die inhaltliche Kennzeichnung ist dieselbe, nämlich „IDN“ – „*Introductio duplicis negationis*“. [Dasselbe gilt schon gemäß (1.) für die 1. Hälfte von T3: für A $\rightarrow$ $\neg\neg$A.]

Wenn GD1 nach **Alpha** übernommen wird – was jederzeit getätigt werden kann und hiermit auch wirklich getätigt sei –, dort nun „D1“ heißt, so ist in **Alpha** beweisbar: A $\supset$ B $\leftrightarrow$ A > B [wegen T8 und D1]; welches Letztere nun allerdings in **Gamma** *nicht* beweisbar ist. Beweisbar ist in **Gamma** nur dies:

<u>GT2: A $\supset$ B $\rightarrow$ A > B</u>

1. A, A $\supset$ B $\rightarrow$ B	GA2a
2. B $\rightarrow$ $\neg$A $\vee$ B	A4
3. A, A $\supset$ B, B $\rightarrow$ $\neg$A $\vee$ B	R2, R1 (2)
4. A, A $\supset$ B $\rightarrow$ $\neg$A $\vee$ B	R3 (3, 1)
5. A $\supset$ B, A $\rightarrow$ $\neg$A $\vee$ B	R1 (4)
6. $\neg$A $\rightarrow$ $\neg$A $\vee$ B	A4
7. A $\supset$ B, $\neg$A $\rightarrow$ $\neg$A $\vee$ B	R2, R1 (6)
8. A $\supset$ B $\rightarrow$ $\neg$A $\vee$ B	R5 (5, 7)
9. A $\supset$ B $\rightarrow$ A > B	GD1 (8)

Es ist lehrreich, den Versuch zu unternehmen, auch A > B $\rightarrow$ A $\supset$ B in **Gamma** zu beweisen:

1. $\neg$A, A $\rightarrow$ B	A3, R1
2. B, A $\rightarrow$ B	A1, R2.

Ja, und nun müsste man R4 jedenfalls für *zweigliedrige* Satzformelfolgen vor „$\rightarrow$“ [im vorliegenden Fall: *eingliedriges* Γ, bloß aus „$\neg$A“ bzw. „B“ bestehend, *plus* „A“][44] zur Verfügung haben, um wie folgt fortfahren zu können:

3. $\neg A \rightarrow A \supset B$ R4 (1)

4. $B \rightarrow A \supset B$ R4 (2).

Und dann könnte man mit R6 und GD1 vollenden:

5. $\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$ R6 (3, 4)

6. $A > B \rightarrow A \supset B$ GD1 (5).

Aber R4 hat man in **Gamma** nun eben nicht zur Verfügung, nicht einmal für zweigliedrige Satzformelfolgen vor „$\rightarrow$“, sondern nur GR4, mit anderen Worten: R4 eingeschränkt auf *eingliedrige* Satzformelfolgen vor „$\rightarrow$“ [die, weil eingliedrig, gar keine echten Satzformelfolgen mehr sind; Γ, übrigens, wenn man es unnötiger- und irreführenderweise in GR4 hineinschriebe, müsste da als *stets leer* festgelegt werden].

Nachdem nun sichtlich ist, dass in **Gamma** eine *starke* (oder *strikte*) Implikation (ausgedrückt durch „$\supset$“) von der materialen Implikation (ausgedrückt durch „>“) unterschieden ist, ist es ein Leichtes, mithilfe jener starken Implikation in **Gamma** – also innerhalb eines Rahmens, der abgesehen von der Abschwächung von R4 auf GR4 und der noch nicht vollendeten Verstärkung von A2 auf GA2a,b,… gänzlich klassisch ist – *alethische Modaloperatoren* zu definieren:

GD2 $\Box\sigma =_{Def} \neg\sigma \supset \sigma$

GD3 $\Diamond\sigma =_{Def} \neg\Box\neg\sigma$ {m. a. W. gemäß GD2: $\neg(\neg\neg\sigma \supset \neg\sigma)$}

Die Darstellungen *als Schlussformeln* der als Satzformeln formulierten *alethisch-modalen* Axiome und die Darstellung *als Schlussregelformel* des als Satzregelformel formulierten *alethisch-modalen* axiomatischen Regelgesetzes des vertrauten Basiskalküls der alethischen

[44] Jede Satzformelfolge ist auffassbar auch als eine Folge von Satzformelvorkommnissen, und jede Folge von Satzformelvorkommnissen ist auffassbar auch als eine Folge von Satzformeln: Beispielsweise A, B, A ist auffassbar als eine dreigliedrige Folge von Satzformeln, in der an erster Stelle „A“ steht, an zweiter „B“, an dritter wiederum „A“; A, B, A ist aber auch auffassbar als eine dreigliedrige Folge von Satzformelvorkommnissen, in der an erster Stelle ein Vorkommnis von „A“ steht, an zweiter Stelle ein Vorkommnis von „B“, an dritter Stelle ein *anderes* Vorkommnis von „A“.

Modallogik, des Satzformelkalküls [„Satzkalküls“] **T**, sind dann die folgenden in **Gamma** beweisbaren Prinzipien:

GT3: $\Box A \rightarrow A; \rightarrow \Box A > A$ *Abbau der Notwendigkeit* (ABN)

1. $\neg A \supset A \rightarrow \neg A > A$	GT2
2. $\neg\neg A \rightarrow A$	T2
3. $A \rightarrow A$	A1
4. $\neg\neg A \vee A \rightarrow A$	R6 (2, 3)
5. $\neg A > A \rightarrow A$	GD1 (4)
6. $\neg A \supset A \rightarrow A$	RT7 (1, 5)]
7. $\Box A \rightarrow A$	GD2 (6)
8. $\rightarrow \Box A > A$	GRT2 (7)

{Mit dem Einsetzungsfall $\Box\neg A \rightarrow \neg A$ von GT3, mit RT4 und GD3 beweist man leicht: $A \rightarrow \Diamond A$.}

GRT3: $\rightarrow C \Rightarrow \rightarrow \Box C$ *Aufbau der Notwendigkeit* (AUN)

1. $\rightarrow C$	Annahme
2. $\neg C \rightarrow C$	R2 (1)
3. $\rightarrow \neg C \supset C$	GR4 (2)
4. $\rightarrow \Box C$	GD2 (3)

{In **Gamma** ist hingegen nicht beweisbar: $C \rightarrow \Box C$, oder mit anderen Worten wegen GD2: $C \rightarrow \neg C \supset C$. Denn obwohl man mit A3 hat: $C, \neg C \rightarrow C$, geht von da kein Schritt in **Gamma** weiter, da in **Gamma** R4 nicht zur Verfügung steht, sondern nur GR4. Ebenso ist in **Gamma** nicht beweisbar: $\rightarrow C > \Box C$, denn dazu käme man nur über einen Beweis für $C \rightarrow \Box C$ (und der Anwendung von GRT2 im nächsten Schritt). Eine Trivialisierung der alethischen Modallogik findet also in **Gamma** nicht statt.}

GT4: $\Box(A > B), \Box A \rightarrow \Box B; \rightarrow \Box(A > B) > (\Box A > \Box B)$ *Principium necessitatis* (PN)

1. $\neg A \supset A, \neg(\neg A \vee B) \supset \neg A \vee B \rightarrow \neg B \supset B$	GA2b
2. $\Box A, \Box(A > B) \rightarrow \Box B$	GD1, GD2 (1)
3. $\Box(A > B), \Box A \rightarrow \Box B$	R1 (2)
4. $\rightarrow \Box(A > B) > (\Box A > \Box B)$	GRT2 (3), 2x

{Mit ABN, PN und AUN sind die *alethisch-modalen* Grundprinzipien (*hinzukommen* müssen noch geeignete *wahrheitsfunktionale* Grundprinzipien) des Basiskalküls **T** der alethischen Modallogik – Grundprinzipien, die in der dem *Satzformel*kalkül **T** gemäßen Weise formuliert sind – *repräsentiert, dargestellt* als echtabgeleitete Prinzipien des alethisch-modalen *Schlussformel*kalküls **Gamma** – in der Formulierungsweise, die diesem letzteren Kalkül gemäß ist.}

Von besonderer Nützlichkeit ist, des Weiteren, das folgende Regelgesetz:

GRT4: $A \rightarrow B \Rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$	*Bedingter Aufbau der Notwendigkeit* (BAUN)
1. $A \rightarrow B$	Annahme
2. $\rightarrow A > B$	GRT2 (1)
3. $\rightarrow \Box(A > B)$	GRT3 (2)
4. $\Box A, \Box(A > B) \rightarrow \Box B$	bewiesen im Beweis von GT4 (2. Zeile)
5. $\Box A \rightarrow \Box(A > B)$	R2 (3)
6. $\Box A \rightarrow \Box B$	R3 (4, 5)

{In **T** entspricht GRT4 die echtableitbare Satzregelformel $A > B \Rightarrow \Box A > \Box B$; wobei freilich bei den üblichen Formulierungen von **T** „$\supset$“ oder „$\rightarrow$“ statt „>“ verwendet wird. Dadurch darf man sich nicht verwirren lassen, denn *gemeint* ist *dort* (in den üblichen Formulierungen) mit „$\supset$“ oder „$\rightarrow$“ dasselbe, was *hier* mit „>“ gemeint ist: *die materiale Implikation*. Man beachte auch, dass statt des objektsprachlichen „$\Rightarrow$“ üblicherweise das metasprachliche „$\vdash$“ verwendet wird. *Sodass* dann also das GRT4 entsprechende Regelgesetz von **T** wie folgt aussehen mag: $A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow \Box B$, oder auch wie folgt (wenn zudem für die unstrukturierten und sinnunbestimmten Satzformeln andere Symbole als *hier* gebraucht werden, nämlich weithin übliche): $p \supset q \vdash \Box p \supset \Box q$.}

In der alethischen Modallogik spielen Prinzipien (gewöhnlich formuliert in einem Satzformelkalkül) eine große Rolle, die eine Kürzung von Modalitätensequenzen (unter Wahrung logischer – deduktiver – Äquivalenz) erlauben; solche sind – in der für **Gamma** passendsten Darstellung – vor allem: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ (*S4-Axiom*), $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ (*S5-Axiom*), $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$ (*Brouwersches Axiom*). [Mit „das S4-Axiom“, „das S5-Axiom“ und „das Brouwersche Axiom“ sind im Kontrast zu den sowohl artikelfreien wie kursivierten Benennungen „*S4-Axiom*“, „*S5-Axiom*“, „*Brouwersches Axiom*“ nicht Schlussformeln, sondern Satz-

formeln gemeint: die den eben angeführten Schlussformeln entsprechenden Satzformeln.] Und wichtiger noch als die Sequenz(kürzungs)prinzipien sind die folgenden beiden „zweiseitigen“ Schlussformeln [also: je eine Schlussformel *plus* ihre Umkehrung] *als Prinzipien*: ❒A ↔ ¬◊¬A und ◊A ↔ ¬❒¬A, durch welche die Interdefinierbarkeit von ❒ und ◊ zum Ausdruck gebracht wird (die im Prinzip besteht, obwohl in **Gamma** nun eben ◊ durch ❒, und nicht ❒ durch ◊ definiert ist). Wie steht es mit *der Herleitung* all dieser Prinzipien in **Gamma**? Zudem, *last but not least*, hätte man in **Gamma** gerne auch das Folgende als herleitbares Prinzip: A ⊃ B ↔ ❒(A > B).

GT5: ◊A ↔ ¬❒¬A — ◊-*per*-❒-*Prinzip*

1. ◊A → ◊A — A1
2. ◊A → ¬❒¬A — GD3 (1)
3. ¬❒¬A → ◊A — GD3 (1)
4. ◊A ↔ ¬❒¬A — DEF↔ (2, 3)

GT6: ❒A ↔ ¬◊¬A — ❒-*per*-◊-*Prinzip*

1. ¬◊¬A → ¬◊¬A — A1
2. ¬◊¬A → ¬¬❒¬¬A — GD3 (1)
3. ¬¬❒¬¬A → ❒¬¬A — T2 {gemeint ist: Einsetzungsfall der 1. Hälfte der **Gamma**-Kopie von T2}
4. ¬◊¬A → ❒¬¬A — RT7 (2, 3)
5. ¬¬A → A — T2 {gemeint ist: die 1. Hälfte der **Gamma**-Kopie von T2}
6. → ¬¬A > A — GRT2 (5)
7. → ❒(¬¬A > A) — GRT3 (6)
8. ❒(¬¬A > A), ❒¬¬A → ❒A — GT4
9. ❒¬¬A, ❒(¬¬A > A) → ❒A — R1 (8)
10. ❒¬¬A → ❒(¬¬A > A) — R2 (7)
11. ❒¬¬A → ❒A — R3 (9, 10)
12. ¬◊¬A → ❒A — RT7 (4, 11) {die eine Hälfte von GT6 ist erreicht}
13. ¬¬❒¬¬A → ¬◊¬A — GD3 (1)
14. ❒¬¬A → ¬¬❒¬¬A — T3 {gemeint ist: Einsetzungsfall der 1. Hälfte der **Gamma**-Kopie von T3}

15. $\Box\neg\neg A \rightarrow \neg\Diamond\neg A$ RT7 (14, 13)

16. $A \rightarrow \neg\neg A$ T3 {gemeint ist: die 1. Hälfte der **Gamma**-Kopie von T3}

17. $\rightarrow A > \neg\neg A$ GRT2 (16)

18. $\rightarrow \Box(A > \neg\neg A)$ GRT3 (17)

19. $\Box(A > \neg\neg A), \Box A \rightarrow \Box\neg\neg A$ GT4

20. $\Box A, \Box(A > \neg\neg A) \rightarrow \Box\neg\neg A$ R1 (19)

21. $\Box A \rightarrow \Box(A > \neg\neg A)$ R2 (18)

22. $\Box A \rightarrow \Box\neg\neg A$ R3 (20, 21)

23. $\Box A \rightarrow \neg\Diamond\neg A$ RT7 (22, 15) {die andere Hälfte von GT6 ist erreicht}

{Zum besseren Verständnis der Kommentierung der Zeilen 3 und 5 (und, *mutatis mutandis*, der Zeilen 14 und 16) sei gesagt:

T2 ist dies: $\neg\neg A \rightarrow A; \rightarrow \neg\neg A \supset A$; die **Gamma**-Kopie von T2 ist hingegen dies: $\neg\neg A \rightarrow A; \rightarrow \neg\neg A > A$. Auf die **Gamma**-Kopie von T2 wird – nach den getroffenen Festlegungen zur Abbildung der **Alpha**-Logik in der **Gamma**-Logik – bei der Kommentierung von Beweisen in **Gamma** schlicht mit der **Alpha**-Bezeichnung „T2" verwiesen, obwohl doch nur die erste Hälfte von T2 und die erste Hälfte der **Gamma**-Kopie von T2 semantisch *und* typographisch identisch sind, hingegen die zweite Hälfte von T2 [das, was nach dem Strichpunkt folgt] und die zweite Hälfte der **Gamma**-Kopie von T2 [das, was dort nach dem Strichpunkt folgt] zwar semantisch identisch sind, aber (offensichtlich) nicht auch typographisch. Steht in einem **Gamma**-Beweis in einer Zeile $\rightarrow \neg\neg A > A$, so wäre die Kommentierung ebenfalls: „T2", und man könnte erläuternd hinzusetzen: „{gemeint ist: die 2. Hälfte der **Gamma**-Kopie von T2}". Steht hingegen in einem **Gamma**-Beweis in einer Zeile $\rightarrow \neg\neg A \supset A$, so hätte diese Formel *nicht* denselben Sinn, den sie in **Alpha** hat, also nicht denselben Sinn, den $\rightarrow \neg\neg A > A$ in **Gamma** (und auch in **Alpha**) hat, und die Kommentierung dürfte *auf keinen Fall* wie bei einem **Alpha**-Beweis „T2" lauten. (Es handelt sich aber sehr wohl auch bei $\rightarrow \neg\neg A \supset A$ um eine Schlussformel, die in **Gamma** beweisbar ist: man wende GR4 auf $\neg\neg A \rightarrow A$ an.)}

Auf der Grundlage des S5-Axioms – dem *kennzeichnenden* Axiom des Satzformelkalküls **S5** [**T** + das S5-Axiom] – ist bekanntlich in **S5** sowohl das S4-Axiom – das kennzeichnende Axiom des Satzformelkalküls **S4** [**T** + das S4-Axiom] – als auch das Brouwersche Axiom – das kennzeichnende Axiom des Satzformelkalküls **B** [**T** + das Brouwersche Axiom] – herleitbar; umgekehrt ist das S5-Axiom auf der Grundlage des S4-Axioms und des Brouwerschen Axioms in der Vereinigung von **S4** und **B** herleitbar (welche Vereinigung sowohl als „**S4** + das Brouwersche Axiom" als auch als „**B** + das S4-Axiom" bezeichenbar ist). Nachvollziehen wir all dies in einem jeweils passenden Schlussformelkalkül, indem wir den Kalkül **Gamma**, der noch im

Wachsen begriffen ist, *rein hypothetisch* um *S5-Axiom* bzw. um *S4-Axiom + Brouwersches Axiom* ein Stück weiter komplettieren über den Punkt hinaus, bis zu dem **Gamma** jetzt schon *kategorisch* feststeht:

(G*S5*)T1: $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$	*Brouwersches Axiom*
1. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	*S5-Axiom*
2. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$	RT5 {LKP} (1)
3. $\Box A \rightarrow A$	GT3
4. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$	RT7 (2, 3)

(G*S5*)T2: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$	*S4-Axiom*
1. $\Box\neg\Box A \rightarrow \neg\Box A$	GT3
2. $\Box A \rightarrow \neg\Box\neg\Box A$	RT4 {RKP} (1)
3. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	*S5-Axiom*
4. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$	RT5 (3)
5. $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\Box A$	GRT4 (4)
6. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box A$	*S5-Axiom* {Einsetzungsfall: „$\neg\Box A$“ für „A“}
7. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\Box A$	RT7 (6, 5)
8. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$	RT7 (2, 7)

(G*S4+B*)T1: $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	*S5-Axiom*
1. $\neg\Box\neg\Box\Box A \rightarrow \Box A$	*Brouwersches Axiom* {Einsetzungsfall: „$\Box A$“ für „A“}
2. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\Box A$	RT5 (1)
3. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$	*S4-Axiom*
4. $\neg\Box\Box A \rightarrow \neg\Box A$	RT3 {AUKP} (3)
5. $\Box\neg\Box\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	GRT4 (4)
6. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	RT7 (2, 5)

Nun drückt „$\supset$“, weil es in **Gamma** eine *strikte* (oder *starke*) Implikation ausdrückt, in **Gamma** ein notwendigerweise bestehendes oder notwendigerweise nichtbestehendes Be-

dingungsverhältnis aus. Zu den Axiomen von **Gamma** wird deshalb – nun nicht *rein hypothetisch*, sondern *kategorisch* – hinzugenommen:

GA2c (i) $B \supset C \rightarrow \neg(B \supset C) \supset (B \supset C)$; (ii) $\neg(B \supset C) \rightarrow \neg\neg(B \supset C) \supset \neg(B \supset C)$,[45]
oder unter Anwendung von GD2 geschrieben:
GA2c (i) $B \supset C \rightarrow \Box(B \supset C)$; (ii) $\neg(B \supset C) \rightarrow \Box\neg(B \supset C)$.

GA2c hat sofort zwei interessante Konsequenzen:

GT7: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ *S4-Axiom*

1. $\neg A \supset A \rightarrow \Box(\neg A \supset A)$ GA2c {Einsetzungsfall von GA2c(i): der ersten Hälfte von GA2c}
2. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ GD2 (1)

GT8: $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ *S5-Axiom*

1. $\neg(\neg A \supset A) \rightarrow \Box\neg(\neg A \supset A)$ GA2c {Einsetzungsfall von GA2c(ii): der zweiten Hälfte von GA2c}
2. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ GD2 (1)

Da vor der Aufstellung von GA2c im *rein hypothetisch* um *S5-Axiom (als Grundprinzip)* ein Stück weiter komplettierten **Gamma**-Kalkül *S4-Axiom* herleitbar ist [siehe (G*S5*)T2], liegt der Gedanke nahe, *dass* GA2c(i) – mit welchem Prinzip im durch GA2c *kategorisch* ein Stück weiter (aber immer noch nicht gänzlich) komplettierten **Gamma**-Kalkül *S4-Axiom* ebenfalls gewonnen werden kann [siehe GT7], und zwar ohne dass dazu das ganze GA2c vonnöten ist – *womöglich aus* GA2c(ii) *herleitbar ist*, mit welchem letzteren Prinzip seinerseits im durch GA2c kategorisch ein Stück weiter komplettierten Kalkül *S5-Axiom* gewonnen werden kann [siehe GT8], ohne dass dazu das ganze GA2c vonnöten ist. Besteht – im Restkalkül bei gegenwärtigem Stand von **Gamma**: im Kalkül ohne GA2c(i), aber mit GA2c(ii), und *ceteris paribus* – jenes eventuelle, angedachte Herleitungsverhältnis tatsächlich?[46] Zunächst ist festzuhalten:

[45] In **Alpha** sind beide Schlussformeln aufgrund von A3 und R4 beweisbar (oder auch aufgrund von A1, R2 und R4) – natürlich in ihrer **Alpha**-Deutung.
[46] Mit anderen Worten: Verhält sich GA2c(ii) (plus *Basis*-**Gamma**) zu GA2c(i) so, wie sich *S5-Axiom* (plus *Basis*-**Gamma**) zu *S4-Axiom* verhält? – angesichts dessen, dass sich mit *S5-Axiom* (plus *Basis*-**Gamma**) *S4-Axiom*

GT9: $A \supset B \leftrightarrow \Diamond(A \supset B)$

1. $\neg(A \supset B) \rightarrow \Box\neg(A \supset B)$	GA2c(ii)
2. $\Box\neg(A \supset B) \rightarrow \neg(A \supset B)$	GT3
3. $A \supset B \rightarrow \neg\Box\neg(A \supset B)$	RT4 (2)
4. $A \supset B \rightarrow \Diamond(A \supset B)$	GD3 (3)
5. $\neg\Box\neg(A \supset B) \rightarrow A \supset B$	RT5 (1)
6. $\Diamond(A \supset B) \rightarrow A \supset B$	GD3 (5)
7. $A \supset B \leftrightarrow \Diamond(A \supset B)$	DEF↔ (4, 6)

Wenn nun die Schlussregelformel

$\Diamond A \rightarrow A \Rightarrow A \rightarrow \Box A$,

deren logische Validität intuitiv höchst plausibel ist, als Regelgesetz in **Gamma** zur Verfügung stünde, so könnte man wegen GT9 die erste Hälfte von GA2c – GA2c(i) – mithilfe der zweiten – GA2c(ii) – bereits folgern und bräuchte sie nicht zu postulieren:

1. $\Diamond(B \supset C) \rightarrow B \supset C$	GT9 {für dessen Beweis nur GA2c(ii), nicht auch GA2c(i) verwendet wird; siehe oben}
2. $B \supset C \rightarrow \Box(B \supset C)$	mit dem in Auge gefassten Regelgesetz aus 1.

Und tatsächlich lässt sich die fragliche Schlussregelformel in **Gamma** beweisen (als Einsetzungsfall einer allgemeineren), wobei eine herleitungsmäßige Abhängigkeit nur zur zweiten Hälfte von GA2c besteht, *keine* zur ersten Hälfte:

GRT5: $\Diamond A \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow \Box B$	{wovon $\Diamond A \rightarrow A \Rightarrow A \rightarrow \Box A$ ein Einsetzungsfall ist}
1. $\Diamond A \rightarrow B$	Annahme
2. $\Box\Diamond A \rightarrow \Box B$	GRT4 (1)

ergibt, zudem mit GA2c(ii) (plus *Basis*-**Gamma**) *S5-Axiom* und mit GA2c(i) (plus *Basis*-**Gamma**) *S4-Axiom*. Ergibt sich mit GA2c(ii) (plus *Basis*-**Gamma**) GA2c(i)? Es könnte so sein. Ist es tatsächlich so?

3. $\neg\Box\neg A \rightarrow \Box\neg\Box\neg A$ GT8 {nicht abhängig von GA2c(i), sondern nur von GA2c(ii); „¬A“ für „A“}

4. $\neg\Box\neg\Box\neg A \rightarrow \neg A$ aus 3. wie im Beweis von (G*S5*)T1 {dabei einsetzungsfallbildend „¬A“ für „A“}

5. $A \rightarrow \Box\neg\Box\neg A$ RT6 {ABKP} (4)

6. $A \rightarrow \Box\Diamond A$ GD3 (5)

7. $A \rightarrow \Box B$ RT7 (6, 2)

Damit ist nun gezeigt (angesichts des zuvor Gesagten), dass die erste Hälfte von GA2c tatsächlich als Axiom entbehrlich ist. Wir können sie als Theorem von **Gamma** führen:

<u>GT10: $A \supset B \rightarrow \Box(A \supset B)$</u>

1. $\Diamond(A \supset B) \rightarrow A \supset B$ GT9

2. $A \supset B \rightarrow \Box(A \supset B)$ GRT5 (1)

Wie steht es schließlich mit der Beweisbarkeit in **Gamma** von $A \supset B \leftrightarrow \Box(A > B)$ [als positives Gegenstück zur Nichtbeweisbarkeit von $A \supset B \leftrightarrow A > B$ in **Gamma**; *in* **Alpha** – mit **Alpha**-Deutung – sind natürlich beide Schlussformelpaare – *sowohl* $A \supset B \rightarrow \Box(A > B)$ / $\Box(A > B) \rightarrow A \supset B$ *als auch* $A \supset B \rightarrow A > B$ / $A > B \rightarrow A \supset B$ – beweisbar]? $A \supset B \leftrightarrow \Box(A > B)$ möchte man selbstverständlich gerne als Prinzip in **Gamma** haben; denn mit **Gamma**-logisch validem / **Gamma**-beweisbarem $A \supset B \leftrightarrow \Box(A > B)$ ist in der hier verwendeten Notation das Verhältnis der in **Gamma** *intendierten, ausgezeichneten* strikten (oder starken) Implikation zur materialen Implikation zu charakterisieren. Beweisbar in **Gamma** ist nun bereits:

<u>GT11: $A \supset B \rightarrow \Box(A > B)$</u>

1. $A \supset B \rightarrow A > B$ GT2

2. $\Box(A \supset B) \rightarrow \Box(A > B)$ GRT4 (1)

3. $A \supset B \rightarrow \Box(A \supset B)$ GT10 {GA2c(i), später Axiom von **Gamma***: als G*A2c}

4. $A \supset B \rightarrow \Box(A > B)$ RT7 (3, 2)

Aber die Umkehrung von GT11 ist schwerlich schon beweisbar; sie wird man als weiteres **Gamma**-Axiom (genauer: als Einsetzungsfall eines weiteren **Gamma**-Axioms) postulieren müssen:

GA2d $\neg(\neg B \vee C) \supset \neg B \vee C \rightarrow B \supset C$,[47]

oder unter Anwendung von GD1 und GD2 geschrieben:

GA2d $\square(B > C) \rightarrow B \supset C$.

{Mit GA2d ist allerdings *viel* gesagt; denn tatsächlich wird GR4 als axiomatisches Regelgesetz bei GA2d als Axiom *beinahe* überflüssig:

1. $B \rightarrow C$ Annahme
2. $\rightarrow B > C$ GRT2 (1)
3. $\rightarrow \square(B > C)$ GRT3 (2) [AUN]
4. $\square(B > C) \rightarrow B \supset C$ GA2d
5. $\rightarrow B \supset C$ R3 (4, 3).

Zum Glück für die „axiomatischen Ehren" der Schlussregelformel, die hier und jetzt GR4 ist, wird diese Schlussregelformel im Beweis von GRT3 (siehe dort) unverzichtbar verwendet. Aber in Gegenwart von GA2d könnte AUN – also die Schlussregelformel, die hier und jetzt GRT3 ist – *deduktiv äquivalent* an die axiomatische Stelle eben jener Schlussregelformel treten (und dann anstelle von ihr mit „GR4" bezeichnet werden).}

Zusammenfassend ist also zu sagen: Ersetzt man in **Alpha**

A2	$B, B \supset C \rightarrow C$	*Modus ponens* (MP)
R4	$\Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow B \supset C$	*Deduktionsprinzip* (DP)

durch

GA2a $B, B \supset C \rightarrow C$

GA2b $\neg B \supset B, \neg(\neg B \vee C) \supset \neg B \vee C \rightarrow \neg C \supset C$

GA2c $\neg(B \supset C) \rightarrow \neg\neg(B \supset C) \supset \neg(B \supset C)$ {GA2c *ohne* seine ursprüngliche 1. Hälfte: *ohne* GA2c(i)}

GA2d $\neg(\neg B \vee C) \supset \neg B \vee C \rightarrow B \supset C$

GR4 $B \rightarrow C \Rightarrow \rightarrow B \supset C$

[47] In **Alpha** ist diese Schlussformel [mit **Alpha**-Deutung] beweisbar.

und fügt die Definitionen

GD1 $\sigma > \sigma' =_{Def} \neg\sigma \vee \sigma'$ {ohne echte Hinzufügung wird hier nur der Name „D1“ durch „GD1“ ersetzt}

GD2 $\Box\sigma =_{Def} \neg\sigma \supset \sigma$

GD3 $\Diamond\sigma =_{Def} \neg\Box\neg\sigma$

hinzu und lässt alles Übrige von **Alpha** gleich, so geht der Kalkül **Gamma** hervor. Bis vor der Aufstellung von GA2d war **Gamma** nicht komplett, sondern wurde nur vom Ausgangspunkt aus – *Rest*-**Alpha** [hier: **Alpha** schlicht ohne A2 und R4] + GA2a + GA2b + GR4 – immer *weiter komplettiert*; nun aber *ist* der Kalkül *komplett*. **Gamma** enthält die komplette S5-modale Aussagenlogik samt der zugehörigen Logik der strikten Implikation als necessitierte materiale Implikation. *Nota bene*: Es war zur Bildung von **Gamma** nicht nötig, die Formelsprache *Sigma* um einen Grundausdruck zu erweitern.

Einen Kalkül, der die komplette S4-modale Aussagenlogik samt der zugehörigen Logik der strikten Implikation als necessitierte materiale Implikation enthält, erhält man hingegen, wenn man wie eben angegeben verfährt, aber bei GA2c von seiner ursprünglich angegebenen Gestalt nicht die zweite Hälfte (wie in **Gamma**), sondern *die erste* stehen lässt, also $B \supset C \rightarrow \neg(B \supset C) \supset (B \supset C)$ an die Stelle von $\neg(B \supset C) \rightarrow \neg\neg(B \supset C) \supset \neg(B \supset C)$ setzt. Alles übrige Axiomatische ist ganz wie bei **Gamma** – mit Ausnahme nur der Listenbezeichnung des *einen* Axioms, das, wie eben beschrieben, ein *einziges* Axiom von **Gamma** ersetzt: Wo **Gamma** in der Bezeichnung dieses letzteren, *ersetzten* Axioms „G“ hat (da damit ein Axiom von **Gamma** bezeichnet wird), ist nun in der Bezeichnung jenes *ersetzenden*, neuen Axioms „G*“ zu setzen; „GA2c“ geht da also über in „G*A2c“, denn der Kalkül, der wie gerade beschrieben gegenüber **Gamma** abgewandelt ist, ist nun eben **Gamma***.

Man beachte (es ist besonders wichtig): In **Gamma** (und **Gamma***, wie auch, natürlich, in **Alpha**) ist das folgende Regelgesetz [„zwei Regelgesetze in einem“] beweisbar: $B \rightarrow C \Leftrightarrow \rightarrow B \supset C$, *und* das folgende: $B \rightarrow C \Leftrightarrow \rightarrow B > C$ [mit $B > C =_{Def} \neg B \vee C$], woraus unmittelbar das folgende weitere Regelgesetz [„zwei in einem“] hervorgeht: $\rightarrow B \supset C \Leftrightarrow \rightarrow B > C$. Aus diesen *bedingten Ableitbarkeitsgesetzen* (Leseschema: „Wenn diese eine Schlussformel in

Gamma ableitbar [beweisbar] ist, dann auch diese andere“)[48] kann man aber keineswegs (auf keinem Wege) folgern, dass $B \supset C \leftrightarrow B > C$ in **Gamma** ableitbar ist [anders gesagt: *in der Weise der zugehörigen Logik* – der Logik, von der **Gamma** *eine* Formulierung ist – *logisch valide* ist]; vielmehr lässt sich diese letztere zweiseitige Schlussformel [*oder*: lassen sich diese letzteren zwei Schlussformeln] – völlig an den genannten Regelgesetzen vorbei – in **Alpha** beweisen [T8, D1], in **Gamma** aber nur $B \supset C \rightarrow B > C$ [GT2], und $B > C \rightarrow B \supset C$ nun gerade *nicht*.

Hier noch einige echtableitbare Schlussregelformeln sowie Theoreme von **Gamma**, samt ihren Beweisen:

GRT6: $A \rightarrow B \Rightarrow \Diamond A \rightarrow \Diamond B$ — *Bedingter Aufbau der Möglichkeit* (BAUM)[49]

1. $A \rightarrow B$	Annahme
2. $\neg B \rightarrow \neg A$	RT3 (1)
3. $\Box\neg B \rightarrow \Box\neg A$	GRT4 (2)
4. $\neg\Box\neg A \rightarrow \neg\Box\neg B$	RT3 (3)
5. $\Diamond A \rightarrow \Diamond B$	GD3 (4)

GRT7: $A \rightarrow \Box B \Rightarrow \Diamond A \rightarrow B$ — *Die Umkehrung von* GRT5

1. $A \rightarrow \Box B$	Annahme
2. $\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box B$	GRT6 (1)
3. $\neg\Box B \rightarrow \Box\neg\Box B$	GT8 {*S5-Axiom*}
4. $\neg\Box\neg\Box B \rightarrow B$	aus 3. wie im Beweis von (G*S5*)T1 {*Brouwersches Axiom*}
5. $\Diamond\Box B \rightarrow B$	GD3 (4)
6. $\Diamond A \rightarrow B$	RT7 (2, 5)

{Mit GRT7 – ja schon mit seinem Einsetzungsfall $A \rightarrow \Box A \Rightarrow \Diamond A \rightarrow A$ – und *der ersten Hälfte* des *ursprünglichen* GA2c könnte man dessen zweite Hälfte herleiten:

1. $B \supset C \rightarrow \Box(B \supset C)$	Annahme [GA2c(i) in GD3-Formulierung]

[48] *Bedingte Ableitbarkeitsgesetze* sind wie alle Gesetze (im Rahmen der Logik) ausschließlich mit *logischer Validität* befasst; das bedeutet relativ zu **Gamma**: „Wenn diese eine[n] Schlussformel[n] in **Gamma** ableitbar ist [sind], dann ist es auch diese andere“ besagt nichts anderes als „Wenn diese eine[n] Schlussformel[n] in der Weise der Logik, von der **Gamma** eine Formulierung ist, *logisch valide* ist [sind], dann ist es auch diese andere“.
[49] Vgl. GRT4: *Bedingter Aufbau der Notwendigkeit* (BAUN).

2. $\Diamond(B \supset C) \rightarrow B \supset C$ GRT7 (1) [$A \rightarrow \Box A \Rightarrow \Diamond A \rightarrow A$ reicht auch]

3. $\neg\Box\neg(B \supset C) \rightarrow B \supset C$ GD3 (2)

4. $\neg(B \supset C) \rightarrow \Box\neg(B \supset C)$ RT5 (3).

Der Kalkül, der wie **Gamma** ist, aber G*A2c [= GA2c(i)] statt GA2c [was *schlussendlich*, wenn auch nicht *ursprünglich*, GA2c(ii) ist] hat *und* zudem $A \rightarrow \Box A \Rightarrow \Diamond A \rightarrow A$ als weiteres axiomatisches Regelgesetz, ist also mit **Gamma** deduktiv äquivalent; denn es ist ja (was die andere Seite der deduktiven Äquivalenz angeht) nicht nur $A \rightarrow \Box A \Rightarrow \Diamond A \rightarrow A$, sondern auch $B \supset C \rightarrow \Box(B \supset C)$ in **Gamma** beweisbar; siehe GRT7 und GT10. Mit anderen Worten: Der Kalkül, der aus **Gamma*** hervorgeht, wenn **Gamma*** um $A \rightarrow \Box A \Rightarrow \Diamond A \rightarrow A$ axiomatisch ergänzt wird, ist mit **Gamma** deduktiv äquivalent.}

GT12: $\neg A > A \rightarrow A$

1. $\neg A > A, \neg A \rightarrow A$ GT1, R1

2. $\neg A > A, A \rightarrow A$ A1, R2, R1

3. $\neg A > A \rightarrow A$ R5 (2, 1)

GT13: $\neg A \supset A \leftrightarrow \Box(\neg A > A)$

1. $\neg A \supset A \rightarrow \Box(\neg A > A)$ GT11

2. $\Box(\neg A > A) \rightarrow \neg A > A$ GT3

3. $\neg A > A \rightarrow A$ GT12

4. $\Box(\neg A > A) \rightarrow A$ RT7 (2, 3)

5. $\Box\Box(\neg A > A) \rightarrow \Box A$ GRT4 (4)

6. $\Box(\neg A > A) \rightarrow \Box\Box(\neg A > A)$ GT7

7. $\Box(\neg A > A) \rightarrow \Box A$ RT7 (6, 5)

8. $\Box(\neg A > A) \rightarrow \neg A \supset A$ GD2 (7)

9. $\neg A \supset A \leftrightarrow \Box(\neg A > A)$ DEF$\leftrightarrow$ (1, 8)

Das Bemerkenswerte an GT13 ist, dass es ohne Heranziehung von GA2d beweisbar ist (wie vorgeführt). GT11 und GA2d zusammen ergeben hingegen GT14, welches Theorem die Verallgemeinerung von GT13 ist (aus welcher Verallgemeinerung dann wiederum der Inhalt von GT13 unmittelbar gewonnen werden kann: als Einsetzungsfall):

GT14: $A \supset B \leftrightarrow \Box(A > B)$

1. $A \supset B \rightarrow \square(A > B)$ GT11

2. $\square(A > B) \rightarrow A \supset B$ GA2d

3. $A \supset B \leftrightarrow \square(A > B)$ DEF$\leftrightarrow$ (1, 2)

Es folgen zwei in **Gamma** beweisbare Schlussformeln, die nicht nur *als typographisch dieselben* (wie ja jedes Prinzip von **Gamma**), sondern zudem *als semantisch dieselben* auch in **Alpha** beweisbar sind (ihre jeweilige **Alpha**-bezogene Listenbezeichnung wäre nach in **Alpha** durchgeführten Beweisen von ihnen selbstverständlich eine andere als ihre **Gamma**-bezogene):

GT15: $\neg A > \neg B \rightarrow B > A$

1. $\neg\neg A \vee \neg B, \neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$ T12 {$B \vee C, \neg C \rightarrow B$: EP}

2. $\neg\neg A \vee \neg B, B, \neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$ R2, R1 (1)

3. $\neg\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg\neg B$ T3, R2, R1

4. $\neg\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg\neg A$ R3 (2, 3)

5. $\neg\neg A \vee \neg B, B, \neg\neg A \rightarrow A$ T2, R2, R1

6. $\neg\neg A \vee \neg B, B \rightarrow A$ R3 (5, 4)

7. $\neg A > \neg B, B \rightarrow A$ GD1 (6)

8. $\neg A > \neg B \rightarrow B > A$ GRT2 (7)

GT16: $A > B \rightarrow \neg B > \neg A$

1. $\neg A \vee B, \neg B \rightarrow \neg A$ T12

2. $\neg A \vee B \rightarrow \neg B > \neg A$ GRT2 (1)

3. $A > B \rightarrow \neg B > \neg A$ GD1 (2)

{Für die Übersetzung der Beweise von GT15 und GT16 nach **Alpha** braucht man nur zu berücksichtigen, dass die **Gamma**-Definition GD1 in **Alpha** die gleichlautende und gleichbedeutende Definition D1 ist und dass das verwendete in **Gamma** bewiesene Schema für Regelgesetze – mit Bezug auf **Gamma** „GRT2“ geheißen – mit derselben Semantik und derselben Typographie auch in **Alpha** beweisbar ist.}

Aufbauend auf die eben bewiesenen zwei Theoreme geht es weiter mit:

GT17: $\neg A \supset \neg B \rightarrow B \supset A$

1. $\neg A > \neg B \rightarrow B > A$	GT15
2. $\Box(\neg A > \neg B) \rightarrow \Box(B > A)$	GRT4 (1)
3. $\neg A \supset \neg B \rightarrow \Box(\neg A > \neg B)$	GT11
4. $\neg A \supset \neg B \rightarrow \Box(B > A)$	RT7 (3, 2)
5. $\Box(B > A) \rightarrow B \supset A$	GA2d
6. $\neg A \supset \neg B \rightarrow B \supset A$	RT7 (4, 5)

GT18: $A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$

1. $A > B \rightarrow \neg B > \neg A$	GT16
2. $\Box(A > B) \rightarrow \Box(\neg B > \neg A)$	GRT4 (1)
3. $A \supset B \rightarrow \Box(A > B)$	GT11
4. $A \supset B \rightarrow \Box(\neg B > \neg A)$	RT7 (3, 2)
5. $\Box(\neg B > \neg A) \rightarrow \neg B \supset \neg A$	GA2d
6. $A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$	RT7 (4, 5)

{Die Beweise der für *die* (ausgezeichnete) strikte Implikation, d. h.: für die strikte Implikation *als necessitierte materiale Implikation*, unverzichtbaren (als logisch valide unverzichtbaren) Schlussformeln in GT17 und GT18 führen deutlich vor Augen, dass GA2d kein bloßes „Schönheitsaxiom", kein bloßer „Inhaltsabrunder" ist, sondern vielmehr auch sonst an wichtiger Stelle entscheidend fungiert.}

GT19: $A \supset \neg A \leftrightarrow \Box\neg A$ *Zweitdefinition der Unmöglichkeit*

1. $\Box\neg A \leftrightarrow \Box\neg A$	A1, DEF↔
2. $\neg\neg A \supset \neg A \leftrightarrow \Box\neg A$	GD2 (1)
3. $\neg\neg A \supset \neg A \rightarrow A \supset \neg A$	GT17 {„$\neg A$" für „A", „A" für „B"}
4. $A \supset \neg A \rightarrow \neg\neg A \supset \neg A$	GT18 {„$\neg A$" für „B"}
5. $A \supset \neg A \rightarrow \Box\neg A$	RT7 (4, 2) {von 2. wird $\neg\neg A \supset \neg A \rightarrow \Box\neg A$ verwendet}
6. $\Box\neg A \rightarrow A \supset \neg A$	RT7 (2, 3) {von 2. wird nun $\Box\neg A \rightarrow \neg\neg A \supset \neg A$ verwendet}
7. $A \supset \neg A \leftrightarrow \Box\neg A$	DEF↔ (5, 6)

GT20: $\neg(A \supset \neg A) \leftrightarrow \Diamond A$ *Zweitdefinition der Möglichkeit*

1. $A \supset \neg A \rightarrow \Box\neg A$ GT19 {1. Hälfte}

2. $\neg\Box\neg A \rightarrow \neg(A \supset \neg A)$ RT3 (1)

3. $\Box\neg A \rightarrow A \supset \neg A$ GT19 {2. Hälfte}

4. $\neg(A \supset \neg A) \rightarrow \neg\Box\neg A$ RT3 (3)

5. $\neg(A \supset \neg A) \leftrightarrow \neg\Box\neg A$ DEF$\leftrightarrow$ (4, 2)

6. $\neg(A \supset \neg A) \leftrightarrow \Diamond A$ GD3 (5)

Es folgen – in **Gamma** bewiesen – verschiedene wichtige Modalprinzipien:

GT21: $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$ *$\Box$-über-$\wedge$-Verteilungsprinzip*

1. $A \wedge B \rightarrow A$ T9

2. $A \wedge B \rightarrow B$ T9

3. $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$ GRT4 (1)

4. $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$ GRT4 (2)

5. $\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \wedge \Box B$ RT2 {Γ ist $\Box(A \wedge B)$} (3, 4)

6. $A, B \rightarrow A \wedge B$ A5

7. $A \rightarrow B > A \wedge B$ GRT2 (6)

8. $\Box A \rightarrow \Box(B > A \wedge B)$ GRT4 (7)

9. $\Box(B > A \wedge B), \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$ GT4 {$\Box(A > B), \Box A \rightarrow \Box B$; Einsetzungsfall}

10. $\Box A, \Box B, \Box(B > A \wedge B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$ R2, R1 (9)

11. $\Box A, \Box B \rightarrow \Box(B > A \wedge B)$ R2 (8)

12. $\Box A, \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$ R3 (10, 11)

13. $\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$ R7 {leeres Γ} (12)

14. $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$ DEF$\leftrightarrow$ (5, 13)

GT22: $\Box C \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box C$

1. $\Box\neg\Box C \rightarrow \neg\Box C$ GT3

2. $\Box C \rightarrow \neg\Box\neg\Box C$ RT4 (1)

3. $\Box\Box C \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box C$ GRT4 (2)

4. $\Box C \rightarrow \Box\Box C$ GT7 {*S4-Axiom*; in **Gamma** und auch schon in **Gamma*** beweisbar}

5. $\Box C \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box C$ RT7 (4, 3)

GT23: $\Box\neg\Box\neg\Box C \rightarrow \Box C$

1. $\neg\Box C \rightarrow \Box\neg\Box C$ GT8 {*S5-Axiom*; nur in **Gamma** beweisbar, nicht in **Gamma***}

2. $\neg\Box\neg\Box C \rightarrow C$ aus 1. wie im Beweis von (G*S5*)T1 {*Brouwersches Axiom*; nur in **Gamma** beweisbar, nicht schon in **Gamma***}

3. $\Box\neg\Box\neg\Box C \rightarrow \Box C$ GRT4 (2)

GRT8: $\Gamma \rightarrow C \Rightarrow \Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$ *Generalisierter Aufbau der Notwendigkeit* (GAUN)

1. $\Gamma \rightarrow C$ Annahme

2. $\wedge(\Gamma) \rightarrow C$ R7 (1) {sooft schrittweise von rechts nach links in Γ angewandt, bis die Satzformelfolge Γ vollständig in eine Satzformel verwandelt ist; bei leerem Γ ist $\wedge(\Gamma)$ die Satzformel $B \supset B$, und 2. geht aus 1. durch R2 hervor; ist Γ nur eine einzige Satzformel, dann ist $\wedge(\Gamma)$ diese Satzformel, und 2. ist eine Wiederholung von 1.}

3. $\Box\wedge(\Gamma) \rightarrow \Box C$ GRT4 (2) {„$\Box\wedge(\Gamma)$“ ist nicht etwa selbst eine Satzformel, sondern *beschreibt* schematisch – als metasprachlicher Ausdruck – eine Satzformel einer bestimmten Gestalt: $\Box(B \supset B)$ oder $\Box\sigma$ oder $\Box(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ oder $\Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3))$ oder $\Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)))$ oder …}

4. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$ aus 3., und zwar wie folgt:

Wenn Γ *leer ist*, dann ist die Satzformelfolge $\Box[\Gamma]$ leer; *wenn* Γ *hingegen nicht leer ist*, sondern $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ ist, dann ist $\Box[\Gamma]$ die Satzformelfolge $\Box\sigma_1 \ldots \Box\sigma_n$; also für $n = 1$ die Satzformel $\Box\sigma_1$; für $n = 2$ die Satzformelfolge $\Box\sigma_1$, $\Box\sigma_2$; etc.

Wenn Γ *leer ist*, dann ist zudem $\Box\wedge(\Gamma)$ die Satzformel $\Box(B \supset B)$, da dann $\wedge(\Gamma)$ $B \supset B$ ist [siehe oben die Erläuterung zu 2.], und man geht von 3. nach 4. wie folgt vor:

3. $\Box(B \supset B) \rightarrow \Box C$

3.1. $\rightarrow \Box(B \supset B)$ A1, GR4, GRT3

3.2 $\rightarrow \Box C$ R3 (3, 3.1), *also*: 4. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$.

Wenn Γ *nicht leer ist*, dann ist zudem $\Box\wedge(\Gamma)$ die Satzformel $\Box\sigma_1$ oder die Satzformel $\Box(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ oder die Satzformel $\Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3))$ oder die Satzformel $\Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)))$ oder … [etc.]; und man geht von 3. bis 4. wie folgt vor:

Wenn $n = 1$, dann hat man:

3. $\Box\sigma_1 \rightarrow \Box C$, ***also***: 4. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$.

Wenn *n* = 2, dann hat man:

3. $\Box(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \rightarrow \Box C$

3.1 $\Box\sigma_1 \wedge \Box\sigma_2 \rightarrow \Box(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ GT21 {„von rechts nach links"}

3.2 $\Box\sigma_1 \wedge \Box\sigma_2 \rightarrow \Box C$ RT7 (3.1, 3)

3.3 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2 \rightarrow \Box C$ RT14 (3.2), ***also***: 4. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$.

Wenn *n* = 3, dann hat man:

3. $\Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3)) \rightarrow \Box C$

3.1 $\Box\sigma_1 \wedge \Box(\sigma_2 \wedge \sigma_3) \rightarrow \Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3))$ GT21

3.2 $\Box\sigma_1 \wedge \Box(\sigma_2 \wedge \sigma_3) \rightarrow \Box C$ RT7 (3.1, 3)

3.3 $\Box\sigma_1, \Box(\sigma_2 \wedge \sigma_3) \rightarrow \Box C$ RT14 {UVUG} (3.2)

3.4 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2 \wedge \Box\sigma_3 \rightarrow \Box(\sigma_2 \wedge \sigma_3)$ GT21, R2, R1

3.5 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2 \wedge \Box\sigma_3 \rightarrow \Box C$ RT7 $\{\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow C\}$ (3.4, 3.3)

3.6 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2, \Box\sigma_3 \rightarrow \Box C$ RT14 (3.5), ***also***: 4. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$.

Wenn *n* = 4, dann hat man:

3. $\Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4))) \rightarrow \Box C$

3.1 $\Box\sigma_1 \wedge \Box(\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)) \rightarrow \Box(\sigma_1 \wedge (\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)))$ GT21

3.2 $\Box\sigma_1 \wedge \Box(\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)) \rightarrow \Box C$ RT7 (3.1, 3)

3.3 $\Box\sigma_1, \Box(\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4)) \rightarrow \Box C$ RT14 (3.2)

3.4 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2 \wedge \Box(\sigma_3 \wedge \sigma_4) \rightarrow \Box(\sigma_2 \wedge (\sigma_3 \wedge \sigma_4))$ GT21, R2, R1

3.5 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2 \wedge \Box(\sigma_3 \wedge \sigma_4) \rightarrow \Box C$ RT7 (3.4, 3.3)

3.6 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2, \Box(\sigma_3 \wedge \sigma_4) \rightarrow \Box C$ RT14 (3.5)

3.7 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2, \Box\sigma_3 \wedge \Box\sigma_4 \rightarrow \Box(\sigma_3 \wedge \sigma_4)$ GT21, R2, R1

3.8 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2, \Box\sigma_3 \wedge \Box\sigma_4 \rightarrow \Box C$ RT7 $\{\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow C\}$ (3.7, 3.6)

3.9 $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2, \Box\sigma_3, \Box\sigma_4 \rightarrow \Box C$ RT14 (3.8), ***also***: 4. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$.

Usw. usf.

Es ist ersichtlich, dass man für beliebige $n \geq 1$ [wo *n* die Anzahl der selbstständigen, bei $n \geq 2$ durch Komma abgeteilten, Satzformelvorkommnisse in Γ ist] nach Durchführung der aus den angegebenen Beispielen herauslesbaren repetitiven Prozedur im Anschluss an

3. $\Box\wedge(\Gamma) \rightarrow \Box C$

am Ende immer dastehen hat:

3.Ω $\Box\sigma_1 \ldots \Box\sigma_n \rightarrow \Box C$, *also*: 4. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box C$.

Der Beweis für das Schema GRT8 von Regelgesetzen ist hiermit abgeschlossen, denn alle zu berücksichtigen Fälle sind behandelt und jeweils zum ihnen entsprechenden Beweisziel geführt worden [bzw.: dessen Erreichen ist wenigstens unfehlbar absehbar gemacht worden].

{Es ist der Beachtung wert, dass GRT3 [AUN, die **Gamma**-Repräsentation der axiomatischen Satzregelformel von **T**, des alethisch-modallogischen Basiskalküls] ein spezieller Fall von GRT8 ist: GRT8 *bei leerem* Γ; ebenso ist das überaus nützliche Regelgesetz GRT4 [BAUN] ein spezieller Fall von GRT8: GRT8 *bei eingliedrigem* Γ. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass GT4 [PN, also die **Gamma**-Repräsentation des **T**-Axioms, das zu dem durch ABN – GT3 – **Gamma**-repräsentierten **T**-Axiom hinzukommt] mit GRT8 so gut wie unmittelbar aus *der A2-Analogie für* **Gamma** – GT1 – gewonnen werden kann: Ausgehend von GT1, dessen Beweis von *keinem* Prinzip, das **Gamma** eigentümlich ist, Gebrauch macht (nicht einmal die Definition GD1 ist ja **Gamma** eigentümlich, da sie aufseiten von **Alpha** unter dem Namen „D1" ebenfalls figuriert), ist nur *einmal* R1 einzusetzen, bevor GRT8 zum Einsatz kommt und das erwünschte Ergebnis liefert.[50] Bei GRT8 handelt es sich also um ein ziemlich leistungsfähiges und dabei elegantes Prinzip – *zumal es* GA2b *ersetzen kann*: $\Box B$, $\Box(B > C) \rightarrow \Box C$, erhält man ja mit GRT8 noch unmittelbarer als GT4 aus (einem Einsetzungsfall von) GT1 (die Anwendung von R1 kann man sich nun sparen), und GA2b ist nichts anderes als eine Formulierungsvariante von $\Box B$, $\Box(B > C) \rightarrow \Box C$, allerdings keine nebensächliche, sondern eine *grundlegende*, nämlich eine Formulierungsvariante, bei der die gemäß GD1 und GD2 definierten Ausdrücke vollständig durch die zugehörigen definitorisch primitiven Ausdrücke ersetzt sind: $\neg B \supset B$, $\neg(\neg B \vee C) \supset \neg B \vee C \rightarrow \neg C \supset C$. Es ist ersichtlich: Der Kalkül **Gamma mit GAUN // GA2b** ist deduktiv äquivalent mit **Gamma**. Und offensichtlich gilt auch: Der Kalkül **Gamma* mit GAUN // GA2b** ist deduktiv äquivalent mit **Gamma***.}

GRT9: $\Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Box[\Gamma] \rightarrow B \supset C$ *Deduktionsprinzip der strikten Implikation* (DPSI)

1. $\Gamma, B \rightarrow C$ Annahme
2. $\Gamma \rightarrow B > C$ GRT2 (1)
3. $\Box[\Gamma] \rightarrow \Box(B > C)$ GRT8 (2)
4. $\Box[\Gamma], \Box(B > C) \rightarrow B \supset C$ GA2d, R2, R1
5. $\Box[\Gamma] \rightarrow B \supset C$ R3 (4, 3)

[50] Für die *prämissenlose* Version von PN [siehe die zweite Hälfte von GT4] braucht man zusätzlich noch *die* R4-*Analogie für* **Gamma**; diese kann in **Gamma** ebenfalls hergeleitet werden, *ohne* von Prinzipien Gebrauch zu machen, die **Gamma** eigentümlich sind (siehe GRT2).

Fügt man einem der vertrauten alethisch-modallogischen Satzformelkalküle das Axiom A > ❒A hinzu, so „kollabiert“ das System jedes Mal in die wahrheitsfunktionale Aussagenlogik (bzw. im prädikatenlogischen Fall – bei entsprechendem Satzformelkalkül – in die elementare Prädikatenlogik). Wie steht es diesbezüglich bei **Gamma** und **Gamma***?

Hat man A $\rightarrow$ ❒A als zusätzliches Axiom,[51] so ist A > B $\rightarrow$ ❒(A > B) ein Einsetzungsfall davon. Mithin erhält man wegen GA2d [spezifisch wegen $\neg(\neg A \vee B) \supset \neg A \vee B \rightarrow A \supset B$, *alias* ❒(A > B) $\rightarrow$ A $\supset$ B] und RT7: A > B $\rightarrow$ A $\supset$ B. Mit Letzterem ist nun aber die Regel R4 beweisbar (über die Regel GR4 hinaus):

1. Γ, A $\rightarrow$ B Annahme
2. $\Gamma \rightarrow$ A > B GRT2 (1)
3. Γ, A > B $\rightarrow$ A $\supset$ B mit A > B $\rightarrow$ A $\supset$ B und R2, R1
4. $\Gamma \rightarrow$ A $\supset$ B R3 (3, 2).

Angesichts dessen, dass wir in **Gamma** und **Gamma*** A2 gewissermaßen schon haben – nämlich als GA2a –, ist dieser Beweis von R4 alles, was nötig ist, um **Gamma** und **Gamma*** in **Alpha** *kollabieren* zu lassen: Die gegenüber **Alpha** deduktiv schwächeren Kalküle **Gamma** und **Gamma*** werden also durch Hinzufügung von A $\rightarrow$ ❒A als weiterem Grundprinzip zu Kalkülen, die mit **Alpha** deduktiv äquivalent sind (und darum auch untereinander); es ist dann nicht nur alles, was in **Gamma** bzw. **Gamma*** beweisbar ist, auch in **Alpha** beweisbar, sondern auch umgekehrt ist alles, was in **Alpha** beweisbar ist, auch in **Gamma** bzw. **Gamma*** beweisbar – und zwar nicht nur in *typographischer* Hinsicht, sondern auch in *semantischer*; denn insbesondere ist dann in **Gamma** und **Gamma*** – *wie in* **Alpha** – A $\supset$ B $\leftrightarrow$ A > B beweisbar, und zwar ohne dass „$\neg$“ oder „$\vee$“, durch welche Konstanten „>“ gemäß GD1 und gemäß D1 definiert ist, in **Gamma** bzw. **Gamma*** auf der einen Seite und **Alpha** auf der anderen Seite jeweils verschiedene Bedeutungen hätte.

Freilich muss man hier genauer von einem *Hinaufkollabieren* von **Gamma** und **Gamma*** in **Alpha** sprechen: Diese Kalküle, die zunächst deduktiv schwächer als **Alpha** waren, werden zu Kalkülen, die mit **Alpha** deduktiv äquivalent sind. In den *gewöhnlichen* Darstellungen der alethischen Modallogik *mit* ❒ *als Grundoperator* hat hingegen die Tatsache,

[51] Oder stattdessen: $\rightarrow$ A $\supset$ ❒A. Ob man A $\rightarrow$ ❒A oder $\rightarrow$ A $\supset$ ❒A nimmt, ist gleichgültig, denn in **Gamma** bzw. **Gamma*** ist nicht nur GR4 ein Grundgesetz, sondern auch *die Umkehrung von* GR4, $\rightarrow$ B $\supset$ C $\Rightarrow$ B $\rightarrow$ C, beweisbar: 1. $\rightarrow$ B $\supset$ C [Annahme]; 2. B $\rightarrow$ B $\supset$ C [R2 angewendet auf 1.]; 3. B, B $\supset$ C $\rightarrow$ C [GA2a]; 4. B $\rightarrow$ C [R3 angewendet auf 3. und 2.].

dass ❒ ein logischer Grundoperator ist, zur Folge, dass ein entsprechender alethisch-modallogischer Kalkül *deduktiv stärker* ist als der wahrheitsfunktional-aussagenlogische bzw. elementar-prädikatenlogische Kalkül, aus dem er durch Hinzufügung von ❒ als Grundoperator *samt den zugehörigen Grundprinzipien* entstanden ist. Die axiomatische Hinzufügung von $A \rightarrow \Box A$ [oder von $\rightarrow A \supset \Box A$, oder in *gewöhnlichen* alethisch-modallogischen Satzformelkalkülen von $A \supset \Box A$, was in diesen Kalkülen mit $A > \Box A$ – also: $\neg A \vee \Box A$ – deduktiv äquivalent ist] zum modallogischen Kalkül bedingt dann ein *Hinunterkollabieren*: Zwar ist dann im modallogischen Kalkül (mit ❒) immer noch mehr beweisbar als im nichtmodallogischen (ohne ❒), aber der Operator ❒ ist nun im modallogischen Kalkül als überflüssige „Kruste" erkannt und kann überall entfernt werden: eine Formel „ohne Kruste" ist beweisbar äquivalent mit der je gegebenen Formel „mit Kruste" (gleichgültig, wie die Kruste ausfällt). Übrig bleibt – nach dem Entfernen der überflüssigen Kruste – rein der nichtmodallogische Kalkül.

{Nicht nur die Hinzufügung von $A \rightarrow \Box A$ bzw. von $\rightarrow A \supset \Box A$ führt zum Kollaps von **Gamma** und **Gamma*** in **Alpha**, sondern auch die Hinzufügung von $\rightarrow A > \Box A$; letztere Hinzufügung kommt nämlich der Hinzufügung von $\rightarrow A \supset \Box A$ gleich: Wegen GT2 und R3 hat man: $\rightarrow A \supset \Box A \Rightarrow \rightarrow A > \Box A$; und aus $\rightarrow A > \Box A$ ergibt sich umgekehrt mit GRT3: $\rightarrow \Box(A > \Box A)$, also mit GA2d und R3: $\rightarrow A \supset \Box A$, und mithin hat man auch: $\rightarrow A > \Box A \Rightarrow \rightarrow A \supset \Box A$. Alternativ – und weniger aufwendig – kann man auch argumentieren, dass die Hinzufügung von $\rightarrow A > \Box A$ der von $A \rightarrow \Box A$ gleichkommt (wegen GRT2 und RT13 [mit „>" statt „⊃"]).}

Hier noch zwei im alltäglichen modallogischen Schließen immens nützliche elementare Theoreme (die als *elementare* sowohl in **Gamma** wie in **Gamma*** beweisbar sind):

GT24: $\Box A, \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$	*1. Prinzip der Möglichkeitserweiterung*
1. $A, A > \neg B \rightarrow \neg B$	GT1
2. $\Box A, \Box(A > \neg B) \rightarrow \Box\neg B$	GRT8 (1)
3. $\Box A, \neg\Box\neg B \rightarrow \neg\Box(A > \neg B)$	RT3 {AUKP} (2)
4. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \wedge B$	T11 $\{A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)\}$
5. $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$	RT5 {LKP} (4)
6. $\neg(A \wedge B) \rightarrow A > \neg B$	GD1 (5)
7. $\Box\neg(A \wedge B) \rightarrow \Box(A > \neg B)$	GRT4 (6)

8. $\neg\Box(A > \neg B) \rightarrow \neg\Box\neg(A \wedge B)$ RT3 (7)

9. $\Box A, \neg\Box\neg B, \neg\Box(A > \neg B) \rightarrow \neg\Box\neg(A \wedge B)$ R2, R1 (8)

10. $\Box A, \neg\Box\neg B \rightarrow \neg\Box\neg(A \wedge B)$ R3 (9, 3)

11. $\Box A, \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ GD3 (10)

{Zum Namen „1. Prinzip der Möglichkeitserweiterung“ würde wohl besser – rein ästhetisch – die folgende Schlussformel passen: $\Diamond A, \Box B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$. Diese letztere Schlussformel erhält man aus GT24 wie folgt:

1. $\Box B, \Diamond A \rightarrow \Diamond(B \wedge A)$ GT24 [nämlich ein Einsetzungsfall davon]

2. $\Diamond A, \Box B \rightarrow \Diamond(B \wedge A)$ R1 (1)

3. $B \wedge A \rightarrow A \wedge B$ T17b [UKOM, nämlich ein Einsetzungsfall davon]

4. $\Diamond(B \wedge A) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ GRT6 (3)

5. $\Diamond A, \Diamond(B \wedge A) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ R2, R1 (4)

6. $\Diamond A, \Box B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ RT7 (2, 5).

Umgekehrt lässt sich GT24 in der eben beschriebenen Weise – *mutatis mutandis* – auch aus dem *Theorem* $\Diamond A, \Box B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ gewinnen. Die Angabe eines von GT24 unabhängigen Beweises für $\Diamond A, \Box B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ sei Lesern überlassen.}

GT25: $\Diamond A, A \supset B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ *2. Prinzip der Möglichkeitserweiterung*

1. $A, A > B \rightarrow B$ GT1

2. $A, A > B \rightarrow A$ A1, R2

3. $A, A > B \rightarrow A \wedge B$ RT2 (2, 1)

4. $A > B, A \rightarrow A \wedge B$ R1 (3)

5. $A > B, \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A$ RT3 (4)

6. $\Box(A > B), \Box\neg(A \wedge B) \rightarrow \Box\neg A$ GRT8 (5)

7. $\Box(A > B), \neg\Box\neg A \rightarrow \neg\Box\neg(A \wedge B)$ RT3 (6)

8. $\Diamond A, \Box(A > B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ R1, GD3 (7)

9. $\Diamond A, A \supset B \rightarrow \Box(A > B)$ GT11, R2, R1

10. $\Diamond A, A \supset B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ RT7 (9, 8)

{Das an die Gestalt von GT24 angepasste Korollar von GT25 sieht so aus: $B \supset A, \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$. Diese letztere Schlussformel erhält man aus GT25 wie folgt:

1. $\Diamond B, B \supset A \rightarrow \Diamond(B \wedge A)$ GT25 [nämlich ein Einsetzungsfall davon]

2. $B \supset A, \Diamond B \rightarrow \Diamond(B \wedge A)$ R1 (1)

3. $B \wedge A \rightarrow A \wedge B$ T17b

4. $\Diamond(B \wedge A) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ GRT6 (3)

5. $B \supset A, \Diamond B, \Diamond(B \wedge A) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ R2, R1 (4)

6. $B \supset A, \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ R3 (5, 2).

Aus dem *Theorem* $B \supset A, \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ lässt sich in der eben beschriebenen Weise – *mutatis mutandis* – wiederum GT25 gewinnen. Die Angabe eines von GT25 unabhängigen Beweises für $B \supset A, \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ sei Lesern überlassen.}

Und damit auch das Brouwersche Axiom nicht ohne Listenplatz herumirrt, obwohl es doch – oder besser gesagt: seine Schlussformel-Äquivalente – in **Gamma** beweisbar ist (wie längst deutlich geworden ist), sei sein offizieller Beweis nachgeholt:

GT26: $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A; \Diamond\Box A \rightarrow A$ *Brouwersches Axiom*

1. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ GT8 {*S5-Axiom*}

2. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ RT5 {LKP} (1)

3. $\Box A \rightarrow A$ GT3

4. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$ RT7 (2, 3)

5. $\Diamond\Box A \rightarrow A$ GD3 (4)

{Vgl. den Beweis von (G*S5*)T1. Eine Anwendung von GR4 auf 4. und dann auf 5. erbringt weitere zwei Schlussformel-Äquivalente des Brouwerschen Axioms. Zudem: Die Schlussformeln $A \rightarrow \Box\neg\Box\neg A$ und $A \rightarrow \Box\Diamond A$ könnten ebenfalls als „*Brouwersches Axiom*“ bezeichnet werden; sie sind unter Verwendung von GT26 leicht beweisbar:

$A \rightarrow \Box\neg\Box\neg A; A \rightarrow \Box\Diamond A$

1. $\neg\Box\neg\Box\neg A \rightarrow \neg A$ GT26 [Einsetzungsfall]

2. $A \rightarrow \Box\neg\Box\neg A$ RT6 [ABKP] (1)

3. $A \rightarrow \Box\Diamond A$ GD3 (2).}

Als Schlusspunkt schließlich seien die folgenden drei Theoreme gesetzt, die zusammengenommen zeigen, dass die (Logikern) intuitiv einleuchtende Bedeutungsanalyse von „Es ist notwendig, dass A“ durch „Dass A, wird *davon*, dass wenn A, dann A, *strikt* impliziert“ in **Gamma** und auch schon in **Gamma*** eingeholt wird: Diese Analyse ist in diesen Systemen

beweisbar äquivalent mit der durch GD2 ausgezeichneten Bedeutungsanalyse von „Es ist notwendig, dass A“ durch „Dass nicht-A, impliziert *strikt*, dass A“:

GT27a: $\Box A \rightarrow D \supset A$

1. $\Box A \rightarrow A$ GT3
2. $\Box A, D \rightarrow A$ R2 (1)
3. $\Box A \rightarrow D > A$ GRT2 (2)
4. $\Box\Box A \rightarrow \Box(D > A)$ GRT4 (3)
5. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ GT7 {*S4-Axiom*}
6. $\Box(D > A) \rightarrow D \supset A$ GA2d
7. $\Box A \rightarrow \Box(D > A)$ RT7 (5, 4)
8. $\Box A \rightarrow D \supset A$ RT7 (7, 6)

GT27b: $(A \supset A) \supset A \rightarrow \Box A$

1. $(A \supset A) \supset A, A \supset A \rightarrow A$ GA2a, R1
2. $A \rightarrow A$ A1
3. $\rightarrow A \supset A$ GR4 (2)
4. $(A \supset A) \supset A \rightarrow A \supset A$ R2 (3)
5. $(A \supset A) \supset A \rightarrow A$ R3 (1, 4)
6. $\Box((A \supset A) \supset A) \rightarrow \Box A$ GRT4 (5)
7. $(A \supset A) \supset A \rightarrow \Box((A \supset A) \supset A)$ G*A2c {in **Gamma***; GT10 in **Gamma**; Einsetzungsfall}
8. $(A \supset A) \supset A \rightarrow \Box A$ RT7 (7, 6)

GT27c: $\Box A \leftrightarrow (A \supset A) \supset A$

1. $(A \supset A) \supset A \rightarrow \Box A$ GT27b
2. $\Box A \rightarrow (A \supset A) \supset A$ GT27a {Einsetzungsfall}
3. $\Box A \leftrightarrow (A \supset A) \supset A$ DEF$\leftrightarrow$ (2, 1)

{Also ergibt sich mit GD2: $\neg A \supset A \leftrightarrow (A \supset A) \supset A$. Aber auch $\neg A \supset A \leftrightarrow (A > A) \supset A$ ist ein Theorem:

GT27b*alt*: $(A > A) \supset A \rightarrow \Box A$

1. $(A > A) \supset A, A > A \rightarrow A$ GA2a, R1

GT27c*alt*: $\Box A \leftrightarrow (A > A) \supset A$

1. $(A > A) \supset A \rightarrow \Box A$ GT27b*alt*

2. $A \rightarrow A$	A1	2. $\Box A \rightarrow (A > A) \supset A$	GT27a [Einsetzungsfall]
3. $\rightarrow A > A$	GRT2 (2)	3. $\Box A \leftrightarrow (A > A) \supset A$	DEF$\leftrightarrow$ (2, 1).
4. $(A > A) \supset A \rightarrow A > A$	R2 (3)		
5. $(A > A) \supset A \rightarrow A$	R3 (1, 4)		
6. $\Box((A > A) \supset A) \rightarrow \Box A$	GRT4 (5)		
7. $(A > A) \supset A \rightarrow \Box((A > A) \supset A)$	G*A2c [oder GT10]		
8. $(A > A) \supset A \rightarrow \Box A$	RT7 (7, 6).		

Man beachte schließlich, dass $\Box A \leftrightarrow \sigma \supset A$ ein [doppelseitiges] Theorem von **Gamma** bzw. **Gamma*** für jede Satzformel σ ist, für die $\rightarrow \sigma$ in **Gamma** bzw. **Gamma*** beweisbar ist. Der Beweis dafür ist – nach den zuletzt gegebenen Beweisparadigmen – leicht.}

4. Der Kalkül **Delta** der intuitionistischen Aussagenlogik, und der Kalkül **Delta***

Der Kalkül **Delta** geht aus dem Kalkül **Alpha** dadurch hervor, dass R5 durch IR5 ersetzt wird, alles Übrige bei den Grundprinzipien aber gleichbleibt:

IR5[52] $\Gamma, B \to \neg C \Rightarrow \Gamma, C \to \neg B$

IR5 ist [bis auf die simultane Ersetzung von „A“ durch „B“ und von „B“ durch „C“, die deduktiv auswirkungslos ist] RT4 (RKP) unter den echtabgeleiteten Prinzipien von **Alpha**. Hiermit ist klar, dass jedes Prinzip von **Delta** auch ein Prinzip von **Alpha** ist. Ist jedes Prinzip von **Alpha** auch ein Prinzip von **Delta**? Dies wäre genau dann der Fall, wenn das inhaltliche Schnittgesetz – ISG: das Grundprinzip R5 in **Alpha** – in **Delta** herleitbar wäre. Ist es das? Versuchen wir, es herzuleiten.

Zunächst ist festzustellen, dass bzgl. **Delta** ISG mit TND [T1 in **Alpha**] ohne Verwendung von IR5 deduktiv äquivalent ist:

1. $\Gamma, B \to C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg B \to C$	Annahme
3. $\Gamma, B \vee \neg B \to C$	R6 (1, 2)
4. $\to B \vee \neg B$	TND
5. $\Gamma \to B \vee \neg B$	R2 {eventuell mehrfach angewendet oder auch gar nicht benötigt} (4)

[52] Die Voranstellung von „I“ (für „intuitionistisch“) wird hier gegenüber der eigentlich fälligen Voranstellung von „D“ (als **Delta**-Kennzeichnung) präferiert. Alle Axiome, Theoreme und axiomatischen und theorematischen Schlussregelformeln von **Alpha** – oder Schemata von solchen –, in deren Beweis ISG [R5 in **Alpha**] keine direkte oder indirekte Rolle spielt (noch, folglich, ein mit ISG relativ zum Restkalkül als deduktiv äquivalent erwiesenes Prinzip), deren Beweis also „frei von ISG/R5“ ist, werden ohne „I“-Kennzeichnung, sondern mit ihrer **Alpha**-Kennzeichnung als **Delta-**Prinzipien übernommen. [*Wobei* die **Alpha**-Kennzeichnung stets *leer* ist: In der Listenbezeichnung der **Alpha**-Prinzipien ist ja, dass sie zu **Alpha** gehören, aufgrund der Fundamentalität von **Alpha** nicht durch ein eigenes Zeichen vermerkt.] Die „I“-Kennzeichnung hingegen wird am Anfang der Listenbezeichnung eingesetzt bei dem **Delta**-Grundprinzip IR5, und sobald ein Prinzip unter direkter oder indirekter Verwendung von IR5 (letztere ist gegeben beim Einsatz von Prinzipien, die mithilfe von IR5 echtabgeleitet sind) *eigens in* **Delta** bewiesen ist. [Es kann vorkommen, dass ein **Delta**-Prinzip – *als* **Delta**-Prinzip – *zwei* **Delta**-Listenbezeichnungen hat: eine mit einer **Alpha**-Listenbezeichnung identische, und eine unter Voranstellung von „I“ gebildete. Das ergibt sich, wenn das Prinzip auf *beiden* der hier soeben beschriebenen zwei Wege bewiesen ist.] Es kann besondere Gründe geben, die „I“-Kennzeichnung auch bei Nichtvorliegen ihrer Voraussetzungen einzusetzen: siehe IT9.

6. $\Gamma \rightarrow C$ R3 (3, 5) – womit nun mit TND ISG hergeleitet ist.

---

1. $B \rightarrow B \vee \neg B$ A4

2. $\neg B \rightarrow B \vee \neg B$ A4

3. $\rightarrow B \vee \neg B$ ISG (1, 2) – womit nun mit ISG TND hergeleitet ist.

Deduktiv äquivalent ist bzgl. **Delta** zudem TND mit EDN [T2 in **Alpha**], was nun allerdings keine Sache von wenigen Schritten ist und woran IR5 sehr wohl beteiligt ist:

1. $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$ A4

2. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A)$ A1

3. $A \vee \neg A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ IR5 (2)

4. $\neg A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ RT7 (1, 3) {RT7 ist in **Alpha** frei von ISG [R5] bewiesen}

5. $A \rightarrow A \vee \neg A$ A4

6. $A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ RT7 (5, 3)

7. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A$ IR5 (6)

8. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A$ IR5 (4)

9. $\neg A, \neg\neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$ A3

10. $\neg(A \vee \neg A), \neg A \rightarrow \neg\neg A$ R2 (8)

11. $\neg(A \vee \neg A), \neg A, \neg\neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$ R2, R1 (9)

12. $\neg(A \vee \neg A), \neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$ R3 (11, 10)

13. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \supset A)$ R3 (12, 7)

14. $A \supset A \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ IR5 (13)

15. $\rightarrow A \supset A$ T5 {T5 ist in **Alpha** frei von ISG [R5] bewiesen}

16. $\rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ R3 (14, 15)

17. $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ EDN {nämlich ein Einsetzungsfall von EDN}

18. $\rightarrow A \vee \neg A$ R3 (17, 16) – womit nun mit EDN TND hergeleitet ist.

---

1. $\rightarrow B \vee \neg B$ TND

2. $\neg\neg B, \neg B \rightarrow B$ A3, R1

3. $\neg\neg B, B \rightarrow B$ A1, R2, R1

4. $\neg\neg B, B \vee \neg B \rightarrow B$ R6 (3, 2)

5. $\neg\neg B \rightarrow B \vee \neg B$ R2 (1)

6. $\neg\neg B \rightarrow B$ R3 (4, 5) – womit nun mit TND EDN hergeleitet ist.

Deduktiv äquivalent ist bzgl. **Delta** zudem EDN mit LKP [RT5 in **Alpha**]:

1. $\neg A \rightarrow \neg A$ A1

2. $\neg\neg A \rightarrow A$ LKP (1) {LKP: $\Gamma, \neg A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow A$; durch die Einsetzung von „$\neg A$“ für „B“ erhält man: $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma, \neg\neg A \rightarrow A$; Γ ist im vorliegenden Fall leer} – womit nun mit LKP EDN hergeleitet ist.

---

1. $\Gamma, \neg A \rightarrow B$ Annahme

2. $\neg B \rightarrow \neg B$ A1

3. $B \rightarrow \neg\neg B$ IR5 (2)

4. $\Gamma, \neg A, B \rightarrow \neg\neg B$ R2, R1 (3)

5. $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg\neg B$ R3 (4, 1)

6. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg\neg A$ IR5 (5) {IR5: $\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B$; durch die Einsetzung von „$\neg A$“ für „B“ und von „$\neg B$“ für „C“ erhält man: $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg\neg B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow \neg\neg A$}

7. $\neg\neg A \rightarrow A$ EDN

8. $\Gamma, \neg B, \neg\neg A \rightarrow A$ R2, R1 (7)

9. $\Gamma, \neg B \rightarrow A$ R3 (8, 6) – womit nun mit EDN LKP hergeleitet ist.

Deduktiv äquivalent ist bzgl. **Delta** schließlich auch LKP mit ABKP [RT6 in **Alpha**]:

1. $\Gamma, \neg A \rightarrow B$ Annahme

2. $\neg B \rightarrow \neg B$ A1

3. $B \rightarrow \neg\neg B$ IR5 (2)

4. $\Gamma, \neg A, B \rightarrow \neg\neg B$ R2, R1 (3)

5. $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg\neg B$ R3 (4, 1)

6. $\Gamma, \neg B \rightarrow A$ ABKP (5) {ABKP: $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow B$; durch simultane Einsetzung von „A“ für „B“ und von „$\neg B$“ für „A“ erhält man: $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg\neg B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow A$} – womit nun mit ABKP LKP hergeleitet ist.

---

1. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$ Annahme
2. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow B$ LKP (1) {LKP: $\Gamma, \neg A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow A$; durch simultane Einsetzung von „B“ für „A“ und von „$\neg$A“ für „B“ erhält man: $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma, \neg\neg A \rightarrow B$}
3. $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg A$ A1, R2, R1
4. $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg A$ IR5 (3)
5. $\Gamma, A \rightarrow B$ RT7 (4, 2) {RT7: $\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow C$; durch die Einsetzung von „$\neg\neg$A“ für „B“ und von „B“ für „C“ erhält man: $\Gamma, A \rightarrow \neg\neg A; \Gamma, \neg\neg A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow B$} – womit nun mit LKP ABKP hergeleitet ist.

Kann man ISG, TND, EDN, LKP oder ABKP in **Delta** beweisen? Kann man eins von diesen fünf in **Delta** beweisen, so kann man alle fünf in **Delta** beweisen; kann man eins von diesen fünf in **Delta** *nicht* beweisen, so auch alle fünf *nicht*.

Die betrachtete Familie der **Delta**-bezogenen deduktiven Äquivalenz lässt sich weiter vergrößern; denn deduktiv äquivalent ist EDN bzgl. **Delta** auch mit GIS2 [RT9 in **Alpha**]:

1. $\neg\neg A, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ A3, R1
2. $\neg\neg A \rightarrow A$ GIS2 (1) {GIS2: $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow A$; durch die Einsetzung von „$\neg\neg$A“ für „Γ“ erhält man: $\neg\neg A, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$} – womit nun mit GIS2 EDN hergeleitet ist.

---

1. $\Gamma, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ Annahme
2. $\Gamma, B \supset B \rightarrow \neg\neg A$ IR5 (1)
3. $\Gamma \rightarrow B \supset B$ T5, R2
4. $\Gamma \rightarrow \neg\neg A$ R3 (2, 3)
5. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow A$ EDN, R2, R1
6. $\Gamma \rightarrow A$ R3 (5, 4) – womit nun mit EDN GIS2 hergeleitet ist.

Mit der Beweisbarkeit in **Delta** von *einem* Prinzip aus ISG, TND, EDN, LKP, ABKP, GIS2 sind sie *alle* in **Delta** beweisbar; und mit der Nichtbeweisbarkeit in **Delta** von *einem* Prinzip aus ISG, TND, EDN, LKP, ABKP, GIS2 sind sie alle in **Delta** *nicht* beweisbar.

Andererseits sind in **Delta** beweisbar: *trivialerweise* RKP [RT4 in **Alpha**, IR5 in **Delta**; das Pendant zu LKP], und sowohl IDN [T3 in **Alpha**; die Umkehrung von EDN] als auch GIS1 [RT8 in **Alpha**; das Pendant zu GIS2] und GIS3 [RT10 in **Alpha**], das zudem mit RKP – IR5 – relativ zum Rest der Axiomatik von **Delta** deduktiv äquivalent ist:

IT1: $A \rightarrow \neg\neg A; \rightarrow A \supset \neg\neg A$ IDN

1. $\neg A \rightarrow \neg A$ A1
2. $A \rightarrow \neg\neg A$ IR5 (1)
3. $\rightarrow A \supset \neg\neg A$ R4 (2)

IRT1a: $\Gamma, A \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A$ GIS1

1. $\Gamma, A \rightarrow \neg(B \supset B)$ Annahme
2. $\Gamma, B \supset B \rightarrow \neg A$ IR5 (1)
3. $\Gamma \rightarrow B \supset B$ T5, R2
4. $\Gamma \rightarrow \neg A$ R3 (2, 3)

IRT1b: $\Gamma, A \rightarrow \neg A \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A$ GIS3

1. $\Gamma, A \rightarrow \neg A$ Annahme
2. $\Gamma, A, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$ A3, R2, R1
3. $\Gamma, A \rightarrow \neg(B \supset B)$ R3 (2, 1)
4. $\Gamma, B \supset B \rightarrow \neg A$ IR5 {RKP} (3)
5. $\Gamma \rightarrow B \supset B$ T5, R2
6. $\Gamma \rightarrow \neg A$ R3 (4, 5)

{Umgekehrt ergibt sich RKP – alias IR5 in **Delta** – mit GIS3 [und Rest-**Delta**: **Delta** schlicht ohne Grundprinzip RKP/IR5] wie folgt:

RKP: $\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B$

1. $\Gamma, B \rightarrow \neg C$ Annahme
2. $C, \neg C \rightarrow \neg B$ A3
3. $\Gamma, B, C \rightarrow \neg C$ R2 (1)
4. $\Gamma, B, C, \neg C \rightarrow \neg B$ R2, R1 (2)
5. $\Gamma, B, C \rightarrow \neg B$ R3 (4, 3)
6. $\Gamma, C, B \rightarrow \neg B$ R1 (5)

7. Γ, C $\rightarrow \neg$B GIS3 (6).

Beim Schritt von 6. nach 7. ist die für die Anwendung von GIS3 relevante Satzformelfolge nicht Γ, sondern Γ, C. „Γ“ steht ja in GIS3, wie auch sonst, für eine beliebige endliche Folge von Satzformeln – deshalb auch für eine beliebige solche Folge, die um ein Vorkommnis von „C“ verlängert ist.}

Wir können aufgrund von IRT1b und der Anmerkung dazu festhalten: **Delta mit GIS3 // RKP** ist deduktiv äquivalent mit **Delta** (welcher Kalkül ja RKP unter dem Namen „IR5“ als Grundprinzip führt).

{Man beachte in diesem Zusammenhang, dass GIS3 bzgl. Rest-**Delta** [**Delta** unter Weglassung von RKP/IR5 und mit keiner Hinzufügung] mit (a) Γ, A $\rightarrow$ B; Γ, A $\rightarrow \neg$B $\Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg$A deduktiv äquivalent ist, GIS3+EDN hingegen mit (b) Γ, $\neg$A $\rightarrow$ B; Γ, $\neg$A $\rightarrow \neg$B $\Rightarrow \Gamma \rightarrow$ A. Denn *links* auf der Seite im Folgenden ist die Herleitung in Rest-**Delta** von (a) mit GIS3, und umgekehrt von GIS3 mit (a); *rechts* auf der Seite ist die Herleitung in Rest-**Delta** von (b) mit GIS3+EDN, und umgekehrt von EDN und GIS3 mit (b):

1. Γ, A $\rightarrow$ B	Annahme
2. Γ, A $\rightarrow \neg$B	Annahme
3. Γ, B, $\neg$B $\rightarrow \neg$A	A3, R2, R1
4. Γ, B, A $\rightarrow \neg$B	R2, R1 (2)
5. Γ, B, A, $\neg$B $\rightarrow \neg$A	R2, R1 (3)
6. Γ, B, A $\rightarrow \neg$A	R3 (5, 4)
7. Γ, A, B $\rightarrow \neg$A	R1 (6)
8. Γ, A $\rightarrow \neg$A	R3 (7, 1)
9. $\Gamma \rightarrow \neg$A	GIS3 (8)

---

1. Γ, A $\rightarrow \neg$A	Annahme
2. Γ, A $\rightarrow$ A	A1, R2, R1
3. $\Gamma \rightarrow \neg$A	(a) [„A“ für „B“] (2, 1).

1. Γ, $\neg$A $\rightarrow$ B	Annahme
2. Γ, $\neg$A $\rightarrow \neg$B	Annahme
3. Γ, B, $\neg$B $\rightarrow \neg\neg$A	A3, R2, R1
4. Γ, B, $\neg$A $\rightarrow \neg$B	R2, R1 (2)
5. Γ, B, $\neg$A, $\neg$B $\rightarrow \neg\neg$A	R2, R1 (3)
6. Γ, B, $\neg$A $\rightarrow \neg\neg$A	R3 (5, 4)
7. Γ, $\neg$A, B $\rightarrow \neg\neg$A	R1 (6)
8. Γ, $\neg$A $\rightarrow \neg\neg$A	R3 (7, 1)
9. $\Gamma \rightarrow \neg\neg$A	GIS3 (8)
10. Γ, $\neg\neg$A $\rightarrow$ A	EDN, R2, R1
11. $\Gamma \rightarrow$ A	R3 (10, 9)

---

1. $\neg\neg$A, $\neg$A $\rightarrow$ A	A3, R1
2. $\neg\neg$A, $\neg$A $\rightarrow \neg$A	A1, R2, R1
3. $\neg\neg$A $\rightarrow$ A	(b) [Γ ist „$\neg\neg$A“; „A“ für „B“] (1, 2)

---

1. Γ, A $\rightarrow \neg$A	Annahme
2. Γ, $\neg\neg$A $\rightarrow$ A	EDN mit (b) bewiesen, R2, R1
3. Γ, $\neg\neg$A $\rightarrow \neg$A	RT7 (2, 1)
4. Γ, $\neg\neg$A $\rightarrow \neg\neg$A	A1, R2, R1
5. $\Gamma \rightarrow \neg$A	(b) [„$\neg$A“ für „A“, „$\neg$A“ für „B“] (3, 4).

In Anbetracht des vor dieser Anmerkung bereits Gezeigten ergibt also die Hinzufügung von (a) zu Rest-**Delta** einen mit **Delta** deduktiv äquivalenten Kalkül; die Hinzufügung von (b) zu Rest-**Delta** hingegen ergibt einen mit

Alpha deduktiv äquivalenten Kalkül. Denn bzgl. Rest-**Delta** [*identisch mit* Rest-**Alpha**: hier **Alpha** unter Weglassung von ISG/R5 und mit keiner Hinzufügung] laufen die folgenden sechs alternativen Hinzufügungen zu Rest-**Delta** [m. a. W.: Rest-**Alpha**] wie gezeigt deduktiv auf dasselbe hinaus: (b), GIS3+EDN, RKP+EDN, RKP+TND, TND, ISG; Rest-**Delta** + ISG ist nun aber **Alpha**.}

Außerdem ist beweisbar in **Delta**:

IRT2: $\Gamma, A \to B \Rightarrow \Gamma, \neg B \to \neg A$ AUKP {die Umkehrung von ABKP; RT3 in **Alpha**}

1. $\Gamma, A \to B$	Annahme
2. $\Gamma, A, B \to \neg\neg B$	IT1, R2, R1
3. $\Gamma, A \to \neg\neg B$	R3 (2, 1)
4. $\Gamma, \neg B \to \neg A$	IR5 (3)

{AUKP wird in Kapitel 1 unter Verwendung von R5 bewiesen: siehe den Beweis von RT3.}

Und bemerkenswerterweise ist auch das Folgende in **Delta** beweisbar:

IT2: $\to \neg\neg(A \vee \neg A)$ *Doppeltnegiertes* TND (DNTND)

{Der Beweis dafür ist oben bereits geführt: im ersten Teil des Beweises der deduktiven Äquivalenz bzgl. **Delta** von TND und EDN; siehe dort Zeile 16. Selbstverständlich ist DNTND auch in **Alpha** beweisbar.}

Wie bemerkenswerterweise auch *dies* [IRT3a *und* IRT3b]:

IRT3a: $\Gamma, B \to C; \Gamma, \neg B \to C \Rightarrow \Gamma \to \neg\neg C$ *Schwaches inhaltliches Schnittgesetz* (SISG)

1. $\Gamma, B \to C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg B \to C$	Annahme
3. $\Gamma, \neg C \to \neg B$	IRT2 (1)
4. $\Gamma, \neg C \to \neg\neg B$	IRT2 (2)
5. $\neg B, \neg\neg B \to \neg(B \supset B)$	A3
6. $\Gamma, \neg C, \neg B \to \neg\neg B$	R2 (4)
7. $\Gamma, \neg C, \neg B, \neg\neg B \to \neg(B \supset B)$	R2, R1 (5)
8. $\Gamma, \neg C, \neg B \to \neg(B \supset B)$	R3 (7, 6)
9. $\Gamma, \neg C \to \neg(B \supset B)$	R3 (8, 3)

10. $\Gamma \rightarrow \neg\neg C$ IRT1a (9)

{Ein anderer Beweis für IRT3a, und zwar ohne Anwendung von IRT1a:

IRT3a: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg\neg C$

1. $\Gamma, B \rightarrow C$ Annahme
2. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$ Annahme
3. $\Gamma, B \vee \neg B \rightarrow C$ R6 (1, 2)
4. $\Gamma, \neg C \rightarrow \neg(B \vee \neg B)$ IRT2 (3)
5. $\Gamma, \neg\neg(B \vee \neg B) \rightarrow \neg\neg C$ IRT2 (4)
6. $\Gamma \rightarrow \neg\neg(B \vee \neg B)$ IT2, R2
6. $\Gamma \rightarrow \neg\neg C$ R3 (5, 6)}.

IRT3b: $\Gamma, B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$ *ISG für Negationen* (NISG)

1. $\Gamma, B \rightarrow \neg C$ Annahme
2. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg C$ Annahme
3. $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg C$ IRT3a {„$\neg C$“ für „C“} (1, 2)
4. $\Gamma, \neg\neg\neg C \rightarrow \neg C$ IT4, R2, R1 {IT4 wird gleich im Folgenden bewiesen, als simple Konsequenz aus IT1 und IRT2}
5. $\Gamma \rightarrow \neg C$ R3 (4, 3)

{NISG, wie ja auch schon GIS3, ist relativ zum (hier relevanten) Rest von **Delta** [nämlich: **Delta** bei bloßer Weglassung des Grundprinzips RKP/IR5] deduktiv äquivalent mit RKP. Dass NISG sich in Rest-**Delta** + RKP/IR5 [also: in **Delta**] ergibt, ist schon gezeigt; umgekehrt ergibt sich RKP wie folgt in Rest-**Delta** +NISG:

RKP: $\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B$

1. $\Gamma, B \rightarrow \neg C$ Annahme
2. $\Gamma, C, \neg B \rightarrow \neg B$ A1, R2, R1
3. $\Gamma, B, C, \neg C \rightarrow \neg B$ A3, R2, R1
4. $\Gamma, B, C \rightarrow \neg C$ R2 (1)
5. $\Gamma, B, C \rightarrow \neg B$ R3 (3, 4)
6. $\Gamma, C, B \rightarrow \neg B$ R1 (5)
7. $\Gamma, C \rightarrow \neg B$ NISG (6, 2).

Beim Schritt von 6. und 2. nach 7. ist die für die Anwendung von NISG relevante Satzformelfolge nicht Γ, sondern Γ, C. „Γ“ steht ja in NISG, wie auch sonst, für eine *beliebige* endliche Folge von Satzformeln – deshalb auch für eine beliebige solche Folge, die um ein Vorkommnis von „C“ verlängert ist.}

Wir können aufgrund von IRT3b und der Anmerkung dazu festhalten: **Delta mit NISG // RKP** ist deduktiv äquivalent mit **Delta**.

Aus dem weiter oben Gesagten ist ersichtlich: Wenn man in **Delta** $\neg\neg A \rightarrow A$ (EDN) als Theorem hätte oder wenigstens $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ – denn dieser Einsetzungsfall von EDN würde auch schon reichen, da sich mit ihm (angesichts von IT2 und R3) $\rightarrow A \vee \neg A$ ergäbe –, so fiele **Delta** mit **Alpha** deduktiv zusammen und wäre nichts anderes als eine andere Formulierung der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik. Aber es ist nicht zu sehen, wie die Schlussformel $\neg\neg A \rightarrow A$ oder die mit ihr bzgl. **Delta** deduktiv äquivalente Schlussformel $\rightarrow A \vee \neg A$ [oder die mit $\rightarrow A \vee \neg A$ bzgl. **Delta** deduktiv äquivalente Schlussformel $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$] in **Delta** – folglich ohne axiomatische Setzung von ISG, sondern nur mit axiomatischer Setzung von RKP – bewiesen werden könnte, zumal beide Schlussformeln [bzw. alle *drei*] bzgl. **Delta** deduktiv äquivalent mit ISG sind.

{EDN ist T2 aufseiten von **Alpha** und wurde da unter Verwendung von R5 bewiesen; und IDN ist T3 aufseiten von **Alpha** und wurde da ebenfalls unter Verwendung von R5 bewiesen:

EDN in **Alpha**:

T2: $\neg\neg A \rightarrow A; \rightarrow \neg\neg A \supset A$

1. $\neg\neg A, A \rightarrow A$	A1, R2, R1
2. $\neg\neg A, \neg A \rightarrow A$	A3, R1
3. $\neg\neg A \rightarrow A$	R5 (1, 2)
4. $\rightarrow \neg\neg A \supset A$	R4 (3).

IDN in **Alpha**:

T3: $A \rightarrow \neg\neg A; \rightarrow A \supset \neg\neg A$

1. $A, \neg A \rightarrow \neg\neg A$	A3
2. $A, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	A1, R2, R1
3. $A \rightarrow \neg\neg A$	R5 (1, 2)
4. $\rightarrow A \supset \neg\neg A$	R4 (3).

Aber während beim Beweis von IDN in **Delta** R5 [ISG] sich als durch IR5 [RKP] ersetzbar erweist, sieht man beim Versuch, EDN in **Delta** zu beweisen, dass diese Ersetzung *da* nicht funktionieren kann:

EDN in **Delta**:

IDN in **Delta** [und abermals in **Alpha**]:

IT1: $A \rightarrow \neg\neg A; \rightarrow A \supset \neg\neg A$

1. $\neg A \rightarrow \neg A$	A1
2. $A \rightarrow \neg\neg A$	IR5 (1)
3. $\rightarrow A \supset \neg\neg A$	R4 (2).

Ausgehend von $\neg A \rightarrow \neg A$ bräuchte man in **Delta** LKP, um wie im Beweis von IT1 vorgehen zu können, um EDN zu gewinnen; aber LKP – das (wie gezeigt) bzgl. **Delta** mit ISG deduktiv äquivalent ist – hat man da eben nicht (*offenbar* nicht) zur Verfügung, sondern nur RKP, *alias* IR5.}

Was sich aber in **Delta** wiederum sehr wohl beweisen lässt, ist dies:

IT3: $\rightarrow \neg\neg(\neg\neg A \supset A)$

1. A, $\neg\neg A \rightarrow A$ A1, R2

2. $A \rightarrow \neg\neg A \supset A$ R4 (1)

3. $\neg A, \neg\neg A \rightarrow A$ A3

4. $\neg A \rightarrow \neg\neg A \supset A$ R4 (3)

5. $\rightarrow \neg\neg(\neg\neg A \supset A)$ IRT3a {SISG} (2, 4)

{Könnte man also in **Delta** *den reflexiven Einsetzungsfall* von EDNs prämissenloser Variante beweisen: $\rightarrow \neg\neg(\neg\neg A \supset A) \supset (\neg\neg A \supset A)$, so fielen abermals **Alpha** und **Delta** deduktiv zusammen. Denn mit dem besagten Einsetzungsfall und IT3 erhält man in **Delta** (unter Verwendung von A2, R1, R2, R3): $\rightarrow \neg\neg A \supset A$, d. h.: die prämissenlose Variante von EDN, also auch $\neg\neg A \rightarrow A$ (wegen RT13) – mit allen schon aufgewiesenen Konsequenzen.}

Und dies:

<u>IT4: $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$</u>

1. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ IT1 {Einsetzungsfall}

2. $A \rightarrow \neg\neg A$ IT1

3. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ IRT2 (2) {die gefolgerte Schlussformel ist SEDN: *Schwaches* EDN}

4. $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$ DEF$\leftrightarrow$ (3, 1)

Und das Folgende ist nichts weiter als ein Einsetzungsfall von IT4:

<u>IT5: $\neg\neg\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg\neg A$</u>

Sequenzen des Negationszeichen lassen sich also in **Delta** sehr wohl beweisbar kürzen, und zwar so, wie es aus IT4 und IT5 ersichtlich ist: bis auf *ein* „¬“ im Fall von ungeradzahligen solchen Sequenzen, bis auf *zwei* „¬“ im Fall von geradzahligen – aber eben nicht weiter: nicht (*offenbar* nicht) bis zur Elimination von „¬“.

Ich gehe im Folgenden davon aus, dass EDN (ob als $\neg\neg A \rightarrow A$ oder, genauso gut, als $\rightarrow \neg\neg A \supset A$) in **Delta** *nicht* beweisbar ist – was sicherlich keine unbegründete Annahme, sondern jenseits vernünftigen Zweifels ist. (Eine weitere Untermauerung dieser Annahme wird im nächsten Kapitel geboten.) Damit ist klar (angesichts des weiter oben Ausgeführten),

dass ISG, TND, LKP, ABKP und GIS2 in **Delta** ebenfalls nicht beweisbar sind, sodass **Delta** eine erhebliche Abschwächung von **Alpha** ist.

Nicht in **Delta** beweisbar ist z. B. auch $\neg\neg(\neg\neg A \supset A) \rightarrow \neg\neg A \supset A$, denn sonst wäre ja wegen IT3 und R3 $\rightarrow \neg\neg A \supset A$, also EDN, in **Delta** beweisbar. Da es jedoch Einsetzungsfälle von EDN gibt, die sehr wohl in **Delta** beweisbar sind [siehe IT4 und IT5, bei beiden Theoremen die Von-links-nach-rechts-Hälfte], stellt sich die Frage, ob es nicht auch Einsetzungsfälle von TND gibt, die in **Delta** beweisbar sind. Die **Delta**-deduktive Äquivalenz von TND und EDN lässt das vielleicht erwarten. Ist insbesondere $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ ein solcher in **Delta** beweisbarer Einsetzungsfall [per „$\neg A$“ für „A“] von TND?[53]

Zur Beantwortung dieser Frage sei zunächst gesagt: Man kommt beim Beweisversuch gut bis zu $\rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg\neg A)$, welche Schlussformel aber nichts weiter als ein Einsetzungsfall der oben schon bewiesenen Schlussformel $\rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ ist (siehe IT2). Daraus ergäbe sich mit $\neg\neg(\neg A \vee \neg\neg A) \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ (und R3) das Erwünschte; aber wie wäre denn nun *dieser* Einsetzungsfall von EDN in **Delta** zu beweisen?

Tatsächlich ist nicht zu sehen, wie$\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ in **Delta** beweisbar sein könnte; doch ein Beweis für die Nichtbeweisbarkeit in **Delta** dieser Schlussformel fehlt bislang – und sei es nur ein Beweis unter der gerade eben festgemachten Voraussetzung, dass EDN und seine erwiesenen **Delta**-deduktiven Äquivalente ISG, TND, LKP, ABKP, GIS2 in **Delta** *nicht* beweisbar sind.

Wie gesehen sind ISG und TND bzgl. **Delta** deduktiv äquivalent:

1. $\Gamma, B \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$	Annahme
3. $\Gamma, B \vee \neg B \rightarrow C$	R6 (1, 2)
4. $\rightarrow B \vee \neg B$	TND
5. $\Gamma \rightarrow B \vee \neg B$	R2, R1 (4)
6. $\Gamma \rightarrow C$	R3 (3, 5) – womit nun mit TND ISG hergeleitet ist.

---

1. $B \rightarrow B \vee \neg B$	A4

[53] Alle anderen *reinen Negationsspezialisierungen* von TND [mit „A“]: $\rightarrow \neg\neg A \vee \neg\neg\neg A$, $\rightarrow \neg\neg\neg A \vee \neg\neg\neg\neg A$, $\rightarrow \neg\neg\neg\neg A \vee \neg\neg\neg\neg\neg A$, usw. reduzieren sich auf der Grundlage der Prinzipien von **Delta**, insbesondere gemäß IT4, IT5 und T17a (also der *„oder“-Kommutativität*), auf $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$.

2. $\neg B \rightarrow B \vee \neg B$ A4

3. $\rightarrow B \vee \neg B$ ISG (1, 2) – womit nun mit ISG TND hergeleitet ist.

Aus diesem Beweis lässt sich [per uniforme Substitution: „$\neg B$“ für „B“] leicht ablesen, dass auch $\Gamma, \neg B \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$ und$\rightarrow \neg B \vee \neg\neg B$ bzgl. **Delta** deduktiv äquivalent sind. Das Schema $\Gamma, \neg B \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$ für Schlussregelformeln ist nun offensichtlich keineswegs ISG, sondern eine Spezialisierung davon, ebenso wie (auf andere Weise) NISG eine Spezialisierung von ISG ist (nicht aber SISG: es kann nicht durch uniforme Substitution aus ISG gewonnen werden). NISG ist in **Delta** beweisbar und bzgl. des verbleibenden **Delta** ein deduktives Äquivalent von RKP, dem **Delta**-Grundgesetz IR5: siehe IRT3b plus Zusatzbemerkung. Es sieht jedoch nicht danach aus, dass $\Gamma, \neg B \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$ in **Delta** beweisbar ist, sondern danach, dass es dort nicht beweisbar ist, und zwar, *ohne* dass es bzgl. **Delta** mit ISG deduktiv äquivalent wäre. Von daher könnte man $\Gamma, \neg B \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$, d. h.: *das vornverminderte inhaltliche Schnittgesetz* (VISG), oder vorzugsweise sein **Delta**-deduktives Äquivalent $\rightarrow \neg B \vee \neg\neg B$, d. h.: *das schwache tertium non datur* (STND), den Grundgesetzen von **Delta** hinzufügen, damit zu **Delta*** übergehen, und würde trotzdem nicht einen Kalkül erhalten, der deduktiv äquivalent zu **Alpha** wäre. Die Lage wäre also im Blick auf die *eine* Stelle in den Grundgesetzen, in dem die Kalküle **Delta**, **Delta*** und **Alpha** voneinander abweichen, *diese*:

Bei **Alpha**: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \Rightarrow C$ [ISG]

Bei **Delta***: $\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B$ und $\rightarrow \neg B \vee \neg\neg B$ [RKP und STND]

Bei **Delta**: $\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B$ [RKP]

Oder indem unter den Namen „**Delta**“ und „**Delta***“ von mit **Delta** bzw. **Delta*** eigentlich nur deduktiv äquivalenten Kalkülen ausgegangen wird und man sich – für Vergleichszwecke vorteilhaft – rein auf Schnittgesetze konzentriert:

Bei **Alpha**: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \Rightarrow C$ [ISG]

Bei **Delta***: $\Gamma, B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$ und $\Gamma, \neg B \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$ [NISG und VISG]

Bei **Delta**: $\Gamma, B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$ [NISG]

Es sieht nicht danach aus, dass ISG eine Konsequenz von NISG zusammen mit VISG in **Delta*** wäre (wodurch **Delta*** mit **Alpha** zusammenfallen würde), oder dass VISG sich aus NISG in **Delta** ergäbe (wodurch **Delta*** mit **Delta** zusammenfallen würde).

Die Schlussformel $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ [oder $\rightarrow \neg B \vee \neg\neg B$; es ist gleichgültig] ist, wie gesagt, *das schwache tertium non datur*: STND. Wie TND ist STND in **Delta** nicht beweisbar (darauf weist alles hin). Mit STND lässt sich – anders als mit TND (siehe oben in diesem Kapitel) – EDN auf der Grundlage von **Delta** nicht mehr gewinnen; ersetzt man in der oben angegebenen **Delta**-basierten Herleitung von EDN aus TND TND durch STND, so bekommt nur noch eine Herleitung von $\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B$ [eine ganz andere als die aus dem Beweis von IT4 ersichtliche], nicht aber eine von $\neg\neg B \rightarrow B$. Die Herleitung jedoch bzgl. **Delta** von TND auf der Basis von EDN (siehe oben in diesem Kapitel) vereinfacht sich bei zusätzlicher hypothetischer Heranziehung von STND ganz erheblich; statt 18 Schritte braucht man nur noch 7:

1. $\neg\neg A \rightarrow A$ <u>EDN</u>
2. $A \rightarrow A \vee \neg A$ A4
3. $\neg\neg A \rightarrow A \vee \neg A$ RT7 (1, 2)
4. $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$ A4
5. $\neg A \vee \neg\neg A \rightarrow A \vee \neg A$ R6 (4, 3)
6. $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ <u>STND</u>
7. $\rightarrow A \vee \neg A$ R3 (5, 6)

{Trivialerweise verwandelt die Hinzufügung von EDN zu **Delta*** **Delta*** genauso in **Alpha** (genauer gesagt: in einen mit **Alpha** deduktiv äquivalenten Kalkül), wie dieselbe Hinzufügung **Delta** in **Alpha** verwandelt; denn **Delta*** enthält ja deduktiv **Delta**, wobei beide Kalküle ihrerseits deduktiv in **Alpha** enthalten sind. Es ist nur so, dass für **Delta***, wo STND ein zusätzliches Grundgesetz ist, dieses Ergebnis erheblich leichter als für **Delta** erlangt werden kann; wenngleich selbstverständlich auch der schwerere Weg zur Verfügung steht, nämlich, indem man sich in **Delta*** ausschließlich auf **Delta**-Mittel beschränkt.}

Es sei in diesem Zusammenhang im Nachzug zu schon erfolgten Deduktionen aus wichtigen Gründen (siehe die zugehörigen, gleich folgenden Anmerkungen) noch ausdrücklich festgehalten:

IRT4a: $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A \Rightarrow \rightarrow A \vee \neg A$

IRT4b: $\rightarrow A \vee \neg A \Rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$

{Das sind – „ausnahmsweise" – *direkt präsentierte* Regelgesetze, und nicht zunächst Regelgesetz*schemata* (wobei Regelgesetzschemata in diesem Buch aus Gründen der Konvenienz ebenfalls „Regelgesetze" genannt werden). Die **Delta**-Beweise für IRT4(a) und IRT4(b) sind zu entnehmen den zwei Deduktionen zu Anfang dieses Kapitels, die der Darlegung der **Delta**-deduktiven Äquivalenz von TND und EDN dienten. *Man beachte* (es ist wichtig), dass die erste dieser Deduktionen (die 18-schrittige) nicht etwa zeigt, dass $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A \vee \neg A$ eine in **Delta** beweisbare Schlussregelformel ist; denn $\neg\neg A \rightarrow A$ [EDN] ist gar keine *Annahme* jener Deduktion, sondern tatsächlich (siehe Zeile 17) ist eine *Annahme* von ihr nur $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ [also ein *einschränkender* Einsetzungsfall von EDN]. Die erste jener Deduktionen zeigt deshalb nur, dass wenn $\neg\neg A \rightarrow A$ eine in **Delta** beweisbare Schlussformel *wäre*, dass dann auch $\rightarrow A \vee \neg A$ eine in **Delta** beweisbare Schlussformel *wäre*, aber *nicht* dass $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A \vee \neg A$ eine in **Delta** beweisbare Schlussregelformel *ist*. (Die zweite jener beiden Deduktionen hingegen verwendet tatsächlich TND *ganz ohne einsetzungsfallbedingte Einschränkungen* als *Annahme* und zeigt deshalb nicht nur, dass wenn $\rightarrow A \vee \neg A$ in **Delta** beweisbar *wäre*, dass dann auch $\neg\neg A \rightarrow A$ eine in Delta beweisbare Schlussformel *wäre*, sondern zudem, dass $\rightarrow A \vee \neg A \Rightarrow \neg\neg A \rightarrow A$ eine in **Delta** beweisbare Schlussregelformel *ist*.)

Hätte man $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A \vee \neg A$ – und eben nicht bloß $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A \Rightarrow \rightarrow A \vee \neg A$ – als beweisbar in **Delta**, so wäre es übrigens überhaupt kein Problem STND in **Delta** zu beweisen. Denn $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A \Rightarrow \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ ist ja ein Einsetzungsfall von $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A \vee \neg A$ [„$\neg A$" uniform für „A"]. Also würde in **Delta** wegen IT4 (spezifischer: der 3. Zeile im Beweis von IT4) $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ [STND] folgen.}

{*Allgemeiner* ist zu den Verhältnissen, die in der unmittelbar vorausgehenden Anmerkung exemplarisch angesprochen wurden, das Folgende zu sagen (wobei mit $\chi \Rightarrow_K \chi'$ zum Ausdruck gebracht sei, dass die Schlussregelformel $\chi \Rightarrow \chi'$ im Schlussformelkalkül K beweisbar ist, mit $\Rightarrow_K: \chi'$ hingegen, dass die Schlussformel χ' in K beweisbar ist). Sei π bzw. ρ eine Schlussformel, die zu K als beweisbares Prinzip hinzugenommen wird:

Aus $\Rightarrow_{K+\pi}: \chi$ folgt nicht generell $\pi \Rightarrow_K \chi$, aber aus $\rho \Rightarrow_K \chi'$ folgt sehr wohl generell $\Rightarrow_{K+\rho}: \chi'$. Z. B. folgt aus $\Rightarrow_{\mathbf{Delta} + \neg\neg A \rightarrow A}: \rightarrow A \vee \neg A$ (was ja gilt, wie wir gesehen haben) *nicht* $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \rightarrow A \vee \neg A$; aber aus $\rightarrow A \vee \neg A \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \neg\neg A \rightarrow A$ (was ebenfalls gilt, wie wir gesehen haben) folgt im Sinne des eben angesprochenen generell bestehenden Folgerungsverhältnisses sehr wohl $\Rightarrow_{\mathbf{Delta} + \rightarrow A \vee \neg A}: \neg\neg A \rightarrow A$. Durch die erste der beiden Deduktionen zu Anfang dieses Kapitels – die in der vorausgehenden Anmerkung schon angesprochen wurden – ist gezeigt: $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \rightarrow A \vee \neg A$ [durch die zweite hingegen $\rightarrow A \vee \neg A \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \neg\neg A \rightarrow A$], damit auch $\Rightarrow_{\mathbf{Delta} + \neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A}: \rightarrow A \vee \neg A$ (im Sinne des des eben angesprochenen generell bestehenden Folgerungsverhältnisses), *damit aber* auch $\Rightarrow_{\mathbf{Delta}+ \neg\neg A \rightarrow A}: \rightarrow A \vee \neg A$, weil $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ ja ein Einsetzungsfall von $\neg\neg A \rightarrow A$ ist. Aus $\Rightarrow_{\mathbf{Delta}+\neg\neg A \rightarrow A}: \rightarrow A \vee \neg A$ kann man aber mitnichten $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \rightarrow A \vee \neg A$ folgern; denn $\neg\neg A \rightarrow A \Rightarrow \rightarrow A \vee \neg A$ ist keine in **Delta** beweisbare Schlussregelformel (sonst wäre die Beweis-

barkeit von STND in **Delta** – bei seiner doch gegebenen Nichtbeweisbarkeit in **Delta** – die unausbleibliche Folge, wie in der vorausgehenden Anmerkung schon dargelegt wurde).

Die generelle Problematik dessen, aus $\Rightarrow_{K+\pi}$: χ ohne Weiteres $\pi \Rightarrow_K \chi$ folgern zu wollen, lässt sich auch durch ein einfacheres, aber strukturell zu dem bislang betrachteten Beispiel exakt parallelles Beispiel aufzeigen. Eine einfache Deduktion zeigt nämlich $\rightarrow A \wedge \neg A \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \rightarrow C$:

1. $A, \neg A \rightarrow C$ A3
2. $A \wedge \neg A \rightarrow C$ R7 (1)
3. $\rightarrow A \wedge \neg A$ Annahme
4. $\rightarrow C$ R3 (2, 3).

Also gilt auch $\Rightarrow_{\mathbf{Delta} + \rightarrow A \wedge \neg A}$: $\rightarrow C$, *damit aber* auch $\Rightarrow_{\mathbf{Delta} + \rightarrow A \wedge B}$: $\rightarrow C$, weil $\rightarrow A \wedge \neg A$ ja ein Einsetzungsfall von $\rightarrow A \wedge B$ ist; oder anschaulich als konkrete Deduktion realisiert:

1. $A, \neg A \rightarrow C$ A3
2. $A \wedge \neg A \rightarrow C$ R7 (1)
3. $\rightarrow A \wedge \neg A$ Einsetzungsfall von $\rightarrow A \wedge B$
4. $\rightarrow C$ R3 (2, 3).

Hieraus – aus $\Rightarrow_{\mathbf{Delta} + \rightarrow A \wedge B}$: $\rightarrow C$ – kann man aber mitnichten $\rightarrow A \wedge B \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \rightarrow C$ folgern; denn $\rightarrow A \wedge B \Rightarrow \rightarrow C$ ist keine in **Delta** beweisbare Schlussregelformel (sonst wäre die Beweisbarkeit von $\rightarrow C$ in **Delta** – bei seiner doch gegebenen Nichtbeweisbarkeit in **Delta** – die unausbleibliche Folge, denn $\rightarrow (A \supset A) \wedge (A \supset A) \Rightarrow \rightarrow C$ ist ein Einsetzungsfall von $\rightarrow A \wedge B \Rightarrow \rightarrow C$ und $\rightarrow (A \supset A) \wedge (A \supset A)$ ist eine in **Delta** beweisbare Schlussformel. Der rein beweistechnische Grund dafür, dass $\rightarrow A \wedge B \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \rightarrow C$ nicht resultiert, ist aber, dass in der eben angegebenen zugehörigen Deduktion, welche prima facie $\rightarrow A \wedge B \Rightarrow_{\mathbf{Delta}} \rightarrow C$ zu zeigen scheint, die Schlussformel $\rightarrow A \wedge B$ gar nicht als Annahme verwendet wird, sondern nur ihr Einsetzungsfall $\rightarrow A \wedge \neg A$.}

Das Ausmaß der Abschwächung von **Alpha** zu **Delta** sei noch ein wenig weiterverfolgt. In **Delta** sind *im Gleichklang mit* **Alpha** die folgenden Schlussformeln beweisbar, während ihre jeweiligen Umkehrungen, *im Ungleichklang mit* **Alpha**, in **Delta** *nicht* beweisbar sind:

IT6: $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

{Siehe den [**Alpha**-]Beweis von T10 bis zur 5. Zeile. Im fraglichen Beweisabschnitt werden außer RT4, alias RKP, *alias* IR5, nur **Alpha**-Prinzipien verwendet, die frei von R5 [ISG] bewiesen sind [sei es qua Grundprinzip oder qua echtbewiesen]. Folglich ist die Kennzeichnung des durch den Beweisabschnitt gegebenen **Delta**-Theorems mit „I“, also als eines der eigentümlichen **Delta**-Theoreme, *gerechtfertigt*, sobald nur in der Beweiskommentierung „RT4“ durch „IR5“ ersetzt ist (vgl. dazu Fußnote 52). [Der typographische Inhalt von T10, 1. Hälfte, kann aber *nicht* auch unter der Bezeichnung „T10, 1. Hälfte“ als **Delta**-Prinzip geführt werden; denn RT4 – im fraglichen **Alpha**-Beweis in der 2. und 4. Zeile verwendet – ist in **Alpha** über RT3 von R5 abhängig (siehe die zu den beiden Regelgesetzen gehörigen Beweise), sodass R5 in jenem Beweis *indirekt* eine

Rolle spielt, und zwar auch schon in seinen ersten fünf Zeilen.] Die Umkehrung, $\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$, ist *deshalb* nicht in **Delta** beweisbar, weil s*onst* – bei Beweisbarkeit dieser Schlussformel in **Delta** – durch den Einsetzungsfall $\neg(\neg A \wedge \neg\neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ von ihr wegen der Beweisbarkeit von $\rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$ in **Delta** [um $\rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$ zu beweisen, braucht der Beweis von IT11 bloß leicht modifiziert zu werden] auch $\rightarrow A \vee \neg A$ in **Delta** beweisbar wäre – welche Schlussformel nun aber gerade *nicht* in **Delta** beweisbar ist.}

IT7: $A \wedge B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

{Siehe den Beweis von T11 ab der 6. Zeile bis zur 11. Zeile. Im fraglichen Beweisabschnitt werden außer RT4, alias RKP, *alias* IR5, und RT3, alias AUKP, *alias* IRT2, nur **Alpha**-Prinzipien verwendet, die frei von R5 [ISG] bewiesen sind. Die Kennzeichnung des durch den Beweisabschnitt gegebenen **Delta**-Theorems mit „I“ ist also gerechtfertigt, sobald nur in der Beweiskommentierung „RT4“ durch „IR5“ und „RT3“ durch „IRT2“ ersetzt ist. Die Umkehrung, $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \wedge B$, ist *deshalb* nicht in **Delta** beweisbar, weil *sonst* auch $\neg(\neg A \vee \neg A) \rightarrow A \wedge A$ in **Delta** beweisbar wäre [als Einsetzungsfall], *also* wegen der Beweisbarkeit in **Delta** von $\neg\neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg A)$ [siehe unten] und von $A \wedge A \rightarrow A$ [ein Einsetzungsfall von T9, welches Theorem nur mit **Alpha**-Prinzipien, die frei von R5 bewiesen sind, bewiesen ist] mit RT7 (passend angewendet) auch $\neg\neg A \rightarrow A$ in **Delta** beweisbar wäre, welches Schlussformel nun aber gerade *nicht* in **Delta** beweisbar ist. Der noch nachzutragende Beweis von $\neg\neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg A)$:

1. $\neg A \rightarrow \neg A$	A1
2. $\neg A \rightarrow \neg A$	A1
3. $\neg A \vee \neg A \rightarrow \neg A$	R6 (1, 2)
4. $\neg\neg A \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg A)$	IRT2 (3).}

IT8: $A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$

1. $A \supset B, A \rightarrow B$	A2, R1
2. $A \supset B, A, B \rightarrow \neg\neg B$	IT1, R2, R1
3. $A \supset B, A \rightarrow \neg\neg B$	R3 (2, 1)
4. $A \supset B, \neg B \rightarrow \neg A$	IR5 (3)
5. $A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$	R4 (4)

{Die Umkehrung – $\neg B \supset \neg A \rightarrow A \supset B$ – ist *deshalb* nicht in **Delta** beweisbar, weil *sonst* wegen der Beweisbarkeit von $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ in **Delta** auch $\neg\neg A \rightarrow A$ in **Delta** beweisbar wäre, diese Schlussformel aber nun eben *nicht* in **Delta** beweisbar ist:

1. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$	IT1
2. $\rightarrow \neg A \supset \neg\neg\neg A$	R4 (1)
3. $\neg A \supset \neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \supset A$	Einsetzungsfall von $\neg B \supset \neg A \rightarrow A \supset B$ [als beweisbar *supponiert*]
4. $\rightarrow \neg\neg A \supset A$	R3 (3, 2)

5. $\neg\neg A \rightarrow A$ RT13 (4) – RT13 ist frei von R5 in **Alpha** bewiesen}

IT9: $\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$

{Siehe den Beweis von T8 bis zur 3. Zeile. Im fraglichen Beweisabschnitt werden nur **Alpha**-Prinzipien verwendet, die frei von R5 [ISG] bewiesen sind; deshalb wird die Schlussformel $\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$ unter der Listenbezeichnung „T8, 2. Hälfte" *auch als* **Delta**-Prinzip geführt (siehe zu diesem Vorgehen Fußnote 52). Die mit der „I"-Kennzeichnung versehene Listenbezeichnung „IT9" wird ihr aber zusätzlich verliehen, weil es sich bei dem vorliegenden Theorem um eine für **Delta** höchst markante, den Kalkül gegen **Alpha**, **Gamma** und **Gamma*** abgrenzende Angelegenheit handelt: wegen der *Nichtbeweisbarkeit* in **Delta** *der Umkehrung* des Theorems (die in **Alpha**, **Gamma** und **Gamma*** beweisbar ist!). Die Umkehrung – $A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$ – ist *deshalb* nicht in **Delta** beweisbar, weil *sonst* ja auch $A \supset A \rightarrow \neg A \vee A$ in **Delta** beweisbar wäre, also wegen den **Alpha/Delta**-Prinzipien T17a und RT7 auch $A \supset A \rightarrow A \vee \neg A$, woraus sich mit den **Alpha/Delta**-Prinzipien T5 [$\rightarrow A \supset A$] und R3 $\rightarrow A \vee \neg A$ in **Delta** ergeben würde. Aber $\rightarrow A \vee \neg A$ [TND] ist in **Delta** *nicht* beweisbar.}

{$\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$ ist also ein Beispiel für eine Schlussformel, die *als* **Delta**-Prinzip eine doppelte Listenbezeichnung hat: „T8, 2. Hälfte" und „IT9". Allerdings kommt ihr die „I"-Kennzeichnung nur „ehrenhalber" zu (siehe die vorausgehende Anmerkung und Fußnote 52, letzter Satz). In Ermangelung eines schon vorhandenen Beispiels für die in Fußnote 52 als möglich behauptete, nicht bloß „ehrenhalber" erfolgende Bezeichnungsdopplung sei hier ein Beispiel *konstruiert*:

In **Alpha**:

T*N*: $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg A$

1. $B, \neg A \rightarrow \neg A$	A1, R2, R1
2. $B, \neg B \rightarrow \neg A$	A3
3. $B, \neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A$	R6 (1, 2)
4. $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg A$	R1 (3).

In **Delta**:

IT*N´*: $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg A$

1. $\neg A \vee \neg B, B, \neg\neg B \rightarrow \neg A$	T12 [Einsetzungsfall], R2, R1
2. $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg\neg B$	IT1, R2, R1
3. $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg A$	R3 (1, 2).

Zunächst: Die rechte Deduktion ist eine Deduktion in **Delta**, denn T12 – das **Alpha**-Theorem, das in dieser Deduktion verwendet wird – ist frei von R5/ISG bewiesen (und also unter der Bezeichnung „T12" nicht nur ein **Alpha**-, sondern auch ein **Delta**-Prinzip. *Weiterhin*: Der Schlussformel $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg A$ als in **Alpha** wie vorgelegt bewiesener Schlussformel ist die Listenbezeichnung „T*N*" zu geben, hingegen als in **Delta** wie vorgelegt bewiesener Schlussformel wegen IT1, welches Theorem mithilfe von IR5 bewiesen ist, die Listenbezeichnung „IT*N´*" (welches arabische Numeral mit „*N*" bzw. „*N´*" konkret gemeint ist, richtet sich nach dem konkreten Platz der Schlussformel in der jeweiligen konkreten Liste von Theoremen). *Schließlich*: Da im gegebenen **Alpha**-Beweis von $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg A$ R5/ISG keine Rolle spielt (keine direkte und auch keine indirekte), ist die Listenbezeichnung „T*N*" auch für $\neg A \vee \neg B, B \rightarrow \neg A$ *als* **Delta**-Theorem in Geltung – *neben* der davon verschiedenen Listenbezeichnung „IT*N´*".}

IT10: $A \supset B \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

1. $A, A \supset B, \neg B \rightarrow B$	A2, R2
2. $A, A \supset B, \neg B, B \rightarrow \neg(C \supset C)$	A3, R2, R1
3. $A, A \supset B, \neg B \rightarrow \neg(C \supset C)$	R3 (2, 1)
4. $A \supset B, A, \neg B \rightarrow \neg(C \supset C)$	R1 (3)
5. $A \supset B, A \wedge \neg B \rightarrow \neg(C \supset C)$	R7 (4)
6. $A \supset B \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$	IRT1a (5)

{Die Umkehrung, $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow A \supset B$, ist *deshalb* nicht in **Delta** beweisbar, weil *sonst* auch $\neg(\neg\neg A \wedge \neg A) \rightarrow \neg\neg A \supset A$ in **Delta** beweisbar wäre, also wegen der Beweisbarkeit von $\rightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg A)$ in **Delta** [siehe gleich anschließend IT11], auch $\rightarrow \neg\neg A \supset A$, also mit RT13 auch $\neg\neg A \rightarrow A$ – was nun aber in **Delta** gerade *nicht* beweisbar ist.}

IT11: $\rightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg A)$

1. $\neg\neg A, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	A3, R1
2. $\neg\neg A \wedge \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R7 (1)
3. $B \supset B \rightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg A)$	IR5 (2)
4. $\rightarrow B \supset B$	T5
5. $\rightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg A)$	R3 (3, 4)

Die zu beobachtende „Vereinseitigung“ der intuitionistische Aussagenlogik setzt sich auch bei den Regelgesetzen fort. In der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik – in **Alpha** – ist das doppelseitige Regelgesetz $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$ beweisbar; in der intuitionistischen Aussagenlogik – in **Delta** – nur das Regelgesetz $A \leftrightarrow B \Rightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$:

IRT5: $A \leftrightarrow B \Rightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

1. $A \leftrightarrow B$	Annahme
2. $A \rightarrow B$	DEF↔ (1)
3. $B \rightarrow A$	DEF↔ (1)
4. $\neg B \rightarrow \neg A$	IRT2 (2)
5. $\neg A \rightarrow \neg B$	IRT2 (3)
6. $\neg A \leftrightarrow \neg B$	DEF↔ (5, 4)

{Die Umkehrung, $\neg A \leftrightarrow \neg B \Rightarrow A \leftrightarrow B$, ist *deshalb* nicht in **Delta** beweisbar, weil *sonst* wegen der Beweisbarkeit in **Delta** von $\neg(A \supset A) \leftrightarrow \neg(A \vee \neg A)$ – siehe gleich anschließend IT12 – auch $A \supset A \leftrightarrow A \vee \neg A$ in **Delta** beweisbar wäre, also wegen der Beweisbarkeit von $\rightarrow A \supset A$ in **Delta** auch $\rightarrow A \vee \neg A$ in **Delta** beweisbar wäre – welche letztere Schlussformel nun aber gerade *nicht* in **Delta** beweisbar ist.}

Doch hat das Ausbleiben von **Alpha**-Doppelseitigkeiten in **Delta** auch seine Grenzen:

IT12: $\neg(A \supset A) \leftrightarrow \neg(A \vee \neg A)$

1. $\neg(A \supset A), A \supset A \rightarrow \neg(A \vee \neg A)$ A3, R1
2. $\neg(A \supset A) \rightarrow A \supset A$ T5, R2
3. $\neg(A \supset A) \rightarrow \neg(A \vee \neg A)$ R3 (1, 2)
4. $\neg(A \vee \neg A), \neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \supset A)$ A3
5. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ IT2, R2
6. $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \supset A)$ R3 (4, 5)
7. $\neg(A \supset A) \leftrightarrow \neg(A \vee \neg A)$ DEF$\leftrightarrow$ (3, 6)

Außer IT12 gibt es noch andere „überraschende“ gemeinsame [*typographisch* gemeinsame] *doppelseitige* Prinzipien bei klassischer wahrheitsfunktionaler und nichtklassischer intuitionistischer Aussagenlogik, bei **Alpha** und **Delta**:

IT13: $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

1. $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ IT6
2. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$ IR5 (1)
3. $A \rightarrow A \vee B$ A4
4. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$ IRT2 (3)
5. $B \rightarrow A \vee B$ A4
6. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$ IRT2 (5)
7. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$ RT2 (4, 6) {RT2 ist auch ein **Delta**-Regelgesetz}
8. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ DEF$\leftrightarrow$ (7, 2)

IT14: $\neg\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

1. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ IT13

2. ¬¬(A ∨ B) ↔ ¬(¬A ∧ ¬B) IRT5 (1)

Im Unterschied zu ¬(A ∨ B) ↔ ¬A ∧ ¬B ist nun aber „erstaunlicherweise“ dessen Dual ¬(A ∧ B) ↔ ¬A ∨ ¬B *nicht* in **Delta** beweisbar, sondern nur die eine Seite davon: ¬A ∨ ¬B → ¬(A ∧ B):

IT15: ¬A ∨ ¬B → ¬(A ∧ B)

1. A ∧ B → A T9
2. A ∧ B → B T9
3. ¬A → ¬(A ∧ B) IRT2 (1)
4. ¬B → ¬(A ∧ B) IRT2 (2)
5. ¬A ∨ ¬B → ¬(A ∧ B) R6 (3, 4)

{Die Umkehrung, ¬(A ∧ B) → ¬A ∨ ¬B, ist *deshalb* nicht in Delta beweisbar, weil *sonst* STND in **Delta** beweisbar wäre (das aber in **Delta** *nicht* beweisbar ist):

1. ¬(A ∧ ¬A) → ¬A ∨ ¬¬A Einsetzungsfall von ¬(A ∧ B)→ ¬A ∨ ¬B [als beweisbar supponiert]
2. →¬(A ∧ ¬A) ein **Delta**-Theorem [man ersetze im Beweiskommentar von T13 „RT4“ durch „IR5“]
3. → ¬A ∨ ¬¬A R3 (1, 2).}

IT16: ¬(A ∧ B) ↔ A ⊃ ¬B

1. A, A ⊃ ¬B → ¬B A2
2. A, B → ¬(A ⊃ ¬B) IR5 (1)
3. A ∧ B → ¬(A ⊃ ¬B) R7 (2)
4. A ⊃ ¬B → ¬(A ∧ B) IR5 (3)
5. A, B → A ∧ B A5
6. A, ¬(A ∧ B) → ¬B IRT2 (5)
7. ¬(A ∧ B), A → ¬B R1 (6)
8. ¬(A ∧ B) → A ⊃ ¬B R4 (7)
9. ¬(A ∧ B) ↔ A ⊃ ¬B DEF↔ (8, 4)

IT17: ¬¬(A ∧ B) ↔ ¬(A ⊃ ¬B)

1. ¬(A ∧ B) ↔ A ⊃ ¬B IT16

2. $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$ IRT5 (1)

IT18: $A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$

1. $A, A \supset B \rightarrow B$ A2
2. $A, \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$ IRT2 (1)
3. $A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$ R7 (2)

Was folgt, ist die Beinahe-Umkehrung von IT18 (aber eben nur die *Beinahe*-Umkehrung):

IT19: $\neg(A \supset B) \rightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$

1. $B, A \rightarrow B$ A1, R2
2. $B \rightarrow A \supset B$ R4 (1)
3. $\neg(A \supset B) \rightarrow \neg B$ IRT2 (2)
4. $\neg A, A \rightarrow B$ A3, R1
5. $\neg A \rightarrow A \supset B$ R4 (4)
6. $\neg(A \supset B) \rightarrow \neg\neg A$ IRT2 (5)
7. $\neg(A \supset B) \rightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$ RT2 (6, 3)

Wäre sowohl die Umkehrung von IT18 als auch die Umkehrung von IT19 in **Delta** beweisbar, so wäre wegen RT7 in **Delta** auch beweisbar: $\neg\neg A \wedge \neg B \rightarrow A \wedge \neg B$, und *also* als Einsetzungsfall davon in **Delta** beweisbar: $\neg\neg A \wedge \neg(\neg\neg A \wedge \neg A) \rightarrow A \wedge \neg(\neg\neg A \wedge \neg A)$, woraus sich (unter Berücksichtigung von IT11 und anderen **Delta**-Prinzipien) die Beweisbarkeit in **Delta** von EDN ergäbe; EDN ist aber in **Delta** *nicht* beweisbar. Doch welche der beiden fraglichen Umkehrungen, $\neg(A \supset B) \rightarrow A \wedge \neg B$ und $\neg\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$, ist nun in **Delta** nicht beweisbar? Es sind ja nicht beide in **Delta** beweisbar (weil sonst es auch EDN wäre). Oder sind gar beide in **Delta** nicht beweisbar? Prima facie liegt das Letztere nahe. Doch tatsächlich verhält es sich anders, denn die Umkehrung von IT19 *ist* in **Delta** beweisbar:

IT20: $\neg\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$

1. $A \supset B, A \rightarrow B$ A2, R1
2. $A \supset B, \neg B \rightarrow \neg A$ IRT2 (1)

3. $\neg\neg A, \neg B, A \supset B \rightarrow \neg A$	R2, R1 (2)
4. $\neg\neg A, \neg B, A \supset B, \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	A3, R2, R1
5. $\neg\neg A, \neg B, A \supset B \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (4, 3)
6. $\neg\neg A, \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$	IRT1a (5)
7. $\neg\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \supset B)$	R7 (6)

Damit steht fest (aufgrund der obigen Argumentation), dass die Umkehrung von IT18 in **Delta** nicht beweisbar ist. Allerdings wurde dieses Ergebnis per Ausschlussverfahren erreicht; lässt es sich auch mit der bisher verfolgten, direkteren Methode, Nichtbeweisbarkeit in **Delta** zu zeigen, erlangen? Das Folgende zeigt, dass das fragliche Ergebnis sich auch mit *eben dieser Methode* erlangen lässt:

Wäre $\neg(A \supset B) \rightarrow A \wedge \neg B$ – die Umkehrung von IT18 – in **Delta** beweisbar, so auch als etwas komplexerer Einsetzungsfall davon: $\neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B)) \rightarrow (A \vee \neg A) \wedge \neg\neg(B \supset B)$. Nun ist aber $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$ in **Delta** beweisbar. Folglich wäre wegen R3 etc. auch $\rightarrow A \vee \neg A$ in **Delta** beweisbar – was nun gerade *nicht* der Fall ist.

Aber *ist* denn $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$ in **Delta** beweisbar? Es *ist* in **Delta** beweisbar:

<u>IT21: $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$</u>

1. $A \vee \neg A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$	A2
2. $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), A, A \vee \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R2, R1 (1)
3. $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), A \rightarrow A \vee \neg A$	A4, R2, R1
4. $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (2, 3)
5. $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), \neg A, A \vee \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R2, R1 (1)
6. $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), \neg A \rightarrow A \vee \neg A$	A4, R2, R1
7. $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (5, 6)
8. $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$	IRT3b {NISG} (4, 7)
9. $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$	IRT1a {GIS1} (8)

{Außerdem: Wegen IT19 und IT20 – *zusammen*: $\neg(A \supset B) \leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg B$ – beläuft sich $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$ in **Delta** auf $\rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A) \wedge \neg\neg(B \supset B)$, und Letzteres ist selbstverständlich in **Delta** beweisbar [im Blick auf IT2, T5, IT1, etc.].}

Wesentlich einfacher, freilich, geht der Beweis im *vollen* **Alpha**, das über **Delta** axiomatisch hinausragt:

T26: $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$

1. $A \vee \neg A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$	A2
2. $A \vee \neg A \rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$	RT8 {GIS1, IRT1a} (1)
3. $\rightarrow A \vee \neg A$	T1 {aber *kein* **Delta**-Theorem}
4. $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$	R3 (2, 3)

An dem folgenden **Delta**-Regelgesetz, übrigens, lässt sich eine allgemeine Beobachtung über Schlussformelkalküle festmachen:

IRT6: $\rightarrow A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \Rightarrow \rightarrow \neg(B \supset B)$

1. $\rightarrow A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B)$	Annahme
2. $A \rightarrow A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B)$	R2 (1)
3. $A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow A \vee \neg A$	A4, R2
4. $A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), A \vee \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	A2, R2, R1
5. $A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (4, 3)
6. $A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (5, 2)
7. $\neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	wie 6. ab 2. gewonnen {wobei „A“, wenn es nicht im Satzformelkontext steht, durch „¬A“ ersetzt ist}
8. $\rightarrow \neg(B \supset B)$	IRT3b {NISG} (6, 7)

{Der Weg zu 7.:

2´. $\neg A \rightarrow A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B)$	R2 (1)
3´. $\neg A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow A \vee \neg A$	A4, R2
4´. $\neg A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B), A \vee \neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	A2, R2, R1
5´. $\neg A, A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (4´, 3´)
6´. $\neg A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (5´, 2´).

D. h.: Zeile 7 im Beweis von IRT6 ist soeben aus Zeile 1 im Beweis in IRT6 gewonnen worden.}

Die Suggestion ist sehr stark, dass man doch mit IRT6 unmittelbar auf $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$ schließen können müsste, also IT21 auch auf diesem anderen Wege etablieren können

müsste. Intuitiv ist dieser Gedanke sicher richtig, aber im Kalkül **Delta** – und auch in **Alpha** – ist der fragliche Übergang keineswegs vorgesehen. Das folgende – intuitiv zweifelsohne logisch valide – *höherstufige* Regelgesetz, wie es nach entsprechender Erweiterung der Ausdrucksmöglichkeiten der Formelsprache *Sigma* (durch Hinzufügen des Grundsymbols „⟩⟩“ und seiner Syntax) formal formulierbar ist, ist ersichtlich:

HRG1 $\quad \rightarrow C \Rightarrow \rightarrow \neg(B \supset B) \rangle\rangle \rightarrow \neg C$

Das müsste **Delta** als Grundprinzip aber erst *hinzugefügt* werden, um damit im erweiterten Kalkül **Delta** + HRG1 arbeiten zu können; es sei denn, – was weniger ad hoc wäre – man setzte es (oder noch Grundlegenderes, aus dem es herleitbar ist) für *alle* Schlussformelkalküle von vornherein voraus [und entsprechend für alle *Satz*formelkalküle von vornherein: $C \Rightarrow \neg(B \supset B) \rangle\rangle \neg C$].

{Allerdings wird das, was von HRG1 im Blick auf IT21 geleistet wird [oder bei seiner Hinzufügung zu **Delta** geleistet *würde*], in anderer, aber ähnlicher Weise bereits von IRT1a [GIS1] geleistet; denn eine Spezialisierung von IRT1a – also von Γ, $A \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A$ – ist ja $C \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \rightarrow \neg C$, wovon wiederum $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$ ein Einsetzungsfall ist. Nun mag es freilich scheinen, dass im Unterschied zu der *Schlussregelformel* $\rightarrow A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \Rightarrow \rightarrow \neg(B \supset B)$ [IRT6] die *Schlussformel* $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$ in **Delta** bislang *nicht* bewiesen ist. Selbstverständlich ist sie bei Zuhilfenahme von IT21 – IT21 *als Theorem* – mittels R2 [Prämissenerweiterung durch $B \supset B$] und IR5 in **Delta** leicht beweisbar; aber dann kann IRT1a nicht mehr von Nutzen sein, mit bewiesenem $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$ IT21 *allererst* zu beweisen. Gebraucht wird also ein von IT21 unabhängiger Beweis in **Delta** für $A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B) \rightarrow \neg(B \supset B)$. Und tatsächlich ist ein solcher Beweis nicht weit zu suchen: siehe den Beweis von IT21 *bis zur 8. Zeile*. Der Übergang von der 8. zur 9. und letzten Zeile dieses Beweises bringt dann gerade die $\rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset \neg(B \supset B))$ zeitigende Anwendung von IRT1a, die in dieser Anmerkung in Auge gefasst wurde.}

Von einer solchen [vor der Anmerkung beschriebenen] Erweiterung der Kalküle sei aber abgesehen – schon aus dem Grund, weil diese Erweiterung die Erweiterung der Ausdrucksmöglichkeiten der Formelsprache *Sigma* erfordert, *Sigma* aber in diesem Buch so, wie sie anfangs gesetzt wurde, ein für alle Mal feststehen soll. Doch zeigt sich mit HRG1 punktuell eine Mannigfaltigkeit höherstufiger logischer Gesetze: logischer Gesetze, von denen in den in diesem Buch betrachteten Kalkülen keine Rede ist.

Für das Verhältnis von TND und STND in **Delta** ist, schließlich, noch das folgende Theorem aufschlussreich:

IT22: $A \vee \neg A \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$

1. $A \rightarrow \neg\neg A$	IT1
2. $\neg\neg A \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$	A4
3. $A \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$	RT7 (1, 2)
4. $\neg A \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$	A4
5. $A \vee \neg A \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$	R6 (3, 4)

Ließe sich auch die Umkehrung von IT22 in **Delta** beweisen, so fiele **Delta*** [= **Delta** + STND] mit **Delta** + TND deduktiv zusammen, also auch mit **Alpha**. Aber die Umkehrung von IT22 lässt sich nicht in **Delta** beweisen. *Sonst* wäre ja auch $\neg(B \vee \neg B) \vee \neg\neg(B \vee \neg B) \rightarrow (B \vee \neg B) \vee \neg(B \vee \neg B)$ – ein Einsetzungsfall der Umkehrung von IT22 [„$(B \vee \neg B)$“ für „A“] – in **Delta** beweisbar und *damit* TND:

1. $\rightarrow \neg\neg(B \vee \neg B)$	IT2
2. $\neg\neg(B \vee \neg B) \rightarrow \neg(B \vee \neg B) \vee \neg\neg(B \vee \neg B)$	A4
3. $\rightarrow \neg(B \vee \neg B) \vee \neg\neg(B \vee \neg B)$	R3 (2, 1)
4. $\neg(B \vee \neg B) \vee \neg\neg(B \vee \neg B) \rightarrow (B \vee \neg B) \vee \neg(B \vee \neg B)$	mit der Umkehrung von IT22 {als beweisbar supponiert}
5. $\rightarrow (B \vee \neg B) \vee \neg(B \vee \neg B)$	R3 (4, 3)
6. $\neg\neg(B \vee \neg B), (B \vee \neg B) \vee \neg(B \vee \neg B) \rightarrow B \vee \neg B$	T12 {EP; ein **Alpha**- *und* ein **Delta**-Theorem}, R1
7. $\neg\neg(B \vee \neg B) \rightarrow (B \vee \neg B) \vee \neg(B \vee \neg B)$	R2 (5)
8. $\neg\neg(B \vee \neg B) \rightarrow B \vee \neg B$	R3 (6, 7)
9. $\rightarrow B \vee \neg B$	R3 (8, 1)

Aber TND ist in **Delta** *nicht* beweisbar.

Frühere Ausführungen in diesem Kapitel besagen, dass die Hinzunahme des reflexiven Einsetzungsfalls von $\rightarrow \neg\neg A \supset A$, also von $\rightarrow \neg\neg(\neg\neg A \supset A) \supset (\neg\neg A \supset A)$, zu den Axiomen von **Delta** einen Kalkül ergibt, der mit **Alpha** deduktiv äquivalent ist (weil in dem fraglichen Kalkül EDN beweisbar ist; vgl. die Anmerkung zu IT3). Der hier zuletzt angegebenen

Deduktion, und zwar ihren Zeilen 5 bis 9, *plus* Zeile 1, lässt sich nun entnehmen, dass die Hinzunahme des reflexiven Einsetzungsfalls von $\rightarrow A \vee \neg A$, also von $\rightarrow (A \vee \neg A) \vee \neg(A \vee \neg A)$, zu den Axiomen von **Delta** *denselben* Effekt hat (weil in dem so entstandenen Kalkül angesichts von T12, IT2, etc. TND beweisbar ist).

5. **Delta** in **Gamma***

Die deduktiven Unterschiede zwischen **Alpha** und **Delta** sind nun hinreichend deutlich geworden. Aber was kann einen veranlassen, statt von **Alpha** von **Delta** auszugehen, mit anderen Worten: Was kann einen veranlassen, an die Stelle von R5 nur noch IR5 zu setzen, also statt Γ, B $\rightarrow$ C; Γ, $\neg$B $\rightarrow$ C $\Rightarrow$ Γ $\rightarrow$ C [*des inhaltlichen Schnittgesetzes*: ISG] nur noch Γ, B $\rightarrow$ $\neg$C $\Rightarrow$ Γ, C $\rightarrow$ $\neg$B [*das Gesetz der Rechtskontraposition*: RKP] als Grundgesetz zu verwenden (und alles Übrige gleich zu belassen)? – Schauen wir statt auf **Alpha** und **Delta** einen Augenblick auf **Alpha** und **Gamma** bzw. **Alpha** und **Gamma***. Was ganz besonders stark dazu motivieren kann, von **Alpha** zu **Gamma** oder auch zu **Gamma*** überzugehen, ist dies: Es ist das Bedürfnis eine andere Implikation neben der sogenannten *materialen Implikation* zu haben, und zwar eine, die eine logische Verstärkung dieser Letzteren ist (ohne doch den Charakter des „Konditionativen", des *Bedingungssätze Bildenden*, zu verlieren), *um* einem gewissen intuitiven Vorverständnis des für wissenschaftssprachliche Zwecke zu verwendenden „Wenn, dann" gerecht zu werden. – Was jedoch kann nun dazu motivieren, von **Alpha** zu **Delta** überzugehen?

Delta liegt eine andere Interpretation der logischen Konstanten (qua syntaktische Einheiten) zugrunde als diejenige, die **Alpha** zugrundeliegt. Grundlegend für diese andere Interpretation ist ein anderes Verständnis der Aussage von Aussagesätzen (auch derjenigen Aussagesätze, die keine logischen Konstanten enthalten), wofür wiederum grundlegend ist, dass von einer anderen Auffassung der *Validität* von Aussagesätzen als es nun eben *Wahrheit* ist, ausgegangen wird. Systemübergreifend sei zunächst definiert [in Fortsetzung der Definitionsliste in Kapitel 0, IV.]:

wσ =$_{Def}$ σ [DEFw]

Diese Definition erlaubt es *insbesondere*, jede Satzformel σ, in der „w" noch nicht vorkommt, d. h.: die „w"*-frei* ist, in eine zu ihr trivialerweise logisch äquivalente (weil definitorisch synonyme) Satzformel σ' zu übersetzen, die aus σ in der Weise hervorgeht, dass vor

jede Teilsatzformel von σ (einschließlich σ selbst) überall in σ genau einmal „w“ gesetzt wird;[54] diese Übersetzung nennen wir *die ausgezeichnete* „w“*-Übersetzung* von σ.

In **Alpha** nun wird der Satzoperator „w“ interpretiert als „Es ist [ob erkanntermaßen oder *nicht*] wahr, dass“; in **Delta** hingegen wird „w“ (als Satzoperator) interpretiert als „Wir wissen [als größeres Kollektiv, nicht als jeder Einzelne des Kollektivs], dass“ oder, unpersönlicher [dem Klang, nicht dem kognitiven Sinn nach], als „Man weiß, dass“. Dass ein Aussagesatz σ so viel besagt wie „Wir wissen, dass σ“, ist in manchen Bereichen menschlichen Aussagens/Behauptens sehr wohl gegeben, etwa im Bereich der Mathematik, als einer *öffentlich und intersubjektiv betriebenen Wissenschaft*: Eine *dort* geäußerte mathematische Aussage σ besagt so viel wie „Wir wissen, dass σ“ (wobei in mathematischen Dingen „Wir wissen, dass σ“ nichts anderes bedeutet als „Wir haben einen Beweis dafür, dass σ“). Die Schule der *Intuitionisten* innerhalb der Philosophie der Mathematik geht nun aber über diese Konvention des mathematischen Diskurses hinaus und geht davon aus, dass die **Delta**-Interpretation von „w“ für mathematische Aussagen die einzig mögliche ist; denn eine an sich bestehende mathematische Realität, die es erlauben würde, dem Konzept einer an sich (ob erkanntermaßen oder *nicht*) bestehenden mathematischen Wahrheit einen Sinn zu geben, gebe es nicht. Von daher muss die klassische Logik, meinen die Intuitionisten, jedenfalls für die Mathematik durch eine andere (dann nichtklassische) Logik ersetzt werden, also auf grundlegender Stufe die wahrheitsfunktionale Aussagenlogik durch die intuitionistische Aussagenlogik, z. B. **Alpha** (eine Formulierung der ersteren Logik) durch **Delta** (eine Formulierung der letzteren). Zwar kann für Intuitionisten das mathematisch Wahre nicht einfach verschwinden, da ja intersubjektives Wissen – also der Validitätsbegriff, der gemäß den Intuitionisten für die Logik in der

[54] Die logische Äquivalenz der so entstandenen Satzformel zur ursprünglichen ist eine triviale Konsequenz von DEFw. Man muss dafür nicht schon das *Ersetzungsgesetz der Satzformeln* (als logisch valide) voraussetzen: $A \leftrightarrow B \Rightarrow \sigma[A] \leftrightarrow \sigma[B]$ (oder anders, aber logisch gleichwertig formuliert: $\rightarrow A \equiv B \Rightarrow \rightarrow \sigma[A] \equiv \sigma[B]$). Dieses Gesetz (eigentlich: ein Gesetzes*schema*) lässt sich für **Alpha** bzw. **Delta** (für die Satzformeln, die in diesen Kalkülen in Betracht gezogen werden) durch vollständige Induktion nach dem logischen Komplexitätsgrad der Satzformel, in die hinein substituiert wird, zeigen. [In der Formulierung des Gesetzes steckt: Die Satzformel „B“ wird in der Satzformel σ[A], in der an gewissen Stellen die Satzformel „A“ vorkommt, an genau diesen Stellen für „A“ substituiert, wodurch σ[B] hervorgeht.] Auch für das Ersetzungsgesetz für Satzformeln gilt: Mit seiner Beweisbarkeit/logischen Validität in **Alpha** bzw. **Delta** ist auch jede seiner Spezialisierungen – die stets über das ganze Gesetz hinweg *uniform* erfolgen – beweisbar/logisch valide in **Alpha** bzw. **Delta**. Das Gesetz selbst lizensiert aber – wenn in Spezialisierungen von ihm die jeweilige Prämisse logisch valide ist – logische Validität erhaltende Substitutionen, die *keine* uniformen sind, sondern *selektive*. Eine (entschematisierende) Spezialisierung des Gesetzes ist z. B. $D \leftrightarrow \neg\neg D \Rightarrow \neg D \supset D \leftrightarrow \neg D \supset \neg\neg D$, woraus sich *in* **Alpha** wegen T4 ergibt: $\neg D \supset D \leftrightarrow \neg D \supset \neg\neg D$. *Anders gesagt*: Dieses Theorem geht aus dem Theorem $\neg D \supset D \leftrightarrow \neg D \supset D$ durch Substitution hervor, aber durch keine uniforme, sondern durch eine durch das Ersetzungsgesetz für Satzformeln (und das **Alpha**-Theorem T4) lizensierte *selektive* Substitution: für „D“ wird nur an einer gewissen Stelle, nicht an allen Stellen, „$\neg\neg D$“ gesetzt.

Mathematik grundlegend ist – per se Wahrheit impliziert; das mathematisch Wahre muss aber für sie im intersubjektiv gewussten Mathematischen aufgehen (kann nicht darüber hinausgehen).[55]

Die **Delta**-Interpretation von „w“ als redundanter Satzoperator ist *verschieden* von der **Alpha**-Interpretation. Wenn es wahr ist, dass A, dann ist es zweifellos immer auch wahr, dass es wahr ist, dass A. Und wenn wir wissen, dass A, dann wissen wir zweifellos auch immer, dass wir wissen, dass A. Aber wenn wir nicht wissen, dass A, dann wissen wir, leider, nicht immer, dass wir nicht wissen, dass A – während im Gegenteil zweifellos gilt: Wenn es nicht wahr ist, dass A, dann ist es immer auch wahr, dass es nicht wahr ist, dass A.

TND geht gemäß der ausgezeichneten „w“-Übersetzung (unter Verwendung von DEFw) in das Folgende über: $\rightarrow$ w(wA $\vee$ w$\neg$wA). Nach der **Alpha**-Interpretation besagt $\rightarrow$ w(wA $\vee$ w$\neg$wA) so viel wie „Es ist wahr, dass es wahr ist, dass A, oder wahr ist, dass es nicht wahr ist, dass A“ (wer würde da widersprechen wollen?). Nach der **Delta**-Interpretation jedoch besagt $\rightarrow$ w(wA $\vee$ w$\neg$wA) so viel wie „Wir wissen, dass wir wissen, dass A, oder wissen, dass wir nicht wissen, dass A“. Aber wenn wir nicht wissen, dass A, aber dennoch im Einklang mit uns selbst überzeugt sind, dass wir wissen, dass A (was ja vorkommt), dann wissen wir doch *nicht* dies: dass wir wissen, dass A, oder wissen, dass wir nicht wissen, dass A; denn wir wissen dann weder das eine [dass A] noch das andere [dass wir nicht wissen, dass A].

{Aus dem Blickwinkel der auf der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik aufbauenden epistemisch-doxastischen Logik betrachtet sind für dieses Ergebnis (dem soeben ab „Aber“ formulierten) nur die folgenden (intuitiv) elementaren Prinzipien dieser Logik erforderlich:

I. Aus Wissen, dass B, folgt B [**W**B $\rightarrow$ B].

II. Aus Wissen, dass B, folgt Überzeugtsein, dass B [**W**B $\rightarrow$ **Ü**B].

III. Aus im Einklang mit sich selbst Überzeugtsein, dass B, folgt Überzeugtsein, dass B, und Nichtüberzeugtsein, dass nicht-B [**Ü***B $\rightarrow$ **Ü**B $\wedge$ $\neg$**Ü**$\neg$B].

Die informelle (und dabei doch semiformale) Herleitung des fraglichen Ergebnisses sieht dann so aus: Angenommen, $\neg$**W**A und **Ü***WA; also mit [einem Einsetzungsfall von] *III*. [und EC]: $\neg$**Ü**$\neg$**W**A; also mit [dem AUKP-Resultat eines Einsetzungsfalls von] *II*.: $\neg$**W**$\neg$**W**A; also [mit IC] $\neg$**W**A $\wedge$ $\neg$**W**$\neg$**W**A, und also [mit GDM1 etc.] $\neg$(**W**A $\vee$ **W**$\neg$**W**A); also mit [dem AUKP-Resultat eines Einsetzungsfalls von] *I*.: $\neg$**W**(**W**A $\vee$ **W**$\neg$**W**A).}

[55] Wollte man dies – **Delta**-Logik statt **Alpha**-Logik – nicht nur für die Mathematik haben, sondern für alle Bereiche menschlicher Erkenntnisaktivität (sofern sie *wissenschaftlich* ist), dann ließe sich das mit der Annahme eines *allgemeinen* ontologischen Idealismus husserlscher Prägung rechtfertigen. Diesem allgemeinen ontologischen Idealismus zufolge fällt *Realität* (und darum *Wahrheit*) mit *(menschlich) intersubjektiv gewusster Realität* zusammen. Allerdings gibt es, wenn **Delta** prädikatenlogisch zu **Pi-Delta** erweitert wird, Grund, die dann resultierende Logik doch lieber auf die Mathematik zu beschränken; siehe Kapitel 12.

EDN wiederum geht gemäß der ausgezeichneten „w“-Übersetzung in das Folgende über: w¬w¬wA → wA. Nach der **Alpha**-Interpretation besagt w¬w¬wA → wA so viel wie „Vorausgesetzt, dass es wahr ist, dass es nicht wahr ist, dass es nicht wahr ist, dass A, ergibt sich: Es ist wahr, dass A“, was zweifelsohne logisch korrekt ist. Nach der **Delta**-Interpretation jedoch besagt w¬w¬wA → wA so viel wie „Vorausgesetzt, dass wir wissen, dass wir nicht wissen, dass wir nicht wissen, dass A, ergibt sich: Wir wissen, dass A“. Aber wenn wir es für möglich halten, dass wir wissen, dass A, d. h.: nicht überzeugt sind, dass wir nicht wissen, dass A, dann wissen wir, dass wir nicht wissen, dass wir nicht wissen, dass A; doch deshalb brauchen wir noch lange nicht zu wissen, dass A.

{Diese Argumentation macht Gebrauch von der (wohl auch tatsächlich vorkommenden) Möglichkeit, dass **W**¬**W**¬**W**A wahr ist, aber **W**A nicht, was insbesondere *dann* vorliegt, wenn ¬**Ü**¬**W**A wahr ist, **W**A aber nicht, und zwar wegen des epistemisch-doxastischen logischen Prinzips ¬**Ü**¬**W**A → **W**¬**W**¬**W**A. Bei der Herleitung dieses Prinzips ist von einem weiteren Prinzip der epistemisch-doxastischen Logik auszugehen; es ist kaum weniger elementar als die drei in der vorausgehenden Anmerkung schon angeführten Prinzipien:

IV. Aus Nichtüberzeugtsein, dass B, folgt Wissen vom Nichtüberzeugtsein, dass B [¬**Ü**B → **W**¬**Ü**B].

Nun die Herleitung von ¬**Ü**¬**W**A → **W**¬**W**¬**W**A:

1. **W**¬**W**A → **Ü**¬**W**A	Einsetzungsfall von *I*. [zu *I*. siehe die vorausgehende Anmerkung]
2. ¬**Ü**¬**W**A → ¬**W**¬**W**A	mit AUKP aus 1.
3. **W**¬**Ü**¬**W**A → **W**¬**W**¬**W**A	mit der epist.-dox. Analogie von BAUN aus 2.
4. ¬**Ü**¬**W**A → **W**¬**Ü**¬**W**A	Einsetzungsfall von *IV*.
5. ¬**Ü**¬**W**A → **W**¬**W**¬**W**A	mit KSG aus 4. und 3.

[Man beachte – zur Untermauerung der Möglichkeit, dass ¬**Ü**¬**W**A wahr ist, **W**A aber nicht –, dass ¬**Ü**¬**W**A → **W**A sicherlich kein Prinzip der epistemisch-doxastischen Logik ist; denn sonst wäre ja auch das zu ¬**Ü**¬**W**A → **W**A gehörige LKP-Resultat ¬**W**A → **Ü**¬**W**A ein solches Prinzip, welche Schlussformel jedoch Kontrainstanzen hat. Denn es ist möglich und kommt wohl auch wirklich vor: Wir wissen nicht, dass A, sind aber im Einklang mit uns selbst überzeugt zu wissen, dass A; mithin: wir wissen nicht, dass A, und sind doch nicht überzeugt, nicht zu wissen, dass A.]}

Nach der **Alpha**-Interpretation sind also sowohl TND wie EDN logische Prinzipien, nach der **Delta**-Interpretation aber weder TND noch EDN. IDN hingegen geht gemäß der ausgezeichneten „w“-Übersetzung in das Folgende über: wA → w¬w¬wA. Nach der **Alpha**-Interpretation besagt dies so viel wie „Vorausgesetzt es ist wahr, dass A, dann ergibt sich: Es ist wahr, dass es nicht wahr ist, dass es nicht wahr ist, dass A“, was zweifelsohne logisch kor-

rekt ist. Nach der **Delta**-Interpretation hingegen besagt wA → w¬w¬wA so viel wie „Vorausgesetzt wir wissen, dass A, dann ergibt sich: Wir wissen, dass wir nicht wissen, dass wir nicht wissen, dass A“ – und das ist ebenfalls logisch korrekt.

{**W**A → **W**¬**W**¬**W**A (vgl. das nicht nur in **Gamma**, sondern auch in **Gamma*** beweisbare GT22) ist ein epistemisch-doxastisches logisches Prinzip. Für seine Herleitung braucht man noch das folgende elementare Prinzip der epistemisch-doxastischen Logik:

V. Aus Wissen, dass B, folgt Wissen vom Wissen, dass B [**W**B → **WW**B].

Nun die Herleitung:

1. **W**¬**W**A → ¬**W**A	Einsetzungsfall von *I*.
2. **W**A → ¬**W**¬**W**A	mit RKP aus 1.
3. **WW**A → **W**¬**W**¬**W**A	mit der epist.-dox. Analogie von BAUN aus 2.
4. **W**A → **WW**A	trivialer Einsetzungsfall von *V*.
5. **W**A → **W**¬**W**¬**W**A	mit KSG aus 4. und 3.}

IDN ist also *sowohl* nach der **Alpha**- *als auch* nach der **Delta**-Interpretation ein logisches Prinzip.

Die **Delta**-Interpretation der „w“-freien Satzformeln [*nur* mit „w“-freien Satzformeln hat man es in **Delta** und **Alpha** auf der grundausdrücklichen Ebene zu tun] lässt sich nun innerhalb des aussagenlogischen alethisch-modalen Kalküls **Gamma*** *strukturell* darstellen; welcher Kalkül wie **Alpha** ist, außer dass A2 und R4 ersetzt sind durch:

GA2a	B, B ⊃ C → C
GA2b	¬B ⊃ B, ¬(¬B ∨ C) ⊃ ¬B ∨ C → ¬C ⊃ C
G*A2c	B ⊃ C → ¬(B ⊃ C) ⊃ (B ⊃ C)[56]
GA2d	¬(¬B ∨ C) ⊃ ¬B ∨ C → B ⊃ C
GR4	B → C ⇒ → B ⊃ C

Gamma* enthält die komplette S4-modale Aussagenlogik samt der zugehörigen Logik der strikten Implikation, wie in Kapitel 3 unter Verwendung der Definitionen A > B =$_{Def}$ ¬A ∨ B

[56] Im Unterschied zu **Gamma*** hat der Kalkül **Gamma** nicht B ⊃ C → ¬(B ⊃ C) ⊃ (B ⊃ C) als Axiom, sondern das Folgende: ¬(B ⊃ C) → ¬¬(B ⊃ C) ⊃ ¬(B ⊃ C), wobei dieses letztere Prinzip in **Gamma** „GA2c“ heißt. In der ursprünglichen Formulierung von **Gamma** war vom Axiom GA2c *in zwei Teilen*, GA2c(i) und GA2c(ii), die Rede; aber GA2c(i) erwies sich in Gegenwart von GA2c(ii) als entbehrlich. GA2c schrumpfte somit auf GA2c(ii) zusammen; aus GA2c(i) hingegen wurde das **Gamma***-Axiom G*A2c.

[GD1] und $\Box A =_{Def} \neg A \supset A$ [GD2] gezeigt wurde (die Ergänzung durch $\Diamond\sigma =_{Def} \neg\Box\neg\sigma$ [GD3] ist optional). Die *strukturelle* Darstellung der **Delta**-Interpretation der „w"-freien Satzformeln innerhalb von **Gamma*** gelingt deshalb, weil der Satzoperator „w" *in seiner* **Delta**-*Deutung* mit dem Satzoperator „$\Box$" *in seiner* S4-*Deutung* strukturell isomorph ist, mit anderen Worten: „w" bringt in seiner **Delta**-Deutung („w" in der Bedeutung von „Wir wissen, dass") *strukturell* eine S4-*Notwendigkeit* zum Ausdruck (keine S5-Notwendigkeit!). Man kann demnach für „w" in seiner **Delta**-Deutung in den durch die ausgezeichnete „w"-Übersetzung gebildeten Satzformeln „$\Box$"-*mit*-S4-*Logik* setzen (und dabei „$\Box$" gut und gerne als „Wir wissen, dass" lesen; es ist dafür *nicht* erforderlich, dass die S4-Aussagenlogik die komplette epistemisch-doxastische Aussagenlogik abbildet, was sie sicherlich nicht tut).

{Die S4-Aussagenlogik bildet die komplette epistemisch-doxastische Aussagenlogik schon dann nicht ab, wenn **Ü** ein gegenüber **W** selbstständiger Satzoperator ist. Aber ist es so? **Ü*** jedenfalls ist gegenüber **Ü** *nicht* selbstständig, sondern lässt sich durch **Ü** wie folgt definieren [dabei einer vollkommen adäquaten *Bedeutungsanalyse* folgend]: $\mathbf{Ü}^*\sigma =_{Def} \mathbf{Ü}\sigma \wedge \neg\mathbf{Ü}\neg\sigma$. Kann man nicht analog **Ü** auf **W** plus andere Satzoperatoren definitorisch reduzieren [dazu *bedeutungsanalytisch* motiviert] und damit die epistemisch-doxastische Logik basal zu einer reinen **W**-Logik machen? Für dieses Ziel bietet sich an, „**Ü**" als mit „$\neg\mathbf{W}\neg\mathbf{W}$" sinngleich zu behaupten – was aber tatsächlich nicht unbedingt plausibel ist. Freilich ist $\neg\mathbf{W}\neg\mathbf{W}B \rightarrow \mathbf{Ü}B$ ein Prinzip der epistemisch-doxastischen Logik:

1. $\mathbf{W}B \rightarrow \mathbf{Ü}B$	*I*.
2. $\neg\mathbf{Ü}B \rightarrow \neg\mathbf{W}B$	mit AUKP aus 1.
3. $\mathbf{W}\neg\mathbf{Ü}B \rightarrow \mathbf{W}\neg\mathbf{W}B$	mit der epist.-dox. Analogie von BAUN aus 2.
4. $\neg\mathbf{Ü}B \rightarrow \mathbf{W}\neg\mathbf{Ü}B$	*IV*. [zu *IV*. siehe die vorletzte Anmerkung]
5. $\neg\mathbf{Ü}B \rightarrow \mathbf{W}\neg\mathbf{W}B$	mit KSG aus 4. und 3.
6. $\neg\mathbf{W}\neg\mathbf{W}B \rightarrow \mathbf{Ü}B$	mit LKP aus 5.

Aber die logische Validität der Umkehrung hiervon – also von $\mathbf{Ü}B \rightarrow \neg\mathbf{W}\neg\mathbf{W}B$ – unterliegt Zweifeln: Man kann doch offenbar von etwas überzeugt sein und gleichzeitig wissen, dass man es nicht weiß; viele würden ja sagen „Wir sind überzeugt, dass Gott existiert, aber wir wissen, dass wir nicht wissen, dass Gott existiert".

Allerdings gibt es einen *anderen* als den soeben angesprochenen Wissensbegriff, bei dem die folgenden *zusätzlichen* epistemisch-doxastischen logischen Prinzipien gelten (*hinzukommend* zu den Prinzipien *I*. – *V*., die im Laufe der vorausgehenden drei Anmerkungen angeführt wurden).

*VI**. Aus Überzeugtsein, dass B, folgt Überzeugtsein zu wissen, dass B [$\mathbf{Ü}B \rightarrow \mathbf{ÜW}B$]. [Mit anderen Worten: Mit Überzeugtsein ist stets ein Wissensanspruch verbunden.]

*VII**. Aus Überzeugtsein zu wissen, dass B, folgt Nichtüberzeugtsein nicht zu wissen, dass B [$\mathbf{ÜW}B \rightarrow \neg\mathbf{Ü}\neg\mathbf{W}B$]. [Mit anderen Worten: Was Wissensansprüche angeht, befindet man sich stets im Einklang mit sich selbst.]

$\mathbf{Ü}B \rightarrow \neg\mathbf{W}\neg\mathbf{W}B$ lässt sich damit wie folgt herleiten:

1. **W**¬**W**B → **Ü**¬**W**B Einsetzungsfall von *I*.

2. **Ü**B → **ÜW**B *VI**.

3. **ÜW**B → ¬**Ü**¬**W**B *VII**.

4. ¬**Ü**¬**W**B → ¬**W**¬**W**B mit AUKP aus 1.

5. **Ü**B → ¬**Ü**¬**W**B mit KSG aus 2. und 3.

6. **Ü**B → ¬**W**¬**W**B mit KSG aus 5. und 4.

Und wenn man sich nun auf *diesen anderen* Wissensbegriff einließe (gezwungen ist man dazu ja nicht – wie gesehen) und sich durch die bei *diesem* Wissensbegriff gegebene logische Validität von **Ü**B ↔ ¬**W**¬**W**B zu der (bedeutungsanalytisch motivierten) Definition **Ü**σ =$_{Def}$ ¬**W**¬**W**σ veranlasst sähe [neben der schon gegebenen bedeutungsanalytisch motivierten Definition **Ü***σ =$_{Def}$ **Ü**σ ∧ ¬**Ü**¬σ; wenn nun **Ü*** und **Ü** keine Grundoperatoren sind, ist das System der epistemisch-doxastischen Logik natürlich dementsprechend umzubauen] – würde *dann* die epistemisch-doxastische Aussagenlogik sich komplett durch die S4-Aussagenlogik abbilden lassen? Man hätte es ja dann *basal* – außer mit den wahrheitsfunktionalen Satzoperatoren – nur noch mit dem Satzoperator **W** zu tun, und ließe sich *der* denn nun nicht durch S4-❒ repräsentieren?

Diese Fragen sind zu verneinen (wenn es auch zunächst ganz so aussieht, als wären sie zu bejahen). Bei Anwendung von **Ü***σ =$_{Def}$ **Ü**σ ∧ ¬**Ü**¬σ und **Ü**σ =$_{Def}$ ¬**W**¬**W**σ bis zur Elimination der durch diese Definitionen definierten Satzoperatoren und bei vollständiger Ersetzung von „**W**" durch „❒" ergibt sich: Prinzip *I* [**W**B → B] wird durch ein S4-Prinzip abgebildet: ❒B → B; Prinzip *II* [**W**B → **Ü**B] wird durch ein S4-Prinzip abgebildet: ❒B → ¬❒¬❒B; Prinzip *III* [**Ü***B → **Ü**B ∧ ¬**Ü**¬B] wird durch ein triviales S4-Prinzip abgebildet: ¬❒¬❒B ∧ ¬¬❒¬❒¬B → ¬❒¬❒B ∧ ¬¬❒¬❒¬B; Prinzip *IV* [¬**Ü**B → **W**¬**Ü**B] wird durch ein S4-Prinzip abgebildet: ¬¬❒¬❒B → ❒¬¬❒¬❒B, oder S4-logisch äquivalent: ❒¬❒B → ❒❒¬❒B; Prinzip *V* [**W**B → **WW**B] wird durch ein S4-Prinzip abgebildet: ❒B → ❒❒B; Prinzip *VI** [**Ü**B → **ÜW**B] wird durch ein S4-Prinzip abgebildet: ¬❒¬❒B → ¬❒¬❒❒B. Prinzip *VII** [**ÜW**B → ¬**Ü**¬**W**B] schließlich wird durch ¬❒¬❒❒B → ¬¬❒¬❒¬❒B abgebildet, oder S4-logisch äquivalent: ¬❒¬❒B → ❒¬❒¬❒B [oder unter Anwendung von GD3 gesagt: ◊❒B → ❒◊❒B]; *aber diese Schlussformel ist nun kein S4-Prinzip*.

Und auch (last but not least) Prinzip *VIII* – das *gleichberechtigte* (nur aus darstellungstechnischen Gründen erst jetzt eingeführte) Pendant zu Prinzip *IV*, mithin, wie Prinzip *IV*, ein logisches Prinzip für *jeden* Wissensbegriff – wird durch kein S4-Prinzip abgebildet, *auch nicht bei* **Ü**σ =$_{Def}$ ¬**W**¬**W**σ:

VIII. Aus Überzeugtsein, dass B, folgt Wissen vom Überzeugtsein, dass B [**Ü**B → **WÜ**B].

Denn Prinzip *VIII* wird bei **Ü**σ =$_{Def}$ ¬**W**¬**W**σ direkt durch ¬❒¬❒B → ❒¬❒¬❒B abgebildet [und nicht erst wie **ÜW**B → ¬**Ü**¬**W**B nach Geltendmachung S4-logischer Prinzipien], und ¬❒¬❒B → ❒¬❒¬❒B ist, wie gesagt, *kein* S4-Prinzip: ¬❒¬❒B → ❒¬❒¬❒B ist *erst* ein S5-Prinzip, nicht schon ein S4-Prinzip. Man bekommt es aus dem S4/S5-Theorem GT22 mit dem reinen S5-Theorem GT8 [*S5-Axiom*] wie folgt:

1. ❒B → ❒¬❒¬❒B GT22

2. ¬❒B → ❒¬❒B GT8

3. ¬❒¬❒B → ❒B RT5 [LKP] (2)

4. ¬❒¬❒B → ❒¬❒¬❒B RT7 [KSG] (3, 1).}

Da sich nun die **Delta**-Interpretation der „w“-freien Satzformeln in der S4-Aussagenlogik strukturell darstellen lässt, lässt sich die intuitionistische Aussagenlogik innerhalb der S4-modalen-Aussagenlogik *repräsentieren*. Wie folgt:

Der erste Schritt ist, die „w“-freien Satzformeln, die in **Delta** (mit **Delta**-Sinn, also intuitionistisch verstanden) figurieren, durch in **Gamma*** (mit **Gamma***-Sinn) figurierende Satzformeln eins-zu-eins zu repräsentieren: Sei σ eine beliebige „w“-freie Satzformel, die in **Delta** figuriert. Vor jede Satzformel, die ein Teil von σ ist, wird einmal und nur einmal [nun nicht „w“, sondern] „$\Box$“ gesetzt (einschließlich vor σ selbst[57]), *wobei zudem* jedes eventuelle Vorkommnis von „$\supset$“ in σ durch ein Vorkommnis von „$>$“ zu ersetzen ist. Hier die *einfachsten* der in der beschriebenen Weise gebildeten Eins-zu-eins-Korrespondenzen zwischen **Delta**-Satzformeln und *gewissen* **Gamma***-Satzformeln:

Delta	**Gamma***
A	$\Box A$
$\neg A$	$\Box\neg\Box A$
$A \supset B$	$\Box(\Box A > \Box B)$ {d. h. gemäß GD1: $\Box(\neg\Box A \vee \Box B)$}
$A \vee B$	$\Box(\Box A \vee \Box B)$
$A \wedge B$	$\Box(\Box A \wedge \Box B)$
$\neg\neg A$	$\Box\neg\Box\neg\Box A$
…	

Für die einer „w“-freien **Delta**-Satzformel [d. h.: einer in **Delta** figurierenden Satzformel] σ nach dem beschriebenen Verfahren eins-zu-eins korrespondierende **Gamma***-Satzformel [in **Gamma*** figurierende Satzformel] schreibe ich: $tr(\sigma)$. Die den **Delta**-Satzformeln – darunter seien nun immer die **Delta**-Satzformeln *auf der grundausdrücklichen Ebene*, also nur „w“-*freie* **Delta**-Satzformeln verstanden – nach dem beschriebenen Verfahren eins-zu-eins korrespondierenden **Gamma***-Satzformeln heißen kurz: **Gamma*D**-Satzformeln. (Nicht jede **Gamma***-Satzformel ist eine **Gamma*D**-Satzformel!) Darauf aufbauend sei festgelegt:

[57] Den Teilformeln äußere Klammern, die man in Anwendung der Regeln der Klammerersparnis zunächst weggelassen hat, muss man dazu natürlich wieder einfügen.

(i) tr($\rightarrow \sigma$) ist $\rightarrow$ tr(σ) für alle **Delta**-Satzformeln σ;

(ii) tr($\sigma_1 \ldots \sigma_n \rightarrow \sigma'$) ist tr($\sigma_1$) … tr($\sigma_n$) $\rightarrow$ tr(σ') für alle **Delta**-Satzformeln $\sigma_1 \ldots \sigma_n, \sigma'$;

(iii) wenn Γ eine leere Folge von **Delta**-Satzformeln ist, dann ist tr(Γ) eine leere Folge von **Gamma*D**-Satzformeln;

(iv) wenn Γ die nichtleere Folge von **Delta**-Satzformeln $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ ist, dann ist tr(Γ) die nichtleere Folge von **Gamma*D**-Satzformeln tr(σ_1) … tr(σ_n).

Es gilt dann:

I. Ist Π ein Grundgesetz von **Delta**, so ist tr(Π)* in **Gamma*** beweisbar, wobei tr(Π)* im Kern die „Übersetzung" tr(Π) von Π nach **Gamma*** ist [gemäß dem eben beschriebenen Translationsverfahren], aber als Grundgesetz des (hier noch künftigen) Kalküls tr(**Delta**)* *per fiat* [*so soll es sein, so sei es festgelegt*] nur beweisbare Einsetzungsfälle / Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile [kurz für: Teile, *die Satzformeln sind*] nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten.

{Handelt es sich bei einem Gesetz Π eigentlicher gesprochen um ein Gesetzes*schema*, so ist der vorzuziehende Ausdruck „Spezialisierung von Π"; ist das Gesetz Π aber kein Gesetzesschema, so kann „Spezialisierung von Π" oder „Einsetzungsfall von Π" verwendet werden, mit Präferenz für den *letzteren* Ausdruck. Mehr zu dieser Thematik steht in Fußnote 1.}

Der Beweis von **I.**:

(**a**) A1, also A $\rightarrow$ A, ist ein Grundgesetz von **Delta**, und tr(A1)* – das ist im Kern tr(A1): ❒A $\rightarrow$ ❒A, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(A1)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Einsetzungsfälle hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist beweisbar in **Gamma***, weil tr(A1) ein Einsetzungsfall des **Gamma***-Grundgesetzes A1 ist (weswegen dann erst recht tr(A1)* in **Gamma*** beweisbar ist, denn alle tr(**Delta**)*-beweisbaren Einsetzungsfälle von tr(A1)* sind **Gamma***-beweisbare Einsetzungsfälle von tr(A1)).

{*Nota bene*: Das *vice versa* zum eben Gesagten gilt nicht. ❒❒A $\rightarrow$ ❒❒A ist ein **Gamma***-beweisbarer Einsetzungsfall von A1 [mit „❒❒A" für „A"] und ein **Gamma***-beweisbarer Einsetzungsfall von tr(A1) [mit „❒A" für

„A“], aber *kein* tr(**Delta**)*-beweisbarer Einsetzungsfall von tr(A1)* [das doch im Kern mit tr(A1) – ❒A → ❒A – zusammenfällt]; denn ❒❒A ist *keine* **Gamma*D**-Satzformel. Ein **Gamma***-beweisbarer Einsetzungsfall von A1 und tr(A1) ist zudem ❒¬❒A → ❒¬❒A [mit „❒¬❒A“ für „A“ bei A1, und „¬❒A“ für „A“ bei tr(A1)]. Und ❒¬❒A → ❒¬❒A ist nun auch ein tr(**Delta**)*-beweisbarer Einsetzungsfall von tr(A1)*; denn ❒¬❒A *ist* eine **Gamma*D-Satzformel**.}

(**b**) R1, also $\Gamma<\sigma, \sigma'> \rightarrow C \Rightarrow \Gamma<\sigma', \sigma> \rightarrow C$, ist ein Grundgesetz[esschema] von **Delta**, und tr(R1)* – das ist im Kern tr(R1): $tr(\Gamma)<tr(\sigma), tr(\sigma')> \rightarrow \Box C \Rightarrow tr(\Gamma)<tr(\sigma'), tr(\sigma)> \rightarrow \Box C$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(R1)* *von* tr(Delta)* *genommen* per fiat nur beweisbare Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(R1) eine Spezialisierung des **Gamma***-Grundgesetzes R1 ist (weswegen dann erst recht tr(R1)* in **Gamma*** beweisbar ist, denn alle tr(**Delta**)*-beweisbaren Spezialisierungen von tr(R1)* sind **Gamma***-beweisbare Spezialiserungen von tr(R1)).

(**c**) R2, also $\Gamma \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, B \rightarrow C$, ist ein Grundgesetz[esschema] von **Delta**, und tr(R2)* – das ist im Kern tr(R2): $tr(\Gamma) \rightarrow \Box C \Rightarrow tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(R2)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(R2) eine Spezialisierung des **Gamma***-Grundgesetzes R2 ist (weswegen dann erst recht tr(R2)* in **Gamma*** beweisbar ist).

(**d**) R3, also $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$, ist ein Grundgesetz[esschema] von **Delta**, und tr(R3)* – das ist im Kern tr(R3): $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C; tr(\Gamma) \rightarrow \Box B \Rightarrow tr(\Gamma) \rightarrow \Box C$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(R3)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(R3) eine Spezialisierung des **Gamma***-Grundgesetzes R3 ist (weswegen dann erst recht tr(R3)* in **Gamma*** beweisbar ist).

(**e**) A2, also $B, B \supset C \rightarrow C$, ist ein Grundgesetz von **Delta**, und tr(A2)* – das ist im Kern tr(A2): ❒B, ❒(❒B > ❒C) → ❒C, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(A2)* *von* tr(**Delta**)* *ge-*

nommen per fiat nur beweisbare Einsetzungsfälle hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(A2) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(A2)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. $\Box(\Box B > \Box C), \Box\Box B \rightarrow \Box\Box C$	GT4 {$\Box(A > B), \Box A \rightarrow \Box B$; für **Gamma*** wie für **Gamma**}
2. $\Box B \rightarrow \Box\Box B$	*S4-Axiom* {GT7; auch in **Gamma*** beweisbar wegen G*A2c [= GA2c(i)]}
3. $\Box B, \Box(\Box B > \Box C) \rightarrow \Box\Box B$	R2 (2)
4. $\Box B, \Box(\Box B > \Box C), \Box\Box B \rightarrow \Box\Box C$	R2, R1 (1)
5. $\Box B, \Box(\Box B > \Box C) \rightarrow \Box\Box C$	R3 (4, 3)
6. $\Box\Box C \rightarrow \Box C$	GT3 {$\Box A \rightarrow A$; für **Gamma*** wie für **Gamma**}
7. $\Box B, \Box(\Box B > \Box C), \Box\Box C \rightarrow \Box C$	R2, R1 (6)
8. $\Box B, \Box(\Box B > \Box C) \rightarrow \Box C$	R3 (7, 5).

(**f**) R4, also $\Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow B \supset C$, ist ein Grundgesetz[esschema] von **Delta**, und tr(R4)* – das ist im Kern tr(R4): $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(R4)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(R4) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(R4)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C$	Annahme
2. $tr(\Gamma) \rightarrow \Box B > \Box C$	GRT2 {$\Gamma', A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma' \rightarrow A > B$; für **Gamma*** wie für **Gamma**} (1)
3. $\wedge(tr(\Gamma)) \rightarrow \Box B > \Box C$	R7 (2) {sooft, bis $tr(\Gamma)$ in eine Satzformel verwandelt ist[58]}
4. $\Box\wedge(tr(\Gamma)) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$	GRT4 {$A \rightarrow B \Rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$; für **Gamma*** wie für **Gamma**} (3)
5. $tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$	aus 4., wie sogleich beschrieben wird:

Wenn Γ leer ist, dann ist $tr(\Gamma)$ ebenfalls leer und $\wedge(tr(\Gamma))$ ist $B \supset B$ [per Festlegung] und $\Box\wedge(tr(\Gamma))$ folglich $\Box(B \supset B)$. Dann erhält man 5. aus 4. wie folgt:

4. $\Box(B \supset B) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$

[58] Wenn $tr(\Gamma)$ nur aus einer einzigen Satzformel besteht, so braucht R7 nicht angewendet zu werden, und in Zeile 3 steht dasselbe wie in Zeile 2. Ist $tr(\Gamma)$ hingegen leer (weil Γ leer ist), so gilt (per Festsetzung): $\wedge(tr(\Gamma))$ ist $B \supset B$, und es steht somit in Zeile 3: $B \supset B \rightarrow \Box B > \Box C$, mit dem Kommentar „R2 (2)".

4.1 $B \rightarrow B$ A1

4.2 $\rightarrow B \supset B$ GR4 (4.1)

4.3 $\rightarrow \Box(B \supset B)$ GRT3 (4.2)

4.4 $\rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$ R3 (4, 4.3), *also*: 5. $tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$.

Um zu sehen, dass sich 5. aus 4. auch dann ergibt, wenn Γ und also $tr(\Gamma)$ nichtleer ist, muss man sich vor Augen halten, dass $tr(\Gamma)$ in den Fällen, wo Γ nichtleer ist, wie folgt aussieht: $\Box\sigma_1 \ldots \Box\sigma_n$ [wobei $\Box\sigma_1 \ldots \Box\sigma_n$ **Gamma*D**-Satzformeln sind, nämlich diejenigen, die aus den Satzformeln in Γ hervorgegangen sind – bei $n > 1$ durch Komma voneinander abgesetzt]; demnach $\wedge(tr(\Gamma))$ wie folgt aussieht: $\Box\sigma_1$ oder $\Box\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n$ [nur der Übersichtlichkeit halber ohne die bei $n \geq 3$ anfallenden internen Klammern geschrieben]; schließlich also $\Box\wedge(tr(\Gamma))$ wie folgt aussieht: $\Box\Box\sigma_1$ oder $\Box(\Box\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n)$. Demzufolge hat 4., wenn Γ und also $tr(\Gamma)$ nichtleer ist, die folgende Gestalt: $\Box\Box\sigma_1 \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$ oder $\Box(\Box\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$.

Dann geht man wie folgt vor, wenn $n = 1$:

4. $\Box\Box\sigma_1 \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$

4.1 $\Box\sigma_1 \rightarrow \Box\Box\sigma_1$ *S4-Axiom*

4.2 $\Box\sigma_1 \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$ RT7 (4.1, 4), *also*: 5. $tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$.

Und wie folgt geht man vor, wenn $n > 1$:

4. $\Box(\Box\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$

4.1 $\Box\Box\sigma_1 \wedge \Box(\Box\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n) \rightarrow \Box(\Box\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_N)$ GT21 {$\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$; für **Gamma*** wie für **Gamma**}

4.2 $\Box\Box\sigma_1 \wedge \Box(\Box\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$ RT7 (4.1, 4)

4.3 $\Box\Box\sigma_1, \Box(\Box\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_N) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$ RT14 {$\Gamma', A \wedge B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma', A, B \rightarrow C$} (4.2)

4.4 $\Box\sigma_1 \rightarrow \Box\Box\sigma_1$ *S4-Axiom* {GT7}

4.5 $\Box\sigma_1, \Box(\Box\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n), \Box\Box\sigma_1 \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$ R2, R1 (4.3)

4.6 $\Box\sigma_1, \Box(\Box\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n) \rightarrow \Box\Box\sigma_1$ R2 (4.4)

4.7 $\Box\sigma_1, \Box(\Box\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$ R3 (4.5, 4.6).

Nun muss man $\Box(\Box\sigma_2 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n)$ behandeln (*mutatis mutandis*) wie zuvor $\Box(\Box\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n)$, bis man für den Fall $n = 2$ hierzu gelangt:

4.X $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2 \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$, *also*: 5. $tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$;

bzw. für den Fall $n > 2$ hierzu gelangt:

4.Y $\Box\sigma_1, \Box\sigma_2, \Box(\Box\sigma_3 \wedge \ldots \wedge \Box\sigma_n) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$,

und wie gehabt (aber *mutatis mutandis*) weitermachen muss. In jedem Fall (denn *n* ist ja endlich groß) gelangt man aber schließlich zu:

4.Ω $\Box\sigma_1 \ldots \Box\sigma_n \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$, *also*: 5. $tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$.

(**g**) A3, also $B, \neg B \rightarrow C$, ist ein Grundgesetz von **Delta**, und tr(A3)* – das ist im Kern tr(A3): $\Box B, \Box\neg\Box B \rightarrow \Box C$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(A3)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Einsetzungsfälle hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(A3) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(A3)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. $\Box B, \neg\Box B \rightarrow \Box C$	A3
2. $\Box\neg\Box B \rightarrow \neg\Box B$	GT3
3. $\Box B, \Box\neg\Box B, \neg\Box B \rightarrow \Box C$	R2, R1 (1)
4. $\Box B, \Box\neg\Box B \rightarrow \neg\Box B$	R2, R1 (2)
5. $\Box B, \Box\neg\Box B \rightarrow \Box C$	R3 (3, 4).

(**h**) IR5, also $\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B$, ist ein Grundgesetz[esschema] von **Delta** (nämlich *das* Grundprinzip, durch das sich **Delta** von **Alpha** unterscheidet), und tr(IR5)* – das ist im Kern tr(IR5): $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box\neg\Box C \Rightarrow tr(\Gamma), \Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(IR5)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbar Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(IR5) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(IR5)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box\neg\Box C$	Annahme
2. $tr(\Gamma), \neg\Box\neg\Box C \rightarrow \neg\Box B$	RT3 $\{\Gamma', A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma', \neg B \rightarrow \neg A\}$ (1)
3. $\neg\Box\neg\Box C, tr(\Gamma) \rightarrow \neg\Box B$	R1 (2)

4. $\neg\Box\neg\Box C, \wedge(tr(\Gamma)) \rightarrow \neg\Box B$ R7 (3) {sooft, bis tr(Γ) in eine Satzformel verwandelt ist[59]}

5. $\wedge(tr(\Gamma)), \neg\Box\neg\Box C \rightarrow \neg\Box B$ R1 (4)

6. $\wedge(tr(\Gamma)) \wedge \neg\Box\neg\Box C \rightarrow \neg\Box B$ R7 (5)

7. $\Box(\wedge(tr(\Gamma)) \wedge \neg\Box\neg\Box C) \rightarrow \Box\neg\Box B$ GRT4 (6)

8. $\Box\wedge(tr(\Gamma)) \wedge \Box\neg\Box\neg\Box C \rightarrow \Box(\wedge(tr(\Gamma)) \wedge \neg\Box\neg\Box C)$ GT21

9. $\Box\wedge(tr(\Gamma)) \wedge \Box\neg\Box\neg\Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$ RT7 (8, 7)

10. $\Box\wedge(tr(\Gamma)), \Box\neg\Box\neg\Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$ RT14 {die Umkehrung von R7} (9)

11. $\Box C \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box C$ GT22 {für **Gamma*** wie für **Gamma**}

12. $\Box\wedge(tr(\Gamma)), \Box C, \Box\neg\Box\neg\Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$ R2, R1 (10)

13. $\Box\wedge(tr(\Gamma)), \Box C \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box C$ R2, R1 (11)

14. $\Box\wedge(tr(\Gamma)), \Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$ R3 (12, 13)

15. $tr(\Gamma), \Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$ aus 14., wie sogleich beschrieben wird:

Der Übergang von 14. zu 15. erfolgt *mutatis mutandis* nach derselben Prozedur wie diejenige, die in (**f**) von 4. nach 5. führt.

(**i**) A4, also $A \rightarrow A \vee B$; $B \rightarrow A \vee B$, ist ein Grundgesetz von **Delta**, und tr(A4)* – das ist im Kern tr(A4): $\Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$; $\Box B \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(A4)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Einsetzungsfälle hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist beweisbar in **Gamma***, weil tr(A4) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(A4)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. $\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box B; \Box B \rightarrow \Box A \vee \Box B$ A4

2. $\Box\Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B); \Box\Box B \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$ GRT4 (1)

3. $\Box A \rightarrow \Box\Box A; \Box B \rightarrow \Box\Box B$ *S4-Axiom*

4. $\Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B); \Box B \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$ RT7 (3, 2).

(**j**) R6, also $\Gamma, A \rightarrow C; \Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \vee B \rightarrow C$, ist ein Grundgesetz[esschema] von **Delta**, und tr(R6)* – das ist im Kern tr(R6): $tr(\Gamma), \Box A \rightarrow \Box C; tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow tr(\Gamma), \Box(\Box A \vee \Box B)$

[59] …, außer wenn tr(Γ) nur aus einer einzigen Satzformel besteht oder leer ist. Für diese letzteren Fälle siehe die vorausgehende Fußnote.

$\rightarrow \Box C$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(R6)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(R6) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(R6)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. $tr(\Gamma), \Box A \rightarrow \Box C$ Annahme
2. $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C$ Annahme
3. $tr(\Gamma), \Box A \vee \Box B \rightarrow \Box C$ R6 (1, 2)
4. $tr(\Gamma), \Box(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box A \vee \Box B$ GT3, R2, R1
5. $tr(\Gamma), \Box(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box C$ RT7 (4, 3).

(**k**) A5, also $A, B \rightarrow A \wedge B$, ist ein Grundgesetz von **Delta**, und tr(A5)* – das ist im Kern tr(A5): $\Box A, \Box B \rightarrow \Box(\Box A \wedge \Box B)$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(A5)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur beweisbare Einsetzungsfälle hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(A5) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(A5)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. $\Box A, \Box B \rightarrow \Box A \wedge \Box B$ A5
2. $\Box\Box A, \Box\Box B \rightarrow \Box(\Box A \wedge \Box B)$ GRT8 {für **Gamma*** wie für **Gamma**} (1)
3. $\Box A, \Box\Box B, \Box\Box A \rightarrow \Box(\Box A \wedge \Box B)$ R2, R1 (2)
4. $\Box A, \Box\Box B \rightarrow \Box\Box A$ *S4-Axiom* {GT7}, R2
5. $\Box A, \Box\Box B \rightarrow \Box(\Box A \wedge \Box B)$ R3 (3, 4)
6. $\Box A, \Box B, \Box\Box B \rightarrow \Box(\Box A \wedge \Box B)$ R2, R1 (5)
7. $\Box A, \Box B \rightarrow \Box\Box B$ *S4-Axiom*, R2, R1
8. $\Box A, \Box B \rightarrow \Box(\Box A \wedge \Box B)$ R3 (6, 7).

(**l**) R7, also $\Gamma, A, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \wedge B \rightarrow C$, ist ein Grundgesetz[esschema] von **Delta**, und tr(R7)* – das ist im Kern tr(R7): $tr(\Gamma), \Box A, \Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow tr(\Gamma), \Box(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box C$, wobei dies aber nun *als Grundgesetz* tr(R7)* *von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur

Gamma*D-Satzformeln darbieten – ist in **Gamma*** beweisbar, weil tr(R7) in **Gamma*** beweisbar ist (weswegen dann erst recht tr(R7)* in **Gamma*** beweisbar ist):

1. tr(Γ), $\Box A, \Box B \rightarrow \Box C$ Annahme
2. tr(Γ), $\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box C$ R7 (1)
3. tr(Γ), $\Box(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box A \wedge \Box B$ GT3, R2, R1
4. tr(Γ), $\Box(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box C$ RT7 (3, 2).

Der Beweis von **I.** ist hiermit abgeschlossen.

tr(**Delta**)* ist nun das folgende axiomatische Teilsystem von **Gamma***, wobei jedes Prinzip [Grundgesetz oder echtabgeleitetes Prinzip] von tr(**Delta**)* *per fiat* [*so soll es sein, so sei es festgelegt*] nur beweisbare Einsetzungsfälle / Spezialisierungen hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten:

tr(A1)* $\Box A \rightarrow \Box A$

tr(R1)* tr(Γ)<tr(σ), tr(σ')> $\rightarrow \Box C \Rightarrow$ tr(Γ)<tr(σ'), tr(σ)> $\rightarrow \Box C$

tr(R2)* tr(Γ) $\rightarrow \Box C \Rightarrow$ tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box C$

tr(R3)* tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box C$; tr($\Gamma$) $\rightarrow \Box B \Rightarrow$ tr(Γ) $\rightarrow \Box C$

tr(A2)* $\Box B, \Box(\Box B > \Box C) \rightarrow \Box C$

tr(R4)* tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow$ tr(Γ) $\rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$

tr(A3)* $\Box B, \Box\neg\Box B \rightarrow \Box C$

tr(IR5)* tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box\neg\Box C \Rightarrow$ tr(Γ), $\Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$

tr(A4)* $\Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B); \Box B \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$

tr(R6)* tr(Γ), $\Box A \rightarrow \Box C$; tr($\Gamma$), $\Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow$ tr(Γ), $\Box(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box C$

tr(A5)* $\Box A, \Box B \rightarrow \Box(\Box A \wedge \Box B)$

tr(R7)* tr(Γ), $\Box A, \Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow$ tr(Γ), $\Box(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box C$

{„Γ“ steht für jede beliebige endliche Folge von in **Delta** figurierenden [„w“-freien] Satzformeln, und sei sie leer oder umfasse nur eine einzige Satzformel.}

Es gilt nun offensichtlich aufgrund von **I.**:

II.1 Ist eine **Delta**-Schlussformel π in **Delta** beweisbar, so ist tr(π) in **Gamma*** beweisbar (denn der **Delta**-Beweis von π lässt sich Schritt für Schritt und eins-zu-eins in einen tr(**Delta**)*-Beweis von tr(π)*[60] umwandeln – der aber nichts anderes ist als ein **Gamma***-Beweis von tr(π), der zusätzliche Bedingungen erfüllt).
II.2 Ist π eine **Delta**-Schlussformel und ist tr(π)* in tr(**Delta**)*, also auch tr(π) in **Gamma***, beweisbar, dann ist π in **Delta** beweisbar (denn der tr(**Delta**)*-Beweis von tr(π)* lässt sich Schritt für Schritt und eins-zu-eins in einen **Delta**-Beweis von π umwandeln).

Außerdem gilt aufgrund von **I.** offensichtlich:

III.1 Ist eine Schlussregelformel ρ, in der nur **Delta**-Schlussformeln figurieren, in **Delta** beweisbar, so ist tr(ρ) in **Gamma*** beweisbar (denn der **Delta**-Beweis von ρ in lässt sich Schritt für Schritt und eins-zu-eins in einen tr(**Delta**)*-Beweis von tr(ρ)*[61] umwandeln– der aber nichts anderes ist als ein **Gamma***-Beweis von tr(ρ), der zusätzliche Bedingungen erfüllt).
III.2 Ist ρ eine Schlussregelformel, in der nur **Delta**-Schlussformeln figurieren, und ist tr(ρ)* in tr(**Delta**)*, also auch tr(ρ) in **Gamma***, beweisbar, dann ist ρ in **Delta** beweisbar (denn der tr(**Delta**)*-Beweis von tr(ρ)* lässt sich Schritt für Schritt und eins-zu-eins in einen **Delta**-Beweis von ρ umwandeln).

Hier zwei Beispiele zur Illustration von **II.**:

Delta-Schlussformel π:	tr(π)*/tr(π):
$\underline{A \rightarrow \neg\neg A}$	$\underline{\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box A}$
Beweis in **Delta**:	Beweis in tr(**Delta**)*/**Gamma***:

[60] tr(π)* ist im Kern tr(π), wobei aber nun tr(π)* *als Prinzip von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur tr(**Delta**)*-beweisbare Einsetzungsfälle hat: nur beweisbare Einsetzungsfälle, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile [Teile, *die Satzformeln sind*] nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten.
[61] tr(ρ)* ist im Kern tr(ρ), wobei aber nun tr(ρ)* *als Prinzip von* tr(**Delta**)* *genommen* per fiat nur tr(**Delta**)*-beweisbare Einsetzungsfälle hat: nur beweisbare Einsetzungsfälle, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten.

1. $\neg A \rightarrow \neg A$	A1	**1**. $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	tr(A1)*
2. $A \rightarrow \neg\neg A$	IR5 (1)	**2**. $\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box A$	tr(IR5)* (1)

{IR5 ist Γ, $B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma$, $C \rightarrow \neg B$; die verwendete Spezialisierung kommt zustande *per* „$\neg A$“ für B, „A“ für „C“, Γ leer. *Also*: $\neg A \rightarrow \neg A \Rightarrow A \rightarrow \neg\neg A$. Und tr(IR5)* ist [im Kern]: tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box\neg\Box C \Rightarrow$ tr(Γ), $\Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$; die verwendete [und in tr(**Delta**)* allein *erlaubte*, nämlich nur **Gamma*D**-Satzformeln als satzformelkontextfreie Satzformeln darbietende] Spezialisierung kommt zustande *per* „$\neg\Box A$“ für „B“, „A“ für „C“, tr(Γ) leer. *Also*: $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A \Rightarrow \Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box A$.}

Delta-Schlussformel π:		tr(π)*/tr(π):	
$\underline{\rightarrow \neg(A \wedge \neg A)}$		$\underline{\rightarrow \Box\neg\Box(\Box A \wedge \Box\neg\Box A)}$	
Beweis in **Delta**:		Beweis in tr(**Delta**)*/**Gamma***:	
1. $A, \neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$	A3	**1**. $\Box A, \Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A > \Box A)$	tr(A3)*
2. $A \wedge \neg A \rightarrow \neg(A \supset A)$	R7 (1)	**2**. $\Box(\Box A \wedge \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A > \Box A)$	tr(R7)* (1)
3. $A \supset A \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$	IR5 (2)	**3**. $\Box(\Box A > \Box A) \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A \wedge \Box\neg\Box A)$	tr(IR5)* (2)[62]
4. $A \rightarrow A$	A1	**4**. $\Box A \rightarrow \Box A$	tr(A1)*
5. $\rightarrow A \supset A$	R4 (4)	**5**. $\rightarrow \Box(\Box A > \Box A)$	tr(R4)* (4)
6. $\rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$	R3 (3, 5)	**6**. $\rightarrow \Box\neg\Box(\Box A \wedge \Box\neg\Box A)$	tr(R3)* (3, 5)

Das Ergebnis **II.1** wirft neues Licht auf die Frage der Nichtbeweisbarkeit in **Delta** von gewissen Schlussformeln:

Warum ist TND – also: $\rightarrow A \vee \neg A$ – in **Delta** nicht beweisbar? (Warum es in **Delta** nicht beweisbar sein *sollte*, angesichts der mit **Delta** verbundenen logischen Intentionen, darüber wurde schon gesprochen.) Nun, TND ist in **Delta** nicht beweisbar, weil die Axiome und axiomatischen Schlussregelformeln von **Delta** dies – offenbar – nicht erlauben. Eine andere Antwort ist diese: Wenn $\rightarrow A \vee \neg A$ in **Delta** beweisbar wäre, so wäre $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ [tr(TND)] gemäß **II.1** in **Gamma*** beweisbar. Aber diese Schlussformel ist *nicht* in **Gamma*** beweisbar [darum *erst recht nicht* in tr(**Delta**)*], sondern nur in **Gamma**, nämlich so:

1. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ *S5-Axiom* {GT8; nur für **Gamma**, *nicht* für **Gamma***}

[62] In der vorliegenden Anwendung von tr(IR5)* ist tr(Γ) leer, und für „B“ ist „$(\Box A \wedge \Box\neg\Box A)$“ eingesetzt, für „C“ „$(\Box A > \Box A)$“. Aus „tr($\Gamma$), $\Box B \rightarrow \Box\neg\Box C \Rightarrow$ tr(Γ), $\Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$“ wird also „$\Box(\Box A \wedge \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A > \Box A) \Rightarrow \Box(\Box A > \Box A) \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A \wedge \Box\neg\Box A)$“.

2. $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ A4

3. $\neg\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ RT7 (1, 2)

4. $\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ A4

5. $\rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ R5 (4, 3)

6. $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ GRT3 (5).

{Tatsächlich ist $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ mit *S5-Axiom* deduktiv äquivalent, und zwar schon auf der Grundlage des Kalküls *Basis*-**Gamma**, der entsteht, wenn man in **Gamma** GA2c einfach weglässt [ohne G*A2c an seine Stelle zu setzen], oder anders gesagt: in **Gamma*** G*A2c einfach weglässt [ohne GA2c an seine Stelle zu setzen]. Dazu ist nur noch zu zeigen, dass sich $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ in besagtem Kalkül aus $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ ergibt:

1. $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ tr(TND)

2. $\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ GT3

3. $\rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ R3 (2, 1)

4. $\neg\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ R2 (3)

5. $\neg\Box A, \Box A \vee \Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ T12 [EP], R1

6. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ R3 (5, 4).}

Warum ist EDN – also: $\neg\neg A \rightarrow A$ – in **Delta** nicht beweisbar? Nun, weil EDN und TND bzgl. **Delta** deduktiv äquivalent sind (wie im vorausgehenden Kapitel gezeigt), und TND in **Delta** nicht beweisbar ist. Eine andere Antwort ist diese: Wenn $\neg\neg A \rightarrow A$ in **Delta** beweisbar wäre, so wäre $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ [tr(EDN)] gemäß **II.1** in **Gamma*** beweisbar. Aber $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ [oder unter Anwendung von GD3 geschrieben: $\Box\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$] ist *nicht* in **Gamma*** beweisbar, sondern nur in **Gamma**, nämlich insbesondere so, wie im Beweis von GT23 vorgelegt.

{Zum Beweis von $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ würde auch schon *Brouwersches Axiom*, $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$ [in **Gamma** beweisbar: GT26, aber nicht in **Gamma***], zusammen mit *Basis*-**Gamma** – dem Kalkül, der aus **Gamma** entsteht, wenn man GA2c ersatzlos weglässt (alles Übrige unverändert beibehält) – hinreichen: die Anwendung von GRT4 auf $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$ genügt (wie im Beweis von GT23 erfolgt).[63]}

[63] *Übrigens*: Die traditionelle Benennung der Satzformel $\neg\Box\neg\Box A \supset A$ als „das Brouwersche Axiom", oder dementsprechend hier der Schlussformel $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$ als „*Brouwersches Axiom*", zu Ehren des Begründers des mathematischen Intuitionismus, ist kurios, weil $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$ bzw. $\neg\Box\neg\Box A \supset A$ als Prinzip nun eben *nicht* mit einem intuitionistischen Prinzip verbunden ist, sondern vielmehr mit einem *anti*-intuitionistischen, nämlich mit $\neg\neg A \rightarrow A$ [EDN] bzw. $\neg\neg A \supset A$.

Warum ist STND – also: $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ – in **Delta** nicht beweisbar? Nun, weil die Axiome und axiomatischen Schlussregelformeln von **Delta** dies – offenbar – nicht erlauben. Eine andere Antwort ist diese: Wenn $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ in **Delta** beweisbar wäre, so wäre $\rightarrow \Box(\Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A)$ [tr(STND)] gemäß **II.1** in **Gamma*** beweisbar. Aber $\rightarrow \Box(\Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A)$ ist *nicht* in **Gamma*** beweisbar, sondern nur in **Gamma**, nämlich so:

1. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	*S5-Axiom* {in **Gamma*** *nicht* beweisbar}
2. $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A$	A4
3. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A$	RT7 (1, 2)
4. $\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box A$	GT22 {schon in **Gamma*** beweisbar!}
5. $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A$	A4
6. $\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A$	RT7 (4, 5)
7. $\rightarrow \Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A$	R5 (6, 3)
8. $\rightarrow \Box(\Box\neg\Box A \vee \Box\neg\Box\neg\Box A)$	GRT3 (7).

Zum Zwecke des Vergleichs von **Alpha**, **Gamma*** und **Delta**, ist gleich im Folgenden eine Tabelle angegeben (wobei die **Gamma**/**Gamma***-Definition GD1, $A > B =_{Def} \neg A \vee B$, die von **Alpha** als D1 übernommen wurde, der reinen Gestalt nach auch von **Delta** übernommen sei, allerdings unter der Bezeichnung „ID1“ (zur Betonung des Kontexts).

{Sie „D1“ zu nennen, würde sich freilich „gewohnheitsrechtlich“ nicht verbieten – eben wegen der Gleichgestalt der **Alpha**- und der **Delta**-Definition –, obwohl „>“ in **Delta** einen anderen Sinn hat als in **Alpha**. Vgl. diejenigen **Delta**-Grundprinzipien (es sind alle bis auf eines), die jedes genauso heißen wie das mit ihnen jeweils *gleichgestaltige* (aber *sinnverschiedene*) **Alpha**-Grundprinzip.}

Schlussformel	**Alpha**-beweisbar	**Gamma***-beweisbar	**Delta**-beweisbar
$\neg A \supset A \rightarrow A$	Ja	Ja	Nein[64]
$\neg A > A \rightarrow A$	Ja	Ja	Nein[65]

[64] $\neg A \supset A \rightarrow A$ ist nicht **Delta**-beweisbar; andernfalls wäre wegen $\neg\neg A \vee A \rightarrow \neg A \supset A$ [Einsetzungsfall von IT9] und RT7 $\neg\neg A \vee A \rightarrow A$ **Delta**-beweisbar, also wegen $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \vee A$ [A4] und RT7: $\neg\neg A \rightarrow A$ – was jedoch *nicht* **Delta**-beweisbar ist.

[65] Man beachte, dass $\neg A > A \rightarrow A$ nichts anderes besagt als $\neg\neg A \vee A \rightarrow A$, und schaue auf die vorausgehende Fußnote.

$A \rightarrow \neg A \supset A$	Ja	Nein	Ja
$A \rightarrow \neg A > A$	Ja	Ja	Ja
$A \supset B \rightarrow A > B$	Ja	Ja	Nein
$A > B \rightarrow A \supset B$	Ja	Nein	Ja {IT9!}

{Die Formeln $A \supset \neg A \rightarrow \neg A$ und $A > \neg A \rightarrow \neg A$ und $\neg A \rightarrow A > \neg A$ sind **Alpha**-, **Gamma***- und **Delta**-beweisbar. Die Formel $\neg A \rightarrow A \supset \neg A$ ist **Alpha**- und **Delta**-beweisbar, aber nicht **Gamma***-beweisbar.}

Warum ist $\neg A \supset A \rightarrow A$ in **Delta** nicht beweisbar? Eine Antwort auf diese Frage ist die in Fußnote 64 gegebene; eine andere Antwort ist diese: Wenn $\neg A \supset A \rightarrow A$ in **Delta** beweisbar wäre, so wäre $\Box(\Box\neg\Box A > \Box A) \rightarrow \Box A$ [tr($\neg A \supset A \rightarrow A$)] in **Gamma*** beweisbar (gemäß **II.1**). Diese Schlussformel ist aber *nicht* in **Gamma*** beweisbar, sondern nur in **Gamma**, nämlich so:

1. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$	GT26 {*Brouwersches Axiom*; kein **Gamma***-Theorem}
2. $\Box A \rightarrow A$	GT3
3. $\neg\Box\neg\Box A \vee \Box A \rightarrow A$	R6 (1, 2)
4. $\Box\neg\Box A > \Box A \rightarrow A$	GD1 (3)
5. $\Box(\Box\neg\Box A > \Box A) \rightarrow \Box A$	GRT4 (4).

Warum ist $\neg A > A \rightarrow A$ in **Delta** nicht beweisbar? Eine Antwort auf diese Frage ist die in Fußnote 65 gegebene (und zwar im Lichte von Fußnote 64). Eine andere Antwort ist diese: Wenn $\neg A > A \rightarrow A$ in **Delta** beweisbar wäre, so wäre $\Box(\Box\neg\Box\neg\Box A \vee \Box A) \rightarrow \Box A$ [tr($\neg A > A \rightarrow A$)] in **Gamma*** beweisbar.[66] Diese Schlussformel ist aber nicht in **Gamma*** beweisbar, sondern nur in **Gamma**, nämlich so:

1. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$	GT26 {kein **Gamma***-Theorem}

[66] Man könnte auf den Gedanken kommen, dass tr($\neg A > A \rightarrow A$) *nicht* $\Box(\Box\neg\Box\neg\Box A \vee \Box A) \rightarrow \Box A$ ist, *sondern* $\Box(\Box\neg\Box A > \Box A) \rightarrow \Box A$. Aber die Vorschrift für die Übersetzung von **Delta** nach **Gamma*** bezieht sich auf **Delta** *in Grundnotation* und ist nur dafür definiert. Zudem soll ja jene Übersetzung den *strukturellen* Sinn der **Delta**-Formeln wiedergeben: denselben strukturellen Sinn, nur eben formuliert aufseiten von **Gamma***. Aber der strukturelle Sinn der **Delta**-Formel $\neg A > A \rightarrow A$ ist nicht der strukturelle Sinn der **Gamma***-Formel $\Box(\Box\neg\Box A > \Box A) \rightarrow \Box A$; denn der strukturelle Sinn dieser letzteren Formel ist ja schon der der **Delta**-Formel $\neg A \supset A \rightarrow A$ [und „$\supset$“ und „>“ sind in **Delta** strukturell sinnverschieden; man sieht es am Beweisbarkeitsausfall der Umkehrung von IT9, aber auch hieran: $\rightarrow A \supset A$ ist in **Delta** beweisbar, $\rightarrow A > A$ jedoch *nicht*, besagt diese Schlussformel doch – wegen ID1 – nichts anderes als $\rightarrow \neg A \vee A$].

2. $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \neg\Box\neg\Box A$	GT3
3. $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow A$	RT7 (2, 1)
4. $\Box A \rightarrow A$	GT3
5. $\Box\neg\Box\neg\Box A \vee \Box A \rightarrow A$	R6 (3, 4)
6. $\Box(\Box\neg\Box\neg\Box A \vee \Box A) \rightarrow \Box A$	GRT4 (5).

6. Kalküle im Umkreis von **Alpha** und **Delta** und der Hauptsatz über das Verhältnis zwischen **Alpha** und **Delta**

Alpha unter (bloßer, ersatzloser) Weglassung von R5 – *alias* ISG – ist (das hier relevante) Rest(**Alpha**). Also:

(I) [Rest(**Alpha**) + ISG] = **Alpha**.

Schon längst ist eingesehen:

(II) [Rest(**Alpha**) + TND] $\cong$ **Alpha**.

{„$\cong$“ drückt die *deduktive Äquivalenz* – das gegenseitige deduktive Enthaltensein – *von Kalkülen* aus. Die deduktive Äquivalenz von Kalkülen ist eine transitive und symmetrische und über Kalkülen reflexive Beziehung. Sie ist von der ebenfalls transitiven, symmetrischen und über Kalkülen reflexiven *Identität von Kalkülen* zu unterschieden.}

Außerdem gilt:

(III) [Rest(**Alpha**) + EDN + STND] $\cong$ **Alpha**.

Beweis:

Nach den Ausführungen in Kapitel 1 ist bereits klar, dass **Alpha** den Kalkül [Rest(**Alpha**) + EDN + STND] deduktiv enthält. Es gilt aber auch, dass [Rest(**Alpha**) + EDN + STND] **Alpha** deduktiv enthält:

VISG: $\Gamma, \neg A \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg A \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$ {*Vornvermindertes inhaltliches Schnittgesetz*}

1. $\Gamma, \neg A \rightarrow C$ Annahme
2. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow C$ Annahme
3. $\Gamma, \neg A \vee \neg\neg A \rightarrow C$ R6 (1, 2)
4. $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ STND {*Schwaches tertium non datur*}
5. $\Gamma \rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ R2 (4)
6. $\Gamma \rightarrow C$ R3 (3, 5);

ISG/R5: $\Gamma, A \rightarrow C; \Gamma, \neg A \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$ {*Inhaltliches Schnittgesetz*}

1. $\Gamma, A \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg A \rightarrow C$	Annahme
3. $\neg\neg A \rightarrow A$	EDN {*Eliminatio duplicis negationis*}
4. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow A$	R2, R1 (3)
5. $\Gamma, \neg\neg A, A \rightarrow C$	R2, R1 (1)
6. $\Gamma, \neg\neg A \rightarrow C$	R3 (5, 4)
7. $\Gamma \rightarrow C$	VISG {soeben bewiesen} (2, 6).

Rest(**Alpha**) unter Hinzufügung von RKP ist **Delta** (siehe Kapitel 4, wonach zudem **Delta** in **Alpha** deduktiv *echt* enthalten ist). Also:

(IV) [Rest(**Alpha**) + RKP] = **Delta**.

Außerdem gilt:

(Va) [Rest(**Alpha**) + AUKP + IDN] ≅ **Delta**.

Beweis:

Nach den Ausführungen in Kapitel 4 ist bereits klar, dass **Delta** den Kalkül [Rest(**Alpha**) + AUKP + IDN] deduktiv enthält (siehe IT1 und IRT2). Es gilt aber auch, dass [Rest(**Alpha**) + AUKP + IDN] **Delta** deduktiv enthält:

RKP: $\Gamma, A \rightarrow \neg B \Rightarrow \Gamma, B \rightarrow \neg A$

1. $\Gamma, A \rightarrow \neg B$	Annahme
2. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg A$	AUKP {*Aufsteigende Kontraposition*} (1)
3. $\Gamma, B, \neg\neg B \rightarrow \neg A$	R2, R1 (2)
4. $\Gamma, B \rightarrow \neg\neg B$	IDN, R2, R1
5. $\Gamma, B \rightarrow \neg A$	R3 (3, 4).

(Vb) [Rest(**Alpha**) + NISG] ≅ **Delta**.

Beweis:

Nach den Ausführungen in Kapitel 4 ist bereits klar, dass **Delta** und der Kalkül [Rest(**Alpha**) + NISG] deduktiv äquivalent sind [siehe IRT3b und die daran anschließende Anmerkung; NISG ist $\Gamma, B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$].

{Alternativ lässt sich (Vb) auch zeigen, indem man zeigt, dass [Rest(**Alpha**) + NISG] den Kalkül [Rest(**Alpha**) + AUKP + IDN], der gemäß (Va) mit **Delta** deduktiv äquivalent ist, deduktiv enthält (denn [Rest(**Alpha**) + NISG] ist wegen IRT3b schon sicher in **Delta** deduktiv enthalten):

<u>AUKP: $\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$</u>

1. $\Gamma, A \rightarrow B$	Annahme
2. $\Gamma, A, \neg B \rightarrow B$	R2 (1)
3. $\Gamma, A, \neg B, B \rightarrow \neg A$	A3, R2, R1
4. $\Gamma, A, \neg B \rightarrow \neg A$	R3 (3, 2)
5. $\Gamma, \neg B, A \rightarrow \neg A$	R1 (4)
6. $\Gamma, \neg B, \neg A \rightarrow \neg A$	A1, R2, R1
7. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg A$	NISG (5, 6) [die Satzformelfolge für die NISG-Anwendung ist nicht Γ, sondern $\Gamma, \neg B$];

<u>IDN: $A \rightarrow \neg\neg A$</u>

1. $A, \neg A \rightarrow \neg\neg A$	A3
2. $A, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	A1, R2, R1
3. $A \rightarrow \neg\neg A$	NISG (1, 2) [durch„A“ für „Γ“, „$\neg A$“ für „B“ und „$\neg A$“ für „C“ wird $\Gamma, B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$ zu der Schlussregelformel $A, \neg A \rightarrow \neg\neg A; A, \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \Rightarrow A \rightarrow \neg\neg A$ spezialisiert].}

Delta mit Hinzufügung von STND ist **Delta*** (siehe Kapitel 4). Also [unter Heranziehung von (IV)]:

(VIa) **Delta*** = [**Delta** + STND] = [Rest(**Alpha**) + RKP+ STND].

(VIb) **Delta*** $\cong$ [**Delta** + VISG].

Beweis:

Siehe Kapitel 4, wo die deduktive Äquivalenz von STND und VISG bzgl. **Delta** gezeigt wird. Folglich: [**Delta** + STND] $\cong$ [**Delta** + VISG], also mit (VIa): **Delta*** $\cong$ [**Delta** + VISG].

(VIc) [Rest(**Alpha**) + STND] $\cong$ [Rest(**Alpha**) + VISG].

Beweis:

Siehe Kapitel 4, wo die deduktive Äquivalenz von STND und VISG bzgl. **Delta** gezeigt wird [durch bloße substitutionelle Spezialisierung des Erweises der deduktiven Äquivalenz von TND und ISG bzgl. **Delta**] und dabei tatsächlich von IR5/RKP keinerlei Gebrauch gemacht wird (weder direkt noch indirekt), mithin STND und VISG auch bzgl. Rest(**Alpha**) deduktiv äquivalent sind.

(VId) **Delta*** ≅ [Rest(**Alpha**) + NISG + VISG].

Beweis:

Delta* ≅ [**Delta** + VISG] ≅ [Rest(**Alpha**) + NISG + VISG]. Die zweite deduktive Äquivalenz ergibt sich wegen (Vb), die erste wegen (VIb). [Im Blick auf noch Folgendes sei gesagt: An die gegebene Kette deduktiver Äquivalenzen lässt sich wegen (VIII) „≅ [**Alpha*** + NISG]“ anhängen.]

(VIIa) **Delta** ist in **Delta*** deduktiv *echt* enthalten, und **Delta*** ist in **Alpha** deduktiv *echt* enthalten, m. a. W.: **Delta*** ist deduktiv *zwischen dem deduktiv schwächeren* **Delta** *und dem deduktiv stärkeren* **Alpha**.

Beweis:

Dass **Delta** in **Delta*** deduktiv enthalten ist, ist [wegen (VIa)] trivial; dass **Delta*** in **Alpha** deduktiv enthalten ist, ist [im Lichte von (VIa)] aufgrund von Kapitel 1 schon gewiss. Dass **Delta*** *nicht* in **Delta** deduktiv enthalten ist, steht [wegen (VIa)] aufgrund dessen fest, dass STND in **Delta** nicht beweisbar ist. Dass **Alpha** *nicht* in **Delta*** deduktiv enthalten ist, ergibt sich [wegen (III) und (VIa)] daraus, dass EDN nicht in **Delta*** beweisbar ist.

{Mit der Beweisbarkeit von EDN in **Delta*** hätte man hingegen das deduktive Enthaltensein von [Rest(**Alpha**) + RKP + STND + EDN] in **Delta*** [wegen (VIa)], also auch das deduktive Enthaltensein von [Rest(**Alpha**) + STND + EDN] in **Delta***, also mit (III) das deduktive Enthaltensein von **Alpha** in **Delta***. In **Delta*** ist aber nur beweisbar:

SEDN: $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	*Schwache eliminatio duplicis negationis*
1. $\neg\neg\neg A, \neg A \rightarrow \neg A$	A1, R2, R1
2. $\neg\neg\neg A, \neg\neg A \rightarrow \neg A$	A3, R1
3. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	VISG (1, 2) [VISG ist in **Delta*** beweisbar; siehe oben (VIb)].

Wobei SEDN (und dessen Umkehrung) auch bereits in **Delta** beweisbar ist: *so*, wie es in dem längst angegebenen Beweis von IT4 demonstriert ist; oder auch *so*, dass in der soeben erfolgten Deduktion der Schritt von 1. und 2. nach 3. als eine Anwendung von NISG (statt von VISG) gesehen wird (**Delta** ist ja gemäß (Vb) mit [Rest(**Alpha**) + NISG] deduktiv äquivalent).}

In **Delta*** ist neben dem [schon **Delta**-beweisbaren] Regelgesetz IRT3a/SISG, also: Γ, B $\rightarrow$ C; Γ, $\neg$B $\rightarrow$ C $\Rightarrow$ Γ $\rightarrow$ $\neg\neg$C, und neben dem [schon **Delta**-beweisbaren] Regelgesetz RT3b/NISG, also: Γ, B $\rightarrow$ $\neg$C; Γ, $\neg$B $\rightarrow$ $\neg$C $\Rightarrow$ Γ $\rightarrow$ $\neg$C, auch VISG, also: Γ, $\neg$B $\rightarrow$ C; Γ, $\neg\neg$B $\rightarrow$ C $\Rightarrow$ Γ $\rightarrow$ C, beweisbar. Aber die geballte deduktive Kraft von SISG, NISG und VISG reichen nicht heran an die deduktive Kraft von ISG. Die bloße Hinzufügung von EDN zu **Delta*** liefert jedoch einen mit **Alpha** deduktiv äquivalenten Kalkül, und tatsächlich gilt ein noch viele stärkeres Resultat als dieses:

(VIIb) [Rest(**Alpha**) + _ISG + EDN] $\cong$ **Alpha**, wobei an die Stelle von „_“ gesetzt werden kann: „S“ oder „V“ oder „N“.

Beweis:

Die folgenden drei Deduktionen machen neben SISG bzw. VISG bzw. NISG nur von Rest(**Alpha**) und EDN Gebrauch, um ISG herzuleiten; durch sie ist – angesichts von (I) und der Beweisbarkeit von SISG, VISG, NISG und EDN in **Alpha** – die deduktive Äquivalenz von [Rest(**Alpha**) + _ISG + EDN] mit **Alpha** für die Setzung von „S“, „V“ oder „N“ anstelle von „_“ gezeigt:

Deduktion von ISG ausgehend von SISG + EDN:

1. Γ, B $\rightarrow$ C	Annahme
2. Γ, $\neg$B $\rightarrow$ C	Annahme
3. Γ $\rightarrow$ $\neg\neg$C	SISG (1, 2)
4. Γ, $\neg\neg$C $\rightarrow$ C	EDN, R2, R1
5. Γ $\rightarrow$ C	R3 (4, 3).

Deduktion von ISG ausgehend von VISG + EDN:

1. Γ, B $\rightarrow$ C	Annahme
2. Γ, $\neg$B $\rightarrow$ C	Annahme
3. Γ, $\neg\neg$B, B $\rightarrow$ C	R2, R1 (1)
4. Γ, $\neg\neg$B $\rightarrow$ B	EDN, R2, R1
5. Γ, $\neg\neg$B $\rightarrow$ C	R3 (3, 4)
6. Γ $\rightarrow$ C	VISG (2, 5).

Deduktion von ISG ausgehend von NISG + EDN:

1. Γ, B $\rightarrow$ C	Annahme
2. Γ, $\neg$B $\rightarrow$ C	Annahme
3. Γ, $\neg$C $\rightarrow$ $\neg$B	AUKP (1) [AUKP ist mit NISG und Rest(**Alpha**) beweisbar; siehe die Anmerkung zu (Vb)]
4. Γ, $\neg\neg$B $\rightarrow$ $\neg\neg$C	AUKP (3)
5. Γ,$\neg\neg\neg$B $\rightarrow$ $\neg\neg$C	AUKP zweimal hintereinander (2)
6. Γ $\rightarrow$ $\neg\neg$C	NISG (4, 5)
7. Γ, $\neg\neg$C $\rightarrow$ C	EDN, R2, R1
8. Γ $\rightarrow$ C	R3 (7, 6).

Rest(**Alpha**) mit Hinzufügung von VISG ist **Alpha***. Also:

(VIII) **Alpha*** = [Rest(**Alpha**) + VISG].

Es gilt:

(IX) **Alpha*** = [Rest(**Alpha**) + VISG] ≅ [Rest(**Alpha**) + STND].
Beweis:
Gemäß (VIII) ist **Alpha*** der Kalkül [Rest(**Alpha**) + VISG], welcher Kalkül gemäß (VIc) mit [Rest(**Alpha**) + STND] deduktiv äquivalent ist.

(X) **Alpha*** ist in **Alpha** deduktiv enthalten [wie aus (IX) und Kapitel 1 ersichtlich ist], und **Alpha*** ist deduktiv enthalten in **Delta*** [gemäß (IX) und (VIa)]. **Alpha*** ist aber nicht in **Delta** deduktiv enthalten [dies folgt auf der Grundlage von (IX) und (IV), da STND in **Delta** nicht beweisbar ist].

{Unter Verwendung des Satzoperators > [$\sigma > \sigma' =_{Def} \neg\sigma \vee \sigma'$] in **Delta** *und* **Alpha*** wäre also zu sagen, dass in **Delta** zwar $\rightarrow A \supset \neg\neg A$ beweisbar ist [siehe IT1], aber nicht $\rightarrow A > \neg\neg A$; dass hingegen in **Alpha*** *auch* $\rightarrow A > \neg\neg A$ beweisbar ist: wegen der **Alpha***-Ableitbarkeit von STND. [Zur Beweisbarkeit wiederum von $\rightarrow A \supset \neg\neg A$ [IDN] *auch* in **Alpha*** siehe Fußnote 67.]}

In vergleichender Zusammenstellung haben wir:

Alpha = [Rest(**Alpha**) + ISG] {ISG: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$}
Delta ≅ [Rest(**Alpha**) + NISG] {NISG: $\Gamma, B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$}
Alpha* = [Rest(**Alpha**) + VISG] {VISG: $\Gamma, \neg B \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$}
Delta* ≅ [Rest(**Alpha**) + NISG + VISG]

Sowohl NISG als auch VISG sind Spezialisierungen von ISG. Aber weder ist NISG eine Spezialisierung von VISG noch VISG eine Spezialisierung von NISG. Sehr wohl aber haben VISG und NISG eine gemeinsame Spezialisierung: $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$. Und folglich wird ein weiterer Kalkül sichtbar, ein Kalkül, der an deduktiver Kraft von den

bisher betracheten Kalkülen verschieden ist – er ist in jedem der bisher betrachteten Kalküle deduktiv enthalten, enthält aber selbst keinen von ihnen –, nämlich derjenige Kalkül, der hervorgeht, indem man zu Rest(**Alpha**) axiomatisch hinzufügt: $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg C$. Dieses (in **Alpha** selbstverständlich beweisbare) Schema ist *das* – prima facie (es geht sehr wohl *noch minimaler*: siehe im Folgenden SVISG) – *minimale inhaltliche Schnittgesetz*, kurz: MINISG, und der fragliche Kalkül heiße „**Epsilon**". Also:

(XI) **Epsilon** = [Rest(**Alpha**) + MINISG].

Hinzukommend zu (VIIb), welcher Satz sagt, dass die Kalküle [Rest(**Alpha**) + SISG + EDN], [Rest(**Alpha**) + VISG + EDN] und [Rest(**Alpha**) + NISG + EDN] mit **Alpha** deduktiv äquivalent sind, gilt nun auch:

(XII) [**Epsilon** + EDN] = [Rest(**Alpha**) + MINISG + EDN] ≅ **Alpha**.

Beweis:

Es ist zur Erreichung des Beweisziels nach allem, was schon festgestellt ist, nur noch die Herleitung von ISG in [**Epsilon** + EDN] anzugeben:

<u>ISG: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$</u>

1. $\Gamma, B \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$	Annahme
3. $C \rightarrow \neg\neg C$	IDN {in **Epsilon** beweisbar wegen A3 und A1 [etc.] und der folgenden Spezialisierung von MINISG: $C, \neg C \rightarrow \neg\neg C; C, \neg\neg C \rightarrow \neg\neg C \Rightarrow C \rightarrow \neg\neg C$}[67]
4. $\Gamma, B, C \rightarrow \neg\neg C$	R2, R1 (3)
5. $\Gamma, B \rightarrow \neg\neg C$	R3 (4, 1)
6. $\Gamma, \neg B, C \rightarrow \neg\neg C$	R2, R1 (3)
7. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg\neg C$	R3 (6, 2)
8. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow B$	EDN, R2, R1
9. $\Gamma, \neg\neg B, B \rightarrow \neg\neg C$	R2, R1 (5)
10. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg\neg C$	R3 (9, 8)

[67] $C, \neg C \rightarrow \neg\neg C; C, \neg\neg C \rightarrow \neg\neg C \Rightarrow C \rightarrow \neg\neg C$ ist auch eine Spezialisierung von VISG und von NISG, weshalb IDN *ganz wie in* **Epsilon** auch in **Alpha*** [angesichts von (VIII)] und in **Delta** [angesichts von (Vb)] sowie in **Delta*** [angesichts von (VId)] bewiesen werden kann.

11. $\Gamma \rightarrow \neg\neg C$ MINISG (7, 10)

12. $\Gamma, \neg\neg C \rightarrow C$ EDN, R2, R1

13. $\Gamma \rightarrow C$ R3 (12, 11).

Auch SISG – also: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg\neg C$ –, das in derselben Lage wie NISG, VISG und MINISG ist, nämlich zusammen mit EDN Rest(**Alpha**) zu einem mit **Alpha** deduktiv äquivalenten Kalkül zu stärken [siehe (VIIb) und (XII)], kann zur Definition eines Kalküls verwendet werden: Es ist der Kalkül [Rest(**Alpha**) + SISG], der kurz „**Delta****“ heiße:

(XIII) **Delta**** = [Rest(**Alpha**) + SISG].

Schließlich gibt es noch eine Modifikation von VISG, die im selben Verhältnis zu VISG steht wie SISG zu ISG, nämlich SVISG: $\Gamma, \neg B \rightarrow C; \Gamma, \neg\neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg\neg C$, und auch damit lässt sich ein Kalkül definieren:

(XIV) **Alpha**** = [Rest(**Alpha**) + SVISG].

Stärkt auch SVISG zusammen mit EDN Rest(**Alpha**) zu einem mit **Alpha** deduktiv äquivalenten Kalkül? Ja, so ist es:

(XV) [**Alpha**** + EDN] = [Rest(**Alpha**) + SVISG + EDN] $\cong$ **Alpha**.

Beweis:

Es ist zur Erreichung des Beweisziels nach allem, was schon festgestellt ist, nur noch die Herleitung von ISG in [**Alpha**** + EDN] vorzulegen:

<u>ISG: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow C$</u>

1. $\Gamma, B \rightarrow C$ Annahme

2. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$ Annahme

3. $\Gamma, \neg\neg B, B \rightarrow C$ R2, R1 (1)

4. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow B$ EDN, R2, R1

5. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow C$ R3 (3, 4)

6. $\Gamma \rightarrow \neg\neg C$ SVISG (2, 5)

7. $\Gamma, \neg\neg C \rightarrow C$ EDN, R2, R1

8. $\Gamma \rightarrow C$ R3 (7, 6).

Wir haben es also mit sechs Kalkülen zu tun – **Delta****, **Alpha***, **Delta**, **Delta***, **Epsilon**, **Alpha****, identisch oder deduktiv äquivalent mit: [Rest(**Alpha**) + SISG *bzw*. + VISG *bzw*. + NISG *bzw*. + NISG + VISG *bzw*. + MINISG *bzw*. + SVISG] –, die alle, *wenn man sie um* EDN *(grundprinziplich) ergänzt*, mit **Alpha** deduktiv äquivalent werden. Die Unterschiede an deduktiver Kraft zwischen ihnen werden also durch die Hinzunahme von EDN ausgelöscht; alle sechs *kollabieren* bei dieser Hinzunahme *hinauf* in **Alpha** (nicht *hinunter*, denn **Alpha** ist ja deduktiv stärker als sie alle).

{Für **Delta**** gilt dies aufgrund von (XIII) und (VIIb); für **Alpha*** aufgrund von (VIII) und (VIIb); für **Delta** aufgrund von (Vb) und (VIIb); für **Delta*** aufgrund von (VIb), (Vb) und (VIIb);[68] für **Epsilon** aufgrund von (XII); für **Alpha**** aufgrund von (XV).}

Alle sechs Kalküle haben neben dem eben beschriebenen „Phänomen" zudem gemeinsam, dass in ihnen IDN beweisbar ist.

{Für **Delta** und **Delta*** ist die Beweisbarkeit von IDN längst klar: siehe IT1. Ein alternativer Beweis für IDN kann jedoch der im Beweis von (XII) angegebenen Deduktion entnommen werden: siehe deren 3. Zeile und die Fußnote dazu. Für **Epsilon**, und darum auch für **Alpha***, ist der Beweis von IDN ebenfalls der im Beweis von (XII) angegebenen Deduktion zu entnehmen: siehe wiederum deren 3. Zeile und die Fußnote dazu. Was nun **Delta**** angeht, so geht der Beweis von IDN wie folgt:

1. C, $B \rightarrow C$ A1, R2

2. C, $\neg B \rightarrow C$ A1, R2

3. $C \rightarrow \neg\neg C$ SISG (1,2).

Der Beweis schließlich von IDN in **Alpha**** geht wie folgt:

1. C, $\neg B \rightarrow C$ A1, R2

2. C, $\neg\neg B \rightarrow C$ A1, R2

3. $C \rightarrow \neg\neg C$ SVISG (1, 2).}

Aber nur einer der sechs Kalküle ist ein Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik: **Delta**.

[68] Gemäß (VIb): **Delta*** ≅ [**Delta** + VISG], also mit (Vb): **Delta*** ≅ [Rest(**Alpha**) + NISG + VISG]. Folglich: [**Delta*** + EDN] ≅ [Rest(**Alpha**) + NISG + EDN + VISG], also mit (VIIb): [**Delta*** + EDN] ≅ [**Alpha** + VISG]. Nun gilt aber offensichtlich: [**Alpha** + VISG] ≅ **Alpha**. Also schließlich: **Delta*** + EDN] ≅ **Alpha**.

{Man könnte vielleicht meinen, dass auch **Delta**** ein Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik ist. Dazu müsste freilich **Delta**** mit **Delta** deduktiv äquivalent sein. Tatsächlich ist **Delta**** in **Delta** deduktiv enthalten. Das ist schon mit IRT3a klar [angesichts von (IV) und (XIII)]; aber hier noch der Beweis dafür mithilfe des – gemäß (Vb) – mit **Delta** deduktiv äquivalenten Kalküls [Rest(**Alpha**) + NISG]:

SISG: $\Gamma, B \rightarrow C; \Gamma, \neg B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg\neg C$

1. $\Gamma, B \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$	Annahme
3. $C \rightarrow \neg\neg C$	IDN, in [Rest(**Alpha**) + NISG] beweisbar
4. $\Gamma, B, C \rightarrow \neg\neg C$	R2, R1 (3)
5. $\Gamma, B \rightarrow \neg\neg C$	R3 (4, 1)
6. $\Gamma, \neg B, C \rightarrow \neg\neg C$	R2, R1 (3)
7. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg\neg C$	R3 (6, 2)
8. $\Gamma \rightarrow \neg\neg C$	NISG (5, 7).

Delta ist nun aber schwerlich in **Delta**** deduktiv enthalten. Dass **Delta** in **Delta**** deduktiv enthalten ist, ergäbe sich wegen (Vb) und (XIII) dann, wenn NISG in **Delta**** beweisbar wäre; aber der Versuch, NISG in **Delta**** zu beweisen, zeigt deutlich, woran es hakt:

1. $\Gamma, B \rightarrow \neg C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg C$	Annahme
3. $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg C$	SISG (1, 2)
4. $\neg\neg\neg C \rightarrow \neg C$	SEDN {in **Delta**** beweisbar??}
5. $\Gamma, \neg\neg\neg C \rightarrow \neg C$	R2, R1 (4)
6. $\Gamma \rightarrow \neg C$	R3 (5, 3).

So ginge es, *wenn* SEDN – *Schwache eliminatio duplicis negationis* – in **Delta**** beweisbar wäre. Aber es ist nicht zu sehen, wie SEDN in **Delta**** bewiesen werden kann – während es sogar in **Epsilon** (und darum erst recht in **Delta**, **Delta*** und **Alpha***) beweisbar ist:

SEDN: $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$

1. $\neg\neg\neg A, \neg A \rightarrow \neg A$	A1, R2, R1
2. $\neg\neg\neg A, \neg\neg A \rightarrow \neg A$	A3, R1
3. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	MINISG/NISG/VISG (1, 2).

Mit SISG (also in **Delta****) oder auch mit SVISG (also in **Alpha****) erhält man hingegen aus 1. und 2. nur eine *Trivialität*:

3. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$.}

{Die Unableitbarkeit von SEDN in **Delta**** und **Alpha**** bedingt, dass in keinem der beiden Kalküle MINISG ableitbar ist, woraus folgt, dass **Epsilon** weder in **Delta**** noch in **Alpha**** deduktiv enthalten ist. Hätte man hingegen SEDN *bewiesen* zur Verfügung, so könnte man, um MINISG zu beweisen, wie folgt vorgehen:

In **Delta****:		In **Alpha****:	
1. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg C$	Annahme	1. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg C$	Annahme

2. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg C$	Annahme	2. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg C$	Annahme
3. $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg C$	SISG [Spezialisierung] (1, 2)	3. $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg C$	SVISG [Spezialisierung] (1, 2)
4. $\Gamma, \neg\neg\neg C \rightarrow \neg C$	SEDN, R2, R1	4. $\Gamma, \neg\neg\neg C \rightarrow \neg C$	SEDN, R2, R1
5. $\Gamma \rightarrow \neg C$	R3 (4, 3).	5. $\Gamma \rightarrow \neg C$	R3 (4, 3).

Es lässt sich allerdings zeigen, dass, *umgekehrt*, **Alpha**** in **Epsilon** deduktiv enthalten ist, denn SVISG lässt sich in **Epsilon** ableiten:

1. $\Gamma, \neg B \rightarrow C$	Annahme
2. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow C$	Annahme
3. $\Gamma, C \rightarrow \neg\neg C$	IDN [in **Epsilon** beweisbar], R2, R1
4. $\Gamma, \neg B \rightarrow \neg\neg C$	RT7 (1, 3)
5. $\Gamma, \neg\neg B \rightarrow \neg\neg C$	RT7 (2, 3)
6. $\Gamma \rightarrow \neg\neg C$	MINISG [Spezialisierung; „$\neg C$“ eingesetzt für „C“] (4, 5).

Delta** hingegen ist, anders als **Alpha****, *nicht* in **Epsilon** deduktiv enthalten; denn SISG lässt sich in **Epsilon** nicht ableiten: Man bekommt – auch unter Einsatz von IDN – die dafür erforderliche Spezialisierung von MINISG nicht hin.

Es bleibt noch zu sagen, dass **Alpha**** in **Delta**** deduktiv enthalten ist; denn SVISG ist ja eine Spezialisierung von SISG: man setze in SISG „$\neg B$“ für „B“.}

Der im Titel dieses Kapitels erwähnte Hauptsatz über das Verhältnis zwischen **Alpha** und **Delta** ist nun dieser:

(XVI) Eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \sigma'$ ist in **Alpha** genau dann beweisbar, wenn $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar ist.

Beweis:

(α) Von *rechts* (vom „genau dann, wenn“) nach *links*: Wenn $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar ist, dann ist, weil **Delta** deduktiv in **Alpha** enthalten ist, $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma'$ in **Alpha** beweisbar, und also ist wegen der Beweisbarkeit von $\Gamma, \neg\neg\sigma' \rightarrow \sigma'$ in **Alpha** (T2, R2 R1) mit R3 $\Gamma \rightarrow \sigma'$ in **Alpha** beweisbar.

(β) Von *links* (vom „genau dann, wenn“) nach *rechts*: Sei $\Gamma \rightarrow \sigma'$ in **Alpha** beweisbar, habe also einen Beweis in **Alpha**. Man bringt diesen Beweis zunächst auf seine Grundform – wenn er sie nicht schon hat –, also auf die Form, die er ohne die abkürzende Verwendung von echtabgeleiteten Prinzipien von **Alpha** hat.

(**β.1**) Enthält der Beweis *dann* keine Anwendungen von R5 (ISG), so ist er auch ein Beweis in **Delta** und $\Gamma \to \sigma'$ ist somit auch in **Delta** beweisbar. Folglich ist wegen IT1 (IDN) $\Gamma \to \neg\neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar: 1. $\Gamma \to \sigma'$; 2. $\Gamma, \sigma' \to \neg\neg\sigma'$ [IT1, R2, R1]; 3. $\Gamma \to \neg\neg\sigma'$ [R3 mit 2. und 1.].

(**β.2**) Enthält der fragliche Beweis hingegen Anwendungen von R5, so ersetzt man jede dieser Anwendungen durch eine Anwendung von R6. Statt von $\Gamma', \sigma \to \sigma''$ und $\Gamma', \neg\sigma \to \sigma''$ mit R5 zu $\Gamma' \to \sigma''$ überzugehen, geht man also jedes Mal von $\Gamma', \sigma \to \sigma''$ und $\Gamma', \neg\sigma \to \sigma''$ mit R6 über zu $\Gamma', \sigma \vee \neg\sigma \to \sigma''$. Da durch die R6-Anwendungen nichts weggekürzt wird [die entstehenden TND-Formeln kann man mit R1 zunächst bis hinter Γ' verschieben, sodass sie auch beweis-psychologisch nicht stören], geht in dieser Weise aus dem Beweis in **Alpha** von $\Gamma \to \sigma'$ schließlich ein Beweis in **Alpha** von $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \sigma_n \vee \neg\sigma_n \to \sigma'$ hervor. Dieser Beweis ist aber auch ein Beweis von $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \sigma_n \vee \neg\sigma_n \to \sigma'$ in **Delta**, enthält er doch keine Anwendungen von R5/ISG [er ist, genauer gesagt, ein Beweis in Rest(**Alpha**) – wobei „Rest(**Alpha**)" so wie bisher in diesem Kapitel verstanden wird]. Nun geht man des Weiteren wie folgt vor:

1. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1}, \sigma_n \vee \neg\sigma_n \to \sigma'$[69]	in **Delta** beweisbar
2. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1}, \neg\sigma' \to \neg(\sigma_n \vee \neg\sigma_n)$	IRT2 (1)
3. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1}, \neg\neg(\sigma_n \vee \neg\sigma_n) \to \neg\neg\sigma'$	IRT2 (2)
4. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1} \to \neg\neg(\sigma_n \vee \neg\sigma_n)$	IT2, R2
5. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1} \to \neg\neg\sigma'$	R3 (3, 4)
6. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \neg\sigma' \to \neg(\sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1})$	IR5 (5)
7. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \neg\neg(\sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1}) \to \neg\neg\sigma'$	IRT2 (6)
8. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \to \neg\neg(\sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1})$	IT2, R2
9. $\Gamma, \sigma_1 \vee \neg\sigma_1 \ldots \to \neg\neg\sigma'$	R3 (7, 8)

Usw. usf. – wenn nötig – nach derselben (vorgeführten) Verfahrensweise. Am Ende steht jedenfalls da:

$\Omega. \Gamma \to \neg\neg\sigma'$.

Durch (**β.1**) und (**β.2**) ist gezeigt: Ist $\Gamma \to \sigma'$ in **Alpha** beweisbar, so ist $\Gamma \to \neg\neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar.

[69] Das Glied $\sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1}$ hat natürlich nur für den Fall, dass $n > 2$, eine eigene Bedeutung *neben* $\sigma_1 \vee \neg\sigma_1$. Bei $n = 2$ fusioniert $\sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1}$ mit $\sigma_1 \vee \neg\sigma_1$; bei $n = 1$ entfällt $\sigma_{n-1} \vee \neg\sigma_{n-1}$.

Da **Alpha***, **Alpha****, **Delta*, Delta**** und **Epsilon** deduktiv in **Alpha** enthalten sind, erhält man als ein Korollar des Hauptsatzes:

(XVII) Wenn eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \sigma'$ in **Alpha***, **Alpha****, **Delta***, **Delta**** oder **Epsilon** beweisbar ist, dann ist $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar.

Die Umkehrung von (XVII) gilt aber nicht, denn $\rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$ ist in **Delta** beweisbar (IT2), aber $\rightarrow A \vee \neg A$ ist weder in **Alpha*** noch in **Alpha**** noch in **Delta*** noch in **Delta**** noch in **Epsilon** beweisbar.

{Warum ist $\rightarrow A \vee \neg A$ in den genannten Kalkülen nicht beweisbar? *Antwort*: Wegen Rest(**Alpha**) in ihnen (vor allem R6) würde die Beweisbarkeit von $\rightarrow A \vee \neg A$ in diesen Kalkülen, die Beweisbarkeit in ihnen von ISG bedingen. Sie wären also alle mit **Alpha** deduktiv äquivalent – was sie aber doch *nicht* sind.}

Ein besonders schönes Korollar von (XVI), des Hauptsatzes zum **Alpha**-**Delta**-Verhältnis, ist des Weiteren dies:

(XVIII) Eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ ist in **Alpha** genau dann beweisbar, wenn $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar ist.

Beweis:

Wegen (XVI) gilt zunächst: $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ ist in **Alpha** genau dann beweisbar, wenn $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar ist. Hinzukommt aber nun wegen IT4: $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg\sigma'$ ist in **Delta** genau dann beweisbar, wenn $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar ist.

{1. $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg\sigma'$	Annahme	1. $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$	Annahme
2. $\neg\neg\neg\sigma' \rightarrow \neg\sigma'$	IT4 [1. Hälfte]	2. $\neg\sigma' \rightarrow \neg\neg\neg\sigma'$	IT4 [2. Hälfte]
3. $\Gamma, \neg\neg\neg\sigma' \rightarrow \neg\sigma'$	R2, R1 (2)	3. $\Gamma, \neg\sigma' \rightarrow \neg\neg\neg\sigma'$	R2, R1 (2)
4. $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$	R3 (3, 1)	4. $\Gamma \rightarrow \neg\neg\neg\sigma'$	R3 (3, 1).}

Da **Delta*** über alle Beweismittel verfügt, über die auch **Delta** verfügt [siehe (VIa)], gilt der Satz (XVI) und der Satz (XVIII) auch für **Delta***. Also gilt (XVIII)-*für*-**Delta***, oder mit anderen Worten:

(XIX) Eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ ist in **Alpha** genau dann beweisbar, wenn $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ in **Delta*** beweisbar ist.

Man erhält somit schließlich:

(XX) Eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ ist in **Delta*** genau dann beweisbar, wenn $\Gamma \rightarrow \neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar ist.

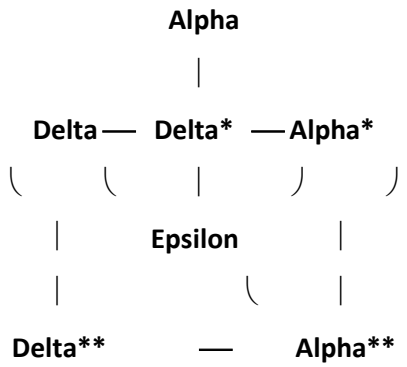
Beweis:

Der Satz ist eine logische Folge aus (XVIII) und (XIX).

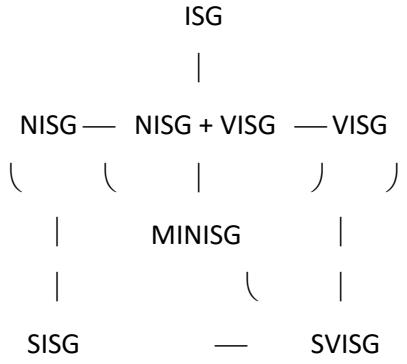
{In (XX) ist der Satz „Eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma'$ ist in **Delta*** genau dann beweisbar, wenn $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma'$ in **Delta** beweisbar ist“ logisch eingeschlossen. Man erhält ihn aber auch aus (XVI) und (XVI)-*für*-**Delta***.}

Delta und **Delta*** können sich also – wie schon **Delta** und **Alpha** – hinsichtlich der Beweisbarkeit einer gegebenen Schlussformel nur dann unterscheiden, wenn die Konklusion dieser Schlussformel keine Negationssatzformel ist. Dementsprechend gilt z. B.: (i) $\rightarrow \neg(\neg A \vee \neg\neg A)$ ist wie $\rightarrow \neg(A \vee \neg A)$ [wie auch $\rightarrow A \vee \neg A$] *weder in* **Delta** *noch in* **Delta*** *beweisbar*; (ii) $\rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg\neg A)$ ist [wie auch $\rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$] *sowohl in* **Delta** *als auch in* **Delta*** *beweisbar*; (iii) $\rightarrow \neg A \vee \neg\neg A$ ist *nicht in* **Delta**, doch *sehr wohl in* **Delta*** *beweisbar* [ist doch STND ein Axiom von **Delta***].

Sieben Kalküle:[70]



Sieben Schemata von Schlussregelformeln:[71]



[70] Die andeutungsweise zwischen den Kalkülnamen gezogenen Linien sind so zu verstehen, dass sie die in diesem Kapitel festgestellten Verhältnisse des deduktiven Enthaltenseins zwischen Kalkülen abbilden. Diese Verhältnisse sind allerdings stets einseitig; es ist also jeweils *eine* (nur *eine*) Richtung bei den Linien zu ergänzen. Bei den vertikalen (geraden oder gebogenen) Linien ist es die Richtung zum unteren Seitenrand; bei der – dem Lesefortschritt gemäß – ersten horizontalen Linie ist es die Richtung zum linken Seitenrand, bei der – dem Lesefortschritt gemäß – zweiten und dritten horizontalen Linie hingegen ist es die Richtung zum rechten Seitenrand. Was dann abgebildet wird, ist stets ein Verhältnis der Gestalt „K_1 enthält deduktiv K_2“, wobei der enthaltende Kalkül im Sinne der jeweils spezifizierten Richtung der je gegebenen Linienverbindung stets früher genannt wird als der enthaltene. Man beachte, dass das deduktive Enthalten zwischen Kalkülen eine transitive Beziehung ist, und dementsprechend sind die Linienverbindungen (im Sinne ihrer jeweils spezifizierten Richtung) transitiv zu denken.

[71] Diese zweite Graphik ist *mutatis mutandis* analog zur ersten zu verstehen; nur geht es in ihr nicht um Kalküle, sondern um *Schemata von Schlussregelformeln* und deren stets einseitigen Verhältnisse der Gestalt „Im Kalkül [Rest(**Alpha**) + $SSRF_1$] ist $SSRF_2$ beweisbar“.

Teil 2: Prädikatenlogiken

7. Der Schlussformelkalkül **Pi-Alpha** der klassischen Prädikatenlogik (1. Stufe) mit Identität und Kennzeichnung

Der Kalkül **Pi-Alpha** geht aus dem Kalkül **Alpha** dadurch hervor, dass von der ein für alle Mal in diesem Buch feststehenden Formelsprache *Sigma* nun auch die feiner – nicht bloß „molekular" – strukturierten Formeln in den Blick genommen und logisch gewürdigt werden und dementsprechend zu **Alpha** – d. h.: zu seinen Grundprinzipien [A1 – A5, R1 – R7] – das Folgende hinzugefügt wird:

A6 $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$ *Dictum de omni* (DO)

R8 $\Gamma \rightarrow \sigma[\alpha] \Rightarrow \Gamma \rightarrow \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ und in der „Alle"-Satzformel $\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt. *Gesetz der hinteren Allgeneralisierung* (GHAG)

A7 $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ *„Existenzgeneralisierung"* (EG)

R9 $\Gamma, \sigma[\alpha] \rightarrow \sigma' \Rightarrow \Gamma, \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ, in der „Mindestens ein"-Satzformel $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ und in der Satzformel σ' nicht mehr vorkommt.

Gesetz der vorderen „Existenzgeneralisierung" (GVEG)

A8 $\rightarrow a = a$ *Reflexivität der Identität* (RID)

A9 $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ *Substituierbarkeit der Identischen (salva veritate)* (SID)

A10 $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ *Auswahlprinzip* (AP)

{Damit A10 kein Befremden auslöst, muss man im Auge behalten, dass der Kennzeichnungsoperator „ι" hier zunächst und primär als *Selektor* intendiert ist und im Sinne von „beispielsweise diese/s/r" aufgefasst wird; sodass „$\iota xF(x)$" zu lesen ist als „beispielsweise diese/s/r F", oder – technischer – als „beispielsweise dieses x, das F ist". Erst im Grenzfall – wenn unterstelltermaßen überhaupt nur ein einziges Etwas, das F ist, gegeben ist – nimmt der Selektor bedeutungsmäßig den Charakter des *determinierten* Kennzeichnungsoperators – des Kennzeichnungsoperators im üblichen, *definite descriptions* liefernden Sinn – an; da ist dann „$\iota xF(x)$" zu lesen als „der/die/das F", oder – technischer – als „dasjenige x, das F ist".}

{Was die Einsetzungsfallbildung in prädikatenlogischen Beweisen angeht, so darf folgender Hinweis nicht fehlen: Die uniforme Substitution in Prinzipien, echtabgeleitete oder axiomatische, kann in prädikatenlogischen Beweisen, obwohl von der logischen Sache her völlig berechtigt, zu syntaktischem Unsinn führen. Dies ist beispielsweise bei folgendem „Einsetzungsfall" von A10 gegeben: $\exists x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y R(\iota x \exists y R(x, y), y)$. Zur Problemlösung ist zu sagen: Als korrekt gebildeter Einsetzungsfall eines Prinzips zählt auch jede syntaktisch wohlgeformte Formel, die durch geeignete Variablenersetzung (man spricht auch von „Variablenumbenennung") aus einem syntaktisch nicht wohlgeformten Ergebnis uniformer Substitution in das fragliche Prinzip hervorgeht. Somit sind $\exists x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y R(\iota x \exists y' R(x, y'), y)$ und $\exists x \exists y' R(x, y') \rightarrow \exists y' R(\iota x \exists y R(x, y), y')$ korrekt gebildete Einsetzungsfälle von A10 [also von $\exists x F(x) \rightarrow F(\iota x F(x))$], obwohl sie [im Gegensatz zu $\exists x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y R(\iota x \exists y R(x, y), y)$] *nicht* durch uniforme Substitution aus A10 gewonnen werden können.}

D1 $\sigma > \sigma' =_{Def} \neg\sigma \vee \sigma'$ {schon in **Alpha** gegeben}

D2 $\exists!\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \wedge \forall\upsilon\forall\upsilon'(\sigma[\upsilon'] \wedge \sigma[\upsilon] \supset \upsilon' = \upsilon)$

Alle Prinzipien von **Alpha**, sind auch Prinzipien von **Pi-Alpha**, wobei die Einsetzungsfälle / Spezialisierungen der **Alpha**-Prinzipien – *nun*, da sie auch **Pi-Alpha**-Prinzipien sind – gewöhnlich feiner strukturiert werden.

{Feiner strukturiert werden *konnten* jene Einsetzungsfälle / Spezialisierungen freilich schon in **Alpha**; denn *Sigma*, die Formelsprache, ist ja für alle betrachteten Kalküle einheitlich gegeben [was die Grundnotation plus systemübergreifende Definitionen und Sprachregelungen angeht]. Aber *tatsächlich* feiner strukturiert werden sie in **Alpha** nie, da die Axiomatik von **Alpha** dies nicht erfordert, es gänzlich überflüssig wäre.}

Hinzukommen nun bei **Alpha**, und damit auch bei **Pi-Alpha**, *vor allem* nun aber nicht schon bei **Alpha**, sondern *erst bei* **Pi-Alpha**, in jedem Fall jedoch in schlichter Fortsetzung der in Kapitel 1 für **Alpha** begonnenen und in Kapitel 2 und 4 schon weitergeführten „T"/„RT"-Listenzählung, die folgenden bewiesenen Prinzipien [jeweils unter der ihrer Bewiesenheitsposition entsprechenden Bezeichnung im gerade angesprochenen Stil]:

<u>T27: $A \wedge B \supset C, B \rightarrow A \supset C$</u>

1. $A \wedge B, A \wedge B \supset C \rightarrow C$	A2
2. $A, B, A \wedge B \supset C, A \wedge B \rightarrow C$	R2, R1 (1)
3. $A, B, A \wedge B \supset C \rightarrow A \wedge B$	A5, R2
4. $A, B, A \wedge B \supset C \rightarrow C$	R3 (2, 3)

5. $A \wedge B \supset C, B, A \rightarrow C$ R1 (4)

6. $A \wedge B \supset C, B \rightarrow A \supset C$ R4 (5)

{Man beachte bei der verwendeten klammerfreien Schreibweise: $\wedge$ bindet stärker als $\supset$. T27 ist ein Schnittgesetz (*ohne* ein Regelgesetz zu sein), ein *quasi*-strukturelles zudem. Man vergleiche T27 hiermit:

$\underline{A, B \rightarrow C; \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow C}$

1. $A, B \rightarrow C$ Annahme

2. $\rightarrow B$ Annahme

3. $A \rightarrow B$ R2 (2)

4. $A \rightarrow C$ R3 (1, 3).}

$\underline{\text{T28: } \exists xF(x), b = \iota xF(x) \rightarrow F(b)}$

1. $b = \iota xF(x), F(\iota xF(x)) \rightarrow F(b)$ A9 {Einsetzungsfall: „ιxF(x)“ für „a“}

2. $b = \iota xF(x), F(\iota xF(x)), F(c) \rightarrow F(b)$ R2 (1)

3. $b = \iota xF(x), F(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow F(b)$ R9 (2)

4. $\exists xF(x), b = \iota xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10, R2

5. $\exists xF(x), b = \iota xF(x), F(\iota xF(x)) \rightarrow F(b)$ R1 (3)

6. $\exists xF(x), b = \iota xF(x) \rightarrow F(b)$ R3 (5, 4)

Sinnvollerweise *nur* für den Grenzfall [was die Auswahl mittels ιxF(x) aus den F angeht] *der Einzigkeit der* F – also erst mit $\exists!xF(x)$, nicht schon mit $\exists xF(x)$ [man beachte den primär intendierten Sinn von „ι“!] – ist die folgende Prämisse-Konklusion-Tauschung zu T28 beweisbar:

$\underline{\text{T29: } \exists!xF(x), F(b) \rightarrow b = \iota xF(x)}$

1. $\exists!xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \wedge \forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x)$ A1, D2

2. $\exists xF(x) \wedge \forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x) \rightarrow \forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x)$ T9

3. $\exists!xF(x) \rightarrow \forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x)$ RT7 (1, 2)

4. $\forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge F(\iota xF(x)) \supset y = \iota xF(x))$ A6[72]

5. $\exists!xF(x) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge F(\iota xF(x)) \supset y = \iota xF(x))$ RT7 (3, 4)

[72] Die Schlussformel in Zeile 4 ist ein Einsetzungsfall von A6: „$\forall y(F(y) \wedge F(_) \supset y = _)$“ für „F“, „ιxF(x)“ für „a“. Zur näheren Beschreibung der prädikatenlogischen Einsetzungsfallbildung, die komplexer ist als die aussagenlogische, siehe III. in Kapitel 0.

6. $\exists xF(x) \wedge \forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x) \rightarrow \exists xF(x)$ T9

7. $\exists !xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ RT7 (1, 6)

8. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10

9. $\exists !xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ RT7 (7, 8)

10. $\forall y(F(y) \wedge F(\iota xF(x)) \supset y = \iota xF(x)) \rightarrow F(c) \wedge F(\iota xF(x)) \supset c = \iota xF(x)$ A6[73]

11. $\exists !xF(x) \rightarrow F(c) \wedge F(\iota xF(x)) \supset c = \iota xF(x)$ RT7 (5, 10)

12. $F(c) \wedge F(\iota xF(x)) \supset c = \iota xF(x), F(\iota xF(x)) \rightarrow F(c) \supset c = \iota xF(x)$ T27

13. $\exists !xF(x), F(c) \wedge F(\iota xF(x)) \supset c = \iota xF(x), F(\iota xF(x)) \rightarrow F(c) \supset c = \iota xF(x)$ R2, R1 (12)

14. $\exists !xF(x), F(c) \wedge F(\iota xF(x)) \supset c = \iota xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ R2 (9)

15. $\exists !xF(x), F(c) \wedge F(\iota xF(x)) \supset c = \iota xF(x) \rightarrow F(c) \supset c = \iota xF(x)$ R3 (13, 14)

16. $\exists !xF(x) \rightarrow F(c) \supset c = \iota xF(x)$ R3 (15, 11)

17. $\exists !xF(x) \rightarrow \forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x))$ R8 (16)

18. $\forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)) \rightarrow F(b) \supset b = \iota xF(x)$ A6[74]

19. $\exists !xF(x) \rightarrow F(b) \supset b = \iota xF(x)$ RT7 (17, 18)

20. $\exists !xF(x), F(b) \rightarrow b = \iota xF(x)$ RT13 (19)

{Alternativ und kürzer ab der 10. Zeile:

10. $\forall y(F(y) \wedge F(\iota xF(x)) \supset y = \iota xF(x)) \rightarrow F(b) \wedge F(\iota xF(x)) \supset b = \iota xF(x)$ A6

11. $\exists !xF(x) \rightarrow F(b) \wedge F(\iota xF(x)) \supset b = \iota xF(x)$ RT7 (5, 10)

12. $\exists !xF(x), F(b) \wedge F(\iota xF(x)) \rightarrow b = \iota xF(x)$ RT13 (11)

13. $\exists !xF(x), F(b), F(\iota xF(x)) \rightarrow b = \iota xF(x)$ RT14 (12)

14. $\exists !xF(x), F(b) \rightarrow F(\iota xF(x))$ R2 (9)

15. $\exists !xF(x), F(b) \rightarrow b = \iota xF(x)$ R3 (13, 14).}

{Die Regeln der Klammersparnis, die zunächst für Satzformeln formuliert sind, übertragen sich auf Prädikatformeln (welcher Stellenzahl auch immer). Insbesondere dürfen bei Prädikatformelvorkommnissen, die in keinem Satzformelkontext stehen, die (eigentlich zu setzenden) begrenzenden, an ihnen äußeren Klammern weggelassen werden. Eben diese Klammern müssen aber *im* Satzformelkontext gesetzt werden; sonst ergibt sich Unin-

[73] Die Schlussformel in Zeile 10 ist per Transitivität ein Einsetzungsfall von A6: Zunächst ist $\forall yF(y) \rightarrow F(c)$ ein Einsetzungsfall von A6 [„y“ für „x“, „c“ für „a“], aber zudem ist $\forall y(F(y) \wedge F(\iota xF(x)) \supset y = \iota xF(x)) \rightarrow F(c) \wedge F(\iota xF(x)) \supset c = \iota xF(x)$ ein Einsetzungsfall von $\forall yF(y) \rightarrow F(c)$ [„$(F(_) \wedge F(\iota xF(x)) \supset _ = \iota xF(x))$“ für „F“; rechts vom Pfeil wurden die äußeren Klammern im Endergebnis der uniformen Substitution weggelassen].

[74] Die Schlussformel in Zeile 18 ist per Transitivität ein Einsetzungsfall von A6: Zunächst ist $\forall yF(y) \rightarrow F(b)$ ein Einsetzungsfall von A6 [„y“ für „x“, „b“ für „a“], aber zudem ist $\forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)) \rightarrow F(b) \supset b = \iota xF(x)$ ein Einsetzungsfall von $\forall yF(y) \rightarrow F(b)$ [„$(F(_) \supset _ = \iota xF(x))$ für „F“; rechts vom Pfeil wurden die äußeren Klammern im Endergebnis der uniformen Substitution weggelassen].

tendiertes, schlimmstenfalls syntaktischer Unsinn. Z. B. darf man sehr wohl „F(y) ⊃ y = ιxF(x) ist eine einstellige Prädikatformel“ schreiben, statt in schöner Vollständigkeit „(F(y) ⊃ y = ιxF(x)) ist eine einstellige Prädikatformel“; aber man darf durchaus nicht „∀yF(y) ⊃ y = ιxF(x)“ schreiben statt „∀y(F(y) ⊃ y = ιxF(x))“, wenn man eine Satzformel hinschreiben will, in der die Prädikatformel F(y) ⊃ y = ιxF(x) vorkommt. Auch darf man „y = a ist eine einstellige Prädikatformel“ schreiben, statt „(y = a) ist eine einstellige Prädikatformel“, aber nur ∃y(y = a) ist eine Satzformel, in der die Prädikatformel y = a vorkommt, ∃yy = a hingegen ist nicht einmal syntaktisch wohlgeformt.

Das hier für Prädikatformeln Gesagte gilt im Prinzip auch für *Prädikatstockformeln*. Allerdings werden bei Prädikatstockformeln die an ihnen äußeren Klammern in der Regel auch bei ihrem formelkontextfreien Auftreten nicht weggelassen; der Grund ist, dass von Prädikatstockformeln in der Regel bei Substitutionen die Rede ist: Es soll da gänzlich unmissverständlich sein, *welcher Ausdruck genau* es in Vollständigkeit ist, der substituiert wird.}

Jeder Zeile des Beweises von T29 und jeder Zeile jedes **Pi-Alpha**-Beweises einer Schlussformel (und jeder Zeile jedes Beweises einer Schlussformel in irgendeinem Schlussformel-Kalkül) kann das Bewiesensein (im Kalkül) dessen, was jeweils in der Zeile steht, entnommen werden, sei es *erst aktuell erfolgt* (in diesem Fall hat man bis einschließlich der fraglichen Zeile einen Beweis dessen, was in der Zeile steht, *frisch vor Augen* [allerdings vielleicht einen, der umständlicher als nötig ist]) *oder schon früher erfolgt*. Schlussformeln, die im Rahmen des Beweises einer Schlussformel in einer Zeile als Zwischenstation *neu* (mit)bewiesen werden, werden in der Regel nicht weiter hervorgehoben: durch Verleihung einer Listenbezeichnung (in der Liste, die die Theorem herzählt) oder durch Nennung mit Verweis auf ihren Beweisort (etwa bei ihrer Verwendung in einer anderen Deduktion). Aber in diesem Buch gibt es diesbezügliche Ausnahmen; hier sind nun – angesichts von T29 – für den Kalkül **Pi-Alpha** gleich mehrere solche Ausnahmen:

T30a: ∃!xF(x) → ∃xF(x)

{Siehe Zeile 7 des Beweises von T29.}

T30b: ∃!xF(x) → F(ιxF(x))

{Siehe Zeile 9 des Beweises von T29.}

T30c: ∃!xF(x) → ∀x∀y(F(y) ∧ F(x) ⊃ y = x)

{Siehe Zeile 3 des Beweises von T29.}

T30d: ∃!xF(x) → ∀y(F(y) ⊃ y = ιxF(x))

{Siehe Zeile 17 des Beweises von T29.}

T31: $\exists!xF(x) \rightarrow F(b) \equiv b = \iota xF(x); \exists!xF(x) \rightarrow \forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x))$

1. $\exists xF(x), b = \iota xF(x) \rightarrow F(b)$ T28
2. $\exists xF(x) \rightarrow b = \iota xF(x) \supset F(b)$ R4 (1)
3. $\exists!xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ T30a
4. $\exists!xF(x) \rightarrow b = \iota xF(x) \supset F(b)$ RT7 (3, 2)
5. $\exists!xF(x), F(b) \rightarrow b = \iota xF(x)$ T29
6. $\exists!xF(x) \rightarrow F(b) \supset b = \iota xF(x)$ R4 (5)
7. $\exists!xF(x) \rightarrow (F(b) \supset b = \iota xF(x)) \wedge (b = \iota xF(x) \supset F(b))$ RT2 (6, 4)
8. $\exists!xF(x) \rightarrow F(b) \equiv b = \iota xF(x)$ DEF≡ (7)
9. $\exists!xF(x) \rightarrow \forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x))$ R8 (8)

{Auch die Umkehrung *der zweiten Hälfte von* T31 [hinter dem Semikolon] ist in **Pi-Alpha** beweisbar. Der Beweis ist aus Konvenienzgründen erst später, in einer Anmerkung gleich unterhalb von T66 – dem *Gesetz der „Drittengleichheit"* – angegeben.}

T32a: $J(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$

1. $J(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x))$ A1, R2
2. $J(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10, R2, R1
3. $J(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x)) \wedge F(\iota xF(x))$ RT2 (1, 2)
4. $J(\iota xF(x)), \exists xF(x), J(\iota xF(x)) \wedge F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ A7,[75] R2, R1
5. $J(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ R3 (4, 3)

T32b: $\exists!xF(x), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$

1. $\exists!xF(x), J(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ T32a, R2, R1
2. $\exists!xF(x), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ T30a, R2
3. $\exists!xF(x), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ R3 (1, 2)

T33: $a = b \rightarrow b = a; \rightarrow \forall x\forall y(x = y \supset y = x)$ *Symmetrie der Identität* (SYMID)

[75] Der verwendete Einsetzungsfall von A7 – also von „$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$" – ergibt sich durch uniforme Substitution von „$(J(_) \wedge F(_))$" für „F" und von „$\iota xF(x)$" für „a". Man erhält somit: „$(J(_) \wedge F(_))(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(_) \wedge F(_))(x)$, was im Endergebnis [„nach nahtlosem Import des Exportierten": siehe Kapitel 0, III.] nicht anderes ist als „$J(\iota xF(x)) \wedge F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$" [links vom Pfeil wurden die dem Ausdruck äußeren Klammern im Endergebnis der uniformen Substitution weggelassen].

1. $a = b, b = b \rightarrow b = a$ A9[76]

2. $\rightarrow b = b$ A8

3. $a = b \rightarrow b = b$ R2 (2)

4. $a = b \rightarrow b = a$ R3 (1, 3)

5. $\rightarrow a = b \supset b = a$ R4 (4)

6. $\rightarrow \forall y(a = y \supset y = a)$ R8 (5)

7. $\rightarrow \forall x \forall y(x = y \supset y = x)$ R8 (6)

Sinnvollerweise *nur* für den Grenzfall der Einzigkeit der F (was die Auswahl mittels ιxF(x) aus den F angeht) – also erst mit ∃!xF(x), nicht schon mit ∃xF(x) [man beachte den primär intendierten Sinn von „ι“!] – ist dann die folgende Prämisse-Konklusion-Tauschung zu T32a beweisbar:

T34: $\exists!xF(x), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$

1. $J(a), \forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)) \rightarrow F(a) \supset a = \iota xF(x)$ A6, R2, R1

2. $J(a), \forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), F(a) \rightarrow a = \iota xF(x)$ RT13 (1)

3. $J(a), \forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), F(a), a = \iota xF(x) \rightarrow \iota xF(x) = a$ T33, R2, R1

4. $J(a), \forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), F(a) \rightarrow \iota xF(x) = a$ R3 (3, 2)

5. $\iota xF(x) = a, J(a) \rightarrow J(\iota xF(x))$ A9

6. $\forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), J(a), F(a) \rightarrow \iota xF(x) = a$ R1 (4)

7. $\forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), J(a), F(a), \iota xF(x) = a \rightarrow J(\iota xF(x))$ R2, R1 (5)

8. $\forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), J(a), F(a) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R3 (7, 6)

9. $\forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), J(a) \wedge F(a) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R7 (8)

10. $\forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R9 (9)

11. $\exists!xF(x), \exists x(J(x) \wedge F(x)), \forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R2, R1 (10)

12. $\exists!xF(x), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \forall y(F(y) \supset y = \iota xF(x))$ T30d, R2

13. $\exists!xF(x), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R3 (11, 12)

[76] Der verwendete Einsetzungsfall von A9 – also von „b = a, F(a) → F(b)“ – ergibt sich so: Zunächst wird in A9 simultan „b“ für „a“ und „a“ für „b“ substituiert: „a = b, F(b) → F(a)“. Darin wird dann uniform für „F“ „(b = _)“ substituiert, was „a = b, (b = _)(b) → (b = _)(a)“ liefert, im Endergebnis also: „ a = b, b = b → b = a“ [äußere Klammern wurden weggelassen].

T35: $\underline{\exists!xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x)) \equiv \exists x(J(x) \wedge F(x))}$

{Der Beweis von T35 aufgrund von $\underline{\text{T32b: } \exists!xF(x), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))}$ und $\underline{\text{T34: } \exists!xF(x), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))}$ geht fast genauso wie der Beweis von $\underline{\text{T31: } \exists!xF(x) \rightarrow F(b) \equiv b = \iota xF(x)}$ [genauer: der 1. Hälfte von T31] aufgrund von $\underline{\text{T29: } \exists!xF(x), F(b) \rightarrow b = \iota xF(x)}$ und $\underline{\text{T28: } \exists xF(x), b = \iota xF(x) \rightarrow F(b)}$ – nur mit einigen Schritten weniger.}

$\underline{\text{T36: } J(\iota xF(x)), \neg\exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge \neg F(x))}$

1. $J(\iota xF(x)), \neg\exists xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x))$ A1, R2
2. $F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ A7
3. $\neg\exists xF(x) \rightarrow \neg F(\iota xF(x))$ RT3 {AUKP} (2)
4. $J(\iota xF(x)),\neg\exists xF(x) \rightarrow \neg F(\iota xF(x))$ R2, R1 (3)
5. $J(\iota xF(x)), \neg\exists xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x)) \wedge \neg F(\iota xF(x))$ RT2 (1, 4)
6. $J(\iota xF(x)), \neg\exists xF(x), J(\iota xF(x)) \wedge \neg F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge \neg F(x))$ A7, R2, R1
7. $J(\iota xF(x)), \neg\exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge \neg F(x))$ R3 (6, 5)

$\underline{\text{T37a: } \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))}$ *Erstes „existenzielles" tertium non datur* (ETND1)

1. $\rightarrow F(b) \vee \neg F(b)$ T1 {TND}
2. $F(b) \vee \neg F(b) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ A7
3. $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R3 (2, 1)

$\underline{\text{T37b: } \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)}$ *Zweites „existenzielles" tertium non datur* (ETND2)

1. $F(b) \rightarrow \exists xF(x)$ A7
2. $\neg F(b) \rightarrow \exists x\neg F(x)$ A7
3. $\exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ A4
4. $F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ RT7 (1, 3)
5. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ A4
6. $\neg F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ RT7 (2, 5)
7. $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ R5 (4, 6)

{Neben $\rightarrow A \vee \neg A$ ist in **Pi-Alpha** $\rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$ [T13] beweisbar, aber neben $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ ist in **Pi-Alpha** $\rightarrow \neg(\exists xF(x) \wedge \neg\exists x\neg F(x))$ *nicht* beweisbar.}

T38: $\rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ *Alternativ formuliertes* ETND2 (AETND2)

1. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10
2. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg F(\iota x\neg F(x))$ A10
3. $F(\iota xF(x)) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ A4
4. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ RT7 (1, 3)
5. $\neg F(\iota x\neg F(x)) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ A4
6. $\exists x\neg F(x) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ RT7 (2, 5)
7. $\exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ R6 (4, 6)
8. $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ T37b {ETND2}
9. $\rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ R3 (7, 8)

{Der inhaltlich-beschreibende Name von T38 erklärt sich dadurch, dass auf der Basis von A7 und A10 $\exists xF(x) \leftrightarrow F(\iota xF(x))$ [siehe T41] und folglich (als Einsetzungsfall) $\exists x\neg F(x) \leftrightarrow \neg F(\iota x\neg F(x))$ in **Pi-Alpha** beweisbar ist, und deshalb auch $\exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \leftrightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ und $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \Leftrightarrow \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ in **Pi-Alpha** beweisbar sind (*ohne* Heranziehung von ETND2 oder AETND2).}

T39: $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ *1. „Definition" des „Manches"-Operators* (1DMO)

1. $\forall x\neg F(x) \rightarrow \neg F(b)$ A6
2. $F(b) \rightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ RT4 {RKP} (1)
3. $\exists xF(x) \rightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ R9 (2)
4. $F(b) \rightarrow \exists xF(x)$ A7
5. $\neg\exists xF(x) \rightarrow \neg F(b)$ RT3 {AUKP} (4)
6. $\neg\exists xF(x) \rightarrow \forall x\neg F(x)$ R8 (5)
7. $\neg\forall x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$ RT5 {LKP} (6)
8. $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ DEF$\leftrightarrow$ (3, 7)

T40: $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ *1. „Definition" des „Alle"-Operators* (1DAO)

1. $\neg F(b) \rightarrow \exists x\neg F(x)$ A7
2. $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow F(b)$ RT5 {LKP} (1)
3. $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$ R8 (2)
4. $\forall xF(x) \rightarrow F(b)$ A6
5. $\neg F(b) \rightarrow \neg\forall xF(x)$ RT3 {AUKP} (4)

6. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall xF(x)$ R9 (5)

7. $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ RT4 {RKP} (6)

8. $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ DEF↔ (7, 3)

T41: $\exists xF(x) \leftrightarrow F(\iota xF(x))$ *2. „Definition" des „Manches"-Operators* (2DMO)

1. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10

2. $F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ A7

3. $\exists xF(x) \leftrightarrow F(\iota xF(x))$ DEF↔ (1, 2)

{Von Definitionen im eigentlichen Sinn kann bei T39 – T41 natürlich keine Rede sein; sie sind, *eigentlich* gesprochen, gestaltmäßig an Definitionen im eigentlichen Sinn erinnernde Gesetze der wechselseitigen Deduzierbarkeit. Dasselbe gilt von einer ganzen Reihe von anderen Prinzipien, die das Wort „Definition" im inhaltlich beschreibenden Namen führen: IMD1, IMD2, IMPOD, IMPUD, *Zweitdefinition der Möglichkeit* bzw. *der Unmöglichkeit*, bei ihnen freilich, ohne dass jenes Wort in Anführungszeichen gesetzt wurde. Bei T39 – T41 ist es geschehen, um Gelegenheit zu geben, darauf, was hier *eigentlich* Sache ist, aufmerksam zu machen.}

RT17: $A \leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A \leftrightarrow B$ und $A \leftrightarrow B \Rightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

1. $A \leftrightarrow \neg B$	Annahme	1. $A \leftrightarrow B$	Annahme
2. $A \rightarrow \neg B$	DEF↔ (1)	2. $A \rightarrow B$	DEF↔ (1)
3. $\neg B \rightarrow A$	DEF↔ (1)	3. $B \rightarrow A$	DEF↔ (1)
4. $B \rightarrow \neg A$	RT4 {RKP} (2)	4. $\neg B \rightarrow \neg A$	RT3 {AUKP} (2)
5. $\neg A \rightarrow B$	RT5 {LKP} (3)	5. $\neg A \rightarrow \neg B$	RT3 (3)
6. $\neg A \leftrightarrow B$	DEF↔ (5, 4)	6. $\neg A \leftrightarrow \neg B$	DEF↔ (5, 4)

RT18: $A \leftrightarrow B; B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$ und $B \leftrightarrow A; B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$

1. $A \leftrightarrow B$ Annahme

2. $B \leftrightarrow C$ Annahme

3. $A \rightarrow B$ DEF↔ (1)

4. $B \rightarrow C$ DEF↔ (2)

5. $A \rightarrow C$ RT7 (3, 4)

6. $B \rightarrow A$ DEF↔ (1)

7. $C \rightarrow B$ DEF↔ (2)

8. $C \rightarrow A$ RT7 (7, 6)

9. $A \leftrightarrow C$ DEF↔ (5, 8)

{Der Beweis der zweiten Hälfte von RT18 [nach „und"] ist eine triviale Abwandlung des Beweises der ersten Hälfte [$A \rightarrow B$ in Zeile 3 lässt sich ja nicht nur wegen DEF↔ aus $A \leftrightarrow B$ in Zeile 1 deduzieren, sondern wegen DEF↔ auch aus $B \leftrightarrow A$ in Zeile 1]. Die erste Hälfte von RT18 erinnert von der Gestalt her an das Gesetz der Transitivität der Identität (siehe T65), die zweite an das Identitätsgesetz der „Drittengleichheit" (siehe T66) [dies insbesondere angesichts dessen, dass man aufgrund des trivial beweisbaren Gesetzes $D \leftrightarrow D' \Rightarrow D' \leftrightarrow D$ in jener zweiten Hälfte „$B \leftrightarrow A$" durch „$A \leftrightarrow B$" und „$B \leftrightarrow C$" durch „$C \leftrightarrow B$" beweisbar ersetzen kann].}

T42: $\forall xF(x) \leftrightarrow F(\iota x \neg F(x))$ *2. „Definition" des „Alle"-Operators* (2DAO)

1. $\exists x \neg F(x) \leftrightarrow \neg F(\iota x \neg F(x))$ T41 {Einsetzungsfall: „$\neg F(_)$" für „F"}

2. $\neg \exists x \neg F(x) \leftrightarrow F(\iota x \neg F(x))$ RT17 (1)

3. $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg F(x)$ T40

4. $\forall xF(x) \leftrightarrow F(\iota x \neg F(x))$ RT18 (3, 2)

Was verrät T42 über ι, *den* [Kennzeichnungsoperator als] *Selektor*? Gemäß A10 wählt man *dann* mittels Benennung durch „$\iota x \neg F(x)$" unter den *non*-F eines aus, *wenn* [ein einziges oder mehrere] *non*-F vorhanden sind. Folglich: *Wenn* man mittels Benennung durch „$\iota x \neg F(x)$" keines [nicht eines] unter den *non*-F auswählt – sondern vielmehr eines unter den F, denn *etwas* muss „$\iota x \neg F(x)$" ja benennen –, *dann* sind keine *non*-F vorhanden, mit anderen Worten: Alle [Etwasse] sind F. Zudem folgt, umgekehrt, aus „Alle sind F" schlicht durch Anwendung des *Dictum de omni*, dass auch das durch „$\iota x \neg F(x)$" benannte Etwas ein F ist.

Dieser Argumentation entspricht der folgende *alternative Beweis* in **Pi-Alpha** für T42:

T42: $\forall xF(x) \leftrightarrow F(\iota x \neg F(x))$ {alternativ bewiesen}

1. $\exists x \neg F(x) \rightarrow \neg F(\iota x \neg F(x))$ A10 {Einsetzungsfall}

2. $F(\iota x \neg F(x)) \rightarrow \neg \exists x \neg F(x)$ RT4 (1)

3. $F(\iota x \neg F(x)) \rightarrow \forall xF(x)$ aus 2. mit T40 {von rechts nach links} und RT7

4. $\forall xF(x) \rightarrow F(\iota x \neg F(x))$ A6[77]

5. $\forall xF(x) \leftrightarrow F(\iota x \neg F(x))$ DEF↔ (3, 4)

[77] Die Schlussformel in Zeile 4 ist aufgrund schlichter Ersetzung von „a" in „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$" durch „$\iota x \neg F(x)$" ein Einsetzungsfall von A6.

Bemerkenswert an T42 ist, dass es sich mit A10 ohne *zu* A10 *noch hinzukommende* axiomatische Charakterisierungen des Sinns von „ι“ ergibt. Und auch die unter erfüllter Einzigkeitsbedingung erfolgende Spezialisierung des Sinns von „ι“ in „ιxF(x)“ zum *determininierten* Kennzeichnungsoperator wird allein durch die Annahme der F-Einzigkeit [∃!xF(x)] statt bloß der F-Erfülltheit [∃xF(x)] geleistet; keine zu A10 hinzukommenden axiomatischen Postulierungen sind nötig. Eine mehr oder minder komplexe logische Theorie der *determinierten* Kennzeichnung [üblicherweise „Kennzeichnungstheorie“ genannt] erübrigt sich.

{Aber was bezeichnet denn „ιxF(x)“ [indem wir „ιxF(x)“ für den Augenblick wie einen normalsprachlichen Ausdruck behandeln: eine Praxis, die schon geübt wurde und die auch wiederkehren wird], wenn keine F vorhanden sind? *Antwort*: Etwas, was es *da* noch bezeichnen kann (und etwas muss es ja bezeichnen unter den [für **Pi-Alpha** einschlägigen, bei **Pi-Alpha** erfüllten] Idealitätsforderungen an die Normalsprache): ein Etwas, das *non*-F ist. Analog ist die Frage zu beantworten, was denn „ιx¬F(x)“ bezeichnet, wenn keine *non*-F vorhanden sind? *Antwort*: Etwas, was es *da* noch bezeichnen kann (und etwas muss es ja bezeichnen): ein Etwas, das F ist. Beide Antworten sind korrekt – und necessitieren keinerlei zu **Pi-Alpha** (oder zum gegebenen Stand von **Pi-Alpha**) noch hinzukommende Axiomatik.}

T43: $\neg\exists xF(x) \leftrightarrow \forall x\neg F(x)$; $\neg\forall xF(x) \leftrightarrow \exists x\neg F(x)$

1. $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$	T40
2. $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg F(x)$	T39
3. $\neg\exists xF(x) \leftrightarrow \forall x\neg F(x)$	RT17 (2)
4. $\neg\forall xF(x) \leftrightarrow \exists x\neg F(x)$	RT17 (1)

RT19: $\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma, \neg A \rightarrow C \Rightarrow \Gamma \rightarrow B \vee C$

1. $\Gamma, A \rightarrow B$	Annahme
2. $\Gamma, \neg A \rightarrow C$	Annahme
3. $B \rightarrow B \vee C$	A4
4. $\Gamma, A, B \rightarrow B \vee C$	R2, R1 (3)
5. $\Gamma, A \rightarrow B \vee C$	R3 (4, 1)
6. $C \rightarrow B \vee C$	A4
7. $\Gamma, \neg A, C \rightarrow B \vee C$	R2, R1 (6)
8. $\Gamma, \neg A \rightarrow B \vee C$	R3 (7, 2)

9. $\Gamma \rightarrow B \vee C$ R5 (5, 8)

T44: $J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x)) \vee \exists x(J(x) \wedge \neg F(x))$

1. $J(\iota xF(x)), \exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ T32a
2. $J(\iota xF(x)), \neg\exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge \neg F(x))$ T36
3. $J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x)) \vee \exists x(J(x) \wedge \neg F(x))$ RT19 (1, 2)

RT20: $\Gamma', A \rightarrow B; \Gamma'', B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma', \Gamma'', A \rightarrow C$ *Generalisiertes* KSG (GKSG)

1. $\Gamma', A \rightarrow B$ Annahme
2. $\Gamma'', B \rightarrow C$ Annahme
3. $\Gamma', \Gamma'', A \rightarrow B$ R2, R1 (1)
4. $\Gamma', \Gamma'', B \rightarrow C$ R2, R1 (2)
5. $\Gamma', \Gamma'', A \rightarrow C$ RT7 {KSG} (3, 4) {RT7 ist anwendbar, weil Γ', Γ'' zusammen eine Satzformelfolge Γ bilden; im Fall, dass Γ'' leer ist, ist Γ identisch mit Γ'; im Fall, dass Γ' leer ist, ist Γ identisch mit Γ''}

RT20 wird gleich im Folgenden verwendet.

Die Umkehrung von T44 lässt sich selbstverständlich nicht beweisen. Doch es lässt sich nicht einmal beweisen: $\exists x(J[x] \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ – *zu Recht*, denn die mittels „$\iota xF(x)$“ ausgewählte F-Entität, muss nicht eine J-Entität sein, mag auch manche Entität sowohl eine J- als auch eine F-Entität sein. Etwas anderes ist es allerdings, wenn *zudem* nur eine einzige F-Entität zur Verfügung steht, ausgewählt zu werden: *siehe* T34; *oder aber*, wenn *zudem* alle F-Entitäten J-Entitäten sind: Das Theorem $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists x(J[x] \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ ist ein in **Pi-Alpha** leicht zu gewinnendes Korollar des im Folgenden nächsten und drittnächsten Theorems, 1. Hälfte, *zusammengenommen*.

T45: $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x))$

1. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(\iota xF(x)) \rightarrow F(\iota xF(x)) \supset J(\iota xF(x))$ A6, R2
2. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(\iota xF(x)), F(\iota xF(x)) \supset J(\iota xF(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ A2, R2, R1
3. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(\iota xF(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R3 (2, 1)
4. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists xF(x), F(\iota xF(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R2, R1 (3)
5. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10, R2, R1

6. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x))$ R3 (4, 5)

T46: $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$

1. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(c) \rightarrow F(c) \supset J(c)$ A6, R2
2. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(c), F(c) \supset J(c) \rightarrow J(c)$ A2, R2, R1
3. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(c) \rightarrow J(c)$ R3 (2, 1)
4. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(c) \rightarrow F(c)$ A1, R2, R1
5. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(c) \rightarrow J(c) \wedge F(c)$ RT2 (3, 4)
6. $J(c) \wedge F(c) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ A7
7. $\forall x(F(x) \supset J(x)), F(c) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ RT20 (5, 6) {Γ' ist „$\forall x(F(x) \supset J(x))$“, Γ'' ist leer}
8. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists xF(x) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ R9 (7)

T47a: $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x); \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xJ(x)$ $\wedge,\exists$-*Verteilungsgesetz, 1. Formulierung*

1. $J(a), F(a) \rightarrow \exists xF(x)$	A7, R2, R1	1. $J(a), F(a) \rightarrow \exists xJ(x)$	A7, R2
2. $J(a) \wedge F(a) \rightarrow \exists xF(x)$	R7 (1)	2. $J(a) \wedge F(a) \rightarrow \exists xJ(x)$	R7 (1)
3. $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x)$	R9 (2)	3. $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xJ(x)$	R9 (2)

{Zum Theorem $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists x(J[x] \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$: Aus $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ [T47a, 1. Hälfte] mit R2 und R1: $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x)$; *daraus* mit $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists xF(x) \rightarrow J(\iota xF(x))$ [T45] und RT7: $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$. Dasselbe Ergebnis lässt sich auch direkt mit RT20 aus T47a, 1. Hälfte, und T45 deduzieren, wobei Γ' leer ist und Γ'' nur aus $\forall x(F(x) \supset J(x))$ besteht.}

T47b: $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xJ(x)$ $\wedge,\exists$-*Verteilungsgesetz, 2. Formulierung*

1. $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ T47a, 1. Hälfte
2. $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xJ(x)$ T47a, 2. Hälfte
3. $\exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xJ(x)$ RT2 (1, 2)

Wegen T47a kann $\exists xF(x)$ in T45 durch $\exists x(J(x) \wedge F(x))$ ersetzt werden (wie gerade gezeigt). Was aber in **Pi-Alpha** nicht beweisbar ist, ist zu $\forall x(F(x) \supset J(x)), \exists x(J(x) \wedge F(x)) \rightarrow J(\iota xF(x))$ die folgende Prämisse-Konklusion-Tauschung: $\forall x(F(x) \supset J(x)), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$; *denn* es ist in **Pi-Alpha** nicht einmal das Folgende beweisbar: $\forall x(F(x) \supset J(x)), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ [was

aber wegen T47a beweisbar *wäre*, *wenn* $\forall x(F(x) \supset J(x)), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x(J(x) \wedge F(x))$ beweisbar *wäre*]. Und *zu Recht* ist $\forall x(F(x) \supset J(x)), J(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ nicht in **Pi-Alpha** beweisbar: Wenn nichts F ist [entgegen der Konklusion der fraglichen Schlussformel] – was doch leicht sein kann –, dann sind nämlich trivialerweise alle F J und „$\iota xF(x)$“ muss ein *non*-F bezeichnen – und womöglich bezeichnet es da eines, welches ein J ist!

Die Beweise in **Pi-Alpha** der verschiedenen ein- oder doppelseitigen *prädikatenlogischen Verteilungsgesetze* („Quantor über Satzoperator“) sind eine gute Gelegenheit, das Funktionieren des Kalküls noch näher kennenzulernen. Solche Beweise wurden bei T47a,b gerade vorgeführt; hier sind die weiteren derartigen Beweise:

T48: $\exists x(F(x) \vee J(x)) \leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$ $\vee,\exists$-*Verteilungsgesetz*

1. $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$	A7
2. $J(a) \rightarrow \exists xJ(x)$	A7
3. $\exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$	A4
4. $\exists xJ(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$	A4
5. $F(a) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$	RT7 (1, 3)
6. $J(a) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$	RT7 (2, 4)
7. $F(a) \vee J(a) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$	R6 (5, 6)
8. $\exists x(F(x) \vee J(x)) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$	R9 (7)
9. $F(a) \rightarrow F(a) \vee J(a)$	A4
10. $F(a) \vee J(a) \rightarrow \exists x(F(x) \vee J(x))$	A7
11. $F(a) \rightarrow \exists x(F(x) \vee J(x))$	RT7 (9, 10)
12. $J(a) \rightarrow F(a) \vee J(a)$	A4
13. $J(a) \rightarrow \exists x(F(x) \vee J(x))$	RT7 (12, 10)
14. $\exists xF(x) \rightarrow \exists x(F(x) \vee J(x))$	R9 (11)
15. $\exists xJ(x) \rightarrow \exists x(F(x) \vee J(x))$	R9 (13)
16. $\exists xF(x) \vee \exists xJ(x) \rightarrow \exists x(F(x) \vee J(x))$	R6 (14, 15)
17. $\exists x(F(x) \vee J(x)) \leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xJ(x)$	DEF$\leftrightarrow$ (8, 16)

T49a: $\forall xF(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x)); \forall xJ(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x))$ $\vee,\forall$-*Verteilungsgesetz, 1. Formulierung*

1. $\forall xF(x) \rightarrow F(b)$	A6	1. $\forall xJ(x) \rightarrow J(a)$	A6
2. $F(b) \rightarrow F(b) \vee J(b)$	A4	2. $J(a) \rightarrow F(a) \vee J(a)$	A4
3. $\forall xF(x) \rightarrow F(b) \vee J(b)$	RT7 (1, 2)	3. $\forall xJ(x) \rightarrow F(a) \vee J(a)$	RT7 (1, 2)
4. $\forall xF(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x))$	R8 (3)	4. $\forall xJ(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x))$	R8 (3)

T49b: $\forall xF(x) \vee \forall xJ(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x))$ $\vee,\forall$-*Verteilungsgesetz, 2. Formulierung*

1. $\forall xF(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x))$	T49a, 1. Hälfte
2. $\forall xJ(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x))$	T49a, 2. Hälfte
3. $\forall xF(x) \vee \forall xJ(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee J(x))$	R6 (1, 2)

T50: $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xJ(x)$ $\wedge,\forall$-*Verteilungsgesetz*

1. $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \rightarrow F(a) \wedge J(a)$	A6
2. $F(a) \wedge J(a) \rightarrow F(a)$	T9
3. $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \rightarrow F(a)$	RT7 (1, 2)
4. $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \rightarrow \forall xF(x)$	R8 (3)
5. $F(a) \wedge J(a) \rightarrow J(a)$	T9
6. $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \rightarrow J(a)$	RT7 (1, 5)
7. $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \rightarrow \forall xJ(x)$	R8 (6)
8. $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \rightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xJ(x)$	RT2 (4, 7)
9. $\forall xF(x), \forall xJ(x) \rightarrow F(a)$	A6, R2
10. $\forall xF(x), \forall xJ(x) \rightarrow J(a)$	A6, R2, R1
11. $\forall xF(x), \forall xJ(x) \rightarrow F(a) \wedge J(a)$	RT2 (9, 10)
12. $\forall xF(x), \forall xJ(x) \rightarrow \forall x(F(x) \wedge J(x))$	R8 (11)
13. $\forall xF(x) \wedge \forall xJ(x) \rightarrow \forall x(F(x) \wedge J(x))$	R7 (12)
14. $\forall x(F(x) \wedge J(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xJ(x)$	DEF$\leftrightarrow$ (8, 13)

T51a: $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x) \rightarrow \forall xJ(x)$ $\supset,\forall$-*Verteilungsgesetz, 1. Formulierung*

1. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x) \rightarrow F(a) \supset J(a)$	A6, R2
2. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x), F(a) \supset J(a) \rightarrow F(a)$	A6, R2, R1
3. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x), F(a) \supset J(a), F(a) \rightarrow J(a)$	A2, R2, R1
4. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x), F(a) \supset J(a) \rightarrow J(a)$	R3 (3, 2)

5. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x) \rightarrow J(a)$ R3 (4, 1)

6. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x) \rightarrow \forall xJ(x)$ R8 (5)

T51b: $\forall x(F(x) \supset J(x)) \rightarrow \forall xF(x) \supset \forall xJ(x)$ *⊃,∀-Verteilungsgesetz, 2. Formulierung*

1. $\forall x(F(x) \supset J(x)), \forall xF(x) \rightarrow \forall xJ(x)$ T51a

2. $\forall x(F(x) \supset J(x)) \rightarrow \forall xF(x) \supset \forall xJ(x)$ R4 (1)

T52: $\exists x(F(x) \supset J(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \supset \exists xJ(x)$ *⊃,∃-Verteilungsgesetz*

1. $\forall xF(x), F(a) \supset J(a), F(a) \rightarrow J(a)$ A2, R2, R1

2. $\forall xF(x), F(a) \supset J(a) \rightarrow F(a)$ A6, R2

3. $\forall xF(x), F(a) \supset J(a) \rightarrow J(a)$ R3 (1, 2)

4. $\forall xF(x), F(a) \supset J(a), J(a) \rightarrow \exists xJ(x)$ A7, R2, R1

5. $\forall xF(x), F(a) \supset J(a) \rightarrow \exists xJ(x)$ R3 (4, 3)

6. $F(a) \supset J(a), \forall xF(x) \rightarrow \exists xJ(x)$ R1 (5)

7. $F(a) \supset J(a) \rightarrow \forall xF(x) \supset \exists xJ(x)$ R4 (6)

8. $\exists x(F(x) \supset J(x)) \rightarrow \forall xF(x) \supset \exists xJ(x)$ R9 (7)

9. $\neg F(a), F(a) \rightarrow J(a)$ A3, R1

10. $\neg F(a) \rightarrow F(a) \supset J(a)$ R4 (9)

11. $F(a) \supset J(a) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ A7

12. $\neg F(a) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ RT7 (10, 11)

13. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ R9 (12)

14. $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$ T40

15. $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x\neg F(x)$ RT5 {LKP} (14)

16. $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ RT7 (15, 13)

17. $J(a), F(a) \rightarrow J(a)$ A1, R2

18. $J(a) \rightarrow F(a) \supset J(a)$ R4 (17)

19. $J(a) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ RT7 (18, 11)

20. $\exists xJ(x) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ R9 (19)

21. $\neg\forall xF(x) \vee \exists xJ(x) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ R6 (16, 20)

22. $\forall xF(x) \supset \exists xJ(x) \rightarrow \neg\forall xF(x) \vee \exists xJ(x)$ T8 {IMD2}

23. $\forall xF(x) \supset \exists xJ(x) \rightarrow \exists x(F(x) \supset J(x))$ RT7 (22, 21)

24. $\exists x(F(x) \supset J(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \supset \exists xJ(x)$ DEF↔ (8, 23)

T53 – T60 im Folgenden sind die bzgl. $\supset$, $\wedge$ und $\vee$ einschlägigen (und ganz und gar nichttrivialen) Verteilungsgesetze für $\forall$ bzw. $\exists$, *wenn* eine der beiden Seiten des $\supset$-, $\wedge$- oder $\vee$-Ausdrucks, auf die der Quantor [„$\forall$“ oder „$\exists$“ mit beigefügter Variable] verteilt wird, ihn gar nicht annehmen kann: deshalb nicht, weil sie kein Vorkommnis der Quantor-Variable enthält.[78]

T53: $\forall x(D \supset F(x)) \leftrightarrow D \supset \forall xF(x)$ {wobei jegliche Variable, die bei der Einsetzungsfallbildung für „x“ uniform substituiert wird, in dem, was für [die unstrukturierte und sinnunbestimmte Satzformel] „D“ uniform substituiert wird [es muss stets eine *Satzformel* sein], nicht vorkommt [wie ja auch „x“ in „D“ nicht vorkommt]}[79]

1. $\forall x(D \supset F(x)) \rightarrow D \supset F(b)$ A6
2. $\forall x(D \supset F(x)), D \rightarrow F(b)$ RT13 (1)
3. $\forall x(D \supset F(x)), D \rightarrow \forall xF(x)$ R8 (2)
4. $\forall x(D \supset F(x)) \rightarrow D \supset \forall xF(x)$ R4 (3)
5. $\neg D, D \rightarrow F(b)$ A3, R1
6. $\neg D \rightarrow D \supset F(b)$ R4 (5)
7. $\forall xF(x), D \rightarrow F(b)$ A6, R2
8. $\forall xF(x) \rightarrow D \supset F(b)$ R4 (7)
9. $\neg D \vee \forall xF(x) \rightarrow D \supset F(b)$ R6 (6, 8)
10. $D \supset \forall xF(x) \rightarrow \neg D \vee \forall xF(x)$ T8
11. $D \supset \forall xF(x) \rightarrow D \supset F(b)$ RT7 (10, 9)
12. $D \supset \forall xF(x) \rightarrow \forall x(D \supset F(x))$ R8 (11)
13. $\forall x(D \supset F(x)) \leftrightarrow D \supset \forall xF(x)$ DEF↔ (4, 12)

[78] „Enthält kein Vorkommnis der Quantor-Variable“ ist hier äquivalent mit „Enthält kein freies Vorkommnis der Quantor-Variable“. Denn der Fall, dass sie (die fragliche Ausdrucksseite) ein Vorkommnis der Quantor-Variable enthält, *aber ein schon gebundenes*, ist bei dem gegebenen ausschließlichen Interesse an syntaktisch wohlgeformten Ausdrücken „aus grammatischen Gründen“ ausgeschlossen; denn in jenem Fall wäre die ganze angebliche Satzformel mit dem voranstehenden, unverteilten Quantor nach den syntaktischen Regeln von *Sigma* tatsächlich keine Satzformel, sondern syntaktischer Unsinn. So stehen die Dinge z. B. bei „$\forall x(\exists xF(x) \supset G(x))$“ oder „$\forall x(F(x) \supset \exists xG(x))$“.

[79] Bei dieser Beifügung handelt es sich um einen erinnernden Hinweis, nicht um die Formulierung einer eigentlichen einschränkenden Bedingung für die Bildung von Einsetzungsfällen, insbesondere *beweisbaren* Einsetzungsfällen, von T53. Denn vermeidet man – es ist ein Vermeiden, dessen Gebotensein selbstverständlich ist –bei der uniformen Substitution in T53 die Art von syntaktischem Unsinn, von dem in der vorausgehenden Fußnote die Rede ist, so ist das, worauf die Beifügung erinnernd hinweist, *ganz von selbst* gegeben.

T54: $\forall x(F(x) \supset D) \leftrightarrow \exists xF(x) \supset D$

1. $\forall x(F(x) \supset D), F(b) \rightarrow F(b) \supset D$	A6, R2
2. $\forall x(F(x) \supset D), F(b), F(b) \supset D \rightarrow D$	A2, R2, R1
3. $\forall x(F(x) \supset D), F(b) \rightarrow D$	R3 (2, 1)
4. $\forall x(F(x) \supset D), \exists xF(x) \rightarrow D$	R9 (3)
5. $\forall x(F(x) \supset D) \rightarrow \exists xF(x) \supset D$	R4 (4)
6. $\forall x\neg F(x), F(b) \rightarrow \neg F(b)$	A6, R2
7. $\forall x\neg F(x), F(b), \neg F(b) \rightarrow D$	A3, R2, R1
8. $\forall x\neg F(x), F(b) \rightarrow D$	R3 (7, 6)
9. $\forall x\neg F(x) \rightarrow F(b) \supset D$	R4 (8)
10. $\neg\exists xF(x) \rightarrow \forall x\neg F(x)$	T43 {da die 1. Doppel-Schlussformel, und von ihr die 1. Hälfte}
11. $\neg\exists xF(x) \rightarrow F(b) \supset D$	RT7 (10, 9)
12. $D \rightarrow F(b) \supset D$	A1, R2, R4
13. $\neg\exists xF(x) \vee D \rightarrow F(b) \supset D$	R6 (11, 12)
14. $\exists xF(x) \supset D \rightarrow \neg\exists xF(x) \vee D$	T8
15. $\exists xF(x) \supset D \rightarrow F(b) \supset D$	RT7 (14, 13)
16. $\exists xF(x) \supset D \rightarrow \forall x(F(x) \supset D)$	R8 (15)
17. $\forall x(F(x) \supset D) \leftrightarrow \exists xF(x) \supset D$	DEF↔ (5, 16)

T55: $\exists x(D \supset F(x)) \leftrightarrow D \supset \exists xF(x)$

1. $F(b) \rightarrow D \supset \exists xF(x)$	A7, R2, R4
2. $\neg D \rightarrow D \supset \exists xF(x)$	A3, R1, R4
3. $\neg D \vee F(b) \rightarrow D \supset \exists xF(x)$	R6 (2, 1)
4. $D \supset F(b) \rightarrow \neg D \vee F(b)$	T8
5. $D \supset F(b) \rightarrow D \supset \exists xF(x)$	RT7 (4, 3)
6. $\exists x(D \supset F(x)) \rightarrow D \supset \exists xF(x)$	R9 (5)
7. $\neg D \rightarrow D \supset F(b)$	A3, R1, R4
8. $D \supset F(b) \rightarrow \exists x(D \supset F(x))$	A7
9. $\neg D \rightarrow \exists x(D \supset F(x))$	RT7 (7, 8)
10. $F(b) \rightarrow D \supset F(b)$	A1, R2, R4

11. $F(b) \rightarrow \exists x(D \supset F(x))$	RT7 (10, 8)
12. $\exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \supset F(x))$	R9 (11)
13. $\neg D \vee \exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \supset F(x))$	R6 (9, 12)
14. $D \supset \exists xF(x) \rightarrow \neg D \vee \exists xF(x)$	T8
15. $D \supset \exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \supset F(x))$	RT7 (14, 13)
16. $\exists x(D \supset F(x)) \leftrightarrow D \supset \exists xF(x)$	DEF↔ (6, 15)

T56: $\exists x(F(x) \supset D) \leftrightarrow \forall xF(x) \supset D$

1. $F(b) \supset D, \forall xF(x), F(b) \rightarrow D$	A2, R2, R1
2. $F(b) \supset D, \forall xF(x) \rightarrow F(b)$	A6, R2, R1
3. $F(b) \supset D, \forall xF(x) \rightarrow D$	R3 (1, 2)
4. $F(b) \supset D \rightarrow \forall xF(x) \supset D$	R4 (3)
5. $\exists x(F(x) \supset D) \rightarrow \forall xF(x) \supset D$	R9 (4)
6. $\neg F(b) \rightarrow F(b) \supset D$	A3, R1, R4
7. $F(b) \supset D \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	A7
8. $\neg F(b) \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	RT7 (6, 7)
9. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	R9 (8)
10. $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x\neg F(x)$	T43 {da die 2. Doppel-Schlussformel, und von ihr die 1. Hälfte}
11. $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	RT7 (10, 9)
12. $D \rightarrow F(b) \supset D$	A1, R2, R4
13. $F(b) \supset D \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	A7
14. $D \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	RT7 (12, 13)
15. $\neg\forall xF(x) \vee D \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	R6 (11, 14)
16. $\forall xF(x) \supset D \rightarrow \neg\forall xF(x) \vee D$	T8
17. $\forall xF(x) \supset D \rightarrow \exists x(F(x) \supset D)$	RT7 (16, 15)
18. $\exists x(F(x) \supset D) \leftrightarrow \forall xF(x) \supset D$	DEF↔ (5, 17)

T57: $\forall x(D \wedge F(x)) \leftrightarrow D \wedge \forall xF(x); \forall x(F(x) \wedge D) \leftrightarrow \forall xF(x) \wedge D$

1. $\forall x(D \wedge F(x)) \rightarrow D \wedge F(b)$	1. $\forall x(F(x) \wedge D) \rightarrow F(b) \wedge D$	A6
2. $D \wedge F(b) \rightarrow F(b)$	2. $F(b) \wedge D \rightarrow F(b)$	T9
3. $\forall x(D \wedge F(x)) \rightarrow F(b)$	3. $\forall x(F(x) \wedge D) \rightarrow F(b)$	RT7 (1, 2)

4. $\forall x(D \wedge F(x)) \rightarrow \forall xF(x)$	4. $\forall x(F(x) \wedge D) \rightarrow \forall xF(x)$	R8 (3)
5. $D \wedge F(b) \rightarrow D$	5. $F(b) \wedge D \rightarrow D$	T9
6. $\forall x(D \wedge F(x)) \rightarrow D$	6. $\forall x(F(x) \wedge D) \rightarrow D$	RT7 (1, 5)
7. $\forall x(D \wedge F(x)) \rightarrow D \wedge \forall xF(x)$	7. $\forall x(F(x) \wedge D) \rightarrow \forall xF(x) \wedge D$	RT2 (6, 4; 4, 6)
8. $D, \forall xF(x) \rightarrow F(b)$	8. $\forall xF(x), D \rightarrow F(b)$	A6, R2, R1; A6, R2
9. $D, \forall xF(x) \rightarrow D$	9. $\forall xF(x), D \rightarrow D$	A1, R2; A1, R2, R1
10. $D, \forall xF(x) \rightarrow D \wedge F(b)$	10. $\forall xF(x), D \rightarrow F(b) \wedge D$	RT2 (9, 8; 8, 9)
11. $D, \forall xF(x) \rightarrow \forall x(D \wedge F(x))$	11. $\forall xF(x), D \rightarrow \forall x(F(x) \wedge D)$	R8 (10)
12. $D \wedge \forall xF(x) \rightarrow \forall x(D \wedge F(x))$	12. $\forall xF(x) \wedge D \rightarrow \forall x(F(x) \wedge D)$	R7 (11)
13. $\forall x(D \wedge F(x)) \leftrightarrow D \wedge \forall xF(x)$	13. $\forall x(F(x) \wedge D) \leftrightarrow \forall xF(x) \wedge D$	DEF$\leftrightarrow$ (7, 12)

<u>T58: $\exists x(D \wedge F(x)) \leftrightarrow D \wedge \exists xF(x); \exists x(F(x) \wedge D) \leftrightarrow \exists xF(x) \wedge D$</u>

1. $D \wedge F(b) \rightarrow F(b)$	1. $F(b) \wedge D \rightarrow F(b)$	T9
2. $F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	2. $F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	A7
3. $D \wedge F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	3. $F(b) \wedge D \rightarrow \exists xF(x)$	RT7 (1, 2)
4. $D \wedge F(b) \rightarrow D$	4. $F(b) \wedge D \rightarrow D$	T9
5. $D \wedge F(b) \rightarrow D \wedge \exists xF(x)$	5. $F(b) \wedge D \rightarrow \exists xF(x) \wedge D$	RT2 (4, 3; 3, 4)
6. $\exists x(D \wedge F(x)) \rightarrow D \wedge \exists xF(x)$	6. $\exists x(F(x) \wedge D) \rightarrow \exists xF(x) \wedge D$	R9 (5)
7. $D, F(b) \rightarrow D \wedge F(b)$	7. $F(b), D \rightarrow F(b) \wedge D$	A5
8. $D \wedge F(b) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x))$	8. $F(b) \wedge D \rightarrow \exists x(F(x) \wedge D)$	A7
9. $D, F(b) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x))$	9. $F(b), D \rightarrow \exists x(F(x) \wedge D)$	RT20 (7, 8)
10. $D, F(b) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x))$	10. $D, F(b) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge D)$	9. {*da capo*}; R1 (9)
11. $D, \exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x))$	11. $D, \exists xF(x) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge D)$	R9 (10)
12. $D, \exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x))$	12. $\exists xF(x), D \rightarrow \exists x(F(x) \wedge D)$	11. {*da capo*}; R1 (11)
13. $D \wedge \exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x))$	13. $\exists xF(x) \wedge D \rightarrow \exists x(F(x) \wedge D)$	R7 (12)
14. $\exists x(D \wedge F(x)) \leftrightarrow D \wedge \exists xF(x)$	14. $\exists x(F(x) \wedge D) \leftrightarrow \exists xF(x) \wedge D$	DEF$\leftrightarrow$ (6, 13)

{RT20 ist dies: Γ', $A \rightarrow B$; Γ'', $B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma'$, Γ'', $A \rightarrow C$. Die im Übergang von 7. und 8. auf 9. auf der *linken* Beweisseite verwendete Spezialisierung hiervon ist diese: Γ' ist spezialisiert zu „D“, „A“ ist spezialisiert zu „F(b)“, „B“ ist spezialisiert zu „$D \wedge F(b)$“, Γ'' ist leer, „C“ ist spezialisiert zu „$\exists x(D \wedge F(x))$“; insgesamt ergibt sich also: $D, F(b) \rightarrow D \wedge F(b); D \wedge F(b) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x)) \Rightarrow D, F(b) \rightarrow \exists x(D \wedge F(x))$. Die im Übergang von 7. und 8. auf 9. auf der *rechten* Beweisseite verwendete Spezialisierung von RT20 ist diese: Γ' ist spezialisiert zu „F(b)“, „A“ ist

spezialisiert zu „D“, „B“ ist spezialisiert zu „F(b) $\wedge$ D“, Γ'' ist leer, „C“ ist spezialisiert zu „$\exists$x(F(x) $\wedge$ D)“; insgesamt ergibt sich also: F(b), D $\rightarrow$ F(b) $\wedge$ D; F(b) $\wedge$ D $\rightarrow$ $\exists$x(F(x) $\wedge$ D) $\Rightarrow$ F(b), D $\rightarrow$ $\exists$x(F(x) $\wedge$ D).}

T59: $\forall x(D \vee F(x)) \leftrightarrow D \vee \forall xF(x)$; $\forall x(F(x) \vee D) \leftrightarrow \forall xF(x) \vee D$

1. $D \rightarrow D \vee F(a)$	1. $D \rightarrow F(a) \vee D$	A4
2. $D \rightarrow \forall x(D \vee F(x))$	2. $D \rightarrow \forall x(F(x) \vee D)$	R8 (1)
3. $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$	3. $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$	A6
4. $F(a) \rightarrow D \vee F(a)$	4. $F(a) \rightarrow F(a) \vee D$	A4
5. $\forall xF(x) \rightarrow D \vee F(a)$	5. $\forall xF(x) \rightarrow F(a) \vee D$	RT7 (3, 4)
6. $\forall xF(x) \rightarrow \forall x(D \vee F(x))$	6. $\forall xF(x) \rightarrow \forall x(F(x) \vee D)$	R8 (5)
7. $D \vee \forall xF(x) \rightarrow \forall x(D \vee F(x))$	7. $\forall xF(x) \vee D \rightarrow \forall x(F(x) \vee D)$	R6 (2, 6; 6, 2)
8. $\forall x(D \vee F(x)) \rightarrow D \vee F(b)$	8. $\forall x(F(x) \vee D) \rightarrow F(b) \vee D$	A6
9. $D \vee F(b), \neg D \rightarrow F(b)$	9. $F(b) \vee D, \neg D \rightarrow F(b)$	T12 {EP}
10. $\forall x(D \vee F(x)), \neg D, D \vee F(b) \rightarrow F(b)$	10. $\forall x(F(x) \vee D), \neg D, F(b) \vee D \rightarrow F(b)$	R2, R1 (9)
11. $\forall x(D \vee F(x)), \neg D \rightarrow D \vee F(b)$	11. $\forall x(F(x) \vee D), \neg D \rightarrow F(b) \vee D$	A6, R2
12. $\forall x(D \vee F(x)), \neg D \rightarrow F(b)$	12. $\forall x(F(x) \vee D), \neg D \rightarrow F(b)$	R3 (10, 11)
13. $\forall x(D \vee F(x)), \neg D \rightarrow \forall xF(x)$	13. $\forall x(F(x) \vee D), \neg D \rightarrow \forall xF(x)$	R8 (12)
14. $\forall xF(x) \rightarrow D \vee \forall xF(x)$	14. $\forall xF(x) \rightarrow \forall xF(x) \vee D$	A4
15. $\forall x(D \vee F(x)), \neg D \rightarrow D \vee \forall xF(x)$	15. $\forall x(F(x) \vee D), \neg D \rightarrow \forall xF(x) \vee D$	RT20 (13, 14)
16. $\forall x(D \vee F(x)), D \rightarrow D \vee \forall xF(x)$	16. $\forall x(F(x) \vee D), D \rightarrow \forall xF(x) \vee D$	A4, R2; A4, R2, R1
17. $\forall x(D \vee F(x)) \rightarrow D \vee \forall xF(x)$	17. $\forall x(F(x) \vee D) \rightarrow \forall xF(x) \vee D$	R5 (16, 15)
18. $\forall x(D \vee F(x)) \leftrightarrow D \vee \forall xF(x)$	18. $\forall x(F(x) \vee D) \leftrightarrow \forall xF(x) \vee D$	DEF$\leftrightarrow$ (17, 7)

{Die Verwendung [einer Spezialisierung] von RT20, um den Übergang von 13. und 14. auf 15. zu bewerkstelligen, ist strukturell analog der Verwendung von RT20, um im Beweis von T58 den Übergang von 7. und 8. auf 9. zu bewerkstelligen.}

T60: $\exists x(D \vee F(x)) \leftrightarrow D \vee \exists xF(x)$; $\exists x(F(x) \vee D) \leftrightarrow \exists xF(x) \vee D$

1. $D \rightarrow D \vee \exists xF(x)$	1. $D \rightarrow \exists xF(x) \vee D$	A4
2. $F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	2. $F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	A7
3. $\exists xF(x) \rightarrow D \vee \exists xF(x)$	3. $\exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee D$	A4
4. $F(b) \rightarrow D \vee \exists xF(x)$	4. $F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee D$	RT7 (2, 3)

5. $D \vee F(b) \rightarrow D \vee \exists xF(x)$	5. $F(b) \vee D \rightarrow \exists xF(x) \vee D$	R6 (1, 4; 4, 1)
6. $\exists x(D \vee F(x)) \rightarrow D \vee \exists xF(x)$	6. $\exists x(F(x) \vee D) \rightarrow \exists xF(x) \vee D$	R9 (5)
7. $D \rightarrow D \vee F(b)$	7. $D \rightarrow F(b) \vee D$	A4
8. $D \vee F(b) \rightarrow \exists x(D \vee F(x))$	8. $F(b) \vee D \rightarrow \exists x(F(x) \vee D)$	A7
9. $D \rightarrow \exists x(D \vee F(x))$	9. $D \rightarrow \exists x(F(x) \vee D)$	RT7 (7, 8)
10. $F(b) \rightarrow D \vee F(b)$	10. $F(b) \rightarrow F(b) \vee D$	A4
11. $F(b) \rightarrow \exists x(D \vee F(x))$	11. $F(b) \rightarrow \exists x(F(x) \vee D)$	RT7 (10, 8)
12. $\exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \vee F(x))$	12. $\exists xF(x) \rightarrow \exists x(F(x) \vee D)$	R9 (11)
13. $D \vee \exists xF(x) \rightarrow \exists x(D \vee F(x))$	13. $\exists xF(x) \vee D \rightarrow \exists x(F(x) \vee D)$	R6 (9, 12; 12, 9)
14. $\exists x(D \vee F(x)) \leftrightarrow D \vee \exists xF(x)$	14. $\exists x(F(x) \vee D) \leftrightarrow \exists xF(x) \vee D$	DEF$\leftrightarrow$ (6, 13)

Es folgen die *Gesetze der Platztauschung der Quantoren*:

T61: $\forall x\forall yP(x,y) \leftrightarrow \forall y\forall xP(x,y)$ $\forall\forall$-*Tauschung*

1. $\forall x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall yP(a, y)$	A6 {„$\forall yP(_, y)$“ für „F“ in „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$“}
2. $\forall yP(a, y) \rightarrow P(a, b)$	A6 {„y“ für „x“, „b“ für „a“, „$P(a, _)$“ für „F“ in „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$“}
3. $\forall x\forall yP(x, y) \rightarrow P(a, b)$	RT7 (1, 2)
4. $\forall x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall xP(x, b)$	R8 (3)
5. $\forall x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall y\forall xP(x, y)$	R8 (4)
6. $\forall y\forall xP(x, y) \rightarrow \forall xP(x, a)$	A6 {„y“ für „x“ in „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$“; dann „$\forall xP(x, _)$“ für „F“}
7. $\forall xP(x, a) \rightarrow P(b, a)$	A6 {„b“ für „a“ in „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$“; dann „$P(_, a)$“ für „F“}
8. $\forall y\forall xP(x, y) \rightarrow P(b, a)$	RT7 (6, 7)
9. $\forall y\forall xP(x, y) \rightarrow \forall yP(b, y)$	R8 (8)
10. $\forall y\forall xP(x, y) \rightarrow \forall x\forall yP(x, y)$	R8 (9)
11. $\forall x\forall yP(x, y) \leftrightarrow \forall y\forall xP(x, y)$	DEF$\leftrightarrow$ (5, 10)

{Die Einsetzungsfallbildung in der 6. Zeile *in Ausführlichkeit*: „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$“ geht *per* „y“ *uniform substituiert für* „x“ über in „$\forall yF(y) \rightarrow F(a)$“; „$\forall yF(y) \rightarrow F(a)$“ geht *per* „$\forall xP(x, _)$“ *uniform substituiert für* „F“ über in die Übergangsformel „$\forall y\forall xP(x, _)(y) \rightarrow \forall xP(x, _)(a)$“; dieses Letztere geht *per Wiedereinlagerung* [„Importation des Exportierten“] über in „$\forall y\forall x(Px, y) \rightarrow \forall x(Px, a)$“.}

T62: $\exists x\exists yP(x, y) \leftrightarrow \exists y\exists xP(x, y)$ $\exists\exists$-*Tauschung*

1. $P(a, b) \rightarrow \exists xP(x, b)$ A7 {„P(_, b)“ für „F“ in „$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$“}

2. $\exists xP(x, b) \rightarrow \exists y\exists xP(x, y)$ A7 {„y“ für „x“, „b“ für „a“ in „$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$“; dann „$\exists xP(x, _)$“ für „F“}

3. $P(a, b) \rightarrow \exists y\exists xP(x, y)$ RT7 (1, 2)

4. $\exists yP(a, y) \rightarrow \exists y\exists xP(x, y)$ R9 (3)

5. $\exists x\exists yP(x, y) \rightarrow \exists y\exists xP(x, y)$ R9 (4)

6. $P(a, b) \rightarrow \exists yP(a, y)$ A7 {„y“ für „x“ und „b“ für „a“ in „$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$“; dann „$P(a, _)$“ für „F“}[80]

7. $\exists yP(a, y) \rightarrow \exists x\exists yP(x, y)$ A7 {„$\exists yP(_, y)$“ für „F“ in „$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$“}

8. $P(a, b) \rightarrow \exists x\exists yP(x, y)$ RT7 (6, 7)

9. $\exists xP(x, b) \rightarrow \exists x\exists yP(x, y)$ R9 (8)

10. $\exists y\exists xP(x, y) \rightarrow \exists x\exists yP(x, y)$ R9 (9)

11. $\exists x\exists yP(x, y) \leftrightarrow \exists y\exists xP(x, y)$ DEF↔ (5, 10)

<u>T63: $\exists x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall y\exists xP(x, y)$</u> *∃∀-Tauschung*

1. $\forall yP(a, y) \rightarrow P(a, b)$ A6 {„y“ für „x“ und „b“ für „a” in „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$“; dann „$P(a, _)$“ für „F“}

2. $P(a, b) \rightarrow \exists xP(x, b)$ A7 {„P(_, b)“ für „F“ in „$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$“}

3. $\forall yP(a, y) \rightarrow \exists xP(x, b)$ RT7 (1, 2)

4. $\forall yP(a, y) \rightarrow \forall y\exists xP(x, y)$ R8 (3)

5. $\exists x\forall yP(x, y) \rightarrow \forall y\exists xP(x, y)$ R9 (4)

Die Umkehrung von T63 [„∀∃-Tauschung“] ist hingegen in **Pi-Alpha** nicht beweisbar: Wäre diese Umkehrung in **Pi-Alpha** beweisbar, so wäre in **Pi-Alpha** auch $\forall y\exists x(x = y) \rightarrow \exists x\forall y(x = y)$ als deren Einsetzungsfall[81] beweisbar, also wegen der **Pi-Alpha**-Beweisbarkeit von $\rightarrow \forall y\exists x(x = y)$ (siehe das nächste Theorem) auch $\rightarrow \exists x\forall y(x = y)$; welche letztere Schlussformel nun aber – davon kann ausgegangen werden – in **Pi-Alpha** *nicht* beweisbar ist, mit anderen Worten: *nicht* in der Weise der durch **Pi-Alpha** formulierten Logik logisch valide ist.

Was ganz so ist, *wie es sein soll*: Denn jeder *Satz* der **Pi-Alpha** zugrundeliegende Normalsprache [der Normalsprache, zu der **Pi-Alpha** und die durch **Pi-Alpha** formulierte Logik gehört], *dessen so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung* [gegeben die **Pi-**

[80] Der erste Schritt ergibt „$F(b) \rightarrow \exists yF(y)$“; der zweite Schritt ergibt [auf der Grundlage des schon Gewonnenen] „$P(a, _)(b) \rightarrow \exists yP(a, _)(y)$“, also [im Endeffekt: nach Wiedereinlagerung] „$P(a, b) \rightarrow \exists yP(a, y)$“.

[81] „(_ = _)“ für „P“ in „$\forall y\exists xP(x, y) \rightarrow \exists x\forall yP(x, y)$“ ergibt „$\forall y\exists x(_ = _)(x, y) \rightarrow \exists x\forall y(_ = _)(x, y)$“, also [im Endeffekt: nach Wiedereinlagerung] „$\forall y\exists x(x = y) \rightarrow \exists x\forall y(x = y)$“.

Alpha-Interpretation der logischen Grundkonstanten von *Sigma*] *die Satzformel* $\exists x \forall y(x = y)$ *ist*, ist nicht wahr [es ist ja doch nichts mit allem identisch], ist also nicht *normalsprachlich* valide [*intuitiv* betrachtet, nämlich im Sinne des Validitätsbegriffs – *Wahrheit* mit Bivalenz – der **Pi-Alpha** zugrundeliegenden Normalsprache und wegen deren Semantik sowie der Faktenlage] und ist mithin auch nicht *normalsprachlich* logisch valide. Und deswegen ist (offensichtlich) auch jeder *Schluss* der **Pi-Alpha** zugrundeliegenden Normalsprache, *dessen so genau wie mögliche formelsprachliche Ent31sprechung die Schlussformel* $\rightarrow \exists x \forall y(x = y)$ *ist*, nicht *normalsprachlich* logisch valide. *Passend dazu* ist nun jene Schlussformel nicht *in der Weise der durch* **Pi-Alpha** *formulierten Logik* logisch valide, mit anderen Worten: nicht in **Pi-Alpha** beweisbar – was so ist, *wie es sein soll*: gemäß dem vorausgesetzten begründenden Verhältnis zwischen Normalsprache einerseits und zugehöriger Logik und diese Logik formulierendem Kalkül andererseits.

T64: $\rightarrow \forall x(x = x); \rightarrow \forall y \exists x(x = y); \rightarrow \forall y \exists x(y = x)$

1. $\rightarrow a = a$	A8
2. $\rightarrow \forall x(x = x)$	R8 (1)
3. $a = a \rightarrow \exists x(x = a)$	A7 {„(_ = a)“ für „F“}
4. $\rightarrow \exists x(x = a)$	R3 (3, 1)
5. $\rightarrow \forall y \exists x(x = y)$	R8 (4)
6. $a = a \rightarrow \exists x(a = x)$	A7 {„(a = _)“ für „F“}
7. $\rightarrow \exists x(a = x)$	R3 (6, 1)
8. $\rightarrow \forall y \exists x(y = x)$	R8 (7)

T65: $a = b, b = c \rightarrow a = c; \rightarrow \forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \supset x = z)$ *Transitivität der Identität* (TRAID)

1. $a = b, b = c \rightarrow a = c$	A9 {Einsetzungsfall}
2. $a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$	R7 (1)
3. $\rightarrow a = b \wedge b = c \supset a = c$	R4 (2)
4. $\rightarrow \forall z(a = b \wedge b = z \supset a = z)$	R8 (3)
5. $\rightarrow \forall y \forall z(a = y \wedge y = z \supset a = z)$	R8 (4)
6. $\rightarrow \forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \supset x = z)$	R8 (5)

{A9 lautet so: b = a, F(a) → F(b); um den für T65 einschlägigen Einsetzungsfall von A9 zu erhalten, ersetze man zunächst in „b = a, F(a) → F(b)“ „a“ uniform durch „b“ und (simultan) „b“ uniform durch „a“; das ergibt: a = b, F(b) → F(a). Dann ersetze man hierin „F“ uniform durch „(_ = c)“; das ergibt: a = b, (_ = c)(b) → (_ = c)(a), also im Endeffekt [nach „Importierung des Exportierten“ und nach Weglassung äußerer Klammern]: a = b, b = c → a = c.}

T66: a = b, c = b → a = c; → ∀x∀z(∃y(x = y ∧ z = y) ⊃ x = z) *Gesetz der „Drittengleichheit“*

1. a = b, c = b, b = c → a = c T65, R2, R1
2. a = b, c = b → b = c T33, R2, R1
3. a = b, c = b → a = c R3 (1, 2)
4. a = b ∧ c = b → a = c R7 (3)
5. ∃y(a = y ∧ c = y) → a = c R9 (4)
6. → ∃y(a = y ∧ c = y) ⊃ a = c R4 (5)
7. → ∀z(∃y(a = y ∧ z = y) ⊃ a = z) R8 (6)
8. → ∀x∀z(∃y(x = y ∧ z = y) ⊃ x = z) R8 (7)

{Selbstverständlich ist auch → ∀x∀z∀y(x = y ∧ z = y ⊃ x = z) eine (mit der eben angegebenen deduktiv äquivalente) Formulierung des Gesetzes der „Drittengleichheit“, wie ja auch → ∃y(a = y ∧ c = y) ⊃ a = c und → ∀y(a = y ∧ c = y ⊃ a = c) [man denke in diesem Zusammenhang an T54]. Hier nun aber der schon längst angekündigte Beweis der Umkehrung *der 2. Hälfte von* T31, bei welchem Beweis T66 eine die Arbeit sehr erleichternde Rolle spielt:

∀y(F(y) ≡ y = ιxF(x)) → ∃!xF(x)

1. ∀y(F(y) ≡ y = ιxF(x)) → F(ιxF(x)) ≡ ιxF(x) = ιxF(x) A6
2. F(ιxF(x)) ≡ ιxF(x) = ιxF(x) → (F(ιxF(x)) ⊃ ιxF(x) = ιxF(x)) ∧ (ιxF(x) = ιxF(x) ⊃ F(ιxF(x))) A1, DEF≡
3. (F(ιxF(x)) ⊃ ιxF(x) = ιxF(x)) ∧ (ιxF(x) = ιxF(x) ⊃ F(ιxF(x))) → ιxF(x) = ιxF(x) ⊃ F(ιxF(x)) T9
4. ∀y(F(y) ≡ y = ιxF(x)) → ιxF(x) = ιxF(x) ⊃ F(ιxF(x)) RT7 (1, 2; 3) [RT7-Verkettung]
5. ιxF(x) = ιxF(x) ⊃ F(ιxF(x)), ιxF(x) = ιxF(x) → F(ιxF(x)) A2, R1
6. → ιxF(x) = ιxF(x) A8
7. ιxF(x) = ιxF(x) ⊃ F(ιxF(x)) → ιxF(x) = ιxF(x) R2 (6)
8. ιxF(x) = ιxF(x) ⊃ F(ιxF(x)) → F(ιxF(x)) R3 (5, 7)
9. F(ιxF(x)) → ∃xF(x) A7
10. ∀y(F(y) ≡ y = ιxF(x)) → ∃xF(x) RT7 (4, 8; 9) [RT7-Verkettung]
11. ∀y(F(y) ≡ y = ιxF(x)) → F(a) ≡ a = ιxF(x) A6
12. ∀y(F(y) ≡ y = ιxF(x)) → F(c) ≡ c = ιxF(x) A6
13. F(a) ≡ a = ιxF(x) → (F(a) ⊃ a = ιxF(x)) ∧ (a = ιxF(x) ⊃ F(a)) A1, DEF≡

14. $(F(a) \supset a = \iota xF(x)) \wedge (a = \iota xF(x) \supset F(a)) \rightarrow F(a) \supset a = \iota xF(x)$ T9

15. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)) \rightarrow F(a) \supset a = \iota xF(x)$ RT7 (11, 13; 14) [RT7-Verkettung]

16. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)) \rightarrow F(c) \supset c = \iota xF(x)$ aus 12. wie 15. aus 11.

17. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a) \rightarrow F(a) \supset a = \iota xF(x)$ R2 (15)

18. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(c) \rightarrow F(c) \supset c = \iota xF(x)$ R2 (16)

19. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a), F(a) \supset a = \iota xF(x) \rightarrow a = \iota xF(x)$ A2, R2, R1

20. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(c), F(c) \supset c = \iota xF(x) \rightarrow c = \iota xF(x)$ A2, R2, R1

21. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a) \rightarrow a = \iota xF(x)$ R3 (19, 17)

22. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(c) \rightarrow c = \iota xF(x)$ R3 (20, 18)

23. $a = \iota xF(x), c = \iota xF(x) \rightarrow a = c$ T66

24. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a), c = \iota xF(x), a = \iota xF(x) \rightarrow a = c$ R2, R1 (23)

25. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a), c = \iota xF(x) \rightarrow a = \iota xF(x)$ R2 (21)

26. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a), c = \iota xF(x) \rightarrow a = c$ R3 (24, 25)

27. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a), F(c) \rightarrow c = \iota xF(x)$ R2, R1 (22)

28. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a), F(c), c = \iota xF(x) \rightarrow a = c$ R2, R1 (26)

29. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a), F(c) \rightarrow a = c$ R3 (28, 27)

30. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)), F(a) \wedge F(c) \rightarrow a = c$ R7 (29)

31. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)) \rightarrow F(a) \wedge F(c) \supset a = c$ R4 (30)

32. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge F(c) \supset y = c)$ R8 (31)

33. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)) \rightarrow \forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x)$ R8 (32)

34. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x) \wedge \forall x\forall y(F(y) \wedge F(x) \supset y = x)$ RT2 (10, 33)

35. $\forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x)) \rightarrow \exists !xF(x)$ D2 (34).}

T67: $F(b) \leftrightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ *Erstes „De dicto = De re“-Gesetz*

1. $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ A9

2. $b = a \wedge F(a) \rightarrow F(b)$ R7 (1, 2)

3. $\exists x(b = x \wedge F(x)) \rightarrow F(b)$ R9 (2)

4. $F(b) \rightarrow F(b)$ A1

5. $F(b) \rightarrow b = b$ A8, R2

6. $F(b) \rightarrow b = b \wedge F(b)$ RT2 (5, 4)

7. $b = b \wedge F(b) \rightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ A7 {„b“ für „a“ in „$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$“; dann „$(b = _ \wedge F(_))$“ für „F“}

8. $F(b) \rightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ RT7 (6, 7)

9. $F(b) \leftrightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ DEF↔ (8, 3)

T68: $F(b) \leftrightarrow \forall x(b = x \supset F(x))$ *Zweites „De dicto = De re“-Gesetz*

1. $F(b), a = b \rightarrow F(a)$ A9 {„a“ für „b“ und „b“ für „a“}, R1
2. $F(b), b = a \rightarrow a = b$ T33, R2, R1
3. $F(b), b = a \rightarrow F(a)$ RT7 (2, 1)
4. $F(b) \rightarrow b = a \supset F(a)$ R4 (3)
5. $F(b) \rightarrow \forall x(b = x \supset F(x))$ R8 (4)
6. $\forall x(b = x \supset F(x)), b = b \rightarrow b = b \supset F(b)$ A6 {„b“ für „a“ in „$\forall xF(x) \rightarrow F(a)$“; dann „$(b = _ \supset F(_))$“ für „F“}, R2
7. $\forall x(b = x \supset F(x)), b = b, b = b \supset F(b) \rightarrow F(b)$ A2, R2, R1
8. $\forall x(b = x \supset F(x)), b = b \rightarrow F(b)$ R3 (7, 6)
9. $\forall x(b = x \supset F(x)) \rightarrow b = b$ A8, R2
10. $\forall x(b = x \supset F(x)) \rightarrow F(b)$ R3 (8, 9)
11. $F(b) \leftrightarrow \forall x(b = x \supset F(x))$ DEF↔ (5, 10)

Sowohl T67 als auch T68 erscheinen paradox, wenn man **Pi-Alpha** auf eine Normalsprache bezieht, welche für die klassische Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Kennzeichnung *nicht* angemessen ist (z. B. auf die volle Umgangssprache); zuhauf gibt es dann Gegenbeispiele [in den Kapiteln 10 und 11 wird das ein Thema sein]. Die Situation ist vergleichbar mit der Situation bei den (sogenannten) „Paradoxien der materialen Implikation“ [z. B. T18 – T21]: in **Alpha** beweisbare Schlussformeln, die als Paradoxien erscheinen, wenn man **Alpha** auf eine Normalsprache bezieht, die für die wahrheitsfunktionale Aussagenlogik *nicht* angemessen ist, nämlich eine Normalsprache (z. B. die volle Umgangssprache), in der – anders als etwa in der (klassischen) Sprache der Mathematik – eine generelle Deutung von „Wenn A, dann B“ durch „nicht-A oder B“ *intuitiv* (vom Verständnis ihrer Sätze her) nicht in Frage kommt.

<u>T69: $\exists xF(x) \leftrightarrow \forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y))$</u>

1. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10
2. $F(\iota xF(x)) \rightarrow \forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y))$ T68, 1. Hälfte {„y“ für „x“; dann „$\iota xF(x)$“ für „b“}
3. $\exists xF(x) \rightarrow \forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y))$ RT7 (1, 2)
4. $\forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y)) \rightarrow F(\iota xF(x))$ T68, 2. Hälfte {„y“ für „x“; dann „$\iota xF(x)$“ für „b“}
5. $F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ A7
6. $\forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y)) \rightarrow \exists xF(x)$ RT7 (4, 5)

7. $\exists xF(x) \leftrightarrow \forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y))$ DEF↔ (3, 6)

{Man vergleiche T69 mit $\exists !xF(x) \leftrightarrow \forall y(F(y) \equiv y = \iota xF(x))$, also mit T31, 2. Hälfte, *plus* die Umkehrung davon (der Beweis für die Umkehrung steht gleich unterhalb von T66).}

T70: $\exists x\neg(F(x) \supset J(x)) \leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg J(x))$

1. $F(a) \supset J(a) \rightarrow \neg(F(a) \wedge \neg J(a))$ T7, 1. Hälfte
2. $F(a) \wedge \neg J(a) \rightarrow \neg(F(a) \supset J(a))$ RT4 (1)
3. $\neg(F(a) \wedge \neg J(a)) \rightarrow F(a) \supset J(a)$ T7, 2. Hälfte
4. $\neg(F(a) \supset J(a)) \rightarrow F(a) \wedge \neg J(a)$ RT5 (3)
5. $\neg(F(a) \supset J(a)) \rightarrow \exists x\neg(F(x) \supset J(x))$ A7
6. $F(a) \wedge \neg J(a) \rightarrow \exists x\neg(F(x) \supset J(x))$ RT7 (2, 5)
7. $F(a) \wedge \neg J(a) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg J(x))$ A7
8. $\neg(F(a) \supset J(a)) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg J(x))$ RT7 (4, 7)
9. $\exists x(F(x) \wedge \neg J(x)) \rightarrow \exists x\neg(F(x) \supset J(x))$ R9 (6)
10. $\exists x\neg(F(x) \supset J(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg J(x))$ R9 (8)
11. $\exists x\neg(F(x) \supset J(x)) \leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg J(x))$ DEF↔ (10, 9)

T71: $\neg\exists xF(x) \leftrightarrow \exists y(\iota xF(x) = y \wedge \neg F(y))$

1. $\exists xF(x) \leftrightarrow \forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y))$ T69
2. $\neg\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y))$ RT17 (1)
3. $\neg\forall y(\iota xF(x) = y \supset F(y)) \leftrightarrow \exists y\neg(\iota xF(x) = y \supset F(y))$ T43 {„y“ für „x“; dann „$(\iota xF(x) = _ \supset F(_))$“ für „F“}
4. $\neg\exists xF(x) \leftrightarrow \exists y\neg(\iota xF(x) = y \supset F(y))$ RT18 (2, 3)
5. $\exists y\neg(\iota xF(x) = y \supset F(y)) \leftrightarrow \exists y(\iota xF(x) = y \wedge \neg F(y))$ T70 {„y“ für „x“; dann „$(\iota xF(x) = _)$“ für „F“; dann „F“ für „J“; einsparbare Klammern wurden weggelassen}
6. $\neg\exists xF(x) \leftrightarrow \exists y(\iota xF(x) = y \wedge \neg F(y))$ RT18 (4, 5)

Weder T69 noch T70 *noch* T71 sind verwunderlich (oder gar rational anstößig), sind sie doch nur gesetzmäßig-deduktive Metamorphosen von zuvor Bewiesenem und Akzeptiertem. Die intendierte Deutung von „ι“ als *Selektor* (und nicht primär als *determinierter* Kennzeichnungsoperator) muss für diese Einsicht allerdings im Blick behalten werden.

Bei den Identitätsgesetzen A8, T33, T64, T65, T66 sowie bei den Platztauschungsgesetzen für Quantoren T61, T62, T63 handelt es sich um *reine Relationsgesetze*: Schlussformeln, die keine einstelligen unstrukturierten und sinnunbestimmten Prädikatformeln enthalten (bei unzähligen beweisbaren Einsetzungsfällen von T61 – T63 ist das schon anders). Aus dem weiten Feld der reinen Relationsgesetze von **Pi-Alpha** sei allein noch das folgende Gesetz bewiesen (wenn dieses Gottlob Frege bewusst gewesen wäre – natürlich so, wie er es als Satzformel formuliert hätte –, wäre die Geschichte der Logik anders verlaufen):

T72: $\rightarrow \neg\exists x\forall y(R(y, x) \equiv \neg R(y, y))$ *Russell-Gesetz*

1. $\forall y(R(y, b) \equiv \neg R(y, y)) \rightarrow R(b, b) \equiv \neg R(b, b)$ A6 {„y“ für „x“, „b“ für „a“, „$(R(_, b) \equiv \neg R(_, _))$“ für „F“}
2. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b) \rightarrow R(b, b) \supset \neg R(b, b)$ A1, DEF≡, etc.
3. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), R(b, b), R(b, b) \supset \neg R(b, b) \rightarrow \neg R(b, b)$ A2, R2, R1
4. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), R(b, b) \rightarrow R(b, b) \supset \neg R(b, b)$ R2 (2)
5. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), R(b, b) \rightarrow \neg R(b, b)$ R3 (3, 4)
6. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), \neg R(b, b) \rightarrow \neg R(b, b)$ A1, R2, R1
7. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b) \rightarrow \neg R(b, b)$ R5 (5, 6)
8. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b) \rightarrow \neg R(b, b) \supset R(b, b)$ A1, DEF≡, etc.
9. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), \neg R(b, b), \neg R(b, b) \supset R(b, b) \rightarrow R(b, b)$ A2, R2, R1
10. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), \neg R(b, b) \rightarrow \neg R(b, b) \supset R(b, b)$ R2 (8)
11. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), \neg R(b, b) \rightarrow R(b, b)$ R3 (9, 10)
12. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b), R(b, b) \rightarrow R(b, b)$ A1, R2, R1
13. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b) \rightarrow R(b, b)$ R5 (12, 11)
14. $R(b, b) \equiv \neg R(b, b) \rightarrow R(b, b) \wedge \neg R(b, b)$ RT2 (13, 7)
15. $\forall y(R(y, b) \equiv \neg R(y, y)) \rightarrow R(b, b) \wedge \neg R(b, b)$ RT7 (1, 14)
16. $\neg(R(b, b) \wedge \neg R(b, b)) \rightarrow \neg\forall y(R(y, b) \equiv \neg R(y, y))$ RT3 (15)
17. $\rightarrow \neg(R(b, b) \wedge \neg R(b, b))$ T13
18. $\rightarrow \neg\forall y(R(y, b) \equiv \neg R(y, y))$ R3 (16, 17)
19. $\rightarrow \forall x\neg\forall y(R(y, x) \equiv \neg R(y, y))$ R8 (18)
20. $\forall x\neg\forall y(R(y, x) \equiv \neg R(y, y)) \rightarrow \neg\exists x\forall y(R(y, x) \equiv \neg R(y, y))$ T43 {„$\forall y(R(y, _) \equiv \neg R(y, y)$“ für „F“}
21. $\rightarrow \neg\exists x\forall y(R(y, x) \equiv \neg R(y, y))$ R3 (20, 19)

Das mengentheoretische (heute als „naiv“ bezeichnete) *Komprehensionsaxiom* – eigentlich ein Axiomen*schema*: $\exists\upsilon\forall\upsilon'(\upsilon' \in \upsilon \equiv \sigma[\upsilon'])$ [wobei υ nicht in $\sigma[\upsilon']$ vorkommt] – hat eine Spezialisierung, nämlich „$\exists x\forall y(y \in x \equiv \neg(y \in y))$“, von der eine [normalsprachliche: *mathematisch*-normalsprachliche] Instanz von T72, nämlich „$\neg\exists x\forall y(y \in x \equiv \neg(y \in y))$“, *die Negation* ist; wodurch jene Spezialisierung in der Weise der klassischen Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Kennzeichnung – also in der Weise der von **Pi-Alpha** [und von anderen Kalkülen] formulierten Logik – *logisch falsch* ist, da ja „$\neg\exists x\forall y(y \in x \equiv \neg(y \in y))$“ in der Weise dieser Logik logisch valide/logisch wahr ist.[82] Das ist das ganze Geheimnis der sogenannten *Russell'schen Antinomie*; mehr ist an ihr nicht dran.

Es bleibt noch zu erwähnen: Wie zu **Alpha** hinzutreten **Beta**, **Beta*** und **Alpha-Beta*-Hybrid** (siehe Kapitel 2), so tritt zu **Pi-Alpha** hinzu **Pi-Beta**, **Pi-Beta*** und **Pi-Alpha-Beta*-Hybrid**. Dabei gilt:

(A) **Pi-Beta** ist **Beta** *plus* FA4, FA5, FA6, FA7, FR2, FD3, FD4; also: **Pi-Beta** ist das folgende System:

FA1 $A \supset (B \supset A)$

FA2 $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

FA3 $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

FA4 $\forall xF(x) \supset F(a)$

FA5 $a = a$

FA6 $b = a \supset (F(a) \supset F(b))$

FA7 $\neg F(\iota xF(x)) \supset \forall x\neg F(x)$

FR1 $A; A \supset B \Rightarrow B$

[82] Validität ist für die klassische Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Kennzeichnung *Wahrheit*, logische Validität also *logische Wahrheit*. Demnach ist für jene Logik einschlägig: Ist $\neg\sigma$ ein valider/wahrer Satz [der Normalsprache], so ist σ ein falscher Satz [σ ist falsch $=_{Def}$ $\neg\sigma$ ist wahr], und also: Ist $\neg\sigma$ *aus logischen Gründen* [z. B. den in **Pi-Alpha** niedergelegten Gründen] ein valider/wahrer Satz – m. a. W.: Ist $\neg\sigma$ ein *logisch valider/logisch wahrer* Satz –, so ist σ ein *aus logischen Gründen* falscher Satz: ein *logisch falscher* Satz.

FR2 $\sigma' \supset \sigma[\alpha] \Rightarrow \sigma' \supset \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in $\sigma' \supset \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt [also in σ' von vornherein nicht vorkommt].

{Es ist geschickter, FR2 – wie gerade erfolgt – als *Schema* für axiomatische Satzregelformeln zu formulieren, und nicht als einzelne axiomatische Satzregelformel. Freilich wäre auch Letzteres sehr wohl möglich: Die einzelaxiomatische Satzregelformel $B \supset F(a) \Rightarrow B \supset \forall xF(x)$ [ebenfalls „FR2" genannt] wäre dann zu ergänzen um eine Bedingung, welche die in **Pi-Beta**-Beweisen *zulässigen* [d. h.: Bewiesenheit/logische Validität im Sinne von **Pi-Beta** *weitertragenden*] Einsetzungsfälle von $B \supset F(a) \Rightarrow B \supset \forall xF(x)$ *einschränkt*: Es sind da nicht alle Einsetzungsfälle von $B \supset F(a) \Rightarrow B \supset \forall xF(x)$ zulässig, sondern nur gewisse. Jene einschränkende Bedingung – umständlich zu formulieren – liefe auf dasselbe hinaus wie die Schemabeschränkung, die oben bei [dem *Schema*] FR2 steht.}

FD1 $\sigma \vee \sigma' =_{Def} \neg\sigma \supset \sigma'$

FD2 $\sigma \wedge \sigma' =_{Def} \neg(\sigma \supset \neg\sigma')$

FD3 $\exists\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \neg\forall\upsilon\neg\sigma[\upsilon]$

FD4 $\exists!\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \exists\upsilon A[\upsilon] \wedge \forall\upsilon\forall\upsilon'(\sigma[\upsilon'] \wedge \sigma[\upsilon] \supset \upsilon' = \upsilon)$

{Übrigens: In **Pi-Beta** – weil schon in **Beta** – könnte $\sigma > \sigma'$ als eine bloße Schreibvariante von $\sigma \supset \sigma'$ eingeführt werden, oder anders gesagt: $\sigma > \sigma'$ könnte *in trivialer Weise* durch $\sigma \supset \sigma'$ definiert sein. Alternativ könnte man $\sigma > \sigma'$ in **Beta**, und somit in **Pi-Beta**, durch $\neg\sigma \vee \sigma'$ definieren (wie in anderen Kalkülen), wodurch dann $\sigma > \sigma'$ wegen FD1 auf $\neg\neg\sigma \supset \sigma'$ hinausliefe. In **Beta** und **Pi-Beta** spielt der Unterschied zwischen $\sigma \supset \sigma'$ und $\neg\neg\sigma \supset \sigma'$ natürlich keinerlei logisch relevante Rolle: Bei beiden erwogenen Definitionen wäre $\sigma > \sigma' \equiv \sigma \supset \sigma'$ in **Beta** und **Pi-Beta** beweisbar – passend dazu, dass $\sigma > \sigma' \leftrightarrow \sigma \supset \sigma'$ in **Alpha** und **Pi-Alpha** und, wiederum, $\sigma > \sigma' \equiv \sigma \supset \sigma'$ in **Beta*** und **Pi-Beta*** beweisbar ist.}

(B) **Pi-Beta*** ist **Beta*** *plus* B*A6, B*R8, B*A7, B*R9, B*A8, B*A9, B*A10, B*D2;[83] also: **Pi-Beta*** ist das folgende System:

B*R0 {Zum Inhalt von B*R0 siehe die Vorstellung des Kalküls **Beta*** in Kapitel 2.}

B*A1 $A \supset A$

[83] B*D1 ist schon in **Beta*** gegeben; siehe dazu die nachfolgende Fußnote.

B*R1 $\wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_j, \sigma_k \ldots \sigma_n) \supset C \Rightarrow \wedge^*(\sigma_1 \ldots \sigma_k, \sigma_j \ldots \sigma_n) \supset C$

{Zum $\wedge^*$-Funktor siehe die Erläuterungen in Kapitel 2, kurz vor der Präsentation von **Beta***.}

B*R2 $\{D \supset\}\ C \Rightarrow \{D \wedge\}\ B \supset C$

{Zum Sinn von „{D ⊃}“ und „{D ∧}“ siehe die Erläuterungen in Kapitel 2, kurz vor der Präsentation von **Beta***, sowie *in* der Präsentation von **Beta*** die Fußnote zu B*R2.}

B*R3 $\{D \wedge\}\ B \supset C;\ \{D \supset\}\ B \Rightarrow \{D \supset\}\ C$

B*A2 $B \wedge (B \supset C) \supset C$

B*R4 $D \wedge B \supset C \Rightarrow D \supset (B \supset C)$

B*A3 $B \wedge \neg B \supset C$

B*R5 $\{D \wedge\}\ B \supset C;\ \{D \wedge\}\ \neg B \supset C \Rightarrow \{D \supset\}\ C$

B*A4 $A \supset A \vee B;\ B \supset A \vee B$

B*R6 $\{D \wedge\}\ A \supset C;\ \{D \wedge\}\ B \supset C \Rightarrow \{D \wedge\}\ (A \vee B) \supset C$

B*A5´ $A \wedge B \supset A;\ A \wedge B \supset B$

B*R7´ $\{D \supset\}\ A;\ \{D \supset\}\ B \Rightarrow \{D \supset\}\ A \wedge B$

B*A6 $\forall x F(x) \supset F(a)$

B*R8 $\{\sigma' \supset\}\ \sigma[\alpha] \Rightarrow \{\sigma' \supset\}\ \forall \upsilon \sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in $\{\sigma' \supset\}\ \forall \upsilon \sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt.

B*A7 $F(a) \supset \exists x B[x]$

B*R9 $\{\sigma' \wedge\}\ \sigma[\alpha] \supset \sigma'' \Rightarrow \{\sigma' \wedge\}\ \exists \upsilon \sigma[\upsilon] \supset \sigma''$ wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in $\{\sigma' \wedge\}\ \exists \upsilon \sigma[\upsilon] \supset \sigma''$nicht mehr vorkommt [also in σ' und σ'' von vornherein nicht vorkommt].

B*A8 $a = a$

B*A9 $b = a \wedge F(a) \supset F(b)$

B*A10 $\exists x F(x) \supset F(\iota x F(x))$

B*D1 $\sigma > \sigma' =_{Def} \neg\sigma \vee \sigma'$[84]

B*D2 $\exists!\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \exists\upsilon A[\upsilon] \wedge \forall\upsilon\forall\upsilon'(\sigma[\upsilon'] \wedge \sigma[\upsilon] \supset \upsilon' = \upsilon)$

(C) **Pi-Alpha-Beta*-Hybrid** schließlich steht zu **Pi-Alpha** und **Pi-Beta***, so wie **Alpha-Beta*-Hybrid** zu **Alpha** und **Beta*** steht. Für letzteres Verhältnis siehe Kapitel 2.

[84] Bei der Präsentation von **Beta*** im Kapitel 2 war diese Definition noch nicht auf dem Schirm; sie kam erst später unter dem Namen „D1" zu **Alpha** hinzu (in Kapitel 3), damit aber (ohne dass der Akt explizit gemacht wurde) auch zu **Beta*** (unter dem – bis jetzt unerwähnten – Namen „B*D1"). Demnach: Wie D1 zum aussagenlogischen Grundstock **Alpha** von **Pi-Alpha** gehört, so gehört B*D1 (gleichlautend mit D1) zum aussagenlogischen Grundstock **Beta*** von **Pi-Beta***.

8. Die Schlussformelkalküle **Pi*-Alpha** und **Pi*2-Alpha** einer *existenziellen* Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung

Ist die Schlussformel F(a) → ∃xF(x) (die sogenannte „*Existenzgeneralisierung“*) denn tatsächlich logisch valide und ein logisches Gesetz – gewissermaßen „an sich“ betrachtet, *nicht* „bezüglich“, also insbesondere ohne auf ihren Status in derjenigen Logik zu blicken, die durch den Kalkül **Pi-Alpha** formuliert wird? Zu dieser Frage ist zunächst zu sagen, dass es ein Verständnis jener Schlussformel gibt, wonach sie ohne Zweifel logisch valide ist. Ausschlaggebend für dieses Verständnis der Schlussformel ist dasjenige ihrer Konklusion, der Satzformel ∃xF(x), welches sich auf das folgende Prinzip gründet: Es gilt definitorisch [und darum analytisch], dass ein *semiformaler* Satz der Gestalt ∃υσ[υ] (siehe dazu Fußnote 85) genau dann valide – etwa: wahr – ist, wenn der [eventuell ebenfalls semiformale] Satz σ[ν] für mindestens einen Namen ν valide – wahr – ist. Aber dieses *in sich* noch nicht ontologische (nämlich in sich rein *namensubstitutionelle*) Verständnis von semiformalen Sätzen der Gestalt ∃υσ[υ], und dadurch bedingt der Satz*formel* ∃xF(x), ist nun *nicht* das normale, übliche. Vielmehr: Normalerweise liest man semiformale Sätze der Gestalt ∃υσ[υ], und dadurch bedingt Satz*formeln* ∃υσ[υ],[85] als „*Für mindestens ein* [oder: *für manches*] υ gilt: σ[υ]“, oder – sogar noch häufiger – als „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“; durch diese Lesarten ist zweifellos ein *per se* ontologisches Verständnis solcher Sätze indiziert – *eines*, wenn nicht *mehr als eines*.

{Von der weiten Verbreitung (unter Logikern) der Lesart von ∃υσ[υ] als „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ – ohne dass damit eine tiefergehende Analyse von *Existenz* verbunden wäre – rührt die gängige pauschale Bezeichnung von „∃“ als „der Existenzquantor“ [oder „der Existenzoperator“] her, und sie erklärt auch ein Stück

[85] Das Schema ∃υσ[υ] wird in der durch diese Fußnote kommentierten Aussage *zuerst* auf semiformale Sätze – also auf normalsprachliche Sätze versetzt mit *Sigma*-Elementen (Variablen und logischen Symbolen, insbesondere „∃“) – bezogen, *dann* auf Satzformeln (von *Sigma*). Semiformale Sätze empfehlen sich in einer Normalsprache, wenn in der Normalsprache sehr vielfältige, nichtformale Ausdrucksweisen für einen gewissen logischen Aspekt gegeben sind; es ist für die Theoriebildung günstig, für sie alle *eine* Standardausdrucksweise in der Normalsprache zu haben; diese Standardausdrucksweise kann gut unter Verwendung passender Zeichen der Formelsprache – der formalen Sprache – formuliert werden; auf diese Weise ist die Standardausdrucksweise sofort angemessen hervorgehoben.

weit, warum der „Kamerad“ des „Allquantors“ [oder des „Alle“-Operators] *so* aussieht, wie er – heutzutage – gewöhnlich aussieht: ∃.}

Geht man von einer der beiden zuletzt beschriebenen Lesarten von ∃υσ[υ] aus – die, wie gesagt, ein Verständnis von ∃υσ[υ] indizieren [*mindestens* eines], das per se *ontologisch* ist –, so gibt es gegen die logische Validität von F(a) → ∃xF(x) – „an sich“ betrachtet – in der Tat Bedenken, ja Einwände:

(1) Angenommen, der Satz σ[ν] ist wahr, während der Name [oder: singuläre Term] ν *nichts* bezeichnet. Das ist keine weithergeholte Annahme, denn sie bildet für eine breite Mehrheit der Betrachter Gegebenheiten der Umgangssprache ab, z. B.: „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd“ sei wahr, sagen sie, *obwohl* „Pegasus“ nichts bezeichne. Wie kann es dann, so können diese Betrachter fragen, *stets* so sein, dass die Validität, insbesondere Wahrheit eines Satzes der Gestalt ∃υσ[υ] – in der Lesart „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“, und nicht minder, weil synonym, sagen sie, in der Lesart „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ – aus der Validität/Wahrheit des Satzes σ[ν] logisch folge? Es sind doch sowohl „Manches ist ein geflügeltes Pferd“ als auch „Es gibt ein geflügeltes Pferd“ nicht wahr, während „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd“ wahr ist. Wie kann da F(a) → ∃xF(x) logisch valide sein?

Gegen die logische Validität „an sich“ – oder „überhaupt“ – der Schlussformel F(a) → ∃xF(x) ist das Obige ein gewichtiger Einwand. Aber im Sinne einer Rechtfertigung des Kalküls **Pi-Alpha**, insbesondere seines Axioms A7, gegenüber dem Einwand ist zu antworten: Dass ein Name nichts bezeichnet, mag in der Umgangssprache vorkommen, ist aber ein Defizit, das in einer *idealen* (für die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien idealen) *Wissenschaftssprache* vermeidbar und zu vermeiden ist. Die Logik, von der **Pi-Alpha** eine Formulierung ist: die klassische Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Kennzeichnung, *ist* nun die Logik einer idealen Wissenschaftssprache, oder anders gesagt: Die Normalsprache, die dieser Logik und damit **Pi-Alpha** zugrundeliegt, ist – wie auch immer sonst verfasst – *eine ideale Wissenschaftssprache*. Es besteht folglich keinerlei Handlungsbedarf: Die Gegebenheit, dass ein Satz σ[ν] wahr ist, aber der Name ν nichts bezeichnet, kommt in dieser Normalsprache schlicht nicht vor; dass es sich *so* verhält, ist einer der Aspekte ihrer Idealität als ideale Wissenschaftssprache gegenüber der an allen Ecken und Enden in ihrer Breite nichtidealen Umgangssprache.

(2) Angenommen, der Satz σ[ν] ist wahr und der Name ν bezeichnet zwar etwas, aber er bezeichnet *nichts Existierendes*. Das ist keine weithergeholte Annahme, denn sie bildet immerhin für eine nicht ganz zu vernachlässigende Minderheit der Betrachter [nämlich für die *Meinongianer*] Gegebenheiten der Umgangssprache ab, z. B.: „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd" sei, sagen sie, wahr, *obwohl* „Pegasus" zwar etwas, aber nichts Existierendes bezeichne. Wie kann es dann, so können nun *diese* Betrachter fragen, *stets* so sein, dass die Validität, insbesondere Wahrheit eines Satzes ∃υσ[υ] – der doch, sagen sie, als „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]" zu lesen sei, nicht als „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]" – aus der Validität/Wahrheit von σ[ν] logisch folge? Es ist doch „Es gibt ein geflügeltes Pferd" nicht wahr, während „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd" wahr ist. Wie kann da F(a) → ∃xF(x) logisch valide sein?

Angesichts dieses zweiten Einwands wäre unter gewissen Bedingungen ein Handlungsbedarf bzgl. **Pi-Alpha**, insbesondere bzgl. seines Axioms A7, gegeben (aber doch kein unbedingter, kein zwingender Handlungsbedarf): **Pi-Alpha** – die Formulierung einer Logik einer idealen Wissenschaftssprache – wäre *dann* (und nur dann) zu modifizieren, um dem im Einwand Angenommenen gerecht zu werden, *wenn*, (a), das bei (2) für die Umgangssprache Angenommene auch in der **Pi-Alpha** zugrundeliegenden idealen Wissenschaftssprache vorkommt [im Gegenteil könnte man es zum idealwissenschaftssprachlich zu vermeidenden sprachlichen Defizit erklären, dass ein Name zwar *etwas*, aber *nichts Existierendes* bezeichnet – was freilich etwas überzogen erscheint]; und *wenn*, (b), ∃υσ[υ] in jener idealen Wissenschaftssprache als „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]" zu lesen ist, wobei ∃υσ[υ] „gehoben" *so* zu lesen ist, d. h. in *der* Weise, dass „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]" *mehr* besagt als „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]" und nicht gleichbedeutend mit diesem Letzteren ist.

Der Kalkül **Pi-Alpha** kann – trotz des Einwands (1) und trotz des Einwands (2) gegen die logische Validität von F(a) → ∃xF(x) – *sehr gut* bleiben, wie er ist: indem man ihn auf eine Normalsprache festlegt, in der jeder Name etwas bezeichnet und semiformale Sätze der Gestalt ∃υσ[υ] – sowie natürlich die mit diesen Sätzen gleichbedeutenden Sätze ohne formale Elemente – stets im Sinne von „*Für mindestens ein* [oder: *für manches*] υ gilt: σ[υ]" aufzufassen sind und „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]" als mit „*Für mindestens ein* [oder: *für manches*] υ

gilt: σ[υ]“ *sinngleich* [synonym, gleichbedeutend] gesetzt ist. Daran ist nicht das Mindeste rational anstößig. Auf der anderen Seite sollen nun aber doch auch die Positionen gewürdigt werden, die dem Einwand (1) bzw. dem Einwand (2) *stattgeben*. Dazu sei der Kalkül **Pi*-Alpha** eingeführt, der eine Modifikation von **Pi-Alpha** ist.

In **Pi*-Alpha** werden Satzformeln der Gestalt ∃υσ[υ] als „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ gelesen – wie es Einwand (1) *samt* Synonymität von „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ mit „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“ fordert, es Einwand (2) hingegen fordert *ohne* diese Synonymität. Es kann für **Pi*-Alpha** offenbleiben, ob mit Sätzen der Lesart „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ in der **Pi*-Alpha** zugrundeliegenden Normalsprache *mehr* gemeint ist als mit „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“, wie es Einwand (2) verlangt, oder aber gerade so viel gemeint ist wie mit „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“, wie es gemäß Einwand (1) sein muss.[86] Eines der beiden Verständnisse von ∃υσ[υ] – gelesen als „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ – ist aber bei der **Pi*-Alpha** zugrundeliegenden Normalsprache *durchgängig* gegeben (denn sie ist auf jeden Fall in der Hinsicht ideal, dass sie Mehrdeutigkeit – hier die von „Es gibt ein“ – vermeidet).

In **Pi*-Alpha** tritt zudem eine – in ihm (siehe unten) *definierte*! – Prädikatstockformel[87] „E(_)“ auf, die rein graphisch (oder phonetisch) als „_ existiert“ zu lesen ist. In der **Pi*-Alpha** zugrundeliegenden Normalsprache wird auf jeden Fall davon ausgegangen, dass „ν existiert nicht“ für manche Namen [singulären Terme] ν wahr ist; es kann aber für **Pi*-Alpha** offenbleiben, ob „ν existiert nicht“ *durchgängig* (für alle Namen ν) im Sinne von „ ‚ν‘ bezeichnet nichts“ aufzufassen ist, was dem Einwand (1) entspräche, oder aber *durchgängig* im Sinne von „ ‚ν‘ bezeichnet etwas, was nicht existiert“, was dem Einwand (2) entspräche. Eine der beiden Sinnauffassungen von „ν existiert nicht“ ist bei der **Pi*-Alpha** zugrundeliegenden Normalsprache *durchgängig* gegeben (denn sie ist auf jeden Fall in der Hinsicht ideal, dass sie Mehrdeutigkeit – hier die von „existiert“ – vermeidet). Es sei zudem davon ausgegangen,

[86] In der Tat ist die Synonymität von „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ mit „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“ für die Plausibilität von Einwand (1) essenziell; ohne sie könnte man nicht gut aus der immens plausiblen Nichtwahrheit von „Es gibt ein gefügeltes Pferd“ auf die Nichtwahrheit von „Manches ist ein geflügeltes Pferd“ schließen (oder anders gesagt: aus der immens plausiblen Wahrheit von „Es gibt kein geflügeltes Pferd“ auf die Wahrheit von „Nichts ist ein geflügeltes Pferd“). Das semantische Verhältnis von „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ und „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“ hat einen indisponiblen Teil: *Unbedingt* beinhaltet „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ semantisch „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“; deshalb besagt „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ garantiert nicht weniger als „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“. Zur Disposition steht allein, ob auch umgekehrt „*Für mindestens ein* υ gilt: σ[υ]“ semantisch „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: σ[υ]“ beinhaltet. Einwand (1) geht davon aus, dass es so ist; Einwand (2) geht davon aus, dass es nicht so ist.

[87] Zur Spezifizierung der Prädikatstockformeln von *Sigma* siehe Kapitel 0.

dass die fragliche Normalsprache bei Verwendung der Sinnauffassung von „ν existiert nicht“, die dem Einwand (2) entspricht, einen Idealitätsaspekt hat, der ihr bei Verwendung der Sinnauffassung von „ν existiert nicht“, die dem Einwand (1) entspricht, offensichtlich abgeht, nämlich diesen: *Jeder* Name bezeichnet etwas.

Überhaupt gilt: Die **Pi*-Alpha** zugrundeliegende Normalsprache hat *höchstens einen* der fünf in Kapitel 0 aufgestellen Idealitätsaspekte einer für die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien *idealen* Sprache *nicht*: den 3. Aspekt, also: die Referenz aller Namen [singulären Terme]. Wenn sie ihn nicht hat, so ist sie keine für die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien ideale Sprache mehr, *dafür* aber ein Stück näher an der Umgangssprache. Die meisten ziehen eine Referenzlosigkeit von Namen aufweisende, dem Einwand (1) passende Normalsprache für **Pi*-Alpha** der alternativen, dem Einwand (2) passenden Normalsprache vor – die nun zwar alle fünf jener Idealitätsaspekte aufweist, dafür aber die ontologische Anerkennung des Nichtexistenten, den *Meinongianismus*, fordert; zu dieser Anerkennung können sich die meisten nicht durchringen, empfinden vielmehr eine Art Abscheu vor dem Meinongianismus, oder gar Horror. Weniger Abscheu empfinden sie offenbar vor *Wahrheit ohne Referenz*: Das Auftreten von Wahrheit ohne Referenz ist bei einer dem Einwand (1) passenden Normalsprache für **Pi*-Alpha** unvermeidlich (und zwar schon allein wegen des Auftretens von wahren Sätzen der Gestalt „ν existiert nicht“).

In der Umgangssprache kommen – es ist schlecht zu bestreiten – die folgenden drei *wahren* Sätze vor: „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd“, „Pegasus existiert nicht“, „Es gibt kein geflügeltes Pferd“. In jede zu **Pi*-Alpha** gehörige [deutsche] Normalsprache [oder anders gesagt: in jede Normalsprache, zu der **Pi-Alpha*** gehört] seien diese drei Sätze als *wahre* Sätze übernommen. Sie haben aber die folgenden beiden alternativen, unvereinbaren Auslegungen; welche von den beiden einschlägig ist, richtet sich *nach der für* **Pi*-Alpha** *letztendlich verwendeten Normalsprache*:

(i) „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd“, „Pegasus existiert$_1$ nicht“ {will sagen: „ ‚Pegasus‘ bezeichnet nichts“; das entspricht der Auffassung, „ν existiert nicht“ besage, das ν nichts bezeichnet}, „Es ist nicht der Fall, dass es ein geflügeltes Pferd gibt$_1$“ {das entspricht der Auffassung, „Es gibt ein υ, sodass gilt: σ[υ]“ besage *genauso viel wie* „Für mindestens ein υ gilt: σ[υ]“, also „Es gibt kein υ, sodass gilt: σ[υ]“ *genauso viel wie* „Für kein υ gilt: σ[υ]“}.

(ii) „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd“, „Pegasus existiert$_2$ nicht“ {will sagen: „ ‚Pegasus‘ bezeichnet etwas, was [in einem gewissen Sinn] nicht existiert“; das entspricht der Auffassung, „ν existiert nichts“ besage, dass ν etwas bezeichnet, was [in einem gewissen Sinn] nicht existiert}, „Es ist nicht der Fall, dass es ein geflügeltes Pferd gibt$_2$“ {das entspricht der Auffassung, „Es gibt ein υ, sodass gilt: $\sigma[\upsilon]$“ besage *mehr als* „Für mindestens ein υ gilt: $\sigma[\upsilon]$“, also „Es gibt kein υ, sodass gilt: $\sigma[\upsilon]$“ *weniger als* „Für kein υ gilt: $\sigma[\upsilon]$“}.

{Zwischen der Interpretation von „τ *existiert*“ und der Interpretation von „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: $\sigma[\upsilon]$“ muss mit Rücksicht auf **Pi*-Alpha** ein ausgezeichneter, nicht selbstverständlicher normalsprachlicher Zusammenhang bestehen; es ist eben derjenige, welcher formelsprachlich durch die **Pi*-Alpha**-Definition D*3 (siehe unten) spezifiziert ist. D*3 spiegelt formelsprachlich den folgenden normalsprachlichen [durch schematisch angedeuteten *Variablen*gebrauch immer noch semiformal formulierten] Zusammenhang wider: τ *existiert* $=_{Def}$ *Es gibt ein* υ, sodass gilt: τ ist identisch mit υ – wonach Existenz als Prädikat definitorisch abgeleitet ist von Existenz als Quantor. Bei den beiden eben thematisierten Interpretationen von „τ *existiert*“ [τ existiert$_1$; τ existiert$_2$] und den ihnen entsprechenden, ebenfalls thematisierten Interpretationen von „*Es gibt ein* υ, sodass gilt: $\sigma[\upsilon]$“ [Es gibt$_1$ ein υ, sodass gilt: $\sigma[\upsilon]$; Es gibt$_2$ ein υ, sodass gilt: $\sigma[\upsilon]$] ist demzufolge von folgenden definitorischen Paarungen auszugehen: τ existiert$_1$ $=_{Def}$ Es gibt$_1$ ein υ, sodass gilt: τ ist identisch mit υ; τ existiert$_2$ $=_{Def}$ Es gibt$_2$ ein υ, sodass gilt: τ ist identisch mit υ. Bei der normalsprachlichen Interpretation von **Pi*-Alpha** ist eine der beiden Paarungen als Deutung von „τ *existiert* $=_{Def}$ *Es gibt ein* υ, sodass gilt: τ ist identisch mit υ“ – also: als Deutung des normalsprachlichen Gegenbilds von D3* – zu wählen.}

Bei jeder der beiden Auslegungen, (i) und (ii), der drei Sätze ist klar, dass die Schlussformel $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ nicht logisch valide sein kann. Der einschlägige Validitätsbegriff ist hier Wahrheit, und formal können die zwei verschiedenen normalsprachlichen Validitäts[Wahrheits]*lagen*, (i) und (ii), uniform durch „$F(a)$, $\neg E(a)$, $\neg\exists xF(x)$“ abgebildet werden. Wäre $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ logisch valide, so könnte man mit elementarsten Mitteln – also mit Mitteln, an denen auf jeden Fall festzuhalten ist – die Validitäts[Wahrheits]*inkonsistenz* der Satzformelfolge „$F(a)$, $\neg E(a)$, $\neg\exists xF(x)$“ folgern, m. a. W.: die Schlussformel $F(a)$, $\neg E(a)$, $\neg\exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \wedge \neg\exists xF(x)$ deduzieren – und natürlich ist diese Schlussformel logisch valide/beweisbar in **Pi-Alpha**. Jedoch: Die fragliche Satzformelfolge ist bezogen auf eine Normalsprache, die die drei Sätze als Wahrheiten im Sinne von (i) bzw. (ii) auffasst, *keineswegs* validitäts[wahrheits]inkonsistent.

Offensichtlich muss der Kalkül **Pi*-Alpha** an der Position A7 gegenüber **Pi-Alpha** modifiziert sein; aber diese Modifikation zieht (insbesondere, um das aus **Pi-Alpha** vertraute

Verhältnis von „$\exists$“ und „$\forall$“ zu erhalten) weitere Modifikationen gegenüber **Pi-Alpha** nach sich. Der Kalkül **Pi*-Alpha** geht aus dem Kalkül **Pi-Alpha** [der mit zugehöriger Normalsprache bleibt, wie er ist] dadurch hervor, dass A6, R8, A7, R9 und A10 wie folgt ersetzt werden:

A6* $\forall xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$ *Existenzielles dictum de omni* (EDO)

R8* $\Gamma, E(\alpha) \rightarrow \sigma[\alpha] \Rightarrow \Gamma \rightarrow \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ und in der „Alle*“[88]-Satzformel $\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt. *Gesetz der hinteren existenziellen Allgeneralisierung* (GHEAG)

A7* $F(a), E(a) \rightarrow \exists xF(x)$ *Echte Existenzgeneralisierung* (EEG)

R9* $\Gamma, \sigma[\alpha], E(\alpha) \rightarrow \sigma' \Rightarrow \Gamma, \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ, in der „Es gibt ein“-Satzformel $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ und in der Satzformel σ' nicht mehr vorkommt.

Gesetz der vorderen echten Existenzgeneralisierung (GVEEG)

A10* $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x)); \exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x))$ *Existenzielles Auswahlprinzip* (EAP)

Alles Übrige bleibt gegenüber **Pi-Alpha** gleich (also: der ganze **Alpha**-Teil, die Identitätsaxiome und die Definitionen D1 und D2). „E(_)“ – „_ existiert“ – ist nun zwar ein neueingeführter Ausdruck (eine neueingeführte Prädikatstockformel), aber es ist kein neueingeführter *Grund*ausdruck;[89] denn „E(_)“ mit dem Sinn von „_ existiert“ lässt sich wegen der nun – nämlich für **Pi*-Alpha** – unterstellten Deutung von „$\exists\upsilon$“ als „Es gibt ein υ“ wie folgt definieren:

D3* $E(\tau) =_{Def} \exists\upsilon(\tau = \upsilon)$

{„τ“ vertritt in diesem Definitionsschema eine beliebige Termformel – eine Variable oder eine Namenformel, sei es eine primäre oder eine sekundäre –, in der die Variable υ nicht vorkommt.[90] Man kann D3* (da ja mit D3* im Grunde eine Prädikatstockformel definiert wird) auch so formulieren: $E(_) =_{Def} \exists\upsilon(_ = \upsilon)$, wobei für „_“

[88] „Alle υ …“ läuft inhaltlich auf „Kein υ, was nicht …“ hinaus, „Alle* υ …“ hingegen auf „Es gibt kein υ, was nicht …“. „Alle* υ …“ kann *zum einen* als synonym mit „Alle υ …“ aufgefasst werden, und wird so aufgefasst, wenn für uns „Es gibt ein υ, was …“ *synonym* ist mit „Für mindestens ein υ gilt: …“. „Alle* υ …“ kann aber *zum anderen* auch so aufgefasst werden, dass es *weniger* besagt als „Alle υ …“, und wird so aufgefasst, wenn für uns „Es gibt ein υ, was …“ *mehr* besagt als „Für mindestens ein υ gilt: …“.

[89] Es sei daran erinnert, dass für alle in diesem Buch betrachteten Kalküle die Grundausdrücke durch die Wahl der Formelsprache (*Sigma*) von Beginn an feststehen.

[90] „α“ [„β“, „α'“, …] steht in Schemata für eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel; „ν“ [„ν'“, „ν''“, …] steht für eine Namenformel; „υ“ [„υ'“, „υ''“, …] steht für eine Variable; „τ“ [„τ'“, „τ''“, …] steht für eine Termformel: eine Namenformel oder eine Variable.

eine beliebige Variable bzw. Namenformel [uniform] substituiert werden kann, in der die Variable υ nicht vorkommt. Das eine wie das andere Definitionsschema ließe sich selbstverständlich auch für **Pi-Alpha** angeben (mit der Benennung „D3"), aber durch es bekäme „E(τ)" *dort* nicht den Sinn von „τ existiert", sondern nur den Sinn von „τ ist ein Etwas". Ein *existenzieller* Sinn von „$\exists$" – selbst ein schwacher, nichtmeinongianischer – ist in **Pi-Alpha** einfach nicht vorgesehen, sondern nur ein „zählender".}

In **Pi*-Alpha** ist die Quantifikation insgesamt stets nur auf Existierendes bezogen. Das hat den Nachteil, dass man, falls man sich die **Pi*-Alpha**-Logik zu eigen macht, dann wenn $\neg$E(a) wahr ist, *daraus* selbst im Fall, dass man „$\neg$E(a)" meinongianisch liest: als „ ‚a' bezeichnet etwas, was nicht existiert", *nicht* logisch valide *das* schließen kann, was man doch, unbefangen, sehr geneigt ist, daraus zu schließen: *dass manches nicht existiert*; was man wiederum sehr geneigt ist, durch $\exists x\neg E(x)$ formal wiederzugeben. Aber keine Formalisierung von „Manches existiert nicht", die den Sinn dieser Aussage trifft, ist in **Pi*-Alpha** möglich. (So manche *ontologisch* einschlägig Interessierte – nicht gerade wenige – werden diese Nachteile allerdings für große Vorteile halten!) Es ist im Gegenteil in **Pi*-Alpha** beweisbar:

P*T1: $\rightarrow \forall xE(x)$

1. $E(a) \rightarrow E(a)$	A1
2. $\rightarrow \forall xE(x)$	R8* (1) {R8*-Spezialisierung: Γ ist leer, $\sigma[\alpha]$ ist „E(a)"}

Außerdem:

P*T2: $\forall x(E(x) \supset F(x)) \leftrightarrow \forall xF(x)$

1. $\forall x(E(x) \supset F(x)), E(a) \rightarrow E(a) \supset F(a)$	A6* {„(E(_) $\supset$ F(_))" für „F"}
2. $\forall x(E(x) \supset F(x)), E(a), E(a) \supset F(a) \rightarrow F(a)$	A2, R2, R1
3. $\forall x(E(x) \supset F(x)), E(a) \rightarrow F(a)$	R3 (2, 1)
4. $\forall x(E(x) \supset F(x)) \rightarrow \forall xF(x)$	R8* (3)
5. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$	A6*
6. $\forall xF(x) \rightarrow E(a) \supset F(a)$	R4 (5)
7. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow E(a) \supset F(a)$	R2 (6)
8. $\forall xF(x) \rightarrow \forall x(E(x) \supset F(x))$	R8* (7)
9. $\forall x(E(x) \supset F(x)) \leftrightarrow \forall xF(x)$	DEF$\leftrightarrow$ (4, 8)

In **Pi-Alpha** ist nun sehr leicht beweisbar:

T73:[91] $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$

1. $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$	A6
2. $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$	A7
3. $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$	RT7 (1, 2)

{Es ist sehr leicht möglich, dieses klassische prädikatenlogische Gesetz misszuverstehen und für unrichtig zu halten; wie folgt: „Aus ‚Jedes Einhorn existiert' folgt doch nicht logisch ‚Manches Einhorn existiert'! Denn der erstere Satz ist trivialerweise wahr, weil nichts ein Einhorn ist, und der letztere Satz ist aus eben diesem Grund nicht wahr." Richtig. *Aber* T73 behauptet doch gar nicht in seiner Anwendung auf eine **Pi-Alpha** passende Normalsprache, die die Sätze „Jedes Einhorn existiert" und „Manches Einhorn existiert" enthält, dass aus dem ersteren Satz der letztere logisch folge; denn die Schlussformel $\forall x(F(x) \supset G(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))$, die die logische Form der fraglichen Schlussfolgerung wiedergibt, ist *kein* Einsetzungsfall von T73, sondern nur $\forall x(F(x) \supset G(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \supset G(x))$ ist ein solcher; nur die letztere Schlussformel wird demzufolge wie T73 als (in der Weise der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Kennzeichnung) logisch valide Schlussformel geführt, und zu ihr liegt mit der Wahrheit von „Jedes Einhorn existiert" und der Nichtwahrheit von „Manches Einhorn existiert" *keineswegs* ein Gegenbeispiel vor.}

In **Pi*-Alpha** hingegen ist dieser Beweis nicht mehr durchführbar und T73 nicht beweisbar, sondern beweisbar ist da nur:

P*T3: $\forall xF(x), E(a) \rightarrow \exists xF(x); \exists y(\forall xF(x) \wedge E(y)) \rightarrow \exists xF(x)$

1. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$	A6*
2. $\forall xF(x), E(a), F(a) \rightarrow \exists xF(x)$	A7*, R2, R1
3. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow \exists xF(x)$	R3 (2, 1)
4. $\forall xF(x) \wedge E(a) \rightarrow \exists xF(x)$	R7 (3)
5. $\forall xF(x) \wedge E(a), E(a) \rightarrow \exists xF(x)$	R2 (4)
6. $\exists y(\forall xF(x) \wedge E(y)) \rightarrow \exists xF(x)$	R9* (5)

[91] Diese Listennummer ergibt sich in Fortsetzung der bisher gegebenen Zählung der Theoreme von zunächst **Alpha**, dann von **Pi-Alpha**.

{Aufgrund von P*T3 ist sehr leicht einsehbar, dass in **Pi*2-Alpha** – also: in dem nur um das Axiom $\rightarrow \exists yE(y)$ gegenüber **Pi*-Alpha** erweiterten Kalkül – $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ beweisbar ist. Denn aus 1. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow \exists xF(x)$ erhält man ja durch Anwendung von R9*: 2. $\forall xF(x), \exists yE(y) \rightarrow \exists xF(x)$; und aus dem **Pi*2-Alpha**-Axiom $\rightarrow \exists yE(y)$ mit R2: 3. $\forall xF(x) \rightarrow \exists yE(y)$; aus 2. und 3. zusammen ergibt sich aber mit R3: 4. $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$.}

Allgemein gilt, was das Verhältnis von **Pi-Alpha** und **Pi*-Alpha** angeht:

I. Jede Schlussformel und Schlussregelformel, die in **Pi*-Alpha** beweisbar ist, ist in Grundnotation auch in **Pi-Alpha** beweisbar.

Beweis: Wir schreiben die Grundgesetze von **Pi*-Alpha** zunächst in Grundnotation gemäß D*3, also: $E(\tau)$ wird überall durch $\exists\upsilon(\tau = \upsilon)$ ersetzt [wobei τ in D*3 und auch sonst eine Namenformel – mit oder ohne freie Variable[92] – ist, in der υ nicht vorkommt, oder eine Variable, die von υ verschieden ist (und in der *insofern* υ nicht vorkommt); vgl. die obige Anmerkung zu D*3]. A6* und A7* sind dann triviale Korollare von A6 bzw. A7. Und das Gesetzesschema R8* ergibt sich in **Pi-Alpha** wie folgt (schematisch):

1. $\Gamma, \exists\upsilon(\alpha = \upsilon) \rightarrow \sigma[\alpha]$	Annahme {samt der bei R8* angegebenen Voraussetzung}
2. $\rightarrow \alpha = \alpha$	A8
3. $\alpha = \alpha \rightarrow \exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$	A7
4. $\rightarrow \exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$	R3 (3, 2)
5. $\Gamma \rightarrow \exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$	R2 (4)
6. $\Gamma \rightarrow \sigma[\alpha]$	R3 (1, 5)
7. $\Gamma \rightarrow \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$	R8 (6).

Das Gesetzesschema R9* wiederum ergibt sich in **Pi-Alpha** wie folgt:

1. $\Gamma, \sigma[\alpha], \exists\upsilon(\alpha = \upsilon) \rightarrow \sigma'$	Annahme {samt der bei R9* angegebenen Voraussetzung}
2. $\Gamma, \sigma[\alpha] \rightarrow \exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$	**Pi-Alpha**-Th. {siehe 5. in der vorausgehenden Ableitung}, R2
3. $\Gamma, \sigma[\alpha] \rightarrow \sigma'$	R3 (1, 2)
4. $\Gamma, \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$	R9 (3).

[92] Wie kann eine Namenformel eine freie Variable enthalten? Sie tut es z. B. in folgender Formel: $\forall x(F(x) \supset F(\iota yR(y, x)))$ [welche Satzformel die logische Form des Satzes „Die Mutter jedes Menschen ist ein Mensch" wiedergibt]. Offensichtlich enthält die Namenformel „$\iota yR(y, x)$" die freie Variable „x"; „$\iota yR(y, x)$" ist eine *sekundäre* Namenformel von *Sigma* (siehe dazu die Beschreibung von *Sigma* in Kapitel 0, insbesondere die Beschreibung der Namenformeln von *Sigma*).

A10* schließlich ergibt sich, was seinen gegenüber A10 neuen Teil (in Grundnotation) angeht, in **Pi-Alpha** wie folgt:

1. $\rightarrow \iota xF(x) = \iota xF(x)$ A8

2. $\iota xF(x) = \iota xF(x) \rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$ A7

3. $\rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$ R3 (2, 1)

4. $\exists xF(x) \rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$ R2 (3).

Da **Pi*-Alpha** nur in den Positionen A6, A7, R8, R9, A10 von **Pi-Alpha** abweicht (mit A6*, A7*, R8*, R9*, A10*), genügt das Gezeigte, um einzusehen: Jeder Beweis in **Pi*-Alpha** – ob für eine Schlussformel oder für eine Schlussregelformel – lässt sich in **Pi-Alpha** perfekt nachbauen [*bis* auf die Ersetzung von $\exists\upsilon(\tau = \upsilon)$ durch $E(\tau)$].

II. Ist $\Gamma \rightarrow \sigma$ in **Pi-Alpha** durch den Beweis Θ beweisbar [Γ mag leer sein], dann ist Γ^*, $\Gamma \rightarrow \sigma$ in **Pi*-Alpha** durch einen Θ in spezifischer Weise [siehe dazu den Beweis von **II.**] korrespondierenden Beweis Θ^* beweisbar, wobei Γ^* die folgende Gestalt hat: $E(\nu_1)$ … $E(\nu_n)$, für ein $n \geq 1$, oder aber leer ist.

Die Bedingung: Keine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel, die in Anwendungen von R8 bzw. R9 in Θ fungiert [d. h.: bei diesen Anwendungen *verschwindet*], kommt in Θ in einer Kennzeichnungsnamenformel vor. [Die Bedeutung dieser Bedingung wird sich im Beweis von **II.** zeigen.]

Beweis: Sei Θ ein Beweis von $\Gamma \rightarrow \sigma$ in **Pi-Alpha**, der *die Bedingung* erfüllt. Dieser Beweis lässt sich wie folgt der Reihe nach („von oben nach unten“) in einen Beweis Θ^* von Γ^*, $\Gamma \rightarrow \sigma$ in **Pi*-Alpha** umbauen:

(a) Enthält Θ Anwendungen von A6 bzw. A7 – eventuell zusammengebunden mit nachfolgenden Anwendungen von R2 und/oder R1 –, dann fügt man in der jeweiligen Zeile von Θ unmittelbar vor dem Pfeil [vor „$\rightarrow$“] $E(\nu)$ ein, wobei ν diejenige Namenformel ist, *die* für die jeweilige Anwendung von A6 bzw. A7 einschlägig ist, d. h.: *die* bei dieser Anwendung in der Konklusion der Schlussformel die $\forall$-quantifizierte Variable dort, wo sie vorkommt, ersetzt, bzw. *die* durch die $\exists$-quantifizierte Variable an den einschlägigen Stellen ersetzt wird. Die Anwendungen von A6 bzw. A7 gehen damit über in Anwendungen von A6* bzw. A7* – eventuell zusammengebunden mit nachfolgenden Anwendungen von R2 und/oder R1. Damit $E(\nu)$ nicht weiter stört, verschiebt man die Satzformel mittels R1 „nach hinten“ [nach links vom

linken Ende von „$\rightarrow$“ weg], und zwar ganz nach hinten, wenn dort noch keine nach hinten verschobene E-Formel steht, sonst bis man in der Satzformelsequenz auf eine schon nach hinten verschobene E-Formel stößt. [Sollte E(ν) später gebraucht werden, um einen Schritt in Θ* in Parallele zu Θ zu vollziehen, dann kann E(ν) mittels R1 selbstverständlich wieder „nach vorne“ geholt werden, auch ganz nach vorne: unmittelbar vor das linke Pfeilende.]

(b) Pi*-Alpha hat mit **Pi-Alpha Alpha** als Teilkalkül gemeinsam, und die Anwendung der **Alpha**-Grundgesetze aufseiten von Θ* wird nicht blockiert durch R2-bedingt dort gegebenfalls zusätzlich auftretende Satzformeln der Gestalt E(ν) unter den Prämissen der *ansonsten* mit den korrespondierenden Θ-Schlussformeln ganz gleichen Θ*-Schlussformeln; R1 genügt, um alle prima facie auftretenden Anwendungshindernisse zu beseitigen. **Pi*-Alpha** und **Pi-Alpha** haben auch die Identitätsgrundgesetze, A8 und A9, gemeinsam, und auch da gilt: Deren Anwendung aufseiten von Θ* stehen (angesichts von R2, R1) nicht entgegen dort gegebenenfalls zusätzlich auftretende Satzformeln der Gestalt E(ν) unter den Prämissen der *ansonsten* mit den korrespondierenden Θ-Schlussformeln ganz gleichen Θ*-Schlussformeln. Schließlich ist das Axiom A10 von **Pi-Alpha** ein echter Teil des Axioms A10* von **Pi*-Alpha**. Kommt A10 aufseiten von Θ zum Einsatz, so A10 als Teil von A10* aufseiten von Θ*, und dort vor „$\rightarrow$“ gegebenenfalls zusätzlich auftretende Satzformeln der Gestalt E(ν) in den mit den korrespondierenden Θ-Schlussformel *ansonsten* ganz gleichen Θ*-Schlussformeln sind kein Problem (angesichts von R2, R1).

(c) Geht in $\Theta\ \Gamma' \rightarrow \forall\upsilon\sigma'[\upsilon]$ durch eine [korrekte: regelkonforme] Anwendung von R8 auf $\Gamma' \rightarrow \sigma'[\alpha]$ hervor, so geht in Θ* parallel dazu $\Gamma'' \rightarrow \forall\upsilon\sigma'[\upsilon]$ durch eine [korrekte] Anwendung von R8* auf Γ'', E(α) $\rightarrow \sigma'[\alpha]$ hervor. Γ'' unterscheidet sich – siehe **(a)** und **(b)** – von Γ' *höchstens* dadurch, dass sie [die Folge Γ''], für ein $k \geq 1$, die Ergänzung von Γ' um eine Sequenz von gewissen Vorkommissen von Satzformeln E(ν_1) … E(ν_k) ist, also E(ν_1) … E(ν_k), Γ' ist. In Γ' kommt die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α nicht vor (sonst könnte nicht in Θ die erwähnte Anwendung von R8 erfolgen). In Γ'' kommt α aber ebenfalls nicht vor (sodass der korrekten Anwendung von R8* nichts im Wege steht); das lässt sich wie folgt erreichen:

Wenn Γ'' identisch mit Γ' ist, dann ist es trivialerweise so wie erwünscht: α kommt in Γ'' nicht vor (denn α kommt ja in Γ' nicht vor). Dann geht man wie folgt voran: $\Gamma'' \rightarrow \sigma'[\alpha] \Rightarrow$ [mit R2] Γ'', E(α) $\rightarrow \forall\upsilon\sigma'[\upsilon] \Rightarrow$ [mit R8*] $\Gamma'' \rightarrow \forall\upsilon\sigma'[\upsilon]$.

Sei nun Γ'' *nicht* identisch mit Γ'; dann sind zwei Fälle zu unterscheiden [warum es nur diese zwei sind, wird anschließend an **(c)** in einer Anmerkung dargelegt]:

(i) in Θ* steht in der Zeile, die der Θ-Zeile $\Gamma' \rightarrow \sigma'[\alpha]$ entspricht: $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$, $\Gamma' \rightarrow \sigma'[\alpha]$, *wobei* $E(\alpha)$ den Platz einer (vielleicht auch mehrerer) der Satzformelvorkommnisse in der Sequenz $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$ [$k' \geq 1$] einnimmt;

(ii) in Θ* steht in der Zeile, die der Θ-Zeile $\Gamma' \rightarrow \sigma'[\alpha]$ entspricht: $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$, $\Gamma' \rightarrow \sigma'[\alpha]$, *wobei* α in der Sequenz $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$ [$k \geq 1$] *nicht* vorkommt.

Im Fall (ii) steht also in Θ* (in der fraglichen Zeile) bereits da: $\Gamma'' \rightarrow \sigma[\alpha]$, *wobei* α in Γ'' nicht vorkommt, und man fährt fort: $\Gamma'' \rightarrow \sigma'[\alpha] \Rightarrow$ [mit R2] Γ'', $E(\alpha) \rightarrow \forall\upsilon\sigma'[\upsilon] \Rightarrow$ [mit R8*] $\Gamma'' \rightarrow \forall\upsilon\sigma'[\upsilon]$.

Im Fall (i) geht man wie folgt vor: $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$, $\Gamma' \rightarrow \sigma'[\alpha] \Rightarrow$ [mit R1 und eventuell zusätzlich mit RT1/PK, wodurch mehrere Vorkommnisse von $E(\alpha)$ in $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$ nach Vorziehung ans rechte Ende der gesamten Sequenz $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$, Γ' auf ein einziges solches Vorkommnis gekürzt werden] $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$, Γ', $E(\alpha) \rightarrow \sigma'[\alpha]$, d. h.: Γ'', $E(\alpha) \rightarrow \sigma'[\alpha]$, *wobei* nun α in $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$ ebensowenig wie in Γ' vorkommt, also in Γ'' nicht vorkommt; $\Rightarrow$ [mit R8*] $\Gamma'' \rightarrow \forall\upsilon\sigma'[\upsilon]$.

{Man beachte, dass $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$ nicht leer sein kann, aber an der Stelle von $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$ sehr wohl auch die leere Sequenz stehen kann: Das ist z. B. dann der Fall, wenn gilt: $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'}) = E(\nu'_1) = E(\alpha)$ [$k' = 1$]; oder allgemein: wenn gilt $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'}) = E(\alpha)$ … $E(\alpha)$ [m. a. W.: $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$ aus k'-mal hintereinander $E(\alpha)$ besteht, wobei die $E(\alpha)$-Vorkommnisse, falls $k' > 1$, durch Komma voneinander abgegrenzt sind].}

{$E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$, *wobei zudem* $E(\alpha)$ in dieser Sequenz den Platz einer, eventuell auch mehrerer, der Satzformelvorkommnisse $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$ einnimmt, stellt die einzige Möglichkeit dar, in der α in der aufseiten von Θ* auftretenden Satzformelsequenz $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$ vorkommen kann. *Zunächst*: Sämtliche Namenformeln ν'_1 … $\nu'_{k'}$ treten in Θ auf (alle diese Namenformeln fungieren ja bei Anwendungen von A6 bzw. A7 in Θ). *Dann*: Sei nun α [wie in **(c)**] eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel, die aufseiten von Θ in einer Anwendung von R8 fungiert. Da Θ laut Annahme (siehe den Beweisanfang) *die Bedingung* erfüllt, kommt α in $E(\nu'_i)$ [i aus 1, …, k'] nicht vor, *wenn* es sich bei ν'_i um eine Kennzeichnungsnamenformel handelt (da α dann wegen der Erfüllung *der Bedingung* durch Θ nicht in ν'_i vorkommt). Ist aber ν'_i eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel, so kommt α – eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel – in $E(\nu'_i)$ ebenfalls nicht vor, *es sei denn*, ν'_i ist ein Vorkommnis von α – wodurch $E(\nu'_i)$ zu einem Vorkommnis von $E(\alpha)$ wird.}

(d) Geht in Θ Γ', $\exists\upsilon\sigma''[\upsilon] \rightarrow \sigma'$ durch eine [korrekte] Anwendung von R9 auf Γ', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$ hervor, so geht in Θ^* Γ'', $\exists\upsilon\sigma''[\upsilon] \rightarrow \sigma'$ durch eine [korrekte] Anwendung von R9* auf Γ'', $\sigma''[\alpha]$, $E(\alpha) \rightarrow \sigma'$ hervor. Γ'' unterscheidet sich – siehe **(a)** und **(b)** – von Γ' *höchstens* dadurch, dass sie [die Folge Γ''], für ein $k \geq 1$, die Ergänzung von Γ' um eine Sequenz von gewissen Satzformelvorkommnissen $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$ ist, also $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$, Γ' ist. In Γ' kommt die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α nicht vor (sonst könnte nicht in Θ die erwähnte Anwendung von R9 erfolgen). In Γ'' kommt α aber ebenfalls nicht vor (sodass der korrekten Anwendung von R9* nichts im Wege steht); das lässt sich wie folgt erreichen:
Wenn Γ'' identisch mit Γ' ist, dann ist es trivialerweise so wie erwünscht: α kommt in Γ'' nicht vor (denn α kommt ja in Γ' nicht vor). Dann geht man wie folgt voran: Γ'', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$ $\Rightarrow$ [mit R2] Γ'', $\sigma''[\alpha]$, $E(\alpha) \rightarrow \sigma'$ $\Rightarrow$ [mit R9*] Γ'', $\exists\upsilon\sigma''[\upsilon] \rightarrow \sigma'$.
Sei nun Γ'' *nicht* identisch mit Γ'; dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:
(i) in Θ^* steht in der Zeile, die der Θ-Zeile Γ', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$ entspricht: $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$, Γ', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$, *wobei* $E(\alpha)$ den Platz einer (vielleicht auch mehrerer) der Satzformelvorkommnisse in der Sequenz $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$ [$k' \geq 1$] einnimmt;
(ii) in Θ^* steht in der Zeile, die der Θ-Zeile Γ', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$ entspricht: $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$, Γ', $\sigma''[\alpha]$ $\rightarrow \sigma'$, *wobei* α in der Sequenz $E(\nu_1)$, …, $E(\nu_k)$ [$k \geq 1$] *nicht* vorkommt.
Im Fall (ii) steht also in Θ^* (in der fraglichen Zeile) bereits da: Γ'', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$, *wobei* α in Γ'' nicht vorkommt, und man fährt fort: Γ'', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$ $\Rightarrow$ [mit R2] Γ'', $\sigma''[\alpha]$, $E(\alpha) \rightarrow \sigma'$ $\Rightarrow$ [mit R9*] Γ'', $\exists\upsilon\sigma''[\upsilon] \rightarrow \sigma'$.
Im Fall (i) geht man wie folgt vor: $E(\nu'_1)$ … $E(\nu'_{k'})$, Γ', $\sigma''[\alpha] \rightarrow \sigma'$ $\Rightarrow$ [mit R1 und eventuell auch mit RT1/PK] $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$, Γ', $\sigma''[\alpha]$, $E(\alpha) \rightarrow \sigma'$, d. h.: Γ'', $\sigma''[\alpha]$, $E(\alpha) \rightarrow \sigma'$, *wobei* nun α in $E(\nu_1)$ … $E(\nu_k)$ ebensowenig wie in Γ' vorkommt, also in Γ'' nicht vorkommt; $\Rightarrow$ [mit R9*] Γ'', $\exists\upsilon\sigma''[\upsilon] \rightarrow \sigma'$.

{Die zu **(c)** gemachten erläuternden Anmerkungen gelten auch für **(d)**; nur dass es sich bei **(d)** eben um R9 und R9* handelt, nicht um R8 und R8*.}

Die Abschnitte **(a)**, **(b)**, **(c)** und **(d)** zusammen leisten den Beweis von **II.** unter der Annahme, dass *die Bedingung* von Θ erfüllt wird: Am Ende des **Pi*-Alpha**-Beweises Θ^* steht: Γ^*, $\Gamma \rightarrow \sigma$, während am Ende des **Pi-Alpha**-Beweises Θ (aus dem Θ^* hervorgegangen ist) steht: $\Gamma \rightarrow \sigma$. Dabei hat Γ^* die folgende Gestalt: $E(\nu_1)$ … $E(\nu_n)$, für ein $n \geq 1$; oder Γ^* ist leer.

Fügt man **Pi*-Alpha** als Axiom $\rightarrow \exists x(a = x)$ hinzu [oder unter Verwendung von D3* gesagt: $\rightarrow$ E(a)], so ist der resultierende Kalkül offensichtlich deduktiv äquivalent mit **Pi-Alpha**: [**Pi*-Alpha** + $\rightarrow \exists x(a = x)$] $\cong$ **Pi-Alpha**. [Man beachte hierbei, dass $\rightarrow \exists x(a = x)$ ein Theorem von **Pi-Alpha** ist.] Hingegen ist der Kalkül, der entsteht, wenn man **Pi*-Alpha** als Axiom $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$ [oder unter Verwendung von D3* gesagt: $\rightarrow \exists y E(y)$] hinzufügt, *nicht* deduktiv äquivalent mit **Pi-Alpha**. Jener Kalkül – **Pi*2-Alpha** – enthält deduktiv **Pi*-Alpha**, ist aber nicht in **Pi*-Alpha** deduktiv enthalten, und er ist (wie **Pi*-Alpha**) in **Pi-Alpha** deduktiv enthalten [$\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$ ist ja ein Theorem von **Pi-Alpha**], enthält aber nicht deduktiv **Pi-Alpha**. Zur Nichtbeweisbarkeit von $\rightarrow \exists y E(y)$ in **Pi*-Alpha** (bei Beweisbarkeit dieser Schlussformel in **Pi*2-Alpha** und **Pi-Alpha**) und zur Nichtbeweisbarkeit von $\rightarrow$ E(a) in **Pi*-Alpha** und **Pi*2-Alpha** (bei Beweisbarkeit dieser Schlussformel in **Pi-Alpha**) siehe gleich im Folgenden noch Weiteres.

Nun aber zunächst zu einigen Unterschieden zwischen **Pi-Alpha** und **Pi*-Alpha**: ETND1, ETND2, AETND2, die in **Pi-Alpha** beweisbar sind [T37a, T37b, T38], sind in **Pi*-Alpha** nicht beweisbar, sondern nur *Schwaches* ETND1, *Schwaches* ETND2, *Schwaches* AETND2; die Schwächung besteht in allen drei Fällen in der Einfügung ein und derselben Prämisse (dorthin, wo bisher vor „$\rightarrow$“ *nichts* stand): der Prämisse $\exists y E(y)$.

{Neben dieser Schwächung liegt in **Pi*-Alpha** aber gewissermaßen auch eine Stärkung von ETND1, ETND2, AETND2 vor: Die Anführungszeichen um eines der Worte in den ausgeschriebenen inhaltlichen Namen dieser drei Schlussformeln, die die *Uneigentlichkeit* des Wortgebrauchs anzeigen, entfallen in **Pi*-Alpha**; denn **Pi*-Alpha** fasst im Unterschied zu **Pi-Alpha** „$\exists$“ echt *existenziell* auf.[93] Aus, z. B., *Erstes „existenzielles“ tertium non datur* aufseiten von **Pi-Alpha** wird somit aufseiten von **Pi*-Alpha** *Erstes existenzielles tertium non datur*; gemeint ist beide Male die (unterschiedlich interpretierte) Schlussformel $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ [ETND1], die freilich

[93] Nicht wenige würden freilich (mit Gottlob Frege, dessen äußerst einflussreichen Ansichten über *Existenz* sie sich anschließen) meinen, dass *die einzig mögliche existenzielle Auffassung* von „$\exists$“ schon in **Pi-Alpha** gegeben ist. Sie würden irren; in **Pi-Alpha** liegt eindeutig nur die *numerische* Auffassung von „$\exists$“ vor: „$\exists$“ wird da ausschließlich im Sinne von „mindestens ein“ gelesen; „existenziell“ kann man die durch diese ausschließliche Lesart determinierte Auffassung von „$\exists$“ nur in Anführungsstrichen nennen: wegen der „Vorherrschaft des *Numerischen*“. Es ist anders, wenn „$\exists$“ ausschließlich im Sinne von „es gibt ein“ gelesen wird, wie in **Pi*-Alpha** und **Pi*2-Alpha**: Mit dieser letzteren Lesart von „$\exists$“ *kann* (wie dargelegt wurde) die numerische Auffassung von „$\exists$“ *fusioniert* werden (wobei freilich diese letztere, fusionierende „$\exists$“-Deutung durch jene Lesart *nicht* determiniert wird – wie ebenfalls dargelegt wurde); die numerische Auffassung von „$\exists$“ ist dann, wenn sie mit der ausschließlichen Lesart von „$\exists$“ als „Es gibt ein“ fusioniert wird, auch eine *existenzielle* (ohne Anführungsstriche): wegen der dann gegebenen „Gleichberechtigung des *Existenziellen*“.

nur in **Pi-Alpha** ein Theorem ist, *nicht* in **Pi*-Alpha**. In **Pi*-Alpha** ist nur $\exists yE(y) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ ein Theorem: *Schwaches* ETND1, oder ausgeschrieben: *Schwaches erstes existenzielles tertium non datur*.}

Der Beweis des *schwachen* ETND2 und der des *schwachen* AETND2 seien angegeben:

<u>P*T4a: $\exists yE(y) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$</u>	*Schwaches* ETND2
1. $E(b), F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	A7*, R1
2. $E(b), \neg F(b) \rightarrow \exists x\neg F(x)$	A7*, R1
3. $E(b), \exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	A4, R2, R1
4. $E(b), F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	RT7 $\{\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma, B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma, A \rightarrow C\}$ (1, 3)
5. $E(b), \exists x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	A4, R2, R1
6. $E(b), \neg F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	RT7 (2, 5)
7. $E(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	R5 (4, 6) {Für 1. bis 7. vgl. den Beweis von T37b und das im Beweis von **II.** beschriebene **Pi*-Alpha**-Umbauverfahren für **Pi-Alpha**-Beweise.}
8. $E(b), E(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	R2 (7)
9. $\exists yE(y) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	R9* (8)

<u>P*T4b: $\exists yE(y) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$</u>	*Schwaches* AETND2
1. $\exists yE(y) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	P*T4a
2. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$	A10*
3. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg F(\iota x\neg F(x))$	A10*
4. $F(\iota xF(x)) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$	A4
5. $\neg F(\iota x\neg F(x)) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$	A4
6. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$	RT7 (2, 4)
7. $\exists x\neg F(x) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$	RT7 (3, 5)
8. $\exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$	R6 (6, 7)
9. $\exists yE(y) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$	RT7 (1, 8)

Beweisbar in **Pi*-Alpha** ist auch die Umkehrung von P*T4a: P*T5a, sowie das an ETND1 anknüpfende Analogon von P*T4a *plus* P*T5a (welches letztere Theorempaar ja an ETND2 anknüpft): P*T5b; wie folgt:

P*T5a: $\exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \rightarrow \exists yE(y)$

1. $E(b), F(b) \rightarrow E(b)$ A1, R2
2. $E(b), E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ A7*
3. $E(b), F(b) \rightarrow \exists yE(y)$ RT7 (1, 2)
4. $F(b), E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ R1 (3)
5. $\exists xF(x) \rightarrow \exists yE(y)$ R9* (4)
6. $E(b), \neg F(b) \rightarrow E(b)$ A1, R2
7. $E(b), \neg F(b) \rightarrow \exists yE(y)$ RT7 (6, 2)
8. $\neg F(b), E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ R1 (7)
9. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists yE(y)$ R9* (8)
10. $\exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \rightarrow \exists yE(y)$ R6 (5, 9)

P*T5b: $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \leftrightarrow \exists yE(y)$

1. $F(b) \vee \neg F(b), E(b), E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ A7*, R2, R1
2. $F(b) \vee \neg F(b), E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ RT1 {PK: Prämissenkontraktion} (1)
3. $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists yE(y)$ R9* (2)
4. $E(b) \rightarrow F(b) \vee \neg F(b)$ T1 {TND}, R2
5. $F(b) \vee \neg F(b), E(b) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ A7*
6. $E(b), F(b) \vee \neg F(b) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R1 (5)
7. $E(b) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R3 (6, 4)
8. $E(b), E(b) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R2 (7)
9. $\exists yE(y) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R9* (8)
10. $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \leftrightarrow \exists yE(y)$ DEF↔ (3, 9)

{Aber was ist mit der Umkehrung von P*T4b: $F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x)) \rightarrow \exists yE(y)$? – Die Umkehrung von P*T4b ist in **Pi*-Alpha** nicht beweisbar (in **Pi*2-Alpha** hingegen ist sie trivialerweise [mittels R2] beweisbar, da in **Pi*2-Alpha** ja $\rightarrow \exists yE(y)$ qua Axiom beweisbar ist). Dass $F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x)) \rightarrow \exists yE(y)$ in **Pi*-Alpha** nicht beweisbar ist, ist der Normalsprache zum Kalkül **Pi*-Alpha** angemessen: „Das [ausgewählte] geflügelte Pferd [nämlich Pegasus] ist ein geflügeltes Pferd“ ist wahr, und also ist auch wahr [gemäß A4] „Das geflügelte Pferd ist ein geflügeltes Pferd, oder das [Ausgewählte], was kein geflügelte Pferd ist, ist kein geflügeltes Pferd“; daraus folgt aber nicht logisch: „Es gibt ein Existierendes“; normalsprachlich können die angeführten Sätze wahr sein, ohne dass es etwas Existierendes gibt.

Man kann es sich auch wie folgt überlegen: Wäre $\neg\exists yE(y)$ wahr [$\neg\exists yE(y)$ hier nun nicht als bloße Formel genommen, sondern als formelhaft geschriebener, aber normalsprachlich interpretierter Satz], so folgt zwar die Wahrheit von $\neg E(\iota xF(x))$ und $\neg E(\iota x\neg F(x))$ [in **Pi*-Alpha** sind ja beweisbar: $E(\iota xF(x)) \rightarrow \exists yE(y)$ und $E(\iota x\neg F(x)) \rightarrow \exists yE(y)$ – als Einsetzungsfälle von P*T6 –, also mit RT3 auch $\neg\exists yE(y) \rightarrow \neg E(\iota xF(x))$ und $\neg\exists yE(y) \rightarrow \neg E(\iota x\neg F(x))$] und daraus die Wahrheit von $\neg\exists xF(x)$ und $\neg\exists x\neg F(x)$ [mit der 2. Hälfte von A10* hat man $\exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x))$ und $\exists x\neg F(x) \rightarrow E(\iota x\neg F(x)$, also mit RT3 auch $\neg E(\iota xF(x)) \rightarrow \neg\exists xF(x)$ und $\neg E(\iota x\neg F(x)) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x))$]; aber $F(\iota xF(x))$ [z. B.: „Das geflügelte Pferd ist ein geflügeltes Pferd"], und darum erst recht $F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$, können dennoch wahr sein (im Sinne *der Normalsprache für* **Pi*-Alpha**, aber natürlich nicht im Sinne einer Normalsprache für **Pi-Alpha**).

Drei Dinge noch. *Erstens*: Wie aus $F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ nicht $\exists yE(y)$ logisch folgt, so folgt aus $\neg\exists yE(y)$ nicht logisch $\neg F(\iota xF(x)) \wedge F(\iota x\neg F(x))$ (man beachte: $\neg\exists yE(y) \rightarrow \neg F(\iota xF(x)) \wedge F(\iota x\neg F(x))$ ist wegen RT3 etc. etc. mit $F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x)) \rightarrow \exists yE(y)$ in **Pi*-Alpha** deduktiv äquivalent). *Zweitens*: Wie nun deutlich geworden ist (angesichts von P*T4a und P*T5a und angesichts der in dieser Anmerkung angestellten Betrachtungen), ist AETND2, $\rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ [T38], ein *alternativ formuliertes* ETND2 [T37b], $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$, *nur* bzgl. **Pi-Alpha**, *nicht* bzgl. **Pi*-Alpha**; bzgl. dieses letzteren Kalküls müsste man folglich $\rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ [welche Schlussformel in **Pi*-Alpha** nicht beweisbar ist] eigentlich umbenennen, und infolge davon auch $\exists yE(y) \rightarrow F(\iota xF(x)) \vee \neg F(\iota x\neg F(x))$ [welche Schlussformel in **Pi*-Alpha** beweisbar ist und „Schwaches AETND2" genannt wurde]; aber von diesen Umbenennungen sei abgesehen. *Drittens*: Die Bezeichnung „der Selektor" für den ι-Operator ist eigentlich nur passend, wenn überhaupt etwas da ist, woraus selegiert werden könnte. Gemäß *einer* der beiden Deutungen von **Pi*-Alpha** ist aber bei Wahrheit von $\neg\exists yE(y)$ überhaupt nichts da, woraus selegiert werden könnte (der Grundbereich der Normalsprache ist da nämlich leer). Ein Problem ist das jedoch nicht; denn der ι-Operator ist nach *dem Normalfall* „der Selektor" genannt, und *der Normalfall* ist eben, dass $\exists yE(y)$ wahr ist und nicht $\neg\exists yE(y)$.}

$\rightarrow \exists yE(y)$ ist also genauso wenig in **Pi*-Alpha** beweisbar wie $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ und $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$, und $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ und $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ sind nicht minder in **Pi*2-Alpha** beweisbar als $\rightarrow \exists yE(y)$. Die Inhalte der Theoreme P*T4a, P*T5a und P*T5b sind ja auch in **Pi*2-Alpha** beweisbar, und $\rightarrow \exists yE(y)$ ist ein Axiom von **Pi*2-Alpha**. Was man in **Pi*-Alpha** beweisen kann, ist nicht $\rightarrow \exists yE(y)$, sondern nur dies:

<u>P*T6: $E(b) \rightarrow \exists yE(y)$</u>

1. $E(b), E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ A7* {„y" für „x", „b" für „a", „E(_)" [bzw. $\exists x(_ = x)$] „für „F(_)"}

2. $E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ RT1 (1) {eine der wenigen Gelegenheiten, wo man PK gut brauchen kann}[94]

[94] Aber es geht natürlich auch ohne PK: 1. $E(b), E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ [A7*]; 2. $E(b) \rightarrow E(b)$ [A1]; 3. $E(b) \rightarrow \exists yE(y)$ [R3 (1, 2)]. Außerdem kann man auch noch wie folgt argumentieren (und es ist zwar die längste, aber gewissermaßen auch die einsichtigste Weise): 1. $E(b), b = b \rightarrow \exists x(b = x)$ [A7*, R1]; 2. $E(b), \exists x(b = x) \rightarrow \exists y\exists x(y = x)$ [A7*, R1]; 3.

Und E(b) $\rightarrow \exists$yE(y) ist auch in **Pi*2-Alpha** beweisbar [wie gerade angegeben, oder auch in ganz trivialer Weise mit R2 und dem spezifischen **Pi*2-Alpha**-Axiom $\rightarrow \exists$yE(y)]. Was aber weder in **Pi*-Alpha** noch in **Pi*2-Alpha** beweisbar ist, das ist $\rightarrow$ E(b) [und $\rightarrow$ E(a), $\rightarrow$ E(c), …]. Diese Nichtbeweisbarkeit ist besonders gut einzusehen: $\rightarrow$ E(b) ist ja [mit D3*] $\rightarrow \exists\upsilon$(b = υ), also z. B. $\rightarrow \exists$x(b = x), und diese Schlussformel müsste, wenn sie ein Theorem sein soll, nach den Grundgesetzen von **Pi*-Alpha** bzw. **Pi*2-Alpha** deduktiv zustande kommen. Dafür bietet sich als Ausgangspunkt einzig und allein der folgenden Einsetzungsfall von A8 an: $\rightarrow$ b = b; aber um daraus mit A7* etc. $\rightarrow \exists$x(b = x) zu erhalten, muss man, wie sich zeigt, $\rightarrow \exists\upsilon$(b = υ) für eine Variable υ beweisen – was man bislang nicht hat und was nicht erreichbarer ist, als $\rightarrow \exists$x(b = x) zu beweisen; man tritt also auf der Stelle:

1. $\rightarrow$ b = b	A8
2. b = b, E(b) $\rightarrow \exists$x(b = x)	A7*
3. E(b) $\rightarrow$ b = b	R2 (1)
4. E(b), b = b $\rightarrow \exists$x(b = x)	R1 (2)
5. E(b) $\rightarrow \exists$x(b = x)	R3 (4, 3)
6. $\exists\upsilon$(b = υ) $\rightarrow \exists$x(b = x)	D3* (5).

Zu $\rightarrow \exists$x(b = x) kommt man hiermit nur mit R3 und bewiesenem $\rightarrow \exists\upsilon$(b = υ) für irgendeine Variable υ; aber diesen Beweis zu erbringen, ist natürlich nicht im Mindesten erreichbarer als einen Beweis für $\rightarrow \exists$x(b = x) zu erbringen.

$\exists$yE(y) hat in **Pi*-Alpha**, und darum auch in **Pi*2-Alpha**, ein schönes logisches Äquivalent – wie gleich sichtlich werden wird. Die Umkehrung von A10 ist in **Pi-Alpha** ein Einsetzungsfall von A7 (vgl. den Beweis von T41). In **Pi*-Alpha** hingegen hat man nur:

<u>P*T7: F(ιxF(x)), E(ιxF(x))[95] $\rightarrow \exists$xF(x)</u>

1. F(ιxF(x)), E(ιxF(x)) $\rightarrow \exists$xF(x) A7* {Einsetzungsfall}

E(b), b = b $\rightarrow \exists$y$\exists$x(y = x) [RT7 (1, 2)]; 4. E(b) $\rightarrow$ b = b [A8, R2]; 5. E(b) $\rightarrow \exists$y$\exists$x(y = x) [R3 (3, 4)]; 6. E(b) $\rightarrow \exists$yE(y) [D3* (5)].

[95] Welche Satzformel wird aus „E(ιxF(x))“, wenn sie gemäß D3* ausgeschrieben wird? Es kann nicht „$\exists$x(ιxF(x) = x)“ sein, denn das ist syntaktisch unzulässig. Es kann aber „$\exists$y(ιxF(x) = y)“ sein, oder auch „$\exists$z(ιxF(x) = z)“, oder auch „$\exists$u(ιxF(x) =u)“, etc. Wenn es einem auf (perfekte) *Eindeutigkeit* ankommt, so kann man sich an die Konvention halten, dass bei Ausdrücken der Gestalt E($\iota\upsilon\sigma$[υ]) – dann, wenn man den Ausdruck gemäß D3* ausschreibt – jeweils die erste Variable bei „$\exists$“ zu setzen ist, die syntaktisch zulässig ist, d. h.: die erste Variable in der Reihe x, y, z, u, x´, y´, z´, u´, x´´, …, die in E($\iota\upsilon\sigma$[υ]) nicht vorkommt.

Mithilfe von P*T7 erhält man dann leicht in **Pi*-Alpha** den folgenden, sehr speziellen Einsetzungsfall des **Pi-Alpha**-Theorems T41 [während in **Pi*-Alpha** zwar allgemein $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ beweisbar ist (trivialerweise: es handelt sich um A10*, 1. Hälfte), aber eben nicht $F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$]:

<u>P*T8a: $\exists yE(y) \leftrightarrow E(\iota yE(y))$</u>

1. $\exists yE(y) \rightarrow E(\iota yE(y))$ A10*
2. $E(\iota yE(y)), E(\iota yE(y)) \rightarrow \exists yE(y)$ P*T7 {Einsetzungsfall; oder auch: A7*, Einsetzungsfall}
3. $E(\iota yE(y)) \rightarrow \exists yE(y)$ RT1 (2)
4. $\exists yE(y) \leftrightarrow E(\iota yE(y))$ DEF$\leftrightarrow$ (1, 3)

Und man erhält mit A7* (bzw. P*T7) auch leicht die folgende Modifikation von T41:

<u>P*T8b: $\exists xF(x) \leftrightarrow E(\iota xF(x)) \wedge F(\iota xF(x))$</u>

1. $\exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x))$ A10* {2. Hälfte}
2. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10* {1. Hälfte}
3. $\exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x)) \wedge F(\iota xF(x))$ RT2 {IC-Regelgesetz} (1, 2)
4. $E(\iota xF(x)), F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ A7* {bzw. P*T7}, R1
5. $E(\iota xF(x)) \wedge F(\iota xF(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ R7 (4)
6. $\exists xF(x) \leftrightarrow E(\iota xF(x)) \wedge F(\iota xF(x))$ DEF$\leftrightarrow$ (3, 5)

Nun aber noch ein anderes Thema, das in den Rahmen dieses Kapitels gehört: Während in **Pi-Alpha** kein deduktiver Unterschied zwischen *De-dicto*- und *De-re*-Prädikation besteht (siehe die Theoreme T67 und T68) besteht ein solcher Unterschied in **Pi*-Alpha** sehr wohl; zudem sind in **Pi*-Alpha** die zwei Weisen der *De-re*-Prädikation,$\exists$-*De-re* und $\forall$-*De-re*, nicht miteinander deduktiv äquivalent, sondern die eine Weise ist *deduktiv stärker* als die *De-dicto*-Prädikation, und die andere ist *deduktiv schwächer* als diese. Zunächst haben wir, was das Verhältnis von *De-dicto*-Prädikation und $\exists$-*De-re*-Prädikation angeht:

<u>P*T9: $\exists x(b = x \wedge F(x)) \rightarrow F(b)$</u>

1. $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ A9

2. $b=a \wedge F(a) \rightarrow F(b)$ R7 (1, 2)

3. $b=a \wedge F(a), E(a) \rightarrow F(b)$ R2 (2)

3. $\exists x(b = x \wedge F(x)) \rightarrow F(b)$ R9* (3)

Die Umkehrung von P*T9 ist jedoch *nicht beweisbar* in **Pi*-Alpha**; beweisbar in **Pi*-Alpha** ist bloß dies:

P*T10: $F(b), E(b) \rightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$

1. $F(b) \rightarrow F(b)$ A1

2. $F(b) \rightarrow b = b$ A8, R2

3. $F(b) \rightarrow b = b \wedge F(b)$ RT2 (2, 1)

4. $F(b), E(b) \rightarrow b = b \wedge F(b)$ R2 (3)

5. $F(b), E(b), b = b \wedge F(b) \rightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ A7*, R2, R1

8. $F(b), E(b) \rightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ R3 (5, 4)

Was dann das Verhältnis von *De-dicto*-Prädikation und $\forall$-*De-re*-Prädikation angeht, so haben wir:

P*T11: $F(b) \rightarrow \forall x(b = x \supset F(x))$

1. $F(b), a = b \rightarrow F(a)$ A9 {„a“ für „b“, „b“ für „a“}, R1

2. $F(b), b = a \rightarrow a = b$ T33 {„b“ für „a“, „a“ für „b“}, R2, R1

3. $F(b), b = a \rightarrow F(a)$ RT7 (2, 1)

4. $F(b) \rightarrow b = a \supset F(a)$ R4 (3)

5. $F(b), E(a) \rightarrow b = a \supset F(a)$ R2 (4)

6. $F(b) \rightarrow \forall x(b = x \supset F(x))$ R8* (5)

Die Umkehrung von P*T11 ist jedoch *nicht beweisbar* in **Pi*-Alpha**; beweisbar in **Pi*-Alpha** ist bloß das Folgende:

P*T12: $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b) \rightarrow F(b)$

1. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b), b = b \rightarrow b = b \supset F(b)$ A6*, R2

2. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b), b = b, b = b \supset F(b) \rightarrow F(b)$ A2, R2, R1

3. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b), b = b \rightarrow F(b)$ R3 (2, 1)

4. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b) \rightarrow b = b$ A8, R2

5. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b) \rightarrow F(b)$ R3 (3, 4)

Was man aber nun mit P*T9 *plus* P*T10 bzw. mit P*T11 *plus* P*T12 in **Pi*-Alpha** beweisen kann, ist zum einen dies:

P*T13: $F(b) \wedge E(b) \leftrightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$

1. $F(b), E(b) \rightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ P*T10

2. $F(b) \wedge E(b) \rightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ R7 (1)

3. $\exists x(b = x \wedge F(x)) \rightarrow F(b)$ P*T9

4. $E(a), b = a, F(a) \rightarrow E(b)$ A9 {Einsetzungsfall: $b = a, E(a) \rightarrow E(b)$}, R2, R1

5. $E(a), b = a \wedge F(a) \rightarrow E(b)$ R7 (4)

6. $b = a \wedge F(a), E(a) \rightarrow E(b)$ R1 (5)

7. $\exists x(b = x \wedge F(x)) \rightarrow E(b)$ R9* (6)

8. $\exists x(b = x \wedge F(x)) \rightarrow F(b) \wedge E(b)$ RT2 (3, 7)

9. $F(b) \wedge E(b) \leftrightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$ DEF$\leftrightarrow$ (2, 8)

Und es ist zum anderen das Folgende:

P*T14: $F(b) \wedge E(b) \leftrightarrow \forall x(b = x \supset F(x)) \wedge E(b)$

1. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b) \rightarrow F(b)$ P*T12

2. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b) \rightarrow E(b)$ A1, R2, R1

3. $\forall x(b = x \supset F(x)), E(b) \rightarrow F(b) \wedge E(b)$ RT2 (1, 2)

4. $\forall x(b = x \supset F(x)) \wedge E(b) \rightarrow F(b) \wedge E(b)$ R7 (3)

5. $F(b), E(b) \rightarrow \forall x(b = x \supset F(x))$ P*T11, R2

6. $F(b), E(b) \rightarrow E(b)$ A1, R2, R1

7. $F(b), E(b) \rightarrow \forall x(b = x \supset F(x)) \wedge E(b)$ RT2 (5, 6)

8. $F(b) \wedge E(b) \rightarrow \forall x(b = x \supset F(x)) \wedge E(b)$ R7 (7)

9. $F(b) \wedge E(b) \leftrightarrow \forall x(b = x \supset F(x)) \wedge E(b)$ DEF$\leftrightarrow$ (8, 4)

In **Pi*-Alpha** besteht demnach die folgende Hierarchie deduktiver Kraft („logischer Stärke“) von *fünf* verschiedenen Prädikationsweisen:

Platz 1: *De-dicto-cum-existentia*; ∃-*De-re;* ∀-*De-re-cum-existentia* [drei „pari passu“]

Platz 2: *De-dicto*

Platz 3: ∀-*De-re*

Oder anders gesagt:

1. F(b) ∧ E(b); ∃x(b = x ∧ F(x)); ∀x(b = x ⊃ F(x)) ∧ E(b)

↓ (aber nicht: ↑)

2. F(b)

↓ (aber nicht: ↑)

3. ∀x(b = x ⊃ F(x))

In **Pi-Alpha** hingegen herrscht vollkommene deduktive Äquivalenz zwischen den fünf herausgestellen Prädikationsweisen (angesichts der Beweisbarkeit von → ∃υ(b = υ) in **Pi-Alpha** und den **Pi-Alpha**-Theoremen T67 und T68).

Die Unterschiede zwischen **Pi-Alpha** und **Pi*-Alpha** dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, dass zwischen beiden Systemen in manchen Punkten auch völliger Gleichklang besteht, beispielsweise:

<u>P*T15: ∀xF(x) ↔ ¬∃x¬F(x)</u>	{Vgl. T40!}
1. E(b), ¬F(b) → ∃x¬F(x)	A7*, R1
2. E(b), ¬∃x¬F(x) → F(b)	RT5 {LKP} (1)
3. ¬∃x¬F(x), E(b) → F(b)	R1 (2)
4. ¬∃x¬F(x) → ∀xF(x)	R8* (3)
5. E(b), ∀xF(x) → F(b)	A6*, R1
6. E(b), ¬F(b) → ¬∀xF(x)	RT3 {AUKP} (5)
7. ¬F(b), E(b) → ¬∀xF(x)	R1 (6)
8. ∃x¬F(x) → ¬∀xF(x)	R9* (7)

9. $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ RT4 {RKP} (8)

10. $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ DEF$\leftrightarrow$ (9, 4)

{Gemäß dem oben in diesem Kapitel bewiesenen Satz **II.** ist in **Pi*-Alpha** Γ^*, $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ beweisbar, da es ja in **Pi-Alpha** einen Beweis von $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ gibt, der *die Bedingung* von **II.** erfüllt: siehe den für T40 angegebenen Beweis, von dem ein **Pi-Alpha**-Beweis für $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$, der *die Bedingung* von **II.** erfüllt, ein Teilbeweis ist. Γ^* ist nun gemäß **II.** eine nichtleere Folge von Satzformeln der Gestalt E(ν), *oder aber* Γ^* *ist leer*. Und in der Tat kann „Γ^*“ aus „Γ^*, $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$“ weggelassen werden, sodass nicht nur Γ^*, $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$, sondern auch $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ in **Pi*-Alpha** beweisbar ist, weil beim Umbau des dem Beweis von T40 entnehmbaren **Pi-Alpha**-Beweises für $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ in einen **Pi*-Alpha**-Beweis, jede durch eine Anwendung von A6* oder A7* eingeführte Prämisse der Gestalt E(ν) durch eine Anwendung von R8* oder R9* wieder eliminiert wird, Γ^* sich also, am Ende, als *leer* erweist. Im Übrigen (*last but not least*): Das bisher in dieser Anmerkung Gesagte bleibt *Wort für Wort* wahr, wenn man darin überall, wo es vorkommt, „$\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$“ durch dessen Umkehrung „$\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$” ersetzt.

Aus dem Beweis von T40:

Θ_1:

1. $\neg F(b) \rightarrow \exists x\neg F(x)$	A7
2. $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow F(b)$	RT5 [LKP] (1)
3. $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$	R8 (2)

Θ_2:

4. $\forall xF(x) \rightarrow F(b)$	A6
5. $\neg F(b) \rightarrow \neg\forall xF(x)$	RT3 [AUKP] (4)
6. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall xF(x)$	R9 (5)
7. $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$	RT4 [RKP] (6)

Aus dem Beweis von P*T15:

Θ_1*:

1. E(b), $\neg F(b) \rightarrow \exists x\neg F(x)$	A7*, R1
2. E(b), $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow F(b)$	RT5 [LKP] (1)
3. $\neg\exists x\neg F(x)$, E(b) $\rightarrow F(b)$	R1 (2)
4. $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$	R8* (3)

Θ_2*:

5. E(b), $\forall xF(x) \rightarrow F(b)$	A6*, R1
6. E(b), $\neg F(b) \rightarrow \neg\forall xF(x)$	RT3 [AUKP] (5)
7. $\neg F(b)$, E(b) $\rightarrow \neg\forall xF(x)$	R1 (6)
8. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall xF(x)$	R9* (7)
9. $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$	RT4 [RKP] (8)

Man beachte im ersten Teil [Θ_1 und Θ_1*], rechts, die Einführung von E(b) mittels A7*, die durch die Elimination von E(b) mittels R8* revidiert wird. Und man beachte im zweiten Teil [Θ_2 und Θ_2*], rechts, die Einführung von E(b) durch A6*, die durch die Elimination von E(b) mittels R9* revidiert wird.}

9. Die Schlussformelkalküle **Pi**-Alpha** und **Pi**2-Alpha** einer *meinongschen* Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung

Wie im vorausgehenden Kapitel dargelegt, kann **Pi*-Alpha** auch *meinongianisch* aufgefasst werden, bei welcher Auffassung davon ausgegangen wird, dass sämtliche Namen [singulären Terme] der zugrundeliegenden Normalsprache etwas [aber nicht mehr als ein Etwas] bezeichnen, *wenn auch* manche jener Namen nichts Existierendes bezeichnen. Da in **Pi*-Alpha** die Quantifikation auf Existierendes beschränkt ist, kommt aber in **Pi*-Alpha** auch dann, wenn es meinongianisch aufgefasst wird, das Nichtexistierende *quantifikatorisch* nicht vor; es bleibt *quantifikatorisch anonym*: $\forall$xE(x) [„Alles existiert“] ist in **Pi*-Alpha** [d. h.: in der Weise der durch **Pi*-Alpha** formulierten Logik] logisch valide,[96] *trotz* der angenommenen Wahrheit von Sätzen der Gestalt „ν existiert nicht“.

Die Tatsache, dass in mancher gewürdigten Normalsprache manche Sätze der Gestalt „ν existiert nicht“ wahr sind, wobei diese Tatsache in ihr ausgedeutet ist durch das analytische (semiformale) Bikonditional

„ν existiert genau dann, wenn $\exists\upsilon(\nu = \upsilon)$“ [vgl. D3*]

bei *existenzieller* Auffassung von „$\exists\upsilon$“ [dies wird *ausschließlich* als „Es gibt ein υ“ gelesen], war die Motivation dafür, neben den Kalkül **Pi-Alpha** den Kalkül **Pi*-Alpha** zu setzen. Wird dabei von einer *schwachen* existenziellen Auffassung von $\exists\upsilon$ ausgegangen, wonach $\exists\upsilon$ [„Es gibt ein υ“] *genauso viel* besagt als „Für mindestens ein υ“, so beläuft sich „ν existiert“ logisch auf „ν ist mit etwas identisch“, folglich „ν existiert nicht“ auf „ν ist mit nichts identisch“; welches Letztere man nur als den objektsprachlichen Ausdruck der die gewürdigte Normalsprache betreffenden metasprachlichen Sachlage verstehen kann, dass ν nichts bezeichnet. So ergibt sich die *freilogische Interpretation* von **Pi*-Alpha**.

Wird hingegen von einer *starken* existenziellen Auffassung von $\exists\upsilon$ ausgegangen, wonach $\exists\upsilon$ [„Es gibt ein υ“] *mehr* besagt als „Für mindestens ein υ“, so beläuft sich „ν existiert“

[96] Siehe P*T1; mit der logischen Validität von $\rightarrow \forall$xE(x) ist natürlich auch die von $\forall$xE(x) gegeben.

logisch auf „ν ist mit etwas Existierendem+ [und nicht bloß mit *etwas*] identisch“, folglich „ν existiert nicht“ auf „ν ist mit nichts Existierendem+ [und nicht gleich mit *nichts*] identisch“; welches Letztere man gut als den objektsprachlichen Ausdruck der eine andere gewürdigte Normalsprache betreffenden metasprachlichen Sachlage verstehen kann, dass ν – wie *jeder* Name der fraglichen Normalsprache – etwas bezeichnet, aber nun eben nichts Existierendes+ bezeichnet. So ergibt sich die *meinongianische Interpretation* von **Pi*-Alpha**.

{Die Benennung der beiden Interpretationen ist logikgeschichtlich bedingt und logikgeschichtlich – Stichworte: Freie Logik, Meinongianismus – leicht nachvollziehbar. Man beachte (es mag nicht aufgefallen sein), dass zur jeweiligen Charakterisierung der beiden Interpretationen soeben das **Pi-Alpha**-Verständnis von ∃υ als „Für mindestens ein υ“ herangezogen wurde; denn wir haben, erstens, *die freilogische Interpretation der Existenzquantifikation*: ∃υ/„Es gibt ein υ“ – in **Pi*-Alpha** und zugehöriger Normalsprache – wird interpretiert als „Für mindestens ein υ“, d. h. so, wie ∃υ in **Pi-Alpha** und zugehöriger Normalsprache intepretiert wird; und, zweitens, *die meinongianische Interpretation der Existenzquantifikation*: ∃υ/„Es gibt ein υ“ – in **Pi*-Alpha** und zugehöriger Normalsprache – wird interpretiert als „Für mindestens ein υ, das existiert+“, d. h. so, wie ∃υ-*plus*-Existenz+ in **Pi-Alpha** und zugehöriger Normalsprache zu interpretieren wäre – *wäre*, also Konjunktiv, denn die Betrachtung bewegt sich ja hier auf einer informellen Ebene. Um das Ganze formell und formal zu machen, müsste man der Formelsprache *Sigma* eine logische Grundkonstante hinzufügen: E+, die *syntaktisch* [natürlich nicht auch semantisch] wie eine unstrukturierte und sinnunbestimmte einstellige Prädikatformel funktioniert, und **Pi-Alpha** wäre um Axiome für diese neue Grundkonstante zu ergänzen. Welche Axiome das nun wären, geht aus diesem Kapitel implizit hervor.}

Die oben angesprochene *quantifikatorische Anonymität* von Nichtexistierendem ist vollkommen in Ordnung, wenn von der *freilogischen Interpretation* von **Pi*-Alpha** ausgegangen wird, bei welcher normalsprachlich gilt:

Zentralpostulat jeder Freien Logik: „ν existiert nicht“ ist *wahr [valide]* genau dann, wenn der singuläre Term [Name] ν *bezugslos* ist.

Wodurch, angesichts der Wahrheit – in einer einschlägigen Normalsprache – beispielsweise von „Pegasus existiert nicht“ und „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd“, und analog gebildeter Sätze, *es dazu kommt*, dass Sätze der Gestalt σ[ν] – und zwar auch *logisch einfache* solche Sätze [Sätze *ohne logische Konstanten*] – wahr sind, ohne dass der in ihnen sinnrelevant vorkommende Name ν auf etwas Bezug nimmt – etwas, was sich für eine ideale Wissenschafts-

sprache „nicht gehört“. Nun werden zwar in diesem Buch *in zweiter Linie* auch Logiken berücksichtigt, bei denen die zugrundeliegende Normalsprache *keine* ideale Wissenschaftssprache ist (Näheres dazu in Kapitel 0); und diese zweitlinige Berücksichtigung hat – ohne von der Nichtidealität der Normalsprache viel Aufhebens zu machen – im **Gamma**-Kapitel 3 und in den **Delta**-Kapiteln 4, 5 und 6 auch schon stattgefunden. Aber *in erster Linie* soll es in diesem Buch doch um Logiken gehen, deren zugrundeliegende Normalsprache eine ideale Wissenschaftssprache ist – welche, als solche, die fünf in Kapitel 0 niedergelegten Idealitätsaspekte hat. Bei meinongianischer Interpretation *ist* die **Pi*-Alpha**-Logik [die durch **Pi*-Alpha** formulierte Logik] eine solche Logik,[97] *nicht* dagegen ist sie es bei ihrer freilogischen Interpretation: angesichts dessen, dass eine **Pi*-Alpha** angemessene Normalsprache auf jeden Fall wahre Sätze der Gestalt „ν existiert nicht“ enthalten muss, woraus sich aber bei freilogischer Interpretation von **Pi*-Alpha** – welche unweigerlich das Zentralpostulat jeder Freien Logik mit sich führt – ergibt, dass manche Namen der Normalsprache bezugslos sind, nichts bezeichnen, also der Idealitätsaspekt (3) idealer Wissenschaftssprachen (siehe Kapitel 0) nicht gegeben ist.

Es empfiehlt sich also *in erster Linie* die meinongianische Interpretation von **Pi*-Alpha**. Wenn aber in einer **Pi*-Alpha** zugrundeliegenden idealen Wissenschaftssprache auf Nichtexistierendes *per Namen* Bezug genommen wird – und davon, dass dies vorkommt, ist auszugehen, wenn es nicht von vornherein als der wissenschaftssprachlichen Idealität zuwider verboten wird (was unbillig wäre: vgl. Fußnote 97) –, dann spricht nichts dagegen, dieses Nichtexistierende auch quantifikatorisch anzuerkennen, es nicht in der quantifikatorischen Anonymität zu belassen. Der dazu passende Schlussformelkalkül kann nun aber nicht **Pi*-Alpha** sein (wegen P*T1), sondern er ist **Pi**-Alpha**.

Pi-Alpha** ist ein Hybrid von **Pi-Alpha** und **Pi*-Alpha**. *Im ersten Schritt* geht **Pi**-Alpha** aus **Pi*-Alpha** dadurch hervor, dass A7* und R9* beibehalten werden, dass aber A6* in A6 rückverwandelt wird und R8* in R8. Wir haben also in **Pi**-Alpha**:

A6 $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$ *Dictum de omni* (DO)

[97] Dies [nämlich: dass die **Pi*-Alpha**-Logik *bei meinongianischer Interpretation* die Logik einer idealen Wissenschaftssprache ist] *dadurch* auszuschließen, dass man die Liste der Idealitätsaspekte einer idealen Wissenschaftssprache verlängert, indem man die Inklusion von Namen, die auf Nichtexistentes Bezug nehmen, für eine solche Sprache *verbietet*, erscheint dagegen *übertrieben*, nur durch die Furcht vor dem Nichtexistenten motiviert.

R8 $\Gamma \rightarrow \sigma[\alpha] \Rightarrow \Gamma \rightarrow \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ und in der „Alle"-Satzformel $\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt. *Gesetz der hinteren Allgeneralisierung* (GHAG)

A7* $F(a), E(a) \rightarrow \exists xF(x)$ *Echte Existenzgeneralisierung* (EEG)

R9* $\Gamma, \sigma[\alpha], E(\alpha) \rightarrow \sigma' \Rightarrow \Gamma, \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ, in der „Es gibt ein"-Satzformel $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ und in der Satzformel σ' nicht mehr vorkommt.

Gesetz der vorderen echten Existenzgeneralisierung (GVEEG)

Im zweiten Schritt des Hervorgehens von **Pi**-Alpha** aus **Pi*-Alpha** kommen zu den schon in **Pi*-Alpha** gegebenen Definitionen D1, D3* zwei weitere Definitionen hinzu, und D2 (das zu **Pi*-Alpha** wie auch schon zu **Pi-Alpha** zählt) wird durch D2** ersetzt. Das Resultat ist dies:

D1 $\sigma > \sigma' =_{Def} \neg\sigma \vee \sigma'$

D2** $\exists_\forall!\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \neg\forall\upsilon\neg\sigma[\upsilon] \wedge \forall\upsilon\forall\upsilon'(\sigma[\upsilon'] \wedge \sigma[\upsilon] \supset \upsilon' = \upsilon)$

D3* $E(\tau) =_{Def} \exists\upsilon(\tau = \upsilon)$

D4** $\exists_\forall\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \neg\forall\upsilon\neg\sigma[\upsilon]$

D5** $\forall_\exists\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \neg\exists\upsilon\neg\sigma[\upsilon]$

Und schließlich, *im dritten Schritt*, wird A10* ersetzt durch

A10** $\exists_\forall xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$

Mit der Ersetzung von A10* durch A10** hat man sich dafür entschieden, dass der Kennzeichnungsoperator [alias: Auswahloperator, Selektor] ι axiomatisch so bestimmt ist, wie er in **Pi-Alpha** durch A10 bestimmt ist [denn $\exists_\forall xF(x)$ liefe ja *in* **Pi-Alpha** wegen D4** und T39 logisch auf $\exists xF(x)$ hinaus]; mit der Beibehaltung von A10* hingegen hätte man sich dafür entschieden, dass der Operator ι axiomatisch so bestimmt ist, wie er in **Pi*-Alpha** bestimmt ist. Wie man sich da auch entscheidet, es gilt: Die Operatoren $\exists_\forall$ und $\forall$ verhalten sich, wie die Operatoren $\exists$ und $\forall$ sich in **Pi-Alpha** verhalten; die Operatoren $\forall_\exists$ und $\exists$ hingegen verhalten sich, wie die Operatoren $\forall$ und $\exists$ sich in **Pi*-Alpha** verhalten. Denn die folgenden Theoreme sind in **Pi**-Alpha** beweisbar:

P**T1: $F(a) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$ {Vgl. A7!}

1. $\forall x \neg F(x) \rightarrow \neg F(a)$ A6
2. $F(a) \rightarrow \neg \forall x \neg F(x)$ RT4 (1)
3. $F(a) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$ D4** (2)

P**RT1: $\Gamma, \sigma[\alpha] \rightarrow \sigma' \Rightarrow \Gamma, \exists_{\forall} \upsilon \sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ, in der „Mindestens ein"-Satzformel $\exists_{\forall} \upsilon \sigma[\upsilon]$ und in der Satzformel σ' nicht mehr vorkommt. {Vgl. R9!}

1. $\Gamma, \sigma[\alpha] \rightarrow \sigma'$ Annahme
2. $\Gamma, \neg \sigma' \rightarrow \neg \sigma[\alpha]$ RT3 (1)
3. $\Gamma, \neg \sigma' \rightarrow \forall \upsilon \neg \sigma[\upsilon]$ R8 (2)[98]
4. $\Gamma, \neg \forall \upsilon \neg \sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$ RT5 (3)
5. $\Gamma, \exists_{\forall} \upsilon \sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$ D4** (4)

{Mit dem Beweis von P**RT1 ist nicht eine einzelne Schussregelformel bewiesen, sondern ein Schema für unendlich viele Schlussregelformeln – die mittels jenes Beweises *alle* bewiesen sind.}

P**T2: $\forall_{\exists} xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$ {Vgl. A6*!}

1. $E(a), \neg F(a) \rightarrow \exists x \neg F(x)$ A7*, R1
2. $E(a), \neg \exists x \neg F(x) \rightarrow F(a)$ RT5 (1)
3. $\neg \exists x \neg F(x), E(a) \rightarrow F(a)$ R1 (2)
4. $\forall_{\exists} xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$ D**5 (3)

P**RT2: $\Gamma, E(\alpha) \rightarrow \sigma[\alpha] \Rightarrow \Gamma \rightarrow \forall_{\exists} \upsilon \sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ und in der „Alle*"-Satzformel $\forall_{\exists} \upsilon \sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt. {Vgl. R8*!}

1. $\Gamma, E(\alpha) \rightarrow \sigma[\alpha]$ Annahme

[98] R8 ist hier anwendbar. Denn wenn α in Γ, in σ' und in $\exists_{\forall} \upsilon \sigma[\upsilon]$ vorausgesetztermaßen nicht mehr vorkommt, dann kommt es *schon von vornherein* nicht in Γ und nicht in σ' vor (da in jenen Schlussformelteilen gar keine α-Elimination erfolgt), also auch nicht in $\neg \sigma'$; und in $\forall \upsilon \neg \sigma[\upsilon]$ kommt es gegenüber $\neg \sigma[\alpha]$ genauso *nicht mehr* vor, wie es in $\exists_{\forall} \upsilon \sigma[\upsilon]$ ($=_{Def} \neg \forall \upsilon \neg \sigma[\upsilon]$) gegenüber $\sigma[\alpha]$ *nicht mehr* vorkommt (was, wie gesagt, vorausgesetzt ist).

2. Γ, E(α), C $\supset$ C $\rightarrow$ $\sigma[\alpha]$ R2 (1)

3. Γ, E(α), $\neg\sigma[\alpha] \rightarrow \neg$(C $\supset$ C) RT3 (2)

4. Γ, $\neg\sigma[\alpha]$, E(α) $\rightarrow \neg$(C $\supset$ C) R1 (3)

5. Γ, $\exists\upsilon\neg\sigma[\upsilon] \rightarrow \neg$(C $\supset$ C) R9* (4)[99]

6. $\Gamma \rightarrow \neg\exists\upsilon\neg\sigma[\upsilon]$ RT8 {GIS1} (5)

7. $\Gamma \rightarrow \forall_{\exists}\upsilon\sigma[\upsilon]$ D**5 (6)

{Mit dem Beweis von P**RT2 ist nicht eine einzelne Schussregelformel bewiesen, sondern ein Schema für unendlich viele Schlussregelformeln – die mittels jenes Beweises *alle* bewiesen sind.}

Die folgenden Prinzipien von **Pi**-Alpha** betreffen direkt das Verhältnis der vier betrachteten Quantoren – $\exists$, $\exists_{\forall}$, $\forall$, $\forall_{\exists}$ – untereinander:

P**T3a: $\forall$xF(x) $\rightarrow$ $\forall_{\exists}$xF(x)

1. $\forall$xF(x) $\rightarrow$ F(a) A6

2. $\forall$xF(x), E(a) $\rightarrow$ F(a) R2 (1)

3. $\forall$xF(x) $\rightarrow$ $\forall_{\exists}$xF(x) P**RT2 (2)

P**T3b: $\exists$xF(x) $\rightarrow$ $\exists_{\forall}$xF(x)

1. F(a) $\rightarrow$ $\exists_{\forall}$xF(x) P**T1

2. F(a), E(a) $\rightarrow$ $\exists_{\forall}$xF(x) R2 (1)

3. $\exists$xF(x) $\rightarrow$ $\exists_{\forall}$xF(x) R9* (2)

{Weder die Umkehrung von P**T3a noch die von P**T3b ist in **Pi**-Alpha** beweisbar.}

P**T4a: $\forall$xF(x) $\rightarrow$ $\exists_{\forall}$xF(x)

1. $\forall$xF(x) $\rightarrow$ F(a) A6

2. F(a) $\rightarrow$ $\exists_{\forall}$xF(x) P**T1

3. $\forall$xF(x) $\rightarrow$ $\exists_{\forall}$xF(x) RT7 (1, 2)

[99] R9* ist hier anwendbar. Denn α, gegeben die Voraussetzung von P**RT2, kommt *schon von vornherein* nicht in Γ vor (da in Γ gar keine α-Elimination erfolgt), und *ohnehin* kommt es nicht in $\neg$(C $\supset$ C) vor. In $\exists\upsilon\neg\sigma[\upsilon]$ gegenüber $\neg\sigma[\alpha]$ kommt es aber genauso *nicht mehr* vor, wie es, nach Voraussetzung, in $\forall_{\exists}\upsilon\sigma[\upsilon]$ (=$_{Def}$ $\neg\exists\upsilon\neg\sigma[\upsilon]$) gegenüber $\sigma[\alpha]$ *nicht mehr* vorkommt.

{In **Pi-Alpha** ist $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ beweisbar (siehe T73); in **Pi*-Alpha** ist $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ *nicht* beweisbar. In **Pi**-Alpha** ist $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ ebenfalls nicht beweisbar, aber immerhin ist da beweisbar $\forall xF(x) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$ [wie gesehen]. $\forall_{\exists} xF(x) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$ wiederum ist in **Pi**-Alpha** nicht beweisbar [und darum auch nicht $\forall_{\exists} xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$; sonst wäre wegen P**T3b und RT7 ja nun doch $\forall_{\exists} xF(x) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$ in **Pi**-Alpha** beweisbar]; beweisbar ist da aber immerhin das, was durch den (gleich folgenden) Beweis von P**T4b bewiesen wird.}

P**T4b: $\forall_{\exists} xF(x), \exists yE(y) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$

1. $\forall_{\exists} xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$	P**T2
2. $\forall_{\exists} xF(x), F(a) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$	P**T1, R2, R1
3. $\forall_{\exists} xF(x), E(a) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$	RT7 (1, 2)
4. $\forall_{\exists} xF(x), E(a), E(a) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$	R2 (3)
5. $\forall_{\exists} xF(x), \exists yE(y) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$	R9* (4)

P**T5: $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ {siehe die erste Hälfte von A10*}

1. $\exists_{\forall} xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$	A10**
2. $\exists xF(x) \rightarrow \exists_{\forall} xF(x)$	P**T3b
3. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$	RT7 (2, 1)

Die zweite Hälfte jedoch von A10* – $\exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x))$ – ist in **Pi**-Alpha** nicht beweisbar. Schon im Falle der meinongianischen Interpretation von **Pi*-Alpha** – deren nun auch quantifikatorisch konsequenter Ausdruck **Pi**-Alpha** ist – ist $\exists xF(x) \wedge \neg E(\iota xF(x))$ nicht ohne Weiteres eine widersprüchliche Satzformel, d. h.: $\rightarrow \neg(\exists xF(x) \wedge \neg E(\iota xF(x)))$, m. a. W.: $\exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x))$,[100] ist bei der meinongianischen Interpretation von **Pi*-Alpha** nicht ohne Weiteres logisch valide: $\iota xF(x)$ könnte, ohne in Widerspruch mit der ersten Hälfte von A10* zu geraten, trotz der Validitität von $\exists xF(x)$ aus (vorhandenen) *nichtexistierenden* F*s* gewählt sein, also nicht existieren (*während* es zugleich ein F ist). Da aber **Pi*-Alpha** nicht nur für die meinongianische, sondern auch für die *freilogische* Interpretation offen ist (wie dargelegt), war es angemessen, die Funktion des Selektors ι *existenziell* zu restringieren und in A10* neben $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ als zweite Hälfte $\exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x))$ aufzunehmen. Denn bei der

[100] Schon in **Alpha** ist beweisbar:$\rightarrow \neg(\exists xF(x) \wedge \neg E(\iota xF(x))) \Leftrightarrow \exists xF(x) \rightarrow E(\iota xF(x))$, nämlich als Einsetzungsfall des in **Alpha** beweisbaren Regelgesetzes $\rightarrow \neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A \rightarrow B$.

freilogischen Interpretation von **Pi*-Alpha** können keine nichtexistierenden F*s* zur Verfügung stehen, von denen ιxF(x) eines sein könnte. Das ergibt sich wie folgt:

Zunächst ist $\rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$ ein Theorem von **Pi*-Alpha** und logisch valide in der Weise einer Freien Logik [*spezifisch*: derjenigen *ohne* $\rightarrow \exists y E(y)$ als Prinzip, denn es ist von **Pi*-Alpha** die Rede, nicht von **Pi*2-Alpha**] sowohl bei der „standesgemäßen" freilogischen als auch bei der „nicht standesgemäßen" – dennoch durchführbaren – meinongianischen Interpretation von **Pi*-Alpha**:

P*T16: $\rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$

1. $E(a), \neg E(a) \rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$	A3
2. $E(a), F(a), \neg E(a) \rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$	R2, R1 (1)
3. $E(a), F(a) \wedge \neg E(a) \rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$	R7 (2)
4. $F(a) \wedge \neg E(a), E(a) \rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$	R1 (3)
5. $\exists x(F(x) \wedge \neg E(x)) \rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$	R9* (4)
6. $\rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$	RT10 {GIS3} (5)

Nun ist bei der *freilogischen* Interpretation von **Pi*-Alpha** $\neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$ – *lies*: „Es gibt kein F, das nicht existiert" – aufzufassen als „Kein F existiert$_{FL}$ nicht", und also können wegen P*T16, freilogisch interpretiert, keine nichtexistierenden F*s* zur Verfügung stehen, von denen ιxF(x) eines sein könnte. Bei der *meinongianischen* Interpretation hingegen ist $\neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$ – *lies* [so wie eben]: „Es gibt kein F, das nicht existiert" – aufzufassen als „Kein existierendes$_M$ F existiert$_M$ nicht" – was logisch valide, aber auch trivial ist [in der Weise welcher Prädikatenlogik auch immer] und hinsichtlich der Frage, ob für „ιxF(x)" nichtexistierende F*s* als wählbare Bezugsobjekte zur Verfügung stehen oder nicht, *nichtssagend* ist. Dieses Resultat ergibt sich deshalb, weil „Es gibt ein …" bei der *meinongianischen* Interpretation von **Pi*-Alpha** so viel wie „Mindestens ein existierendes$_M$ …" besagt, und also „Es gibt kein …" so viel wie „Kein existierendes$_M$ …", während bei der *freilogischen* Interpretation „Es gibt ein …" so viel besagt wie „Mindestens ein …", und also „Es gibt kein …" so viel wie „Kein …". [Siehe dazu des Näheren den Anfang dieses Kapitels bis einschließlich der ersten Anmerkung in diesem Kapitel.] Außerdem ist „existiert" und dementsprechend „nicht existiert" meinongianisch anders interpretiert als freilogisch – ungeachtet des für beide Interpretationen einschlägigen analytischen Bikonditionals „ν existiert genau dann, wenn $\exists\upsilon(\nu = \upsilon)$".

$\rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$ ist auch in **Pi**-Alpha** beweisbar. Um dies einzusehen, genügt ein Blick auf den Beweis von P*T16: Jedes dort verwendete **Pi*-Alpha**-Prinzip ist auch ein **Pi**-Alpha**-Prinzip. *Nicht* in **Pi**-Alpha** beweisbar ist hingegen $\rightarrow \neg\exists_{\forall}x(F(x) \wedge \neg E(x))$, oder mit anderen Worten (wegen D4**): $\neg\neg\forall x\neg(F(x) \wedge \neg E(x))$, was **Pi**-Alpha**-logisch auf $\rightarrow \forall x(F(x) \supset E(x))$ hinausläuft. Man kann es auch so sagen: Gemäß **Pi**-Alpha** ist die Existenz des Prädikationsträgers *keine* logisch notwendige Bedingung jeder beliebigen *ontisch wahren* Prädikation (wobei *rein verbal wahre* Prädikationen – wahre Prädikationen, ohne dass der in ihnen fungierende Name auf etwas Bezug nimmt – gemäß **Pi**-Alpha** nicht vorkommen: siehe P**T1; auch der Quantor $\exists_{\forall}\upsilon$ ist ja ontisch zu verstehen).

{Anders sieht es in **Pi*-Alpha** aus. Dort ist mit $\rightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$ *sehr wohl* auch $\rightarrow \forall x(F(x) \supset E(x))$ beweisbar: Ein Einsetzungsfall von $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ [P*T15] ist nämlich $\forall x\neg(F(x) \wedge \neg E(x)) \leftrightarrow \neg\exists x\neg\neg(F(x) \wedge \neg E(x))$, woraus sich mit den in **Pi*-Alpha** (wie auch in **Pi-Alpha**) beweisbaren Schlussformeln $\forall x(F(x) \supset E(x)) \leftrightarrow \forall x\neg(F(x) \wedge \neg E(x))$ und $\neg\exists x\neg\neg(F(x) \wedge \neg E(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$ [gemäß der schon in **Alpha** beweisbaren Schlussregelformel $B \leftrightarrow C; A \leftrightarrow B; C \leftrightarrow D \Rightarrow A \leftrightarrow D$] ergibt: $\forall x(F(x) \supset E(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x))$ ist beweisbar in **Pi*-Alpha**, also auch $\neg\exists x(F(x) \wedge \neg E(x)) \rightarrow \forall x(F(x) \supset E(x))$, also mit P*T16 und R3 auch: $\rightarrow \forall x(F(x) \supset E(x))$. In der *freilogischen Interpretation* von **Pi*-Alpha** besagt dies: Gemäß **Pi*-Alpha** ist die Existenz$_{FL}$ des Prädikationsträgers eine logisch notwendige Bedingung jeder beliebigen *ontisch wahren* Prädikation (*rein verbal wahre* Prädikationen demgegenüber – wie z. B. „Pegasus ist ein geflügeltes Pferd" – kommen ohne die Existenz$_{FL}$ des Prädikationsträgers aus, will sagen: überhaupt ohne Prädikationsträger[101]). In der *meinongianischen Interpretation* von **Pi*-Alpha** hingegen besagt die Beweisbarkeit von $\rightarrow \forall x(F(x) \supset E(x))$ in **Pi*-Alpha** nur: Gemäß **Pi*-Alpha** ist die Existenz$_{M}$ des Prädikationsträgers eine logisch notwendige Bedingung jeder beliebigen ontisch wahren Prädikation mit existierendem$_{M}$ Prädikationsträger (und rein verbal wahre Prädikationen kommen nicht vor).}

Des Weiteren ist in **Pi**-Alpha** beweisbar:

<u>P**T6a: $\exists xF(x) \leftrightarrow \exists_{\forall}x(E(x) \wedge F(x))$</u>

1. $E(b), F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	A7*, R1
2. $E(b) \wedge F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	R7 (1)
3. $\exists_{\forall}x(E(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists xF(x)$	P**RT1 (2)
4. $E(b) \wedge F(b) \rightarrow \exists_{\forall}x(E(x) \wedge F(x))$	P**T1

[101] Der für die Prädikation verwendete singuläre Term ist nicht der Träger der Prädikation, sondern nur dessen sprachlicher Repräsentant – und eventuell ein Repräsentant ohne etwas Repräsentiertes.

5. $E(b), F(b) \rightarrow \exists_{\forall} x(E(x) \wedge F(x))$ RT14 {die Umkehrung von R7} (4)

6. $F(b), E(b) \rightarrow \exists_{\forall} x(E(x) \wedge F(x))$ R1 (5)

7. $\exists x F(x) \rightarrow \exists_{\forall} x(E(x) \wedge F(x))$ R9* (6)

8. $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists_{\forall} x(E(x) \wedge F(x))$ DEF↔ (7, 3)

P**T6b: $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ {Dieses Theorem lässt sich auch in **Pi*-Alpha** beweisen.}

1. $E(b), F(b) \rightarrow \exists x F(x)$ A7*, R1

2. $E(b) \wedge F(b) \rightarrow \exists x F(x)$ R7 (1)

3. $E(b) \wedge F(b), E(b) \rightarrow \exists x F(x)$ R2 (2)

4. $\exists x(E(x) \wedge F(x)) \rightarrow \exists x F(x)$ R9*

5. $E(b), F(b) \rightarrow E(b)$ A1, R2

6. $E(b), F(b) \rightarrow F(b)$ A1, R2, R1

7. $E(b), F(b) \rightarrow E(b) \wedge F(b)$ RT2 (5, 6)

8. $E(b), F(b), E(b) \wedge F(b) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ A7*, R2, R1

9. $E(b), F(b) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ R3 (8, 7)

10. $F(b), E(b) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ R1 (9)

11. $\exists x F(x) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ R9* (10)

12. $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ DEF↔ (11, 4)

{Man kann – kürzer – auch so vorgehen:

…

5. $E(b), E(b) \wedge F(b) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ A7*, R1

6. $E(b), E(b), F(b) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ RT14 (5)

7. $F(b), E(b) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ R1, RT1 (6)

8. $\exists x F(x) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ R9* (7)

…}

P**T6c: $\exists x(E(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \exists_{\forall} x(E(x) \wedge F(x))$

1. $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists x(E(x) \wedge F(x))$ P**T6b

2. $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists_{\forall} x(E(x) \wedge F(x))$ P**T6a

3. $\exists x(E(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \exists_{\forall} x(E(x) \wedge F(x))$ RT18 {zweite Hälfte: $B \leftrightarrow A; B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$} (1, 2)

P**T6d: $\exists xE(x) \leftrightarrow \exists_{\forall} xE(x)$

1. $E(a), E(a) \rightarrow \exists_{\forall} xE(x)$	P**T1, R2
2. $\exists xE(x) \rightarrow \exists_{\forall} xE(x)$	R9* (2)
3. $E(a), E(a) \rightarrow \exists xE(x)$	A7*
4. $E(a) \rightarrow \exists xE(x)$	RT1 (3)
5. $\exists_{\forall} xE(x) \rightarrow \exists xE(x)$	P**RT1 (4)
6. $\exists xE(x) \leftrightarrow \exists_{\forall} xE(x)$	DEF$\leftrightarrow$ (2, 5)

Resultate wie P**T6c und P**T6d führen vor Augen, wie leicht – unter Umständen – $\exists$ und $\exists_{\forall}$ miteinander logisch verwechselt werden können. Bei $\forall$ und $\forall_{\exists}$ ist das *etwas* anders:

P**T7a: $\forall_{\exists} F(x) \leftrightarrow \forall x(E(x) \supset F(x))$

1. $\forall x(E(x) \supset F(x)) \rightarrow E(a) \supset F(a)$	A6
2. $\forall x(E(x) \supset F(x)), E(a) \rightarrow F(a)$	RT13 {die Umkehrung von R4} (1)
3. $\forall x(E(x) \supset F(x)) \rightarrow \forall_{\exists} F(x)$	P**RT2 (2)
4. $\forall_{\exists} F(x), E(a) \rightarrow F(a)$	P**T2
5. $\forall_{\exists} F(x) \rightarrow E(a) \supset F(a)$	R4 (4)
6. $\forall_{\exists} F(x) \rightarrow \forall x(E(x) \supset F(x))$	R8 (5)
7. $\forall_{\exists} F(x) \leftrightarrow \forall x(E(x) \supset F(x))$	DEF$\leftrightarrow$ (6, 3)

P**T7b: $\forall_{\exists} F(x) \leftrightarrow \forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x))$

1. $\forall_{\exists} F(x), E(a), E(a) \rightarrow F(a)$	P**T2, R2
2. $\forall_{\exists} F(x), E(a) \rightarrow E(a) \supset F(a)$	R4 (1)
3. $\forall_{\exists} F(x) \rightarrow \forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x))$	P**RT2 (2)
4. $\forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x)), E(a) \rightarrow E(a) \supset F(a)$	P**T2
5. $\forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x)), E(a), E(a) \rightarrow F(a)$	RT13 (4)
6. $\forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x)), E(a) \rightarrow F(a)$	RT1 (5)
7. $\forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x)) \rightarrow \forall_{\exists} F(x)$	P**RT2 (6)
8. $\forall_{\exists} F(x) \leftrightarrow \forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x))$	DEF$\leftrightarrow$ (3, 7)

P**T7c: $\forall x(E(x) \supset F(x)) \leftrightarrow \forall_{\exists} x(E(x) \supset F(x))$

1. $\forall_{\exists}F(x) \leftrightarrow \forall x(E(x) \supset F(x))$ P**T7a

2. $\forall_{\exists}F(x) \leftrightarrow \forall_{\exists}x(E(x) \supset F(x))$ P**T7b

3. $\forall x(E(x) \supset F(x)) \leftrightarrow \forall_{\exists}x(E(x) \supset F(x))$ RT18 {zweite Hälfte: $B \leftrightarrow A; B \leftrightarrow C \Rightarrow A \leftrightarrow C$} (1, 2)

Ein zu P**T6d analoges Theorem $\forall xE(x) \leftrightarrow \forall_{\exists}xE(x)$ [es wäre P**T7d] ist nun aber in **Pi**-Alpha** nicht zu haben. Denn beweisbar ist da zwar dies:

P**T8: $\rightarrow \forall_{\exists}xE(x)$

1. $E(a) \rightarrow E(a)$ A1

2. $\rightarrow \forall_{\exists}xE(x)$ P**RT2 (1)

Aber $\rightarrow \forall xE(x)$ ist nicht beweisbar (vgl. demgegenüber P*T1 unter den Theoremen von **Pi*-Alpha**). Und es ist gut so, dass $\rightarrow \forall xE(x)$ in **Pi**-Alpha** nicht beweisbar ist. Denn da bei **Pi**-Alpha** normalsprachlich – in der zugehörigen Normalsprache – von der Wahrheit von manchen Sätzen der Gestalt „ν existiert nicht“ ausgegangen wird, und zwar von der *ontischen Wahrheit* dieser Sätze (denn ν ist ja nun auf jeden Fall ein referenzieller, *bezugnehmender* Name), ist wegen des **Pi**-Alpha**-Theorems $\neg E(a) \rightarrow \neg\forall xE(x)$ [mit RT3 aus dem Einsetzungsfall $\forall xE(x) \rightarrow E(a)$ von A6] auch von der Wahrheit von „Nicht alles existiert“ [formal repräsentiert durch $\neg\forall xE(x)$] auszugehen, und wegen $\neg E(a) \rightarrow \exists_{\forall}x\neg E(x)$ [ein Einsetzungsfall vonP**T1] zudem von der Wahrheit von „Manches existiert nicht“ [formal repräsentiert durch $\exists_{\forall}x\neg E(x)$].

In einem gewissen Sinn aufgefasst kann also der selbstwidersprüchlich klingende Satz „Es gibt etwas, was es nicht gibt“, bekannt als *Meinongs Schocker*, valide, insbesondere wahr sein; nämlich dann, wenn als seine formale Repräsentation $\exists_{\forall}x\neg E(x)$ gilt [wo „$\exists_{\forall}$“ in **Pi**-Alpha** via D4** dasselbe besagt wie „$\exists$“ in **Pi-Alpha** – nämlich: nicht mehr als „Mindestens ein“ –, da ja „$\forall$“ in **Pi**-Alpha** dasselbe besagt wie in **Pi-Alpha**: so viel wie „Alle“]. In einem gewissen *anderen* Sinn aufgefasst, ist es aber unmöglich, dass das selbstwidersprüchlich klingende „Es gibt etwas, was es nicht gibt“ valide ist, weil es, aufgefasst in jenem anderen Sinn, *in der Tat* selbstwidersprüchlich ist; nämlich dann, wenn als seine formale Repräsentation $\exists x\neg E(x)$ gilt [wo „$\exists$“ – *gelesen* als „Es gibt ein [Es gibt etwas]“ – wie im *meinongianisch interpretierten* **Kalkül Pi*-Alpha** und im Kalkül **Pi**-Alpha**, mehr besagt als „Mindestens ein“, nämlich so viel wie „Mindestens ein existierendes$_M$“].

P**T6d hat allerdings ein Pendant, aber es ist nicht $\forall xE(x) \leftrightarrow \forall_{\exists} xE(x)$, sondern vielmehr $\forall x\neg E(x) \leftrightarrow \forall_{\exists} x\neg E(x)$:

P**T9: $\forall x\neg E(x) \leftrightarrow \forall_{\exists} x\neg E(x)$

1. $\forall x\neg E(x) \rightarrow \forall_{\exists} x\neg E(x)$ P**T3a {Einsetzungsfall}
2. $\forall_{\exists} x\neg E(x), E(a) \rightarrow \neg E(a)$ P**T2 {Einsetzungsfall}
3. $\forall_{\exists} x\neg E(x) \rightarrow \neg E(a)$ RT10 {GIS3} (2)
4. $\forall_{\exists} x\neg E(x) \rightarrow \forall x\neg E(x)$ R8 (3)
5. $\forall x\neg E(x) \leftrightarrow \forall_{\exists} x\neg E(x)$ DEF$\leftrightarrow$ (1, 4)

Man beachte: $\rightarrow \forall x\exists_{\forall} y(x = y)$ ist in **Pi**-Alpha** beweisbar, $\rightarrow \forall x\exists y(x = y)$, was wegen D3* auf $\rightarrow \forall xE(x)$ hinausläuft, aber *nicht*. Und wiederum: $\rightarrow \forall_{\exists} x\exists y(x = y)$ ist in **Pi**-Alpha** beweisbar, $\rightarrow\forall x\exists y(x = y)$ aber, wie gesagt, *nicht*.

P**T10: $\rightarrow \forall x\exists_{\forall} y(x = y)$

1. $\rightarrow a = a$ A8
2. $a = a \rightarrow \exists_{\forall} y(a = y)$ P**T1 {Einsetzungsfall: „y“ für „x“, „a = _“ für „F“}
3. $\rightarrow \exists_{\forall} y(a = y)$ R3 (2, 1)
4. $\rightarrow \forall x\exists_{\forall} y(x = y)$ R8 (3)

P**T11: $\rightarrow \forall_{\exists} x\exists y(x = y)$

1. $E(a) \rightarrow a = a$ A8, R2
2. $E(a), a = a \rightarrow \exists y(a = y)$ A7*, R1
3. $E(a) \rightarrow \exists y(a = y)$ R3 (2, 1)
4. $\rightarrow \forall_{\exists} x\exists y(x = y)$ P**RT2 (3)

Es ist ersichtlich: $\forall$ ist in **Pi**-Alpha** – geradeso wie in **Pi-Alpha** – der Operator der *Allheit*, der „Alle“-Operator oder Allquantor; während $\forall_{\exists}$ in **Pi**-Alpha** (via D5**) der Operator der *existenzumschränkten Allheit*, der „Alle *existierende*“-Operator ist. Wiederum: $\exists$ ist in **Pi**-Alpha** – geradeso wie in **Pi*-Alpha** – der Operator der *existenzumschränken Manchheit*, der „Mindestens ein *existierendes*“-Operator, derjenige Operator, der den Namen

„Existenzoperator“ oder „Existenzquantor“ wirklich verdient, und zwar in **Pi**-Alpha** – wegen der Präsenz von ∀-*im*-**Pi-Alpha**-*Sinn* [mit zugehörigem Namenformelverständnis] neben ihm– *in meinongianischer Interpretation*; während $\exists_\forall$ in **Pi**-Alpha** (via D4**) der Operator der *Manchheit*, der „Manches“-Operator oder „Mindestens ein“-Operator ist – geradeso wie ∃ in **Pi-Alpha**. Allheit ist logisch stärker als existenzumschränkte Allheit [will sagen: Aus „Für alle …“ ergibt sich ohne Weiteres logisch „Für alle existierenden …“, aber nicht auch umgekehrt aus „Für alle existierenden …“ ohne Weiteres logisch „Für alle …“], und existenzumschränkte Manchheit ist logisch stärker als Manchheit [will sagen: Aus „Für manches existierende …“ ergibt sich ohne Weiteres logisch „Für manches …“, aber nicht auch umgekehrt aus „Für manches …“ ohne Weiteres logisch „Für manches existierende …“].

Es besteht eine gewisse Versuchung, bei $\exists_\forall$ – in **Pi**-Alpha**-Deutung – vom „Operator der schwachen Existenz“ oder vom „schwachen Existenzquantor“ zu sprechen, bei ∃ – in **Pi**-Alpha** -Deutung – hingegen vom „Operator der starken Existenz“ oder vom „starken Existenzquantor“; der Versuchung sollten aber nur diejenigen nachgeben, die (wie ich) kein Problem damit haben, „Es gibt“ als – umgangssprachlich – plurivok anzusehen und auf dieser Grundlage *mehrere* Existenzbegriffe auszumachen und *nebeneinander* anzuerkennen (gar in einer idealen Wissenschaftssprache). [Man beachte, dass dies *nicht* dasselbe ist wie bloß anzuerkennen, dass es mehrere Interpretationen von „Es gibt“ gibt; eben dies anerkennen tun auch diejenigen, die a priori die Univozität von „Es gibt“ postulieren; sie meinen jedoch, dass obwohl es mehrere Interpretationen von „Es gibt“ gibt, doch *nur eine* dieser Interpretationen hinreichend verständlich, *nur eine* richtig, *nur eine* rational legitim sei; für sie gibt es demnach *nur einen* Existenzbegriff.]

{Hat man mit *mehreren* Existenzbegriffen *nebeneinander* kein Problem, so lassen sich die Dinge in **Pi**-Alpha** wie folgt entwickeln. Zum einen: $E_2(\tau) =_{Def} E(\tau) =_{Def} \exists\upsilon(\tau = \upsilon)$ [Definition der *starken Existenz*]; zum anderen: $E_1(\tau) =_{Def} \exists_\forall\upsilon(\tau = \upsilon) =_{Def} \neg\forall\upsilon\neg(\tau = \upsilon)$ [Definition der *schwachen Existenz*]. Es lässt sich dann leicht in **Pi**-Alpha** zeigen: (i) $E_2(a) \rightarrow E_1(a)$ [aber nicht auch $E_1(a) \rightarrow E_2(a)$]; (ii) $\exists xF(x) \leftrightarrow \exists x(E_2(x) \wedge F(x))$; (iii) $\exists_\forall xF(x) \leftrightarrow \exists_\forall x(E_1(x) \wedge F(x))$; (iv) $\exists xF(x) \rightarrow \exists_\forall xF(x)$ [aber nicht auch $\exists_\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$]. Angesichts von (iii) kann man auch $\exists_\forall$ als „Existenzquantor“ bezeichnen; und es kann dann $\exists_\forall$ – angesichts von (ii) und (iv) – „der *schwache* Existenzquantor“ heißen, während ∃ „der *starke* Existenzquantor“ heißt. Des Weiteren haben wir: $\rightarrow \exists_\forall yE_1(y)$ ist in **Pi**-Alpha** beweisbar, $\rightarrow \exists_\forall yE_2(y)$ aber *nicht*. Denn $\rightarrow \exists_\forall yE_1(y)$ ist wegen D4** und $E_1(\tau) =_{Def} \exists_\forall\upsilon(\tau = \upsilon)$ „dasselbe“ wie $\rightarrow \neg\forall y\neg\neg\forall x\neg(y = x)$, was **Pi**-Alpha**-beweisbar auf $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$ hinausläuft – *und* $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$ *ist in* **Pi**-Alpha** *beweisbar*. $\rightarrow \exists_\forall yE_2(y)$ jedoch ist wegen $E_2(\tau) =_{Def} E(\tau)$ „dasselbe“ wie $\rightarrow \exists_\forall yE(y)$, was **Pi**-Alpha**-

beweisbar [wegen P**T6d ist das evident] auf $\rightarrow \exists yE(y)$ hinausläuft, also mit D3* auf $\rightarrow \exists y\exists x(y = x)$ – *und* $\rightarrow \exists y\exists x(y = x)$ *ist in* **Pi**-Alpha** *nicht beweisbar*.}

Die logischen Verhältnisse der vier Operatoren sind eingängiger, wenn die Zusammengehörigkeit sowohl von $\forall$ und $\exists_\forall$ als auch von $\exists$ und $\forall_\exists$ typographisch stärker als bisher angezeigt wird; das geschieht idealerweise (das schon Gegebene *vorausgesetzt*) mittels der folgenden beiden Definitionen:

D6** $\exists_\exists \upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \exists\upsilon\sigma[\upsilon]$

D7** $\forall_\forall \upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$

Vorbereitend für das Weitere in diesem Kapitel – noch vor den Anwendung von D6** und D7** – kommen die folgenden beiden Theoreme von **Pi**-Alpha** zu Aufstellung und Beweis:

P**T12: $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\neg\exists x\neg\neg F(x)$ {Dies ist auch ein Theorem von **Pi*-Alpha** und, mit etwas anderer Beweisführung und anderem Sinn, auch von **Pi-Alpha**.}

1. $E(a), F(a) \rightarrow \neg\neg F(a)$	T3, R2, R1
2. $E(a), \neg\neg F(a) \rightarrow \exists x\neg\neg F(x)$	A7*, R1
3. $E(a), F(a) \rightarrow \exists x\neg\neg F(x)$	RT7 (1, 2)
4. $F(a), E(a) \rightarrow \exists x\neg\neg F(x)$	R1 (3)
5. $\exists xF(x) \rightarrow \exists x\neg\neg F(x)$	R9* (4)
6. $\exists x\neg\neg F(x) \rightarrow \neg\neg\exists x\neg\neg F(x)$	T3
7. $\exists xF(x) \rightarrow \neg\neg\exists x\neg\neg F(x)$	RT7 (5, 6)
8. $E(a), \neg\neg F(a) \rightarrow F(a)$	T2, R2, R1
9. $E(a), F(a) \rightarrow \exists xF(x)$	A7*, R1
10. $E(a), \neg\neg F(a) \rightarrow \exists xF(x)$	RT7 (8, 9)
11. $\neg\neg F(a), E(a) \rightarrow \exists xF(x)$	R1 (10)
12. $\exists x\neg\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$	R9* (11)
13. $\neg\neg\exists x\neg\neg F(x) \rightarrow \exists x\neg\neg F(x)$	T2
14. $\neg\neg\exists x\neg\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$	RT7 (13, 12)
15. $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\neg\exists x\neg\neg F(x)$	DEF$\leftrightarrow$ (7, 14)

P**T13: $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg F(x)$ {Dies ist auch ein Theorem von **Pi-Alpha** und, mit etwas anderer Beweisführung und anderem Sinn, auch von **Pi*-Alpha**.}

1. $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$ A6
2. $F(a) \rightarrow \neg\neg F(a)$ T3
3. $\forall xF(x) \rightarrow \neg\neg F(a)$ RT7 (1, 2)
4. $\forall xF(x) \rightarrow \forall x\neg\neg F(x)$ R8 (3)
5. $\forall x\neg\neg F(x) \rightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg F(x)$ T3
6. $\forall xF(x) \rightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg F(x)$ RT7 (4, 5)
7. $\neg\neg\forall x\neg\neg F(x) \rightarrow \forall x\neg\neg F(x)$ T2
8. $\forall x\neg\neg F(x) \rightarrow \neg\neg F(a)$ A6
9. $\neg\neg\forall x\neg\neg F(x) \rightarrow \neg\neg F(a)$ RT7 (7, 8)
10. $\neg\neg F(a) \rightarrow F(a)$ T2
11. $\neg\neg\forall x\neg\neg F(x) \rightarrow F(a)$ RT7 (9, 10)
12. $\neg\neg\forall x\neg\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$ R8 (11)
13. $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg F(x)$ DEF↔ (6, 12)

Und nun:

P**T14a: $\forall_{\exists} xF(x) \leftrightarrow \neg\exists_{\exists} x\neg F(x)$

1. $\forall_{\exists} xF(x) \leftrightarrow \forall_{\exists} xF(x)$ A1
2. $\forall_{\exists} xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ D5** (1)[102]
3. $\forall_{\exists} xF(x) \leftrightarrow \neg\exists_{\exists} x\neg F(x)$ D6** (2)

P**T14b: $\exists_{\exists} xF(x) \leftrightarrow \neg\forall_{\exists} x\neg F(x)$

1. $\exists_{\exists} xF(x) \leftrightarrow \exists_{\exists} xF(x)$ A1
2. $\exists_{\exists} xF(x) \leftrightarrow \exists xF(x)$ D6** (1)
3. $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\neg\exists x\neg\neg F(x)$ P**T12
4. $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg\forall_{\exists} x\neg F(x)$ D5** (3) {ersetzt wird „$\neg\exists x\neg$“ durch „$\forall_{\exists} x$“ in „$\neg\neg\exists x\neg\neg$“}

[102] Bei der Anwendung von Definitionen – ob vom Definiens zum Definiendum gehend, oder vom Definiendum zum Definiens – ist die *Uniformität* der Substitution (des Definiendums fürs Definiens, oder umgekehrt) in der jeweiligen Formel der Einsetzung *nicht* vonnöten. Es geht ja dabei um den Austausch von *per Konvention synonymen* Ausdrücken füreinander, und einen solchen Austausch darf man auch *rein lokal* in einer Formel vornehmen. Es geschieht dadurch nur eine typographische Veränderung ohne logische Auswirkungen (während die *psychologischen* Auswirkungen immens sein können).

5. $\exists_{\exists}xF(x) \leftrightarrow \neg\forall_{\exists}x\neg F(x)$ RT18 {erste Hälfte} (2, 4)

P**T15a: $\exists_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \neg\forall_{\forall}x\neg F(x)$

1. $\exists_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \exists_{\forall}xF(x)$ A1
2. $\exists_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ D4** (1)
3. $\exists_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \neg\forall_{\forall}x\neg F(x)$ D7** (2)

P**15b: $\forall_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \neg\exists_{\forall}x\neg F(x)$

1. $\forall_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \forall_{\forall}xF(x)$ A1
2. $\forall_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \forall xF(x)$ D7** (1)
3. $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg F(x)$ P**T13
4. $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists_{\forall}x\neg F(x)$ D4** (3) {ersetzt wird „$\neg\forall x\neg$“ durch „$\exists_{\forall}x$“ in „$\neg\neg\forall x\neg\neg$“}
5. $\forall_{\forall}xF(x) \leftrightarrow \neg\exists_{\forall}x\neg F(x)$ RT18 (2, 4)

Der meinongianische Zauber von **Pi**-Alpha** kollabiert und schnurrt zu (mit überflüssigen Definitionen verkrustetem) **Pi-Alpha** zusammen – oder nüchtern, nicht bildlich gesprochen: der resultierende Kalkül ist mit **Pi-Alpha** deduktiv äquivalent –, wenn man zu **Pi**-Alpha** als Axiom hinzunimmt: $\rightarrow$ E(a), oder *deduktiv äquivalent bzgl.* **Pi**-Alpha** (angesichts von A6 und R8): $\rightarrow \forall$xE(x).

{Bei **Pi*-Alpha** – erinnern wir uns – kommt es ebenfalls zum Kollaps auf **Pi-Alpha**, wenn man als Axiom $\rightarrow$ E(a) hinzunimmt; $\rightarrow \forall$xE(x) dagegen ist bei **Pi*-Alpha** *von vornherein* ein Theorem [P*T1] und ist bzgl. **Pi*-Alpha** keineswegs mit $\rightarrow$ E(a) deduktiv äquivalent.}

Seinen ganzen Zauber entfaltet **Pi**-Alpha** freilich erst als Teil des deduktiv stärkeren Kalküls **Pi**2-Alpha**, der durch die Hinzunahme, als Grundprinzip, von $\rightarrow \exists_{\forall}y\neg$E(y) – des *Meinongschen Axioms* – aus **Pi**-Alpha** hervorgeht.

Abschließend zu diesem Kapitel ein Vergleich:

(a) **Pi-Alpha** erlaubt die Leere des Grundbereichs [nämlich: des Grundbereichs der zugrundeliegenden Normalsprache] *nicht*: $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$, oder deduktiv äquivalent bzgl. **Pi-Alpha**: $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$, ist in **Pi-Alpha** beweisbar.

(b1) **Pi*-Alpha** *in freilogischer Interpretation* erlaubt die Leere des Grundbereichs: $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$, oder deduktiv äquivalent bzgl. **Pi*-Alpha**: $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$, ist in **Pi*-Alpha** *nicht* beweisbar.

(b1´) **Pi*2-Alpha** – d. h.: **Pi*-Alpha** + $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$ – *in freilogischer Interpretation* erlaubt die Leere des Grundbereichs *nicht*: $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$, und $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$ nicht minder, ist in **Pi*2-Alpha** beweisbar.

(b2) **Pi*-Alpha** *in meinongianischer Interpretation* erlaubt die Leere des Grundbereichs *nicht* [denn gemäß dieser Interpretation bezeichnet ja jeder Name etwas – etwas im Grundbereich]. Zwar ist $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$ – oder mit D3*: $\rightarrow \exists y E(y)$ – und $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$ in **Pi*-Alpha** *nicht* beweisbar, aber das besagt *in meinongianischer Interpretation* von **Pi*-Alpha** nicht, dass die Leere des Grundbereichs zugelassen wird, sondern nur, dass zugelassen wird, dass der (unweigerlich) nichtleere Grundbereich *nur Nichtexistierendes* enthält.

(b2´) **Pi*2-Alpha** – d. h.: **Pi*-Alpha** + $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$ – *in meinongianischer Interpretation* erlaubt die Leere des Grundbereichs nach wie vor *nicht*, da sie schon von **Pi*-Alpha** *in meinongianischer Interpretation* nicht erlaubt wird; die Beweisbarkeit von $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$ und des damit (nach wie vor) deduktiv äquivalenten $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$ in **Pi*2-Alpha** besagt *in der meinongianisches Interpretation* von **Pi*2-Alpha** *nicht*, dass der Gundbereich nichtleer zu sein hat, sondern vielmehr, dass der (unweigerlich) nichtleere Grundbereich *Existierendes* zu enthalten hat [neben Nichtexistierendem, oder auch *nicht* neben Nichtexistierendem].

(c) **Pi**-Alpha** erlaubt die Leere des Grundbereichs *nicht*, denn die Schlussformel $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$, die genauso wie in **Pi-Alpha** aufzufassen ist, ist in **Pi**-Alpha** beweisbar; eine deduktive Äquivalenz zwischen $\rightarrow \exists y \exists x(y = x)$ und $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$ besteht nun aber bzgl. **Pi**-Alpha** nicht. Was **Pi**-Alpha** offenlässt, ist, ob der Grundbereich [der zugrundeliegenden Normalsprache] nur aus Existierenden besteht, oder nur aus Nichtexistierenden, oder sowohl aus Existierenden als auch aus Nichtexistierenden (wobei in jedem Fall *Existenz* im starken, meinongianischen Sinn aufzufassen ist; was – da definitorisch feststeht: $E(\tau) =_{Def} \exists\upsilon(\tau = \upsilon)$ [D3*] – bedeutet, dass $\exists\upsilon$ – *lies*: „Es gibt ein υ“ – *mehr* besagt, als „Für mindestens ein υ“).

(c´) **Pi**2-Alpha** – d. h.: **Pi**-Alpha** + → ∃∀y¬E(y) [m. a. W. unter Verwendung der Definitionen D4** und D3*: **Pi**-Alpha** + ¬∀y¬¬∃x(y = x), welcher Kalkül deduktiv äquivalent mit **Pi**-Alpha** + ¬∀y∃x(y = x) ist] – lässt nicht mehr zu, dass der Grundbereich nur aus Existierenden besteht. Erst mit **Pi**2-Alpha** wird die meinongianische Motivation gänzlich erfüllt.

(d) Fügt man **Pi**-Alpha** neben → ∃∀y¬E(y) (dem *Meinongschen Axiom*) auch → ∃∀yE(y) axiomatisch hinzu – mit letzterer Schlussformel ist bzgl. **Pi**-Alpha** deduktiv äquivalent: → ¬∀y¬E(y) wegen D**4, und → ∃yE(y) wegen P**T6d –, so lässt der resultierende Kalkül – nennen wir ihn „**Pi**3-Alpha**" – nun auch nicht mehr zu, dass der Grundbereich nur aus Nichtexistierenden besteht.

Und diesbezüglich noch eine abschließende Frage und ihre Antwort(en):

Welche der beiden Schlussformeln → ∃∀y¬E(y) und → ∃∀yE(y) verdient es aus *logischer* Perspektive *mehr*, zu **Pi**-Alpha** axiomatisch hinzugefügt zu werden? Dabei sei vorausgesetzt: Man ist zunächst für *beide* Hinzufügungen offen und meint nicht etwa *a priori*, **Pi**-Alpha** müsse *zwingend* (um einen „philosophisch vernünftigen" Kalkül zu erhalten) um eine *andere* Schlussformel als die beiden erwähnten axiomatisch ergänzt werden, nämlich um → ∀∀yE(y) [d. h.: → ∀yE(y), gemäß D7**]; *welcher* (dritten) Schlussformel → ∃∀y¬E(y) **Pi**-Alpha**-logisch widerspricht [siehe P**T15b, „E" für „F"] und aus *welcher* → ∃∀yE(y) **Pi**-Alpha**-logisch folgt, wie leicht einzusehen ist:

1. ∀yE(y) → ∃∀yE(y)	P**T4a {Einsetzungsfall}
2. ∀∀yE(y) → ∃∀yE(y)	D7** (1)
3. → ∀∀yE(y)	Annahme [als Axiom]
4. → ∃∀yE(y)	R3 (2, 3).

Eine mögliche Antwort auf die gestellte Frage ist, dass → ∃∀y¬E(y) und → ∃∀yE(y) *es gleichermaßen logisch wohlverdienen*, zu **Pi**-Alpha** axiomatisch hinzugefügt zu werden; dann ist es am besten, neben **Pi**-Alpha** und **Pi**2-Alpha** auch noch **Pi**3-Alpha**, den in (d) definierten Kalkül, wertzuschätzen, *und ihn besonders*. Angesichts einer einigermaßen umfassenden Normalsprache, die wahre Aussagen wie „Pegasus existiert nicht, aber Gigolo existiert", „Phlogiston existiert nicht, aber Sauerstoff existiert" enthält (welche Aussagen in dieser Normalsprache meinongianisch, *nicht* freilogisch, aufgefasst werden, also so aufgefasst werden, wie es hinsichtlich Namenreferenz und Quantifikation **Pi**-Alpha** angemessen

ist), erscheint jene Antwort – bei der die gestellte Frage „links liegen“ gelassen wird – ganz die richtige zu sein.

Aber ist es nicht *in sich kontingent*, dass etwas [meinongianisch] existiert? Hätte nicht auch nichts existieren können?[103] Wenn dem so ist, so kann $\rightarrow \exists_{\forall} yE(y)$ nicht gut zu **Pi**-Alpha** axiomatisch hinzugefügt werde. Denn dadurch würde ja $\rightarrow \exists_{\forall} yE(y)$ *logisch valide* werden in der Weise der *Logik*, die der Kalkül, welcher durch diese Hinzufügung entsteht, ausformuliert; wenn es jedoch *in sich kontingent* ist, dass etwas existiert, so kann $\rightarrow \exists_{\forall} yE(y)$ – die **Pi**-Alpha**-Repräsentation von „Etwas existiert“ – nun gerade *nicht* logisch valide sein, und zwar in Weise welcher Verstärkung der **Pi**-Alpha**-Logik auch immer. Ganz generell gilt: Eine formelsprachliche Repräsentation eines normalsprachlichen Satzes[104] kann nicht logisch valide sein – in Weise welcher Logik auch immer –, *wenn* das, was der Satz sagt, nicht in sich notwendig ist, sondern eventuell gar nicht der Fall ist, oder zwar der Fall ist, aber nur kontingenterweise der Fall ist.

{Durch diese Gedankengänge ist offensichtlich auch **Pi*2-Alpha** *in meinongianischer Interpretation* betroffen (wobei das, was ausgehend von **Pi**-Alpha** mit $\rightarrow \exists_{\forall} yE(y)$ *oder* mit $\rightarrow \exists yE(y)$ axiomatisch gesagt werden kann, ausgehend von **Pi*-Alpha** nur mit $\rightarrow \exists yE(y)$ gesagt werden kann). Und ist durch analoge Gedankengänge nicht auch **Pi*2-Alpha** *in freilogischer Interpretation* betroffen, ja, am Ende sogar **Pi-Alpha**? Denn ist es nicht auch in sich kontingent, dass etwas existiert, *wenn* „existiert“ *freilogisch* interpretiert wird? Das Extra-Axiom (gegenüber **Pi*-Alpha**) von **Pi*2-Alpha**, $\rightarrow \exists yE(y)$, ist unter Anwendung von D3* $\rightarrow \exists y\exists x(y = x)$ [oder genauso gut: $\rightarrow \exists y\exists z(y = z)$; oder genauso gut: $\rightarrow \exists y\exists u(y = u)$; …], was in *freilogischer* Interpretation von **Pi*2-Alpha** haargenau dasselbe besagt wie in **Pi-Alpha** (wo es ein Theorem ist), nämlich: *dass etwas mit etwas identisch ist*. Ist denn nicht auch *dies* in sich kontingent? Wenn es so ist, dann sind **Pi*2-Alpha** *in freilogischer Interpretation* und **Pi-Alpha** zwar gewissermaßen „logische“ Kalküle, aber sie formulieren keine *Logik*, keine *reine* Logik. Ja, auch **Pi**-Alpha** und **Pi**2-Alpha** und **Pi**3-Alpha** formulieren dann [bzw. *schon* dann] keine *Logik*; denn in allen drei Kalkülen ist $\rightarrow \exists_{\forall} y\exists_{\forall} x(y = x)$ beweisbar, m. a. W. [gemäß D4**]: $\rightarrow \neg\forall y\neg\neg\forall x\neg(y = x)$, womit aber auch $\rightarrow \neg\forall y\forall x\neg(y = x)$ in allen drei Kalkülen beweisbar ist, welche (prämissenlose) Schlussformel in allen drei Kalkülen, wie auch in **Pi-Alpha**, dasselbe besagt, *was* $\rightarrow \exists y\exists x(y = x)$ *in* **Pi-Alpha** *besagt*, nämlich: *dass etwas mit etwas identisch ist*.

[103] Von einer Bejahung dieser Fragen geht die berühmte leibnizsche Frage „Warum ist etwas und nicht vielmehr nichts?“ aus – in welcher Frage „ist“ dasselbe wie „existiert“ bedeutet, wie es ja einmal üblich gewesen ist (und nicht nur im Sprachgebrauch der Philosophen).

[104] Bei manchen normalsprachlichen Sätzen – wie z. B. bei „Etwas [manches] existiert“, „Alles ist mit sich selbst identisch“, „Etwas ist mit etwas identisch“, usw. – wird die Repräsentation ihrer logischen Form zu einer formelsprachlichen Repräsentation ihrer [der Sätze] selbst. Die formelsprachliche Repräsentation eines normalsprachlichen Satzes [und nicht bloß seiner logischen Form] bedeutet genau dasselbe wie dieser.

Wenn es tatsächlich so ist (doch ist es so tatsächlich?), dass es in sich kontingent ist, dass etwas existiert, und zwar egal, ob „existiert“ meinongianisch oder aber freilogisch interpretiert wird, dann formuliert von allen bisher betrachteten prädikatenlogische Kalkülen allein **Pi*-Alpha** eine *Logik*, eine *reine* Logik, und zwar gleichgültig, ob man **Pi*-Alpha** in freilogischer oder in meinongianischer Interpretation nimmt. Damit wäre **Pi*-Alpha** herausragend ausgezeichnet, sogar gegenüber dem als klassisch geltenden Kalkül **Pi-Alpha**.}

Mithin gilt des Weiteren: Ein Kalkül (ob Satzformelkalkül oder Schlussformelkalkül), der eine *Logik* formuliert (und das *sollen* ja alle in diesem Buch betrachteten Kalküle: *alle* Prinzipien von ihnen *sollen* in der Weise einer jeweiligen *Logik* logisch valide sein), kann nicht ein Axiom oder Theorem führen, welches das formale Äquivalent der Aussage „Etwas [oder: Manches] *existiert* [im *meinongianischen* Sinn]“ ist, *wenn* es in sich kontingent ist, dass etwas [meinongianisch] existiert; denn wenn *dies* in sich kontingent ist, dann kann jenes formale Äquivalent nicht logisch valide sein, in Weise welcher *Logik* auch immer, und steht somit außerhalb des Sachrahmens aller *Logiken*. Somit: *Wenn* es in sich kontingent ist, dass etwas existiert, so verdient es $\rightarrow \exists_{\forall} yE(y)$ *überhaupt nicht*, zu **Pi**-Alpha** axiomatisch hinzugefügt zu werden, *sofern* dadurch die Formulierung einer *Logik* hervorgehen soll – und das soll es ja.

$\rightarrow \exists_{\forall} y\neg E(y)$ hingegen verdient, unter derselben Voraussetzung [nämlich: es soll dadurch die Formulierung einer *Logik* hervorgehen], *gar sehr* die axiomatische Hinzufügung zu **Pi**-Alpha**, wodurch **P**2-Alpha** entsteht; ist es doch in sich notwendig, dass etwas *nicht* existiert, da es in sich notwendig ist, dass, z. B., Pegasus [ein unvollständiger Gegenstand!] *nicht* existiert. Die formelsprachliche Repäsentation von „Etwas existiert nicht“ im **Pi**-Alpha**-Modus, d. h.: $\rightarrow \exists_{\forall} y\neg E(y)$, kann also getrost als logisch valide in der Weise der durch **P**2-Alpha** formulierten Logik angesehen werden. Gegen eine axiomatische Hinzufügung von $\rightarrow \exists_{\forall} y\neg E(y)$ zu **Pi**-Alpha** (wodurch eine meinongsche Prädikatenlogik – der Motivation für solche Logiken folgend – nur weiter ausgebaut wird) spricht nichts.

Diese *Bevorzugung* von $\rightarrow \exists_{\forall} y\neg E(y)$ gegenüber $\rightarrow \exists_{\forall} yE(y)$, was das Recht auf Beförderung zum Axiom neben den schon gegebenen Grundprinzipien von **Pi**-Alpha** angeht, ist allerdings eine Bevorzugung *unter einer Bedingung*: Die Bevorzugung besteht dann, *wenn* es *in sich kontingent* [also *nicht* in sich notwendig] ist, dass etwas existiert. Wenn es hingegen *in sich notwendig* ist, dass etwas existiert, so hat $\rightarrow \exists_{\forall} yE(y)$ dasselbe Recht auf Beförderung zum **Pi**-Alpha** verstärkenden und vergrößernden (dabei *das Logische* nicht durchstoßenden) Axiom wie $\rightarrow \exists_{\forall} y\neg E(y)$ [welche letztere Schlussformel dieses Recht hat, weil es, wie

gesehen, in sich notwendig ist, dass etwas *nicht* existiert]. Wie steht es also um die In-sich-Notwendigkeit dessen, dass etwas existiert, und zwar im meinongianischen Sinn von „existiert“ [auf welchen es hier in erster Linie ankommt], wonach „existiert“ *mehr* besagt als „mit etwas identisch sein“? Beispiele fallen einem ein, wie die Zahl 2 oder Gott. Aber die nicht enden wollende Diskussion darüber, ob die Namen „die Zahl 2“ und „Gott“ denn überhaupt *etwas* bezeichnen [von etwas Existierendem+ oder etwas Existierendem$_M$ noch gar nicht zu reden], zeigt schon wie zweifelhaft diese angeblichen Beispiele sind.

Am ehesten geht es noch so: „dass etwas existiert“ ist der Name eines Sachverhalts [nämlich des Sachverhalts, dass etwas existiert]; ebenso ist „dass nichts existiert“ der Name eines Sachverhalts [nämlich der Name des dem erstgenannten Sachverhalt kontradiktorisch gegenüberstehenden Sachverhalts]. Und nun fasst man *das Bestehen* von Sachverhalten auf als diejenige Gestalt, die die [meinongianische] Existenz bei [meinongianisch] existierenden Sachverhalten annimmt; demnach: Sachverhalte existieren [meinongianisch] genau dann, wenn sie bestehen. Angenommen nun, der Sachverhalt, dass etwas existiert, *besteht nicht*; also besteht der Sachverhalt, dass nichts existiert (denn einer der beiden Sachverhalte muss ja bestehen), also existiert [meinongianisch] etwas [nämlich der Sachverhalt, dass nichts existiert]. Angenommen nun im Gegenteil, der Sachverhalt, dass etwas existiert, *besteht*; also existiert [meinongianisch] etwas [nämlich der Sachverhalt, dass etwas existiert]. In jedem der beiden Fälle (es sind alle Fälle, die zu berücksichtigen sind) ergibt sich also: Etwas existiert [meinongianisch].

Zeigt dieses Argument, dass es *in sich notwendig* ist, dass etwas [meinongianisch] existiert? In dem Maße, in dem dies zweifelhaft ist, verdient es $\rightarrow \exists_\forall y \neg E(y)$ immer noch mehr als $\rightarrow \exists_\forall y E(y)$ zu **Pi**-Alpha** axiomatisch hinzugefügt zu werden.

{Das eben angegebene Argument zeigt, wenn es erfolgreich ist, nicht nur, dass es in sich notwendig ist, dass etwas *meinongianisch* existiert, d. h.: etwas existiert, wo „existiert“ *mehr* sagt als „ist mit etwas identisch“, sondern auch (oder vielmehr: erst recht), dass es in sich notwendig ist, dass etwas *freilogisch* existiert, d. h.: dass etwas *mit etwas identisch ist*. Denn aus der meinongianischen Existenz ergibt sich zwingend die freilogische. Unabhängig von dem oben angegebenen Argument kann für die In-sich-Notwendigkeit der *freilogischen* Existenz *von etwas* aber auch wie folgt argumentiert werden: Angenommen, nichts ist mit etwas identisch; also besteht der Sachverhalt, dass nichts mit etwas identisch ist, und ist dabei mit nichts identisch – was absurd ist. Also: Etwas ist mit etwas identisch.

Zeigt dieses Argument, dass es *in sich notwendig* ist, dass etwas *freilogisch e*xistiert?[105] In dem Maße, in dem dies zweifelhaft ist, *in dem Maße* verdient es $\rightarrow \exists yE(y)$ nicht, zu **Pi*-Alpha** *in freilogischer Interpretation* axiomatisch hinzugefügt zu werden. Die Hinzufügung ist freilich im vorausgehenden Kapitel erfolgt und dadurch der Kalkül **Pi*2-Alpha** *in freilogischer Interpretation* hervorgegangen. Ob dieser Kalkül eine (reine) *Logik* formuliert, steht freilich etwas dahin.

Wie in der Anmerkung, die dieser Anmerkung vorausgeht, schon ausgeführt wurde, wird durch die gewisse Zweifelhaftigkeit der In-sich-Notwendigkeit dessen, *dass etwas mit etwas identisch ist*, ein Schatten auch auf den Kalkül **Pi-Alpha** geworfen, genauer gesagt: auf den Status von **Pi-Alpha**, die Formulierung einer (reinen) *Logik* zu sein. Im Folgenden (im Rest dieses Buches) wird dieser Status aber nicht in Frage gestellt. **Pi-Alpha** gilt – gewissermaßen gewohnheitsrechtlich: aufgrund der Würde seiner Klassizität – als die Formulierung einer *Logik*, einer reinen, ohne jeden kontingent-ontologischen Einschlag.}

[105] Man beachte (wenn es auch offensichtlich ist), dass hier *nicht* argumentiert wurde, dass der Sachverhalt, dass nichts mit etwas identisch ist, doch mit sich selbst identisch ist, *also* dieser Sachverhalt mit etwas identisch ist, *also* etwas mit etwas identisch ist [also wegen der In-sich-Notwendigkeit des Ausgangspunkts die In-sich Notwendigkeit des Endpunkts gegeben ist]. Würde man so argumentieren, so machte man von Instanzen von A7 Gebrauch, was jedenfalls auf freilogischer Grundlage *nicht* erlaubt ist: freilogisch steht zur normalsprachlichen Instanziierung nur A7* zur Verfügung. Es wäre methodologisch fehlerhaft, mit Mitteln, die in einem deduktiven System – hier **Pi*-Alpha** – nicht erlaubt sind, für die deduktive Verstärkung eben dieses Systems zu argumentieren. Mithilfe des erlaubten A7* – näherhin mit dem **Pi*-Alpha**-Theorem P*T6 $[E(b) \rightarrow \exists yE(y)]$ – kommt man allerdings ans angestrebte Ziel, *wenn* denn beispielsweise der Sachverhalt, dass alles mit sich selbst identisch ist, in sich notwendigerweise *freilogisch* existiert, m. a. W.: *wenn* es in sich notwendig ist, dass der Name „der Sachverhalt, dass alles mit sich selbst identisch ist" [selbstverständlich: gegeben sein Sinn] *etwas* bezeichnet. Aber *ist* das in sich notwendig? Viele – solche, die Sachverhalte ontologisch ablehnen – meinen, dass der Name [gegeben sein Sinn] *gar nichts* bezeichne, und zwar in sich notwendigerweise.

10. Die Schlussformelkalküle **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** einer alethisch-modalen Prädikatenlogik mit Identität, aber ohne Kennzeichnung

Auf der Grundlage des in diesem Buch schon Gegebenen könnte man sechs prominente alethisch-modale Prädikatenlogiken (und noch andere solche) betrachten: Sie werden formuliert durch die Kalküle **Gamma** bzw. **Gamma*** *in Kombination mit* der eigens prädikatenlogischen Basis und der identitätslogischen Basis – aber *nicht* der kennzeichnungslogischen Basis – von **Pi-Alpha** bzw. **Pi*-Alpha** bzw. **Pi**-Alpha**. Ich beschränke mich aber hier allein auf die Betrachtung von **Pi-Gamma** (**Gamma** kombiniert mit der eigens prädikatenlogischen und der identitätslogischen Basis von **Pi-Alpha**) und **Pi*-Gamma** (**Gamma** kombiniert mit der eigens prädikatenlogischen und identitätslogischen Basis von **Pi*-Alpha**).

Gamma ist das folgende System (siehe Kapitel 3):

A1 {wie in **Alpha**}

R1 {wie in **Alpha**}

R2 {wie in **Alpha**}

R3 {wie in **Alpha**}

{Die **Gamma**-Definitionen seien zum Verständnis des Folgenden vorausgeschickt.}

GD1 $\sigma > \sigma' =_{Def} \neg\sigma \vee \sigma'$ {= D1 in **Alpha**, **Pi-Alpha** und **Pi*-Alpha**}

GD2 $\Box\sigma =_{Def} \neg\sigma \supset \sigma$

GD3 $\Diamond\sigma =_{Def} \neg\Box\neg\sigma$

GA2a $B, B \supset C \rightarrow B$

GA2b $\neg B \supset B, \neg(\neg B \vee C) \supset \neg B \vee C \rightarrow \neg C \supset C$

GA2c $\neg(B \supset C) \rightarrow \Box\neg(B \supset C)$ {GA2c ist eigentlich: (i) $B \supset C \rightarrow \Box(B \supset C)$; (ii) $\neg(B \supset C) \rightarrow \Box\neg(B \supset C)$; aber (i) erweist sich als überflüssig}

GA2d $\Box(B > C) \rightarrow B \supset C$

GR4 $B \rightarrow C \Rightarrow \rightarrow B \supset C$

A3 {wie in **Alpha**}

R5 {wie in **Alpha**}

A4 {wie in **Alpha**}

R6 {wie in **Alpha**}

A5 {wie in **Alpha**}

R7 {wie in **Alpha**}

Hinzukommt nun bei **Pi-Gamma** der eigens prädikatenlogische Teil und der identitätslogische Teil der Axiomatik von **Pi-Alpha** (unter Ersetzung von D2 durch die Definition GD4, die den Erfordernissen von **Gamma** angepasst ist):

A6 $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$

R8 $\Gamma \rightarrow \sigma[\alpha] \Rightarrow \Gamma \rightarrow \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ und in der „Alle"-Satzformel $\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt.

A7 $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$

R9 $\Gamma, \sigma[\alpha] \rightarrow \sigma' \Rightarrow \Gamma, \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ, in der „Mindestens ein"-Satzformel $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ und in der Satzformel σ' nicht mehr vorkommt.

A8 $\rightarrow a = a$

A9 $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$

GD4 $\exists!\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \wedge \forall\upsilon\forall\upsilon'(\sigma[\upsilon'] \wedge \sigma[\upsilon] > \upsilon' = \upsilon)$ {vgl. D2 in **Pi-Alpha** und **Pi*-Alpha**; GD4 geht durch Ersetzung von „⊃" durch „>" aus D2 hervor}

Und bei **Pi*-Gamma** kommt zu **Gamma** hinzu der eigens prädikatenlogische und der identitätslogische Teil der Axiomatik von **Pi*-Alpha** (abermals unter Ersetzung von D2 durch die Definition GD4, die den Erfordernissen von **Gamma** angepasst ist):

A6* $\forall xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$

R8* $\Gamma, E(\alpha) \rightarrow \sigma[\alpha] \Rightarrow \Gamma \rightarrow \forall\upsilon\sigma[\upsilon]$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ und in der „Alle*“[106]-Satzformel $\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt.

A7* $F(a), E(a) \rightarrow \exists xF(x)$

R9* $\Gamma, \sigma[\alpha], E(\alpha) \rightarrow \sigma' \Rightarrow \Gamma, \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \rightarrow \sigma'$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Satzformelfolge Γ, in der „Es gibt ein“-Satzformel $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ und in der Satzformel σ' nicht mehr vorkommt.

A8 $\rightarrow a = a$

A9 $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$

GD4 $\exists!\upsilon\sigma[\upsilon] =_{Def} \exists\upsilon\sigma[\upsilon] \wedge \forall\upsilon\forall\upsilon'(\sigma[\upsilon'] \wedge \sigma[\upsilon] > \upsilon' = \upsilon)$

D3* $E(\tau) =_{Def} \exists\upsilon(\tau = \upsilon)$ {Es ist schon bei der Erstangabe dieser Definition stipuliert worden, dass die Termformel τ die Variable υ nicht enthält. Die Bezeichnung „D3*“ für die Definition passt zwar nicht in die Benennungssystematik von **Pi*-Gamma**, sie wird aber aus Gründen der Kontinuität zu **Pi*-Alpha** beibehalten.}

Die Frage, ob zu **Pi-Gamma** auch A10 gehört und zu **Pi*-Gamma** auch A10* ist negativ zu beantworten; überhaupt gehören Kennzeichnungsnamenformeln, also Namenformeln der Gestalt $\iota\upsilon\sigma[\upsilon]$, nicht zum Symbolismus von **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma**. Also: Was **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** angeht, ist es, als wäre die Formelsprache *Sigma* ohne Kennzeichnungsnamenformeln, und die zu **Pi-Gamma** bzw. zu **Pi*-Gamma** gehörige Normalsprache muss entsprechend verfasst sein: Kennzeichnungsnamen kommen in ihr nicht vor. (Dazu, warum das so sein muss, siehe das nächste Kapitel, aber auch schon den Schluss *dieses* Kapitels.)

Übernommen werden in **Pi-Gamma** die Theoreme und echtabgeleiteten Schlussregelformeln [gewöhnlich in bewiesenen Schemata verpackt] von **Gamma**, welche die eigens für **Gamma** eingeführten Listenbezeichnungen der folgenden Gestalten haben: GT…, GRT… .[107] In **Pi-Gamma** übernommen werden auch die Theoreme und echtabgeleiteten Schlussre-

[106] Zu „Alle*“ – „Alle“ mit Asteriskus – siehe Fußnote 88.

[107] Generell gilt: Bei durch bewiesene Schemata gegebenen theorematischen Regelformeln trägt die Listenbezeichnung *primär* das bewiesene Schema von [mittels seines Beweises ipso facto mitbewiesenen] Schlussregelformeln bzw. Satzregelformeln.

gelformeln von **Pi-Alpha** (**Alpha** enthaltend), die keine Kennzeichnungsnamenformeln involvieren und nicht von A10 abhängig sind, *sofern* in ihnen gegebenenfalls vorkommendes „⊃“ vollständig durch „>“ ersetzt ist; wobei deren Listenbezeichnungen bekanntlich die folgenden Gestalten haben: T…, RT… . Ist „⊃“ durch „>“ in einem übernommenen Theorem bzw. einer echtabgeleiteten Schlussregelformel von **Pi-Alpha** vollständig ersetzt, so schreibt man bei der Nennung des fraglichen Prinzips in **Pi-Gamma** nun aber statt „T…“ und „RT…“ *dies*: „$T_{>}$...“ und „$RT_{>}$...“. [Kommt „⊃“ in der Formel gar nicht vor, so wird die **Alpha/Pi-Alpha**-Listenbezeichnung unverändert übernommen; die durch „…“ angedeutete Zahlbezeichnung – mittels arabischer Ziffern im Dezimalsystem – bleibt in jedem Fall gleich. $T_{>}$... und $RT_{>}$... sind in **Gamma** bzw. **Pi-Gamma** beweisbar, da T… und RT… in **Alpha** bzw. **Pi-Alpha** beweisbar sind.[108]] Schließlich: Die Listenbezeichnungen der **Pi-Gamma**-*eigenen* Theoreme und theorematischen Schlussregelformeln mögen die folgenden Gestalten haben: PGT…, PGRT… .

Mutatis mutandis: Übernommen werden in **Pi*-Gamma** die Theoreme und echtabgeleiteten Schlussregelformeln von **Gamma**, welche die eigens für **Gamma** eingeführten Listenbezeichnungen der folgenden Gestalten haben: GT…, GRT… . In **Pi*-Gamma** übernommen werden auch die Theoreme und echtabgeleiteten Schlussregelformeln von **Pi*-Alpha** (**Alpha** enthaltend), die keine Kennzeichnungsnamenformeln involvieren und nicht von A10 abhängig sind, *sofern* in ihnen gegebenenfalls vorkommendes „⊃“ vollständig durch „>“ ersetzt ist; wobei deren Listenbezeichnungen bekanntlich die folgenden Gestalten haben: T…, RT…, P*T…, P*R… . Ist „⊃“ durch „>“ in einem Theorem bzw. echtabgeleiteten Schlussregelformel von **Alpha** bzw. **Pi*-Alpha** vollständig ersetzt, so schreibt man bei der Nennung des fraglichen Prinzips in **Pi*-Gamma** nun aber statt „T…“ und „RT…“ bzw. „P*T…“ und „P*RT…“ *dies*: „$T_{>}$ …“ und „$RT_{>}$…“ bzw. „$P*T_{>}$…“ und „$P*RT_{>}$…“. [Kommt „⊃“ in der Formel gar nicht vor, so wird die **Alpha/Pi*-Alpha**-Listenbezeichnung unverändert übernommen; die durch „…“ angedeutete Zahlbezeichnung – mittels arabischer Ziffern im Dezimalsystem – bleibt in jedem Fall gleich. $T_{>}$ … und $RT_{>}$… bzw. $P*T_{>}$… und P*RT… sind in **Gamma** bzw. **Pi*-Gamma** beweisbar, da T… und RT… bzw. P*T… und P*RT… in **Alpha** bzw. **Pi*-Alpha** beweisbar sind.[109]] Schließlich: Die Listenbezeichnungen der **Pi*-Gamma**-*eigenen* Theoreme und theorematischen Schlussregelformeln mögen die folgenden Gestalten haben: P*GT…, P*GRT… .

[108] Wo A2 auf der einen Seite verwendet wird, verwendet man GT1 auf anderen; wo R4 auf der einen Seite verwendet wird, verwendet man GRT2 auf der anderen.
[109] Siehe die vorausgehende Fußnote.

Bei einer prädikatenlogischen Modallogik ist von folgenden *direkten* syntaktischen Verhältnissen zwischen Quantor und Modaloperator auszugehen:

Direkte Verhältnisse „de dicto“ {„MO vor Q“}	Direkte Verhältnisse „de re“ {„Q vor MO“}
$\Box\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$	$\forall\upsilon\Box\sigma[\upsilon]$
$\Diamond\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$	$\forall\upsilon\Diamond\sigma[\upsilon]$
$\Box\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$	$\exists\upsilon\Box\sigma[\upsilon]$
$\Diamond\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$	$\exists\upsilon\Diamond\sigma[\upsilon]$

Im Folgenden wird ein Vergleich zwischen **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** hinsichtlich dessen angestellt, was bzgl. dieser acht syntaktischen Verhältnisse im Kalkül beweisbar ist, insbesondere im Hinblick auf schlussfolgernde Übergänge vom einen Verhältnis zum anderen.

Pi-Gamma

Pi*-Gamma

PGT1: $\rightarrow \Box\exists y(a = y)$

{$\rightarrow \Box\exists y(a = y)$, $\rightarrow \Box E(a)$ sind *keine* **Pi*-Gamma**-Theoreme!}

1. $\rightarrow a = a$ A8
2. $a = a \rightarrow \exists y(a = y)$ A7
3. $\rightarrow \exists y(a = y)$ R3 (2, 1)
4. $\rightarrow \Box\exists y(a = y)$ GRT3 (3)

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass notwendigerweise **a** mit etwas identisch ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass notwendigerweise **a** *existiert*, d. h. gemäß D3*: dass notwendigerweise *es etwas gibt*, womit **a** identisch ist.}

PGT2: $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$

{$\rightarrow \exists y\Box(a = y)$ ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem!}

1. $\rightarrow a = a$ A8
2. $\rightarrow \Box(a = a)$ GRT3 (1)
3. $\Box(a = a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ A7

4. $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$ R3 (3, 2)

{Während es beweisbar sein soll und und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass etwas notwendigerweise so ist, dass **a** mit ihm identisch ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass *es etwas gibt,* womit notwendigerweise **a** identisch ist. Allerdings soll es beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** beweisbar, dass wenn **a** *existiert*, es folgt, dass *es etwas gibt*, womit notwendigerweise **a** identisch ist [worin keineswegs liegt, dass **a** notwendigerweise *existiert*!]:}

P*GT1a: $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$

{Ein Theorem, das wie P*GT1a lautet, aber bei dem „E(a)“ durch „$\exists y(a = y)$“ ersetzt ist, ist in **Pi-Gamma** beweisbar, und zwar trivialerweise angesichts von PGT2.}

1. $\rightarrow a = a$ A8
2. $\rightarrow \Box(a = a)$ GRT3 (1)
3. $E(a), \Box(a = a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ A7*, R1
4. $E(a) \rightarrow \Box(a = a)$ R2 (2)
5. $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ R3 (3, 4)

PGT2 bringt zum Ausdruck, dass aufseiten von **Pi-Gamma** unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln sogenannte „rigide Designatoren“ (der Normalsprache) abbilden, wie es Eigennamen sind, aber auch die Personalpronomen „ich“ und „du“ [immer dann, wenn sie ihrer Bestimmung gemäß verwendet werden]. P*GT1a bringt zum Ausdruck, dass aufseiten von **Pi*-Gamma** *bedingtermaßen – nur* bedingtermaßen, und zwar *in mehrerlei Hinsicht* nur bedingtermaßen, wie sich zeigen wird – dasselbe gilt. [Man beachte, dass $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ in **Pi*-Gamma** wegen D3* dasselbe besagt wie $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$.]

P*GT1b: $\exists y\Box(a = y) \rightarrow \exists y(a = y)$

{Ein Theorem, das wie P*GT1b lautet, ist in **Pi-Gamma** beweisbar.}

1. $E(b), \Box(a = b) \rightarrow a = b$ GT3, R2, R1
2. $a = b, E(b) \rightarrow \exists y(a = y)$ A7*
3. $E(b), \Box(a = b), a = b \rightarrow \exists y(a = y)$ R2, R1 (2)
4. $E(b), \Box(a = b) \rightarrow \exists y(a = y)$ R3 (3, 1)
5. $\Box(a = b), E(b) \rightarrow \exists y(a = y)$ R1 (4)
6. $\exists y\Box(a = y) \rightarrow \exists y(a = y)$ R9* (5)

{Eine Zeile mehr im Beweis von P*GT1b ergibt: 7. $\exists y\Box(a = y) \rightarrow E(a)$ [D3* (6)].}

PGT3: $\rightarrow \forall x \Box \exists y(x = y)$ {$\rightarrow \forall x \Box \exists y(x = y)$, $\rightarrow \forall x \Box E(x)$ sind *keine* **Pi*-Gamma**-Theoreme!}

1. $\rightarrow \Box \exists y(a = y)$ PGT1

2. $\rightarrow \forall x \Box \exists y(x = y)$ R8 (1)

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass alles notwendigerweise mit etwas identisch ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass alles *Existierende* [oder: alles*, was es gibt*; *alles**] notwendigerweise *existiert*, d. h. der **Pi*-Gamma**-Definition D3* gemäß: notwendigerweise so ist, dass *es etwas gibt*, womit es identisch ist, oder anders gesagt: notwendigerweise mit etwas *Existierendem* identisch ist.}

PGT4: $\rightarrow \forall x \exists y \Box (x = y)$

1. $\rightarrow \exists y \Box (a = y)$ PGT2

2. $\rightarrow \forall x \exists y \Box (x = y)$ R8 (1)

P*GT2: $\rightarrow \forall x \exists y \Box (x = y)$

1. $\rightarrow a = a$ A8

2. $\rightarrow \Box (a = a)$ GRT3 (1)

3. $E(a), \Box (a = a) \rightarrow \exists y \Box (a = y)$ A7*, R1

4. $E(a) \rightarrow \Box (a = a)$ R2 (2)

5. $E(a) \rightarrow \exists y \Box (a = y)$ R3 (3, 4)

6. $\forall x \exists y \Box (x = y)$ R8* (5)

{Wie es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass jegliches mit etwas notwendigerweise identisch ist, so soll es auch beweisbar sein und ist es beweisbar in **Pi*-Gamma**, dass jegliches *Existierende* mit etwas *Existierendem* notwendigerweise identisch ist, oder anders gesagt: dass zu jeglichem *Existierenden es etwas gibt*, mit dem es notwendigerweise identisch ist.}

PGT5: $\rightarrow \Box \forall x \exists y(x = y)$

1. $\rightarrow a = a$ A8

2. $a = a \rightarrow \exists y(a = y)$ A7

3. $\rightarrow \exists y(a = y)$ R3 (2, 1)

4. $\rightarrow \forall x \exists y(x = y)$ R8 (3)

5. $\rightarrow \Box \forall x \exists y(x = y)$ GRT3 (4)

P*GT3: $\rightarrow \Box \forall x \exists y(x = y); \rightarrow \Box \forall x E(x)$

1. $E(a) \rightarrow a = a$ A8, R2

2. $E(a), a = a \rightarrow \exists y(a = y)$ A7*, R1

3. $E(a) \rightarrow \exists y(a = y)$ R3 (2, 1)

4. $\rightarrow \forall x \exists y(x = y)$ R8* (3)

5. $\rightarrow \Box \forall x \exists y(x = y)$ GRT3 (4)

6. $\rightarrow \Box \forall x E(x)$ D3* (5)

{Wie es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass notwendigerweise jegliches mit etwas identisch ist, so soll es auch beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** beweisbar, dass notwendigerweise jegliches *Existierende existiert*, oder anders gesagt: dass notwendigerweise jegliches *Existierende* mit etwas*, was es gibt,* identisch ist. Allerdings: Die Übersetzung ins Umgangsprachliche, die dem Verständnis dienen soll, *kann* (indem sie auch so gelesen werden kann, als sei die jeweilige Reihenfolge von Modaloperator und existenziellem Quantor semantisch gleichgültig) dazu verführen, *zu meinen*, dass „Notwendigerweise existiert jegliches Existierende" und „Notwendigerweise ist jegliches Existierende mit etwas, was es gibt, identisch" doch dasselbe sagt wie „Alles Existierende existiert notwendigerweise" und „Alles Existierende ist notwendigerweise so, dass es etwas gibt, womit es identisch ist". Wie kann dann – würden sich „Verführte" fragen – adäquaterweise das erste Satzpaar **Pi*-Gamma**-beweisbar, wie gerade behauptet, das zweite aber *nicht* **Pi*-Gamma**-beweisbar sein, wie der Anmerkung zu PGT3 zu entnehmen ist? – Doch dem „Verführungsversuch" nachgeben und in die Nichtunterscheidung des Verschiedenen fallen sollte man nun eben *nicht*; beim Vermeiden hilft es, sich an den unzweideutigen Formeln zu orientieren: ❒∀xE(x) und ihr definitorisches Äquivalent ❒∀x∃y(x = y*) einerseits*, und ∀x❒E(x) und ihr definitorisches Äquivalent ∀x❒∃y(x = y) *andererseits*, sagen *nicht* dasselbe.}

PGT6: $\exists x\Diamond F(x) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$

1. $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ A7
2. $\Diamond F(a) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ GRT6 (1)
3. $\exists x\Diamond F(x) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ R9 (2)

{Die linkerseits bewiesene *Umkehrung der* ◊*-Barcan-Formel* ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem!}

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass daraus, dass es manchem möglich ist, **F** zu sein, folgt, dass es möglich ist, dass manches **F** ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass daraus, dass es manchem *Existierenden* möglich ist, **F** zu sein, folgt, dass es möglich ist, dass manches *Existierende* **F** ist. Warum aber soll Letzteres nicht beweisbar sein? Schon allein deshalb, weil es immens plausibel ist, dass es manchem Existierenden möglich ist, nicht zu existieren [$\exists x\Diamond\neg E(x)$ in **Pi*-Gamma**-Deutung], es aber ein Widerspruch in sich ist, dass es möglich ist, dass manches Existierende nicht existiert [$\Diamond\exists x\neg E(x)$ in **Pi*-Gamma**-Deutung; vgl. P*GT3: $\rightarrow$ ❒$\forall x\exists y(x = y)$; $\rightarrow$ ❒$\forall xE(x)$ – woraus schon absehbar ist, dass in **Pi*-Gamma** $\rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg E(x)$ herleitbar ist; siehe dann P*GT4].}

PGT7: $\rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y)$

1. $\rightarrow \forall x\exists y(x = y)$ {Beweis von} PGT5
2. $\forall x\exists y(x = y) \rightarrow \neg\exists x\neg\exists y(x = y)$ T40
3. $\rightarrow \neg\exists x\neg\exists y(x = y)$
4. $\rightarrow$ ❒$\neg\exists x\neg\exists y(x = y)$
5. $\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y) \rightarrow \neg$❒$\neg\exists x\neg\exists y(x = y)$

P*GT4: $\rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y); \rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg E(x)$

1. $\rightarrow \forall x\exists y(x = y)$ {Beweis von} P*GT3
2. $\forall x\exists y(x = y) \rightarrow \neg\exists x\neg\exists y(x = y)$ P*T15
3. $\rightarrow \neg\exists x\neg\exists y(x = y)$ R3 (2, 1)
4. $\rightarrow$ ❒$\neg\exists x\neg\exists y(x = y)$ GRT3 (3)
5. $\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y) \rightarrow \neg$❒$\neg\exists x\neg\exists y(x = y)$ GT5

6. $\Box\neg\exists x\neg\exists y(x = y) \rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y)$
7. $\rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y)$

6. $\Box\neg\exists x\neg\exists y(x = y) \rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y)$ RT4 (5)
7. $\rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg\exists y(x = y)$ R3 (6, 4)
8. $\rightarrow \neg\Diamond\exists x\neg E(x)$ D3* (7)

PGT8: $\Box\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Box F(x)$

1. $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$ A6
2. $\Box\forall xF(x) \rightarrow \Box F(a)$ GRT4 (1)
3. $\Box\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Box F(x)$ R8 (2)

{Die linkerseits bewiesene *Umkehrung der* $\Box$*-Barcan-Formel* ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem!}

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass daraus, dass es notwendig ist, dass alles **F** ist, folgt, dass alles notwendigerweise **F** ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass daraus, dass es notwendig ist, dass alles *Existierende* **F** ist, folgt, dass alles *Existierende* notwendigerweise **F** ist. Warum aber soll Letzteres nicht beweisbar sein? Schon allein deshalb, weil es immens plausibel ist, dass nicht alles Existierende notwendigerweise existiert [$\neg\forall x\Box E(x)$ in **Pi*-Gamma**-Deutung], es aber trivialerweise notwendig ist, dass alles Existierende existiert [$\Box\forall xE(x)$ in **Pi*-Gamma**-Deutung; vgl. P*GT3].}

{Ein Theorem, das wie P*GT5 lautet, aber bei dem „E(x)“ durch „$\exists y(x = y)$“ ersetzt ist, ist in **Pi-Gamma** beweisbar; vgl. **I.** in Kapitel 8.}

P*GT5: $\exists x\Diamond(E(x) \wedge F(x)) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$

1. $E(a), F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ A7*, R1
2. $E(a) \wedge F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ R7 (1)
3. $\Diamond(E(a) \wedge F(a)) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ GRT6 (2)
4. $\Diamond(E(a) \wedge F(a)), E(a) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ R2 (3)
5. $\exists x\Diamond(E(x) \wedge F(x)) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ R9* (4)

{P*GT5 – diese Annäherung aufseiten von **Pi*-Gamma** an *die Umkehrung der* $\Diamond$*-Barcan-Formel* – geht in Ordnung; denn es soll doch beweisbar sein, dass daraus, dass es einem *Existierenden* möglich ist, *zu existieren* und **F** zu sein, folgt, dass es möglich ist, dass etwas *Existierendes* **F** ist. Eine Überlegung, die *analog* der Überlegung bei $\exists x\Diamond F(x) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] zeigen würde, dass $\exists x\Diamond(E(x) \wedge F(x)) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] nicht beweisbar sein soll, gelingt bei dieser letzteren Schlussformel nicht; denn während $\exists x\Diamond\neg E(x) \rightarrow \Diamond\exists x\neg E(x)$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] nicht beweisbar sein soll, weil es normalsprachlich widerlegbar ist, ist $\exists x\Diamond(E(x) \wedge \neg E(x)) \rightarrow \Diamond\exists x\neg E(x)$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] normalsprachlich betrachtet sehr wohl logisch valide. Dieser letzteren Sachlage entsprechend ist in **Pi*-Gamma** beweisbar (*ohne* den Gebrauch von P*GT5):

1. $E(a), \neg E(a) \rightarrow \exists x\neg E(x)$ A3
2. $E(a) \wedge \neg E(a) \rightarrow \exists x\neg E(x)$ R7 (1)
3. $\Diamond(E(a) \wedge \neg E(a)) \rightarrow \Diamond\exists x\neg E(x)$ GRT6 (2)

4. $\Diamond(E(a) \wedge \neg E(a)), E(a) \rightarrow \Diamond\exists x\neg E(x)$ R2 (3)

5. $\exists x\Diamond(E(x) \wedge \neg E(x)) \rightarrow \Diamond\exists x\neg E(x)$ R9* (4).}

P*GT6: $\Box\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Box(E(x) > F(x))$

{Ein Theorem, das wie P*GT6 lautet, aber bei dem „E(x)“ durch „$\exists y(x = y)$“ ersetzt ist, ist in **Pi-Gamma** beweisbar; vgl. **I.** in Kapitel 8.}

1. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$ A6*
2. $\forall xF(x) \rightarrow E(a) > F(a)$ GRT2 (1)
3. $\Box\forall xF(x) \rightarrow \Box(E(a) > F(a))$ GRT4 (2)
4. $\Box\forall xF(x), E(a) \rightarrow \Box(E(a) > F(a))$ R2 (3)
5. $\Box\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Box(E(x) > F(x))$ R8* (4)

{P*GT6 – diese Annäherung aufseiten von **Pi*-Gamma** an *die Umkehrung der* ❐*-Barcan-Formel* – geht in Ordnung; denn es soll doch beweisbar sein, dass daraus, dass es notwendig ist, dass alles *Existierende* **F** ist, folgt, dass es allem *Existierenden* notwendig ist, dass es, wenn es *existiert*, **F** ist. Eine Überlegung, die *analog* der Überlegung bei $\Box\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Box F(x)$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] zeigen würde, dass $\Box\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Box(E(x) > F(x))$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] nicht beweisbar sein soll, gelingt bei dieser letzteren Schlussformel nicht; denn während $\Box\forall xE(x) \rightarrow \forall x\Box E(x)$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] nicht beweisbar sein soll, weil es normalsprachlich widerlegbar ist, ist $\Box\forall xE(x) \rightarrow \forall x\Box(E(x) > E(x))$ [in **Pi*-Gamma**-Deutung] normalsprachlich betrachtet sehr wohl logisch valide. Dieser letzteren Sachlage entsprechend ist in **Pi*-Gamma** beweisbar (*ohne* den Gebrauch von P*GT6):

1. $\forall xE(x), E(a) \rightarrow E(a)$ A6*
2. $\forall xE(x) \rightarrow E(a) > E(a)$ GRT2 (1)
3. $\Box\forall xE(x) \rightarrow \Box(E(a) > E(a))$ GRT4 (2)
4. $\Box\forall xE(x), E(a) \rightarrow \Box(E(a) > E(a))$ R2 (3)
5. $\Box\forall xE(x) \rightarrow \forall x\Box(E(x) > E(x))$ R8* (4).}

PGT9: $\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box\forall xF(x)$

{Die linkerseits bewiesene ❐*-Barcan-Formel* – oft simpliciter „die Barcan-Formel“ genannt – ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem!}

1. $\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box F(a)$ A6
2. $\Diamond\forall x\Box F(x) \rightarrow \Diamond\Box F(a)$ GRT6 (1)
3. $\Diamond\Box F(a) \rightarrow F(a)$ GT26 {*Brouwersches Axiom*}, 2. Hälfte
4. $\Diamond\forall x\Box F(x) \rightarrow F(a)$ RT7 (2, 3)
5. $\Diamond\forall x\Box F(x) \rightarrow \forall xF(x)$ R8 (4)
6. $\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box\forall xF(x)$ GRT5 {$\Diamond A \rightarrow B \Rightarrow A \rightarrow \Box B$} (5)

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass daraus, dass alles notwendigerweise **F** ist, folgt, dass es notwendig ist, dass alles **F** ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass daraus, dass alles *Existierende* notwendigerweise **F** ist, folgt, dass es notwendig ist, dass alles *Existierende* **F** ist. Warum? Es gibt ein normalsprachliches Gegenbeispiel: Wenn alles Existierende wesenhaft physisch, also notwendigerweise physisch ist (wovon nicht wenige überzeugt sind), so mag es dennoch immerhin möglich sein [„in einer anderen möglichen Welt der Fall sein"], dass manches Existierende nicht physisch ist. (Man beachte zur Anerkennung des Gegenbeispiels: $\Diamond\exists x\neg F(x) \leftrightarrow \neg\Box\forall xF(x)$ ist in **Pi*-Gamma** beweisbar.)}

PGT10: $\Diamond\exists xF(x) \rightarrow \exists x\Diamond F(x)$[110]		{Die linkerseits bewiesene ◊-*Barcan-Formel*
1. $\Diamond F(a) \rightarrow \exists x\Diamond F(x)$	A7	ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem!}
2. $\Box\Diamond F(a) \rightarrow \Box\exists x\Diamond F(x)$	GRT4	
3. $\neg\Box\neg\Box\neg F(a) \rightarrow \neg F(a)$	GT26, 1. Hälfte	
4. $F(a) \rightarrow \Box\neg\Box\neg F(a)$	RT6 {ABKP} (3)	
5. $F(a) \rightarrow \Box\Diamond F(a)$	GD3 (4)	
6. $F(a) \rightarrow \Box\exists x\Diamond F(x)$	RT7 (5, 2)	
7. $\exists xF(x) \rightarrow \Box\exists x\Diamond F(x)$	R9 (6)	
8. $\Diamond\exists xF(x) \rightarrow \exists x\Diamond F(x)$	GRT7 $\{A \rightarrow \Box B \Rightarrow \Diamond A \rightarrow B\}$ (7)	

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass daraus, dass es möglich ist, dass manches **F** ist, folgt, dass es manchem möglich ist, **F** zu sein, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass daraus, dass es möglich ist, dass manches *Existierende* **F** ist, folgt, dass es manchem *Existierenden* möglich ist, **F** zu sein. Warum? Es gibt ein normalsprachliches Gegenbeispiel: Wenn es [„an und für sich"] möglich ist, dass manches Existierende nicht physisch ist [für „**F**" ist gesetzt: „nicht physisch"], so mag dennoch alles Existierende notwendigerweise physisch sein. (Man beachte zur Anerkennung des Gegenbeispiels [das sich gegen den Einsetzungsfall $\Diamond\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists x\Diamond\neg F(x)$ von $\Diamond\exists xF(x) \rightarrow \exists x\Diamond F(x)$ in **Pi*-Gamma**-Deutung richtet]: $\forall x\Box F(x) \leftrightarrow \neg\exists x\Diamond\neg F(x)$ ist in **Pi*-Gamma** beweisbar.)}

PGT11: $\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Diamond F(x)$		{$\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Diamond F(x)$ ist *kein*
1. $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$	A6	**Pi*-Gamma**-Theorem!}

[110] Die vier in **Pi-Gamma** beweisbaren Barcan-Formeln – die ❐-Barcan-Formel, die ◊-Barcan-Formel und ihre jeweiligen Umkehrungen – werden gewöhnlich als Satzformeln geschrieben; das lässt sich in **Pi-Gamma** durch Anwendung von GRT2 (der R4-Analogie für **Gamma**) auf PGT9, PGT10, PGT8 und PGT6 abbilden (wodurch die bewiesenen Barcan-Schlussformeln in bewiesene *prämissenlose* Schlussformeln übergehen, die nun den Barcan-*Satzformeln* in unmittelbarster Weise entsprechen).

2. $\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \Diamond F(a)$ GRT6 (1)

3. $\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Diamond F(x)$ R8 (2)

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass daraus, dass es möglich ist, dass alles **F** ist, folgt, dass es allem möglich ist, dass es **F** ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass daraus, dass es möglich ist, dass alles *Existierende* **F** ist, folgt, dass es allem *Existierenden* möglich ist, **F** zu sein. Warum? Es gibt ein normalsprachliches Gegenbeispiel: Daraus, dass es [„in einer möglichen Welt", „an und für sich"] möglich ist, dass alles Existierende nicht physisch ist, folgt nicht, dass es allem Existierenden möglich ist, nicht physisch zu sein; es mag da im Gegenteil manchem Existierenden nicht möglich sein, nicht physisch zu sein; dass es so ist, ist sogar plausibel. (Das Gegenbeispiel richtet sich gegen den Einsetzungsfall $\Diamond\forall x\neg F(x) \rightarrow \forall x\Diamond\neg F(x)$ von $\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Diamond F(x)$ in **Pi*-Gamma**-Deutung, wobei in **Pi*-Gamma** beweisbar ist: $\neg\forall x\Diamond\neg F(x) \leftrightarrow \exists x\neg\Diamond\neg F(x)$.)}

PGT12: $\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists xF(x)$

1. $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ A7
2. $\Box F(a) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ GRT4 (1)
3. $\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ R9 (2)

{$\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem!}

{Während es beweisbar sein soll und in **Pi-Gamma** beweisbar ist, dass daraus, dass manches notwendigerweise **F** ist, folgt, dass es notwendig ist, dass manches **F** ist, soll es nicht beweisbar sein und ist es in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar, dass daraus, dass manches *Existierende* notwendigerweise **F** ist, folgt, dass es notwendig ist, dass manches *Existierende* **F** ist [oder anders gesagt: dass daraus, dass *es etwas gibt*, was notwendigerweise **F** ist, folgt, dass es notwendig ist, dass *es etwas gibt*, was **F** ist]. Warum? Es gibt ein normalsprachliches Gegenbeispiel: Daraus, dass manches Existierende notwendigerweise physisch ist, folgt nicht, dass es notwendig ist, dass manches Existierende physisch ist; denn es ist da doch wenigstens mit der Möglichkeit zu rechnen, dass alles Existierende nicht physisch ist. (Man beachte zur Anerkennung des Gegenbeispiels: $\Diamond\forall x\neg F(x) \leftrightarrow \neg\Box\exists xF(x)$ ist in **Pi*-Gamma** beweisbar.)}

P*GT7: $\exists x\Box(E(x) \wedge F(x)) \rightarrow \Box\exists xF(x)$

1. $E(a), F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ A7*, R1
2. $E(a) \wedge F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ R7 (1)
3. $\Box(E(a) \wedge F(a)) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ GRT4 (2)
4. $\Box(E(a) \wedge F(a)), E(a) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ R2 (3)
5. $\exists x\Box(E(x) \wedge F(x)) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ R9* (4)

{Ein Theorem, das wie P*GT7 lautet, aber bei dem „E(x)" durch „$\exists y(x = y)$" ersetzt ist, ist in **Pi-Gamma** beweisbar; vgl. **I.** in Kapitel 8.}

P*GT8: $\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Diamond(E(x) > F(x))$

{Das Theorem, das wie P*GT8 lautet, aber bei dem „E(x)“ durch „$\exists y(x = y)$“ ersetzt ist, ist in **Pi-Gamma** beweisbar; vgl. **I.** in Kapitel 8.}

1. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$ A6*
2. $\forall xF(x) \rightarrow E(a) > F(a)$ GRT2 (1)
3. $\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \Diamond(E(a) > F(a))$ GRT6 (2)
4. $\Diamond\forall xF(x), E(a) \rightarrow \Diamond(E(a) > F(a))$ R2 (3)
5. $\Diamond\forall xF(x) \rightarrow \forall x\Diamond(E(x) > F(x))$ R8* (4)

Die Schlussformel $\forall x\Diamond F(x) \rightarrow \Diamond\forall xF(x)$ – die Umkehrung von PGT11 – und die Schlussformel $\Box\exists xF(x) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ – die Umkehrung von PGT12 – ist weder in **Pi*-Gamma** *noch* in **Pi-Gamma** beweisbar. Und dass es sich so verhält, ist, wie es sein soll. Was **Pi-Gamma** und die beiden Schlussformeln anbetrifft, so ist unter Heranziehung der zugehörigen Normalsprache *gegenbeispielsweise*, indem man sich bei der ersteren Schlussformel auf deren Einsetzungsfall $\forall x\Diamond\neg F(x) \rightarrow \Diamond\forall x\neg F(x)$ bezieht, zu sagen: Allem ist es möglich, nicht eine Menschengesamtzahl zum Zeitpunkt t_0 zu sein, aber es ist nicht möglich, dass alles nicht eine Menschengesamtzahl zum Zeitpunkt t_0 ist. Was aber die letztere Schlussformel angeht, so ist *gegenbeispielsweise* zu sagen: Es ist notwendig, dass etwas eine Menschengesamtzahl zum Zeitpunkt t_0 ist; aber nichts ist notwendigerweise eine Menschengesamtzahl zum Zeitpunkt t_0.[111] [*Nota bene*: Kennzeichnungsnamen werden in diesen Gegenbeispielen nicht verwendet; dem in diesem Kapitel getroffenen Vorsatz, dass Kennzeichnungsnamen in der Normalsprache nicht vorkommen, ist also *entsprochen*.]

Was jedoch **Pi*-Gamma** und eben jene beiden genannten Schlussformeln angeht, so ist zu sagen: Bei $\Box\exists xF(x) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ kann man von seinem Einsetzungsfall $\Box\exists xE(x) \rightarrow \exists x\Box E(x)$ ausgehen und schlicht darauf hinweisen, dass daraus, dass es notwendig ist, dass es etwas gibt, was existiert, offensichtlich nicht folgt, dass es etwas gibt, was notwendigerweise existiert. Dann kann aber auch nicht daraus, dass es für alles Existierende möglich ist, nicht zu existieren, folgen, dass es möglich ist, dass alles Existierende nicht existiert. [Der eine Schluss ist genau dann – in unmittelbarer, intuitiver Auffassung – logisch valide, wenn der andere logisch valide ist, und ist folglich genau dann *nicht* logisch valide, wenn der andere

[111] Bei beiden Gegenbeispielen ist unterstellt, dass zum *All überhaupt* (gleichgültig, auf welche Gesamtumstände – „mögliche Welten“ – dieses All auch bezogen sein mag) *die Anzahlen* (Kardinalzahlen) gehören. Es ist dies eine plausible Unterstellung; wer sie aber nicht mitmachen will, wird sich andere Gegenbeispiele überlegen müssen.

nicht logisch valide ist.] Da $\forall x\Diamond\neg E(x) \rightarrow \Diamond\forall x\neg E(x)$ ein Einsetzungsfall von $\forall x\Diamond F(x) \rightarrow \Diamond\forall xF(x)$ ist, ist mit der eben angegebenen normalsprachlichen Widerlegung von $\forall x\Diamond\neg E(x) \rightarrow \Diamond\forall x\neg E(x)$ auch $\forall x\Diamond F(x) \rightarrow \Diamond\forall xF(x)$ (beide in **Pi*-Gamma**-Auffassung) normalsprachlich widerlegt – und ist es somit gerechtfertigt, dass $\forall x\Diamond F(x) \rightarrow \Diamond\forall xF(x)$ in **Pi*-Gamma** *nicht* beweisbar ist [d. h.: *nicht* logisch valide ist in der Weise der durch in **Pi*-Gamma** formulierten Logik].

In Fortsetzung des begonnenen Vergleichs von **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** seien noch die folgenden Theoreme beigebracht (wobei u. a. *Identität* im Fokus steht, am Ende des Vergleichs sogar ausschließlich):

Pi-Gamma

PGT13a: $\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box F(a)$

{Einsetzungsfall von A6}

PGT13b: $\Box F(a) \rightarrow \exists x\Box F(x)$

{Einsetzungsfall von A7}

PGT13c: $b = a, \Box F(a) \rightarrow \Box F(b)$

{Einsetzungsfall von A9}

PGT14: $\Box\forall xF(x) \rightarrow \Box F(a)$

1. $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$	A6
2. $\Box\forall xF(x) \rightarrow \Box F(a)$	GRT4 (1)

PGT15: $b = a \rightarrow \Box(b = a)$

1. $b = a, \Box(a = a) \rightarrow \Box(b = a)$	A9
2. $\rightarrow a = a$	A8
3. $\rightarrow \Box(a = a)$	GRT3 (2)
4. $b = a \rightarrow \Box(a = a)$	R2 (3)
5. $b = a \rightarrow \Box(b = a)$	R3 (1, 4)

Pi*-Gamma

P*GT9a: $\forall x\Box F(x), E(a) \rightarrow \Box F(a)$

{Einsetzungsfall von A6*}

P*GT9b: $\Box F(a), E(a) \rightarrow \exists x\Box F(x)$[112]

{Einsetzungsfall von A7*}

P*GT9c: $b = a, \Box F(a) \rightarrow \Box F(b)$

{Einsetzungsfall von A9}

P*GT10: $\Box\forall xF(x), \Box E(a) \rightarrow \Box F(a)$

1. $\forall xF(x), E(a) \rightarrow F(a)$	A6*
2. $\Box\forall xF(x), \Box E(a) \rightarrow \Box F(a)$	GRT8 (1)

P*GT11: $b = a \rightarrow \Box(b = a)$

{siehe *links*}

[112] Damit dies nicht inadäquat erscheint, muss man P*GT1a,b [und D3*] neben P*GT9b in den Blick nehmen!

PGT16: $b \neq a \rightarrow \Box(b \neq a)$		P*GT12: $b \neq a \rightarrow \Box(b \neq a)$	
1. $b = a \rightarrow \Box(b = a)$	PGT15	1. $b = a \rightarrow \Box(b = a)$	P*GT11
2. $\neg\Box(b = a) \rightarrow \neg(b = a)$	RT3 (1)	{siehe *links*}	
3. $b = a \rightarrow \neg\neg(b = a)$	T3		
4. $\Box(b = a) \rightarrow \Box\neg\neg(b = a)$	GRT4 (3)		
5. $\neg\Box\neg\neg(b = a) \rightarrow \neg\Box(b = a)$	RT3 (4)		
6. $\Diamond\neg(b = a) \rightarrow \neg\Box(b = a)$	GD3 (5)		
7. $\Diamond\neg(b = a) \rightarrow \neg(b = a)$	RT7 (6, 2)		
8. $\neg(b = a) \rightarrow \Box\neg(b = a)$	GRT5 (7)		
9. $b \neq a \rightarrow \Box(b \neq a)$	DEF≠ (8)		

Lässt **Pi*-Gamma** wie schon **Pi*-Alpha** zwei Interpretationen zu, eine *freilogische* und eine *meinongianische*? Bekanntlich ist das Mögliche-Welten-Idiom hilfreich, wenn es um die Interpretation modallogischer Systeme geht; im Folgenden bediene ich mich dieses Idioms.

Die *meinongianische* Interpretation von **Pi*-Gamma** sieht dann so aus: Jeder der singulären Terme, der in der Normalsprache vorkommt [es sind alle keine Kennzeichnungsnamen!], die dem meinongianisch interpretierten **Pi*-Gamma** zugrundeliegt, nimmt Bezug auf etwas, und es ist relativ zu jeder möglichen Welt für diese Normalsprache immer *dasselbe*. Allen möglichen Welten liegt zudem derselbe einheitliche Grundbereich zugrunde, in dem jedes Etwas, auf das in der Normalsprache namentlich [bzgl. der oder der Welt] Bezug genommen wird, zu finden ist, aber auch vieles, was nicht benannt ist. Die Aufteilung des einheitlichen Grundbereichs zwischen *den Existierenden* und *den Nichtexistierenden* [wobei „existieren" bei der *meinongianischen* Interpretation *mehr* bedeutet als nur, *mit etwas identisch zu sein* – D3* bzw. sein normalsprachliches Äquivalent *unbeschadet*] ist bzgl. der möglichen Welten freilich nicht immer dieselbe: Bzgl. der einen möglichen Welt existieren die So-und-So, und nichtexistieren die und die; bzgl. einer anderen möglichen Welt existieren andere, und nichtexistieren andere (wobei der Existenz*umfang* – korrelativ: der Nichtexistenz*umfang* – von Welt zu Welt kleiner oder größer sein mag). Da nun aber die Quantifikation (das, was durch $\forall\upsilon$ und $\exists\upsilon$ ausgedrückt wird) in **Pi*-Gamma** (und entsprechend in der zugehörigen Normalsprache) *auf Existierendes* beschränkt ist, bleibt das Nichtexistierende quantifika-

torisch *ein Stück weit* anonym – ein Stück weit und *nicht* in der Vollständigkeit, in der es in **Pi*-Alpha** quantifikatorisch anonym ist (siehe den Anfang von Kapitel 9).

Dazu ein Beispiel: Viele wahre [in diesem Sinne: valide] Sätze der relevanten Normalsprache haben diejenige logische Form, die durch die Satzformel „$E(a) \wedge \Diamond\neg E(a)$“ wiedergegeben wird. Da $E(a) \wedge \Diamond\neg E(a) \rightarrow \exists x(E(x) \wedge \Diamond\neg E(x))$ in **Pi*-Gamma** beweisbar ist, ergibt sich also die Wahrheit [Validität] von „Es gibt etwas Existierendes, dem es möglich ist, nicht zu existieren“, formelsprachlich: $\exists x(E(x) \wedge \Diamond\neg E(x))$. Hier bleibt das in einer möglichen Welt Nichtexistierende *in gewisser Weise* (nämlich: vermittels des wirklich Existierenden) nicht quantifikatorisch anonym*; in gewisser anderer Weise* bleibt es aber sehr wohl quantifikatorisch anonym, denn aus der Wahrheit eines normalsprachlichen Satzes, der formelsprachlich durch „$\Diamond\neg E(a)$“ repräsentiert wird, kann man nicht **Pi*-Gamma**-mäßig auf die Wahrheit eines normalsprachlichen Satzes schließen, der formelsprachlich durch „$\Diamond\exists x\neg E(x)$“ repräsentiert wird (da in **Pi*-Gamma** $\Diamond\neg E(a) \rightarrow \Diamond\exists x\neg E(x)$ nicht beweisbar ist).

Eine radikale, vollständige quantifikatorische Anonymisierung des Nichtexistenten zeigt sich in der relevanten Normalsprache *lokal* bei wahren Sätzen der [formelsprachlich notierten] Gestalten $\square\neg E(\nu)$ und $\neg\Diamond E(\nu)$ – wobei hier (wir sind ja bei der meinongianischen Interpretation von **Pi*-Gamma** und seiner Normalsprache) jene Sätze *in meinongianischer Interpretation* zu nehmen sind, also so, dass der durch „ν“ schematisierte Name, wie alle Namen der unterstellten Normalsprache, sehr wohl auf etwas Bezug nimmt, aber in seinem Fall nun eben auf etwas, dem es nicht möglich ist zu existieren – auf etwas, das notwendigerweise nicht existiert. Dieses Nichtexistente *ist* im Grundbereich (es wird ja namentlich auf es Bezug genommen), aber in der Quantifikation kommt es schlechterdings nicht vor: kommt es *überhaupt nicht* vor (und nicht bloß *in gewisser Weise nicht* vor) – deshalb, weil die Quantifikation, **Pi*-Gamma**-gemäß, existenzbeschränkt ist. Es ist anders bei einer Normalsprache, die dem Kalkül **Pi**-Gamma** gemäß ist; wobei sich dieser letztere Kalkül zu **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** gerade so verhält, wie sich **Pi**-Alpha** zu **Pi-Alpha** und **Pi*-Alpha** verhält [natürlich unter Weglassung bei diesen drei Kalkülen von Kennzeichnungsnamenformeln und des Kennzeichnungsaxioms].

Wie steht es aber jetzt mit der *freilogischen* Interpretation von **Pi*-Gamma**? *So*: Mancher der singulären Terme, die in der Normalsprache vorkommen, die dem freilogisch interpretierten **Pi*-Gamma** zugrundeliegt [sodass die durch **Pi*-Gamma** formulierte Logik, die dieser Normalsprache passende Logik ist], nimmt Bezug auf *nichts* (denn eine Bezug-

nahme auf Nichtexistentes gibt es bei der freilogischen Interpretation nicht); dennoch ist die Bivalenz durchgängig gewahrt: Jeder Satz der Normalsprache ist so, dass entweder er oder seine Negation valide – z. B. wahr – ist. Die singulären Existenzsätze bei freilogischer Deutung sind da keine Ausnahme: Nimmt ein singulärer Term ν auf etwas Bezug, so ist „ν existiert“ valide; nimmt er auf nichts Bezug, so ist „ν existiert nicht“ valide.

Der andere Pfeiler der freilogischen Interpretation ist, dass „Es gibt ein“ *nicht* mehr besagt als „Für mindestens ein“ [aber natürlich auch nicht weniger als dies besagt] – *anders*, als es bei der meinongianischen Interpretation der Fall ist.

{*Zur Erinnerung* (an schon bzgl. **Pi*-Alpha** Gesagtes): Sowohl bei der meinongianischen als auch bei der freilogischen Interpretation wird – im Sinne von D3* – „ν existiert“ als „Es gibt ein υ, sodass ν υ ist“ gelesen; die jeweilige Deutung von „Es gibt ein“ und die jeweilige Stellungnahme dazu, ob ν in jedem Fall *auf etwas bezugnehmend* ist oder nicht, macht den Unterschied zwischen den beiden Interpretationen aus. Bei der freilogischen Interpretation besagt „Es gibt ein“, wie gesagt, nur so viel wie „Für mindestens ein“, bei der meinongianischen Interpretation aber *mehr* als nur *das*. In der freilogischen Interpretation wird dementsprechend „ν existiert“ exakt als der objektsprachliche Ausdruck der metasprachlichen Sachlage verstanden, dass [der singuläre Term] ν auf etwas Bezug nimmt; in der meinongianischen Interpretation hingegen wird „ν existiert“ als der objektsprachliche Ausdruck von *mehr* als nur *das* verstanden. Bei der meinongianischen Interpretation ist sichergestellt, dass *jeder* singuläre Term der unterstellten Normalsprache auf etwas Bezug nimmt, bei der freilogischen Interpretation aber nicht.}

Nun ist **Pi*-Gamma** aber – anders als **Pi*-Alpha** – ein modallogisches System. Einer freilogischen Deutung von **Pi*-Gamma** stellen sich Schwierigkeiten in den Weg. Diese Schwierigkeiten lassen sich an dem Theorem P*GT1a festmachen; das Theorem lautet: $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$, oder auch [mit D3*]: $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$. Bedeutet dies, dass wenn **a** existiert, es auch in allen möglichen Welten existiert (was höchst unerwünscht wäre)? Nein, denn dazu müsste in **Pi*-Gamma** $\exists y(a = y) \rightarrow \Box\exists y(a = y)$ beweisbar sein, was in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar ist. Es – P*GT1a – bedeutet vielmehr (man muss letztlich sagen: *wie es scheint*), dass, wenn **a** existiert – also freilogisch aufgefasst: „**a**“ auf etwas Bezug nimmt / etwas bezeichnet –, „**a**“ auf dieses selbe Etwas, auf welches es Bezug nimmt, in allen möglichen Welten Bezug nimmt. P*GT1a könnte man, so angesehen, als *Rigiditätstheorem von* **Pi*-Gamma** bezeichnen. Das Problem ist nun aber, dass laut *freilogischer* Auffassung für die Existenz von **a** in einer beliebigen möglichen Welt *w* doch schon hinreichen müsste (*meint man zunächst*), dass „**a**“ in *w* auf etwas Bezug nimmt – und das tut „**a**“ ja, in jeder beliebigen

möglichen Welt *w*, gemäß P*GT1a (*wie es scheint!*), *wenn* **a** existiert! Gemäß freilogischer Auffassung müsste also (*so scheint es*), angesichts von P*GT1a gelten: Wenn **a** existiert, dann existiert **a** in allen möglichen Welten, oder mit anderen Worten: dann existiert **a** notwendigerweise (*ungeachtet* dessen, dass $\exists y(a = y) \rightarrow \Box\exists y(a = y)$ [oder mit D3*: $E(a) \rightarrow \Box E(a)$] in **Pi*-Gamma** nicht beweisbar ist) – was (wie gesagt) höchst unerwünscht wäre. Passen am Ende der Kalkül **Pi*-Gamma** und die freilogische Interpretation von ihm gar nicht zueinander?

Was sich hier zeigt, ist eine *gewisse Reibung* zwischen **Pi*-Gamma** und seiner freilogischen Interpretation (entlang der für **Pi*-Alpha** erprobten Linien). Von Inadäquatheit des Kalküls für eine freilogische Interpretation, oder Inadäquatheit freilogischer Interpretation für den Kalkül, zu sprechen, ginge aber zu weit. Warum? Weil gar keine Inadäquatheit vorliegt. Dies zu erkennen, bedarf sorgfältigster Unterscheidungen.

Wie schon zuvor: Wir arbeiten mit Satzformeln, als wären sie vollinterpretierte Sätze, was der textlichen (und damit auch der gedanklichen) Durchsichtigkeit sehr zuträglich ist! – und mit der **Pi*-Gamma**-Logik *in ihrer freilogischen Interpretation* [bei Validität = Wahrheit].

{Für „a“ verwendet als singulärer Term außerhalb des Formelkontexts schreibe ich dabei „**a**“; entsprechend schreibe ich für „F“ verwendet als genereller Term außerhalb des Formelkontexts „**F**“.}

Angenommen dann: $\exists y(a = y)$ ist wahr in w_0 [in „der wirklichen Welt“, besser gesagt: in einer frei gewählten möglichen Welt w_0], mit anderen Worten: **a** gehört zum Grundbereich von w_0: gehört zu den w_0-Existierenden. Folglich mit P*GT1a: $\exists y\Box(a = y)$ ist wahr in w_0, mit anderen Worten: Von etwas, y, das zum Grundbereich von w_0 gehört / zu den w_0-Existierenden gehört, gilt in allen möglichen Welten, dass **a** mit ihm identisch ist. Daraus kann man aber nun nicht logisch korrekt schließen, dass **a** in allen möglichen Welten oder auch nur in *einer* der von w_0 verschiedenen möglichen Welten existiert. Dazu müsste **a** [das y, das von „**a**“ in allen möglichen Welten bezeichnet wird] ja zum Grundbereich jeder möglichen Welt gehören, bzw. wenigstens zum Grundbereich *einer* der von w_0 verschiedenen möglichen Welten. Aber das gibt die w_0-Wahrheit von $\exists y\Box(a = y)$ einfach nicht her. $\exists y\Box(a = y) \wedge \Diamond\neg E(a)$ ist demnach eine logisch konsistente Erweiterung von $\exists y\Box(a = y)$ [im Sinne der *freilogisch interpretierten* **Pi*-Gamma**-Logik – *genauso* wie im Sinne der *meinongianisch interpretierten* **Pi*-Gamma** Logik].

{Zur Beseitigung der Illusion, es läge mit $\exists y\Box(a = y) \wedge \Diamond\neg E(a)$ eine **Pi*-Gamma**-logische Inkonsistenz vor, mag es auch hilfreich sein, sich vor Augen zu führen, dass $\exists y\Box(a = y) \wedge \Diamond\neg E(a) \leftrightarrow E(a) \wedge \Diamond\neg E(a)$ ein **Pi*-Gamma**-Theorem ist. [Zum Beweis greife man auf P*GT1a, P*GT1b und D3* zurück.] Mit $\Box\exists y\Box(a = y) \wedge \Diamond\neg E(a)$ liegt allerdings tatsächlich eine **Pi*-Gamma**-logische Inkonsistenz vor, denn $\Box\exists y\Box(a = y) \wedge \Diamond\neg E(a) \leftrightarrow \Box E(a) \wedge \Diamond\neg E(a)$ ist ebenfalls ein **Pi*-Gamma**-Theorem [wegen P*GT1a, P*GT1b, D3* und GRT4]. Man beachte hierbei: $\exists y\Box(a = y) \rightarrow \Box\exists y\Box(a = y)$ ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem.}

Metasprachlich kann man es auch so sagen: Wenn „**a**“ in w_0 etwas bezeichnet [d. h.: etwas *im Grundbereich von* w_0 benennt], dann *postbezeichnet* „**a**“ in jeder möglichen Welt dasselbe wie das, was es in w_0 *bezeichnet*; das ist die *tatsächliche* (nicht mehr die scheinbare) Aussage von P*GT1a, *metasprachlich gewendet*. Dessen ungeachtet, dass „**a**“ in jeder möglichen Welt dasselbe *postbezeichnet* wie das, was es in w_0 bezeichnet, kann „**a**“ in einer möglichen Welt dennoch *nichts* bezeichnen [d. h.: nichts *im Grundbereich der fraglichen Welt* benennen]; ja, es mag in jeder von w_0 verschiedenen Welt *nichts* bezeichnen. In einer möglichen Welt ein Etwas *postzubezeichnen* und in ihr dieses selbe Etwas *zu bezeichnen* sind zwei verschiedene Begriffe; ein singulärer Term mag den zweiten Begriff nicht erfüllen, auch wenn er den ersten erfüllt.

Wie in **Pi*-Gamma** *in freilogischer Interpretation* das Quantifizieren aufzufassen ist, ist nun *nebenbei* schon ein Stück weit deutlich geworden. Aber das Quantifizieren in **Pi*-Gamma** *in freilogischer Interpretation* sei nun im Vergleich mit dem Quantifizieren in **Pi*-Gamma** *in meinongianischer Interpretation* eigens herausgestellt, wobei auch klar ersichtlich werden wird, wie sehr sich die freilogische und die meinongianische Interpretation von **Pi*-Gamma** quantifikatorisch entsprechen:

Pi*-Gamma-Quantifizieren [und was damit zusammenhängt] *freilogisch*	**Pi*-Gamma**-Quantifizieren [und was damit zusammenhängt] *meinongianisch*
$\exists\upsilon$…	$\exists\upsilon$…
Lesarten [verschieden lautend, aber *gleichbedeutend*]:	*Lesarten* [verschieden lautend, aber *gleichbedeutend*]:
Es gibt ein υ…	Es gibt ein υ…
Für mindestens ein existierendes υ…	Für mindestens ein existierendes υ…

Für mindestens ein υ…

$\forall\upsilon$…

Lesarten [verschieden lautend, aber *gleichbedeutend*]:

Für alle υ…

Für alle existierenden υ…

$E(\nu) =_{Def} \exists\upsilon(\nu = \upsilon)$

Lesarten von $E(\nu)$ [verschieden lautend, aber *gleichbedeutend*]:

ν existiert [oder: ν existiert$_{FL}$]

Es gibt ν

Aus einem Pool von Etwassen ist jeder möglichen Welt ein Grundbereich zugeordnet. Der zugeordnete Grundbereich kann leer sein. In einer möglichen Welt zu existieren [E], bedeutet, Element des ihr zugeordneten Grundbereichs zu sein, wobei, in einer möglichen Welt nicht zu existieren [$\neg$E], nicht vorkommt. Dennoch kann $\neg E(\alpha)$ in einer möglichen Welt wahr sein, nämlich dann, wenn α nichts im Grundbereich der möglichen Welt benennt – ungeachtet dessen, dass $\forall x E(x)$ in jeder möglichen Welt wahr ist. Wenn ein Name[hier eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namen*formel* α in der Namensrolle] in einer möglichen Welt auf etwas *Bezug nimmt*, etwas *bezeichnet*, etwas *benennt*, so ist es etwas aus dem Grundbereich der jeweiligen Welt.

Für mindestens ein existierendes+ [oder: existierendes$_M$] υ…

Es gibt+ ein υ…

$\forall\upsilon$…

Lesarten [verschieden lautend, aber *gleichbedeutend*]:

Für alle υ…

Für alle existierenden υ…

Für alle existierenden+ υ…

$E(\nu) =_{Def} \exists\upsilon(\nu = \upsilon)$

Lesarten von $E(\nu)$ [verschieden lautend, aber *gleichbedeutend*]:

ν existiert [oder: ν existiert$_M$]

Es gibt ν

ν existiert+

Es gibt+ ν

Aus einem Pool von Etwassen, *dem* Grundbereich, sind jeder möglichen Welt die, die in ihr existieren+, und komplementär dazu die, die in ihr nicht existieren+, zugeordnet. Es kann vorkommen, dass in einer möglichen Welt alle aus dem Pool nicht existieren+. In einer möglichen Welt zu existieren+ [E], bedeutet zu den in ihr Existierenden+ zu gehören. In einer möglichen Welt nicht zu existieren+ [$\neg$E], bedeutet, zu denen zu gehören, die in ihr nicht existieren+. Jeder Name [hier jede unstrukturierte und sinnunbestimmte Namen*formel* α in der Namensrolle] bezeichnet in jeder möglichen Welt etwas aus *dem* Grundbereich. $\neg E(\alpha)$ kann in einer möglichen Welt wahr sein, und ist es dann, wenn α auf in der möglichen Welt nicht Existierendes+ Bezug nimmt – ungeachtet dessen, dass $\forall x E(x)$ in jeder möglichen Welt wahr ist.

Semantisch-analytisch gilt:
α *bezeichnet* in der möglichen Welt *w*
x[113] nur dann, wenn x dem Grundbereich von *w* angehört.
Wenn x dem Grundbereich von *w nicht* angehört, dann kann α x in *w* immer noch *post*bezeichnen,[114] wobei definitorisch gilt:
α *postbezeichnet* x in *w* genau dann, wenn x dem Grundbereich *irgendeiner* möglichen Welt *w´* angehört und α x in *w´ bezeichnet*. Daraus, dass α x in *w bezeichnet*, folgt also, dass α x in w *postbezeichnet*, aber nicht vice versa. Allerdings: Daraus, dass α x in *w* postbezeichnet *und* x dem Grundbereich von *w* angehört, folgt, dass α x in *w bezeichnet* (wegen der „Rigidität der Postreferenz", von der in **Pi*-Gamma** für α wegen P*GT1a auszugehen ist).

Semantisch-analytisch gilt:
α bezeichnet in der möglichen Welt *w*
x nur dann, wenn x *dem* Grundbereich angehört.

Semantisch-analytisch gilt:
$\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von einem x, das dem Grundbereich von *w* angehört, $\sigma[_]$ in *w* wahr ist.
$\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von jedem x, das dem Grundbereich von *w* angehört, $\sigma[_]$ in *w* wahr ist.

Semantisch analytisch gilt:
$\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von einem x, das *dem* Grundbereich angehört und das in *w* existiert+, $\sigma[_]$ in *w* wahr ist.
$\forall\upsilon\sigma[\upsilon]$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von jedem x, das *dem* Grundbereich angehört und das in *w* existiert+, $\sigma[_]$ in *w* wahr ist.

Es mag so scheinen, als sei die logische Validität von $\forall$xE(x) bei meinongianischer Interpretation von **Pi*-Gamma** eine Trivialität, bei freilogischer Interpretation aber nicht. Doch ist das tatsächlich eine leicht zu beseitigende Illusion. Zunächst haben wir:

Semantisch-analytisch gilt *insbesondere*:
$\forall$xE(x) ist wahr in der möglichen Welt *w*

Semantisch-analytisch gilt *insbesondere*:
$\forall$xE(x) ist wahr in der möglichen Welt *w*

[113] „α bezeichnet in der möglichen Welt *w* x", „α benennt in der möglichen Welt *w* x", „α nimmt in der möglichen Welt *w* auf x Bezug" und [Anglo-Deutsch] „α referiert in der möglichen Welt *w* auf x" sind synonyme Ausdrücke.
[114] „α *post*bezeichnet in der möglichen Welt *w* x", „α *post*benennt in der möglichen Welt *w* x", „α nimmt in der möglichen Welt *w* auf x *Post*-Bezug" und „α *post*referiert in der möglichen Welt *w* auf x" sind synonyme Ausdrücke.

genau dann, wenn von jedem x, das dem Grundbereich von *w* angehört, E(_) in *w* wahr ist.	genau dann, wenn von jedem x, das *dem* Grundbereich angehört und das in *w* existiert+, E(_) in *w* wahr ist.

Und weiter haben wir (semantisch-analytisch geltend):

x existiert in *w* gdw. x gehört dem Grundbereich von *w* an [x ist ein Etwas in *w*]; siehe oben.	In *w* zu existieren+ beinhaltet *mehr* als bloß ein Etwas in *w* zu sein: beinhaltet *mehr* als *dem* (allen möglichen Welten gemeinsamen) Grundbereich anzugehören; siehe oben.
E(_) ist von x in *w* wahr gdw. x existiert in *w*.	E(_) ist von x in *w* wahr gdw. x existiert+ in *w*.

Damit ergibt sich:

Semantisch-analytisch gilt: $\forall$xE(x) ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn jedes x, das in *w* existiert, in *w* existiert.	Semantisch-analytisch gilt: $\forall$xE(x) ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn jedes x, das *dem* Grundbereich angehört und in *w* existiert+, in *w* existiert+.

Also (es ist absehbar): Nach der linken, freilogischen Interpretation von **Pi*-Gamma** [d. h.: bei freilogischer Normalsprache von **Pi*-Gamma**, wobei in der Normalsprache formelsprachliche Elemente zugelassen sind] ist die logische Validität von $\forall$xE(x) *schlussendlich* ganz ebenso eine Trivialität wie nach der rechten, meinongianischen Interpretation. Soll $\forall$xE(x) *nicht* trivialerweise logisch valide sein, so muss man sich schon dem bereits erwähnten Kalkül **Pi**-Gamma** plus Normalsprache zuwenden, der auf den [um das „Kennzeichnungswesen“ gekürzten] Kalkül **Pi**-Alpha** aufbaut. Leider ist dann $\forall$xE(x) aber auch gleich *gar nicht* logisch valide [im Gegensatz zu $\forall_{\exists}$xE(x), oder m. a. W.: $\neg\exists$x$\neg$E(x); siehe dazu das vorausgehende Kapitel], ja bei entsprechender Normalsprache [die formelsprachliche Elemente zulässt] nicht einmal valide.

Die **Pi*-Gamma**-Definition der Existenz – D3* – lautet bei beiden Interpretationen von **Pi*-Gamma** gleich (wenn auch der Gehalt nicht derselbe ist). Die Rechtfertigung dafür ist wie folgt. Zunächst:

Semantisch-analytisch gilt:	Semantisch-analytisch gilt:

$\exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von einem x, das dem Grundbereich von *w* angehört, (α = _) in *w* wahr ist.

$\exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von einem x, das *dem* Grundbereich angehört und das in *w* existiert+, (α = _) in *w* wahr ist.

Damit und mit weiter oben Gesagtem (über Existenz in möglichen Welten):

Semantisch-analytisch gilt:
$\exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von einem x, das in *w* existiert, gilt: α bezeichnet x in *w*. [115]
Also:
$\exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn $\boldsymbol{\alpha}$ in *w* existiert;
wobei $\boldsymbol{\alpha}$ dasjenige x sei, das α in *w* bezeichnet.

Semantisch analytisch gilt:
$\exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn von einem x, das *dem* Grundbereich angehört und das in *w* existiert+, gilt: α bezeichnet x in *w*.
Also:
$\exists\upsilon(\alpha = \upsilon)$ ist wahr in der möglichen Welt *w* genau dann, wenn $\boldsymbol{\alpha}$ in *w* existiert+;
wobei $\boldsymbol{\alpha}$ dasjenige x sei, das *dem* Grundbereich angehört und das α in *w* bezeichnet.

Die Einzigkeitsbedingung für den metasprachlichen Kennzeichnungsnamen „dasjenige x, das *dem* Grundbereich angehört und das α in *w* bezeichnet“ ist bei *meinongianischer* Interpretation von **Pi*-Gamma** für alle möglichen Welten *w* und Namen α, die keine Kennzeichnungsnamen sind (und nur solche Namen α kommen in einer **Pi*-Gamma** angemessenen Normalsprache vor), ohne Weiteres erfüllt. *Hingegen*: Die Einzigkeitsbedingung für den metasprachlichen Kennzeichnungnamen „dasjenige x, das α in *w* bezeichnet“ ist bei *freilogischer* Interpretation von **Pi*-Sigma** für eine gegebene mögliche Welt *w* und einen gegebenen Namen α, der kein Kennzeichnungsname ist (nur solche Namen kommen in der **Pi*-Gamma** zugehörigen Normalsprache vor), *nicht* ohne Weiteres erfüllt. Es ist per Semantik der Namen klar, dass ein Name in einer möglichen Welt *höchstens* ein Etwas bezeichnet; es ist aber aus *freilogischer* Sicht nicht per Semantik der Namen klar, dass ein Name in einer

[115] Dass von x in *w* (α = _) wahr ist, besagt *für sich genommen* nur, dass α x in *w post*bezeichnet, m. a. W.: dass es irgendeine mögliche Welt *w´* gibt, sodass x dem Grundbereich von w´ angehört und α x in *w´* bezeichnet. Jedoch in Anwesenheit dessen, dass x dem Grundbereich von *w* angehört, oder anders gesagt: dass x in *w* existiert, besagt es, dass α x in *w* bezeichnet (und nicht bloß *post*bezeichnet). – Eine Frage: Könnte (α = _) von x in *w* wahr sein, *ohne dass* α x in *w* postbezeichnet? Wenn es so wäre, so würde α x in *w* „denotieren“, ohne dass x dem Grundbereich *irgendeiner* möglichen Welt (*w* eingeschlossen) angehört. Angesichts des **Pi*-Gamma**-Theorems $\rightarrow \forall x(a = x > \Diamond E(x))$ scheint das ausgeschlossen; aber in Wahrheit zeigt sich hier nur, dass **Pi*-Gamma** nicht über die Mittel verfügt, die fragliche Möglichkeit adäquat auszudrücken; in **Pi**-Gamma** sieht es anders aus: $\rightarrow \forall x(a = x > \Diamond E(x))$ ist da kein Theorem und $\exists\forall x(a = x \wedge \neg\Diamond E(x))$ kein logischer Widerspruch [während $\rightarrow \forall\exists x(a = x > \Diamond E(x))$ ein Theorem ist und $\exists x(a = x \wedge \neg\Diamond E(x))$ ein logischer Widerspruch]. Freilich bewegt man sich mit **Pi**-Gamma** im Rahmen des Meinongianismus und eben nicht im Rahmen Freier Logik. Im Geiste *Freier Logik* ist zu sagen: Die gestellte Frage ist zu verneinen; denn wenn α x in *w nicht* postbezeichnet, dann „denotiert“ α x in *w* auch nicht, dann steht α *in keinem Sinn* in *w* für x, und demnach kann (α = _) nicht in *w* von x wahr sein. [Dennoch mag (α = β) in *w* wahr sein; (α = β) mag sogar in *w* wahr sein, wenn $\neg\Diamond E(\alpha)$ in *w* wahr ist: „Minerva = Athene“ ist wahr in w_0, obwohl „$\neg\Diamond$E(Minerva)“ in w_0 ebenfalls wahr ist – auch wenn man es *freilogisch* ansieht, nicht meinongianisch.]

möglichen Welt überhaupt etwas bezeichnet. Vielmehr: Die Einzigkeitsbedingung für „dasjenige x, das α in *w* bezeichnet“ ist bei *freilogischer* Interpretation von **Pi*-Gamma** dann und *nur dann* erfüllt, wenn von einem x, das in *w* existiert, gilt: α bezeichnet x in *w*. Denn α bezeichnet (aus freilogischer Perspektive) eben nur dann x in der möglichen Welt *w*, wenn x in *w* existiert, d. h.: im Grundbereich von *w* ist, wie schon weiter oben als semantisch-analytische Feststellung zur freilogischen Interpretation von **Pi*-Gamma** gesetzt wurde. Es kommt vor, dass α nichts im Grundbereich der möglichen Welt *w* bezeichnet, also in *w* nichts bezeichnet. (Es kommt auch vor, dass α in *w* nichts *post*bezeichnet – siehe „Pegasus“ oder „Minerva“ –, was *freilogisch* bedeutet, dass α in *w* absolut nichts „denotiert“, komplett für nichts steht; vgl. dazu Fußnote 115.)

Wie (**1**.) „α existiert+ in *w*“ – bei: α $=_{Def}$ dasjenige x, das *dem* Grundbereich angehört und das α in *w* bezeichnet – *semantisch-analytisch äquivalent* ist (für alle möglichen Welten *w*) mit „Von einem x, das *dem* Grundbereich angehört und das in *w* existiert+, gilt: α bezeichnet x in *w*“, *so* ist (**2**.) „α existiert in *w*“ – bei α $=_{Def}$ dasjenige x, das α in *w* bezeichnet – *semantisch-analytisch äquivalent* mit „Von einem x, das in *w* existiert, gilt: α bezeichnet x in *w*“. Hier der Beweis für die *letztere* Äquivalenz (diejenige bei *freilogischer* Interpretation von **Pi*-Gamma**), in welchem Beweis logische Symbole der Übersichtlichkeit halber informell *metasprachlich und mit völlig vertrautem – klassischem – Sinn* (**Pi-Alpha**-Sinn!) verwendet werden:

1. $\exists$x(x existiert in *w* und α bezeichnet x in *w*) Annahme
2. $\exists$x(α bezeichnet x in *w*) aus 1. prädikatenlogisch
3. $\exists!$x(α bezeichnet x in *w*) aus 2. mit dem semantisch-analytischen Prinzip $\exists^{\leq 1}$x(α bezeichnet x in *w*)
4. ιx(α bezeichnet x in *w*) existiert in *w* aus 1. und 3. kennzeichnungslogisch: wegen $\exists$x(B[x] $\wedge$ A[x]), $\exists!$xA[x] $\rightarrow$ B[ιxA[x]]
5. α existiert in *w* aus 4. wegen α $=_{Def}$ ιx(α bezeichnet x in *w*)

---

1. α existiert in *w* Annahme
2. ιx(α bezeichnet x in *w*) existiert in *w* aus 1. wegen α $=_{Def}$ ιx(α bezeichnet x in *w*)
3. $\exists!$x(α bezeichnet x in *w*) aus 2. mit der folgenden kennzeichnungslogischen Konvention: $\neg\exists!$x(α bezeichnet x in *w*) $\rightarrow$ ιx(α bezeichnet x in *w*) existiert nicht in *w*
4. α bezeichnet ιx(α bezeichnet x in *w*) in *w* aus 3. kennzeichnungslogisch: wegen $\exists!$xA[x] $\rightarrow$ A[ιxA[x]]
5. α bezeichnet α in *w* aus 4. wegen α $=_{Def}$ ιx(α bezeichnet x in *w*)
6. $\exists$x(x existiert in *w* und α bezeichnet x in *w*) aus 1. und 5. prädikatenlogisch

Und hier noch der Beweis für die *erstere* Äquivalenz (diejenige bei *meinongianischer* Interpretation von **Pi*-Gamma**):

1. $\exists$x(x gehört *dem* Grundbereich an und x existiert+ in *w* und α bezeichnet x in *w*) Annahme
2. $\exists!$x(x gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet x in *w*) semantisch-analytischen Prinzip
3. ιx(x gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet x in *w*) existiert+ in *w* aus 1. und 2. wegen $\exists$x(A[x] $\wedge$ B[x] $\wedge$ C[x]), $\exists!$x(A[x] $\wedge$ C[x]) $\rightarrow$ B[ιx(A[x] $\wedge$ C[x]]

4. α existiert+ in *w*	aus 3. wegen $\alpha =_{Def} \iota x$(x gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet x in *w*)

---

1. α existiert+ in *w*	Annahme
2. $\exists!x$(x gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet x in *w*)	semantisch-analytisches Prinzip
3. ιx(x gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet x in *w*) gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet ιx(x gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet x in *w*) in *w*	aus 2. wegen $\exists!xA[x] \rightarrow A[\iota xA[x]]$
4. α gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet α in *w*	aus 3. wegen $\alpha =_{Def} \iota x$(x gehört *dem* Grundbereich an und α bezeichnet x in *w*)
5. $\exists x$(x gehört *dem* Grundbereich an und x existiert+ in *w* und α bezeichnet x in *w*)	aus 4. und 1. prädikatenlogisch

Eine Besonderheit von **Pi*-Gamma** wie auch von **Pi-Gamma** ist der Ausschluss der Kennzeichnungsnamenformeln und entsprechend von Kennzeichnungsnamen in jeder Normalsprache, die zur Deutung des Kalküls herangezogen werden darf: Nur unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln und ihre normalsprachlichen Gegenstücke sind Gegenstand der Betrachtung. Ein schon für sich genommen zureichender Grund für diese Beschränkung (weitere zureichende Gründe finden sich im nächsten Kapitel) ist – wie sich gleich zeigen wird –, dass sowohl in **Pi*-Gamma** als auch in **Pi-Gamma** die Schlussformel $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ beweisbar ist [mit P*GT1a und D3* bzw. mit PGT2 und R2]. Die Bezeichnung „Rigiditätstheorem“ für diese beweisbare Schlussformel ist, was **Pi-Gamma** und nicht minder was **Pi*-Gamma** *in meinongianischer Interpretation* angeht, vollständig angemessen. Denn die Schlussformel bringt in **Pi-Gamma** zum Ausdruck, dass Namen – d. h. im Sinne der eben beschriebenen Beschränkung: Namen, die keine Kennzeichnungsnamen sind – in allen möglichen Welten *dasselbe* bezeichnen, was sie in der [frei gewählten] wirklichen Welt bezeichnen, sofern sie in der wirklichen Welt etwas bezeichnen (und das tun sie in jedem Fall: $\rightarrow \exists y(a = y)$ ist ja ein Theorem von **Pi-Gamma**). Und in **Pi*-Gamma** *in meinongianischer Interpretation* bringt die fragliche Schlussformel zum Ausdruck, dass Namen [aber von Kennzeichnungsnamen abgesehen!] in allen möglichen Welten *dasselbe* bezeichnen, was sie in der wirklichen Welt bezeichnen, sofern sie in der wirklichen Welt etwas bezeichnen, was existiert+, was dann freilich in anderen möglichen Welten – vielleicht gar in *allen* anderen möglichen Welten – nicht existieren+ mag. Was **Pi*-Gamma** *in freilogischer Interpretation* angeht, so ist die Bezeichnung „Rigiditätstheorem“ für die beweisbare Schlussformel $\exists y(a =$

$y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ nicht vollständig, aber immerhin doch auch nicht bloß halbwegs angemessen. Denn da bringt diese Schlussformel zum Ausdruck, dass Namen [aber von Kennzeichnungsnamen abgesehen!] in allen möglichen Welten *dasselbe post*bezeichnen, was sie in der wirklichen Welt bezeichnen, sofern sie in der wirklichen Welt etwas [wobei „etwas" und „etwas Existierendes" als Synonyme gelten] bezeichnen, mögen sie in anderen möglichen Welten auch nichts [nichts Existierendes] bezeichnen.

Was würde nun geschehen, wenn man Kennzeichnungsnamenformeln in **Pi-Gamma** bzw. in **Pi*-Gamma**, ob freilogisch oder meinongianisch interpretiert, nicht verböte, sondern zuließe und korrelativ Kennzeichnungsnamen in den zugehörigen Normalsprachen? Aus dem Theorem $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ ginge dann durch uniforme Substitution der Einsetzungsfall $\exists y(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ hervor, und letztere Schlussformel wäre dann ebenfalls ein Theorem; sie wäre also in der Weise der durch **Pi-Gamma** bzw. **Pi*-Gamma** dargestellten [formulierten] Logik logisch valide. Aber gegen eine solche logische Validität von $\exists y(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ gibt es massive Einwände, welche jeder für **Pi-Gamma** bzw. **Pi*-Gamma** nun doch sicherlich anzustrebenden *ausdrucksmäßig eher umfassenden* Normalsprache zu entnehmen sind. Z. B. ist einschlägig für **Pi-Gamma**: (a) „Etwas [nämlich Trump] ist so, dass der Präsident der USA im Jahre 2019 damit identisch ist; aber nichts ist so, dass *notwendigerweise* der Präsident der USA im Jahre 2019 damit identisch ist." Und entsprechend ist einschlägig für **Pi*-Gamma** sowohl *in freilogischer Interpretation* als auch *in meinongianischer Interpretation*: (b) „Es gibt etwas [nämlich Trump], womit der Präsident der USA im Jahre 2019 identisch ist; aber es gibt nichts, womit *notwendigerweise* der Präsident der USA im Jahre 2019 identisch ist." Sowohl (a) als auch (b) sind wahr [ganz gewiss bei einem strengen Verständnis von Notwendigkeit, etwa im Sinne der In-sich-Notwendigkeit]; wie kann man da, hätte man Texte wie (a) und (b) in der Normalsprache (und die hat man in einer *ausdrucksmäßig eher umfassenden* Normalsprache sehr leicht), von einer logischen Validität von $\exists y(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ sprechen? *Gar nicht* kann man davon sprechen. Hingegen: (c) „Etwas ist so, dass Trump damit identisch ist; und etwas [nämlich Trump] ist sogar so, dass notwendigerweise Trump damit identisch ist" (einschlägig für **Pi-Gamma**) und (d) „Es gibt etwas, womit Trump identisch ist; und es gibt sogar etwas [nämlich Trump], womit notwendigerweise Trump identisch ist" (einschlägig für **Pi*-Gamma**) sind ebenfalls wahr,

und sie gehen mit einer logischen Validität von $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$, *aber einer ohne Substituierbarkeit von Kennzeichnungsnamenformeln für* „a“, völlig konform.

11. Das Substitutionsproblem modaler Prädikatenlogik und die Kalküle **Pi+-Gamma** und **Pi*+-Gamma**, sowie **Pi++-Gamma**

Es verweist auf nichts Geringes, dass zu **Pi-Gamma** nicht A10 und zu **Pi*-Gamma** nicht A10* gehört und überhaupt Kennzeichnungsnamenformeln von den genannten Systemen vollständig ausgeschlossen wurden. Es werden dadurch schwerwiegende Probleme vermieden – die, übrigens, seit langem bekannt sind. Besonders hat W. V. Quine auf sie aufmerksam gemacht, ja er hat wegen dieser Probleme das Recht einer Prädikatenlogik mit Modaloperatoren bestritten, in der diese, was ihre möglichen Positionen vis-à-vis den Quantoren anbetrifft, syntaktisch unbefangen ganz wie die wahrheitsfunktionalen Satzoperatoren verwendet werden.

Betrachten wir **Pi-Gamma**. Da haben wir PGT2 und seinen Beweis:

PGT2: $\rightarrow \exists y \Box(a = y)$

1. $\rightarrow a = a$ A8
2. $\rightarrow \Box(a = a)$ GRT3 (1)
3. $\Box(a = a) \rightarrow \exists y \Box(a = y)$ A7
4. $\rightarrow \exists y \Box(a = y)$ R3 (3, 2)

Nun ist das Folgende ein Einsetzungsfall von PGT2 und wäre daher vorderhand genauso ein Theorem von **Pi-Gamma** wie PGT2, *wenn* Kennzeichnungsnamenformeln zu **Pi-Gamma** hinzugenommen würden: $\rightarrow \exists y \Box(\iota x F(x) = y)$. Und selbstverständlich lässt sich dies auch *direkt* in **Pi-Gamma** beweisen, *wenn* Kennzeichnungsnamenformeln zu **Pi-Gamma** hinzugenommen würden:

????: $\rightarrow \exists y \Box(\iota x F(x) = y)$

1. $\rightarrow \iota x F(x) = \iota x F(x)$ A8
2. $\rightarrow \Box(\iota x F(x) = \iota x F(x))$ GRT3 (1)
3. $\Box(\iota x F(x) = \iota x F(x)) \rightarrow \exists y \Box(\iota x F(x) = y)$ A7

4. $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ R3 (3, 2)

Aber Sätze, deren logische Form sich durch $\exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ darstellen lässt, sind im unmittelbaren, natürlichen Verständnis oftmals nicht wahr – was zu ???? *gar nicht* passt. Ein Beispiel ist dieser Satz: „Manches ist so, dass notwendigerweise die Anzahl der Planeten [d. h.: die Anzahl der Planeten der Sonne; die Sonneplanetenzahl] mit ihm identisch ist"; im Gegensatz zu dem, was hierdurch gesagt wird, ist offenbar *nichts* so, dass notwendigerweise die Anzahl der Planeten mit ihm identisch ist. [Das Wort „offenbar" kann durch „gewiss" ersetzt werden, wenn mit „notwendigerweise" gemeint ist: „*in sich* notwendigerweise".]

Der vorgelegte Beweis von $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ in **Pi-Gamma**, *wenn* Kennzeichnungsnamenformeln zu **Pi-Gamma** hinzugenommen würden, legt nahe, dass das Problem A7 ist (A8, GRT3 und R3 sind unangreifbar), insbesondere natürlich der im Beweis verwendete A7-Einsetzungsfall $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$. Und in der Tat liegen modale Gegenbeispiele zu A7 vor, etwa bezogen auf den gerade angegebenen Einsetzungsfall von ihm: Obwohl es notwendig ist, dass die Anzahl der Planeten identisch mit der Anzahl der Planeten ist, so folgt daraus doch nicht, dass manches so ist, dass notwendigerweise die Anzahl der Planeten mit ihm identisch ist; im Gegenteil ist, wie gesagt, offenbar *nichts* notwendigerweise so, dass die Anzahl der Planeten mit ihm identisch ist.

{Dieses Gegenbeispiel zu A7 und die nachfolgend noch angegebenen Gegenbeispiele zu A6 und A9 lassen sich für **Pi-Alpha** nicht angeben, obwohl in **Pi-Alpha** Kennzeichnungsnamenformeln „zuhause" sind. Warum nicht? Deshalb, weil **Pi-Alpha** im Gegensatz zu **Pi-Gamma** keine Modaloperatoren enthält und dementsprechend die **Pi-Alpha** zugehörige Normalsprache ebenfalls keine Modaloperatoren enthält. Die **Pi-Alpha** zugehörige Normalsprache ist eine für wissenschaftliche Zwecke [letztlich: die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien] „idealere" Sprache, als es die **Pi-Gamma** zugehörige Normalsprache ist; denn von den fünf Idealitätsaspekten einer idealen Wissenschaftssprache, die in Kapitel 0 angegeben wurden, hat die **Pi-Alpha** zugehörige Normalsprache alle fünf, während die Normalsprache, die **Pi-Gamma** zugehört, zwar vier der fünf hat, den Aspekt (4) aber nicht: deshalb nicht, weil sie alethische Modaloperatoren enthält.}

Die Probleme, die Kennzeichnungsnamenformeln in **Pi-Gamma** mit sich bringen würden, sind nicht auf A7 beschränkt: auch A6 und A9 sind betroffen. Das Folgende ist ein Einsetzungsfall von A9: $\iota xF(x) = a$, $\Box(a = a) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = a)$; aber während die Anzahl der Planeten identisch mit 8 ist und es notwendig ist, dass 8 identisch mit 8 ist, ist es doch nicht not-

wendig, dass die Anzahl der Planeten identisch mit 8 ist. Das Folgende schließlich ist ein Einsetzungsfall von A6: $\forall y\Diamond(y \neq \iota xF(x)) \rightarrow \Diamond(\iota xF(x) \neq \iota xF(x))$; aber während es allem möglich ist [sicherlich *in sich* möglich ist], nicht die Anzahl der Planeten zu sein (auch der Zahl 8 – der tatsächlichen Anzahl der Planeten – ist es [*in sich*] möglich, nicht die Anzahl der Planeten zu sein!), ist es nicht möglich, dass die Anzahl der Planeten nicht die Anzahl der Planeten ist.

Außerdem: Das Folgende ist ein Einsetzungsfall von PGT15: $\iota xF(x) = a \rightarrow \Box(\iota xF(x) = a)$; aber obwohl die Anzahl der Planeten mit 8 identisch ist, ist das doch nicht notwendigerweise so. Und schließlich: $\iota xF(x) \neq a \rightarrow \Box(\iota xF(x) \neq a)$ ist eine Spezialisierung von PGT16; aber obwohl die Anzahl der Planeten von 10 verschieden ist, ist es doch nicht notwendig, dass es sich so verhält.

Was ist angesichts dieser Lage zu tun – *wenn nicht* Kennzeichnungsnamenformeln aus dem Kalkül zu verbannen, und Kennzeichnungsnamen aus der zugehörigen Normalsprache? Von **Pi-Gamma** zu **Pi*-Gamma** überzugehen, löst die Probleme definitiv *nicht*. Denn **Pi*-Gamma** ist nicht weniger von Inadäquatheiten betroffen als **Pi-Gamma**, wenn Kennzeichnungsnamenformeln hinzugenommen würden. A9 gehört ja sowohl zu **Pi-Gamma** als auch zu **Pi*-Gamma**, und P*GT11 und P*GT12 lauten gleich mit PGT15 und PGT16 (und die Beweise für die Ersteren lauten gleich mit den Beweisen für die Letzteren). Die „inkriminierten" Spezialisierungen von A9, PGT15 und PGT16 auf der **Pi-Gamma**-Seite sind „inkriminierbare" Spezialisierungen von A9, P*GT11 und P*GT12 auf der **Pi*-Gamma**-Seite; dazu braucht man in den angegebenen Gegenbeispielen zu den erstgenannten Spezialisierungen den Ausdruck „die Anzahl der Planeten" (durch welchen „$\iota xF(x)$" *instanziiert* – nicht etwa spezialisiert – wird) nur durch den Ausdruck „die existente Anzahl der Planeten" zu ersetzen (in Anpassung an **Pi*-Gamma** statt **Pi-Gamma**).

Was dann die Axiome A6* und A7* angeht, so sind die Schlussformeln $\forall y\Diamond(y \neq \iota xF(x)), E(\iota xF(x)) \rightarrow \Diamond(\iota xF(x) \neq \iota xF(x))$ und $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)), E(\iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ Spezialisierungen von jenen Axiomen – Spezialisierungen, *die kontra-instanziiert sind*:

(1) Allem Existenten (auch Donald Trump) ist es möglich verschieden von dem [auf eine Möglichkeit bezogen] existenten 45. US-Präsidenten zu sein, und der existente 45. US-Präsident existiert; aber es ist nicht möglich, dass der existente 45. US-Präsident verschieden von dem existenten 45. US-Präsidenten ist.

(2) Es ist notwendig, dass der existente 45. US-Präsident identisch mit dem existenten 45. US-Präsidenten ist, und der existente 45. US-Präsident existiert; aber nichts Existentes

(auch nicht Donald Trump) ist so, dass notwendigerweise der [unter den jeweiligen Umständen] existente 45. US-Präsident mit ihm identisch ist.

Was schließlich $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$ [PGT2] angeht, so ist es allerdings nicht in **Pi*-Gamma** beweisbar; beweisbar ist aber in **Pi*-Gamma** $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ [P*GT1a, woraus nach Anwendung von D3* „das Rigiditätstheorem" hervorgeht]. Und $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ ist kontra-instanziiert, wenn Kennzeichnungsnamenformeln zu **Pi*-Gamma** hinzugenommen würden, da dann die folgende Spezialisierung von $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ kontra-instanziiert ist: $E(\iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ (welcher Einsetzungsfall von P*GT1a nach dem Muster des Beweises von P*GT1a selbstverständlich auch *direkt* in **Pi*-Gamma mit Kennzeichnungsnamenformeln** beweisbar wäre). Denn der existente 45. US-Präsident existiert, aber nichts Existentes ist so, dass notwendigerweise der [unter den jeweiligen Umständen] existente 45. US-Präsident mit ihm identisch ist.

Was also ist zu tun, wenn Kennzeichnungsnamenformeln in einen *modal*-prädikatenlogischen Kalkül aufgenommen werden sollen (und das sollen sie doch, wenn irgend möglich)? Die grundlegende Erkenntnis ist die, dass umgangssprachliche und auch wissenschaftssprachliche Ausdrücke der Form $\iota xF(x)$ – „das [der, die] **F**" – in jeder ihrer zwei Auffassungen – **(1)** „das [ausgewählte] Etwas, das **F** ist", oder aber **(2)** „das [ausgewählte] existente Etwas, das **F** ist" – wiederum zweifach aufgefasst werden können und auch aufgefasst werden: **(a)** so, dass die enthaltene Beschreibung (symbolisiert durch „**F**") einzig und allein der Auswahl der *tatsächlichen* Bezugsentität [der Bezugsentität im *Wirklichkeitskontext*] für den singulären Term „der [die, das] **F**" dient (im Einklang mit A10 bzw. A10*) und dann der hergestellte Bezug *in allen* [sprachlich unterstellten] *Möglichkeitskontexten* [einschließlich des Wirklichkeitskontexts] invariant festgehalten wird; **(b)** so, dass die enthaltene Beschreibung (symbolisiert durch „**F**") der Auswahl der Bezugsentität für den singulären Term „der [die, das] **F**" *im jeweiligen Möglichkeitskontext* [unter anderem auch im Wirklichkeitskontext] dient (im Einklang mit A10 bzw. A10*) und deshalb der jeweils hergestellte Bezug in verschiedenen solchen Kontexten oft verschieden ausfällt. Mit vier Interpretationen von „das [der, die] **F**" ist also zu rechnen:

(1a) „[*fix*] das Etwas, das [*tatsächlich*] **F** ist", z. B.: „[*fix*] der [*tatsächliche*] 45. US-Präsident";
(2a) „[*fix*] das [*tatsächlich*] existente Etwas, das [*tatsächlich*] **F** ist", z. B. „[*fix*] der [*tatsächlich*] existente [*tatsächliche*] 45. US-Präsident";

(1b) „das Etwas, das [*jeweils*] **F** ist“, z. B.: „der [*jeweilige*] 45. US-Präsident“;
(2b) „das [*jeweils*] existente Etwas, das [*jeweils*] **F** ist“, z. B.: „der [*jeweils*] existente [*jeweilige*] 45. US-Präsident“.

Bei **(1a)** und **(2a)** werden Kennzeichnungsnamen (oder: Selektionsnamen), was die Fixität (oder: Rigidität) des Bezugs angeht, den Eigennamen angeglichen (besonders eindrucksvoll, was die Fixität des Bezugs angeht, ist übrigens der indexikalische Eigenname „ich“ – solange er von derselben Person gebraucht wird). Kennzeichnungsnamen *so* zu verstehen, ist sicherlich die *lectio difficilior* von ihnen, aber die fragliche Verstehensweise kommt vor und, wie bei einem Vexierbild, kann man mit einiger Übung zwischen ihr und der anderen Verstehensweise – der bei **(1b)** und **(2b)** gegebenen: der *lectio facilior* von Kennzeichnungsnamen – hin und her schalten. Bei manchen Kennzeichnungsnamen allerdings laufen alle vier Verstehensweisen referenzsemantisch auf dasselbe hinaus, z. B. bei „die mit 9 identische Zahl“, „die kleinste Primzahl“, „die leere Menge“: Es wird durch jeden dieser Kennzeichnungsnamen in jeder möglichen Welt ein und dasselbe bezeichnet (*sofern* man überhaupt mathematische Entitäten in *den* Grundbereich bzw. in *die* weltengehörigen Grundbereich*e* aufnimmt [wenn in einen von diesen, dann in alle: das ist man mathematischen Entitäten schuldig] – was aber, ob umgangssprachlich oder wissenschaftssprachlich, tatsächlich die meisten ganz unbefangen tun).

{Von den drei eben genannten Beispielen starrer Kennzeichnungsnamen sind *Pseudo*-Kennzeichnungsnamen – wie „das Heilige Römische Reich Deutscher Nation“ oder „der Dreißigjährige Krieg“ – zu unterscheiden, die *Eigennamen* sind, welche in der Gestalt von Kennzeichnungsnamen auftreten. In der Formelsprache sind sie nicht durch Kennzeichnungsnamenformeln, sondern durch unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln darzustellen. Man beachte auch: Während etwa die kleinste Primzahl notwendigerweise existiert (*sofern* sie überhaupt existiert), existiert der Dreißigjährige Krieg nicht notwendigerweise (wenn er auch existiert).}

Nennen wir die bei **(1a)** und **(2a)** gegebene Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen die *rigide* (Verstehensweise), die bei **(1b)** und **(2b)** gegebene Verstehensweise hingegen die *flexible* (die gegebenenfalls zur *rigiden* degenerieren kann, wofür am Ende des vorausgehenden Absatzes Beispiele gegeben wurden). In der Umgangssprache werden die rigide und die flexible Verstehensweise – offenbar bei großem Überwiegen der flexiblen – nebeneinander geführt, und es bleibt nicht selten selbst durch den Äußerungskontext unent-

schieden [es wird, wenn überhaupt, nur durch den Hörer und womöglich *nicht* im Sinne des Sprechers entschieden], welche von beiden gemeint ist. Würde man sich nun demgegenüber im Blick auf wissenschaftssprachliche Idealität auf die rigide Verstehensweise *allein* beschränken – um der validen objektivontisch-wissenschaftlichen Theoriebildung willen, die um *Eindeutigkeit* bemüht ist –, so hätte das zur Folge, dass bei Berücksichtigung nun *auch* von Kennzeichnungsnamen mittels Kennzeichnungsnamenformeln in **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** [welche Kalküle zwar wegen der alethischen Modaloperatoren in ihnen[116] auf keine ideale Wissenschaftssprache bezogen sein können, aber den ins Auge gefassten neu hinzukommenden Idealitätsaspekt der *eindeutigen Bezugsrigidität aller Kennzeichnungsnamen* für ihre Normalsprachen sehr wohl übernehmen könnten] *alle Beispiele entfallen*, die die Axiome A6 bzw. A6*, A7 bzw. A7*, A9 und auf ihnen beruhende Theoreme *prima-facie*-normalsprachlich widerlegten, und zwar widerlegten bei Öffnung dieser beweisbaren Schlussformeln für uniform substituierte Kennzeichnungsnamenformeln.

Ein guter Effekt! Hier die Entschärfung von Gegenbeispielen, die **Pi-Gamma** betreffen, durch *Rigidifizierung* der (nun normalsprachlich erlaubten) Kennzeichnungsnamen (die Entschärfung von Gegenbeispielen, die **Pi*-Gamma** betreffen, geht mutatis mutandis):

Zwar ist es allem [*oder*: nichts nicht] möglich, nicht der [*jeweilige*] 45. US-Präsident zu sein, wobei es doch aber nicht möglich ist, dass der [*jeweilige*] 45. US-Präsident nicht der [*jeweilige*] 45. US-Präsident ist (womit man ein Gegenbeispiel zu A6 [und zu A7] hätte, wenn die *flexible* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen normalsprachlich zugelassen wäre). Und dennoch ist es manchem nicht möglich, nicht [*fix*] der [*tatsächliche*] 45. US-Präsident zu sein; was zudem daraus, dass es nicht möglich ist, dass [*fix*] der [*tatsächliche*] 45. US-Präsident nicht [*fix*] der [*tatsächliche*] 45. US-Präsident ist, logisch – logisch valide – folgt (in Anwendung von A7 auch auf Kennzeichnungsnamen, aber auf *rigide* verstandene).

Zwar ist nichts [*oder*: alles nicht] notwendig so, dass es mit dem [*jeweiligen*] 45. US-Präsidenten identisch ist, wobei es doch aber notwendig [*oder*: nicht nicht notwendig] ist, dass der [*jeweilige*] 45. US-Präsident mit dem [*jeweiligen*] 45. US-Präsidenten identisch ist (womit man ein Gegenbeispiel zu A7 [und zu A6] hätte, wenn die flexible Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen normalsprachlich zugelassen wäre). Und dennoch ist manches notwendig so, dass es mit [*fix*] dem [*tatsächlichen*] 45. US-Präsident identisch ist; was zudem daraus, dass es notwendig ist, dass [*fix*] der [t*atsächliche*] 45. US-Präsident mit [*fix*] dem [*tat-*

[116] Siehe in Kapitel 0 den Idealitätsaspekt (4) einer idealen Wissenschaftssprache.

sächlichen] 45. US-Präsident identisch ist, logisch folgt (in Anwendung von A7 auch auf Kennzeichnungsnamen, aber auf *rigide* verstandene).

Zwar ist es nicht notwendig, dass die [*jeweilige*] Anzahl der Planeten mit 8 identisch ist, wobei es aber doch notwendig ist, dass 8 mit 8 identisch ist, und die [*jeweilige*, hier: *tatsächliche*] Anzahl der Planeten mit 8 identisch ist (womit man ein Gegenbeispiel zu A9 hätte, wenn die *flexible* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen normalsprachlich zugelassen wäre). Und dennoch ist es notwendig, dass [*fix*] die [*tatsächliche*] Anzahl der Planeten mit 8 identisch ist; was zudem daraus, dass es notwendig ist, dass 8 mit 8 identisch ist, und dass [*fix*] die [*tatsächliche*] Anzahl der Planeten mit 8 identisch ist, logisch folgt (in Anwendung von A9 auch auf Kennzeichnungsnamen, aber auf *rigide* verstandene).

Aber *soll* man sich in so weit wie möglicher Annäherung an eine – hier nun doch etwas *ad hoc* scheinende – wissenschaftssprachliche Idealität auf die *rigide* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen allein beschränken? *Kann* man sich überhaupt *vernünftigerweise* so beschränken? Wenn auch ein Vorteil dieser Beschränkung sichtlich ist, so ist die Antwort auf die gestellten Fragen doch vorderhand nicht klar. Klar ist hingegen, dass man sich in der Umgangssprache de facto *nicht* allein auf die rigide Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen beschränkt, sondern dass da sogar nicht selten bei vorgegebenem Äußerungskontext ein Kennzeichnungsname zwischen rigider und flexiber Verstehensweise unentschieden ist und auf der Seite der Hörer *verschieden* – einmal rigide, einmal flexibel – aufgefasst wird, ja vom einen zum anderen seiner aufeinanderfolgenden Vorkommnisse *beim selben Hörer* zwischen beiden Verstehensweisen *wechselt* – was nicht gerade im Sinne des Ideals (1) für ideale Wissenschaftssprachen ist (siehe Kapitel 0).

{Ein Beispiel mag erwünscht sein: Jemand stellt im Kreise von einigen seiner Freunde die Behauptung auf: „Der 45. US-Präsident hätte auch nicht der 45. US-Präsident sein können." Der eine Hörer sieht dann in seiner Vorstellung – umgangssprachsemantisch legitimerweise – je einen anderen 45. US-Präsidenten in verschiedenen möglichen Welten, von denen aber keiner in irgendeiner möglichen Welt von sich selbst verschieden ist, und sagt „Nein" zu der Behauptung. Der zweite Hörer sieht in seiner Vorstellung – ebenfalls umgangssprachsemantisch legitimerweise – Trump in verschiedenen möglichen Welten, der aber in keiner möglichen Welt von sich selbst verschieden ist, und sagt ebenfalls „Nein" zu der Behauptung (aber aus einem anderen Grund als der erste Hörer). Der dritte Hörer sieht in seiner Vorstellung – wiederum umgangssprachsemantisch legitimerweise – Trump in verschiedenen möglichen Welten anlässlich des 1. Vorkomnisses von „der 45. US-Präsident" in der Behauptung, und je einen anderen 45. US-Präsidenten in diesen möglichen Welten anlässlich des 2. Vorkommnisses von „der 45. US-Präsident" in der Behauptung, und sagt „Ja" zu der Behauptung. Der vierte Hörer

schließlich, obwohl ein absolut kompetenter Sprecher des Deutschen, stellt eine Rückfrage (und abermals umgangssprachsemantisch legitimerweise), da die Situation so ist, dass er rückfragen kann: „Wie meinst du das? Es kommt darauf an, wie du das meinst." Es ist aber nicht ausgemacht, dass er eine Antwort bekommt; vielleicht bleibt er stattdessen auf intelligente Spekulation angewiesen: der Maxime folgend, dass die Leute so zu verstehen sind, dass ihre Behauptungen eine Chance haben, wahr zu sein.}

Übernähme man nun aber *allein* die flexible Verstehensweise (und ließe in diesem Rahmen die rigide Verstehensweise nur insoweit lokal zu, als sie in diesem oder jenem Kennzeichnungsnamen – z. B. in „die kleinste Primzahl" – schon allein durch die Natur der enthaltenen Beschreibung erzwungen wird), so würden die Dinge beim Übergang von **Pi-Gamma** zu **Pi+-Gamma** [d. h.: **Pi-Gamma**, aber nun *mit* Kennzeichnungsnamenformeln und A10] bzw. von **Pi*-Gamma** zu **Pi*+-Gamma** [d. h.: **Pi*-Gamma**, aber nun *mit* Kennzeichnungsnamenformeln und A10*] *kompliziert*, jedenfalls im alethisch-modalen Bereich. Betrachten wir A9: $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$, und möge Tür und Tor offenstehen für Kennzeichnungsnamenformeln auch in alethisch-modalen Kontexten. Probleme bereiten dann – bei flexibler Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen – die folgenden Einsetzungsfälle von A9, wegen der modalen Gegenbeispiele zu ihnen: $\iota xF(x) = a, G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$; $b = \iota xF(x), G(\iota xF(x)) \rightarrow F(b)$; $\iota xF(x) = \iota yH(y), G(\iota yH(y)) \rightarrow G(\iota xF(x))$; *aber* es gibt auch unzählige Instanzen dieser Einsetzungsfälle, die problemlose logisch valide Folgerungen sind.

Konzentrieren wir uns zunächst auf **Pi-Gamma** und betrachten wir neben A9 des Weiteren A6 und A7: $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$ und $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$. Probleme bereiten die folgenden Einsetzungsfälle von A6 bzw. A7, wegen der modalen Gegenbeispiele zu ihnen: $\forall yG(y) \rightarrow G(\iota xF(x))$ und $G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists yG(y)$; *doch wiederum* gibt es auch unzählige Instanzen dieser Einsetzungsfälle, die problemlose logisch valide Folgerungen sind. Um Differenzierungen und damit verbundene Beschränkungen kommt man nicht herum, und es ist abzusehen, dass das Ergebnis „unschön" sein wird. Das lässt es noch einmal attraktiver erscheinen, sich in der Logik *allein* auf die *rigide* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen zu beschränken.

Leider passt aber das letztere Vorgehen – wenn es auch sonst, wie gesehen, von Vorteil ist – nicht zu A10. Nimmt man nämlich, samt Kennzeichnungsnamenformeln, A10, also $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$, zu **Pi-Gamma** hinzu (und kommt somit zu **Pi+-Gamma**), so folgt sofort wegen GRT4: $\Box\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$. Doch dazu gibt es Gegenbeispiele – *wenn* Kennzeichnungsnamen *rigide* verstanden werden. Z. B.: Es ist notwendig, dass manches eine Sonneplanetenzahl ist; denn wenn die Sonne keine Planeten hat (was insbesondere dann der Fall

wäre, wenn die Sonne gar nicht existierte[117]), so ist die Sonneplanetenzahl 0; wenn die Sonne nicht keine, aber endlich viele Planeten hat, so ist die Sonneplanetenzahl N, wobei N eine natürliche Zahl größer 0 ist; wenn die Sonne unendlich viele Planeten hat [wenn dies denn möglich ist], so ist die Sonneplanetenzahl $Aleph_0$ [spätestens, dass die Sonne überabzählbar unendlich viele Planeten hat, ist nicht möglich]. *Jedoch*: Es ist *nicht* notwendig, dass [*fix*] die [*tatsächliche*] Sonneplanetenzahl (also die Zahl 8) eine Sonneplanetenzahl ist – *während* es, konform zu A10 bei rigider Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen, doch im Gegenteil, wie dargelegt, notwendig sein müsste, dass [*fix*] die [*tatsächliche*] Sonneplanetenzahl eine Sonneplanetenzahl ist. Was in Wahrheit notwendig ist, ist dies: dass die [*jeweilige*] Sonneplanetenzahl eine Sonneplanetenzahl ist. In aller Deutlichkeit wird man also durch A10 im Felde von **Pi+-Gamma** auf die *flexible* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen verwiesen.

A10 wird man keineswegs entbehren können, wenn man nicht gänzlich auf eine logische Charakterisierung von Kennzeichnungsnamen, die ihnen *eigen* ist, verzichten will – und selbstverständlich kann man nicht gut überhaupt auf Kennzeichnungsnamen und Kennzeichnungsnamenformeln verzichten: Der Kalkül **Pi-Gamma** ist schon allein wegen dieses Verzichts (der Wegfall von A10 ist dadurch trivialerweise bedingt) weit von der Logik einer idealen Wissenschaftssprache entfernt (von der – bislang unausgesprochenen, weil selbstverständlich – eben auch *objektivontisch-wissenschaftlicher Ausdrucksreichtum* ein Idealitätsaspekt ist); da braucht man auf das Auftreten von Modaloperatoren in **Pi-Gamma** gar nicht zu schauen.

Man ist also mehr oder weniger gezwungen (*rational* gezwungen) für die **Pi+-Gamma** zugehörige Normalsprache – und damit für die Interpretation von **Pi+-Gamma** – die *flexible* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen zu übernehmen, und zwar sie *allein*: der Inhaltseindeutigkeit von Kennzeichnungsnamen wegen im Sinne des Ideals (1) für eine ideale Wissenschaftssprache; denn auch wenn die zu **Pi+-Gamma** gehörige Normalsprache keine

[117] Auf *Existenz* braucht man in einer **Pi-Gamma** bzw. **Pi+-Gamma** (oder auch **Pi-Alpha**) zugehörigen Normalsprache nicht zu verzichten, aber es ist da kein Teil der Logik, sondern nur ein nichtlogischer einstelliger Begriff unter unendlich vielen anderen: alle sind sie formal-symbolisch repräsentierbar durch eine beliebige einstellige unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel (bzw. die entsprechende Prädikatstockformel). Bei der Analyse von Existenzaussagen in einer **Pi-Gamma/Pi+-Gamma**-Normalsprache ist freilich ein *meinongianisches* Verständnis dieser Aussagen unvermeidlich, wenn *negative* Existenzaussagen wahr sein können oder gar wahr sind; allerdings eines, das bei negativen Existenzaussagen notwendig verbunden ist mit einem sehr erheblichen Ausmaß an *Negation*; z. B. hätte die Sonne, wenn sie nicht existierte, *ipso facto* keine Planeten, brännte nicht heiß auf mich herab, wäre nicht so-und-so weit von der Erde entfernt, usf.

ideale Wissenschaftssprache sein kann (sie kann es nicht wegen der alethischen Modaloperatoren in ihr), ist sie dennoch einer idealen Wissenschaftssprache so weit anzunähern, wie ihr Wesen – ihre Basalkonstitution – dies zulässt.

Die folgende Unterscheidung ist von zentraler Bedeutung für die erforderlichen Beschränkungen von A6, A7 und A9:

τ in $\sigma[\tau]$ steht in *einem* Modalkontext τ in $\sigma[\tau]$ steht in *keinem* Modalkontext.

Dabei ist τ eine beliebige Termformel [m. a. W.: eine Variable oder aber eine Namenformel, d. h.: eine primäre – eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel oder eine Kennzeichnungsnamenformel – oder aber eine sekundäre Namenformel], welche in der Satz- oder Prädikatformel $\sigma[\tau]$ an den durch die eckigen Klammern angezeigten Stellen[118] *frei* vorkommt – wobei primäre Namenformeln ohnehin nur frei vorkommen können; handelt es sich hingegen bei τ um eine Variable oder eine sekundäre Namenformel, die an den fraglichen Stellen *frei* vorkommt, so darf dort τ bzw.: kein Variablenvorkommnis in τ, *das* nicht schon durch $\forall$, $\exists$ oder ι *rein innerhalb von* τ gebunden ist [m. a. W.: das rein innerhalb von τ noch frei ist], durch $\forall$, $\exists$ oder ι *innerhalb von* $\sigma[\tau]$ gebunden werden.

{Zur Illustration einige Beispiele:

Zunächst einige Beispiele für Termformeln τ:

Variablen: x, y;

unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln: a, b;

Kennzeichnungsnamenformeln: $\iota yG(y)$, $\iota xR(x, a)$, $\iota yQ(b, y)$;

sekundäre Namenformeln: $\iota xR(x, y)$, $\iota yQ(x, y)$, $\iota zR_3(x, y, z)$, $\iota z\forall yQ_3(x, y, z)$.

Und nun kommen diesen Beispielen von Termformeln τ entsprechende Beispiele *freien* Vorkommens von τ in $\sigma[\tau]$, wobei der Einsetzungskontext $\sigma[\ldots]$ einfach „F(_)“ sei: F(x), F(y), F(a), F(b), $F(\iota yG(y))$, $F(\iota xR(x, a))$, $F(\iota yQ(b, y))$, $F(\iota xR(x, y))$, $F(\iota yQ(x, y))$, $F(\iota zR_3(x, y, z))$, $F(\iota z\forall yQ_3(x, y, z))$.

Jetzt folgen Beispiele *unfreien* Vorkommens von τ in $\sigma[\tau]$, wobei der Einsetzungskontext $\sigma[\ldots]$ „$\exists yF(_)$“[119] sei und von den obigen elf Beispielen von Termformeln diejenigen herangezogen werden, die ein [syntaktisch korrektes] unfreies Vorkommen im angegebenen Einsetzungskontext zulassen: $\exists yF(y)$, $\exists yF(\iota xR(x, y))$, $\exists yF(\iota zR_3(x, y, z))$. [Die acht übrigen Einsetzungen ergeben keine syntaktisch wohlgeformte Satz- oder Prädikatformel.]

[118] Dieser Plural schließt den Singular nicht aus.

[119] *Nota bene*: „$\exists yF(_)$“ ist keine Prädikatstockformel!

Schließlich folgen Beispiele *unfreien* Vorkommens von τ in $\sigma[\tau]$, wobei der Einsetzungskontext $\sigma[\ldots]$ „$\exists xF(_)$“ sei und von den obigen Beispielen von Termformeln diejenigen herangezogen werden, die ein [syntaktisch korrektes] unfreies Vorkommen im angegebenen Einsetzungskontext zulassen: $\exists xF(x)$, $\exists xF(\iota yQ(x, y))$, $\exists xF(\iota zR_3(x, y, z))$, $\exists xF(\iota z\forall yQ_3(x, y, z))$. [Die sieben übrigen Einsetzungen ergeben keine syntaktisch wohlgeformte Satz- oder Prädikatformel.]}

τ in $\sigma[\tau]$ – als in $\sigma[\tau]$ frei vorkommende Termformel – steht (*dort*) in einem Modalkontext genau dann, wenn ein τ enthaltender Teilausdruck von $\sigma[\tau]$ die folgende Gestalt hat: $(\sigma_1 \supset \sigma_2)$, und wenn zudem manche Stelle des Vorkommens von τ in diesem Teilausdruck zu den mit den eckigen Klammern angezeigten Vorkommnisstellen von τ in $\sigma[\tau]$ gehört. τ in $\sigma[\tau]$ steht also insbesondere dann in einem Modalkontext, wenn ein Teilausdruck von $\sigma[\tau]$ (etwa es selbst, denn jeder Ausdruck ist ein Teilausdruck von sich selbst) die Gestalt $\Box\sigma'[\tau]$ hat – denn $\Box\sigma'[\tau]$ ist laut GD2 nur eine Abkürzung für $(\neg\sigma'[\tau] \supset \sigma'[\tau])$ – *oder* die Gestalt $\Diamond\sigma'[\tau]$ hat – denn $\Diamond\sigma'[\tau]$ ist laut GD3 und GD2 nur eine Abkürzung für $\neg(\neg\neg\sigma'[\tau] \supset \neg\sigma'[\tau])$[120] [der relevante Teilausdruck der Gestalt $(\sigma_1 \supset \sigma_2)$ von $\sigma[\tau]$ ist hier nun $(\neg\neg\sigma'[\tau] \supset \neg\sigma'[\tau])$] –, und wenn zudem manche Stelle des Vorkommens von τ in diesem Teilausdruck – in $\Box\sigma'[\tau]$ bzw. $\Diamond\sigma'[\tau]$ – zu den mit den eckigen Klammern angezeigten Vorkommnisstellen von τ in $\sigma[\tau]$ gehört.

{*Zur Erläuterung von* „die mit den eckigen Klammern angezeigten Vorkommnisstellen von τ in $\sigma[\tau]$“: Auch wenn die das Schema $\sigma[\tau]$ konkretisierende Satz- oder Prädikatformel ein und dieselbe ist, so müssen doch die mit den eckigen Klammern angezeigten Vorkommnisstellen von τ in $\sigma[\tau]$ in jener konkreten Formel durchaus nicht [alle] ein und dieselben sein; *welche* es sind, die angezeigt werden, kann vielmehr davon abhängen, *welche* von allen Vorkommnisstellen von τ in σ relevant sind, und da kann die Auswahl verschieden ausfallen – und dementsprechend das Resultat: ob τ in $\sigma[\tau]$ in einem Modalkontext steht oder nicht. Bei $\neg\Box F(\iota xG(x))$ ist es unvermeidlich, dass $\iota xG(x)$ in $\neg\Box F(\iota xG(x))$ in einem Modalkontext steht; man betrachte nun aber $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x))$, m. a. W.: $F(\iota xG(x)) \wedge \neg(\neg F(\iota xG(x)) \supset F(\iota xG(x)))$: Wenn *sämtliche* Vorkommnisstellen von $\iota xG(x)$ in $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x))$ relevant sind, dann steht $\iota xG(x)$ in $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x))$ in einem Modalkontext; ist hingegen nur *das erste Vorkommnis* von $\iota xG(x)$ in $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x))$ relevant, dann steht $\iota xG(x)$ in $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x))$ in *keinem* Modalkontext. Es ist ein großer logischer Unterschied, ob man von $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x))$ „existenzgeneralisierend“ auf $\exists y(F(y) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x)))$ formelsprachlich schließt, oder aber – ebenfalls „existenzgeneralisierend“, jedoch (bezogen auf den vorliegenden konkreten Formelfall) von [zum

[120] Zur Erinnerung: GD2 ist $\Box\sigma =_{Def} \neg\sigma \supset \sigma$, und GD3 ist $\Diamond\sigma =_{Def} \neg\Box\neg\sigma$, was sich gemäß GD2 auf $\Diamond\sigma =_{Def} \neg(\neg\neg\sigma \supset \neg\sigma)$ beläuft.

Teil] *anderen mit den eckigen Klammern angezeigten Vorkommnisstellen von* τ *in* $\sigma[\tau]$ *ausgehend* – auf $\exists y(F(y) \wedge \neg\Box F(y))$. Die Schlussformel $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x)) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x)))$ ist nämlich aus normalsprachlicher Sicht logisch valide, die Schlussformel $F(\iota xG(x)) \wedge \neg\Box F(\iota xG(x)) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge \neg\Box F(y))$ hingegen ist es nicht; denn sie hat ein normalsprachliches Gegenbeispiel: „Die Anzahl der Sonneplaneten ist eine gerade Zahl, aber nicht notwendigerweise eine gerade Zahl" ist wahr; aber „Manche gerade Zahl ist nicht notwendigerweise eine gerade Zahl" ist nicht wahr.}

A6, A7 und A9 sind dann – da nun in **Pi+-Gamma**, über **Pi-Gamma** hinausgehend, Kennzeichnungsnamenformeln zur Berücksichtigung kommen und A10 als Axiom hinzugenommen wird – wie folgt zu qualifizieren:

A6 $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$,

wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen, *zum einen*, (i), die Namenformel, die für „a" uniform substituiert wird*, eine beliebige primäre Namenformel sein darf, sofern* die Variable, die für „x" uniform substituiert wird [im oft vorkommenden *Trivialfall* ist es „x" selbst!], in dem Ausdruck $\sigma[_]$, der für „F" uniform substituiert wird, in der resultierenden Formel *in keinem Modalkontext steht*, sobald sie in die Leerstellen eingesetzt worden ist;
und wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen, *zum anderen*, (ii), die Namenformel, die für „a" uniform substituiert wird [im Trivialfall ist es „a" selbst], wie „a*" eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel sein muss, sofern* die Variable, die für „x" uniform substituiert wird, in dem Ausdruck $\sigma[_]$, der für „F" uniform substituiert wird, in der resultierenden Formel *in einem Modalkontext steht*, sobald sie in die Leerstellen eingesetzt worden ist.

A7 $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$,

wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen, *zum einen*, (i), die Namenformel, die für „a" uniform substituiert wird*, eine beliebige primäre Namenformel sein darf, sofern* die Variable, die für „x" uniform substituiert wird, in dem Ausdruck $\sigma[_]$, der für „F" uniform substituiert wird, in der resultierenden Formel *in keinem Modalkontext steht*, sobald sie in die Leerstellen eingesetzt worden ist;
und wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen, *zum anderen*, (ii), die Namenformel, die für „a" uniform substituiert wird, wie „a*" eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel sein muss, sofern* die Variable, die für „x" uniform

substituiert wird, in dem Ausdruck σ[_], der für „F“ uniform substituiert wird, in der resultierenden Formel *in einem Modalkontext steht*, sobald sie in in die Leerstellen eingesetzt worden ist.

A9 $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$,
wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen, *zum einen*, (i), die Namenformeln, die für „b“ und „a“ uniform substituiert werden*, beliebige primäre Namenformeln sein dürfen, sofern* sie in dem Ausdruck σ[_], der für „F“ uniform substituiert wird, in der resultierenden Formel *in keinem Modalkontext stehen*, sobald sie in die Leerstellen eingesetzt worden sind; und wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen, *zum anderen*, (ii), die Namenformeln, die für „b“ und „a“ uniform substituiert werden, wie „b“ und „a“ *unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln sein müssen, sofern* sie in dem Ausdruck σ[_], der für „F“ uniform substituiert wird, in der resultierenden Formel *in einem Modalkontext stehen*, sobald sie in die Leerstellen eingesetzt worden sind.

Völlig entsprechende Beschränkungen sind A6*, A7* und A9 in **Pi*+-Gamma** beizugeben, da in **Pi*+-Gamma**, über **Pi*-Gamma** hinausgehend, Kennzeichnungsnamenformeln zur Berücksichtigung kommen und A10* als Axiom hinzugenommen wird.

Die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen *garantiert* auch den von den Axiomen A6, A7 und A9 bzw. A6*, A7* und A9 *abhängigen* [ohne das eine oder andere dieser Axiome in **Pi+-Gamma** bzw. **Pi*+-Gamma** *nicht beweisbaren*] Theoremen von **Pi+-Gamma** bzw. **Pi*+-Gamma**, *die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln [mindestens eine] involvieren*, die logische Validität ihrer Einsetzungsfälle in Beweisen, wenn sie [jene Beschränkung] von den Axiomen auf die Theoreme übertragen wird. Dabei wird die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen nicht selten *auf den Fall* (ii) *allein* zusammenschrumpfen [mit weiteren Vereinfachungen], während der Fall (i) irrelevant wird, wie z. B. beim Theorem $b = a \rightarrow \Box(b = a)$ (beider Kalküle), dem – wenigstens stillschweigend – *allein* das Folgende beizufügen ist: „wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen die Namenformeln, die für ‚b‘ und ‚a‘ uniform substituiert werden, wie ‚b‘ und ‚a‘ *unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln* sein müssen“.

{Warum hier die Apposition „wenigstens stillschweigend“? Deshalb, weil der einschlägige Beschränkungsfall für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen *außerhalb* von Beweisen beim vorliegenden Theorem nicht ständig explizit erwähnt oder auch nur indiziert zu werden braucht. Allgemein braucht *außerhalb* von Beweisen die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen nicht ständig bei der Nennung von Prinzipien, die jener Beschränkung unterliegen, explizit angezeigt zu werden. Und auch *innerhalb* von Beweisen – d. h.: innerhalb der Beweiskommentierung – ist bei einem dort zitierten Prinzip mit Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen die Anzeige des relevanten Beschränkungsfalls nicht notwendig, sondern sie ist *nur eine Hilfe*. Beweisführend korrekt muss die Verwendung des Prinzips aber sein.

Ein Wort noch zu dem (häufig wiederkehrenden) Ausdruck „die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen“. Die gemeinte Beschränkung betrifft nur die Einsetzungsfallbildung *in Beweisen* – im Progress von Beweisen –, nicht etwa die Einsetzungsfallbildung *an sich*. Sie stellt eine *Beschränkung* dar, da sie nicht selten *in Beweisen* – um der Wahrung der adäquaten logischen Validität willen – die Einsetzungsfallbildung bei dort verwendeten Prinzipien gegenüber der bei ihnen *an sich* – rein syntaktisch – möglichen Einsetzungsfallbildung *einschränkt*. Freilich läuft der durch (i) beschriebene erste Anwendungsfall der zwei Anwendungsfälle der Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen darauf hinaus, dass unter der in (i) spezifizierten Bedingung die Einsetzungsfallbildung *uneingeschränkt* ist. [Das in diesem Absatz Gesagte gilt auch für Formen der Zwei-Fälle-Beschränkung, die sie bei anderen Prinzipien als A6 und A6*, A7 und A7*und A9 annimmt.]}

Das Theorem a = b → ◊(a = b) – ein Theorem sowohl von **Pi+-Gamma** als auch von **Pi*+-Gamma** [man erhält es leicht aus GT3; vgl. die Anmerkung zu GT3 in Kapitel 3], das genau wie a = b → ❒(a = b) unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln involviert – unterliegt hingegen *keinerlei* Einschränkung bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen, obwohl doch „◊(a = b)“ zweifellos ein Modalkontext ist. Jenes Theorem ist *substitutionsunproblematisch*. Warum ist das so? Es ist deshalb so, weil dieses Theorem von A6, A7, A9 bzw. von A6*, A7*, A9 *unabhängig* ist. Allerdings gibt es auch Schlussformeln, die von den Axiomen A6, A7 und A9 bzw. A6*, A7* und A9 *abhängige* Theoreme von **Pi+-Gamma** bzw. **Pi*+-Gamma** sind und unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln involvieren, die aber die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen [zum Zwecke der Sicherung einer *der intuitiven logischen Validität entsprechenden* kalkülmäßigen logischen Validität] *nicht* benötigen, sondern bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen *keinerlei* Einschränkung unterliegen, also *substitutionsunproblematisch* sind. [Wenn man beim Beweisen unter Heranziehung von ihnen *dennoch* die Zwei-Fälle-Beschränkung berücksichtigt, so schränkt man sich mehr ein, als es nötig ist, und Theoreme können einem entgehen.] Zu diesen – gar nicht seltenen – theorematischen Schlussformeln siehe später in diesem Kapitel.

Wie sieht es nun bei den Axiomen A10 bzw. A10* aus? Wird dort die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen benötigt? – Sie wird nicht benötigt. Der Grund dafür ist, dass weder in A10 noch in A10* *grundständig* (also vor jeder vom axiomatischen Original wegführender Einsetzungsfallbildung) *unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln* involviert sind, bei deren Ersetzung durch Kennzeichnungsnamenformeln die logische Validität jener Axiome *deshalb* verloren gehen könnte, weil sie von der per se gegebenen „Rigidität" unstrukturierter und sinnunbestimmter Namenformeln [siehe $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$, welche Schlussformel sowohl ein Theorem von **Pi+-Gamma** als auch von **Pi*+-Gamma** ist] abhängt.

Konzentrieren wir uns nun zunächst auf **Pi+-Gamma**: auf das System, das aus **Pi-Gamma** erwächst. Da sämtliche **Pi-Gamma**-Beweise im vorausgehenden Kapitel nur *unstrukturierte und sinnunbestimmte* Namenformeln [„a" und „b"] involvieren, können sie alle in **Pi+-Gamma** übernommen werden, samt den durch sie bewiesenen Theoremen – wobei mit diesen Theoremen aber *gegebenenfalls* die einschlägige Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen verbunden werden muss. Übernommen werden in **Pi+-Gamma** können auch alle **Pi-Alpha**-Beweise und die durch sie bewiesenen Theoreme, sofern sie (die Beweise und die Theoreme) keine Kennzeichnungsnamenformeln involvieren – wobei auch mit den **Pi-Alpha**-Theoremen *gegebenenfalls* die einschlägige Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen verbunden werden muss. **Pi+-Gamma** erlaubt dann *auch ohne Ausschluss der Kennzeichnungsnamenformeln* (welcher Ausschluss zu **Pi-Gamma** *kalküldefinitorisch* dazugehört) *nicht*, dass z. B. mit dem Theorem $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$ auch, *inadäquaterweise*, $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ ein Theorem ist, oder mit dem Theorem $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ *inadäquaterweise* auch $\exists y(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$.

{Die Radikalkur für das Substitutionsproblem modaler Prädikatenlogik bzgl. **Pi-Gamma** war, dass sich die Satzformel $\exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ und überhaupt Satzformeln mit Kennzeichnungsnamenformeln in **Pi-Gamma** und in der zugehörigen Normalsprache gar nicht formulieren lassen! Die *erste* Alternative zur Radikalkur war die *Rigidifizierung* der Kennzeichnungsnamen, also dies: für Kennzeichnungsnamen in der Normalsprache allein die *rigide* Verstehensweise zuzulassen; dann können alle Kennzeichnungsnamenformeln ohne Gefahr verwendet werden und können sie alle für die uniforme Substitution – in Ersetzung von unstrukturierten und sinnunbestimmten Namenformeln – zur Verfügung stehen, *ohne dass* sonst noch an **Pi-Gamma** etwas zu verändern wäre. Sobald man freilich **Pi-Gamma** *um* A10 *ergänzt*, erweist sich, wie wir gesehen haben, die erste Alternative zur Radikalkur als – jedenfalls bei erwünscht ausdrucksreicher Normalsprache – inakzeptabel. Man kann

aber auch nicht gut jene Ergänzung gar nicht vornehmen und Kennzeichnungsnamenformeln ohne das Axiom – A10 – belassen, das sie in ihnen eigener Weise logisch charakterisiert. Auf diese Sachlage reagierend wurde der Kalkül **Pi+-Gamma** konzipiert: die *zweite* Alternative zur Radikalkur für das Substitutionsproblem modaler Prädikatenlogik bzgl. **Pi-Gamma**.}

Stellen wir den Beweis für $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$ in **Pi+-Gamma** [die Theoremzählung wird in diesem Fall von **Pi-Gamma** übernommen, da der **Pi+-Gamma**-Beweis von $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$ mit dem **Pi-Gamma**-Beweis – *fast* – vollständig gleichlautet] und den dazu ganz analog erscheinenden *Pseudobeweis* für $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ in **Pi+-Gamma** nebeneinander:

PGT2: $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$		????: $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$	
1. $\rightarrow a = a$	A8	1. $\rightarrow \iota xF(x) = \iota xF(x)$	A8
2. $\rightarrow \Box(a = a)$	GRT3 (1)	2. $\rightarrow \Box(\iota xF(x) = \iota xF(x))$	GRT3 (1)
3. $\Box(a = a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$	A7,(ii)	3. $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$	A7,(ii) {??}
4. $\rightarrow \exists y\Box(a = y)$	R3 (3, 2)	4. $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$	R3 (3, 2)

Der rechte „Beweis“ enthält in der Zeile 3 einen Fehler. Denn, was dort steht, resultiert durch uniforme Substitution – als Einsetzungsfallbildung in Beweisen – aus A7, also aus $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$, *dergestalt*, dass die Variable „y“, die für „x“ uniform substituiert wird, in dem Ausdruck „$\Box(\iota xF(x) = _)$“, der für „F“ uniform substituiert wird, in der resultierenden Formel *in einem Modalkontext steht*, sobald sie in die Leerstelle [es ist nur *eine*] eingesetzt worden ist. Deshalb muss [gemäß A7,(ii)] die Namenformel, die für „a“ uniform substituiert wird, eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel wie „a“ sein – *was sie nun aber eben nicht ist, ist sie doch* „$\iota xF(x)$“, eine Kennzeichnungsnamenformel.

Zum Kontrast sei der Beweis für $\rightarrow \Box\exists y(a = y)$ in **Pi+-Gamma** [die Theoremzählung wird von **Pi-Gamma** übernommen] und der tatsächlich, nicht nur anscheinend, dazu ganz analoge *Beweis* in **Pi+-Gamma** für $\rightarrow \Box\exists y(\iota xF(x) = y)$ nebeneinander gestellt:

PGT1: $\rightarrow \Box\exists y(a = y)$		P+GT1: $\rightarrow \Box\exists y(\iota xF(x) = y)$	
1. $\rightarrow a = a$	A8	1. $\rightarrow \iota xF(x) = \iota xF(x)$	A8
2. $a = a \rightarrow \exists y(a = y)$	A7,(i)	2. $\iota xF(x) = \iota xF(x) \rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$	A7,(i)

3. $\rightarrow \exists y(a = y)$	R3 (2, 1)	3. $\rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$	R3 (2, 1)
4. $\rightarrow \Box\exists y(a = y)$	GRT3 (3)	4. $\rightarrow \Box\exists y(\iota xF(x) = y)$	GRT3 (3)

Hier ist in beiden Herleitungen alles in Ordnung.

{Übrigens ist $\rightarrow \Box\exists y(a = y)$, obwohl als Theorem von **Pi+-Gamma** von A7 deduktiv abhängig, *substitutionsunproblematisch*, was u. a. bedeutet, dass $\rightarrow \Box\exists y(\iota xF(x) = y)$ *ohne Weiteres* ein in Beweisen zulässiger Einsetzungsfall von $\rightarrow \Box\exists y(a = y)$ ist und auch aufgrund dieser Tatsache als in **Pi+-Gamma** bewiesen gelten kann.}

Die folgenden Theoreme von **Pi+Gamma** bzw. **Pi*+-Gamma** sind Abschwächungen von A6 bzw. A6*, von A7 bzw. A7* oder von A9, die unter Einhaltung der jeweils einschlägigen der (i)/(ii)-Klauseln für die Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen hergeleitet sind. [Bei den Beweisen der im vorausgehenden Kapitel bewiesenen Theoreme werden, wenn man sie als Beweise in **Pi+Gamma** bzw. **Pi*+-Gamma** auffasst, die (i)/(ii)-Klauseln automatisch eingehalten, da in jenen Beweisen *ohnehin* nur *unstrukturierte und sinnunbestimmte* Namenformeln zum Einsatz kommen; m. a. W.: eine uniforme Substitution, die, was Namenformeln angeht, ausschließlich *unstrukturierte und sinnunbestimmte* Namenformeln involviert, „geht immer“ (im Hinblick auf die Wahrung der logischen Validität).]

P+GT2: $\forall x\Diamond G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ *QKM1*[121]

1. $\forall x\Diamond G(x) \rightarrow \Diamond G(a)$	A6,(ii)
2. $\iota xF(x) = a, G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$	A9,(i)
3. $\iota xF(x) = a \wedge G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$	R7 (2)
4. $\Diamond(\iota xF(x) = a \wedge G(a)) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$	GRT6 (3)
5. $\Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(a) \rightarrow \Diamond(\iota xF(x) = a \wedge G(a))$	GT24
6. $\Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(a) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$	RT20 $\{\Gamma', A \rightarrow B; \Gamma'', B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma', \Gamma'', A \rightarrow C\}$ (5, 4)
7. $\forall x\Diamond G(x), \Box(\iota xF(x) = a) \rightarrow \Diamond G(a)$	R2 (1)
8. $\forall x\Diamond G(x), \Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(a) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$	R2, R1 (6)
9. $\forall x\Diamond G(x), \Box(\iota xF(x) = a) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$	R3 (8, 7)
10. $\forall x\Diamond G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$	R9 (9)

[121] „QKM“ steht für „Quantifikation, Kennzeichnung, modaler Kontext“.

P*+GT1: $\forall x\Diamond G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$[122] *QKM1**

1. $\forall x\Diamond G(x), E(a) \rightarrow \Diamond G(a)$ A6*,(ii)

2. $\iota xF(x) = a, G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$ A9,(i)

3. $\iota xF(x) = a \wedge G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$ R7 (2)

4. $\Diamond(\iota xF(x) = a \wedge G(a)) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ GRT6 (3)

5. $\Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(a) \rightarrow \Diamond(\iota xF(x) = a \wedge G(a))$ GT24

6. $\Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(a) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ RT20 $\{\Gamma', A \rightarrow B; \Gamma'', B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma', \Gamma'', A \rightarrow C\}$ (5, 4)

7. $\forall x\Diamond G(x), E(a), \Box(\iota xF(x) = a) \rightarrow \Diamond G(a)$ R2 (1)

8. $\forall x\Diamond G(x), E(a), \Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(a) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ R2, R1 (6)

9. $\forall x\Diamond G(x), E(a), \Box(\iota xF(x) = a) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ R3 (8, 7)

10. $\forall x\Diamond G(x), \Box(\iota xF(x) = a), E(a) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ R1 (9)

11. $\forall x\Diamond G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ R9* (10)

P+GT3: $\Box G(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ *QKM2*

1. $\forall x\Diamond\neg G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Diamond\neg G(\iota xF(x))$ P+GT2 {Einsetzungsfall}

2. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \forall x\Diamond\neg G(x) \rightarrow \Diamond\neg G(\iota xF(x))$ R1 (1)

3. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \neg\Diamond\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \neg\forall x\Diamond\neg G(x)$ RT3 (2)

4. $\neg\forall x\Diamond\neg G(x) \rightarrow \exists x\neg\Diamond\neg G(x)$ T43 $\{\neg\forall xF(x) \leftrightarrow \exists x\neg F(x)\}$

5. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \neg\Diamond\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\neg\Diamond\neg G(x)$ RT20 (3, 4)

6. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Box G(\iota xF(x)), \neg\Diamond\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\neg\Diamond\neg G(x)$ R2, R1 (5)

7. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Box G(\iota xF(x)) \rightarrow \neg\Diamond\neg G(\iota xF(x))$ GT6 $\{\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A\}$, R2, R1

8. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Box G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\neg\Diamond\neg G(x)$ R3 (6, 7)

9. $\neg\Diamond\neg G(a) \rightarrow \Box G(a)$ GT6

10. $\Box G(a) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ A7,(ii)

11. $\neg\Diamond\neg G(a) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ RT7 (9, 10)

12. $\exists x\neg\Diamond\neg G(x) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ R9 (11)

13. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Box G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ RT20 (8, 12)

[122] Theorem P*+GT1 lautet gleich mit dem Theorem P+GT2, aber sein Sinn ist ein anderer als der von P+GT2, da „∀x“ und „∃y“ in **Pi*-Gamma** / **Pi*+-Gamma** anders interpretiert werden als in **Pi-Gamma** / **Pi+-Gamma**.

14. $\Box G(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ R1 (13)

P*+GT2: $\Box G(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ *QKM2**

{Der Beweis für P*+GT2 ist Zeile für Zeile weitgehend wie der für P+GT3. Es muss nur in der 1. Zeile rechts „P+GT2" durch „P*+GT1" ersetzt werden. Und zur 4. Zeile ist die folgende Erläuterung zu geben: $\neg\forall x\Diamond\neg G(x) \rightarrow \exists x\neg\Diamond\neg G(x)$ ist ein Theorem von **Pi*+-Gamma**, da $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x\neg F(x)$ ein Theorem von **Pi*-Alpha** ist, das ohne Involvierung von Kennzeichnungsnamenformeln bewiesen ist, also ohne Weiteres als Theorem nach **Pi*+-Gamma** übernommen werden kann:

$\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x\neg F(x)$

1. $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$ P*T15 [$\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$, bewiesen ohne Involvierung von Kennzeichnungsnamenformeln]
2. $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x\neg F(x)$ RT5 [LKP] (1)

Ab der 8. Zeile geht der Beweis von P*+GT2 (in Abwandlung des schon vorliegenden Beweises von P+GT3) wie folgt:

8. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Box G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\neg\Diamond\neg G(x)$ R3 (6, 7)
9. $\neg\Diamond\neg G(a) \rightarrow \Box G(a)$ GT6
10. $E(a), \Box G(a) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ A7*,(ii), R1
11. $E(a), \neg\Diamond\neg G(a) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ RT20 [Einsetzungsfall bei leerem Γ': $A \rightarrow B$; $\Gamma'', B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma'', A \rightarrow C$] (9, 10)
12. $\neg\Diamond\neg G(a), E(a) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ R1 (11)
13. $\exists x\neg\Diamond\neg G(x) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ R9* (12)
14. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Box G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ RT20 (8, 13)
15. $\Box G(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists x\Box G(x)$ R1 (14).}

P+GT4: $\forall x\Box G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ *QKM3*

1. $\forall x\Box G(x) \rightarrow \Box G(a)$ A6,(ii)
2. $\iota xF(x) = a, G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$ A9,(i)
3. $\iota xF(x) = a \wedge G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$ R7 (2)
4. $\Box(\iota xF(x) = a \wedge G(a)) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ GRT4 (3)
5. $\Box(\iota xF(x) = a), \Box G(a) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = a \wedge G(a))$ GT21, RT14[123]
6. $\Box(\iota xF(x) = a), \Box G(a) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ RT20 (5, 4)

[123] Der einschlägige Einsetzungsfall der relevanten Hälfte von GT21 (des $\Box$-*über*-$\wedge$-*Verteilungsprinzips*) ist: $\Box(\iota xF(x) = a) \wedge \Box G(a) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = a \wedge G(a))$. Der einschlägige Einsetzungsfall von RT14 (der Umkehrung von R7) ist: $\Box(\iota xF(x) = a) \wedge \Box G(a) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = a \wedge G(a)) \Rightarrow \Box(\iota xF(x) = a), \Box G(a) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = a \wedge G(a))$.

7. $\forall x\Box G(x), \Box(\iota xF(x) = a) \rightarrow \Box G(a)$ R2 (1)

8. $\forall x\Box G(x), \Box(\iota xF(x) = a), \Box G(a) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ R2, R1 (6)

9. $\forall x\Box G(x), \Box(\iota xF(x) = a) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ R3 (8, 7)

10. $\forall x\Box G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ R9 (9)

P*+GT3: $\forall x\Box G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ *QKM3**

{Der **Pi*+-Gamma**-Beweis für P*+GT3 ist eine Modifikation des **Pi+-Gamma**-Beweises für P+GT4: mittels Einfügung von „E(a)“ unter die Prämissen der Schlussformeln und Verwendung von A6*,(ii) statt A6,(ii) und von R9* statt R9, sowie mittels rein struktureller Anpassungen an diese Veränderungen.}

P+GT5: $\Diamond G(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists x\Diamond G(x)$ *QKM4*

1. $\forall x\Box\neg G(x), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Box\neg G(\iota xF(x))$ P+GT4 {Einsetzungsfall}

2. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \forall x\Box\neg G(x) \rightarrow \Box\neg G(\iota xF(x))$ R1 (1)

3. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \neg\Box\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \neg\forall x\Box\neg G(x)$ RT3 (2)

4. $\neg\forall x\Box\neg G(x) \rightarrow \exists x\neg\Box\neg G(x)$ T43

5. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \neg\Box\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\neg\Box\neg G(x)$ RT20 (3, 4)

6. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Diamond G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists x\Diamond G(x)$ GD3 (5)[124]

7. $\Diamond G(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists x\Diamond G(x)$ R1 (6)

P*+GT4: $\Diamond G(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists x\Diamond G(x)$ *QKM4**

{Der **Pi*+-Gamma**-Beweis für P*+GT4 lautet gleich mit dem **Pi+-Gamma**-Beweis für P+GT5, außer dass in der ersten Zeile rechts „P*+GT3“ statt „P+GT4“ steht und die Berufung auf T43 in der 4. Zeile zur Berufung auf ein Korollar von P*T15 wird; siehe dazu die Anmerkung zu P*+GT2.}

P+GT6a/P*+GT5a: $\Box(\iota xF(x) = a), \Box G(a) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ *IKM1/IKM1**[125]

1. $\iota xF(x) = a, G(a) \rightarrow G(\iota xF(x))$ A9,(i)

2. $\Box(\iota xF(x) = a), \Box G(a) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ GRT8 (1)

P+GT6b/P*+GT5b: $\Box(b = \iota xF(x)), \Box G(\iota xF(x)) \rightarrow \Box G(b)$

[124] Im Übergang von 5. zu 6. wird GD3 zunächst auf eine Satzformel und dann, weiter rechts in 5., auf eine Prädikatformel angewendet. „σ“ in GD3 steht eben nicht nur für eine beliebige Satzformel, sondern auch für eine beliebige Prädikatformel.

[125] „IKM“ steht für „Identität, Kennzeichnung, modaler Kontext“.

1. $b = \iota xF(x), G(\iota xF(x)) \rightarrow G(b)$ A9,(i)

2. $\Box(b = \iota xF(x)), \Box G(\iota xF(x)) \rightarrow \Box G(b)$ GRT8 (1)

<u>P+GT6c/P*+GT5c: $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)), \Box G(\iota yH(y)) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$</u>

1. $\iota xF(x) = \iota yH(y), G(\iota yH(y)) \rightarrow G(\iota xF(x))$ A9,(i)

2. $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)), \Box G(\iota yH(y)) \rightarrow \Box G(\iota xF(x))$ GRT8 (1)

<u>P+GT7a/P*+GT6a: $\Box(b = \iota xF(x)), \Diamond G(b) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$</u> *IKM2/IKM2**

1. $\Box(b = \iota xF(x)), \Box\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \Box\neg G(b)$ P+GT6b/P*+GT5b {Einsetzungsfall}

2. $\Box(b = \iota xF(x)), \neg\Box\neg G(b) \rightarrow \neg\Box\neg G(\iota xF(x))$ RT3 (1)

3. $\Box(b = \iota xF(x)), \Diamond G(b) \rightarrow \Diamond G(\iota xF(x))$ GD3 (2)

<u>P+GT7b/P*+GT6b: $\Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(\iota xF(x)) \rightarrow \Diamond G(a)$</u>

1. $\Box(\iota xF(x) = a), \Box\neg G(a) \rightarrow \Box\neg G(\iota xF(x))$ P+GT6a/P*+GT5a

2. $\Box(\iota xF(x) = a), \neg\Box\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \neg\Box\neg G(a)$ RT3 (1)

3. $\Box(\iota xF(x) = a), \Diamond G(\iota xF(x)) \rightarrow \Diamond G(a)$ GD3 (2)

<u>P+GT7c/P*+GT6c: $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)), \Diamond G(\iota yF(y)) \rightarrow \Diamond G(\iota xH(x))$</u>

1. $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)), \Box\neg G(\iota yH(y)) \rightarrow \Box\neg G(\iota xF(x))$ P+GT6c/P*+GT5c

2. $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)), \neg\Box\neg G(\iota xF(x)) \rightarrow \neg\Box\neg G(\iota yH(y))$ RT3 (1)

3. $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)), \Diamond G(\iota xF(x)) \rightarrow \Diamond G(\iota yH(y))$ GD3 (2)

Auf die Reihenfolge der Termformeln in $\Box(\iota xF(x) = a)$, $\Box(b = \iota xF(x))$, $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y))$ und $\exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ kommt es in all diesen Theoremen nicht an. Denn es ist beweisbar:

<u>P+GT8/P*+GT7</u>:

<u>(a) $\Box(\iota xF(x) = a) \leftrightarrow \Box(a = \iota xF(x))$</u>

1. $\iota xF(x) = a \rightarrow a = \iota xF(x)$ T33 {$a = b \rightarrow b = a$}[126]

2. $a = \iota xF(x) \rightarrow \iota xF(x) = a$ T33

3. $\Box(\iota xF(x) = a) \rightarrow \Box(a = \iota xF(x))$ GRT4 (1)

[126] $a = b \rightarrow b = a$ ist nicht nur in **Pi-Alpha**, sondern auch in **Pi*-Alpha** beweisbar, also auch in **Pi-Gamma** und **Pi*-Gamma** und zudem in **Pi+-Gamma** und **Pi*+-Gamma** [dann mit A9,(i)]. Das Theorem $a = b \rightarrow b = a$ ist außerdem *substitutionsunproblematisch* [deshalb steht im Kommentar zur 1. und 2. Beweiszeile einfach „T33“ und nicht „T33,(i)]. Die in der 1. Zeile zur Einsetzungsfallbildung verwendete uniforme Substitution ist diese: „$\iota xF(x)$“ für „a“, „a“ für „b“.

4. $\Box(a = \iota xF(x)) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = a)$ GRT4 (2)

5. $\Box(\iota xF(x) = a) \leftrightarrow \Box(a = \iota xF(x))$ DEF↔ (3, 4)

(b) $\Box(b = \iota xF(x)) \leftrightarrow \Box(\iota xF(x) = b)$

{Man ersetze im Beweis von P+GT8a/P*+GT7a durchgängig „a“ durch „b“ und schreibe nach der 4. Zeile:

5. $\Box(b = \iota xF(x)) \leftrightarrow \Box(\iota xF(x) = b)$ DEF↔ (4, 3).}

(c) $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)) \leftrightarrow \Box(\iota yH(y) = \iota xF(x))$

1. $\iota xF(x) = \iota yH(y) \rightarrow \iota yH(y) = \iota xF(x)$ T33

2. $\iota yH(y) = \iota xF(x) \rightarrow \iota xF(x) = \iota yH(y)$ T33

3. $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)) \rightarrow \Box(\iota yH(y) = \iota xF(x))$ GRT4 (1)

4. $\Box(\iota yH(y) = \iota xF(x)) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = \iota yH(y))$ GRT4 (2)

5. $\Box(\iota xF(x) = \iota yH(y)) \leftrightarrow \Box(\iota yH(y) = \iota xF(x))$ DEF↔ (3, 4)

(d) $\exists y\Box(\iota xF(x) = y) \leftrightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$

In **Pi+-Gamma**:

1. $\Box(\iota xF(x) = b) \rightarrow \Box(b = \iota xF(x))$ P+GT8b {die eine Hälfte}

2. $\Box(b = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ A7,(ii)

3. $\Box(\iota xF(x) = b) \rightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ RT7 (1, 2)

4. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ R9 (3)

5. $\Box(b = \iota xF(x)) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = b)$ P+GT8b {die andere Hälfte}

6. $\Box(\iota xF(x) = b) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ A7,(ii)

7. $\Box(b = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ RT7 (5, 6)

8. $\exists y\Box(y = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ R9 (7)

9. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y) \leftrightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ DEF↔ (4, 8)

In **Pi*+-Gamma**:

1. $\Box(\iota xF(x) = b) \rightarrow \Box(b = \iota xF(x))$ P*+GT7b {die eine Hälfte}

2. $E(b), \Box(b = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ A7*,(ii), R1

3. $E(b), \Box(\iota xF(x) = b) \rightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ RT20 (1, 2)

4. $\Box(\iota xF(x) = b), E(b) \rightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ R1 (3)

5. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ R9* (4)

6. $\Box(b = \iota xF(x)) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = b)$ P*+GT7b {die andere Hälfte}

7. $E(b), \Box(\iota xF(x) = b) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ A7*,(ii), R1

8. $E(b), \Box(b = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ RT20 (6, 7)

9. $\Box(b = \iota xF(x)), E(b) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ R1 (8)

10. $\exists y\Box(y = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ R9* (9)

11. $\exists y\Box(\iota xF(x) = y) \leftrightarrow \exists y\Box(y = \iota xF(x))$ DEF↔ (5, 10)

Es steht an: Was ergibt sich mit A10 bzw. A10*, wenn die alethischen Modaloperatoren ins Spiel gebracht werden? In Beantwortung dieser Frage konzentriere ich mich – um übermäßige Weitläufigkeit zu vermeiden – nun allein auf A10 und damit auf **Pi+-Gamma**.

P+GT9: $\Box\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x)); \Diamond\exists xF(x) \rightarrow \Diamond F(\iota xF(x))$

1. $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ A10

2. $\Box\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$ GRT4 (1)

3. $\Diamond\exists xF(x) \rightarrow \Diamond F(\iota xF(x))$ GRT6 (1)

{Der Beweis der *Umkehrungen*, $\Box F(\iota xF(x)) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ und $\Diamond F(\iota xF(x)) \rightarrow \Diamond\exists xF(x)$ ist wegen A7,(i) und GRT4 bzw. GRT6 ebenfalls ein Leichtes.}

Was P+GT9 behauptet, ist kein Problem (sondern richtig). Aber wie steht es mit dem Folgenden, was schlicht durch uniforme Substitution aus A10 hervorgeht:

$\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box F(\iota x\Box F(x))$?

Auch das ist offenbar kein Problem; zudem scheint auch die Umkehrung davon logisch valide zu sein (gemäß auf die Normalsprache bezogener Intuition):

$\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$.

Dieses Letztere geht durch uniforme Substitution aus A7 hervor (vgl. den Beweis von T41). *Das Problem* ist aber nun angesichts der offenbaren logischen Validität von $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$, dass *in Beweisen* in **Pi+-Gamma** das fragliche Resultat uniformer Substitution in A7 nicht als [beweisschrittlicher] Einsetzungsfall von A7 erlaubt ist; erlaubt sind in **Pi+Gamma** *in Beweisen* als durch uniforme Substitution gebildete Einsetzungsfälle von A7 – *gegeben* die uniforme Substitution von „$\Box F(_)$“ für „F“ – *nur*: $\Box F(a) \rightarrow \exists x\Box F(x)$, $\Box F(b) \rightarrow \exists x\Box F(x)$, $F(c) \rightarrow \exists x\Box F(x)$, usw.; denn durch die uniforme Substitution von $\Box F(_)$ für „F“ in A7 ist ein

Modalkontext gegeben, der die Beschränkung (ii) bei der Bildung von Einsetzungsfällen von A7 *in Beweisen* aktiviert. Was sich allerdings in **Pi+-Gamma** vorführlich beweisen lässt, ist dies:

<u>P+GT10: ❒F(ιx❒F(x)), ∃y❒(ιx❒F(x) = y) → ∃x❒F(x)</u>

1. b = ιx❒F(x), F(ιx❒F(x)) → F(b) A9,(i)
2. ❒(b = ιx❒F(x)), ❒F(ιx❒F(x)) → ❒F(b) GRT8 (1)
3. ❒F(b) → ∃x❒F(x) A7,(ii)
4. ❒(b = ιx❒F(x)), ❒F(ιx❒F(x)) → ∃x❒F(x) RT20 (2, 3)
5. ❒F(ιx❒F(x)), ❒(ιx❒F(x) = b), ❒(b = ιx❒F(x)) → ∃x❒F(x) R2, R1 (4)
6. ❒F(ιx❒F(x)), ❒(ιxF(x) = b) → ❒(b = ιxF(x)) P+GT8b {„von rechts nach links"}, R2, R1
7. ❒F(ιx❒F(x)), ❒(ιx❒F(x) = b) → ∃x❒F(x) R3 (5, 6)
8. ❒F(ιx❒F(x)), ∃y❒(ιx❒F(x) = y) → ∃x❒F(x) R9 (7)

Und hätte man nun in **Pi+-Gamma** ❒F(ιx❒F(x)) → ∃y❒(ιx❒F(x) = y), so würde sich auf der Grundlage von P+GT10 mit R3 *trotz* der fälligen Einschränkung von A7 bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen *dennoch* ❒F(ιx❒F(x)) → ∃x❒F(x) als Theorem ergeben (im Einklang mit der intuitiven logischen Validität dieser Schlussformel).

Die Schlussformel ❒F(ιx❒F(x)) → ∃y❒(ιx❒F(x) = y) ist nun sicherlich nicht in **Pi+-Gamma** – *so, wie der Kalkül ist* (mit *in der angegebenen Weise* einsetzungsfallbeschränktem A7) – beweisbar; aber könnte man sie nicht *als elftes Axiom* zu **Pi+-Gamma** hinzunehmen? Dagegen spricht jedoch die folgende Überlegung: Angenommen, genau drei Etwasse sind jeweils notwendigerweise ein Gott. Von diesen dreien werde eines ausgewählt: das [ausgewählte] Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist. Zweifellos ist nun das Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist, notwendigerweise ein Gott; aber es folgt nicht, dass für etwas, y, gilt, dass *notwendigerweise* das Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist, mit ihm, y, identisch ist. Denn unter anderen Gegebenheiten mag ja ein anderes von den drei Etwassen, die jeweils notwendigerweise ein Gott sind, das [ausgewählte] Etwas sein, das notwendigerweise ein Gott ist. Das Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist, muss ja nicht *rigide* ausgewählt sein (und *darf* es gar nicht sein – nachdem wir uns allein auf eine flexible Verstehensweise der Kennzeichnungsnamen festgelegt haben –, wenn diese Rigidität nicht durch den Be-

schreibungsgehalt des Kennzeichnungsnamens ohnehin erzwungen wird; was zwar gut und gerne bei „die kleinste Primzahl“ der Fall ist, aber – nach Voraussetzung – nicht bei „das, was notwendigerweise ein Gott ist“).

{Ein gegen die logische Validität von $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y)$ gerichteter Einwand lässt sich auch ganz untheologisch formulieren: Unendlich viele Zahlen sind notwendigerweise gerade Zahlen. Von diesen unendlich vielen geraden Zahlen werde eine ausgewählt: das [ausgewählte] Etwas, das notwendigerweise eine gerade Zahl ist. Zweifellos ist nun das Etwas, das notwendigerweise eine gerade Zahl ist, notwendigerweise eine gerade Zahl; aber es folgt nicht, dass für etwas, y, gilt, dass *notwendigerweise* das Etwas, das notwendigerweise eine gerade Zahl ist, mit ihm, y, identisch ist. Denn unter anderen Gegebenheiten mag ja ein anderes von den unendlich vielen Etwassen, die jeweils notwendigerweise eine gerade Zahl sind, das [ausgewählte] Etwas sein, das notwendigerweise eine gerade Zahl ist. Das Etwas, das notwendigerweise eine gerade Zahl ist, muss ja nicht *rigide* ausgewählt sein (und *darf* es gar nicht sein – nachdem wir uns allein auf eine flexible Verstehensweise der Kennzeichnungsnamen festgelegt haben –, wenn diese Rigidität nicht durch den Beschreibungsgehalt des Kennzeichnungsnamens ohnehin erzwungen wird; was zwar gut und gerne bei „die gerade Primzahl“ der Fall ist, aber nicht bei „das, was notwendigerweise eine gerade Zahl ist“, idiomatisch: „die[se] notwendig gerade Zahl“).}

Man beachte, dass sich diese (obige) Überlegungen zwar gegen die logische Validität der Schlussformel $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y)$ vorbringen lassen, nicht jedoch gegen die logische Validität von $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$, auf welche Schlussformel – also: auf die Umkehrung des A10-Einsetzungsfalls $\exists x \Box F(x) \rightarrow \Box F(\iota x \Box F(x))$ – es uns doch hier jetzt ankommt. Die logische Validität von $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$, die, wenn sie wirklich besteht, dem Kalkül **Pi+-Gamma** – wie es aussieht – ein gewisses Unvollständigkeitsproblem bereitet (wie dargelegt), ist noch unwiderlegt. Ist sie denn überhaupt widerlegbar? – Offenbar nicht.

Im Unterschied zu $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y)$ ist allerdings das Folgende beweisbar in **Pi+-Gamma**:

<u>P+GT11a: $\Box \exists !x \Box F(x) \rightarrow \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y)$</u>

1. $\exists !x \Box F(x), \Box F(b) \rightarrow b = \iota x \Box F(x)$	T29,(ii) {T29: $\exists !xF(x), F(b) \rightarrow b = \iota xF(x)$; der Zusatz von „(ii)“ scheint tatsächlich nicht nötig}
2. $b = \iota x \Box F(x) \rightarrow \iota x \Box F(x) = b$	T33 {substitutionsunproblematisch}
3. $\exists !x \Box F(x), \Box F(b) \rightarrow \iota x \Box F(x) = b$	RT20 (1, 2)

4. $\Box\exists!x\Box F(x), \Box\Box F(b) \rightarrow \Box(\iota x\Box F(x) = b)$ GRT8 (3)

5. $\Box(\iota x\Box F(x) = b) \rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ A7,(ii)

6. $\Box\exists!x\Box F(x), \Box\Box F(b) \rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ RT20 (4, 5)

7. $\Box\exists!x\Box F(x), \exists x\Box\Box F(x) \rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ R9 (6)

8. $\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists!x\Box F(x)$ A1

9. $\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists x\Box F(x) \wedge \forall x\forall y(\Box F(y) \wedge \Box F(x) > y = x)$ GD4 (8)

10. $\exists x\Box F(x) \wedge \forall x\forall y(\Box F(y) \wedge \Box F(x) > y = x) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ T9

11. $\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ RT7 (9, 10)

12. $\Box F(b) \rightarrow \Box\Box F(b)$ GT7

13. $\Box\Box F(b) \rightarrow \exists x\Box\Box F(x)$ A7,(ii)

14. $\Box F(b) \rightarrow \exists x\Box\Box F(x)$ RT7 (12, 13)

15. $\exists x\Box F(x) \rightarrow \exists x\Box\Box F(x)$ R9 (14)

16. $\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists x\Box\Box F(x)$ RT7 (11, 15)

17. $\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists!x\Box F(x)$ GT3

18. $\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists x\Box\Box F(x)$ RT7 (17, 16)

17. $\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ R3 (7, 18)

<u>P+GT11b: $\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$</u>

1. $\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ P+GT11a

2. $\Box\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ GRT4 (1)

3. $\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \Box\Box\exists!x\Box F(x)$ GT7

4. $\Box\exists!x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ RT7 (3, 2)

Jedoch, der obige Einwand gegen die logische Validität von $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ lässt sich natürlich erst recht gegen die logische Validität von $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x)$ vorbringen, sodass auch die Hoffnung aufzugeben ist, mit $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x)$ *als zusätzlichem Axiom* anhand von P+GT11a und RT7 deduktiv zu $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ zu gelangen und *damit* anhand von P+GT10 und R3 schließlich zum Endziel zu kommen: der „Einnahme“ von $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ als in **Pi+-Gamma** bewiesene Schlussformel. *Fazit*: Über P+GT10 kommt man bei dem Versuch, mit diesem Theorem als Brücke beweis-

mäßig zu ❐F(ιx❐F(x)) → ∃x❐F(x) vorzustoßen, schlussendlich nicht hinaus. Um zu ❐F(ιx❐F(x)) → ∃x❐F(x) zu gelangen, ist ein anderer Beweisweg zu suchen als der nicht gangbare über P+GT10 – vielleicht ein Beweisweg unter Erweiterung der Axiomatik von **Pi+-Gamma**; denn es drängt sich ja einem doch sehr auf, dass ❐F(ιx❐F(x)) → ∃x❐F(x) in **Pi+-Gamma**, *so wie es ist*, schlicht nicht beweisbar ist.

Im Gegensatz zu ❐F(ιx❐F(x)) → ∃x❐F(x) ist ❐∃!x❐F(x) → ∃x❐F(x) *offensichtlich* logisch valide und in **Pi+-Gamma** beweisbar, und deshalb – unter Heranziehung des oben schon angesprochenen (unproblematischen) Einsetzungsfalls ∃x❐F(x) → ❐F(ιx❐F(x)) von A10 – ist das auch ❐∃!x❐F(x) → ❐F(ιx❐F(x)). Ich halte formal und formell fest:

P+GT12: ❐∃!x❐F(x) → ❐F(ιx❐F(x))

1. ❐∃!x❐F(x) → ∃!x❐F(x)	GT3
2. ∃!x❐F(x) → ∃x❐F(x)	{siehe Zeile 11 im Beweis von P+GT11a}
3. ❐∃!x❐F(x) → ∃x❐F(x)	RT7 (1, 2)
4. ∃x❐F(x) → ❐F(ιx❐F(x))	A10 {Einsetzungsfall}
5. ❐∃!x❐F(x) → ❐F(ιx❐F(x))	RT7 (3, 4)

P+GT11b und P+GT12 geben zwei beweisbar inferenziell-notwendige Bedingungen für ❐∃!x❐F(x) an: ❐∃y❐(ιx❐F(x) = y) und ❐F(ιx❐F(x)). Sind diese Bedingungen beweisbar auch *zusammen* inferenziell-hinreichend für ❐∃!x❐F(x)? Vielversprechend ist zunächst:

P+GT13: ❐F(ιx❐F(x)), ❐∃y❐(ιx❐F(x) = y) → ❐∃x❐F(x) {*aber noch nicht:* … → ❐∃!x❐F(x)}

1. ❐F(ιx❐F(x)), ∃y❐(ιx❐F(x) =y) → ∃x❐F(x)	P+GT10
2. ❐❐F(ιx❐F(x)), ❐∃y❐(ιx❐F(x) =y) → ❐∃x❐F(x)	GRT8 (1)
3. ❐F(ιx❐F(x)), ❐∃y❐(ιx❐F(x) =y), ❐❐F(ιx❐F(x)) → ❐∃x❐F(x)	R2, R1 (2)
4. ❐F(ιx❐F(x)), ❐∃y❐(ιx❐F(x) =y) → ❐❐F(ιx❐F(x))	GT7, R2
5. ❐F(ιx❐F(x)), ❐∃y❐(ιx❐F(x) =y) → ❐∃x❐F(x)	R3 (3, 4)

Die Prämissen ❐∃y❐(ιx❐F(x) = y) und ❐F(ιx❐F(x)) garantieren also **Pi+-Gamma**-logisch die Konklusion ❐∃x❐F(x). Aber garantieren sie **Pi+-Gamma**-logisch auch die stärkere Konklusion

❐∃!x❐F(x)? Ließe man die *rigide* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen zu, neben der flexiblen, so sollte es *lieber nicht* so sein: angesichts der dann gegebenen Widerlegbarkeit der fraglichen Schlussfolgerung. Um dies einzusehen, sei der oben angegebene Einwand gegen die logische Validität von ❐F(ιx❐F(x)) → ∃y❐(ιx❐F(x) = y) in einem entscheidenden Punkt modifiziert:

Angenommen, es ist notwendig, dass genau drei Etwasse jeweils notwendigerweise ein Gott sind. Es ist dann notwendig, dass etwas notwendigerweise ein Gott ist {❐∃x❐F(x)}, *aber* es ist offensichtlich nicht notwendig, dass *genau ein* Etwas, notwendigerweise ein Gott ist {¬❐∃!x❐F(x)}. *Demgegenüber und damit zugleich*: Das [ausgewählte] Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist, ist notwendigerweise ein Gott {❐F(ιx❐F(x))}, und nichts spricht dagegen [???], dass das Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist, *rigide* ausgewählt ist und *mithin* etwas, y, so ist, dass das [ausgewählte] Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist, mit ihm, y, notwendigerweise identisch ist {∃y❐(ιx❐F(x) = y)}. Wenn es aber *so* ist {∃y❐(ιx❐F(x) = y)}, dann ist es notwendigerweise *so* {❐∃y❐(ιx❐F(x) = y)}; denn es ist beweisbar:

P+GT14: ∃y❐G(y) → ❐∃y❐G(y)

1. ∃y❐❐G(y) → ❐∃y❐G(y)	PGT12 {∃x❐F(x) → ❐∃xF(x)}
2. ∃y❐G(y) → ∃y❐❐G(y)	{siehe Zeile 15 im Beweis von P+GT11a}
3. ∃y❐G(y) → ❐∃y❐G(y)	RT7 (2, 1),

und ∃y❐(ιx❐F(x) = y) → ❐∃y❐(ιx❐F(x) = y) ist ein Einsetzungsfall von P+GT14.

{P+GT14 ist ein weiteres Beispiel für ein **Pi-Gamma**- und **Pi-Gamma***-Theorem, das (typographisch gleich, obwohl aussagemäßig modifiziert) weder nach **Pi*-Gamma** noch nach **Pi*+-Gamma** übernommen werden kann. In **Pi*-Gamma** und **Pi*+-Gamma** ist nur beweisbar ∃y❐(E(y) ∧ ❐G(y)) → ❐∃y❐G(y); die letztere Schlussformel ist ein Einsetzungsfall von P*GT7.}

Auf diese Überlegung *gegen* die logische Validität von ❐F(ιx❐F(x)), ❐∃y❐(ιx❐F(x) = y) → ❐∃!x❐F(x) ist aber zu antworten, dass nun eben, betreffs des unterstellten Szenarios, *sehr wohl* „etwas dagegen spricht“, dass das Etwas, das notwendigerweise ein Gott ist, *rigide* ausgewählt ist: eben dies, dass in der **Pi+-Gamma** zugrundeliegenden Normalsprache aus-

gemachtermaßen die rigide Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen neben der flexiblen *nicht* zugelassen ist (außer dann, wenn sie schon rein inhaltlich vom gegebenen Kennzeichnungsnamen her *gefordert* ist; doch das ist sie im vorliegenden Fall, angesichts des unterstellten Szenarios, gerade *nicht*).

Ungeachtet all dessen ist aber davon auszugehen, dass die Schlussformel $\square F(\iota x \square F(x)), \square \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square \exists !x \square F(x)$ in **Pi+-Gamma** *nicht* beweisbar ist. Sie wäre in **Pi+-Gamma** genau dann beweisbar, wenn man neben P+GT13 in **Pi+-Gamma** auch beweisen könnte:

$\square F(\iota x \square F(x)), \square \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square \forall x \forall y (\square F(y) \wedge \square F(x) > y = x)$.[127]

Und die letztere Schlussformel wiederum wäre in **Pi+-Gamma** beweisbar, wenn man da beweisen könnte:

$F(\iota x \square F(x)), \square (\iota x \square F(x) = c), \square F(b), \square F(a) \rightarrow b = a$.

Die Deduktion von $\square F(\iota x \square F(x)), \square \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square \forall x \forall y (\square F(y) \wedge \square F(x) > y = x)$ auf der angegebenen Grundlage ginge wie folgt:

1. $F(\iota x \square F(x)), \square (\iota x \square F(x) = c), \square F(b), \square F(a) \rightarrow b = a$ {als beweisbar unterstellt}
2. $F(\iota x \square F(x)), \square F(b), \square F(a), \square (\iota x \square F(x) = c) \rightarrow b = a$ R1 (1)
3. $F(\iota x \square F(x)), \square F(b), \square F(a), \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow b = a$ R9 (2)
4. $F(\iota x \square F(x)), \exists y \square (\iota x \square F(x) = y), \square F(b), \square F(a) \rightarrow b = a$ R1 (3)
5. $F(\iota x \square F(x)), \exists y \square (\iota x \square F(x) = y), \square F(b) \wedge \square F(a) \rightarrow b = a$ R7 (4)
6. $F(\iota x \square F(x)), \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square F(b) \wedge \square F(a) > b = a$ GRT2 (5)
7. $F(\iota x \square F(x)), \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \forall y (\square F(y) \wedge \square F(a) > y = a)$ R8 (6)
8. $F(\iota x \square F(x)), \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \forall x \forall y (\square F(y) \wedge \square F(x) > y = x)$ R8 (7)
9. $\square F(\iota x \square F(x)), \square \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square \forall x \forall y (\square F(y) \wedge \square F(x) > y = x)$ GRT8 (8).

Es ist aber nicht zu sehen, wie $F(\iota x \square F(x)), \square (\iota x \square F(x) = c), \square F(b), \square F(a) \rightarrow b = a$ in **Pi+-Gamma** beweisbar sein könnte.

Nur eine axiomatische Erweiterung kann hier weiterhelfen – ob man nun den Kalkül **Pi+-Gamma** durch das zusätzliche Axiom erst als vollendet ansieht, oder aber dadurch einen über **Pi+-Gamma** hinausgehenden neuen Kalkül gesetzt sein lässt (welcher aber abgesehen

[127] Es sei denen, die dieses Buch lesen, überlassen, herauszufinden, wie man mit $\square F(\iota x \square F(x)), \square \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square \exists x \square F(x)$ und $\square F(\iota x \square F(x)), \square \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square \forall x \forall y (\square F(y) \wedge \square F(x) > y = x)$ zu $\square F(\iota x \square F(x)), \square \exists y \square (\iota x \square F(x) = y) \rightarrow \square \exists !x \square F(x)$ kommt. Es ist nicht schwer.

von dem zusätzlichen Axiom in allem mit **Pi+-Gamma** übereinstimmt). Ich entscheide mich für das Letztere. Der neue Kalkül ist **Pi++-Gamma**, und das neu hinzukommende, ihn auszeichnende Axiom ist dieses:

A11 $F(\iota xF(x)), \Box(\iota xF(x) = c) \rightarrow \exists !xF(x)$

In A11 kann $F(\iota xF(x))$ deduktiv äquivalent (im Kalkül **Pi++-Gamma**) durch $\exists xF(x)$ ersetzt werden, denn mit A10 und A7,(i) erhält man das Theorem $\exists xF(x) \leftrightarrow F(\iota xF(x))$.

{Die Necessitierung der zweiten Prämisse in A11 ist axiomatisch notwendig; denn $F(\iota xF(x)), \iota xF(x) = c \rightarrow \exists !xF(x)$ [oder $\exists xF(x), \iota xF(x) = c \rightarrow \exists !xF(x)$] ist angesichts von normalsprachlichen Gegenbeispielen keine logisch valide Schlussformel.}

Das im gegebenen Zusammenhang bedeutsame Korollar von A11 ist nun dieses:

<u>P++GT1: $\Box F(\iota xF(x)), \Box(\iota xF(x) = c) \rightarrow \Box\exists !xF(x)$</u>

1. $F(\iota xF(x)), \Box(\iota xF(x) = c) \rightarrow \exists !xF(x)$ A11,(ii) {siehe hierzu weiter unten}
2. $\Box F(\iota xF(x)), \Box\Box(\iota xF(x) = c) \rightarrow \Box\exists !xF(x)$ GRT8 (1)
3. $\Box(\iota xF(x) = c) \rightarrow \Box\Box(\iota xF(x) = c)$ GT7
4. $\Box F(\iota xF(x)), \Box(\iota xF(x) = c) \rightarrow \Box\exists !xF(x)$ RT20 (3, 2)

Mit P++GT1 ergibt sich die gewünschte Verstärkung von P+GT13 (durch welche die beiden mit P+GT11b und P+GT12 gegebenen beweisbar inferenziell-notwendigen Bedingungen *zusammen* auch beweisbar inferenziell-hinreichend für $\Box\exists !x\Box F(x)$ sind) *wie folgt*:

<u>P++GT2: $\Box F(\iota x\Box F(x)), \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y) \rightarrow \Box\exists !x\Box F(x)$</u>

1. $\Box F(\iota x\Box F(x)), \Box(\iota x\Box F(x) = c) \rightarrow \Box\exists !x\Box F(x)$ P++GT1,(ii) {Vgl. hierzu die Ausführungen zu A11,(ii), und beachte die Widerlegbarkeit von $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists !x\Box F(x)$.}
2. $\Box F(\iota x\Box F(x)), \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y) \rightarrow \Box\exists !x\Box F(x)$ R9 (1)
3. $\Box\Box F(\iota x\Box F(x)), \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y) \rightarrow \Box\Box\exists !x\Box F(x)$ GRT8 (2)
4. $\Box\Box\exists !x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists !x\Box F(x)$ GT3

5. $\Box\Box F(\iota x\Box F(x)), \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x)$ RT20 (3, 4)

6. $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\Box F(\iota x\Box F(x))$ GT7

7. $\Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y), \Box\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x)$ R1 (5)

8. $\Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y), \Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x)$ RT20 (6, 7)[128]

9. $\Box F(\iota x\Box F(x)), \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x)$ R1 (8)

Ungeachtet dessen, dass mithilfe des Korollars P++GT1 von A11 mit P++GT2 ein von vornherein erwünschtes besonderes Ergebnis herausspringt, ist die Einführung von A11 – die Erhebung von F(ιxF(x)) [*oder*: ∃xF(x)], $\Box(\iota xF(x) = c) \rightarrow \exists!xF(x)$ zum Axiom – *nicht* ad hoc. Denn wenn, wie schon ausgemacht ist (nur *so* sichert man A10 *Eindeutigkeit* in der Anwendung und zugleich *weitreichende Anwendbarkeit*), *allein* die *flexible* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen (unter Wahrung von A10) zugelassen ist [bis auf die grenzfallmäßige Ausnahme, die *gleich* erneut angesprochen wird], so kann sich rein logisch in der Normalsprache die Wahrheit des $\Box(\iota xF(x) = c)$-Satzes nur dadurch einstellen, dass der ιxF(x)-Name *schon rein inhaltlich* diese Wahrheit erfordert; wobei sie bei der allein zugelassenen *flexiblen* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen angesichts der zugleich mit ihr bestehenden Wahrheit des F(ιxF(x))-Satzes [oder auch: ∃xF(x)-Satzes] *schon rein logisch* (unter Wahrung von A10) nur dadurch bestehen kann, dass der ∃!xF(x)-Satz ebenfalls wahr ist.[129]

{Indem Formeln wie Ausdrücke der Normalsprache behandelt werden, lässt sich die Berechtigung von A11 auch wie folgt einsehen:

Kann es logisch sein, dass ∃xF(x) [anders gesagt: F(ιxF(x)], $\Box(\iota xF(x) = c)$ und $\neg\exists!xF(x)$ zusammen wahr sind? Bei der *rigiden* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen sehr wohl; denn von den mindestens zwei **F**, von denen wegen der Wahrheit von ∃xF(x)und $\neg\exists!xF(x)$ auszugehen ist, könnte eines, nämlich **c**, durch ιxF(x) *rigide* als Bezeichnetes ausgewählt werden, was die Wahrheit auch von $\Box(\iota xF(x) = c)$ bedingen würde: $\Box(\iota xF(x) = c)$ besagt ja nichts anderes, als dass ιxF(x) **c** rigide [in allen möglichen Welten] bezeichnet. Nun ist aber nur

[128] RT20 ist dies: Γ', $A \rightarrow B$; Γ'', $B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma'$, Γ'', $A \rightarrow C$. Der verwendete Einsetzungsfall ist dieser: Γ' ist leer; für „A“: $\Box F(\iota x\Box F(x))$; für „B“: $\Box\Box F(\iota x\Box F(x))$; Γ'' ist $\Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$; für „C“: $\Box\exists!x\Box F(x)$. Das ergibt: $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\Box F(\iota x\Box F(x))$; $\Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y), \Box\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x) \Rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$, $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists!x\Box F(x)$.

[129] *Vergleiche*: Der Kennzeichnungsname „die kleinste Primzahl“ erfordert *schon rein inhaltlich* die Wahrheit des Satzes „Es ist notwendig, dass die kleinste Primzahl mit 2 identisch ist“; wobei diese Wahrheit bei der (unter Wahrung von A10) *flexiblen* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen angesichts der zugleich damit bestehenden Wahrheit des Satzes „Die kleinste Primzahl ist eine kleinste Primzahl“ [oder auch: „Etwas ist eine kleinste Primzahl“] *schon rein logisch* (unter Wahrung von A10, ohne auf die Arithmetik zu schauen) nur dadurch bestehen kann, dass auch der Satz „*Genau ein* Etwas ist eine kleinste Primzahl ist“ wahr ist.

die *flexible* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen normalsprachlich zulässig. Dann kann ιxF(x) **c** rigide nur dann bezeichnen, m. a. W.: ❒(ιxF(x) = c) nur dann wahr sein, wenn ιxF(x) dies schon rein inhaltlich [mittels seines semantischen Gehalts, mit allem, was darin liegt] erfordert; Letzeres ist jedoch ausgeschlossen, wenn neben ∃xF(x) auch ¬∃!xF(x) wahr ist, denn dann stehen mindestens zwei **F**, darunter **c**, gleichberechtigt zur Verfügung, und es ist nicht zu sehen, wie ιxF(x) schon rein inhaltlich rigide auf **c** als Bezeichnetes festgelegt sein kann. Bei der *flexiblen* Verstehensweise von Kennzeichnungsnamen kann es also logisch nicht sein, dass ∃xF(x) [anders gesagt: F(ιxF(x)], ❒(ιxF(x) = c) und ¬∃!xF(x) zusammen wahr sind; was bedeutet, dass die *Schlüsse* ∃xF(x), ❒(ιxF(x) = c) → ∃!xF(x) und F(ιxF(x), ❒(ιxF(x) = c) → ∃!xF(x) logisch valide sind. Und weil es in der vorausgehenden Argumentation allein auf die repräsentierte logische Form ankam, kann man aufgrund des eben Festgestellten schlussendlich dazu übergehen, dass die *Schlussformeln* ∃xF(x), ❒(ιxF(x) = c) → ∃!xF(x) und F(ιxF(x), ❒(ιxF(x) = c) → ∃!xF(x) logisch valide sind.}

Man beachte, dass A11 der Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen bedarf, wobei allerdings der Fall (i) bei A11 nicht eintreten kann, sodass von den zwei Fällen – (i) und (ii) –, von denen jeweils bei A6, A7 und A9 die Rede ist, bei A11 nur der Fall (ii) übrigbleibt, und zwar in der folgenden ganz einfachen Form: „wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen die Namenformel, die für ‚c' uniform substituiert wird, wie ‚c' eine *unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel* sein muss". Dass diese Beschränkung sinnvoll ist, lässt sich im Fall von A11 besonders einfach einsehen: Wenn das Folgende ein in Beweisen zulässiger Einsetzungsfall von A11 wäre: F(ιxF(x)), ❒(ιxF(x) = ιxF(x)) → ∃!xF(x), so wäre A11 *ad absurdum* geführt; denn mit der sehr einfach zu beweisenden (und selbstverständlich logisch validen) Schlussformel F(ιxF(x)) → ❒(ιxF(x) = ιxF(x)) erhielte man [wegen R3] aus jenem Einsetzungsfall als **Pi++-Gamma**-Theorem: F(ιxF(x)) → ∃!xF(x), wofür es nun viele Gegenbeispiele gibt.[130]

{Ein genauso absurdes Resultat erhielte man, wenn man die Schlussformel, von der weiter oben einmal erwogen wurde, sie als elftes Axiom hinzuzunehmen, nämlich: ❒F(ιx❒F(x)) → ∃y❒(ιx❒F(x) = y), als Axiom tatsächlich hinzunähme: Aus einem in Beweisen zulässigen Einsetzungsfall von P++GT1 bekommt man ja mit R9: ❒F(ιx❒F(x)), ∃y❒(ιx❒F(x) = y) → ❒∃!x❒F(x) [siehe die 2. Zeile des Beweises von P++GT2], woraus sich mit dem „Axiom" ❒F(ιx❒F(x)) → ∃y❒(ιx❒F(x) = y) und R3 ergäbe: ❒F(ιx❒F(x)) → ❒∃!x❒F(x) – wofür es ebenfalls viele Gegenbeispiele gibt. [Weiter oben im Text wurde die logische *Invalidität* von ❒F(ιx❒F(x)) → ❒∃!x❒F(x) bereits thematisiert und dargetan.]}

[130] Z. B.: Die [ausgewählte] Primzahl ist eine Primzahl, aber es ist nicht der Fall, dass genau ein Etwas eine Primzahl ist.

Kommen wir zurück auf eine offene Frage: $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ – die Umkehrung eines Einsetzungsfalls von A10 – ist in **Pi+-Gamma**, wie es scheint, nicht beweisbar, ist aber intuitiv – aus normalsprachlicher Perspektive – sehr wohl logisch valide. Was ist kalkülmäßig zu tun?

A11 hilft in dieser Hinsicht nicht weiter, denn mit A11 – bzw. näherhin: P++GT1 – bekommt man nicht mehr, als man schon längst hat:

1. $\Box F(\iota x \Box F(x)), \Box(\iota x \Box F(x) = c) \rightarrow \Box \exists !x \Box F(x)$ P++GT1 {Einsetzungsfall}
2. $\Box F(\iota x \Box F(x)), \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y) \rightarrow \Box \exists !x \Box F(x)$ R9 (1)
3. $\Box \exists !x \Box F(x) \rightarrow \exists !x \Box F(x)$ GT3
4. $\Box F(\iota x \Box F(x)), \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y) \rightarrow \exists !x \Box F(x)$ RT20 (2, 3)
5. $\exists !x \Box F(x) \rightarrow \exists x \Box F(x) \wedge \forall x \forall y(\Box F(y) \wedge \Box F(x) > y = x)$ A1, GD4
6. $\exists x \Box F(x) \wedge \forall x \forall y(\Box F(y) \wedge \Box F(x) > y = x) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ T9
7. $\exists !x \Box F(x) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ RT7 (5, 6)
8. $\Box F(\iota x \Box F(x)), \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ RT20 (4, 7).

Das ist nichts anderes als das (im Rahmen von **Pi+-Gamma** – *ohne* A11 – schon längst bewiesene) Theorem P+GT10, das eine bloße Annäherung an $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ ist und von dem aus, wie festgestellt, kein Weg weiter zum Beweis von $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ führt.

Machen wir von einer anderen Seite her einen neuen Anlauf und betrachten zunächst die folgenden drei – nach der Beweisschwierigkeit zu urteilen: *trivialen* – **Pi+-Gamma**-Theoreme:

<u>P+GT15a: $\forall x F(x) \rightarrow \Diamond F(a)$</u> *Schwaches dictum de omni* (SDO)

1. $\forall x F(x) \rightarrow F(a)$ A6,(i)
2. $\Box \neg F(a) \rightarrow \neg F(a)$ GT3 {Einsetzungsfall}
3. $F(a) \rightarrow \neg \Box \neg F(a)$ RT4 {RKP} (2)
4. $\forall x F(x) \rightarrow \neg \Box \neg F(a)$ RT7 (1, 3)
5. $\forall x F(x) \rightarrow \Diamond F(a)$ GD3 (4)

<u>P+GT15b: $\Box F(a) \rightarrow \exists x F(x)$</u> *Schwache „Existenzgeneralisierung“* (SEG)

1. $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ A7,(i)

2. $\square F(a) \rightarrow F(a)$ GT3

3. $\square F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ RT7 (2, 1)

P+GT15c: $\square(b = a), F(a) \rightarrow F(b)$ *Schwache Substituierbarkeit der Identischen* (SSID)

1. $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ A9,(i)

2. $F(a), b = a \rightarrow F(b)$ R1 (1)

3. $\square(b = a) \rightarrow b = a$ GT3

4. $F(a), \square(b = a) \rightarrow F(b)$ RT20 (3, 2)

5. $\square(b = a), F(a) \rightarrow F(b)$ R1 (4)

{Ist das Axiom A6, A7 oder A9 in der rechtsseitigen Kommentierung von Beweisen *selbst* gemeint – wie es in den drei eben angeführten Beweisen vorkommt – und nicht ein Einsetzungsfall von ihm, der von ihm selbst verschieden ist, so ist der Zusatz „(i)" zu ihm eigentlich überflüssig, aber im Blick darauf, dass jedes dieser Axiome trivialerweise ein in Beweisen zulässiger Einsetzungsfall von sich selbst ist, doch auch akzeptabel im Sinne konsequenter Vermerkung der Anwendung der Zwei-Fälle-Beschränkung.}

P+GT15a und P+GT15b unterliegen der Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen, und zwar mit der Verengung auf den Fall (ii) allein. Denn $\forall y\Diamond(y \neq \iota xF(x)) \rightarrow \Diamond\Diamond(\iota xF(x) \neq \iota xF(x))$ ist zwar ein Einsetzungsfall „an und für sich" von P+GT15a, aber darf kein *in* **Pi+-Gamma**-*Beweisen gebildeter* Einsetzungsfall von P+GT15a sein. Ebenso ist $\square\square(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\square(y = \iota xF(x)$ ein Einsetzungsfall „an und für sich" von P+GT15b, aber darf kein in *in* **Pi+-Gamma**-*Beweisen gebildeter* Einsetzungsfall von P+GT15b sein.

{Warum nicht? Ich sage nur (nach allem, was schon gesagt ist): Es ist allem möglich, nicht die Anzahl der Planeten zu sein; aber es ist nicht möglich, dass es möglich ist, dass die Anzahl der Planeten nicht die Anzahl der Planeten ist. Und es ist notwendig, dass es notwendig ist, dass die Anzahl der Planeten die Anzahl der Planeten ist; aber nichts [keinem Etwas] ist es notwendig die Anzahl der Planeten zu sein.}

Das Besondere am dritten Theorem, P+GT15c, ist nun aber, dass *alle* Einsetzungsfälle von ihm intuitiv – also: aus normalsprachlicher Perspektive – logisch valide sind; dass dementsprechend sie doch *alle* in Beweisen verwendet („gebildet") werden dürfen. Bei diesem Theorem entfällt also – den logischen Fakten folgend – die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Ein-

setzungsfallbildung in Beweisen – *obwohl* es doch unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln enthält, sogar im Bereich eines Modaloperators, und von A9 abhängig ist!

Weil SSID ohne die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen auskommt, empfiehlt es sich, SSID gegenüber SID als das grundlegendere Prinzip zu erachten und es statt SID (A9) in einem gegenüber **Pi+-Gamma** (oder auch **Pi++-Gamma**) modifizierten, aber zu **Pi+-Gamma** (bzw. **Pi++-Gamma**) deduktiv äquivalenten Kalkül als Axiom zu verwenden. Um aber SID als Theorem zu haben (was doch unerlässlich ist), bedarf es eines weiteren Alternativaxioms, nämlich: $b = a \rightarrow \Box(b = a)$, *mit* Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen [nur Fall (ii) ist relevant]. Es bedarf also abermals, wie bei SSID, einer Schlussformel – nun ist es *Necessitas identitatis* (NID) – *als Grundgesetz*, welche im gegenwärtigen Stand ein **Pi+-Gamma**-Theorem ist: das aus **Pi-Gamma** übernommene PGT15; hinzukommt allerdings bei PGT15 in **Pi+-Gamma** gegenüber seinem Stand in **Pi-Gamma** die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen. Die Herleitung von SID aus den beiden Alternativaxiomen ist dann sehr einfach:

1. $\Box(b = a), F(a) \rightarrow F(b)$ SSID {1. Alternativaxiom}
2. $F(a), \Box(b = a) \rightarrow F(b)$ R1 (1)
3. $b = a \rightarrow \Box(b = a)$ NID,(ii) {2. Alternativaxiom}
4. $F(a), b = a \rightarrow F(b)$ RT20 (3, 2)[131]
5. $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ R1 (4).

Ersichtlich ererbt SID (nach gegenwärtigem Stand: das Axiom A9) *von* NID die *für es*, aber nicht für SSID, notwendige Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen, *nicht* von SSID.

P+GT15c ist nicht das einzige **Pi+-Gamma**-Prinzip, bei dem die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen entfällt. Gleiches gilt für die folgenden beweistechnisch trivialen Korollare von PGT15 und A9:

<u>P+GT16a: $\exists y\Box(b = y), \exists y\Box(a = y), b = a \rightarrow \Box(b = a)$</u>

1. $b = a \rightarrow \Box(b = a)$ PGT15,(ii)
2. $\exists y\Box(b = y), \exists y\Box(a = y), b = a \rightarrow \Box(b = a)$ R2 {mehrfach}, R1 {mehrfach} (1)

[131] Zur Erinnerung: RT20 ist Γ', $A \rightarrow B$; Γ'', $B \rightarrow C \Rightarrow \Gamma'$, Γ'', $A \rightarrow C$. In der vorliegenden Anwendung ist Γ' leer und Γ'' „F(a)“; und anstelle von „A“ steht „b = a“, anstelle von „B“ „$\Box$(b = a)“, anstelle von „C“ „F(b)“.

P+GT16b: $\exists y\Box(b = y), \exists y\Box(a = y), b = a, F(a) \rightarrow F(b)$

1. $b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ A9,(i)

2. $\exists y\Box(b = y), \exists y\Box(a = y), b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ R2 {mehrfach}, R1 {mehrfach} (1)

Es zeigt sich in diesen beiden Theoremen ein allgemeines Muster, *welches zum einen Teil* beschrieben wird durch das folgende trivialerweise beweisbare Schema für Schlussregelformeln, bei denen die Schlussformel in der Prämisse mindestens eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel enthält:

P+GRT1: $\Gamma \rightarrow \sigma \Rightarrow \exists\upsilon\Box(\alpha_1 = \upsilon) \ldots \exists\upsilon\Box(\alpha_n = \upsilon), \Gamma \rightarrow \sigma$, wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ sämtliche unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln in $\Gamma \rightarrow \sigma$ sind [etwa der Reihenfolge ihres Erstauftretens in $\Gamma \rightarrow \sigma$ nach];

welches, hierauf bezogen, *zum anderen* (höchst bemerkenswerten) *Teil* aber in Folgendem besteht: Während $\Gamma \rightarrow \sigma$ der Zwei-Fälle-Beschränkung für Einsetzungsfälle in Beweisen unterliegen mag, tut dies $\exists\upsilon\Box(\alpha_1 = \upsilon) \ldots \exists\upsilon\Box(\alpha_n = \upsilon), \Gamma \rightarrow \sigma$ nicht mehr, sondern *jeder* Einsetzungsfall davon ist in Beweisen zulässig.

{Hierzu ein weiteres Beispiel: Aus A7 – $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ – erhält man mit P+GRT1 [oder auch schlicht mit R2, R1] das Theorem: $\exists y\Box(a = y), F(a) \rightarrow \exists xF(x)$; aber im Gegensatz zu $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ unterliegt $\exists y\Box(a = y), F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ *nicht* der Zwei-Fälle-Beschränkung für Einsetzungsfälle in Beweisen. Man kann also *ohne Weiteres* beweisend zu dem Einsetzungsfall (der letzteren Formel) und weiteren Theorem $\exists y\Box(\iota xG(x) = y), F(\iota xG(x)) \rightarrow \exists xF(x)$ voranschreiten, wovon dann wieder $\exists y\Box(\iota xG(x) = y), \Box F(\iota xG(x)), \rightarrow \exists x\Box F(x)$ ein (von vornherein unproblematischer) Einsetzungsfall ist und ein weiteres Theorem darstellt. Vgl. hiermit das schon auf ganz anderem Wege gewonnene Theorem P+GT3, das sich von $\exists y\Box(\iota xG(x) = y), \Box F(\iota xG(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ nur dadurch [logisch unerheblich] unterscheidet, dass „F“ und „G“ und die beiden Prämissen die Positionen getauscht haben. Und siehe wiederum von $\exists y\Box(\iota xG(x) = y), \Box F(\iota xG(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ den (von vornherein unproblematischen) Einsetzungsfall $\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y), \Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$, ein Theorem, das – bis auf eine Prämissenumplatzierung – als P+GT10 ebenfalls schon auf ganz anderem Wege gewonnen wurde.}

{Von Saul Kripke stammt die Einsicht, dass wahre Identitätsaussagen, die ausschließlich *Eigennamen* involvieren, notwendigerweise wahr sind. Die logikgesetzliche Entsprechung dieser Einsicht ist PGT15, welches (in **Pi+Gamma**, aber *in anderer Weise* auch schon in **Pi-Gamma**) bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen auf unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln beschränkt ist; denn die formalen Repräsentanten von

Eigennamen sind eben unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln. Das bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen *nicht* beschränkte Theorem P+GT16a, das [am direktesten] durch die Anwendung von P+GRT1 auf PGT15,(ii) hervorgeht, ist dann die logikgesetzliche Entsprechung der folgenden unabweislichen *Erweiterung* der kripkeschen Einsicht: Nicht nur, wenn eine wahre Identitätsaussage ausschließlich Eigennamen involviert, sondern ganz generell dann, wenn sie ausschließlich *rigide Designatoren* involviert, ist sie notwendigerweise wahr. Diese letztere logikgesetzliche Entsprechung kommt dadurch zustande, dass das *Ein-rigider-Designator-sein* eines singulären Terms formal durch $\exists\upsilon\Box(\nu = \upsilon)$ repräsentiert wird, wobei ν diejenige Namenformel ist (sie mag nun bei einem Einsetzungsfall von P+GT16a in einem Beweis *sehr wohl* auch eine *Kennzeichnungsnamenformel* sein!), welche den fraglichen singulären Term (er mag seinerseits ein Kennzeichnungsname sein) formal repräsentiert.

Also: Mit $b = a \rightarrow \Box(b = a)$ [PGT15,(ii)] ist als Einsetzungsfall dieses Theorems z. B. auch $c = a \rightarrow \Box(c = a)$ und $c = d \rightarrow \Box(c = d)$ in **Pi+-Gamma** beweisbar, aber weder $\iota xG(x) = a \rightarrow \Box(\iota xG(x) = a)$ noch $\iota xG(x) = \iota xF(x) \rightarrow \Box(\iota xG(x) = \iota xF(x))$. Hingegen ist mit $\exists y\Box(b = y)$, $\exists y\Box(a = y)$, $b = a \rightarrow \Box(b = a)$ [P+GT16a] nun als Einsetzungsfall dieses letzteren Theorems neben $\exists y\Box(c = y)$, $\exists y\Box(a = y)$, $c = a \rightarrow \Box(c = a)$ und $\exists y\Box(c = y)$, $\exists y\Box(d = y)$, $c = d \rightarrow \Box(c = d)$ *zudem* in **Pi+Gamma** beweisbar: $\exists y\Box(\iota xG(x) = y)$, $\exists y\Box(a = y)$, $\iota xG(x) = a \rightarrow \Box(\iota xG(x) = a)$ und $\exists y\Box(\iota xG(x) = y)$, $\exists y\Box(\iota xF(x) = y)$, $\iota xG(x) = \iota xF(x) \rightarrow \Box(\iota xG(x) = \iota xF(x))$.}

Das beschriebene allgemeine Muster könnte man „das Muster der Rigiditätsfestschreibung per Prämissenerweiterung für alle in ein Prinzip uniform substituierbaren Namenformeln“ nennen. Das prima facie Irritierende daran ist, dass $\exists\upsilon\Box(\alpha_1 = \upsilon) \ldots \exists\upsilon\Box(\alpha_n = \upsilon), \Gamma \rightarrow \sigma$ stets als mit $\Gamma \rightarrow \sigma$ deduktiv äquivalent *erscheint*, aber doch gar nicht damit deduktiv äquivalent *ist* in dem typischen Fall, dass die Schlussformel $\Gamma \rightarrow \sigma$, die mindestens eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel enthält, der Zwei-Fälle-Beschränkung bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen unterliegt, die entsprechend prämissenerweiterte und -umgeordnete, sonst gleiche Schlussformel $\exists\upsilon\Box(\alpha_1 = \upsilon) \ldots \exists\upsilon\Box(\alpha_n = \upsilon), \Gamma\rightarrow \sigma$ jedoch *nicht*!; und zwar stets *so erscheint*, da ja $\rightarrow \exists\upsilon\Box(\alpha = \upsilon)$ für alle unstrukturierten und sinnunbestimmten Namenformeln α in **Pi+-Gamma** beweisbar ist; denn PGT2 [$\rightarrow \exists y\Box(a = y)$] wird ja von **Pi-Gamma** nach **Pi+-Gamma** übernommen. Doch man darf hier eben nicht vergessen, dass PGT2 zwar von **Pi-Gamma** nach **Pi+-Gamma** übernommen wird, dass dieses Theorem aber in **Pi+-Gamma** der Zwei-Fälle-Beschränkung bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen unterliegt [während diese Beschränkung in **Pi-Gamma** funktionslos wäre, da Kennzeichnungsnamenformeln dort nicht vorkommen, man es dort ohnehin nur mit unstrukturierten und sinnunbestimmten Namenformeln zu tun hat].

Sowohl P+GRT1 als auch P+GT15c haben *partiell* einen *grundprinziplichen Charakter*: sie haben ihn *nicht* hinsichtlich ihres expliziten Gehalts (der ist ja in **Pi+-Gamma** echtableitbar), sondern nur hinsichtlich der mit ihnen verbundenen Entgrenzung, was die Bildung von Einsetzungsfällen von ihnen in Beweisen angeht. Denn diese Entgrenzung ist in **Pi+-Gamma** nicht – nicht bei dem gegenwärtigen grundprinziplichen Stand des Kalküls – echtableitbar, sondern sie ist *extra postuliert* (nicht willkürlich freilich, sondern aufgrund der normalsprachlich orientierten logischen Intuition). Um diese besondere Rolle von sowohl P+GRT1 als auch P+GT15c hervorzuheben (*freilich* stehen die beiden nur paradigmatisch für sehr viele Theoreme von **Pi+Gamma**), sei die folgende besondere Markierung eingeführt: es wird geschrieben „P+GRT1“ und „P+GT15c“ [statt nur „P+GRT1“ und „P+GT15c“]. Wie durch diese Benennungsweise auch deutlich wird, wird über **Pi+-Gamma** durch die Anerkenntnis des partiell grundprinziplichen Charakters von P+GRT1 und P+GT15c nicht hinausgegangen; es handelt sich beim behandelten Kalkül nach wie vor um den Kalkül **Pi+-Gamma**.

Kennzeichnungsnamen können allein schon bedingt durch ihren semantischen Gehalt *rigide Designatoren* sein und sind es oft („die kleinste Primzahl“, usw.); dieses Faktum begründet die Relevanz von P+GRT1. Aber ist denn für irgendeine Kennzeichnungsnamen*formel* in **Pi+-Gamma** beweisbar, dass sie einen rigiden Designator formal repräsentiert? Ja, dem ist so:

P+GT17: $\rightarrow \exists y \Box(\iota x(x = a) = y)$

1. $\rightarrow a = a$	A8	
2. $a = a \rightarrow \exists x(x = a)$	A7,(i)	{„$(_ = a)$“ für „F“}
3. $\rightarrow \exists x(x = a)$	R3 (2, 1)	
4. $\exists x(x = a) \rightarrow \iota x(x = a) = a$	A10	
5. $\rightarrow \iota x(x = a) = a$	R3 (4, 3)	
6. $\rightarrow \Box(\iota x(x = a) = a)$	GRT3 (5)	
7. $\Box(\iota x(x = a) = a) \rightarrow \exists y \Box(\iota x(x = a) = y)$	A7,(ii)	{„y“ für „x“, „$\Box(\iota x(x = a) = _)$“) für „F“}[132]
8. $\rightarrow \exists y \Box(\iota x(x = a) = y)$	R3 (7, 6)	

[132] Die Einsetzungsfallbildung verläuft so: Aus „$F(a) \rightarrow \exists x F(x)$“ geht hervor „$F(a) \rightarrow \exists y F(y)$“, und daraus „$\Box(\iota x(x = a) = _)(a) \rightarrow \exists y \Box(\iota x(x = a) = _)(y)$“, also nach Einsetzung des „Arguments“ in die Leerstelle: „$\Box(\iota x(x = a) = a) \rightarrow \exists y \Box(\iota x(x = a) = y)$“.

„ιx(x = a)“ ist also eine Kennzeichnungsnamenformel der angefragten Art. Gleiches gilt mittels der für P+GT17 in Beweisen zulässigen Einsetzungsfallbildung [zu setzen ist da als Rechtfertigung: P+GT17,(ii)[133]] für die Kennzeichnungsnamenformeln: „ιy(y = a)“ „ιx(x = b)“, „ιx(x = d)“, „ιz(z = c)“ usw. [ins Unendliche], *nicht* jedoch, z. B., für „ιx(x = ιzF(z))“. Für letztere Kennzeichnungsnamenformel ist nur das Folgende beweisbar:

P+GT18: $\rightarrow \square(\iota x(x = \iota z F(z)) = \iota z F(z)); \rightarrow \square\exists y(\iota x(x = \iota z F(z)) = y)$

1. $\rightarrow \iota z F(z) = \iota z F(z)$	A8
2. $\iota z F(z) = \iota z F(z) \rightarrow \exists x(x = \iota z F(z))$	A7,(i) {„(_ = ιzF(z))“ für „F“}
3. $\rightarrow \exists x(x = \iota z F(z))$	R3 (2, 1)
4. $\exists x(x = \iota z F(z)) \rightarrow \iota x(x = \iota z F(z)) = \iota z F(z)$	A10
5. $\rightarrow \iota x(x = \iota z F(z)) = \iota z F(z)$	R3 (4, 3)
6. $\rightarrow \square(\iota x(x = \iota z F(z)) = \iota z F(z))$	GRT3 (5)
7. $\iota x(x = \iota z F(z)) = \iota z F(z) \rightarrow \exists y(\iota x(x = \iota z F(z)) = y)$	A7,(i) {„y“ für „x“, „ιzF(z)“ für „a“, „(ιx(x = ιzF(z)) = _)“ für „F“}
8. $\rightarrow \exists y(\iota x(x = \iota z F(z)) = y)$	R3 (7, 5)
9. $\rightarrow \square\exists y(\iota x(x = \iota z F(z)) = y)$	GRT3 (8)

Erweitern wir den Blick! Der Kalkül **Pi++-Gamma** ist, wie gesagt, der Kalkül **Pi+-Gamma** *plus* A11; es ist aufschlussreich zu verfolgen, was geschieht, wenn A11 auf P+GRT1 trifft. Zunächst:

P++GT3: $F(\iota x F(x)), \square(\iota x F(x) = c), \exists y \square(c = y) \rightarrow \exists! x F(x)$

1. $F(\iota x F(x)), \square(\iota x F(x) = c) \rightarrow \exists! x F(x)$ A11
2. $F(\iota x F(x)), \square(\iota x F(x) = c), \exists y \square(c = y) \rightarrow \exists! x F(x)$ P+GRT1, R1 (1)

[133] Von der Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen ist bei P+GT17 nur der zweite Fall relevant, und zwar in der folgenden ganz einfachen Form (vgl. die Einsetzungsfallregelung bei A11): „wo bei der Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen die Namenformel, die für ‚a‘ uniform substituiert wird, wie ‚a‘ eine *unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel* sein muss“. [Diese Bedingung ist trivialerweise erfüllt, wenn für „a“ uniform „a“ substituiert wird.]

Während „ιxF(x)“ in einem Beweis nicht in A11 zur Bildung eines Einsetzungsfall von ihm substituiert werden darf (in Ersetzung von „c“),[134] ist das bei P++GT3 völlig in Ordnung; denn P++GT3 ist, was die Einsetzungsfallbildung in Beweisen angeht, *entgrenzt*, *weil* P++GT3 das Resultat einer Anwendung von P+GRT1 ist. Hier folgt, was sich durch die Substitution von „ιxF(x)“ in P++GT3 des Weiteren ergibt:

P++GT4: $F(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists !xF(x)$

1. $F(\iota xF(x)), \Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists !xF(x)$ P++GT3 {Einsetzungsfall}
2. $F(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y), \Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists !xF(x)$ R1 (1)
3. $F(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \Box(\iota xF(x) = \iota xF(x))$ **Pi+-Gamma**-Theorem {leicht beweisbar}
4. $F(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists !xF(x)$ R3 (2, 3)

Dasselbe Ergebnis lässt sich natürlich „ruckzuck“ durch die Anwendung von R9 auf A11 erreichen; aber, wie soeben gesehen, kann man zu ihm auch ganz ohne den Gebrauch von R9 gelangen.

{Ein Einsetzungsfall von P++GT4 ist übrigens dies: $\iota x(x = a) = a, \exists y\Box(\iota x(x = a) = y) \rightarrow \exists !x(x = a)$,[135] woraus sich mit den Theoremen $\rightarrow \iota x(x = a) = a$ [5. Zeile des Beweises von P+GT17] und $\rightarrow \exists y\Box(\iota x(x = a) = y)$ [P+GT17] – die als **Pi+-Gamma**-Theoreme auch **Pi++-Gamma**-Theoreme sind – und durch Anwendungen von R2 und R3 am Ende ergibt: $\rightarrow \exists !x(x = a)$. *Selbstverständlich* lässt sich dieses Letztere in **Pi++-Gamma** auch in ganz anderer Weise beweisen; aber das Vorhandensein sehr unterschiedlichen Beweiswege zu identischen Beweiszielen – wie soeben und gerade zuvor bemerkt – sind doch ein starkes Indiz für die Kohärenz des Kalküls.}

Schließlich: Kann P+GT15c bei der noch offenstehenden Frage nach dem Beweisbarkeitsstatus von $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ helfen? Vielleicht *so*:

1. $\Box(b = \iota x\Box F(x)), \Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box F(b)$ P+GT15c
2. $\Box F(b) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ A7,(ii)
3. $\Box(b = \iota x\Box F(x)), \Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ RT20 (1, 2)
4. $\Box F(\iota x\Box F(x)), \Box(b = \iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ R1 (3)

[134] Wir haben gesehen, zu welcher Absurdität es führt, wenn man es dennoch tut.

[135] In „$F(\iota xF(x)), \exists y\Box(\iota xF(x) = y) \rightarrow \exists !xF(x)$“ wird für „F“ gesetzt „(_ = a)“, was Folgendes ergibt: „$(_ = a)(\iota x(_ = a)(x)), \exists y\Box(\iota x(_ = a)(x) = y) \rightarrow \exists !x(_ = a)(x)$“; d. h. nach Einsetzung des „Arguments“ in die Leerstelle: „$\iota x(x = a) = a, \exists y\Box(\iota x(x = a) = y) \rightarrow \exists !x(x = a)$“.

5. $\Box F(\iota x \Box F(x)), \exists y \Box(y = \iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ R9 (4).

Aber damit ist wiederum keinerlei Fortschritt gegenüber P+GT10 [also: $\Box F(\iota x \Box F(x)), \exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y) \rightarrow \exists x \Box F(x)$] gegeben, zumal ja $\exists y \Box(\iota x \Box F(x) = y) \leftrightarrow \exists y \Box(y = \iota x \Box F(x))$ beweisbar ist (siehe P+GT8d).

Jedoch: Mit dem Folgenden erweist sich nun am Ende die *anscheinende* Nichtbeweisbarkeit in **Pi+-Gamma** der vom intuitiven Standpunkt aus logisch validen Schlussformel $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ als eine bloß *scheinbare*, nicht tatsächlich gegebene Nichtbeweisbarkeit:

P+GT19a: $\Box F(\iota x F(x)) \rightarrow \Box \exists x F(x)$

1. $F(\iota x F(x)) \rightarrow \exists x F(x)$ A7,(i)
2. $\Box F(\iota x F(x)) \rightarrow \Box \exists x F(x)$ GRT4 (1)

[P+GT19b: $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$] {der Einklammerungsgrund wird gleich deutlich werden}

1. $\Box\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \Box \exists x \Box F(x)$ P+GT19a {Einsetzungsfall: „$\Box F(_)$“ für „F“}
2. $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \Box\Box F(\iota x \Box F(x))$ GT7
3. $\Box \exists x \Box F(x) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ GT3
4. $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \Box \exists x \Box F(x)$ RT7 (2, 1)
5. $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ RT7 (4, 3)

Die intuitiv logische valide Schlussformel $\Box F(\iota x \Box F(x)) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ entpuppt sich also schließlich als in **Pi+-Gamma** *beweisbar*, also: als nicht nur intuitiv logisch valide, sondern auch in der Weise der durch **Pi+-Gamma** formulierten Logik logisch valide (wie erwünscht), obwohl sie in **Pi+-Gamma** *nicht* in der einfachsten Weise beweisbar ist: *nicht* als Einsetzungsfall von A7; denn der fragliche Einsetzungsfall ist in **Pi+-Gamma** *in Beweisen* nicht zulässig.

Jedoch (dieses „jedoch“ ist ein dickes): In der Beweisführung, die vermittels P+GT19a das Theorem P+GT19b zeitigt (prima facie), wird die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen gewissermaßen ausgetrickst: *umgangen* – mit erwünschtem Ergebnis. In analoger Weise austricksen kann man diese Beschränkung aber auch *mit höchst unerwünschtem Ergebnis*:

1. $\rightarrow \Box(\iota x F(x) = \iota x F(x))$ **Pi+-Gamma**-Theorem
2. $G(\iota x F(x)) \rightarrow \exists y G(y)$ A7,(i)

3. $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ Theorem bei 2. {Einsetzungsfall: „$\Box(\iota xF(x) = _)$“ für „G“}

4. $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ R3 (3, 1).

Was nun? Nun, beide A7-Einsetzungsfälle – $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ und $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ – akzeptieren kann man nicht, da nun eben $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ inakzeptabel ist. Beide zu verwerfen, ist allerdings möglich; man kann, **Pi+-Gamma** ergänzend, die folgende Kalkülregulierung aufstellen:

Caveat für **Pi+-Gamma**

Eine **Pi+-Gamma**-Deduktion mit einem (wie auch immer gewonnenen) Einsetzungsfall χ von A7 oder von einem anderen Prinzip *als Schritt* (am Anfang, in der Mitte oder am Schluss), welcher Einsetzungsfall gemäß der Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen *nicht* als Einsetzungsfall von A7 bzw. dem anderen Prinzip *in Beweisen* zulässig ist, *zählt nicht* als *beweisende* **Pi+-Gamma**-Deduktion für χ, *mag die Deduktion ansonsten auch vollständig korrekt sein*.

Damit wäre der Theoremstatus von $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ erledigt, aber *leider* eben auch der von $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ [daher die obige Einklammerung] – *und*: die Schlussformel $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ kann auch nicht als zusätzliches Axiom zu **Pi+-Gamma** hinzugenommen werden, solange das obige Caveat besteht.

Eine andere Möglichkeit, mit dem aufgewiesenen Problem umzugehen, wäre es, einen allgemeinen *deduktionsformalen* Grund zu finden (und gefunden in die Kalkülverfassung von **Pi+-Gamma** zu integrieren), *warum* die Einsetzungsfallbildung, die von dem sicheren **Pi+-Gamma**-Theorem $\Box F(\iota xF(x)) \rightarrow \Box\exists xF(x)$ [P+GT19a] zu $\Box\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$ gelangt [siehe die 1. Zeile der schließlich zu $\Box F(\iota x\Box F(x)) \rightarrow \exists x\Box F(x)$ führenden Deduktion], in Ordnung ist, aber die Einsetzungsfallbildung, die von dem ebenso sicheren **Pi+-Gamma**-Theorem $G(\iota xF(x)) \rightarrow \exists yG(y)$ zu $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ gelangt [siehe die zuletzt angegebene Deduktion], *nicht* in Ordnung ist, obwohl doch *beide* – *beide* die uniforme Substitution von Namenformeln vermeidende (sie umgehende) – Einsetzungsfallbildungen [im ersten Fall mit einigen unproblematischen zusätzlichen Schritten] zu Einsetzungsfällen von A7 führen, die gemäß der Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen *nicht* zulässig sind.

Ich verfolge diese letztere Möglichkeit nun aber nicht weiter. Um einen Schlusspunkt zu setzen, sei die „Caveat für **Pi+-Gamma**“ genannte Kalkülregulierung akzeptiert.

Es ist angesichts des Substitutionsproblems modaler Prädikatenlogik alles andere als leicht, zwischen der Skylla zu kleiner Einschränkungen bei der Einsetzungsfallbildung in Beweisen und der Charybdis zu großer Einschränkungen dabei hindurchzufahren. Das Substitutionsproblem modaler Prädikatenlogik ist mit den Ausführungen in diesem Kapitel *bestenfalls* für *alethisch/ontisch-modale* prädikatenlogische Kalküle und die zugehörigen Normalsprachen gelöst, *nicht* für *epistemisch-* oder *doxastisch-modale* oder *epistemisch+doxastisch-modale* prädikatenlogische Kalküle (ob zusätzlich mit alethischen Modaloperatoren oder nicht). Diese Teillösung ist allerdings auch alles, was im Rahmen dieses Buches erwartet werden darf. Denn die in diesem Buch betrachteten Kalküle/Logiken beziehen sich intendiertermaßen sämtlich auf – ihnen jeweils *passende*, d. h.: den von ihnen je angegebenen logischen Gesetzen *vollständig gehorchende* (und diese dadurch legitimierende) – Normalsprachen, *welche* ganz oder wenigstens in manchen Idealitätsaspekten *wissenschaftsideal* sind; *und* mit *gewisser* (nur *gewisser*) Ausnahme der (sehr besonderen) Normalsprachen für **Delta** und **Pi-Delta** und verwandte Kalküle, sind die in diesem Buch ins Auge gefassten Normalsprachen allesamt wissenschaftsideal im *fünften Aspekt* der Fünfer-Liste von Idealitätsaspekten, die – maßgeblich für dieses Buch – im Kapitel 0 aufgestellt wurde:[136] Sie alle sind *frei von propositionaler Stellungnahme*; kein Satz von ihnen enthält einen Ausdruck propositionaler Stellungnahme (epistemischer, doxastischer oder anderer Art).

{Bei Normalsprachen für **Delta** und **Pi-Delta** ist das nur *cum grano salis*, gleichsam *pro forma*, der Fall; sie stellen daher *gewisse* Ausnahmen von der Regel dar.

Zum eben wieder angesprochenen Verhältnis zwischen Kalkül bzw. Logik, die durch den Kalkül formuliert wird, einerseits und Normalsprache andererseits, sei noch Folgendes erläuternd angemerkt (und was gesagt wird, kann mutatis mutandis auch auf *Logik [die durch einen Kalkül formuliert wird]* statt auf *Kalkül* bezogen werden): *Passt* eine Normalsprache – also: ein eventuell um formale Elemente angereichertes, in verschiedenen Hinsichten reglementiertes, in spezifischer Weise zu verstehendes und validitätsmäßig aufzufassendes

[136] Zudem sind *alle* behandelten Normalsprachen wissenschaftsideal im *ersten Aspekt* der Fünfer-Liste von Idealitätsaspekten, welche im Kapitel 0 – maßgeblich für dieses Buch – angegeben wurde. Was hingegen den zweiten, dritten, vierten und, *in spezieller – nicht explizit offensichtlicher – Weise*, *auch* den fünften Idealitätsaspekt angeht, werden Kalküle und zugehörige Normalsprachen betrachtet, die von der Ideallinie abweichen.

Fragment der deskriptiven Umgangssprache – [zu] einem Kalkül (oder anders besagt: *passt* ein Kalkül [zu] einer Normalsprache), so ist sie eine Normalsprache *von ihm* (oder *für ihn*), und ist *seine* Normalsprache, *die* Normalsprache von ihm, wenn sie *lokal* – im je gegebenen Kontext – als Normalsprache von ihm fungiert. Ein Kalkül widerspricht *keinem formal-analytischen Faktum* einer Normalsprache von ihm, sondern spiegelt diese Fakten *nach Kräften* wider, m. a. W.: Normalsprachen eines Kalküls *gehorchen den durch den Kalkül angegebenen logischen Gesetzen vollständig*. Die Vollständigkeit aber, mit der ein Kalkül die formal-analytischen Fakten einer Normalsprache von sich widerspiegelt (*nach Kräften* widerspiegelt), kann tatsächlich relativ gering sein: wegen struktureller semantischer Besonderheiten jener Sprache [etwa wenn **Gamma*** auf eine Normalsprache bezogen wird, bzgl. welcher „Es ist notwendig, dass A, oder es ist notwendig, dass nicht-A" ein generelles analytisches Faktum zum Ausdruck bringt] und natürlich insbesondere dann, wenn die Normalsprache logische Konstanten enthält, die im Kalkül gar nicht vorkommen. Letzteres muss nicht als störend empfunden werden, doch kann man dem gewissen Problem da, wo es am ehesten als Problem empfunden wird, durch folgende Regelung Abhilfe schaffen (welcher Regelung in diesem Buch auch entsprochen wird): Im Kalkül und in der Normalsprache des Kalküls selbst kommen *semantisch* genau dieselben *aussagenlogischen* Konstanten vor [ob definierte oder undefinierte; auch **W**(ν, A) und **Ü**(ν, A), von denen gleich die Rede sein wird, zählen noch als aussagenlogische Konstanten]. (*Typographisch* werden natürlich Unterschiede bestehen.)}

Die – so gar nicht wissenschaftsideale – Umgangssprache ist hingegen *manifest voll* von Sätzen mit Ausdrücken propositionaler Stellungnahme. Dadurch werden der sogenannten *Substituierbarkeit der Identischen (salva veritate)* – alias SID, alias A9 – *exorbitante* Probleme bereitet; die nun aber in diesem Buch durch die Beschränkung auf Normalsprachen, die den *fünften Idealitätsaspekt* einer idealen Wissenschaftssprache erfüllen, ausgeklammert bleiben. (Zum *Sonderfall* der Normalsprache von **Pi-Delta** und (damit auch) **Delta** siehe das nächste Kapitel.) Es sei jedoch auf diese Schwierigkeiten wenigstens hingewiesen:

Gehört, so sei angenommen, A9 und mit A9 ganz **Pi+-Gamma** grundprinziplich als Teil zu einem *intendierten* Kalkül für eine Normalsprache, die nicht nur alethisch/ontisch, sondern auch durch *Glauben* (doxastisch) und *Wissen* (epistemisch) modalisiert wird,[137] so gäbe es offenbar die folgenden – zwar nicht alethisch/ontisch-modalen, aber *im erweiterten Sinn* sehr wohl *modalen* – Gegenbeispiele zu A9 [die fragliche Normalsprache sei entsprechend verfasst]:

[137] Ein solcher Kalkül sprengt den Rahmen der Formelsprache *Sigma* [so genommen, wie sie in diesem Buch bestimmt wurde]; denn er muss über *Sigma* hinausgehende logische Grundausdrücke enthalten und diese Grundausdrücke grundprinziplich charakterisieren. Am naheliegendsten sind da der Satzoperator für *Wissen* und der Satzoperator für *Glauben*: **W**(ν, σ) – lies: „ν weiß, dass σ" – und **Ü**(ν, σ) – lies: „ν glaubt [*im Sinne von*: ist überzeugt], dass σ".

Sowohl bei nachfolgendem (I) als auch bei nachfolgendem (II) handelt es sich um drei valide, insbesondere wahre, Sätze [ein entsprechender „Philipp“ wird sich finden]:
(I) „Der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist Lenin. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass der Hauptinitiator der Oktoberrevolution Lenin ist.“
(II) „Wladimir Iljitsch Uljanow ist Lenin. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist.“

Den folgenden beiden normalsprachlichen Instanzen von A9: (I´) „Der Hauptinitator der Oktoberrevolution ist Lenin; Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. *Also*: Philipp weiß, dass der Hauptinitiator der Oktoberrevolution Lenin ist“ und (II´) „Wladimir Iljitsch Uljanow ist Lenin; Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. *Also*: Philipp weiß, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist“, wird durch (I) bzw. (II) *widersprochen*. Das macht (I) und (II) offenbar zu Gegenbeispielen von A9.

Das Gegenbeispielsein von (I) zu A9 könnte man durch die dem nun betrachteten Kalkül angepasste Zwei-Fälle-Beschränkung bei A9 für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen noch abwehren, weil „**W**(c, _ = a)“ – die formale Repräsentation von „Philipp weiß, dass _ Lenin ist“ – ein *Modalkontext* (wenn auch *im erweiterten Sinn*) ist; denn „ιxR(x, a´) = a, **W**(c, a = a) → **W**(c, ιxR(x, a´) = a)“ ist gemäß jener Zwei-Fälle Beschränkung *kein* in Beweisen zulässiger Einsetzungsfall von A9 und darum auch nicht per A9 logisch valide in der Weise der Logik, die durch den nun thematisierten Kalkül formuliert wird – welcher der unterstellten, nicht nur alethisch-, sondern auch **Ü-W**-modalisierten Normalsprache *intendiertermaßen* angepasst ist und, so wurde angenommen, A9 und ganz **Pi+Gamma** grundprinziplich mitumfasst.

Das Gegenbeispielsein von (II) zu A9 aber kann man auf diese Weise *nicht* abwehren; denn „b = a, **W**(c, a = a) → **W**(c, b = a)“ ist angesichts jener (*sinnerweiterten*) Zwei-Fälle-Beschränkung *sehr wohl* ein in Beweisen zulässiger Einsetzungsfall von A9 und darum auch per A9 logisch valide in der Weise der Logik, die durch den besagten Kalkül formuliert wird. Dieser Kalkül, welcher der unterstellten, nicht nur alethisch-, sondern auch **Ü-W**-modalisierten Normalsprache *intendiertermaßen* angepasst ist und, so wurde angenommen, A9 und ganz **Pi+Gamma** grundprinziplich mitumfasst, passt also am Ende gar nicht zu jener Normalsprache – *entgegen* der angesprochenen *Intention*.

Es kommt noch schlimmer:

Auch bei nachfolgendem (III) und nachfolgendem (IV) handelt es sich um drei bzw. fünf valide, insbesondere wahre, Sätze:

(III) „*Es ist notwendig*, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist."

(IV) „*Von etwas ist es notwendig*, dass Wladimir Iljitsch Uljanow es ist. *Von etwas ist es notwendig*, dass Lenin es ist. Wladimir Iljitsch Uljanow ist Lenin. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist."

Der folgenden normalsprachlichen Instanz von P+GT15c: (III´) „Es ist notwendig, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist; Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. *Also*: Philipp weiß, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist", wird durch (III) widersprochen. Das macht (III) offenbar zu einem Gegenbeispiel von P+GT15c. Der folgenden normalsprachlichen Instanz von P+GT16b wiederum: (IV´) „Von etwas ist es notwendig, dass Wladimir Iljitsch Uljanow es ist. Von etwas ist es notwendig, dass Lenin es ist. Wladimir Iljitsch Uljanow ist Lenin. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. *Also*: Philipp weiß, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist", wird durch (IV) widersprochen. Das macht (IV) offenbar zu einem Gegenbeispiel von P+GT16b.

Vor dem Gegenbeispielsein von (III) zu P+GT15c und von (IV) zu P+GT16b gibt es kein Entkommen – und selbstverständlich auch dann keines, wenn man die oben geschilderte Entgrenzung bei der Bildung von Einsetzungsfällen, die im (noch selbstständigen) **Pi+-Gamma** *axiomatisch* mit P+GT15c und *echtabgeleitet* (über P+GRT1) mit P+GT16b verbunden ist, rückgängig machte und vollständig zur Zwei-Fälle-Beschränkung zurückkehrte (*nun* für Modalkontexte auch *im erweiterten Sinn*); denn in den Gegenbeispielen (III) und (IV) spielen ja – ebenso wie im Gegenbeispiel (II) – Kennzeichnungsnamen keine Rolle; die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Bildung von Einsetzungsfällen in Beweisen kann da nicht greifen.

Und es kommt noch schlimmer. Man kontempliere die folgende glaubwürdige Geschichte [jedenfalls kann man davon ausgehen, dass, wenn nicht *diese*, so doch eine logisch strukturgleiche Geschichte keineswegs leichtgläubigen Menschen wahr erscheinen wird – vielleicht gar gegründet auf persönlicher Erfahrung wahr erscheinen wird]:

(V) „Philipp ist nicht davon überzeugt, dass Lenin der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist; denn er hat den Namen „Lenin" noch nie gehört, und als er ihn jetzt zum ersten Mal hört, sagt er ‚Lenin ist wie Stalin' – und meint damit die ‚-in'-Endung der beiden Namen (was seine Ahnungslosigkeit zeigt). Andererseits ist er schon lange fest davon überzeugt, dass Wladimir Iljitsch Uljanow der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist, denn er hat einmal in einem Buch, in das er kurz hineinblickte, ein Kindheitsfoto von Lenin gesehen, mit der Bilder-

läuterung: ‚Wladimir Iljitsch Uljanow, der spätere Hauptinitiator der Oktoberrevolution' (*ohne* Erwähnung des späteren Kampfnamens Uljanows: ‚Lenin'). Zweifelsohne ist Philipp historisch nicht gut informiert. Aber zudem ist es offenbar auch so, dass Philipp *von* Lenin, d. h. *von* Wladimir Iljitsch Uljanow, der ja Lenin ist, sowohl *nicht glaubt*, dieser sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution, als auch *glaubt*, dieser sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution.[138] Womit es nun doch einen wahren Widerspruch gibt!"

Formal stellt sich die in (V) beschriebene Situation wie folgt dar:

$$[\underline{P1}]\ \exists y(y = a \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))),\ [\underline{P2}]\ \exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))),\ [\underline{P3}]\ b = a$$

$$_____$$

$$[\underline{K}]\ \exists y(y = a \wedge (\neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))))$$

Jede dieser vier Satzformeln steht offenbar für einen *wahren* Satz, wobei die vierte – K – aus den drei vorhergehenden – P1, P2, P3 – offenbar logisch valide gefolgert ist. Dieser vierfachen Wahrheitsrepräsentation widersprechen aber die folgenden beiden Schlussformeln: Schlussformeln *beweisbar* in dem *intendierten* Kalkül für die hier schon die ganze Zeit unterstellte Normalsprache, die nicht nur alethisch-, sondern auch **Ü-W**-modalisiert ist; welcher Kalkül, so die Annahme, A9 grundprinziplich mitumfasst und ganz **Pi+-Gamma** (nennen wir diesen Kalkül nun „**Pi-Omega**"):

POT1: $b = a, \exists y(y = a \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))) \rightarrow \neg\exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, z = \iota xR(x, a')))$

1. $b = a, \exists y(y = a \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))) \rightarrow \exists y(y = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')))$ A9,(i)
2. $a = b, \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')), d = b \rightarrow a = d$ T66,(i) {Gesetz der „Drittengleichheit"}, R2, R1
3. $\mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')), a = d \rightarrow \mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a'))$ A9,(ii), R1
4. $a = b, \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')), d = b, \mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')) \rightarrow \mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a'))$ RT20 (2, 3), R1
5. $a = b, \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')), d = b, \mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')), \mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ A3, R2, R1
6. $a = b, \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')), d = b, \mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R3 (5, 4)

[138] Auf die Frage, ob Lenin der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist, antwortet Philipp (ein vorsichtiger Mensch): „Das weiß ich nicht. Vielleicht ja, vielleicht nein", und er liefert (davon sei ausgegangen) eine vernünftige Begründung für seinen Agnostizismus (sein zweiseitiges Nichtüberzeugtsein). Auf die Frage, ob Wladimir Iljitsch Uljanow der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist, antwortet Philipp hingegen: „Ja", und er liefert eine vernünftige Begründung für sein beanspruchtes Wissen (welches eo ipso ein Überzeugtsein ist).

7. $a = b, \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')), d = b \wedge \mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R7 (6)

8. $d = b \wedge \mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')), a = b, \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R1 (7)

9. $d = b \wedge \mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')), a = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R7 (8)

10. $a = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')), d = b \wedge \mathbf{Ü}(c, d = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R1 (9)

11. $a = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')), \exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R9 (10)

12. $\exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))), a = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, a = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R1 (11)

13. $\exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))), \exists y(y = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R9 (12)

14. $\exists y(y = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))), \exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R1 (13)

15. $\exists y(y = b \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))) \rightarrow\neg\exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')))$ RT8 (14)

16. $b = a, \exists y(y = a \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))) \rightarrow \neg\exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')))$ RT20 (1, 15)

{In **Pi-Omega** ist also beweisbar: P3, P1 $\rightarrow \neg$P2.}

POT2: $\rightarrow \neg\exists y(y = a \wedge (\neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))))$

1. $\mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')), \neg\mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ A3

2. $\neg\mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')), \mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R1 (1)

3. $\neg\mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R7 (2)

4. $b = a, \neg\mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R2, R1 (3)

5. $b = a \wedge (\neg\mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, b = \iota xR(x, a'))) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R7 (4)

6. $\exists y(y = a \wedge (\neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')))) \rightarrow \neg(B \supset B)$ R9 (5)

7. $\rightarrow \neg\exists y(y = a \wedge (\neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))))$ RT8 {GIS1} (6)

{In **Pi-Omega** ist also beweisbar: $\rightarrow \neg$K.}

Neben diesen beiden **Pi-Omega**-Theoremen ist allerdings zudem *das Folgende* beweisbar (und beweisbar sogar schon in **Pi-Alpha**), *wovon* die Schlussformel

$\exists y(y = a \wedge \neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))), \exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))), b = a \rightarrow \exists y(y = a \wedge (\neg\mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))))$ – m. a. W.: P1, P2, P3 $\rightarrow$ K –

nichts weiter als ein etwas komplexerer (und in **Pi-Omega**-Beweisen zulässiger) Einsetzungsfall ist:[139]

POT3: $\exists y(y = a \wedge F(y)), \exists y(y = b \wedge G(y)), b = a \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$[140]

1. $b' = a, F(b'), d = b, G(d), b = a \rightarrow b' = b$	T66,(i) {$b' = a, b = a \rightarrow b' = b$}, R2, R1
2. $d = b, b' = b \rightarrow d = b'$	T66,(i)
3. $b' = a, F(b'), d = b, G(d), d = b, b = a \rightarrow d = b'$	RT20 (1, 2)
4. $b' = a, F(b'), G(d), b = a, d = b, d = b \rightarrow d = b'$	R1 (3)
5. $b' = a, F(b'), G(d), b = a, d = b \rightarrow d = b'$	RT1 (4)
6. $b' = a, F(b'), G(d), b = a, d = b, d = b' \rightarrow b' = d$	T33, R2, R1
7. $b' = a, F(b'), G(d), b = a, d = b \rightarrow b' = d$	R3 (6, 5)
8. $G(d), b' = d \rightarrow G(b')$	A9,(i), R1
9. $b' = a, F(b'), G(d), b = a, G(d), d = b \rightarrow G(b')$	RT20 (7, 8)
10. $b' = a, F(b'), b = a, d = b, G(d), G(d) \rightarrow G(b')$	R1 (9)
11. $b' = a, F(b'), b = a, d = b, G(d) \rightarrow G(b')$	RT1 (10)
12. $b' = a, F(b'), b = a, d = b, G(d) \rightarrow b' = a$	A1, R2
13. $b' = a, F(b'), b = a, d = b, G(d) \rightarrow F(b')$	A1, R2, R1
14. $b' = a, F(b'), b = a, d = b, G(d) \rightarrow F(b') \wedge G(b')$	RT2 {*IC-Regelgesetz*} (13, 11)
15. $b' = a, F(b'), b = a, d = b, G(d) \rightarrow b' = a \wedge (F(b') \wedge G(b'))$	RT2 (12, 14)
16. $b' = a \wedge (F(b') \wedge G(b')) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	A7,(i)
17. $b' = a, F(b'), b = a, d = b, G(d) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	RT20 (15, 16)
18. $b = a, b' = a, F(b'), d = b, G(d) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	R1 (17)
19. $b = a, b' = a, F(b'), d = b \wedge G(d) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	R7 (18)
20. $b = a, d = b \wedge G(d), b' = a, F(b') \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	R1 (19)
21. $b = a, d = b \wedge G(d), b' = a \wedge F(b') \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	R7 (20)
22. $b = a, d = b \wedge G(d), \exists y(y = a \wedge F(y)) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	R9 (21)
23. $b = a, \exists y(y = a \wedge F(y)), d = b \wedge G(d) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	R1 (22)
24. $b = a, \exists y(y = a \wedge F(y)), \exists y(y = b \wedge G(y)) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$	R9 (23)

[139] Und *dasselbe* gilt für die Schlussformel $\exists y(y = a \wedge \mathbf{Ü}(c, y \neq \iota xR(x, a'))), \exists y(y = b \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))), b = a \rightarrow \exists y(y = a \wedge (\mathbf{Ü}(c, y \neq \iota xR(x, a')) \wedge \mathbf{Ü}(c, y = \iota xR(x, a'))))$, welche Formel passend wäre für eine etwas andere – logisch weniger radikale – Geschichte als die zuletzt im Text angegebene (siehe oben (V)).

[140] In **Pi-Alpha** wäre das T74.

25. $\exists y(y = a \wedge F(y)), \exists y(y = b \wedge G(y)), b = a \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$ R1 (24)

{In **Pi-Omega** ist also beweisbar: P1, P2, P3 $\rightarrow$ K. Denn der obige Beweis lässt sich Zeile für Zeile mit den komplexeren Formeln nachbauen: Statt „F" ist uniform zu setzen „$\neg$**Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))", und statt „G" ist uniform zu setzen „**Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))", und die jeweilige Variable oder unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel bei den vorkommenden „F" bzw „G" ist in die Leerstelle der aus diesen durch uniforme Substitution entstandenen Vorkommnisse von „$\neg$**Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))" bzw. „**Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))" „rückzuimportieren". Schließlich: „(i)" in der Kommentierung ist gegebenenfalls durch „(ii)" zu ersetzen – was immer korrekt ist, da in der neu entstandenen Deduktion nach wie vor nur unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel deduktiv verwendet werden (und zwar dieselben wie zuvor). Näheres kann noch der übernächsten Anmerkung entnommen werden.}

In sich widersprüchlich ist **Pi-Omega** durch diese drei Beweisergebnisse – POT1, POT2, POT3 – *nicht*; vielmehr besteht zwischen ihnen die folgende, keinerlei Inkonsistenz beinhaltende deduktive Dreierbeziehung:

1. $\exists y(y = a \wedge \neg$**Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))), \exists y(y = b \wedge$ **Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))), b = a \rightarrow \exists y(y = a \wedge (\neg$**Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´)) \wedge$ **Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))))$ POT3 {Einsetzungsfall; P1, P2, P3 $\rightarrow$ K}

2. $b = a, \exists y(y = a \wedge \neg$**Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))), \exists y(y = b \wedge$ **Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (\neg$**Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´)) \wedge$ **Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))))$ R1 (1)

3. $\rightarrow \neg\exists y(y = a \wedge (\neg$**Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´)) \wedge$ **Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))))$ POT2 { $\rightarrow \neg$K}

4. $b = a, \exists y(y = a \wedge \neg$**Ü**$(c, y = \iota xR(x, a´))) \rightarrow \neg\exists y(y = b \wedge$ **Ü**$(c, z = \iota xR(x, a´)))$ RT21 (2, 3).

In der vierten Zeile steht nun nichts anderes als das (zuvor schon *anders* bewiesene) POT1 (m. a. W.: P3, P1 $\rightarrow \neg$P2).

{Das soeben neu aufgetretene Regelgesetz RT21 ist dieses: $\Gamma, A \rightarrow B; \rightarrow \neg B \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A$. Sein Beweis geht so:

RT21: $\Gamma, A \rightarrow B; \rightarrow \neg B \Rightarrow \Gamma \rightarrow \neg A$

1. $\Gamma, A \rightarrow B$	Annahme
2. $\rightarrow \neg B$	Annahme
3. $\Gamma, A \rightarrow \neg B$	R2 (2)
4. $B, \neg B \rightarrow \neg(B \supset B)$	A3
5. $\Gamma, A, B \rightarrow \neg(B \supset B)$	RT20 (3, 4)
6. $\Gamma, A \rightarrow \neg(B \supset B)$	R3 (5, 1)

7. $\Gamma \rightarrow \neg A$ RT8 (6)

RT21 gehört zum großen Kreis der Regelgesetze des indirekten Schließens, welcher durch RT8, RT9, RT10 und RT11 (den *paradigmatischen* Regelgesetzen des indirekten Schließens) – und, rechtbesehen, schon durch R5, RT3, RT4, RT5, RT6 – nur begonnen ist. (Gewissermaßen ist ja auch R3 ein Regelgesetz des indirekten Schließens.)}

Pi-Omega ist zwar nicht in sich inkonsistent, aber die oben aufgewiesenen Konflikte von **Pi-Omega** mit einer gewissen Sprache, die nicht nur alethisch-, sondern auch **Ü-W**-modalisiert ist – also die Inadäquatheit *dieses* Kalküls für *diese* Sprache, die doch eigentlich für ihn als Normalsprache intendiert ist: als Normalsprache, zu der er passen soll – *bleiben*, seien es die vor der Lenin-Uljanow-*Geschichte* schon aufgewiesenen Konflikte [siehe (I), (II), (III), (IV)], sei es der Konflikt, der erst durch jene Geschichte [siehe (V)] sichtlich geworden ist. Dabei ist es wichtig zu sehen, dass sie keine Konflikte von **Pi-Omega** mit jener Sprache *an sich selbst* sind, sondern Konflikte mit dem, was man bereit ist, von dem in ihr Formulierbaren für wahr (valide) zu erachten; wozu insbesondere die Lenin-Uljanow-Geschichte gehört oder, wenn man diese Geschichte nicht glaubhaft finden sollte, eine Geschichte, die zu ihr *logisch strukturgleich* ist. Gemäß jener akzeptiertermaßen wahren Geschichte, oder einer zu ihr *logisch strukturgleichen* akzeptiertermaßen wahren Geschichte, ist nun eine Instanz der Konjunktion von P1, P2 und P3 wahr, m. a. W.: sind *sinnkoordiniert* je eine Instanz von P1, von P2 und von P3 wahr; dann aber auch als logische Konsequenz davon (gemäß einem – in **Pi-Omega** völlig legitimen – Einsetzungsfall von POT3: siehe die gleich folgende Anmerkung) eine Instanz von K [insbesondere diese: „*Von* Lenin ist es der Fall, dass Philipp sowohl *nicht glaubt*, er sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution, als auch *glaubt*, er sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution“]. *Wohingegen* doch in **Pi-Omega** beweisbar ist: $\rightarrow \neg$K [POT2]!

{POT3 ist: $\exists y(y = a \wedge F(y)), \exists y(y = b \wedge G(y)), b = a \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$; der fragliche Einsetzungsfall ist (wie weiter oben schon gesagt): $\exists y(y = a \wedge \neg$**Ü**$(c, y = \iota x R(x, a´))), \exists y(y = b \wedge$ **Ü**$(c, y = \iota x R(x, a´))), b = a \rightarrow \exists y(y = a \wedge (\neg$**Ü**$(c, y = \iota x R(x, a´)) \wedge$ **Ü**$(c, y = \iota x R(x, a´))))$ – mit „$\neg$**Ü**$(c, _ = \iota x R(x, a´))$“ für „F“, und „**Ü**$(c, _ = \iota x R(x, a´))$“ für „G“. Dieser Einsetzungsfall von POT3 ist in **Pi-Omega**-Beweisen zulässig. Dass **Pi-Omega** hier nichts verhindert, wird auch ersichtlich, wenn man den Beweis von POT3 (siehe oben) für die fraglichen Einsetzungen nachbaut. In der 8. Zeile steht dann statt „$G(d), b´ = d \rightarrow G(b´)$“: „**Ü**$(c, _ = \iota x R(x, a´))(d), b´ = d \rightarrow$ **Ü**$(c, _ = \iota x R(x, a´))(b´)$“, oder mit anderen Worten: „**Ü**$(c, d = \iota x R(x, a´)), b´ = d \rightarrow$ **Ü**$(c, b´ = \iota x R(x, a´))$“, was durch A9,(ii), R1 gedeckt ist [*nicht mehr* durch A9,(i), R1]; und in der in der 16. Zeile steht dann statt „$b´ = a \wedge (F(b´) \wedge G(b´)) \rightarrow \exists y(y = a \wedge (F(y) \wedge G(y)))$“:

„b´ = a ∧ (¬**Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))(b´) ∧ **Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))(b´)) → ∃y(y = a ∧ (¬**Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))(y) ∧ **Ü**(c, _ = ιxR(x, a´))(y)))“, oder mit anderen Worten: „b´ = a ∧ (¬**Ü**(c, b´ = ιxR(x, a´)) ∧ **Ü**(c, b´ = ιxR(x, a´))) → ∃y(y = a ∧ (¬**Ü**(c, y = ιxR(x, a´)) ∧ **Ü**(c, y = ιxR(x, a´))))“, was durch A7,(ii) gedeckt ist [*nicht mehr* durch A7,(i)].}

Nun ist es keineswegs von vornherein klar, dass die Logik in diesen Konflikten diejenige Partei ist, die klein beigeben – sich anpassen – muss. Teile der Umgangssprache sind ja in logischer Hinsicht (geleitet von wissenschaftssprachlichen Idealen) sehr wohl kritisierbar, und die Lenin-Uljanow-Geschichte bietet offensichtlich hervorragenden Anlass zu solcher Kritik, ist sie doch logisch gesehen „besonders starker Tobak“, da diese Geschichte verlangt, einen Widerspruch als wahr zu akzeptieren.

Ein Widerspruch muss nicht die klassische Form A ∧ ¬A haben. Vielmehr ist jeder Satz, der eine Instanz einer Satzformel σ ist, bei welcher (in der Formulierung der *zugehörigen* Logik) → ¬σ beweisbar ist, ein *Widerspruch*[*-in-sich*]. Und jede Satzformel σ ist dann, wenn → ¬σ beweisbar ist, eine *Widerspruchsformel*. Fünf Widerspruchsformeln neben A ∧ ¬A, prominente und weniger prominente, seien hiermit angegeben: A ≡ ¬A; ¬(B ⊃ B); a ≠ a; ∃x∀y(R(y, x) ≡ ¬R(y, y)); ∃y(y = a ∧ (¬**Ü**(c, y = ιxR(x, a´)) ∧ **Ü**(c, y = ιxR(x, a´)))). *Demnach*: Der Satz „*Von* Lenin ist es der Fall, dass Philipp sowohl *nicht glaubt*, er sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution, als auch *glaubt*, er sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution“ ist ein Widerspruch[-in-sich],[141] und die Lenin-Uljanow-Geschichte verlangt, die Wahrheit dieses Widerspruchs zu akzeptieren – zumal dessen Wahrheit nichts Besonderes zu sein scheint, kommt es doch immer wieder vor, dass jemand von jemandem etwas nicht glaubt, was er von diesem Selben *unter anderem Namen* sehr wohl glaubt.

Gemäß allen in diesem Buch betrachteten Kalkülen haben als wahr/valide akzeptierte Widersprüche eine „fürchterliche Konsequenz“, *wenn* man sich die Logik, die diese Kalküle jeweils transportieren, zu eigen macht. Das liegt an der folgenden, in allen diesen Kalkülen beweisbaren Schlussregelformel:

RT22: → ¬A ⇒ A → B

[141] *Kein* Widerspruch – jedenfalls nicht *ohne Weiteres* – ist hingegen der Satz „*Von* Lenin ist es der Fall, dass Philipp sowohl glaubt, er sei nicht der Hauptinitiator der Oktoberrevolution, als auch glaubt, er sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution“ [formale Repräsentation: ∃y(y = a ∧ (**Ü**(c, y ≠ ιxR(x, a´)) ∧ **Ü**(c, y = ιxR(x, a´))))]. Es wäre dieser Satz freilich ein Widerspruch, wenn man in **Pi-Omega** – weil man Glauben [d. h. hier: Überzeugtsein] nur als *rationalen* Glauben auffassen möchte – das Prinzip **Ü**(c, ¬A) → ¬**Ü**(c, A) hätte [etwa aufgrund eines Axioms **Ü**(c, A) → ¬**Ü**(c, ¬A)].

1. $\rightarrow \neg A$	Annahme
2. $A, \neg A \rightarrow B$	A3
3. $A \rightarrow \neg A$	R2 (1)
4. $A \rightarrow B$	R3 (2, 3)

Hiernach ist man mit *einem* als wahr akzeptierten Widerspruch logisch gezwungen, *alle* (Aussage-)Sätze [der Normalsprache] als wahr zu akzeptieren (weil sie ja alle aus ihm logisch valide folgen). Angesichts dessen haben wir allen Grund, Widersprüche nicht als wahr zu akzeptieren, auch nicht den, der aus der Lenin-Uljanow-Geschichte hervorgeht.

Nicht, dass sich ein Kalkül unmöglich einer Normalsprache mit als wahr akzeptierten Widersprüchen anpassen ließe (*ohne* dass die beschriebene katastrophale Konsequenz eintritt)! In der sogenannten *parakonsistenten Logik* werden gerade solche Kalküle präsentiert und untersucht. Aber *vom Ideal einer Wissenschaftssprache*, auf welches die in diesem Buch betrachteten Kalküle ausgerichtet sind – bei aller da und dort zugestandenen Abweichung der zugehörigen Normalsprachen vom wissenschaftssprachlichen Ideal –, entfernen sich Normalsprachen eines parakonsistenten Kalküls *im Ernstfall* des Auftretens eines wahren Widerspruchs in ihnen (ein Ernstfall, den man, wie gesehen, u. U. gar leicht eintreten lassen kann) doch gar zu sehr: *deshalb*, weil ihnen der Idealitätsaspekt (2), die Bivalenz aller Sätze, in diesem Ernstfall abgeht, und zwar *in der in sich radikaleren Weise* abgeht, dass sie da einen Satz enthalten, von dem gilt: sowohl dieser selbst als auch seine Negation ist valide.[142] Sie enthalten da – also: im fraglichen Ernstfall – einen solchen Satz deshalb, weil ja dann *zum einen* im ihnen angepassten Kalkül $\rightarrow \neg\sigma$ für eine gewisse Satzformel σ beweisbar ist und also ein normalsprachlicher Negationssatz $<\neg\sigma>^*$, der eine Instanz von $\neg\sigma$ ist, in der Weise der zugehörigen Logik logisch valide ist, mithin auch (schlicht) valide ist; und weil *zum anderen* der normalsprachliche Satz $<\sigma>^*$, von dem $<\neg\sigma>^*$ die Negation ist, ebenfalls valide ist; denn $<\sigma>^*$ ist hier nun eben der (ernstfall)relevante *wahre/valide* Widerspruch[-in-sich] (*schlicht* ein Widerspruch[-in-sich] ist $<\sigma>^*$ schon dadurch, dass $<\sigma>^*$ eine Instanz der Satzformel σ ist, bei welcher ja, wie gesagt, $\rightarrow \neg\sigma$ beweisbar ist).

Wie aber ließe sich die Lenin-Uljanow-Geschichte in solcher Weise kritisieren, dass man diese Geschichte unter der Aufschrift „Umgangssprachlich bedingte logische Mängel.

[142] Die *in sich weniger radikale Weise* des Defizits hinsichtlich Idealitätsaspekt (2) ist, dass eine Normalsprache einen Satz enthält, von dem gilt: weder dieser selbst noch seine Negation ist valide.

Nicht weiter zu würdigen“ *ad acta* legen könnte, *auch ohne* von der (historisch ausgezeichnet dokumentierten und akkreditierten) Vorstellung auszugehen, dass die Logik mehr oder minder eine Logik *für die Wissenschaften* sei (und für den nichtwissenschaftlichen Alltag nur in dem Maße, wie er erfolgreich unter rationale Normen gestellt ist)? Man müsste wohl ansetzen bei der Frage, was eigentlich dafür begrifflich hinreichend ist, *dass jemand von jemandem etwas glaubt* bzw. *nicht glaubt*; denn in der Lenin-Uljanow-Geschichte wird ja geschlossen, dass Philipp (unter den gegebenen Umständen) von Lenin *glaubt*, dieser sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution, aber doch auch wieder *nicht glaubt*.

Zweifelsohne gibt es einen auf die beschriebene Situation anwendbaren Begriff von Glauben, wonach Philipp von Lenin glaubt, dieser sei der Hauptinitiator der Oktoberrevolution, und eben *nicht* dies auch nicht glaubt. Leider schaltet die Anwendung dieses Glaubensbegriffs die Plausibilität der Lenin-Uljanow-Geschichte nicht aus; denn offensichtlich kommt ja in der Geschichte selbst ein *anderer* Glaubensbegriff zum Einsatz, und der ist alles andere als illegitim. Die inneren Zustände und korrespondierend dazu das Verhalten von Philipp unterscheiden sich massiv, wenn man ihn fragt, ob Lenin der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist, und wenn man ihn fragt, ob Wladimir Iljitsch Uljanow der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist: Im ersteren Fall findet eine Art inneres „Achzelzucken“ statt, und dann auch ein äußeres; im letzteren Fall hingegen eine innere und dann auch äußere Bejahung. Was das für Philipps Glauben und Nichtglauben bedeutet – *Glauben* und *Nichtglauben* geradlinig genommen, im naheliegendsten Sinn –, ist vollkommen transparent. An der Situationsbeschreibung, die durch die Lenin-Uljanow-Geschichte präsentiert wird, ist also, was ihren Wahrheitsgehalt angeht (oder den Wahrheitsgehalt einer ihr logisch strukturgleichen Geschichte), nichts auszusetzen.

Fazit: Aus mehrfachem Anlass ist der Kalkül **Pi-Omega**, der für eine Normalsprache *intendiert* ist, die nicht nur alethisch/ontisch, sondern auch durch *Glauben [Überzeugung]* und *Wissen* modalisiert wird, und der, so wurde angenommen, A9 grundprinziplich mitumfasst und ganz **Pi+-Gamma**, wegen Problemen bei der Erreichung des *Ziels* jener *Intention* – der Passung zur Normalsprache – doch eher zu verwerfen; denn ausgerechnet eine sehr naheliegende, ganz natürliche *intendierte* Normalsprache für ihn ist – wie illustriert – *intentionswidrig* so verfasst, dass die Passung ausbleibt. Was wäre an seine Stelle zu setzen, wenn man sich als Grundlage für ihn nach wie vor die besagte, ausdrucksstarke Normalsprache

wünscht (was nur recht und billig erscheint – jedenfalls dann, wenn sie nun so interpretiert wird, dass keine wahren Widersprüche mehr in ihr auftreten)?

Eine grobe Überreaktion wäre es, A9 von der Axiomenliste zu entfernen. Die erforderlichen, umständlich zu formulierenden Differenzierungen und Beschränkungen dürften jedoch den gegenüber **Pi-Omega** emmendierten, aber mit derselben normalsprachlichen Intention wie **Pi-Omega** versehenen Kalkül *sehr unschön* ausfallen lassen. Mich mit diesen Differenzierungen und Beschränkungen zu befassen, möge ich aber durch die (nur **Delta** und **Pi-Delta** *gewissermaßen* ausnehmende) Beschränkung auf Normalsprachen, die den Idealitätsaspekt (5) aufweisen (die Formelsprache *Sigma* ist dementsprechend gestaltet!), in diesem Buch überhoben sein. Immerhin scheint es Abkömmlinge von A9 zu geben, die gegen Substitutionsversagen völlig gefeit sind, z. B. die folgende Schlussformel, die – angesichts des *Wissens*axioms **W**(c, A) $\rightarrow$ A – eine über P+GT15c noch hinausgehende Abschwächung von A9 ist: **W**(c, ❒(b = a)), F(a) $\rightarrow$ F(b).

Man lasse nun aber die Normalsprache, der der Kalkül angepasst sein soll, auch Sätze der Gestalt „Es ist für ν informativ, dass σ“ enthalten.[143] Dann kann selbst **W**(c, ❒(b = a)), F(a) $\rightarrow$ F(b) nicht als logisch valide gelten; denn diese Schlussformel hat die folgende Kontra-Instanz: „Paula weiß, dass es notwendig ist, dass Lenin Wladimir Iljitsch Uljanow ist [wie dies alle Menschen wissen, die wissen, dass „Lenin“ und „Wladimir Iljitsch Uljanow“ qua Eigennamen starre Designatoren sind und dieselbe Person bezeichnen]. Es ist für Paula auch informativ, dass Lenin Wladimir Iljitsch Uljanow ist. Aber er ist für Paula nicht informativ, dass Lenin Lenin ist.“ Zudem hat jene Schlussformel auch folgende, neben einem Eigennamen auch einen starr referierenden Kennzeichnungsnamen kritisch involvierende Kontra-Instanz: „Paula [eine mathematisch gebildete Philosophin] weiß, dass es notwendig ist, dass *Pi* das Zahlenverhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser ist. Es ist für Paula auch informativ, dass *Pi* das Zahlenverhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser ist [denn sie erachtet es für gut und wichtig, diese wahre Identitätsproposition ihren Schülern mitzuteilen]. Aber es ist für Paula nicht informativ, dass *Pi Pi* ist.“ Schließlich hat jene Schlussformel auch noch die folgende Kontra-Instanz, die nun zwei nicht starr referierende, aber doch in starrer Koordination ko-referierende Kennzeichnungsnamen kritisch involviert: „Paula weiß, dass es notwendig ist, dass der letzte Mensch der Mensch ist, der zuletzt stirbt. Es ist für Paula auch

[143] *Auch damit* verletzt diese Normalsprache den Idealitätsaspekt (5), der von ihr (um des wissenschaftssprachlichen Ideals willen) verlangt, dass sie keine Aussagen propositionaler Stellungnahme enthalte; denn auch ein Satz der Gestalt „Es ist für ν informativ, dass σ“ ist eine Aussage propositionaler Stellungnahme.

informativ, dass der letzte Mensch der Mensch ist, der zuletzt stirbt [denn sie verteidigt die analytische Wahrheit dieser Identitätsproposition gegen den prima facie konkurrierenden Anspruch auf analytische Wahrheit der Identitätsproposition, dass der letzte Mensch der Mensch ist, der zuletzt geboren wird]. Aber es ist für Paula nicht informativ, dass der letzte Mensch der letzte Mensch ist.“

12. Der Kalkül **Pi-Delta** der intuitionistischen Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung

Der Kalkül **Pi-Delta** ist grundgesetzlich genau wie der Kalkül **Pi-Alpha**, mit dem *einen* Unterschied, dass an die Stelle des Schemas R5 für grundgesetzliche Schlussregelformeln das Schema IR5 für solche Schlussregelformeln getreten ist, m. a. W.: Γ, B $\rightarrow$ C; Γ, $\neg$B $\rightarrow$ C $\Rightarrow$ Γ $\rightarrow$ C [*Inhaltliches Schnittgesetz*: ISG] durch Γ, B $\rightarrow$ $\neg$C $\Rightarrow$ Γ, C $\rightarrow$ $\neg$B [*Gesetz der Rechtskontraposition*: RKP] ersetzt ist – was auch schon der *eine* Unterschied im Grundgesetzlichen zwischen den aussagenlogischen Kalkülen **Delta** und **Alpha** war.

{Statt von „Substituierbarkeit der Identischen (salva veritate)“ sollte man bei A9 nun aber besser von „Substituierbarkeit der Identischen (salva *validitate*)“ sprechen, weil *Validität* im Intuitionismus nun gerade nicht *Wahrheit* (im ontischen Sinn) ist.}

Zweifel mögen aufkommen, ob denn A6, A7, A8, A9 und A10 tatsächlich intuitionistische – vom intuitionistischen Standpunkt aus betrachtet korrekte – Prinzipien sind. Dafür gibt es einen zuverlässigen Test:

$\forall$xF(x) $\rightarrow$ F(a) [A6] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,
wenn **w**$\forall$x**w**F(x) $\rightarrow$ **w**F(a) intuitiv logisch valide ist.

F(a) $\rightarrow$ $\exists$xF(x) [A7] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,
wenn **w**F(a) $\rightarrow$ **w**$\exists$x**w**F(x) intuitiv logisch valide ist.

$\rightarrow$ a = a [A8] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,
wenn $\rightarrow$ **w**(a = a) intuitiv logisch valide ist.

b = a, F(a) $\rightarrow$ F(b) [A9] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,
wenn **w**(b = a), **w**F(a) $\rightarrow$ **w**F(b) intuitiv logisch valide ist.

$\exists$xF(x) $\rightarrow$ F(ιxF(x)) [A10] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,
wenn **w**$\exists$x**w**F(x) $\rightarrow$ **w**F(ιx**w**F(x)) intuitiv logisch valide ist.

Hierbei ist „**w**“ intuitionistisch *nicht* als „Es ist wahr, dass“, sondern als „Wir wissen, dass“ oder, unpersönlicher *gesagt* [unpersönlich *gemeint* ist in diesem Zusammenhang auch „Wir wissen, dass“], als „Man weiß, dass“ zu lesen. Vgl. dazu Kapitel 5, wo der mit „w“ symbolisierte einstellige Satzoperator bereits in einer besonderen Weise zum Einsatz kam. Hier wird er nun der besseren Lesbarkeit halber fett gedruckt und erneut in jener besonderen Weise, die aber gegenüber der früher angewendeten erweitert ist, eingesetzt: In jeder Satzformel wird er *durchgängig ohne Iteration* – anders gesagt: *durchgängig je einmal* – vor jede Teilformel der Satzformel gesetzt [an jeder Vorkommensstelle Ersterer in Letzterer], und zwar entsprechend den nun gegebenen *prädikatenlogischen* Erfordernissen auch dann, wenn die Teilformel keine Satzformel, sondern eine Prädikatformel ist. Man beachte dabei, dass Satzformeln und Prädikatformeln auch in einer primären oder sekundären Namenformel *innerhalb einer* Satzformel vorkommen können (wie durch „G(ιx(H(b) ∧ F(x)))“ und „∃yG(ιx(H(b) ∧ R(x, y)))“ illustriert wird) und auch *dort* durchgängig je einmal „**w**“ vorgesetzt bekommen, obwohl sie *dort* nicht im engeren Sinn als Teilformeln der fraglichen Satzformel fungieren. Schließlich: Es mag selbstverständlich scheinen, aber es sei dennoch explizit gesagt: Wenn man von einer Satzformel zu ihrer [ausgezeichneten] „**w**“-*Version* übergeht [wie gerade beschrieben; im Kapitel 5 war statt von der „**w**“-*Version* von der *ausgezeichneten* „w“-*Übersetzung* die Rede; gemeint war dasselbe], dann muss die Satzformel selbst von allen Vorkommnissen von „**w**“ zunächst frei sein. [Freilich denkt man ohnehin beim Wort „Satzformel“ zunächst an Satzformeln *in Basalnotation*, also an „**w**“-freie Satzformeln.]

Eine präzisierende, kalkülbezogene Umwandlung des geschilderten Tests (dadurch dass der „**w**“-Operator durch den Modaloperator „❒“ in S4-Auffassung *repräsentiert* wird) ergibt sich damit, dass „**w**“ überall, wo es in der (eben beschriebenen) „**w**“-*Version* einer Satzformel vorkommt, durch „❒“ ersetzt wird und – des verwendeten Kalküls wegen – jedes Vorkommnis von „⊃“ in der „**w**“-Version einer Satzformel durch „>“ (gedeutet im Sinne von GD1). Es entsteht so aus einer Satzformel, vermittels ihrer „**w**“-Version, die der Satzformel entsprechende **Pi+-Gamma*D**-Satzformel (vgl. die **Gamma*D**-Satzformeln in Kapitel 5). Dann wird von Folgendem ausgegangen (vgl. wiederum Kapitel 5):

∀xF(x) → F(a) [A6] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,

wenn im Kalkül **Pi+-Gamma*** ❒∀x❒F(x) → ❒F(a) beweisbar ist.

$F(a) \rightarrow \exists xF(x)$ [A7] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,

wenn im Kalkül **Pi+-Gamma*** $\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$ beweisbar ist.

$\rightarrow a = a$ [A8] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,

wenn im Kalkül **Pi+-Gamma*** $\rightarrow \Box(a = a)$ beweisbar ist.

$b = a, F(a) \rightarrow F(b)$ [A9] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,

wenn im Kalkül **Pi+-Gamma*** $\Box(b = a), \Box F(a) \rightarrow \Box F(b)$ beweisbar ist.

$\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$ [A10] ist genau dann ein intuitionistisches Prinzip,

wenn im Kalkül **Pi+-Gamma*** $\Box\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box F(\iota x\Box F(x))$ beweisbar ist.

Dabei ist der Kalkül **Pi+-Gamma*** grundprinziplich genau wie der im vorausgehenden Kapitel betrachtete Kalkül **Pi+-Gamma**, *außer dass* das S5-affine, und damit auch S4-affine, Axiom GA2c $[\neg(B \supset C) \rightarrow \neg\neg(B \supset C) \supset \neg(B \supset C)]$ von **Pi+-Gamma** durch das *nur* S4-affine Axiom G*A2c $[B \supset C \rightarrow \neg(B \supset C) \supset (B \supset C)]$ ersetzt ist.[144] Das Verhältnis zwischen **Pi+-Gamma** und **Pi+-Gamma*** entspricht somit voll und ganz dem Verhältnis zwischen **Gamma** und **Gamma***.

Hier zunächst die **Pi+-Gamma***-Beweise der A6 – A10 *entsprechenden* **Pi+-Gamma*D**-*Schlussformeln* [diese sind aus den **Pi+-Gamma*D**-*Satzformeln*, die den Satzformeln in A6 – A10 *entsprechen*, gebildet, und zwar so gebildet, dass die jeweilige Reihenfolge der Satzformeln in den Schlussformeln A6 – A10 unverändert übernommen wird – wie nur wenige Zeilen weiter oben schon anschaulich geworden ist]:

{Zum Sinn des Asteriskus bei tr(A6)* usw. siehe den Lehrsatz **I.** in Kapitel 5. Überhaupt ist es von Vorteil, das Folgende bis einschließlich des Beweises für tr(R9)* als *nunmehr* auch auf die Prädikatenlogik eingehende Fortsetzung der Demonstration von **I.** in Kapitel 5 zu lesen.}

<u>tr(A6)*: $\Box\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box F(a)$</u>

1. $\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box F(a)$ A6,(ii)

2. $\Box\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box\Box F(a)$ GRT4 {BAUN ist **Gamma/Gamma***-beweisbar} (1)

[144] Zur Erinnerung: Der Einsetzungsfall $\neg B \supset B \rightarrow \neg(\neg B \supset B) \supset (\neg B \supset B)$ von $B \supset C \rightarrow \neg(B \supset C) \supset (B \supset C)$ [G*A2c, ohne definierte Ausdrücke in Basalnotation geschrieben] übersetzt sich mit GD2 in das **Gamma***-Theorem *S4-Axiom*: $\Box B \rightarrow \Box\Box B$, was auch ein **Gamma**-Theorem ist. Der Einsetzungsfall $\neg(\neg B \supset B) \rightarrow \neg\neg(\neg B \supset B) \supset \neg(\neg B \supset B)$ hingegen von $\neg(B \supset C) \rightarrow \neg\neg(B \supset C) \supset \neg(B \supset C)$ [GA2c, ohne definierte Ausdrücke in Basalnotation geschrieben] übersetzt sich mit GD2 in das **Gamma**-Theorem *S5-Axiom*: $\neg\Box B \rightarrow \Box\neg\Box B$, was aber *kein* **Gamma***-Theorem ist.

3. ❒❒F(a) → ❒F(a) GT3 {ABN ist **Gamma/Gamma***-beweisbar}

4. ❒∀x❒F(x) → ❒F(a) RT7 (2, 3)

<u>tr(A7)*: ❒F(a) → ❒∃x❒F(x)</u>

1. ❒F(a) → ∃x❒F(x) A7,(ii)

2. ❒❒F(a) → ❒∃x❒F(x) GRT4 (1)

3. ❒F(a) → ❒❒F(a) GT7 {*S4-Axiom* ist **Gamma/Gamma***-beweisbar}

4. ❒F(a) → ❒∃x❒F(x) RT7 (3, 2)

<u>tr(A8)*: → ❒(a = a)</u>

1. → a = a A8

2. → ❒(a = a) GRT3 {AUN ist **Gamma/Gamma***-beweisbar} (1)

<u>tr(A9)*: ❒(b = a), ❒F(a) → ❒F(b)</u>

1. ❒(b = a), ❒F(a) → ❒F(b) <u>P+GT15c</u> {Einsetzungsfall: „❒F(_)“ für „F“}

{Das Semi-Axiom <u>P+GT15c</u> gehört genauso zu **Pi+-Gamma*** wie zu **Pi+-Gamma**. Alternativ kann man ❒(b = a), ❒F(a) → ❒F(b) aber auch wie folgt beweisen:

1. b = a, F(a) → F(b) A9,(i)

2. ❒(b = a), ❒F(a) → ❒F(b) GRT8 [GAUN ist **Gamma/Gamma***-beweisbar] (1).}

<u>tr(A10)*: ❒∃x❒F(x) → ❒F(ιx❒F(x))</u>

1. ∃x❒F(x) → ❒F(ιx❒F(x)) A10 {Einsetzungsfall: „❒F(_)“ für „F“}

2. ❒∃x❒F(x) → ❒❒F(ιx❒F(x)) GRT4 (1)

3. ❒❒F(ιx❒F(x)) → ❒F(ιx❒F(x)) GT3

4. ❒∃x❒F(x) → ❒F(ιx❒F(x)) RT7 (2, 3)

Gemäß der verwendeten Rechtfertigungsmethode – ein *Einwand* gegen diese wird weiter unten noch abzuwehren sein – sind also die Axiome A6 – A10 von **Pi-Delta**, gerade so wie die bereits in Kapitel 5 (nach derselben Methode, aber unter bloßer Verwendung von **Gamma*** statt **Pi+-Gamma***) gerechtfertigten Axiome A1 – A5 von **Delta** und (somit von) **Pi-**

Delta, tatsächlich intuitionistische Prinzipien, und der Kalkül **Pi-Delta** ist *so weit* als intuitionistischer Kalkül beglaubigt.

Wie aber steht es um die axiomatischen Schlussregelformelschemata R8 und R9, die in **Pi-Delta** zu den bereits in Kapitel 5 als intuitionistisch gerechtfertigten axiomatischen Schlussregelformelschemata R1 – R4, IR5, R6 und R7 hinzukommen? Sind auch R8 und R9 vom intuitionistischen Standpunkt aus betrachtet korrekte Prinzipien, kurz: intuitionistische Prinzipien? In Übertragung der schon verwendeten Rechtfertigungsmethode von Schlussformeln auf Schlussregelformeln ist diese Frage zu *bejahen*, wegen der folgenden zwei **Pi+-Gamma***-Beweise:

<u>tr(R8)*: $\Gamma^* \rightarrow \sigma^*[\alpha] \Rightarrow \Gamma^* \rightarrow \square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$</u>, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Folge Γ^* von **Pi+-Gamma*D**-Satzformeln und in der **Pi+-Gamma*D**-Satzformel $\square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ nicht mehr vorkommt.[145]

1. $\Gamma^* \rightarrow \sigma^*[\alpha]$ Annahme; dabei α nicht in Γ^*
2. $\Gamma^* \rightarrow \forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ R8 (1) {folglich: α nicht in $\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$, also auch nicht in $\square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$}
3. $\square[\Gamma^*] \rightarrow \square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ GRT8[146] (2)
4. $\Gamma^* \rightarrow \square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ ergibt sich aus 3. wie folgt:

Entweder ist $\square[\Gamma^*]$ leer, dann ist auch Γ^* leer, und man ist schon mit der 3. Zeile am Ziel. *Oder aber* $\square[\Gamma^*]$ ist nicht leer, dann sieht $\square[\Gamma^*]$ wie folgt aus: $\square\square\rho_1$ … $\square\square\rho_n$ [denn Γ^* sieht dann so aus: $\square\rho_1$ … $\square\rho_n$, da Γ^* eine Folge von **Pi+-Gamma*D**-Satzformeln ist und *jede* **Pi+-Gamma*D**-Satzformel mit „$\square$“ beginnt]. Aus $\square\square\rho_1$ … $\square\square\rho_n \rightarrow \square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ deduziert man dann $\square\rho_1$ … $\square\rho_n \rightarrow \square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ – d. h.: $\Gamma^* \rightarrow \square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ – gemäß einem wiederkehrenden Muster, das hier für $n = 3$ vollständig vorgeführt sei (wie es für alle anderen $n \geq 1$ aussieht, ist daraus ersichtlich):

1. $\square\square\rho_1, \square\square\rho_2, \square\square\rho_3 \rightarrow \square\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ Annahme {das, was bei $n = 3$ in der 3. Zeile steht}

2. $\square\rho_3 \rightarrow \square\square\rho_3$ GT7

[145] Das bedeutet, dass α in Γ^* *von vornherein* nicht vorkommt, da mit Γ^* bei dem durch „$\Rightarrow$“ markierten Übergang nichts geschieht.

[146] „$\square[\Gamma^*]$“ bedeutet, dass „$\square$“ vor jedes Glied der Satzformelfolge Γ^* gesetzt ist. GAUN [*Generalisierter Aufbau der Notwendigkeit*] ist **Gamma/Gamma***-beweisbar, und in der Liste der echtabgeleiteten Prinzipien von **Gamma** – sowie der **Gamma**-Erweiterungen **Pi-Gamma** und **Pi+-Gamma** – wird es mit „GRT8“ bezeichnet.

3. $\Box\Box\rho_1, \Box\Box\rho_2, \Box\rho_3 \rightarrow \Box\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$	RT20 (*2*, *1*)
4. $\Box\rho_3, \Box\Box\rho_1, \Box\Box\rho_2 \rightarrow \Box\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$	R1 {mehrfach} (*3*)
5. $\Box\rho_2 \rightarrow \Box\Box\rho_2$	GT7
6. $\Box\rho_3, \Box\Box\rho_1, \Box\rho_2 \rightarrow \Box\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$	RT20 (*5*, *4*)
7. $\Box\rho_2, \Box\rho_3, \Box\Box\rho_1 \rightarrow \Box\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$	R1 (*6*)
8. $\Box\rho_1 \rightarrow \Box\Box\rho_1$	GT7
9. $\Box\rho_2, \Box\rho_3, \Box\rho_1 \rightarrow \Box\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$	RT20 (*8*, *7*)
10. $\Box\rho_1, \Box\rho_2, \Box\rho_3 \rightarrow \Box\forall\upsilon\sigma^*[\upsilon]$	R1 (*9*) {und man ist angelangt bei dem, was bei *n* = 3 in der 4. Zeile steht; bei *n* = 3 ist Γ^* ja dies: $\Box\rho_1, \Box\rho_2, \Box\rho_3$}.

tr(R9)*: $\Gamma^*, \sigma^*[\alpha] \rightarrow \sigma'^* \Rightarrow \Gamma^*, \Box\exists\upsilon\sigma^*[\upsilon] \rightarrow \sigma'^*$, wobei die unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel α in der Folge Γ^* von **Pi+-Gamma*D**-Satzformeln und in den **Pi+-Gamma*D**-Satzformeln $\Box\exists\upsilon\sigma^*[\upsilon]$ und σ'^* nicht mehr vorkommt.[147]

1. $\Gamma^*, \sigma^*[\alpha] \rightarrow \sigma'^*$	Annahme; dabei α nicht in Γ^* und nicht in σ'^*
2. $\Gamma^*, \exists\upsilon\sigma^*[\upsilon] \rightarrow \sigma'^*$	R9 (1) {folglich: α nicht in $\exists\upsilon\sigma^*[\upsilon]$, also auch nicht in $\Box\exists\upsilon\sigma^*[\upsilon]$}
3. $\Box[\Gamma^*], \Box\exists\upsilon\sigma^*[\upsilon] \rightarrow \Box\sigma'^*$	GRT8 (2)
4. $\Box\sigma'^* \rightarrow \sigma'^*$	GT3
5. $\Box[\Gamma^*], \Box\exists\upsilon\sigma^*[\upsilon] \rightarrow \sigma'^*$	RT20 (3, 4)
6. $\Gamma^*, \Box\exists\upsilon\sigma^*[\upsilon] \rightarrow \sigma'^*$	ergibt sich aus 5. analog dazu, wie sich im vorhergehenden Beweis 4. aus 3. ergibt (die erforderlichen Anpassungen liegen auf der Hand).

So weit, so gut. Nun aber zu dem schon – ohne Näheres – angesprochenen *Einwand* gegen die verwendete Methode, Schlussformeln, und entsprechend dann auch Schlussregelformeln, als intuitionistische Prinzipien zu rechtfertigen. Diese Methode beruht auf *dem Gedanken*, dass die Logik, die sich herauskristallisiert, wenn man die Satzformeln – *typographisch dieselben*, auf die sich auch **Pi-Alpha** bezieht – *intuitionistisch* deutet: eine Deutung, welche sich sichtbar machen lässt mittels der „**w**"-Versionen der Satzformeln, *wobei* „**w**"

[147] Das bedeutet, dass α in Γ^* und σ'^* von vornherein nicht vorkommt, da mit Γ^* und σ'^* bei dem durch „$\Rightarrow$" markierten Übergang nichts geschieht.

intuitionistisch und epistemisch als „Man weiß, dass“ interpretiert wird (und eben nicht *klassisch und ontisch* als „Es ist wahr, dass“); – dass diese sich herauskristallisierende Logik die intuitionistische Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung ist und dass sie *repräsentiert*, *abgebildet* werden kann durch einen *Teil* einer alethisch-modalen Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung für den Satzoperator „❒“, *sofern* dieser Operator S4-affin, aber nicht S5-affin, gedeutet wird und „**w**“ in den „**w**“-Versionen der Satzformeln überall durch „❒“ ersetzt wird (und „⊃“ durch „>“!). Die einschlägige modale Prädikatenlogik wird (in diesem Buch) durch den Kalkül **Pi+-Gamma*** formuliert.

Der die intuitionistische Prädikatenlogik abbildende *Teil* wiederum der einschlägigen modalen Prädikatenlogik, d. h.: der **Pi+-Gamma*-**Logik, wird formuliert – so kann *der Gedanke* fortgeführt werden – durch einen aus **Pi+-Gamma*** deduzierbaren Kalkül, welcher, z. B., definiert wird durch die [in **Pi+-Gamma***, wie gesehen, beweisbaren] Grundprinzipien tr(A1)* – tr(A10)* und tr(R1)* – tr(R4)*, tr(IR5)*, tr(R6)* – tr(R9)*, wobei als Einsetzungsfälle in Beweisen mit dem Kalkül *auschließlich* solche Einsetzungsfälle erlaubt sind, die links und rechts von „→“ (*nicht* eingeschlossen in einer Satzformel) *ausschließlich* **Pi+-Gamma*D**-Satzformeln stehen haben. Offensichtlich wäre „tr(**Pi-Delta**)*“ – „die ‚Translation‘ von **Pi-Delta** in (einen Teilkalkül von) **Pi+-Gamma***“ – eine gute Bezeichnung für diesen letzteren Kalkül. Der Kalkül tr(**Pi-Delta**)* ist der **Pi-Delta** in **Pi+-Gamma*** (exakt) abbildende und damit als *intuitionistisch adäquat* rechtfertigende Kalkül.

Aber haben wir nicht im vorausgehenden Kapitel gesehen, dass der Kalkül **Pi+-Gamma** als Teil von **Pi-Omega** für (ganz normale) normalsprachliche *Wissens*kontexte nicht adäquat ist? Dasselbe gilt doch zweifellos auch für den Kalkül **Pi+-Gamma***, wenn man ihn in **Pi-Omega** an die Stelle von **Pi+Gamma** setzte. Wie kann man dann „**w**“ – „Man weiß, dass“ – durch „❒“ – „Es ist notwendig, dass“, und zwar im Sinne von **Pi+-Gamma*** – repräsentieren, *korrekterweise* darstellen?

Um diesem Einwand zu begegnen, ist zunächst das Problem zu erfassen, welches der Einwand im Sinn hat. Jede Normalsprache für **Pi-Delta** beruht auf einer Normalsprache für **Pi-Alpha**, oder: ihr liegt eine Normalsprache für **Pi-Alpha** zugrunde, und sie *sieht typographisch/lautlich genauso aus* wie diese letztere,[148] was inbesondere bedeutet, dass es *so aus-*

[148] Zudem: Man kann einen beliebigen Satz einer Normalsprache von **Pi-Alpha** bzw. **Pi-Delta** beliebig (es muss nur syntaktisch korrekt sein) vollstopfen mit Vorkommnissen des „**w**“-Operators – oder Vorkommnissen seines normalsprachlichen Synonyms: des *neutralen* „Es ist valide, dass“ – in der für **Pi-Alpha** bzw. **Pi-Delta** jeweils einschlägigen Deutung, und ihn (es) auch ganz und gar weglassen, *ohne dass dies am jeweiligen Sinn des Satzes*

sieht, als ob die Aspekte (4) und (5) einer idealen Wissenschaftssprache – Freiheit von alethischer und deontischer Modalität, Freiheit von propositionaler Stellungnahme – bei einer Normalsprache von **Pi-Delta** gegeben sind. In Wahrheit jedoch ist sie komplett voll von Aussagen propositionaler Stellungnahme *ein und desselben Typs*, wie *sichtbar* wird, sobald man zu *ihrer semantischen Explizierung*: zu den *intuitionistisch* gedeuteten „**w**"-Versionen der Sätze der ihr zugrundliegenden Normalsprache für **Pi-Alpha** übergeht, also „**w**" nicht im Sinne von „Es ist wahr, dass" versteht, sondern im Sinne von „Man weiß, dass".[149]

{Man beachte: Die Hinzufügung von „**w**" im Sinne von „Man weiß, dass" zu einem Satz oder Prädikat einer Normalsprache L* von **Pi-Delta** ist redundant (siehe Fußnote 148). Die Hinzufügung von „**w**" im Sinne von „Man weiß, dass" (und eben *nicht* im klassischen Sinne von „Es ist wahr, dass"!) zu einem Satz oder Prädikat der Normalsprache L von **Pi-Alpha**, die L* zugrundeliegt, ist hingegegen *nicht* redundant; **w**σ besagt *da* nicht dasselbe wie σ – wie auf der Hand liegt. Dessen ungeachtet besagt die „**w**"-Version des Satzes σ_{L^*} von L* dasselbe wie die „**w**"-Version des mit σ_{L^*} typographisch identischen Satzes σ_L von L, *wenn* „**w**" – anders als es für L *normal* ist – im Sinne von „Man weiß, dass" genommen wird.}

Freilich ist die mit „Man weiß, dass" zum Ausdruck gebrachte propositionale Stellungnahme eine *unpersönliche* – formal ausgedrückt durch **W**σ (vgl. Kapitel 5), bzw. *hier* nun durch **w**σ (bei passender Deutung von „**w**") –, keine *persönliche* propositionale Stellungnahme, welche formal durch **W**(α, σ) ausgedrückt wird. [Den Operator „**w**" als „Wir wissen, dass" statt „Man weiß, dass" zu lesen, ändert daran nichts; es gibt so etwas wie ein unpersönliches „wir", von dem hier Gebrauch gemacht wird.] Es ist nun zunächst *die Frage*, ob die gegen A9-abhängige Prinzipien – und zwar gegen diese Prinzipien als zusammen mit **Pi+-Gamma** in **Pi-Omega** integrierte – im vorausgehenden Kapitel vorgebrachten normalsprachlichen Gegenbeispiele, die *persönliches Wissen* involvieren, *unpersönliches Wissen* involvierende Entsprechungen haben, *wenn* nun die mittels des umfassenden „**w**"-Versionen bildenden Einsatzes von „**w**" [als „Man weiß, dass"] erst *vollständig explizit* gemachte (daher *sehr besondere*) Normalsprache von **Pi-Delta** betrachtet wird. Jene Gegenbeispiele waren:

---

irgendetwas ändert. Die Redundanz des „**w**"-Operators – von „Es ist valide, dass", jeweils einschlägig gedeutet: als „Es ist wahr, dass" bzw. als „Man weiß, dass" – gilt sowohl für jede Normalsprache von **Pi-Alpha** wie auch für jede Normalsprache von **Pi-Delta**.

[149] Die intuitionistisch gedeuteten „**w**"-Versionen von *Sätzen* sind analog zu den intuitionistisch gedeuteten „**w**"-Versionen von *Satzformeln* zu bilden, also insbesondere stets aus Sätzen, die noch kein Vorkommnis von „**w**" enthalten. Die Verwendung des logischen Symbols „**w**" anstelle von „Man weiß, dass" (mit derselben Syntax wie dieser letztere Ausdruck) sei erlaubt.

(I) „Der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist Lenin. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass der Hauptinitiator der Oktoberrevolution Lenin ist."

(II) „Wladimir Iljitsch Uljanow ist Lenin. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist."

(III) „*Es ist notwendig*, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist."

(IV) „*Von etwas ist es notwendig*, dass Wladimir Iljitsch Uljanow es ist. *Von etwas ist es notwendig*, dass Lenin es ist. Wladimir Iljitsch Uljanow ist Lenin. Philipp weiß, dass Lenin Lenin ist. Philipp weiß nicht, dass Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist."

Hierzu ist zu sagen, dass die Gegenbeispiele (III) und (IV) keine Entsprechungen in der Normalsprache von **Pi-Delta** haben können, schlicht deshalb nicht, weil diese Normalsprache keine alethischen Modaloperatoren enthält, und zwar deshalb keine enthält, weil schon diejenige Normalsprache von **Pi-Alpha** keine solchen enthält, allein aus deren Sätzen durch Bildung der „**w**"-Versionen die *semantische Explizierung* der Normalsprache von **Pi-Delta** hervorgeht: hervorgeht bei *intuitionistischer* Deutung des „**w**"-Operators als „Man weiß, dass". Die Gegenbeispiele (I) und (II) wiederum können ebenfalls keine Entsprechungen in der Normalsprache von **Pi-Delta** haben, denn obwohl man in ihnen „Philipp weiß, dass" und „Philipp weiß nicht, dass" durch „Man weiß, dass" und „Man weiß nicht, dass" ersetzen kann [sodass die drei Sätze in (I) bzw. (II) danach immerhin noch *möglicherweise* zusammen wahr sind], sind die durch die Ersetzung entstehenden Sätze nun eben nicht durchgängig „**w**"-Versionen von Sätzen derjenigen Normalsprache von **Pi-Alpha**, allein aus deren („**w**" zunächst nicht enthaltenden) Sätzen durch Bildung der „**w**"-Versionen die semantische Explizierung der Normalsprache von **Pi-Delta** hervorgeht, und zwar bei intuitionistischer Deutung des „**w**"-Operators als „Man weiß, dass".

Aus den folgenden beiden Tripeln von Sätzen einer Normalsprache von **Pi-Alpha** lassen sich allerdings zwei Tripel von Sätzen der semantischen Explizierung der entsprechenden (gleich*lautenden*) Normalsprache von **Pi-Delta** bilden:

(I´) „Der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist Lenin. Lenin ist Lenin. Der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist nicht Lenin."

(II´) „Wladimir Iljitsch Uljanow ist Lenin. Lenin ist Lenin. Wladimir Iljitsch Uljanow ist nicht Lenin."

(**w**I´) „**Man weiß, dass** derjenige, **von dem man weiß, dass** er der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist, Lenin ist. **Man weiß, dass** Lenin Lenin ist. **Man weiß, dass man** nicht **weiß, dass** derjenige, **von dem man weiß, dass** er der Hauptinitiator der Oktoberrevolution ist, Lenin ist.“[150]
(**w**II´) „**Man weiß, dass** Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist. **Man weiß, dass** Lenin Lenin ist. **Man weiß, dass man nicht weiß, dass** Wladimir Iljitsch Uljanow Lenin ist.“

Aber (**w**I´) und (**w**II´) sind Tripel von *validen* Sätzen genauso wenig (nämlich nicht einmal möglicherweise), wie (I´) und (II´) Tripel von *validen* Sätzen sind. Durch diese Tripel von Sätzen wird kein Gegenbeispiel zu irgendetwas konstituiert – denn sie können keine Tripel von *validen* (insbesondere keine von *wahren*) Sätzen sein: Wenn der erste Satz *valide* ist, muss der dritte Satz *nicht valide* sein; wenn hingegen der dritte Satz *valide* ist, muss der erste Satz *nicht valide* sein.

Mit alledem ist nun noch nicht gesagt, dass sich nicht doch in irgendeiner Normalsprache für **Pi-Delta** auf irgendeine Weise ein Gegenbeispiel zu intuitionistisch verstandenen A9-abhängigen Prinzipien bilden lässt. Sicher ist aber, dass ein solches Gegenbeispiel nicht existiert, *wenn* „Man weiß, dass“ – also: „**w**“ in intuitionistischer Deutung – durch „❒“ im Sinne von **Pi+-Gamma*** *logisch korrekt* repräsentiert wird (jedenfalls solange es nur um die Belange von **Pi-Delta** geht) und die semantische Explizierung einer Normalsprache für **Pi-Delta** stets aus einer – mit der letzteren Sprache typographisch identischen – Normalsprache für **Pi-Alpha** durch Bildung der intuitionistisch gedeuteten „**w**“-Versionen der Sätze hervorgeht. Warum das so ist, ist bereits vorgeführt worden: durch den oben angegebenen Beweis von tr(A9)*. Wie man selbst bei uneingeschränkt erlaubter Instanzbildung keine Kontra-Instanz zu ❒(b = a), ❒F(a) → ❒F(b) in einer Normalsprache für **Pi+-Gamma*** (*nicht* für **Pi-Omega**!) finden wird [eine Konsequenz der logischen Validität von P+GT15c], so wird man – *wenn* „**w**“ in intuitionistischer Deutung durch „❒“ im Sinne von **Pi+-Gamma*** *logisch korrekt* repräsentiert wird – auch keine Kontra-Instanz zu **w**(b = a), **w**F(a) → **w**F(b) in der semantischen Explizierung einer Normalsprache für **Pi-Delta** finden (und deshalb auch keine Kontra-Instanz in der Normalsprache selbst), sei auch die zulässige Instanzbildung uneingeschränkt (bis auf die Einschränkung, dass Instanzen und Kontra-Instanzen *rein* aus intuitionistisch gedeuteten „**w**“-Versionen von Sätzen einer Normalsprache für **Pi-Alpha** zu bestehen haben).

[150] Zum besseren Verständnis ist die semi-formale Schreibweise hilfreich: „**w**(ιx**w**(x ist ein Hauptinitiator der Oktoberrevolution) = Lenin). **w**(Lenin ist Lenin). **w**¬**w**(ιx**w**(x ist ein Hauptinitiator der Oktoberrevolution) = Lenin).“

Alles hängt davon ab, ob „Man weiß, dass“ – „**w**“ in intuitionistischer Deutung – durch „❐“ im Sinne von **Pi+-Gamma*** *logisch korrekt* repräsentiert wird. Die Plausibilität dessen, dass dem tatsächlich so ist, ist nach den vorausgehenden Betrachtungen gewiss nicht kleiner geworden.

In Sachen *Substitution* von Namenformeln füreinander in Satzformeln ist freilich noch auf folgendes *sehr viel Schwerwiegenderes* hinzuweisen: Im Kalkül **Pi-Delta** ist ja (ganz wie im Kalkül **Pi-Alpha**) sehr leicht beweisbar: $\rightarrow \exists y(a = y)$; und genauso leicht ist da beweisbar: $\rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$. Letzteres besagt aber nun in intuitionistischer Explizitmachung dies: $\rightarrow \mathbf{w}\exists y\mathbf{w}(\iota x\mathbf{w}F(x) = y)$ [wobei „**w**“ als „Man weiß, dass“ gedeutet ist], und demzufolge läuft $\rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$ gemäß der vorgeschlagenen modallogischen Repräsentation intuitionistisch aufgefasster Formeln auf $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ in der **Pi+-Gamma***-Deutung hinaus. Doch ist denn $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ in **Pi+-Gamma*** – so, wie der Kalkül verfasst ist – überhaupt beweisbar?

Prima facie sieht der Beweis von $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ in **Pi+-Gamma*** – und zwar derjenige Beweis in **Pi+-Gamma***, der in einer direkten modallogischen Abbildung des einfachsten Beweises für $\rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$ in **Pi-Delta** besteht, also: der einfachste Beweis für $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ in tr(**Pi-Delta**)* – wie folgt aus:

1. $\rightarrow \Box(\iota x\Box F(x) = \iota x\Box F(x))$ tr(A8)* {Einsetzungsfall}

2. $\Box(\iota x\Box F(x) = \iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ tr(A7)* {Einsetzungsfall}

3. $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ R3 (2, 1).

Aber während der verwendete Einsetzungsfall von tr(A8)* [also von $\rightarrow \Box(a = a)$: „$\iota x\Box F(x)$“ für „a“] völlig in Ordnung geht, ist der verwendete Einsetzungsfall von tr(A7)* [also von $\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$: „y“ für „x“, „$(\iota x\Box F(x) = _)$“ für „F“, „$\iota x\Box F(x)$“ für „a“] durchaus nicht in Ordnung – *es sei denn*, tr(A7)* wäre im Rahmen von **Pi+-Gamma*** legitimerweise *ohne* die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen (wie P+GT15c), *im Unterschied* zu A7 selbst im Rahmen von **Pi+-Gamma***. Doch danach sieht es nun gerade *nicht* aus, denn der Einsetzungsfall $\Box(\iota x\Box F(x) = \iota x\Box F(x)) \rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ von tr(A7)* – also der eben in einem *Prima-facie*-**Pi+-Gamma***-Beweis verwendete Einsetzungsfall – hat eine Kontra-Instanz: „Es ist notwendig, dass die notwenderweise gerade Zahl die notwendigerweise gerade Zahl ist. Aber es ist nicht notwendig, dass für *etwas* es notwendig ist, dass die notwendigerweise gerade Zahl *es* ist.“ Die folgende Überlegung zeigt die Wahrheit der bei-

den Sätze: Es sind unendlich viele Zahlen, die gerade Zahlen und, als solche, notwendigerweise gerade Zahlen sind. Die [ausgewählte] notwendigerweise gerade Zahl ist eine von diesen; aber es ist nicht notwendig, dass sie gerade *diese* von diesen, den notwendigerweise geraden Zahlen, ist; sie könnte auch eine andere von diesen sein. In der Tat ist es für *nichts* notwendig, dass die notwendigerweise gerade Zahl *es* ist; für die geraden Zahlen ist das schon gezeigt; für alles aber, was keine gerade Zahl ist, ist es unmöglich, dass die notwendigerweise gerade Zahl es ist, also auch nicht notwendig. Wenn es nun für *nichts* notwendig ist, dass die notwendigerweise gerade Zahl es ist, dann ist es nicht notwendig, dass für *etwas* es notwendig ist, dass die notwendigerweise gerade Zahl *es* ist. Dessen ungeachtet ist es aber selbstverständlich notwendig, dass die notwendigerweise gerade Zahl die notwendigerweise gerade Zahl ist (egal, welche notwendigerweise gerade Zahl die notwendigerweise gerade Zahl ist).

Angesichts dieser Lage lässt sich die (vollkommene) Repräsentation der intuitionistischen Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung, formuliert von **Pi-Delta**, innerhalb der S4-modalen Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung, formuliert von **Pi+-Gamma***, nämlich die Repräsentation jener Logik durch den aus **Pi+-Gamma*** deduzierten Kalkül tr(**Pi-Delta**)*, nur dann aufrechterhalten, wenn von vornherein für alle Kennzeichnungsnamen in der Normalsprache für **Pi+-Gamma*** ausschließlich *die rigide Verstehensweise* unterstellt wird.

{Natürlich wird es da vorkommen, dass ein Sprecher mit dem Kennzeichnungsnamen „die [ausgewählte] notwendigerweise gerade Zahl“ die eine gerade Zahl referenziell verbindet, während ein anderer Sprecher mit demselben Kennzeichnungsnamen eine andere gerade Zahl referenziell verbindet. Aber beide Sprecher tun dies dann in rigider Weise: Jeder von beiden nimmt *in allen möglichen Welten* mit dem Kennzeichnungsnamen „die [ausgewählte] notwendigerweise gerade Zahl“ auf *dasselbe* (die de facto ausgewählte notwendigerweise gerade Zahl) Bezug, wenn es auch, intersubjektiv betrachtet, Verschiedenes ist, auf das sie Bezug nehmen. Der Kennzeichnungsname „die [ausgewählte] notwendigerweise gerade Zahl“ wird sich also *bei rigider Verstehensweise* so verhalten, wie der indexikalische Name „ich“ es hinsichtlich Rigidität ohnehin tut. Mit der Rigidität singulärer Terme – der Rigidität von Namen – ist *eben nicht* gleich auch noch die *intersubjektive* Rigidität [der Bezugnahme] gemeint.}

Dann entfällt – ohne negative Konsequenzen – die Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen bei A6, A7 und A9, und sie entfällt damit auch bei allen Prinzipien, die in **Pi+-Gamma***-Beweisen angewendet werden mögen, also auch bei den Prinzipien

in tr(**Pi-Delta**)*-Beweisen. Dann ist **Pi+-Gamma*** grundprinziplich einfach **Pi-Gamma*** *plus* A10, wobei **Pi-Gamma*** wiederum wie **Pi-Gamma** ist (also: ohne A10 ist), außer dass **Pi-Gamma*** nun eben G*A2c hat und **Pi-Gamma** GA2c. Das Einzige, das **Pi+-Gamma*** und **Pi-Gamma*** dann unterscheidet, ist die Tatsache, dass in **Pi+-Gamma*** auch Kennzeichnungnamenformeln für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen herangezogen werden – was die Präsenz von A10 bedingt –, bei **Pi-Gamma*** (ebenso wie bei **Pi-Gamma**) hingegen nur unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformeln – was die Abwesenheit von A10 bedingt.

{Man beachte, dass **Pi+Gamma***, wenn für diesen Kalkül die *ausschließlich rigide Verstehensweise* von Kennzeichnungsnamen unterstellt wird, *nicht* um das Axiom A11 erweitert werden kann. (Um dies einzusehen, muss man nur in den Blick nehmen, was sich angesichts von R9 etc. mit beweisbarem $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ aus A11 ergäbe.) A11 ist nur für die *ausschließlich flexible Verstehensweise* von Kennzeichnungsnamen geeignet. Diese letztere Verstehensweise wurde zwar im vorausgehenden Kapitel für **Pi+-Gamma** beschlossen; in diesem Kapitel geht es nun aber nicht um **Pi+Gamma**, sondern um **Pi+Gamma***, welcher Kalkül zudem (im Blick auf **Pi-Delta**) eine besondere Aufgabe zu erfüllen hat.}

Da nun **Pi+-Gamma*** in diesem Kapitel schon *mit* der Zwei-Fälle-Beschränkung für die Einsetzungsfallbildung in Beweisen eingeführt wurde, empfiehlt es sich, den Kalkül *ohne* diese Beschränkung – welcher Kalkül freilich im vorausgehenden Absatz soeben ebenfalls „**Pi+-Gamma***“ genannt wurde – ein wenig anders zu nennen: „**Pi+r-Gamma***“, wo „**r**“ die ausschließlich rigide Verstehensweise der Kennzeichnungsnamen in der zugehörigen Normalsprache andeutet. Das Theorem, das **Pi+r-Gamma*** auszeichnet gegenüber **Pi+-Gamma*** [so, wie dieser letztere Kalkül hier zunächst eingeführt wurde], wie auch (mitfolgend) **Pi+r-Gamma** gegenüber **Pi+-Gamma**, ist dieses:

P+rG*T1: $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ *Rigidität der Kennzeichnungsnamenformeln* (RIK)

1. $\rightarrow \iota xF(x) = \iota xF(x)$ A8
2. $\rightarrow \Box(\iota xF(x) = \iota xF(x))$ GRT3 (1)
3. $\Box(\iota xF(x) = \iota xF(x)) \rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ A7 {Einsetzungsfall}
4. $\rightarrow \exists y\Box(\iota xF(x) = y)$ R3 (3, 2)

Und das Folgende ist schlicht ein Korollar von P+rG*T1:

P+rG*T2: $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$

1. $\rightarrow \exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ P+rG*T1 {Einsetzungsfall}

2. $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$ GRT3 (1)

Die S4-modallogische Repräsentation von **Pi-Delta** lässt sich, so weit sie mit **Pi+-Gamma*** gelingt, auch mit **Pi+r-Gamma*** durchführen [um sich davon zu überzeugen, genügt ein Blick auf die obigen **Pi+-Gamma***-Beweise von tr(A6)* – tr(A10)* und von tr(R8)* – tr(R9)*]. Der Vorteil von **Pi+r-Gamma*** gegenüber **Pi+-Gamma*** ist nun aber, dass sich die S4-modallogische Repräsentation von **Pi-Delta** mit **Pi+r-Gamma*** auch da durchführen lässt, wo sie mit **Pi+-Gamma*** nicht gelingt: Das *harmlose* **Pi-Delta**-Theorem $\rightarrow \exists y(\iota xF(x) = y)$ – unverändert harmlos auch dann, wenn man $\exists y(\iota xF(x) = y)$ im Theorem durch die intuitionistische „**w**"-Version der **Pi-Alpha**-mäßig verstandenen Satzformel $\exists y(\iota xF(x) = y)$ semantisch explizit macht [also durch $\mathbf{w}\exists y\mathbf{w}(\iota x\mathbf{w}F(x) = y)$, wobei „**w**" als „Man weiß, dass" gedeutet ist] – hat in **Pi+r-Gamma*** seine S4-modallogische Entsprechung, nämlich P+rG*T2 (während es in **Pi+-Gamma*** *keine* S4-modallogische Entsprechung hat); und der weiter oben zuerst angegebene, die Schritte in **Pi-Delta** in direkter Weise abbildende, sozusagen kopierende alternative Beweis von P+rG*T2, von $\rightarrow \Box\exists y\Box(\iota x\Box F(x) = y)$, in tr(**Pi-Delta**)* geht bei Einbettung von tr(**Pi-Delta**)* in **Pi+r-Gamma*** ohne Beanstandung durch (bei Einbettung von tr(**Pi-Delta**)* in **Pi+Gamma*** hingegen tut er das *nicht*).

Doch hat das Ganze einen Haken. Im vorigen Kapitel ist das Vorgehen, für alle Kennzeichnungsnamen in der Normalsprache ausschließlich die rigide Verstehensweise zu unterstellen, schon in Erwägung gezogen worden, als der Übergang von **Pi-Gamma**, wo – systemisch – Kennzeichnungsnamen in der zugehörigen Normalsprache und Kennzeichnungsnamenformel in der Formelsprache *nicht* in den Blick genommen werden, zu **Pi+-Gamma**, wo diese Ausdrücke sehr wohl systemisch in den Blick genommen werden, zur Reflexion stand. Das Vorgehen zeichnet sich durch Einfachheit aus, und es hat eine feste umgangssprachliche Verankerung. *Allerdings* erwies es sich als unvereinbar mit der – intuitiven, „vor dem Kalkül" sich darbietenden – logischen Validität von A10: Ein (unabweisliches) Korollar von A10 – nämlich $\Box\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$ [aus A10 mit GRT4] – hat Kontra-Instanzen, wenn ausschließlich von der rigiden Verstehensweise für alle Kennzeichnungsnamen – und entsprechend für

alle Kennzeichnungsnamenformeln – ausgegangen wird. Um das Beispiel aus dem vorigen Kapitel noch einmal aufzugreifen (es lässt sich gegen die Rigidifizierung von **Pi+-Gamma*** genauso vorbringen wie gegen die Rigidifizierung von **Pi+-Gamma**): Der Kennzeichnungsname „die Sonneplanetenzahl" bezeichnet dann, wenn ausschließlich von der rigiden Verstehensweise für alle Kennzeichnungsnamen ausgegangen wird, *unter allen Umständen* die Zahl Acht; denn „die Sonneplanetenzahl" wird dann im Sinne von „*fix* die *tatsächliche* Sonneplanetenzahl" genommen. Es ist aber nicht notwendig, dass [*fix*] die [*tatsächliche*] Sonneplanetenzahl [m. a. W.: Acht] eine Sonneplanetenzahl[151] ist (denn anderen Anzahlen als Acht ist es immerhin möglich, eine Sonneplanetenzahl zu sein, wodurch dann Acht *keine* wäre); *während* es doch notwendig ist, dass etwas (und sei es die Zahl Null oder die Zahl $Aleph_0$) eine Sonneplanetenzahl ist.

{Hier noch eine *inhaltlich* (aber nicht *strukturell*) ganz andere – doch, wie ich meine, plausible – Kontra-Instanz zu $\Box\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$, *wenn* ausschließlich von der rigiden Verstehensweise für alle Kennzeichnungsnamen ausgegangen wird (womit abermals eine Widerlegung der intuitiven logischen Validität von A10 gegeben ist, entgegen seiner grundprinziplichen Präsenz im Rahmen von **Pi+r-Gamma***): Gemäß der Metaphysik, die ich im Jahre 2021 für wahr halte, gilt: Es ist notwendig, dass etwas [und sogar *genau ein* Etwas] eine wirkliche Welt ist, aber es ist dennoch nicht notwendig, dass [*fix*] die [*tatsächliche*] wirkliche Welt [also *diese* – uns einigermaßen in ihrer Realität bekannte – Welt] eine wirkliche Welt ist; zwar ist sie eine wirkliche Welt, aber sie ist es kontingenterweise: es ist [alethisch] möglich, dass sie nicht eine wirkliche Welt ist.}

Im vorigen Kapitel wurde der Konflikt einer ausschließlich rigiden Verstehensweise von normalsprachlichen Kennzeichnungsnamen mit der logischen Validität von A10 [zunächst mit der logischen Validität eines unabweislichen Korollars von ihm] dadurch vermieden, dass anstelle der ausschließlich rigiden Verstehensweise *ausschließlich* die flexible Verstehensweise normalsprachlicher Kennzeichnungsnamen gesetzt wurde (abgesehen, selbstverständlich, von jenen Kennzeichnungsnamen, die schon durch ihren Bedeutungsinhalt *allein* ihre referenzielle Rigidität erzwingen). *Diese* Maßnahme kommt hier – in der jetzigen Situation – aber nicht infrage; denn an der Rigifizierung von **Pi+Gamma*** – am Übergang zu

[151] Die Verwendung von „eine" in „ist eine Sonneplanetenzahl" klingt merkwürdig, weil, wie man mindestens implizit weiß, notwendigerweise *genau eine* (An-)Zahl eine Sonneplanetenzahl [eine Zahl der Planeten der Sonne] ist, jedoch mit Ausdrücken der Gestalt „ist eine Φ" gewohnheitsmäßig assoziiert wird, dass von mehreren Φ auszugehen sei. Logisch gesehen ist an „ist eine Sonneplanetenzahl" nichts auszusetzen.

Pi+r-Gamma* – soll um willen der dadurch ermöglichten (perfekten) S4-modallogischen Repräsentation von **Pi-Delta** festgehalten werden. Was also ist zu tun?

Die der Normalsprache von **Pi-Delta** zugrundegelegte (mit ersterer Sprache gleich*lautende*) Normalsprache von **Pi-Alpha** muss schlicht so verfasst sein, dass jeder Kennzeichnungsname in ihr semantisch-gesetzlich nur (referenziell) rigide verstanden wird, wenn er denn nicht überhaupt nur (referenziell) rigide verstanden werden kann; *und zudem* so, dass jeder Satz von ihr, dessen Form durch eine Satzformel der Gestalt $\sigma[\iota\upsilon\sigma[\upsilon]]$ wiederzugeben ist [im einfachsten Fall durch „F(ιxF(x))“], stets *notwendigerweise* valide ist, *wenn* der entsprechende „Mindestens ein“-Satz [dessen Form durch eine Satzformel der Gestalt $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ wiederzugeben ist] valide ist. [Man beachte, dass dieser letztere Aussage des Textes eine metasprachliche Aussage ist, während sie doch – was metasprachlich ungewöhnlich ist – den Modalausdruck „notwendigerweise“ enthält.] Hier einige Kennzeichnungsnamen und zugehörige „Selbstbeschreibungssätze“, für die diese Anforderungen erfüllt sind (dabei steht „*ir*“ für „[schon] inhaltlich rigide“ und „*ar*“ für „[erst] auffassungsmäßig rigide“; die je zugehörigen validen „Mindestens ein“-Sätze – oder: „Manches“-Sätze – sind nicht gelistet):

Rigider Kennzeichnungsname:	*Notwendigerweise* valider „Selbstbeschreibungssatz“:
„die kleinste Primzahl“ (*ir*)	„Die kleinste Primzahl ist eine kleinste Primzahl“
„der Nachfolger von 5“ (*ir*)	„Der Nachfolger von 5 ist ein Nachfolger von 5“
„die Primzahl“ *(ar)*	„Die Primzahl ist eine Primzahl“
„die Quadratwurzel aus 2“ (*ar*)	„Die Quadratwurzel aus 2 ist eine Quadratwurzel aus 2“
„die Summe aus 5 und 3“ (*ir*)	„Die Summe aus 5 und 3 ist eine Summe aus 5 und 3“
„die Primzahl kleiner 5“ (*ar*)	„Die Primzahl kleiner 5 ist eine Primzahl kleiner 5“
„die gerade Primzahl“ (*ir*)	„Die gerade Primzahl ist eine gerade Primzahl“
„der Primfaktor von 10“ (*ar*)	„Der Primfaktor von 10 ist ein Primfaktor von 10“

Usw.

Aus einer Normalsprache für **Pi-Delta**, der eine **Pi-Alpha**-Normalsprache zugrundeliegt, *die so verfasst ist wie gerade beschrieben* (und illustriert), kann sich keine Kontra-Instanz zu $\Box\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$ ergeben. Die logische Validität von A10 bleibt *da* auch dann unangefochten, wenn man zunächst zu den intuitionistisch gedeuteten „**w**“-Versionen der Sätze der **Pi-Alpha**-Normalsprache, welche der **Pi-Delta**-Normalsprache zugrundeliegt, übergeht und

dann – mit dem Ziel der S4-modallogischen Repräsentation von **Pi-Delta** in **Pi+r-Gamma*** – zu den diesen „**w**"-Versionen eins-zu-eins korrespondierenden „❐"-*Versionen*. *Denn* obwohl Kennzeichnungsnamen rigide zu verstehen sind *auch in der* durch die Modalisierung der (fraglichen, besonderen) **Pi-Alpha**-Normalsprache insgesamt resultierenden, jene „❐"-Versionen einbettenden *Normalsprache für* **Pi+r-Gamma***, wird von dieser letzteren Normalsprache (angesichts ihres „Ursprungs" oder Kerns: der in Betrachung stehenden **Pi-Alpha**-Normalsprache) sogar die logische Validität von $\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$ garantiert, damit (wegen GT3 und RT7) aber auch die logische Validität von $\Box\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$ und von $\exists xF(x) \rightarrow F(\iota xF(x))$.

{Es ist von Nutzen, sich das Verhältnis der involvierten Normalsprachen vor Augen zu halten: Die ins Auge gefasste Normalsprache Λ_1 für **Pi-Delta** ist typographisch und syntaktisch genauso wie die beschriebene, ihr zugrundeliegende Normalsprache für **Pi-Alpha**[152] *mit den angegebenen Besonderheiten* (wobei zu den Normalsprachen für **Pi-Alpha** insbesondere auch *die [klassisch interpretierte] mathematische Sprache* zählt – die nun eben diese Besonderheiten tatsächlich aufweist); nennen wir diese letztere, **Pi-Alpha** zugeordnete Sprache „Λ_0". *Semantisch* aber unterscheidet sich Λ_1 von Λ_0: Die Sätze von Λ_1 sind, semantisch betrachtet, die verkappten „**w**"-Versionen der Sätze von Λ_0, *wobei* „**w**" im Sinne von „Man weiß, dass" aufgefasst wird (man beachte, dass die *so* verfassten „**w**"-Versionen der Sätze von Λ_0 *keine* Sätze von Λ_0 sind). Die Modalisierung von Λ_0 im Einklang mit **Pi+r-Gamma*** wiederum besteht darin, dass Λ_0 – *exakt* diese Sprache: nicht mehr als sie und nicht weniger als sie, *exakt* so, wie sie syntaktisch und semantisch verfasst ist – zum nichtmodalen Kern (oder „Ursprung") einer [insgesamt gesehen selbstverständlich modalen] Normalsprache für **Pi+r-Gamma*** wird [wobei die Vorkommnisse von „Wenn, dann" in Λ_0 sämtlich als Materiale Implikationen durch „nicht" und „oder" in der bekannten Weise *definiert* gelten – wie es jeder Normalsprache für **Pi-Alpha** angemessen ist]; nennen wir diese letztere, **Pi+r-Gamma*** zugeordnete Sprache „Λ_2". Λ_2, nun, hat eine besondere Region: Diese Region umfasst genau die Sätze von Λ_2, die aus den „**w**"-Versionen der Sätze von Λ_0 hervorgehen, wenn man „**w**" [„Man weiß, dass"] in ihnen überall durch „❐" [„Es ist notwendig, dass"] ersetzt (und weiter nichts tut).

Es ist übrigens unerheblich, dass Λ_0 als Kern von Λ_2 mehr an Modallogik semantisch rechtfertigt als durch **Pi+r-Gamma*** erfasst wird; denn logisch valide hinsichtlich Λ_2 [mit $\Lambda_0 \subset \Lambda_2$] ist ja, z. B., auch $\exists xF(x) \rightarrow \Box F(\iota xF(x))$ und womöglich sogar $A \rightarrow \Box A$ und $\neg A \rightarrow \Box\neg A$, während *keine* dieser drei Schlussformeln in **Pi+r-Gamma*** beweisbar ist. **Pi+r-Gamma*** ist ein modallogischer Kalkül, der für die modallogische Repräsentation von **Pi-Delta** [einschließlich A10: siehe den Beweis von tr(A10)*] *schon hinreicht* (mehr Mittel, als er zur Verfügung stellt, braucht es dazu nicht), und zwar *ohne dass* er mit der Normalsprache Λ_1 für **Pi-Delta** – *letztinstanzlich*: mit der ihr zugrundeliegenden „Doppelgängerin" Λ_0 – in Konflikt gerät, wenn man zu der durch Λ_1 – *letzt-*

[152] Man beachte hierbei die Fußnoten 148 und 149 sowie die Anmerkung im Text, die auf die beiden Fußnoten unmittelbar folgt.

instanzlich: durch Λ_0 – determinierten modalisierten Sprache Λ_2 übergeht: Der logischen Validität von P+rG*T1 und P+rG*T2 und A10 (und seinen Einsetzungsfällen) und tr(A10)* wird durch Λ_2 (und was da valide und logisch valide ist) kein Abbruch getan, sondern im Gegenteil ein Fundament gegeben; *darauf* kommt es an. – Es wird gleich deutlich werden, *genau welche* Sprache es ist, die unübertrefflich, nämlich sozusagen *natürlicherweise*, als Λ_0 und – *in globaler Sinnmodifizierung* von sich – als Λ_1 infragekommt.}

Es ist klar, dass die ins Auge gefasste Normalsprache für **Pi-Delta** [Λ_1] und die sie fundierende, mit ihr syntaktisch und typographisch (aber nicht semantisch) identische besonders geartete Normalsprache für **Pi-Alpha** [Λ_0][153] im Vergleich zur Umgangssprache (die gleichsam unendlich weit davon entfernt ist, die logische Validität von $\exists$xF(x) $\rightarrow$ $\Box$F(ιxF(x)) oder von $\rightarrow$ $\exists$y$\Box$(ιxF(x) = y) zu stützen) *jeweils* eine sehr spezielle Sprache sein muss – und dennoch kann diese Sprache eine hochvertraute Sprache sein (wie aus den obigen Beispielen von Kennzeichnungsnamen und „Selbstbeschreibungssätzen“ schon genugsam hervorgeht), nämlich: *die Sprache der Mathematik*, in *jeweils* anderer umfassender Deutung. Das trifft sich nun sehr gut; denn die intuitionistische Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung – formuliert, beispielsweise, durch den Kalkül **Pi-Delta** – ist ja, historisch gesehen, als eine Logik *für die Mathematik* konzipiert worden. Wenn die intuitionistische Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung innerhalb von **Pi+r-Gamma*** repräsentierbar sein soll, dann muss sie – offenbar – an diese Konzipierung *für die Mathematik* gebunden bleiben; denn die *intuitionistisch-epistemisch* gedeutete Sprache der Mathematik ist die einzige *vorfindliche* – dabei natürlich gewachsene – *Sprache* (im Unterschied zu einer bloßen Zusammenstellung von ausgesuchten Sätzen), die als Normalsprache für **Pi-Delta** sich anbietet – *sofern* **Pi-Delta** innerhalb von **Pi+r-Gamma*** repräsentierbar sein soll.

Freilich halten sich die Mathematiker in der überwältigenden Mehrheit an die *klassisch-(rein)ontisch* gedeutete Sprache der Mathematik, deren Logik durch **Pi-Alpha** formuliert wird, und gerade nicht an deren „identischen“ *intuitonistisch-epistemischen* Zwilling, deren Logik durch **Pi-Delta** formuliert wird. „Kein Wunder!“, mag man vielleicht sagen. „**Pi-**

[153] Beide Sprachen sind nicht nur typographisch (sowie phonetisch) und syntaktisch identisch, sondern sie handeln auch von denselben Sachen – und *dennoch* ist die **Pi-Delta**-Normalsprache von der ihr zugrundliegenden **Pi-Alpha**-Normalsprache semantisch verschieden. Warum? – Das allumfassende semantische Medium der **Pi-Delta**-Normalsprache ist ein anderes als das der **Pi-Alpha**-Normalsprache: Das erstere Medium ist ein epistemisches, das letztere ein rein ontisches. Die Präsenz des jeweiligen Mediums, das an sich unsichtbar ist, lässt sich sichtbar machen, indem man von den Sätzen der jeweiligen Normalsprache zu deren „**w**“-Versionen übergeht (die mit den Ausgangssätzen *synonym* sind; vgl. DEFw in Kapitel 5), im Falle der **Pi-Delta**-Normalsprache mit Deutung von „**w**“ als „Man weiß, dass“, im Falle der **Pi-Alpha**-Normalsprache mit Deutung von „**w**“ als „Es ist [ontisch] wahr, dass“.

Delta gibt ihnen ja erheblich weniger Werkzeuge für die mathematischen Beweisführungen an die Hand.“ Aber der Grund ist wohl eher der, dass die Gegenstände der Mathematik von Mathematikern (und nicht nur von diesen) wie eine eigene, an sich bestehende Realität erlebt werden (ob wir nun dieses oder jenes von ihnen wissen oder nicht) – was der Sprache der Mathematik *als* **Pi-Alpha**-*Normalsprache* entspricht, *nicht* ihrer *als* **Pi-Delta**-*Normalsprache*.

Wie die intuitionistische Aussagenlogik eine Abschwächung der wahrheitsfunktionalen Aussagenlogik ist, so ist auch die intuitionistische Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung eine Abschwächung der klassischen Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung. Anders gesagt: Wie **Delta** eine Abschwächung von **Alpha** ist, so ist **Pi-Delta** eine Abschwächung von **Pi-Alpha** (und zwar aufgrund derselben Ursache wie bei **Delta** und **Alpha**: der Ersetzung von R5 durch IR5). Der Intuitionismus ist bekannt für seine Ablehnung „indirekter Existenzbeweise“; das bedeutet insbesondere, dass aus intuitionistischer Perspektive die folgenden Schemata für Schlussregelformeln [*Schemata* sind sie wegen des in ihnen auftretenden, eine beliebige endliche Satzformelfolge indizierenden Schemabuchstabens „Γ“] keine logischen Gesetze sind:

(i) $\Gamma, \neg\exists xF(x) \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

(ii) $\Gamma, \neg\exists xF(x) \rightarrow \neg\neg\exists xF(x) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

(iii) $\Gamma, \neg\exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

(iv) $\Gamma, \forall x\neg F(x) \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

(v) $\Gamma, \forall x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall x\neg F(x) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

Entsprechend ist keines dieser fünf Schemata in **Pi-Delta** beweisbar. In **Pi-Alpha** hingegen ist *jedes* von ihnen beweisbar: (i) ist schlicht ein Einsetzungsfall von RT9 [GIS2], (iii) schlicht ein Einsetzungsfall von RT11 [GIS4]. (ii) wiederum ergibt sich unter Verwendung von RT10 [GIS3] wie folgt:

RT23: $\Gamma, \neg\exists xF(x) \rightarrow \neg\neg\exists xF(x) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

1. $\Gamma, \neg\exists xF(x) \rightarrow \neg\neg\exists xF(x)$ Annahme

2. $\Gamma \rightarrow \neg\neg\exists xF(x)$ RT10 (1)

3. $\Gamma, \neg\neg\exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ T2 {EDN}, R2 {X-fach je nach Länge von Γ}, R1 {dito}

4. $\Gamma \rightarrow \exists xF(x)$ R3 (3, 2)

Beim Beweis von (iv) unter Verwendung von RT8 [GIS1] in **Pi-Alpha** wird erstmals in der Reihe (i) – (v) auch ein genuin prädikatenlogisches Prinzip verwendet:

RT24: $\Gamma, \forall x\neg F(x) \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

1. $\Gamma, \forall x\neg F(x) \rightarrow \neg(B \supset B)$ Annahme

2. $\Gamma \rightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ RT8 (1)

3. $\Gamma, \neg\forall x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$ T39 {1DMO, von rechts nach links}, R2, R1

4. $\Gamma \rightarrow \exists xF(x)$ R3 (3, 2)

Dasselbe prädikatenlogische Prinzip kommt auch beim Beweis von (v) unter Verwendung von RT10 [GIS3] zum Einsatz:

RT25: $\Gamma, \forall x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall x\neg F(x) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$

1. $\Gamma, \forall x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ Annahme

2. $\Gamma \rightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ RT10 (1)

3. $\Gamma, \neg\forall x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$ T39 {1DMO, von rechts nach links}, R2, R1

4. $\Gamma \rightarrow \exists xF(x)$ R3 (3, 2)

Warum ist keines jener fünf Regelgesetze, (i) – (v), der klassischen Prädikatenlogik auch ein Regelgesetz der intuitionistischen Prädikatenlogik? – Um diese Frage zu beantworten, betrachte man je eine Spezialisierung (einen besonderen Fall) von jedem jener fünf **Pi-Alpha**-Gesetze:

Für (i): $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$

Für (ii): $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \Rightarrow \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$

Für (iii): $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \Rightarrow \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$

Für (iv): $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B) \Rightarrow \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$

Für (v): $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \Rightarrow \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$

Bei jeder dieser fünf Spezialisierungen ist die Schlussformel *vor* „⇒“ in **Pi-Delta** beweisbar, die Schlussformel *nach* „⇒“ aber nicht – womit gezeigt ist, dass weder (i), noch (ii), noch (iii), noch (iv), noch (v) in **Pi-Delta** herleitbar ist. **Pi-Delta** jedoch ist eine Formulierung der intuitionistischen Prädikatenlogik (mit Identität und Kennzeichnung); also ist weder (i), noch (ii), noch (iii), noch (iv), noch (v) ein Regelgesetz der intuitionistischen Prädikatenlogik.

Es folgt nach, was noch nachzutragen ist:

ERSTENS: *Die Beweise in* **Pi-Delta** *der fünf soeben als beweisbar in* **Pi-Delta** *behaupteten Schlussregelformel-Antezedentia* [wobei der Kalkül **Pi-Delta** den Kalkül **Delta**, der maßgeblich im Kapitel 4 betrachtet wurde, mitumfasst; Theoreme und echtabgeleitete Schlussregelformeln dieses letzteren Kalküls dürfen also jederzeit in Beweisen in **Pi-Delta** verwendet werden]:

PIT1:[154] $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$

1. $\rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ Theorem von **Pi-Delta**
2. $(B \supset B) \rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R2 (1)
3. $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$ IR5 $\{\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B\}$ (2)

{$\rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ ist beweisbar in **Pi-Delta**:

1. $F(a) \vee \neg F(a) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ A7
2. $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(F(a) \vee \neg F(a))$ IRT2 (1)
3. $\neg\neg(F(a) \vee \neg F(a)) \rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ IRT2 (2)
4. $\rightarrow \neg\neg(F(a) \vee \neg F(a))$ IT2
5. $\rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R3 (3, 4).

Die Beweisbarkeit von $\rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** lässt sich *nicht* etablieren aufgrund der Beweisbarkeit von $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Alpha** [T37a: ETND1] – *mittels* einfacher Erweiterung des *Hauptsatzes über das Verhältnis von* **Alpha** *und* **Delta** [(XVI) in Kapitel 6] auf **Pi-Alpha** *und* **Pi-Delta**. Diese Erweiterung ist nicht möglich; das ersieht man schon aus der Nichtbeweisbarkeit von $\rightarrow \neg\neg\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta**.}

PIT2: $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$

1. $\rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ Theorem von **Pi-Delta**

[154] In Kapitel 4 haben wir das aussagenlogische **Delta**-Theorem IT1 (wobei „I“ für „intuitionistisch“ steht); hier, in Kapitel 12, haben wir nun das prädikatenlogische **Pi-Delta**-Theorem PIT1.

2. $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R2 (1)

PIT3: $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$

1. $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)), \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ A3
2. $\rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ Theorem von **Pi-Delta**
3. $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R2 (2)
4. $\neg\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ R3 (1, 3)

PIT4: $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$

1. $\rightarrow \neg\neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ **Pi-Delta**-Theorem
2. $(B \supset B) \rightarrow \neg\neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ R2 (1)
3. $\neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$ IR5 (2)
4. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ IT1
5. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$ RT7 (4, 3)

{$\rightarrow \neg\neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ ist in **Pi-Delta** beweisbar:

1. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(F(a) \vee \neg F(a))$ A6
2. $\neg\neg(F(a) \vee \neg F(a)) \rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ IRT2 (1)
3. $\rightarrow \neg\neg(F(a) \vee \neg F(a))$ IT2
4. $\rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ R3 (2, 3)
5. $\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ IT4 [von rechts nach links]
6. $\rightarrow \neg\neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ R3 (4, 5).

Eine von der Beweisbarkeit von $\rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Alpha** ausgehende Argumentation, die $\rightarrow \neg\neg\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ mittels Erweiterung auf **Pi-Alpha** *und* **Pi-Delta** des *Hauptsatzes über das Verhältnis von* **Alpha** *und* **Delta** etablieren möchte, scheitert, weil diese Erweiterung nicht möglich ist – wie gesagt.}

PIT5: $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$

1. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$ PIT4
2. $B \supset B \rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ IR5 (1)
3. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow B \supset B$ T5 {ein **Alpha**- *und* **Delta**-Theorem}, R2
4. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ RT7 (3, 2)

{Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren:

PIT5: $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$

1. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$ PIT4
2. $\rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ IRT1a [GIS1] (1)
3. $\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ R2 (2)

Woraus nun ganz nebenbei ein wichtiges **Pi-Delta**-Theorem ersichtlich ist:

PIT6: $\rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$

Zum Beweis siehe den eben angegebenen alternativen Beweis von PIT5, bis zur 2. Zeile. Man kann aber, um $\rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** zu beweisen, auch wesentlich anders vorgehen: siehe die Deduktion in der Anmerkung zu PIT4 bis zu ihrer 4. Zeile.}

ZWEITENS: *Der Nachweis, dass das Sukzedens* $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ *jeder der oben betrachteten Spezialisierungen* [der Spezialisierung von (i), von (ii), von (iii), von (iv) und von (v)] *in* **Pi-Delta** *nicht beweisbar ist*.

Um dies zu zeigen, geht man zur „❒"-Version von $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ über, also zu der Schlussformel $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$. *Diese Schlussformel ist in* **Pi+r-Gamma*** *nicht beweisbar*, also erst recht nicht beweisbar in dem Teilkalkül tr(**Pi-Delta**)* von **Pi+r-Gamma***. Folglich ist $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ nicht in **Pi-Delta** beweisbar; denn wäre es da beweisbar, so würde sich ja der Beweis als ein Beweis in tr(**Pi-Delta**)* für $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ abbilden lassen. Aber einen Beweis für $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ in tr(**Pi-Delta**)* gibt es nun eben nicht – *aus dem schon genannten Grund*.

Warum aber ist $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ nicht in **Pi+r-Gamma*** beweisbar? Woran es liegt, sieht man am besten, wenn man sich den folgenden Beweis für die fragliche Schlussformel im Kalkül **Pi-Gamma** anschaut:

PGT17: $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$

1. $\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\neg\Box F(a)$ GT8 {*S5-Axiom*}
2. $\rightarrow \neg\Box F(a) > \Box\neg\Box F(a)$ GRT2 (1) {die *R4-Analogie für* **Gamma**}
3. $\rightarrow \neg\neg\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$ GD1 (2)
4. $\neg\neg\Box F(a) \rightarrow \Box F(a)$ T2
5. $\rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$ RT26 {Beweis folgt} (4, 3)

6. $\rightarrow \Box(\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a))$ GRT3

7. $\Box(\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)) \rightarrow \exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ A7

8. $\rightarrow \exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ R3 (7, 6)

9. $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ GRT3

Der eben angegebene Beweis von PGT17 arbeitet mit RT26, einem auch sonst nützlichen Regelgesetz. Es ist in **Alpha** beweisbar, darum beweisbar auch in jedem **Alpha** inkorporierenden Kalkül:

RT26: $\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma \rightarrow A \vee C \Rightarrow \Gamma \rightarrow B \vee C$

1. $\Gamma, A \rightarrow B$ Annahme

2. $\Gamma \rightarrow A \vee C$ Annahme

3. $B \rightarrow B \vee C$ A4

4. $\Gamma, A \rightarrow B \vee C$ RT20 (1, 3)

5. $\Gamma, \neg A, A \vee C \rightarrow C$ T12 {EP}, R2, R1

6. $\Gamma, \neg A \rightarrow A \vee C$ R2 (2)

7. $\Gamma, \neg A \rightarrow C$ R3 (5, 6)

8. $C \rightarrow B \vee C$ A4

9. $\Gamma, \neg A \rightarrow B \vee C$ RT20 (7, 8)

10. $\Gamma \rightarrow B \vee C$ R5 (4, 9)[155]

[155] Ist $\Gamma, A \rightarrow B; \Gamma \rightarrow A \vee C \Rightarrow \Gamma \rightarrow B \vee C$ auch in **Delta** beweisbar? Wenn ja, dann muss das ohne den Einsatz von R5 möglich sein. Danach sieht es aber nicht aus. Denn wäre das Fragliche in **Delta** beweisbar, so müsste $tr(\Gamma), \Box A \rightarrow \Box B; tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box C) \Rightarrow tr(\Gamma) \rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)$ in tr(**Delta**)* beweisbar sein, mit der tr(**Delta**)* entsprechenden Einschränkung der Einsetzungsfälle in Beweisen auf **Gamma*D**-Satzformeln links und rechts von „$\rightarrow$“ (gemeint sind damit Satzformeln, die nicht eingeschlossen in einer Satzformel sind). Diese Beweisbarkeit besteht offenbar nicht; denn schon $\Box A \rightarrow \Box B; \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box C) \Rightarrow \rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)$ [wo $tr(\Gamma)$ leer ist] ist offenbar nicht in tr(**Delta**)* beweisbar. Allerdings ist diese selbe Schlussregelformel in **Gamma*** beweisbar, wo man $\rightarrow \Box(\Box A \vee \neg\Box A)$ als Theorem zur Verfügung hat; aber in tr(**Delta**)* hat man $\rightarrow \Box(\Box A \vee \neg\Box A)$ nun eben nicht zur Verfügung; es ist ja nicht einmal eine **Gamma*D**-Schlussformel. $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ wiederum wäre zwar eine **Gamma*D**-Schlussformel, aber ist ebenfalls kein tr(**Delta**)*-Theorem (und ist zudem auch kein **Gamma***-Theorem!).
[*Hinweis zur Anwendung des Theorems* $\rightarrow \Box(\Box A \vee \neg\Box A)$ *in der vorliegenden Beweisaufgabe*: Aus $\Box A \rightarrow \Box B$ ist wegen GRT2, GD1 und GRT3 **Gamma***-deduzierbar: $\rightarrow \Box(\neg\Box A \vee \Box B)$. Aus $\rightarrow \Box(\neg\Box A \vee \Box B)$ ist dann **Gamma***-deduzierbar: $\rightarrow \Box(\neg\Box A \vee (\Box B \vee \Box C))$, während andererseits aus $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box C)$ auch $\rightarrow \Box(\Box A \vee (\Box B \vee \Box C))$ **Gamma***-deduzierbar ist. Aus $\rightarrow \Box(\Box A \vee (\Box B \vee \Box C))$ und $\rightarrow \Box(\neg\Box A \vee (\Box B \vee \Box C))$ *zusammen* ist mit dem **Gamma***-Theorem $\rightarrow \Box(\Box A \vee \neg\Box A)$ **Gamma***-deduzierbar: $\rightarrow \Box(\Box B \vee \Box C)$.]

Man kann es aber auch anders (weniger aufwendig) anfangen, wenn man PGT17 beweisen will:

PGT17: $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$

1. $\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\neg\Box F(a)$ GT8 {*S5- Axiom*}
2. $\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$ A4
3. $\neg\Box F(a) \rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$ RT7 (1, 2)
4. $\Box F(a) \rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$ A4
5. $\rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$ R5 (4, 3),

und weiter genau wie im zuerst angegebenen Beweis für PGT17.

Woran es liegt, dass $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ in **Pi+r-Gamma*** nicht beweisbar ist, ist nun offenbar: Alle Schritte in beiden Beweisen für PGT17 können auch in **Pi+r-Gamma*** gemacht werden – *mit Ausnahme* des ersten Schritts. Denn **Pi+r-Gamma*** baut ja *nur* auf dem Kalkül **Gamma*** auf, nicht wie **Pi-Gamma** auf dem Kalkül **Gamma**. In **Gamma*** steht *S5-Axiom* nicht zur Verfügung, sondern nur *S4-Axiom*: Nur GT7 kann nach **Gamma*** übernommen werden, nicht auch GT8. [Ende von ***ZWEITENS***.]

Fügte man nun dem Teilkalkül tr(**Pi-Delta**)* von **Pi+r-Gamma*** als Axiom $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ hinzu [mit der tr(**Pi-Delta**)* entsprechenden Einschränkung der Einsetzungsfälle in Beweisen!], so wäre tr(**Pi-Delta**)* + $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ *kein* Teilkalkül von **Pi+r-Gamma*** mehr, jedoch in dieser Verstärkung von tr(**Pi-Delta**)* wäre $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ leicht beweisbar:

1. $\rightarrow \Box(\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a))$ Zu tr(**Pi-Delta**)* hinzugenommenes Axiom {Einsetzungsfall}
2. $\Box(\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)) \rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ tr(A7)* {Einsetzungsfall}
3. $\rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$ tr(R3)* (2, 1).

{Hierzu einige deduktionstechnische Bemerkungen:

Den verwendeten Einsetzungsfall von tr(A7)* – also von $\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$ – erhält man wie folgt: Für „F“ wird in tr(A7)* gesetzt: „$(\Box F(_) \vee \Box\neg\Box F(_))$“. Also ergibt sich:

$\Box(\Box F(_) \vee \Box\neg\Box F(_))(a) \rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(_) \vee \Box\neg\Box F(_))(x)$.

Nach Einlagerung von „a“ bzw. „x“ in die Leerstellen ergibt sich schließlich:

$\Box(\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)) \rightarrow \Box\exists x\Box(\Box F(x) \vee \Box\neg\Box F(x))$.

Selbstverständlich ist tr(R3)* – also: tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box C$; tr($\Gamma$) $\rightarrow \Box B \Rightarrow$ tr(Γ) $\rightarrow \Box C$ – nun auf tr(**Pi-Delta**)* zu beziehen und nicht mehr bloß auf tr(**Delta**)*. Die (in Kapitel 5 angegebene) Klausel, dass das Regelgesetz tr(R3)* „nur Einsetzungsfälle hat, welche als ihre nicht mehr in Satzformeln eingebetteten Satzformelteile[156] nur **Gamma*D**-Satzformeln darbieten“, ist in obiger Deduktion eingehalten (*nur* dass es aktuell nicht bloß um die **Gamma*D**-Satzformeln geht, sondern um die – die **Gamma*D**-Satzformeln mitumfassenden – **Pi+r-Gamma*D**-Satzformeln). Die durch die Klausel gegebene Einschränkung kann man nicht nur für tr(R3)*, sondern *für alle Prinzipien* des Kalküls tr(**Pi-Delta**)* auch so formulieren: „wobei als Einsetzungsfälle in Beweisen mit dem Kalkül *auschließlich* solche Einsetzungsfälle erlaubt sind, die links und rechts von ‚$\rightarrow$‘ *ausschließlich* **Pi+r-Gamma*D**-Satzformeln nicht eingeschlossen in einer Satzformel stehen haben“.

Die Notation „tr(Γ)“ bei tr(**Pi-Delta**)* Regelgesetzen – „Γ*“ bei tr(R8)* und tr(R9)* – besagt, dass die damit symbolisierten Satzformelfolgen leer sind oder ausschließlich aus einer oder mehreren **Pi+r-Gamma*D**-Satzformeln bestehen. Bildet man einen Einsetzungsfall eines solchen Regelgesetzes, so kann tr(Γ) bzw. Γ* frei gewählt werden – solange es eine Folge von einer oder mehreren **Pi+r-Gamma*D**-Satzformeln ist oder leer ist.}

Die axiomatische Hinzufügung von $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ zu tr(**Pi-Delta**)* ist nun nichts anderes als die modallogische Abbildung der axiomatischen Hinzufügung von $\rightarrow A \vee \neg A$ zu **Pi-Delta**. **Pi-Delta** wird durch die axiomatische Hinzufügung von $\rightarrow A \vee \neg A$ mit **Pi-Alpha** deduktiv äquivalent (da es **Delta** mit **Alpha** wird: siehe Kapitel 4), und korrelativ verwandelt sich die S4-modallogische Repräsentation von **Pi-Delta** innerhalb von **Pi+r-Gamma***, tr(**Pi-Delta**)*, durch die axiomatische Hinzufügung von $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ in die S5-modallogische Repräsentation [einer deduktiv äquivalenten Variante] von **Pi-Alpha** [mit TND und RKP an der Stelle von ISG] innerhalb von **Pi+r-Gamma** [*ohne* Asteriskus], wobei der letztere Kalkül, wie **Pi+r-Gamma***, auf *die mathematische Sprache* als Normalsprache spezialisiert ist (was es erlaubt – wie gesehen –, A10 auch bei Rigidifizierung aller Kennzeichnungsnamen aufrechtzuerhalten).

{Man beachte: **Gamma*** + $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ *ist deduktiv äquivalent mit* **Gamma** – und darum, offensichtlich (denn dieses Verhältnis braucht nur ins Prädikatenlogische übertragen zu werden), ist auch **Pi+r-Gamma*** + $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ deduktiv äquivalent mit **Pi+r-Gamma.**

[156] Gemeint sind damit *Teile, die Satzformeln sind*. Zudem: Mit „Einsetzungsfälle“ ist in der Klausel selbstverständlich dasselbe wie mit „Einsetzungsfälle in Beweisen“ gemeint.

Zum Beweis dieser Behauptung ist zunächst zu sagen: **Gamma*** ist in **Gamma** deduktiv enthalten (wie in Kapitel 3 schon gezeigt), und zudem ist $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ ein Theorem von **Gamma**:

1. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$ GT8 {*S5- Axiom*}
2. $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ A4
3. $\neg\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ RT7 (1, 2)
4. $\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ A4
5. $\rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$ R5 (4, 3)
6. $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ GRT3 (5).[157]

Des Weiteren ist zum Beweis jener Behauptung zu sagen: Das gegenüber **Gamma*** *allein* charakteristische **Gamma**-Axiom GA2c [ursprünglich „GA2c(ii)" genannt] lässt sich herleiten im Kalkül **Gamma*** + $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$:

1. $\rightarrow \Box(\Box(A \supset B) \vee \Box\neg\Box(A \supset B))$ Einsetzungsfall des (hinzukommenden) Axioms $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$
2. $\Box(\Box(A \supset B) \vee \Box\neg\Box(A \supset B)) \rightarrow \Box(A \supset B) \vee \Box\neg\Box(A \supset B)$ GT3 [auch in **Gamma***]
3. $\rightarrow \Box(A \supset B) \vee \Box\neg\Box(A \supset B)$ R3 (2, 1)
4. $\neg\Box(A \supset B) \rightarrow \Box(A \supset B) \vee \Box\neg\Box(A \supset B)$ R2 (3)
5. $\neg\Box(A \supset B), \Box(A \supset B) \vee \Box\neg\Box(A \supset B) \rightarrow \Box\neg\Box(A \supset B)$ T12, R1
6. $\neg\Box(A \supset B) \rightarrow \Box\neg\Box(A \supset B)$ R3 (5, 4)
7. $\Box(A \supset B) \rightarrow A \supset B$ GT3
8. $\neg(A \supset B) \rightarrow \neg\Box(A \supset B)$ RT3 [AUKP] (7)
9. $A \supset B \rightarrow \Box(A \supset B)$ G*A2c [ursprünglich „GA2c(i)" genannt]
10. $\neg\Box(A \supset B) \rightarrow \neg(A \supset B)$ RT3 (9)
11. $\Box\neg\Box(A \supset B) \rightarrow \Box\neg(A \supset B)$ GRT4 [auch in **Gamma***] (10)
12. $\neg(A \supset B) \rightarrow \Box\neg\Box(A \supset B)$ RT7 (8, 6)
13. $\neg(A \supset B) \rightarrow \Box\neg(A \supset B)$ RT7 (12, 11).

Was in Zeile 13 steht, ist nun aber nichts anderes als das (unter Verwendung von GD2 geschriebene) charakteristische **Gamma**-Axiom GA2c. [Darauf, welche zwei unstrukturierten und sinnunbestimmten Satzformeln verwendet werden, um GA2c zu formulieren – ob es „B" und „C" sind, oder eben „A" und „B" –, kommt es nicht an.]}

Derselbe Effekt (d. i.: der vor der letzten Anmerkung beschriebene Effekt) lässt sich auch dadurch erreichen, dass man tr(**Pi-Delta**)* statt $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ als Axiom $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ [natürlich mit der zu tr(**Pi-Delta**)* gehörigen Einschränkung der Einsetzungsfälle in Beweisen] hinzufügt – was nichts anderes ist als die modallogische Abbildung der axiomatischen Hinzufügung von $\neg\neg A \rightarrow A$ zu **Pi-Delta**. Auch durch diese letztere Hinzufügung wird

[157] Vgl. mit dieser Deduktion den *zweiten* oben angegebenen Beweis von PGT17 bis Zeile 6.

Pi-Delta mit **Pi-Alpha** deduktiv äquivalent (da es **Delta** mit **Alpha** wird: siehe Kapitel 4), und auch so verwandelt sich korrelativ die S4-modallogische Repräsentation von **Pi-Delta** innerhalb von **Pi+r-Gamma***, tr(**Pi-Delta**)*, in die S5-modallogische Repräsentation [einer deduktiv äquivalenten Variante] von **Pi-Alpha** [mit EDN und RKP an der Stelle von ISG] in **Pi+r-Gamma**, wobei dieser letztere Kalkül, wie **Pi+r-Gamma***, auf *die mathematische Sprache* als Normalsprache spezialisiert ist.

{*Übrigens*: Auch **Gamma*** + $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ *ist deduktiv äquivalent mit* **Gamma** – und deshalb natürlich auch **Pi+r-Gamma*** + $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ *mit* **Pi+r-Gamma**. Um dies zu beweisen, genügt es (wegen der Ausführungen in der vorigen Anmerkung), darzutun, dass $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ und $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ auf der Grundlage von **Gamma*** auseinander deduzierbar sind (und zwar in folgendem Sinn: Wird die eine Schlussformel *als Axiom* zu Gamma* hinzugenommen, ergibt sich die andere *als Theorem*):

1. $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	**Gamma*** ergänzendes *Axiom*
2. $\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$	GT3 [auch in **Gamma***]
3. $\rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$	R3 (2, 1)
4. $\neg\Box A \rightarrow \Box A \vee \Box\neg\Box A$	R2 (3)
5. $\neg\Box A, \Box A \vee \Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	T12, R1
6. $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$	R3 (5, 4)
7. $\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$	RT5 [LKP] (6)
8. $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\Box A$	GRT4 [auch in **Gamma***] (7)
9. $\Box\Box A \rightarrow \Box A$	GT3
10. $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$	RT7 (8, 9)

Zum Beweis der Umkehrung ist vorauszuschicken, dass

tr(A1)*: $\Box A \rightarrow \Box A$

tr(A3)*: $\Box B, \Box\neg\Box B \rightarrow \Box C$

tr(A4)*: $\Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$; $\Box B \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$

tr(R1)*: $tr(\Gamma)<tr(\sigma), tr(\sigma')> \rightarrow \Box C \Rightarrow tr(\Gamma)<tr(\sigma'), tr(\sigma)> \rightarrow \Box C$

tr(R2)*: $tr(\Gamma) \rightarrow \Box C \Rightarrow tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C$

tr(R3)*: $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box C; tr(\Gamma) \rightarrow \Box B \Rightarrow tr(\Gamma) \rightarrow \Box C$

tr(IR5)*: $tr(\Gamma), \Box B \rightarrow \Box\neg\Box C \Rightarrow tr(\Gamma), \Box C \rightarrow \Box\neg\Box B$

in Kapitel 5 als **Gamma***-Gesetze bewiesen wurden, mit Einschränkung der Einsetzungsfälle in Beweisen auf **Gamma*D**-Satzformeln [links und rechts von „$\rightarrow$“, nicht eingeschlossen in einer Satzformel]; die genannten Formeln und Formelschemata sind – bis auf zwei weitere, noch zu nennende – die Prinzipien, die nun gleich zur Anwendung kommen. *Insgesamt* erwies sich in Kapitel 5 der Kalkül tr(**Delta**)* [also: tr(A1)* – tr(A5)*, tr(R1)* –

tr(R4)*, tr(IR5)*, tr(R6)* – tr(R7)*, mit Einschränkung der Einsetzungsfälle in Beweisen auf **Gamma*D**-Satzformeln] als Teilkalkül von **Gamma*** (weil er aus **Gamma*** deduzierbar ist). Die zwei weiteren gleich zur Anwendung kommenden Prinzipien – nämlich tr(T5)* und tr(RT7)*: $\rightarrow \Box(\Box A > \Box A)$ und tr(Γ), $\Box A \rightarrow \Box B$; tr($\Gamma$), $\Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow$ tr(Γ), $\Box A \rightarrow \Box C$ – sind in tr(**Delta**)* leicht beweisbar:

1. $\Box A \rightarrow \Box A$	tr(A1*)	1. tr(Γ), $\Box A \rightarrow \Box B$	Annahme
2. $\rightarrow \Box(\Box A > \Box A)$	tr(R4)*[158]	2. tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box C$	Annahme
		3. tr(Γ), $\Box A$, $\Box B \rightarrow \Box C$	tr(R2)*, tr(R1)* (2)
		4. tr(Γ), $\Box A$[159] $\rightarrow \Box C$	tr(R3)* (3, 1).

Unter Anwendung des Vorausgeschickten lässt sich nun demonstrieren, dass die Herleitung der Schlussformel $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ als Theorem, wenn **Gamma*** um $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$ als Axiom ergänzt wird, sogar im Teilkalkül tr(**Delta**)* von **Gamma*** durchführbar ist. Man beachte dabei, dass – den Bedingung von tr(**Delta**)* gemäß – nur das Resultat einer Einsetzungsfallbildung aus **Gamma*D**-Satzformeln bestehen muss [links und rechts von „$\rightarrow$“, nicht eingeschlossen in einer Satzformel]; dass nicht auch die bei der Einsetzungsfallbildung *eingesetzten* Satzformeln **Gamma*D**-Satzformeln sein müssen:

1. $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(A4)* [Einsetzungsfall]
2. $\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(A1)*
3. $\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(IR5)* (2) [„$\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$“ für „B“, „$(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$“ für „C“]
4. $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(RT7)* (1, 3)
5. $\Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(A4)*
6. $\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(RT7)* (5, 3)
7. $\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\neg\Box A$	tr(IR5)* (6) [„A“ für „B“, „$\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$“ für „C“]
8. $\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box A$	tr(IR5)* (4) [„$\neg\Box A$“ für „B“, „$\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$“ für „C“]
9. $\Box\neg\Box A$, $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A > \Box A)$	tr(A3)*
10. $\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$, $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box A$	tr(R2)* (8)
11. $\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$, $\Box\neg\Box A$, $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A > \Box A)$	tr(R2)*, tr(R1)* (9)
12. $\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$, $\Box\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A > \Box)$	tr(R3)* (11, 10)
13. $\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A) \rightarrow \Box\neg\Box(\Box A > \Box A)$	tr(R3)* (12, 7)
14. $\Box(\Box A > \Box A) \rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(IR5)* (13)
15. $\rightarrow \Box(\Box A > \Box A)$	tr(T5)*
16. $\rightarrow \Box\neg\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$	tr(R3)* (14, 15)

[158] tr(R4)* ist das in **Gamma*** beweisbare Regelgesetz tr(Γ), $\Box B \rightarrow \Box C \Rightarrow$ tr(Γ) $\rightarrow \Box(\Box B > \Box C)$, mit Einschränkung der Einsetzungsfälle in Beweisen auf **Gamma*D**-Satzformeln [links und rechts von „$\rightarrow$“, nicht eingeschlossen in einer Satzformel].

[159] Da tr(Γ) eine Folge von einer oder mehreren **Gamma*D**-Satzformeln (oder leer) ist, ist auch tr(Γ), $\Box A$ eine solche Folge.

17. $\Box\neg\Box\neg\Box(\Box A \vee \Box\neg A\Box) \rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ Einsetzungsfall von $\Box\neg\Box\neg\Box A \rightarrow \Box A$: **Gamma*** ergänzendes *Axiom*

18. $\rightarrow \Box(\Box A \vee \Box\neg\Box A)$ tr(R3)* (17, 16)

Es folgen einige spezifisch *prädikatenlogische* Hinweise darauf, was in **Pi-Delta** beweisbar ist und was nicht (was hingegen die *aussagenlogische* Seite von **Pi-Delta** angeht, siehe die Kapitel 4 – 6, die – vor allem – vom Kalkül **Delta** handeln, der ein Teilkalkül von **Pi-Delta** ist):

PIT7: $\exists xF(x) \rightarrow \neg\forall x\neg F(x)$ {die eine Hälfte von T39}

{Siehe den Beweis von T39, Zeile 1 bis Zeile 3. *Die* die Zeile 2 des Beweises von T39 *liefernde* Anwendung in **Pi-Alpha** von RT4 (RKP) ist eine Anwendung in **Pi-Delta** von IR5.}

Die Umkehrung von PIT7 – die andere Hälfte von T39 – ist in **Pi-Delta** *nicht* beweisbar: Wäre $\neg\forall x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$ in **Pi-Delta** beweisbar, so wäre als Einsetzungsfall davon auch $\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** beweisbar – was aber in **Pi-Delta** nicht beweisbar ist. Denn $\rightarrow \neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ ist in **Pi-Delta** beweisbar (siehe PIT6); wäre also $\neg\forall x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** beweisbar, so müsste es wegen R3 auch $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ sein. Es ist aber schon gezeigt worden, dass $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** *nicht* beweisbar ist (siehe ***ZWEITENS***).

PIT8: $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$ {die eine Hälfte von T40}

{Siehe den Beweis von T40, Zeile 4 bis Zeile 7. *Die* die Zeile 5 des Beweises von T40 *liefernde* Anwendung in **Pi-Alpha** von RT3 (AUKP) ist eine Anwendung in **Pi-Delta** von IRT2, und *die* die Zeile 7 des Beweises von T40 *liefernde* Anwendung in **Pi-Alpha** von RT4 (RKP) ist eine Anwendung in **Pi-Delta** von IR5.}

Die Umkehrung von PIT8 – die andere Hälfte von T40 – ist in **Pi-Delta** *nicht* beweisbar: Wäre $\neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \forall xF(x)$ in **Pi-Delta** beweisbar, so wäre als Einsetzungsfall davon auch $\neg\exists x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** beweisbar – was aber in **Pi-Delta** nicht beweisbar ist. Denn *zunächst* einmal ist $\rightarrow \neg\exists x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** beweisbar:

PIT9: $\rightarrow \neg\exists x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$

1. $F(a) \rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$ A4

2. $\neg(F(a) \vee \neg F(a)) \rightarrow \neg F(a)$	IRT2 (1)
3. $\neg F(a) \rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$	A4
4. $\neg(F(a) \vee \neg F(a)) \rightarrow \neg\neg Fa$	IRT2 (3)
5. $\neg F(a), \neg\neg Fa \rightarrow \neg(B \supset B)$	A3
6. $\neg(F(a) \vee \neg F(a)) \rightarrow \neg F(a) \wedge \neg\neg Fa$	RT2 (2, 4)
7. $\neg F(a) \wedge \neg\neg Fa \rightarrow \neg(B \supset B)$	R7 (5)
8. $\neg(F(a) \vee \neg F(a)) \rightarrow \neg(B \supset B)$	RT7 (6, 7)
9. $\exists x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \neg(B \supset B)$	R9 (8)
10. $\rightarrow \neg\exists x\neg(F(x) \vee \neg F(x))$	IRT1a (9)

Wäre also $\neg\exists x\neg(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** beweisbar, so müsste es wegen R3 auch $\rightarrow \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ sein, also wegen A6 [*speziell*: $\forall x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$] und R3 auch $\rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$. Aber $\rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$ – ein Einsetzungsfall von TND – ist in **Pi-Delta** nicht beweisbar [sonst wäre ja in tr(**Pi-Delta**)* auch beweisbar $\rightarrow \Box(\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a))$ – was nicht der Fall ist].

PIT10a: $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall xF(x)$

1. $\forall xF(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$	PIT8
2. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \neg\forall xF(x)$	IR5 (1)

PIT10b: $\forall x\neg F(x) \rightarrow \neg\exists xF(x)$

1. $\exists xF(x) \rightarrow \neg\forall x\neg F(x)$	PIT7
2. $\forall x\neg F(x) \rightarrow \neg\exists xF(x)$	IR5 (1)

Die Umkehrungen von PIT10a und PIT10b sind in **Pi-Delta** *nicht* beweisbar (während sie in **Pi-Alpha** beweisbar sind). Wäre nämlich $\neg\exists xF(x) \rightarrow \forall x\neg F(x)$ – die Umkehrung von PIT10b – in **Pi-Delta** beweisbar, so wäre die Schlussformel $\Box\neg\Box\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\forall x\Box\neg\Box F(x)$ in tr(**Pi-Delta**)* beweisbar. Sie ist aber nicht in tr(**Pi-Delta**)* – diesem Teilkalkül von **Pi+r-Gamma*** – beweisbar, weil sie nicht im Kalkül **Pi+r-Gamma***, *welcher nur* S4*-gemäß ist*, beweisbar ist. Im Kalkül **Pi+r-Gamma** hingegen, *der* S5*-gemäß ist*, ist sie sehr wohl beweisbar, da sie ja schon im Kalkül **Pi-Gamma** [also sozusagen „vor allen Extras“] beweisbar ist:

PGT18: $\Box\neg\Box\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\forall x\Box\neg\Box F(x)$

1. $\Box F(a) \rightarrow \exists x\Box F(x)$	A7
2. $\Box\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$	GRT4 (1)
3. $\Box F(a) \rightarrow \Box\Box F(a) \rightarrow$	GT7 {*S4-Axiom*}
4. $\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$	RT7 (3, 2)
5. $\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\neg\Box F(a)$	GT8 {*S5-Axiom*}
6. $\neg\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box F(a)$	RT5 {LKP} (5)
7. $\neg\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$	RT7 (6, 4)
8. $\exists x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$	R9 (7)
9. $\neg\Box\exists x\Box F(x) \rightarrow \neg\exists x\neg\Box\neg\Box F(x)$	RT3 {AUKP} (8)
10. $\neg\exists x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \forall x\Box\neg\Box F(x)$	T40 {2. Hälfte: „von rechts nach links“; Einsetzungsfall}
11. $\neg\Box\exists x\Box F(x) \rightarrow \forall x\Box\neg\Box F(x)$	RT7 (9, 10)
12. $\Box\neg\Box\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\forall x\Box\neg\Box F(x)$	GRT4 (11)

Und wäre $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists x\neg F(x)$ – die Umkehrung von PIT10a – in **Pi-Delta** beweisbar, so wäre die Schlussformel $\Box\neg\Box\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$ in tr(**Pi-Delta**)* beweisbar. Sie ist aber nicht in tr(**Pi-Delta**)* – diesem Teilkalkül von **Pi+r-Gamma*** – beweisbar, weil sie nicht im Kalkül **Pi+r-Gamma***, *welcher nur* S4*-gemäß ist*, beweisbar ist. Im Kalkül **Pi+r-Gamma** hingegen, *der* S5*-gemäß ist*, ist sie sehr wohl beweisbar, da sie ja schon im Kalkül **Pi-Gamma** beweisbar ist:

PGT19: $\Box\neg\Box\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$

1. $\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\neg\Box F(a)$	GT8
2. $\neg\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box F(a)$	RT5 (1)
3. $\forall x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \neg\Box\neg\Box F(a)$	A6
4. $\forall x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \Box F(a)$	RT7 (3, 2)
5. $\forall x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \forall x\Box F(x)$	R8 (4)
6. $\forall x\Box\Box F(x) \rightarrow \Box\forall x\Box F(x)$	PGT9 {die $\Box$-*Barcan-Formel*; Einsetzungsfall}
7. $\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box F(a)$	A6
8. $\Box F(a) \rightarrow \Box\Box F(a)$	GT7

9. $\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box\Box F(a)$	RT7 (7, 8)
10. $\forall x\Box F(x) \rightarrow \forall x\Box\Box F(x)$	R8 (9)
11. $\forall x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \forall x\Box\Box F(x)$	RT7 (5, 10)
12. $\forall x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \Box\forall x\Box F(x)$	RT7 (11, 6)
13. $\neg\Box\forall x\Box F(x) \rightarrow \neg\forall x\neg\Box\neg\Box F(x)$	RT3 (12)
14. $\neg\forall x\neg\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \exists x\Box\neg\Box F(x)$	T39 {2. Hälfte: „von rechts nach links“; Einsetzungsfall}
15. $\neg\Box\forall x\Box F(x) \rightarrow \exists x\Box\neg\Box F(x)$	RT7 (13, 14)
16. $\Box\neg\Box\forall x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$	GRT4 (15)

Mit der intuitionistischen Prädikatenlogik wird oft der Gedanke verbunden, sie entspreche der Forderung, dass „Existenzbeweise“ *konstruktiv* sein müssen. Wer diese Forderung erhebt, geht davon aus, dass das Folgende *richtig* ist:

Prädikatenlogisches Konstruktivismusgebot

Der [logisch-deduktive] Beweis eines Satzes, dessen logische Form durch eine Satzformel der Gestalt $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ dargestellt wird,[160] kann [vernünftigerweise] nur dadurch erfolgen, dass *zuvor* (in der Ordung der Beweise) aus denselben Prämissen ein Satz bewiesen wird, dessen logische Form durch die Satzformel $\sigma[\nu]$ dargestellt wird (wobei $\sigma[_]$ in $\exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ und $\sigma[\nu]$ dieselbe Prädikatstockformel ist: die logische Form ein und desselben Prädikatstocks repräsentierend).

Man beachte, dass das prädikatenlogische Konstruktivismusgebot ein *aussagenlogisches* Pendant hat:

Aussagenlogisches Konstruktivismusgebot

Der [logisch-deduktive] Beweis eines Satzes, dessen logische Form durch eine Satzformel der Gestalt $\sigma \vee \sigma'$ dargestellt wird, kann [vernünftigerweise] nur dadurch erfolgen, dass *zuvor* (in der Ordung der Beweise) aus denselben Prämissen ein Satz bewiesen wird, dessen logische

[160] *Die logische Form des Satzes* ist hier diejenige logische Form des Satzes, die mit den Mitteln der Formelsprache *Sigma* so genau wie damit möglich darstellbar ist.

Form durch die Satzformel σ dargestellt wird, *oder* ein Satz bewiesen wird, dessen logische Form durch die Satzformel σ' dargestellt wird (wobei durch σ bzw. σ', ob alleinstehend oder eingebunden in $\sigma \vee \sigma'$, jeweils die logische Form ein und desselben Satzes dargestellt wird).

Der Kalkül **Pi-Delta** wird offenbar dem prädikatenlogischen Konstruktivismusgebot gerecht (d. h.: er bildet es in seinen Beweismitteln formal ab), und auch dem aussagenlogischen (deshalb, weil dem aussagenlogischen Konstruktivismusgebot schon der Grundstock **Delta** von **Pi-Delta** gerecht wird). Denn es gilt offenbar:

Ist eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ in **Pi-Delta** beweisbar, dann ist *zuvor* – also: *ohne* Inanspruchnahme von $\Gamma \rightarrow \exists\upsilon\sigma[\upsilon]$ als bewiesen – in **Pi-Delta** beweisbar: $\Gamma \rightarrow \sigma[\nu]$.
Ist eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \sigma \vee \sigma'$ in **Pi-Delta** beweisbar, dann ist *zuvor* – also: *ohne* Inanspruchnahme von $\Gamma \rightarrow \sigma \vee \sigma'$ als bewiesen – in **Pi-Delta** beweisbar: $\Gamma \rightarrow \sigma$, oder aber $\Gamma \rightarrow \sigma'$.

Höheren konstruktivistischen Ansprüchen wird **Pi-Delta** (und schon **Delta**) allerdings nicht gerecht. Man könnte ja auch noch verlangen:

***Zusätzliches** aussagenlogisches Konstruktivismusgebot*
Der [logisch-deduktive] Beweis eines Satzes, dessen logische Form durch eine Satzformel der Gestalt $\neg\neg\sigma$ dargestellt wird, kann [vernünftigerweise] nur dadurch erfolgen, dass *zuvor* (in der Ordung der Beweise) aus denselben Prämissen ein Satz bewiesen wird, dessen logische Form durch die Satzformel σ dargestellt wird (wobei durch σ, ob alleinstehend oder eingebunden in $\neg\neg\sigma$, jeweils die logische Form ein und desselben Satzes dargestellt wird).

Aber es gilt nun eben *nicht*: Ist eine Schlussformel $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma$ in **Pi-Delta** beweisbar, dann ist *zuvor* – also: *ohne* Inanspruchnahme von $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma$ als bewiesen – in **Pi-Delta** beweisbar: $\Gamma \rightarrow \sigma$. Denn in **Pi-Delta** ist z. B. $\rightarrow \neg\neg(F(a) \vee \neg F(a))$ beweisbar (siehe IT2), nicht aber beweisbar (mithin auch nicht *zuvor* beweisbar) $\rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$.

Der konstruktivistische Aspekt von **Pi-Delta**, den **Pi-Delta** ja durchaus hat (*so weit* **Pi-Delta** ihn hat), ist ein bloßer Nebeneffekt dessen, worin die eigentliche Kernidee einer intuitionistischen Logik besteht: Er ist ein Nebeneffekt der *Epistemisierung* (damit *Ent-*

Ontologisierung) der Logik, die dadurch bewirkt wird, dass *Validität* in Anwendung auf Sätze – in diesem Buch formal zum Ausdruck gebracht durch den einstelligen Satzoperator „w“ (oder aus rein typographischen Gründen auch durch „**w**“) – *nicht* als ausgedrückt durch „Es ist wahr, dass“ (im klassischen Sinn) aufgefasst wird, sondern als ausgedrückt durch „Man weiß, dass“; oder auch durch „Wir wissen, dass“, wenn man mit „wir“ ein größeres Kollektiv (etwa *die Mathematiker*) im Sinn hat, und zwar so, dass „Wir wissen, dass A“ wahr sein mag, selbst wenn manche im Kollektiv nicht wissen, dass A.

Es ist aber an der Zeit, zum Ende dieses Buches zu kommen. Darum zum Abschluss ein Vergleich mehrerer in diesem Buch betrachteten Kalküle in einem einzigen Punkt: Am *Zweiten „existenziellen“ tertium non datur* (ETND2) scheiden sich die logischen Geister. Sein Beweis in **Pi-Alpha** sei hier noch einmal wiederholt:

T37b: $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	*Zweites „existenzielles“ tertium non datur* (ETND2)
1. $F(b) \rightarrow \exists xF(x)$	A7
2. $\neg F(b) \rightarrow \exists x\neg F(x)$	A7
3. $\exists xF(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	A4
4. $F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	RT7 (1, 3)
5. $\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	A4
6. $\neg F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	RT7 (2, 5)
7. $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	R5 (4, 6)

{ETND2 ermöglicht indirekte und womöglich das prädikatenlogische Konstruktivismusgebot verletzende „Existenzbeweise“, an die man selten denkt; ist doch mithilfe von ETND2 das Regelgesetz $\Gamma \rightarrow \neg\exists x\neg F(x) \Rightarrow \Gamma \rightarrow \exists xF(x)$ beweisbar:

1. $\Gamma \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$	Annahme
2. $\exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x), \neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$	T12 [Exklusionsprinzip; Einsetzungsfall]
3. $\Gamma, \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \rightarrow \neg\exists x\neg F(x)$	R2 (1)
4. $\Gamma, \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x), \neg\exists x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$	R2, R1 (2)
5. $\Gamma, \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x) \rightarrow \exists xF(x)$	R3 (4, 3)
6. $\Gamma \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$	ETND2, R2
7. $\Gamma \rightarrow \exists xF(x)$	R3 (5, 6).}

Es entbehrt nicht einer gewissen Ironie, dass $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ zwar beweisbar ist in dem Kalkül **Pi-Alpha**, wo „$\exists x$“ im Sinne von „Für mindestens ein x“ oder „Für manches x“ zu lesen ist und keine eigentlich existenzielle Bedeutung hat (sondern nur eine numerische), *nicht* aber in dem eigentlich existenziellen Kalkül **Pi*-Alpha**. In **Pi*-Alpha** ist ja „$\exists x$“ im Sinne von „Es gibt ein x“ oder „Es existiert ein x“ [oder auch: „Für manches/mindestens ein existierendes x“] zu lesen (wobei „existiert“ bzw. „es gibt“ in **Pi*-Alpha** unterschiedlich interpretiert werden können: freilogisch oder meinongianisch); sodass bezogen auf **Pi*-Alpha** $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ sehr gut „*Zweites existenzielles tertium non datur*“ heißen kann, ganz ohne Uneigentlichkeit anzeigende Anführungszeichen um das zweite Wort des kursivierten, inhaltlich beschreibenden Namens. Aber wie gesagt: Das *Zweite existenzielle tertium non datur* [also: $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ **Pi*-Alpha**-gemäß aufgefasst] ist in **Pi*-Alpha** nicht beweisbar, während in **Pi-Alpha** das *Zweite „existenzielle“ tertium non datur* [also: $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ **Pi-Alpha**-gemäß aufgefasst] beweisbar ist; in **Pi*-Alpha** ist nur beweisbar: $\exists xE(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$, wobei wiederum $\rightarrow \exists xE(x)$ in **Pi*-Alpha** *nicht* beweisbar ist.

Die Beweisbarkeit von $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ in **Pi*-Alpha** wird dadurch vereitelt, dass in **Pi*-Alpha** A7 nicht zur Verfügung steht, sondern nur A7*: $F(b), E(b) \rightarrow \exists xF(x)$. In **Pi-Delta** hingegen steht A7 zur Verfügung; die Beweisbarkeit von $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ in **Pi-Delta** wird jedoch dadurch vereitelt, dass R5 [wie auch TND, das mit R5 deduktiv äquivalent ist im Rahmen des Kalküls, der entsteht, wenn R5 aus **Pi-Alpha** weggelassen wird und sonst alles gleichbleibt] nicht zur Verfügung steht, sondern nur IR5: $\Gamma, B \rightarrow \neg C \Rightarrow \Gamma, C \rightarrow \neg B$. In **Pi-Delta** ist nur beweisbar: $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$, wobei wiederum $\rightarrow \exists x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** *nicht* beweisbar ist (wie in diesem Kapitel gezeigt wurde).

{Der Beweis von $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ in **Pi-Delta** lautet bis zur Zeile 6 gleich mit dem Beweis von T37b. Dann:

7. $F(b) \vee \neg F(b) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ R6 (4, 6)

8. $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ R9 (7).}

{*Nebenbei*: $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ ist in **Pi*-Alpha** deduktiv äquivalent mit $\exists xE(x) \rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$. Denn $\exists x(F(x) \vee \neg F(x)) \leftrightarrow \exists xE(x)$ ist in **Pi*-Alpha** beweisbar; siehe P*T5b.}

Im Kalkül **Pi+r-Gamma*** wiederum steht sowohl A7 als auch R5 zur Verfügung, und $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ ist in diesem Kalkül beweisbar (der Beweis von T37b kann in **Pi+r-Gamma*** einfach wiederholt werden). Aber das bedeutet *nicht*, dass $tr(\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x))^*$ in tr(**Pi-Delta**)* beweisbar ist (was seinerseits bedeuten würde, dass $\rightarrow \exists xF(x) \vee \exists x\neg F(x)$ in **Pi-Delta** beweisbar ist); vielmehr ist $\rightarrow \Box(\Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x))$ in tr(**Pi-Delta**)* nicht beweisbar, weil es im stärkeren, tr(**Pi-Delta**)* einbettenden Kalkül **Pi+r-Gamma*** nicht beweisbar ist. Im Kalkül **Pi+r-Gamma**, der wiederum stärker als **Pi+r-Gamma*** ist, ist es hingegen beweisbar. Worauf es für den Beweis ankommt (nämlich *S5-Axiom*, mit prädikatenlogischem Einsetzungsfall), ist allerdings schon im Kalkül **Pi-Gamma** [also „vor allen Extras“, auf die durch den Zusatz„**+r**“ zu „**Pi**“ sowie „*****“ zu „**Gamma**“ hingewiesen wird] gegeben, und der Beweis kann schon in **Pi-Gamma** geführt werden:

PGT20: $\rightarrow \Box(\Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x))$

1. $\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\neg\Box F(a)$	GT8 {*S5- Axiom*}
2. $\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$	A4
3. $\neg\Box F(a) \rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$	RT7 (1, 2)
4. $\Box F(a) \rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$	A4
5. $\rightarrow \Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a)$	R5 (4, 3)
6. $\Box F(a) \rightarrow \exists x\Box F(x)$	A7
7. $\Box\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$	GRT4 (6)
8. $\Box F(a) \rightarrow \Box\Box F(a)$	GT7 {*S4-Axiom*}
9. $\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x)$	RT7 (8, 7)
10. $\Box\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$	A4
11. $\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$	RT7 (9, 10)
12. $\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \exists x\Box\neg\Box F(x)$	A7
13. $\Box\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$	GRT4 (12)
14. $\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\Box\neg\Box F(a)$	GT7 {Einsetzungsfall}
15. $\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$	RT7 (14, 13)
16. $\Box\exists x\Box\neg\Box F(x) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$	A4
17. $\Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$	RT7 (15, 16)

18. $\Box F(a) \vee \Box\neg\Box F(a) \rightarrow \Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$ R6 (11, 17)

19. $\rightarrow \Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x)$ R3 (18, 5)

20. $\rightarrow \Box(\Box\exists x\Box F(x) \vee \Box\exists x\Box\neg\Box F(x))$ GRT3 (19)

Index der kalkülbezogen gelisteten Prinzipiennamen (gemäß ihrem ersten erklärten Auftreten)

Alpha/Pi-Alpha

A1 31
A2 31
A3 31
A4 31
A5 31
A6 168
A7 168
A8 168
A9 168
A10 168

D1 78 [169]
D2 169

R1 31
R2 31
R3 31
R3* 66
R4 31
R5 31
R6 31
R7 31
R8 168
R9 168

T1 34
T2 34
T3 34
T4 34
T5 36
T6 37
T7 38
T8 38
T9 38
T10 39
T11 39
T12 39
T13 40
T14 40
T15 40
T16 41
T17a,b 41,42
T18 42
T19 42
T20 43
T21 43
T22 45
T23 50
T24 50
T25 50
T26 126
T27 169
T28 170
T29 170
T30a 172
T30b 172
T30c 172
T30d 172
T31 173
T32a 173
T32b 173
T33 174
T34 174
T35 175
T36 175
T37a 175
T37b 175
T38 176
T39 176
T40 176
T41 177
T42 178
T43 179
T44 180
T45 180
T46 181
T47a 181
T47b 181
T48 182
T49a 182
T49b 183
T50 183
T51a 183
T51b 184
T52 184
T53 185
T54 186
T55 186
T56 187
T57 187
T58 188
T59 189
T60 189
T61 190
T62 190
T63 191
T64 192
T65 192
T66 193
T67 194
T68 194
T69 195
T70 196
T71 196
T72 197
T73 210
T74 324 [Fn]

RT1 32
RT2 33
RT3 35
RT4 35
RT5 35
RT6 35
RT7 36
RT8 43
RT9 44
RT10 44
RT11 44
RT12 46
RT13 46
RT14 46
RT15a 46
RT15b 47
RT16 50
RT17 177
RT18 177
RT19 179
RT20 180
RT21 325
RT22 327
RT23 350
RT24 351
RT25 351
RT26 355

Beta/Pi-Beta

FA1 49
FA2 49
FA3 49
FA4 198
FA5 198
FA6 198
FA7 198

FD1 49
FD2 49
FD3 199
FD4 199

FR1 49
FR2 199

FT1 51
FT2 51
FT3, FT4 52
FT5, FT6 52

FRT1 51
FRT2 52

FRT3 53
FRT4 53

Beta*/Pi-Beta*
B*A1 56
B*A2 57
B*A3 57
B*A4 57
B*A5´ 57
B*A6 200
B*A7 200
B*A8 200
B*A9 200
B*A10 200

B*D1 201
B*D2 201

B*R0 56
B*R1 56
B*R2 56
B*R3 56
B*R4 57
B*R5 57
B*R6 57
B*R7´ 57
B*R8 200
B*R9 200

B*T1 57
B*T2 59
B*T3 60
B*T4 60
B*T5 63

B*RT1 61
B*RT2 62
B*RT3 63

Alpha-Beta*-Hybrid
A5´ 68 [66]

R0 68
R7´ 68 [66]

Gamma
GA2a 75
GA2b 75
GA2c[(i),(ii)] 85
GA2c[(ii)] 88
GA2d 88

GD1 76
GD2 79
GD3 79

GR4 75

GT1 77
GT2 78
GT3 80
GT4 80
GT5 82
GT6 82
GT7 85
GT8 85
GT9 86
GT10 87
GT11 87
GT12 91
GT13 91
GT14 91
GT15 92
GT16 92
GT17 93
GT18 93
GT19 93
GT20 93
GT21 94
GT22 94
GT23 95
GT24 99
GT25 100
GT26 101
GT27a 102
GT27b 102
GT27c 102
(G*S5*)T1 84
(G*S5*)T2 84
(G*S4+B*)T1 84

GRT1 76
GRT2 77
GRT3 80
GRT4 81
GRT5 86
GRT6 90
GRT7 90
GRT8 95
GRT9 97

Gamma*
G*A2c 89 [87, 134]

Delta
IR5 104

ID1 149

IT1 108
IT2 110
IT3 112
IT4 113
IT5 113
IT6 118
IT7 119
IT8 119
IT9 120
IT10 120
IT11 121
IT12 122
IT13 122
IT14 122
IT15 123
IT16 123
IT17 123
IT18 124
IT19 124
IT20 124
IT21 125
IT22 128

IRT1a 108
IRT1b 108
IRT2 110
IRT3a 110
IRT3b 111
IRT4a 117
IRT4b 117
IRT5 121
IRT6 126

[HRG1] 127

Pi*-Alpha
A6* 208
A7* 208
A10* 208

D3* 208

R8* 208
R9* 208

P*T1 209
P*T2 209
P*T3 210
P*T4a 217
P*T4b 217
P*T5a 218
P*T5b 218
P*T6 219
P*T7 220
P*T8a 221
P*T8b 221
P*T9 221
P*T10 222
P*T11 222
P*T12 222
P*T13 223
P*T14 223
P*T15 224
P*T16 233

Pi*2-Alpha
$\rightarrow \exists y E(y)$ 211

Pi-Alpha**
A10** 229

D2** 229
D4** 229
D5** 229
D6** 240
D7** 240

P**T1 230
P**T2 230
P**T3a 231

P**T3b 231
P**T4a,b 231,232
P**T5 232
P**T6a 234
P**T6b 235
P**T6c 235
P**T6d 236
P**T7a 236
P**T7b 236
P**T7c 236
P**T8 237
P**T9 238
P**T10 238
P**T11 238
P**T12 240
P**T13 241
P**T14a 241
P**T14b 241
P**T15a 242
P**T15b 242

P**RT1 230
P**RT2 230

Pi2-Alpha**
→ ∃∀y¬E(y) 242

Pi3-Alpha**
→ ∃∀yE(y) 244

Pi-Gamma
GD4 250

PGT1 253
PGT2 253
PGT3 255
PGT4 255
PGT5 255
PGT6 256
PGT7 256
PGT8 257
PGT9 258
PGT10 259
PGT11 259
PGT12 260
PGT13a 262
PGT13b 262
PGT13c 262
PGT14 262
PGT15 262
PGT16 263
PGT17 354
PGT18 363
PGT19 363
PGT20 368

Pi*-Gamma
P*GT1a 254
P*GT1b 254
P*GT2 255
P*GT3 255
P*GT4 256
P*GT5 257
P*GT6 258
P*GT7 260
P*GT8 261
P*GT9a 262
P*GT9b,c 262
P*GT10 262
P*GT11 262
P*GT12 263

Pi+-Gamma
P+GT1 291
P+GT2 292
P+GT3 293
P+GT4 294
P+GT5 295
P+GT6a 295
P+GT6b 295
P+GT6c 296
P+GT7a 296
P+GT7b 296
P+GT8a 296
P+GT8b 297
P+GT8c 297
P+GT8d 297
P+GT9 298
P+GT10 299
P+GT11a 300
P+GT11b 301
P+GT12 302
P+GT13 302
P+GT14 303
P+GT15a 308
P+GT15b 308
P+GT15c 309
P+GT16a 310
P+GT16b 311
P+GT17 313
P+GT18 314
P+GT19a 316
[P+GT19b] 316

P+GRT1 311

Pi*+-Gamma
P*+GT1 293
P*+GT2 294
P*+GT3 295
P*+GT4 295
P*+GT5a 295
P*+GT5b 295
P*+GT5c 296
P*+GT6a 296
P*+GT6b 296
P*+GT6c 296
P*+GT7a 296
P*+GT7b 297
P*+GT7c 297
P*+GT7d 297

Pi++-Gamma
A11 305

P++GT1 305
P++GT2 305
P++GT3 314
P++GT4 315

Pi+r-Gamma*
P+rG*T1 344
P+rG*T2 345

Pi-Delta
PIT1 352
PIT2 352
PIT3 353
PIT4 353
PIT5 353
PIT6 354
PIT7 361
PIT8 361
PIT9 361
PIT10a 362
PIT10b 362

Pi-Omega
POT1 322
POT2 323
POT3 324

Index der inhaltlich beschreibenden Prinzipiennamen (gemäß ihrem ersten erklärten Auftreten)

ABKP, *Absteigende Kontraposition* 35
ABKP *als Satzregelformel* 62
ABN, *Abbau der Notwendigkeit* 80
AETND2, *Alternativ formuliertes* ETND2 176
AP, *Auswahlprinzip* 168
Assoziativgesetz [als Satzformel] *für* „und" 65
Aufsteigende Implikationskontraposition[161] 53
AUKP, *Aufsteigende Kontraposition* 35
AUKP *als Satzregelformel* 61
AUN, *Aufbau der Notwendigkeit* 80
∀∀-*Tauschung* 190

BAUM, *Bedingter Aufbau der Möglichkeit* 90
BAUN, *Bedingter Aufbau der Notwendigkeit* 81
Brouwersches Axiom 81

DEF≡ 26
DEF≠ 26
DEF↔ 26
DEF⇔ 26
DEFw 130
DG1, *1. Distributivgesetz* 45
DG2, *2. Distributivgesetz* 46
Die A2-Analogie für **Gamma** 77
Die R4-Analogie für **Gamma** 77
Die Umkehrung von GRT5 90
DNTND, *Doppeltnegiertes* TND 110
DO, *Dictum de omni* 168
DP, *Deduktionsprinzip* 31
DPSI, *Deduktionsprinzip der strikten Implikation* 97

EAP, *Existenzielles Auswahlprinzip* 208
EC, *Eliminatio conjunctionis* 38
ECQ, *Ex contradictione quodlibet* 31
EDN, *Eliminatio duplicis negationis* 34
EDN *als Satzformel* 60
EDO, *Existenzielles dictum de omni* 208
EEG, *Echte Existenzgeneralisierung* 208
EG, *„Existenzgeneralisierung"* 168
1DAO, *1. „Definition" des „Alle"-Operators* 176
1DMO, *1. „Definition des „Manches"-Operators* 176
Eliminatio duplicis negationis für **Beta** 52
Eliminatio conjunctionis als Satzformeln 57
EP, *Exklusionsprinzip* 39
Ersetzungsgesetz der Satzformeln 131 [Fn]
1. Antezedensschnittgesetz 56
Erstes „De dicto = De re"-Gesetz 194
1. Prinzip der Möglichkeitserweiterung 99
ETND1, *Erstes „existenzielles" tertium non datur* 175
ETND2, *Zweites „existenzielles" tertium non datur* 175
Ex contradictione quodlibet als Satzformel 57
Exportationsgesetz für Satzformeln 57
∃∀-*Tauschung* 191
∃∃-*Tauschung* 190

GAUN, *Generalisierter Aufbau der Notwendigkeit* 95
GDM1, *1. Gesetz von De Morgan* 39
GDM2, *2. Gesetz von De Morgan* 39
Gesetz der Antezedenserweiterung 56
Gesetz der „Drittengleichheit" 193
Gesetz der Umplatzierung im Antezedens 56
GHAG, *Gesetz der hinteren Allgeneralisierung* 168
GHEAG, *Gesetz der hinteren existenziellen Allgeneralisierung* 208
GIS1, *1. Gesetz indirekten Schließens* 43
GIS2, *2. Gesetz indirekten Schließens* 44
GIS3, *3. Gesetz indirekten Schließens* 44
GIS4, *4. Gesetz indirekten Schließens* 44
GKSG, *Generalisiertes* KSG 180

[161] Die *absteigende Implikationskontraposition*, ¬A ⊃ ¬B ⇒ B ⊃ A, ist in **Beta** sehr leicht beweisbar.

GVEEG, *Gesetz der vorderen echten Existenzgeneralisierung* 208
GVEG, *Gesetz der vorderen „Existenzgeneralisierung“* 168

Hinteres-„und“-Gesetz für Satzformeln 57
HUE, *Hintere ∧-Erweiterung* 46

IC, *Introductio conjunctionis* 31
IC-*Regelgesetz* 33
ID, *Introductio disjunctionis* 31
IDN, *Introductio duplicis negationis* 34
IDN *als Satzformel* 60
IKM1 295
*IKM1** 295
IKM2 296
*IKM2** 296
IMD1, *1. Implikationsdefinition* 38
IMD2, *2. Implikationsdefinition* 38
Implikationskontraposition linksseitig 53
Implikationskontraposition rechtsseitig 52
IMPOD, *∨-per-⊃-Definition* 40
IMPUD, *∧-per-⊃-Definition* 41
⊃,∀-Verteilungsgesetz, 1. Formulierung 183
⊃,∀-Verteilungsgesetz, 2. Formulierung 184
⊃,∃-Verteilungsgesetz 184
Introductio disjunctionis als Satzformeln 57
Introductio duplicis negationis für **Beta** 52
ISG, *Inhaltliches Schnittgesetz* 31

Kettenschlussgesetz für **Beta** 51
Klammergesetz für „∧“-Ketten im Antezedens 56
KSG, *Kettenschlussgesetz* 36

LDN, *Lex duplicis negationis* 34
LKP, *Gesetz der Linkskontraposition* 35

Meinongsches Axiom 242
MINISG, *Minimales inhaltliches Schnittgesetz* 158
Modus ponens als Satzformel 57
◊-Barcan-Formel 259
◊-per-❒-Prinzip 82
MP, *Modus ponens* 31

NIMD1, *Negation der 1. Implikationsdefinition* 37
NISG, *ISG für Negationen* 111
❒-Barcan-Formel[162] 258
❒-per-◊-Prinzip 82
❒-über-∧-Verteilungsprinzip 94[163]

OKOM, *„oder“-Kommutativität* 41
∨,∀-Verteilungsgesetz, 1. Formulierung 182
∨,∀-Verteilungsgesetz, 2. Formulierung 183
∨,∃-Verteilungsgesetz 182

PC, *Principium contradictionis* 40
PEG, *Prämissenexportationsgesetz* 46
PIG, *Prämissenimportationsgesetz* 47
PK, *Gesetz der Prämissenkontraktion* 32
PN, *Principium necessitatis* 80
PP, *Gesetz der Prämissenumplatzierung* 31
PW, *Gesetz der Prämissenerweiterung* 31
PX1, *1. Paradox* 40
PX2, *2. Paradox* 42
PX3, *3. Paradox* 42
PX4, *4. Paradox* 43
PX5, *5. Paradox* 43

QKM1 292
*QKM1** 293
QKM2 293
*QKM2** 294
QKM3 294
*QKM3** 295
QKM4 295
*QKM4** 295

RID, *Reflexivität der Identität* 168
Rigiditätstheorem von **Pi*-Gamma** 265
RIK, *Rigidität der Kennzeichnungsnamenformeln* 344
RKP, *Gesetz der Rechtskontraposition* 35
Russell-Gesetz 197

Schwaches AETND2 216

[162] Mit „die Barcan-Formel“ ist gewöhnlich die *❒-Barcan-Formel* gemeint.

[163] Das ebenfalls in **Gamma** (und **Gamma***) beweisbare, aber im Buch nicht bewiesene *◊-über-∨-Verteilungsprinzip* ist dieses: ◊(A ∨ B) ↔ ◊A ∨ ◊B.

Schwaches ETND1 216
Schwaches ETND2 216
SDO, *Schwaches dictum de omni* 308
SEDN, *Schwaches* EDN 113 [155]
SEG*, Schwache „Existenzgeneralisierung“* 308
SID, *Substituierbarkeit der Identischen (salva veritate)* 168
SISG, *Schwaches inhaltliches Schnittgesetz* 110
S5-Axiom 81
SSG, *Strukturelles Schnittgesetz* 31
SSID, *Schwache Substituierbarkeit der Identischen* 309
STND, *Schwaches tertium non datur* 115
S4-Axiom 81
SVISG 159
SYMID, *Symmetrie der Identität* 173

TND, *Tertium non datur* 34
TRAID, *Transitivität der Identität* 192
Trivialität für **Beta** 51
Trivialstes Satzformelgesetz 56
TRV1, *1. Trivialität* 31
TRV2, *2. Trivialität* 36

UDP, *Umkehrung von* DP 46
UKOM, *„und“-Kommutativität* 42
Umkehrung der ◊-Barcan-Formel 256
Umkehrung der ❒-Barcan-Formel 257
∧,∀*-Verteilungsgesetz* 183
∧,∃*-Verteilungsgesetz, 1. Formulierung* 181
∧,∃*-Verteilungsgesetz, 2. Formulierung* 181
UVUG, *Umkehrung von* VUG 46

Verallgemeinertes strukturelles Schnittgesetz 380 [Fn]
VISG, *Vornvermindertes inhaltliches Schnittgesetz* 115
VOG, *Gesetz des vorderen „oder“* 31
Vorderes-„oder“-Gesetz für Satzformeln 57
VUG, *Gesetz des vorderen „und“* 31

2DAO, *2. „Definition“ des „Alle“-Operators* 178
2DMO*, 2. „Definition“ des „Manches“-Operators* 177
Zweitdefinition der Möglichkeit 93
Zweitdefinition der Unmöglichkeit 93
2. Antezedensschnittgesetz 57
Zweites „De dicto = De re“-Gesetz 194
2. Prinzip der Möglichkeitserweiterung 100

Ein Beispiel logischer Argumentationsanalyse

Das Neocartesianische Argument in seiner (normalsprachlichen) *statischen, unausgeführten Präsentation* (d. h.: nur seine Prämissen und seine Konklusion werden angegeben) sieht so aus:

1. Es ist möglich, dass ich existiere, ohne dass etwas Physisches existiert.
2. Was physisch ist, ist notwendigerweise physisch.

Also: Ich bin nicht physisch [und damit auch: Ich bin nichts Physisches].

Die Formalisierung des Neocartesianischen Arguments in seiner statischen, unausgeführten Präsentation ist dann dies:

1. $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)))$.
2. $\forall x(F(x) > \square F(x))$.

Also: $\neg F(a)$ [und damit auch: $\neg\exists x(F(x) \wedge a = x)$].

In dieser Formalisierung des Neocartesianischen Arguments – eines alethisch-modalen prädikatenlogischen Arguments – wird das Existenzprädikat wie ein nichtlogisches, „normales“ Prädikat behandelt und dementsprechend durch die unstrukturierte und sinnunbestimmte Prädikatformel „G“ wiedergegeben; das darf sein, da betreffs der Definition der Existenz im Neocartesianischen Argument nichts angenommen wird. Zudem wird in der angegebenen Formalisierung der indexikale Name „ich“ durch eine unstrukturierte und sinnunbestimmte Namenformel wiedergegeben; auch das darf sein, denn es ist der referenziellen Semantik von „ich“ (in jedem seiner Äußerungskontexte) völlig gemäß.

Das Neocartesianische Argument ist demnach logisch valide in der Weise der zu ihm passenden, durch **Pi-Gamma** formulierten Logik [einer alethisch-modalen Prädikatenlogik mit Identität, aber ohne Kennzeichnung: siehe Kapitel 10] genau dann, wenn die Schlussformel $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)))$, $\forall x(F(x) > \square F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ [bzw. statt $\neg F(a)$: $\neg\exists x(F(x) \wedge a = x)$]

in **Pi-Gamma** beweisbar ist [siehe dazu Kapitel 0, (I) und (II)[164]]. Der Beweis von $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)))$, $\forall x(F(x) > \Box F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ in **Pi-Gamma** kann in strikter Weise erfolgen, oder aber informell: „in natürlicher Weise"; er kann zudem ausführlicher oder weniger ausführlich ausfallen (je nachdem, inwieweit man Prinzipien von **Pi-Gamma** heranzieht, die keine Grundprinzipien von **Pi-Gamma** sind, oder nun eben dies nicht tut). Hier zunächst der Beweis in *strikter* **Pi-Gamma**-Weise, aber ohne große Ausführlichkeit:

$\underline{\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x))), \forall x(F(x) > \Box F(x)) \rightarrow \neg F(a)}$ *Erstens*

1. $G(a), \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \neg F(a)$ **Pi-Gamma**-Theorem
2. $G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow \neg F(a)$ R7 (1)
3. $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x))) \rightarrow \Diamond\neg F(a)$ GRT6 {BAUM} (2)
4. $\forall x(F(x) > \Box F(x)), \Diamond\neg F(a) \rightarrow \neg F(a)$ **Pi-Gamma**-Theorem
5. $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x))), \forall x(F(x) > \Box F(x)) \rightarrow \Diamond\neg F(a)$ R2 (3)
6. $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x))), \forall x(F(x) > \Box F(x)), \Diamond\neg F(a) \rightarrow \neg F(a)$ R2, R1 (4)
7. $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x))), \forall x(F(x) > \Box F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ R3 (6, 5)

Vollständig ist dieser relativ unausführliche strikte Beweis freilich erst, wenn auch die beiden in Anspruch genommenen (intuitiv einleuchtenden) **Pi-Gamma**-Theoreme in strikter **Pi-Gamma**-Weise bewiesen sind, und zwar *vollständig*, m. a. W.: *ohne* sich dabei auf noch nicht Bewiesenes zu stützen. Der strikte vollständige Beweis von $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)))$, $\forall x(F(x) > \Box F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ bei Integration der eben angesprochenen Beweise in *Erstens* (welcher Beweis hier nicht angegeben wird) würde erheblich ausführlicher (also länger) ausfallen als *Erstens*, wenn auch bei weitem noch nicht *vollständig ausführlich* sein. Hier ein vollständiger – aber nicht vollständig ausführlicher – **Pi-Gamma**-Beweis des ersten oben in Anspruch genommenen **Pi-Gamma**-Theorems:

[164] Die einschlägigen Definitionen in Kapitel 0 lauten: *In* (I): Ein normalsprachlicher Schluss ist in der Weise der Logik X genau dann logisch valide, wenn eine Schlussformel, die eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung von ihm in *Sigma* ist, in der Weise der Logik X logisch valide ist. *In* (II): Eine Schlussformel von *Sigma* ist in der Weise der Logik X logisch valide genau dann, wenn sie in einem Kalkül der Logik X beweisbar ist. Nun ist das Neocartesianische Argument [in statisch, unausgeführter Präsentation] ein normalsprachlicher Schluss, und $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)), \forall x(F(x) > \Box F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ ist eine so genau wie mögliche formelsprachliche Entsprechung von ihm in *Sigma*. *Folglich*: Das Neocartesianische Argument ist in der Weise der durch **Pi-Gamma** formulierten Logik genau dann logisch valide, wenn $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)), \forall x(F(x) > \Box F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ in einem Kalkül der durch **Pi-Gamma** formulierten Logik beweisbar ist, m. a. W.: wenn jene Schlussformel in **Pi-Gamma** beweisbar ist.

<u>G(a), ¬∃x(F(x) ∧ G(x)) → ¬F(a)</u>	*Zweitens* {beweisbar schon in **Pi-Alpha**, ohne A10}
1. ¬∃x(F(x) ∧ G(x)) → ∀x¬(F(x) ∧ G(x))	T43 {1. Hälfte, und da von links nach rechts}
2. ∀x¬(F(x) ∧ G(x)) → ¬(F(a) ∧ G(a))	A6
3. ¬(¬F(a) ∨ ¬G(a)) → F(a) ∧ G(a)	T11 {GDM2, von rechts nach links}
4. ¬(F(a) ∧ G(a)) → ¬F(a) ∨ ¬G(a)	RT5 {LKP} (3)
5. ∀x¬(F(x) ∧ G(x)) → ¬F(a) ∨ ¬G(a)	RT7 (2, 4)
6. ¬∃x(F(x) ∧ G(x)) → ¬F(a) ∨ ¬G(a)	RT7 (1, 5)
7. ¬F(a) ∨ ¬G(a), ¬¬G(a) → ¬F(a)	T12 {EP; 2. Hälfte}
8. G(a), ¬F(a) ∨ ¬G(a) → ¬¬G(a)	T3, R2
9. G(a), ¬F(a) ∨ ¬G(a), ¬¬G(a) → ¬F(a)	R2, R1 (7)
10. G(a), ¬F(a) ∨ ¬G(a) → ¬F(a)	R3 (9, 8)
11. G(a), ¬∃x(F(x) ∧ G(x)) → ¬F(a) ∨ ¬G(a)	R2, R1 (6)
12. G(a), ¬∃x(F(x) ∧ G(x)), ¬F(a) ∨ ¬G(a) → ¬F(a)	R2, R1 (10)
13. G(a), ¬∃x(F(x) ∧ G(x)) → ¬F(a)	R3 (12, 11)

Und hier ein vollständiger – aber ebenfalls nicht vollständig ausführlicher – **Pi-Gamma**-Beweis des zweiten oben in Anspruch genommenen **Pi-Gamma**-Theorems:

<u>∀x(F(x) > ❐F(x)), ◊¬F(a) → ¬F(a)</u>	*Drittens*
1. ∀x(F(x) > ❐F(x)), F(a) → F(a) > ❐F(a)	A6, R2
2. ∀x(F(x) > ❐F(x)), F(a), F(a) > ❐F(a) → ❐F(a)	GT1, R2, R1
3. ∀x(F(x) > ❐F(x)), F(a) → ❐F(a)	R3 (2, 1)
4. ∀x(F(x) > ❐F(x)), ¬❐F(a) → ¬F(a)	RT3 {AUKP} (3)
5. ❐F(a) → ¬◊¬F(a)	GT6 {von links nach rechs}
6. ◊¬F(a) → ¬❐F(a)	RT4 {RKP} (5)
7. ∀x(F(x) > ❐F(x)), ◊¬F(a) → ¬❐F(a)	R2, R1 (6)
8. ∀x(F(x) > ❐F(x)), ◊¬F(a) → ¬F(a)	RT7 (7, 4)

So viel zum Beweis von ◊(G(a) ∧ ¬∃x(F(x) ∧ G(x))), ∀x(F(x) > ❐F(x)) → ¬F(a) in *strikter* **Pi-Gamma**-Weise. Nun aber sei auf den Beweis von ◊(G(a) ∧ ¬∃x(F(x) ∧ G(x))), ∀x(F(x) >

❒F(x)) → ¬F(a) in *informeller* **Pi-Gamma**-Weise eingegangen. In direkter formaler Abbildung des Neocartesianischen Arguments in seiner (normalsprachlichen) *dynamischen, ausgeführten Präsentation*, also von

„Daraus, dass es möglich ist, dass ich existiere, ohne dass etwas Physisches existiert, folgt, dass es möglich ist, dass ich nicht physisch bin. Daraus, dass es möglich ist, dass ich nicht physisch bin, folgt zusammen damit, dass alles Physische notwendigerweise physisch ist, dass ich [tatsächlich] nicht physisch bin. Also folgt daraus, dass es möglich ist, dass ich existiere, ohne dass etwas Physisches existiert, *und* dass alles Physische notwendigerweise physisch ist, dass ich nicht physisch bin“[165]

haben wir:

Aus ◊(G(a) ∧ ¬∃x(F(x) ∧ G(x))) folgt ◊¬F(a); aus ◊¬F(a) zusammen mit ∀x(F(x) > ❒F(x)) folgt ¬F(a). Also folgt aus ◊(G(a) ∧ ¬∃x(F(x) ∧ G(x))) zusammen mit ∀x(F(x) > ❒F(x)): ¬F(a).

Was geht in dieser sehr unausführlichen, auf die Einsichtigkeit der gemachten Schritte vertrauenden informellen Argumentation vor? Holen wir es *in strikter Weise* ein:

Es werden zwei **Pi-Gamma**-Theoreme in Anspruch genommen, nämlich *zum einen* ◊(G(a) ∧ ¬∃x(F(x) ∧ G(x))) → ◊¬F(a) [ein Beweis in *strikter* **Pi-Gamma**-Weise dieses Theorems ergibt sich aus dem Beweis für *Erstens*: siehe dessen 3. Zeile, und in Vollständigkeit und weit größerer Ausführlichkeit aus dem Beweis für *Erstens* bis zur 3. Zeile, indem in dieses Beweisstück der Beweis von *Zweitens* integriert wird: in Ersetzung der 1. Zeile des Beweisstücks]; und *zum anderen* ◊¬F(a), ∀x(F(x) ⊃ ❒F(x)) → ¬F(a) [der Beweis in *strikter* **Pi-Gamma**-Weise dieses Theorems ist der von *Drittens* mit einem zusätzlichen R1-Schritt am Schluss]. Aus den beiden **Pi-Gamma**-Theoremen wird dann mit einem **Pi-Gamma**-Regelgesetz ein drittes **Pi-Gamma**-Theorem geschlossen, welches nun nichts anderes ist als die Schlussformel, die die oben angegebene Formalisierung des Neocartesianischen Arguments ist (in seiner statischen, unausgeführten Präsentation). Wir haben also:

[165] Den die Prämissen wiederaufgreifenden zusammenfassenden Konklusionssatz bei normalsprachlichen logischen Argumentationen (wie den im Text gerade angegebenen) spart man sich in der Regel (lässt ihn implizit), weil er durch das Vorausgehende schon als selbstverständlich gilt. – Erwähnt sei, dass es natürlich auch andere dynamische, ausgeführte Präsentationen des Neocartesianischen Arguments gibt als die eben angegebene.

1. $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x))) \rightarrow \Diamond\neg F(a)$ **Pi-Gamma**-Theorem

2. $\Diamond\neg F(a)$, $\forall x(F(x) > \square F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ **Pi-Gamma**-Theorem

3. $\Diamond(G(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge G(x)))$, $\forall x(F(x) > \square F(x)) \rightarrow \neg F(a)$ **Pi-Gamma**-Regelgesetz (1, 2)

Welches **Pi-Gamma**-Regelgesetz wird hier in Anspruch genommen? Offenbar eine Spezialisierung des folgenden allgemeinen Schemas für **Pi-Gamma**-Regelgesetze: $\Gamma' \rightarrow B$; $B, \Gamma \rightarrow C \Rightarrow \Gamma', \Gamma \rightarrow C$. Dieses Schema, das auch sonst sehr nützlich ist [es ist eine offensichtliche Variante von $\Gamma, B \rightarrow C$; $\Gamma' \rightarrow B \Rightarrow \Gamma', \Gamma \rightarrow C$ – der zweiten Hälfte des in **Alpha** beweisbaren *Verallgemeinerten strukturellen Schnittgesetzes*[166]], ist noch nicht bewiesen. Hier aber ist sein **Pi-Gamma**-Beweis (der sich freilich schon in **Alpha** angeben lässt):

$\underline{\Gamma' \rightarrow B; B, \Gamma \rightarrow C \Rightarrow \Gamma', \Gamma \rightarrow C}$ *Viertens*

1. $\Gamma' \rightarrow B$ Annahme
2. $B, \Gamma \rightarrow C$ Annahme
3. $\Gamma', \Gamma \rightarrow B$ R2 (1) {einmal, mehrmals, oder auch gar nicht angewendet}
4. $\Gamma', \Gamma, B \rightarrow C$ R2, R1 (2)
5. $\Gamma', \Gamma \rightarrow C$ R3 (4, 3)

Nach diesen Analysen ist klar (man könnte sagen: überklar), dass an der Logik des Neocartesianischen Arguments nichts auszusetzen ist. Freilich könnte man an alethisch-modaler Prädikatenlogik ganz generell Anstoß nehmen, aber mit welchem Grund? **Pi-Gamma** und ihm zugehörige Normalsprachen – in einer von diesen (einem Fragment des Deutschen) ist das Neocartesianische Argument formuliert – sind ja ganz frei vom Substitutionsproblem modaler Prädikatenlogik (siehe Kapitel 10 im Hinblick auf Kapitel 11). Es bleibt nur, sich darüber zu echauffieren, dass **Pi-Gamma**-Normalsprachen (Normalsprachen, deren Logik **Pi-Gamma** formuliert) nicht frei von alethischer Modalität sind und darum den Idealitätsaspekt (4) einer *idealen Wissenschaftssprache* (einer für die Formulierung valider objektivontisch-wissenschaftlicher Theorien *idealen* Sprache) nicht erfüllen. Aber im Neocartesia-

[166] So mancher Beweis in diesem Buch dürfte sich durch Anwendung des *Verallgemeinerten strukturellen Schnittgesetzes* – also von $\Gamma, B \rightarrow C$; $\Gamma' \rightarrow B \Rightarrow \Gamma, \Gamma' \rightarrow C$ [1. Hälfte des Schnittgesetzes] bzw. $\Gamma, B \rightarrow C$; $\Gamma' \rightarrow B \Rightarrow \Gamma', \Gamma \rightarrow C$ [2. Hälfte des Schnittgesetzes] – kürzer fassen lassen.

nischen Argument geht es ja auch nicht um *ideale* Wissenschaft (der die harten Naturwissenschaften noch am nächsten kommen) – es nimmt heute niemand das Gegenteil an –, sondern um *Metaphysik*, die nun zwar keine ideale Wissenschaft ist, sehr wohl aber eine Form der Erkenntnis. Man wird schlecht auf sie verzichten können.

{Übrigens lässt sich das Neocartesianische Argument auch *mit Berücksichtigung des Existenzprädikats als definiertes logisches Prädikat* (siehe D3*) auf der Grundlage des zu **Pi-Gamma** alternativen Kalküls **Pi*-Gamma** durchführen. Allerdings muss man, wenn man die **Pi*-Gamma**-Logik verwendet, eine weitere Prämisse hinzunehmen: „Ich existiere“, formal: E(a). [An der Wahrheit dieser zusätzlichen Prämisse kann kein Zweifel bestehen, wie bekanntlich schon Descartes vor Augen geführt hat.] Die **Pi*-Gamma**-Formalisierung des Neocartesianischen Arguments (in seiner statischen, unausgeführten Präsentation) sieht dann so aus:

1. $\Diamond(E(a) \wedge \neg\exists xF(x))$ [oder auch: $\Diamond(E(a) \wedge \neg\exists x(F(x) \wedge E(x)))$].
2. $\forall x(F(x) > \Box F(x))$.
3. E(a).

Also: $\neg F(a)$ [und damit auch: $\neg\exists x(F(x) \wedge a = x)$].

Die (hier abermals angegebene) Sekundärkonklusion $\neg\exists x(F(x) \wedge a = x)$ erhält man aus der Primärkonklusion $\neg F(a)$ in der **Pi-Gamma**-Formalisierung des Neocartesianischen Arguments durch deduktive Umformungen auf der Grundlage des (aus **Pi-Alpha** übernommenen) **Pi-Gamma**-Theorems T67: $F(b) \leftrightarrow \exists x(b = x \wedge F(x))$, dem *Ersten „De dicto = De re“-Gesetz*. In der **Pi*-Gamma**-Formalisierung des Arguments hingegen erhält man die Sekundärkonklusion aus der Primärkonklusion durch deduktive Umformungen auf der Grundlage des (aus **Pi*-Alpha** übernommenen) **Pi*-Gamma**-Theorems P*T9: $\exists x(b = x \wedge F(x)) \rightarrow F(b)$. [Die Umkehrung hiervon ist *kein* **Pi*-Gamma**-Theorem, ist es doch schon *kein* **Pi*-Alpha**-Theorem.]}

Weil eine gewisse, gleich im Folgenden angesprochene *Versuchung* stets gegeben ist, sobald man mit dem Kalkül **Pi*-Gamma** arbeitet, sei zu dem fraglichen Thema, das schon in Kapitel 10 ausführlich behandelt wurde, noch das Folgende ergänzt. Die Schlussformel $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ ist in **Pi*-Gamma** ein Theorem:

1. $\rightarrow a = a$	A8
2. $\rightarrow \Box(a = a)$	GRT3 (1)
3. $E(a), \Box(a = a), \rightarrow \exists y\Box(a = y)$	A7*, R1
4. $E(a) \rightarrow \Box(a = a)$	R2 (2)
5. $E(a) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$	R3 (3, 4)
6. $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$	D3* (5).

Man kann daraus aber nicht schließen (wenn man auch, dies zu schließen, *versucht* ist), dass auch $E(a) \rightarrow \Box E(a)$ in **Pi*-Gamma** ein Theorem ist. Zwar ist $\exists y\Box(a = y) \rightarrow \Box\exists y(a = y)$ – womit man aus $\exists y(a = y) \rightarrow \exists y\Box(a = y)$ wegen RT7 $\exists y(a = y) \rightarrow \Box\exists y(a = y)$, also mit D3* $E(a) \rightarrow \Box E(a)$ erhielte – ein Einsetzungsfall von PGT12:

$\exists x\Box F(x) \rightarrow \Box\exists xF(x)$, aber diese letztere Schlussformel ist kein Theorem von **Pi*-Gamma**, sondern nur von **Pi-Gamma**.}

Niemandem ist es – da es im Neocartesianischen Argument um *Metaphysik*, damit auch um *Weltanschauung* geht – rational verwehrt, die Prämissenkonjunktion des Neocartesianischen Arguments schlicht nicht zu akzeptieren.

{Die Prämissen des Neocartesianischen Arguments kann man in dreierlei Weise ablehnen [d. h.: *nicht akzeptieren*, was *nicht* dasselbe ist wie *die Negation ihrer Konjunktion zu akzeptieren*]: (i) man lehnt die erste Prämisse ab, akzeptiert aber die zweite; (ii) man lehnt die zweite Prämisse ab, akzeptiert aber die erste; (iii) man lehnt beide Prämissen ab. Bei allen drei Ablehnungsweisen folgt [in logischer Rationalität]: (iv) man lehnt die Konjunktion der beiden Prämissen ab [d. h.: akzeptiert sie nicht]. Aus (iv) folgt, umgekehrt, weder (i), noch (ii), noch (iii). Sehr wohl folgt aber aus (iv): (i) oder (ii) oder (iii); man kann ja nicht [in logischer Rationalität] die Konjunktion der beiden Prämissen ablehnen [nicht akzeptieren], ohne mindestens eine von ihn abzulehnen [nicht zu akzeptieren]. Das lässt sich wie folgt rechtfertigen: Man akzeptiert die Konjunktion der beiden Prämissen genau dann (in logischer Rationalität), wenn man beide Prämissen akzeptiert; also: Man akzeptiert die Konjunktion der beiden Prämissen *nicht* genau dann (in logischer Rationalität), wenn man *nicht* beide Prämissen akzeptiert; also: Man lehnt die Konjunktion der beiden Prämissen ab genau dann (in logischer Rationalität), wenn man mindesten eine der beiden Prämissen ablehnt.}

Wenn man jedoch das Neocartesianische Argument *mit Gründen* kritisieren will, dann muss man (weil die Logik des Neocartesianischen Arguments nicht recht angreifbar ist) *begründet* bezweifeln, dass die Konjunktion seiner beiden Prämissen wahr ist, oder aber darlegen, dass *nicht einzusehen ist*, dass sie wahr ist, ohne *schon von vornherein* davon auszugehen, dass die Konklusion des Neocartesianischen Arguments wahr ist. Wer ohne metaphysische Voreingenommenheit (weder physikalistische noch dualistische) die Zweifelsbetrachtungen in den *Meditationes de prima philosophia* von Descartes liest, wird schnell merken, wie plausibel doch die erste Prämisse des Neocartesianischen Arguments ist. Freilich gilt das nur dann, wenn – ganz im Sinne jener Zweifelsbetrachtungen – vom (logisch) *schwächsten* Möglichkeitsbegriff ausgegangen wird [anders gesagt: vom Der-Fall-sein in wenigstens einer im weitesten Sinne möglichen Welt, gleichgültig, wie ähnlich oder unähnlich sie der wirklichen Welt sein mag]. Das bedeutet aber korrelativ, dass in der zweiten Prämisse, vom (logisch) *stärksten* Notwendigkeitsbegriff ausgegangen werden muss. Denn in **Pi-Gamma** – im Kalkül, der die Logik des Neocartesianischen Arguments birgt – ist eines der elementarsten alethisch-

modalen Gesetze ein *Theorem*: ❒A ↔ ¬◊¬A – das ❒-*per*-◊-*Prinzip*;[167] siehe GT6 [von dessen Von-links-nach-rechts-Hälfte oben im Beweis von *Drittens* auch Gebrauch gemacht wird]. Wenn „Es ist notwendig, dass σ " logisch auf „Es nicht einmal im schwächsten Sinne möglich, dass nicht-σ" hinausläuft [gemäß GT6, dem ❒-per-◊-Prinzip, und wegen des – um der Plausibilität der ersten Prämisse willen – in Anspruch genommenen schwächsten Möglichkeitsbegriffs], dann handelt es sich bei der angesprochenen Notwendigkeit offensichtlich um Notwendigkeit *im stärksten Sinne*.

In der zweiten Prämisse des Neocartesianischen Arguments von einem Notwendigkeitsbegriff auszugehen, der nicht so stark ist, wie es (gemäß dem ❒-per-◊-Prinzip) der maximalen Schwäche des in seiner ersten Prämisse verwendeten Möglichkeitsbegriffs angemessen ist, wäre ein Deduktionsfehler (nämlich ein Fehler, dessen auf die Syllogistik bezogene, sehr spezielle Form als *Quaternio terminorum* bekannt ist). Hat man nun aber – logisch korrekt – für „notwendigerweise" in der zweite Prämisse als Deutung *notwendigerweise im stärksten Sinne* in Anschlag gebracht, so mag diese essenzialistische Prämisse unplausibel erscheinen. Ist es denn wirklich so, dass alles Physische *im stärksten Sinne notwendigerweise* physisch ist [anders gesagt: physisch ist in jeder im weitesten Sinne möglichen Welt, gleichgültig, wie ähnlich oder unähnlich sie der wirklichen Welt sein mag]?

Hierzu ist zu sagen, dass „physisch" ein *ontologisch-genereller Term* ist [ein genereller Term ontologischer Natur]. Und für viele ontologisch-generelle Terme ϕ (aber nicht für alle, z. B. nicht für „wirklich [aktual]") gilt in der Tat *das maximal-essenzialistische Anwendungsschema*: Alles, was [ein, eine] ϕ ist, ist *im stärksten Sinne notwendigerweise* [ein, eine] ϕ. Z. B.: Alles, was eine Eigenschaft ist, ist im stärksten Sinne notwendigerweise eine Eigenschaft; alles, was ein Individuum ist, ist im stärksten Sinne notwendigerweise ein Individuum; alles, was abstrakt ist, ist im stärksten Sinne notwendigerweise abstrakt; alles, was eine Zahl ist, ist im stärksten Sinne notwendigerweise eine Zahl. Gehört aber auch „physisch" zu denjenigen ontologisch-generellen Termen, für die das maximal-essenzialistische Anwendungsschema gilt? Ich denke, ja. Doch angesichts der logischen Schlüssigkeit des Neocartesianischen Arguments sowie der immensen Plausibilität seiner ersten Prämisse dürfte wegen der weltanschaulichen Umstrittenheit seiner Konklusion (und *nur um mich* geht es in ihr ja nicht)

[167] Der Kalkül **Pi-Gamma*** reicht für die Logik des Neocartesianischen Arguments ebenfalls aus, und in ihm ist ❒A ↔ ¬◊¬A ebenfalls ein Theorem.

klar sein, dass die gerade gestellte Frage nicht rational allgemein verbindlich entschieden werden kann – *nicht* in diesem Leben.

Einige Aufgaben

I. Beweisen Sie in **Alpha**:

(a) $A \vee A \leftrightarrow A$ {*Idempotenz für* $\vee$}

(b) $A \wedge A \leftrightarrow A$ {*Idempotenz für* $\wedge$}

(c) $\rightarrow ((A \supset B) \supset A)) \supset A$ {*Peirce'sches Gesetz als 0-prämissige Schlussformel*}

(d) $A \vee B \leftrightarrow A \vee \neg A \wedge B$

II. Welche Schlussformeln in den **Alpha**-Prinzipien in I., (a) – (d), sind auch in **Delta** beweisbar, und welche nicht? Jede festgestellte Beweisbarkeit bzw. Nichtbeweisbarkeit ist zu begründen.

III. Beweisen Sie in **Pi-Alpha**:

(a) $\neg\exists xF(x) \rightarrow \forall x(F(x) \supset G(x))$

(b) $\forall x\forall y(R(x, y) \vee R(y, x)) \rightarrow \forall xR(x, x)$ {„Aus Konnexität einer Relation folgt ihre Reflexivität"}

(c) $\forall x\forall y(R(x, y) \supset \neg R(y, x)) \rightarrow \forall x\neg R(x, x)$ {„Aus Asymmetrie einer Relation folgt ihre Irreflexivität"}

(d) $\forall x\forall y\forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z))$, $\forall x\exists y(R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow \forall xR(x, x)$

IV. Welche Schlussformeln in den **Pi-Alpha**-Prinzipien III., (a) – (d), sind auch in **Pi**-Alpha** beweisbar, und welche nicht? Jede festgestellte Beweisbarkeit bzw. Nichtbeweisbarkeit ist zu begründen.

V. $\rightarrow \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ ist in **Pi-Alpha** wie folgt beweisbar:

1. $F(a) \rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$ A4
2. $\neg F(a) \rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$ A4
3. $\rightarrow F(a) \vee \neg F(a)$ R5 (1, 2)
4. $\rightarrow \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ R8 (3).

In Kapitel 6 wird ein Verfahren angegeben, wie man **Alpha**-Beweise für $\Gamma \rightarrow \sigma$ umwandelt in **Delta**-Beweise für $\Gamma \rightarrow \neg\neg\sigma$ [Γ mag leer sein!]. Warum erweist sich dieses Verfahren als nicht anwendbar, wenn man mit ihm obigen **Pi-Alpha**-Beweis für $\rightarrow \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ umwandeln wollte in einen **Pi-Delta**-Beweis für $\rightarrow \neg\neg\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$? Die Frage ist zu beant-

worten, ohne schon die Tatsache vorauszusetzen, dass $\rightarrow \neg\neg\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$ in **Pi-Delta** nicht beweisbar ist.

VI. Beweisen Sie in **Pi-Gamma** (das **Gamma** mitumfasst):

(a) $A \wedge \neg\Box A \rightarrow (A \wedge \neg\Box A) \wedge \neg\Box(A \wedge \neg\Box A)$ {„Kontingenz ist kontingent"}

(b) $\rightarrow \neg\Diamond(\Box A \wedge \Box\neg A)$; $\rightarrow \Box(\Diamond A \vee \Diamond\neg A)$

(c) $\neg\exists x\Diamond F(x) \rightarrow \forall x(F(x) \supset \Box F(x))$

(d) $\exists y\Box\forall x R(y, x) \rightarrow \forall x\Box\exists y R(y, x)$

VII. Welche der Schlussformeln in VI., (a) – (d), sind in **Pi-Gamma*** beweisbar bzw. nicht beweisbar, und welche in **Pi*-Gamma**? Jede festgestellte Beweisbarkeit bzw. Nichtbeweisbarkeit ist zu begründen.