

Kegel, Ellipse und Tschirnhaus-Kubik - eine Metamorphose

Matthias Brandl

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Brandl, Matthias. 2008. "Kegel, Ellipse und Tschirnhaus-Kubik - eine Metamorphose." Augsburg: Universität Augsburg.

Nutzungsbedingungen / Terms of use:

licgercopyright

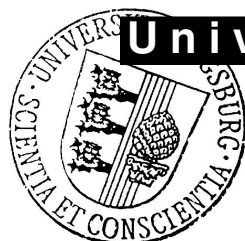
Dieses Dokument wird unter folgenden Bedingungen zur Verfügung gestellt: / This document is made available under these conditions:

Deutsches Urheberrecht

Weitere Informationen finden Sie unter: / For more information see:

<https://www.uni-augsburg.de/de/organisation/bibliothek/publizieren-zitieren-archivieren/publiz/>





Universität Augsburg

Institut für
Mathematik

Matthias Brandl

Kegel, Ellipse und Tschirnhaus-Kubik - eine Metamorphose

Preprint Nr. 28/2008 — 13. Oktober 2008

Institut für Mathematik, Universitätsstraße, D-86135 Augsburg

<http://www.math.uni-augsburg.de/>

Impressum:

Herausgeber:

Institut für Mathematik

Universität Augsburg

86135 Augsburg

<http://www.math.uni-augsburg.de/forschung/preprint/>

ViSdP:

Matthias Brandl

Institut für Mathematik

Universität Augsburg

86135 Augsburg

Preprint: Sämtliche Rechte verbleiben den Autoren © 2008

Kegel, Ellipse und Tschirnhaus-Kubik - eine Metamorphose

Matthias Brandl
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
D-86135 Augsburg
Germany
brandl@math.uni-augsburg.de

Oktober 2008

Abstract

We present an out written concept for mathematical instruction lessons concerning cones and higher algebraic curves, deepening and broadening the unit drafted in [2]. Starting with a row of real paper cones with different opening angles, the students are led to the non linear relation between the volume of the cone and its opening angle. This aspect again shows up in the algebraic deduction of the corresponding formula. By curve sketching the first interesting aspects can be seen. From reflection of the graph to the volume function at the coordinate axis a curve evolves, which leads to the Tschirnhaus-cubic further on. By the conic section the students arrives back at the starting solid – the cone.

Keywords: cone, algebraic curves, Tschirnhaus-cubic, lemniscate, ellipse, conic section

Kurzfassung

Wir stellen ein ausformuliertes Unterrichtsvorhaben zum Thema Kegel und höhere algebraische Kurven vor, das die in [2] entworfene Unterrichtseinheit vertieft und erweitert. Ausgehend von einer Reihe realer Papierkegel unterschiedlicher Öffnungswinkel werden die Schüler auf den nicht-linearen Zusammenhang zwischen dem Volumen eines Kegels und seinem Öffnungswinkel geführt. Dieser Aspekt taucht in der algebraischen Herleitung der entsprechenden Formel wieder auf. In einer Kurvendiskussion zeigen sich bereits interessante Ergebnisse. Durch Spiegelung des Graphen der Volumenfunktion an den Koordinatenachsen entsteht eine Kurve, die im Weiteren zur Tschirnhaus-Kubik führt. Über die Kegelschnitte kommt der Schüler von der Parabel zurück zu seinem Ausgangskörper – dem Kegel.

Schlagworte: Kegel, algebraische Kurven, Tschirnhaus-Kubik, Lemniskate, Ellipse, Kegelschnitt

MSC 2000: 97D80, 14H45, 00A35

In manchen Analysis-Büchern der Oberstufe findet sich mitunter ganz unscheinbar inmitten einer großen Aufgabenplantage folgende Funktion:

$$f_k(x) = k \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}, k \in \mathbb{R}$$

Bei näherer Untersuchung zeigt sich allerdings, dass diese unscheinbare Funktion eine sehr schöne Bedeutung in Bezug auf einen geometrischen Zusammenhang hat. Darüber hinaus

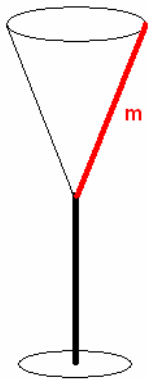
ergeben sich durch ein weiteres öffnendes Spiel mit der Aufgabe interessante und schöne vernetzende Aspekte.

Die Aufgabe:

„Gegeben sei ein Kreis (mit Radius m). Hieraus soll nun ein Kreissektor so ausgeschnitten werden, dass dieser den Mantel eines Kegels mit größtmöglichem Volumen bildet.“

Erarbeitung eines Alltagsbezugs:

Obige Aufgabe muss nicht in dem angegebenen Wortlaut gestellt werden, kann aber. Ein denkbarer Anwendungsbezug ist folgender:



„Eine Firma möchte ein Sektklas in Form eines Kelchs herstellen, das im Vergleich mit ähnlichen Gläsern das größte Fassungsvermögen hat. Die Gruppe der Konkurrenten besteht dabei aus Sektkläsern, deren Kelchlänge vom Stiel bis zum Rand jeweils identisch (gleich m) ist.“

Vorab: Raten!

Bevor man sich an konkrete Lösungsversuche der Aufgabe macht, sollte man die Schüler egal welcher Jahrgangsstufe stets einen Tipp abgeben lassen, welcher Öffnungswinkel wohl der gesuchte ist. Hierdurch lässt sich bereits sehr gut der nichtlineare Zusammenhang zwischen dem Volumen und dem Öffnungswinkel des Körpers thematisieren, ohne dass die Schüler explizit auf diesen komplizierten Aspekt hingewiesen werden. Sie stolpern gewissermaßen darüber und lernen dann anhand ihres räumlichen Vorstellungsvermögens. Folgendes Unterrichtsgespräch ist nicht weit hergeholt:

...

Schüler: „360°.“

Lehrer: „Wie kommst Du gerade auf diesen Öffnungswinkel?“

S.: „Na ganz einfach. Größte Öffnung – größtes Volumen.“

L.: „Aha. Sehr interessant. Sind alle dieser Meinung? Nein?“

S.: „360° ist schlecht. Da hat der Kegel gar kein Volumen.“

L.: „Aber hat nicht jeder Kegel ein Volumen?“

S.: „Nein, der nicht. Der ist ganz platt.“

L.: „Ein platter Kegel. Seltsam. Habe ich noch nie gehört. Aber vielleicht unter anderem Namen ...?“

S.: „Das ist ein Kreis!“

L.: „Wie meinst Du das?“

S.: „Na, der Mantel ist ein ganzer Kreis, weil man bei 360° einmal ganz herumläuft. Und deswegen kann man gar keinen Kegel bauen, weil man nämlich keine Lücke mehr hat.“

L.: „Dann ist die Lücke also wichtig.“

S.: „Ja, aber nur Lücke ist auch schlecht.“

L.: „Wie meinst Du das?“

S.: „Weil man dann ja gar nichts hat.“

L.: „Gar nichts?“

S.: „Na ja. Nur eine Linie eben.“

L.: „Die Mantellinie, richtig. Können wir diesem Gebilde – man spricht von einem entarteten Kegel – auch einen Öffnungswinkel zuweisen?“

S.: „Null Grad.“

L.: „Genau. Damit wissen wir jetzt immerhin, dass weder 0° noch 360° Sinn ergeben, weil man dann etwas erhält, das keine räumliche Ausdehnung hat. Bei 0° ist es eine Linie und bei 360° ist es ein Kreis. Beides hat kein Volumen. Schön. Aber damit haben wir noch immer keine Antwort. Hinter welchem Winkel verbirgt sich der Kegel mit dem größten Volumen?“

S.: „Wahrscheinlich in der Mitte. Bei 180° .“

L.: „Könnte sein. Glauben das alle? Aha, nicht alle. Tja, die Sache ist tatsächlich nicht so einfach. Nur so viel vorne weg: der Kegel mit einem Öffnungswinkel von 180° ist bei weitem nicht derjenige mit dem größten Volumen!“

...

Erstes Herantasten: Ein handlungsorientierter Zugang (ohne Rechnen!)

Diese erste Annäherung an die Aufgabe ist für Schüler ab der 5. Klasse geeignet, sofern sie mit dem Begriff des Kegels und seinem Netz vertraut sind.

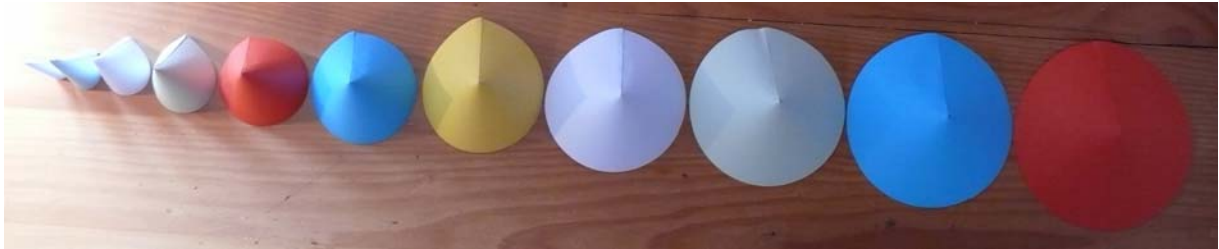
Da es sich bei der Aufgabenstellung im Grunde um ein geometrisches Problem handelt, bietet sich zunächst ein rein „plastischer“ Zugang an, der nichts weiter anstrebt als eine Näherungslösung oder eine erste Orientierung. Konkret sollen die Schüler reale Verwandte des gesuchten Kegels mit Schere, Papier und Klebstoff selbst herstellen. Für sauberes Arbeiten werden außerdem ein Zirkel und ein Geodreieck zur Winkelmessung benötigt. Je nach Größe der Klasse bietet es sich an, die Öffnungswinkel von 0 bis 360° in äquidistanten Schritten auf die einzelnen Schüler zu verteilen. Je nach Zeitplanung und Jahrgangsstufe kann dies im Unterricht oder als vorbereitende Hausaufgabe geschehen. Dabei muss nun natürlich auch eine konkrete Länge der Mantellinie gewählt werden. Als vorteilhaft hat sich $m=10$ cm herausgestellt, doch das ist kein Diktum und kann variabel gehandhabt werden. Allerdings müssen sich alle Schüler konsequent an denselben Radius halten.

Als sehr förderlich für den Vergleich bietet sich nun das Aufreihen der einzelnen Körper nach aufsteigendem Öffnungswinkel an. Die Lehrkraft wird sich wundern, welchen „Grad an Individualisierung“ die einzelnen Exemplare aufweisen können...



Beim Blick auf die Reihe wird Schülern schnell klar, dass die Wahl von 180° wahrscheinlich nicht die optimale Lösung ist. Etwas größere Öffnungswinkel bieten sich schon eher an. Aber dann wird es sehr schwer zu entscheiden. So leicht wie gedacht gibt sich der gesuchte Körper nun wohl doch nicht zu erkennen!

Aber etwas anderes lernen die Schüler sehr schnell: die kleinen Öffnungswinkel führen auch nur zu kleinen Volumina; nur langsam öffnen sich die anfänglichen Spitzen weiter. Doch am Ende geht es rasant auf den platten Kreis zu! Wo vorher noch einiges an Volumen vorhanden war, ist es im Schritt darauf schon fast verschwunden. Hier lässt sich mit den Schülern bereits ein „heuristischer Graph“ für den funktionellen Zusammenhang zwischen Öffnungswinkel und Volumen des Kegels versuchen: Langsam ansteigend von der 0 weg und rapide fallend auf die 360 zu. Irgendwo dazwischen muss sich ein Maximum befinden.



Aber könnte es nicht auch zwei volumengrößte Kegel geben? Es ist kaum anzunehmen, dass hier ein Schüler Partei ergreift, denn die Intuition für die Eindeutigkeit der Lösung liegt beim Anblick der Kegel sozusagen greifbar in der Luft. Aber bewiesen ist dies noch lange nicht ...

Näherungslösung (ohne Ableitungsbegriff)

Ab der 10. Klasse (im G9) sind die Schüler mit den einschlägigen Gleichungen zur Beschreibung eines Kegels vertraut. Hier kann also dem ersten „haptischen“ Lösungsversuch der algebraische folgen.

Von nun an bezeichne φ den Innenwinkel des Kreissektors bzw. Mantels, r den Radius der Grundfläche und h die Höhe des Kegels. Dann gilt:

$$\text{I)} \quad V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

$$\text{II)} \quad 2\pi r = \frac{\varphi}{360^\circ} 2\pi m$$

$$\text{III)} \quad h^2 = m^2 - r^2$$

Aus II) ergibt sich mit der Abkürzung $x := \varphi/360^\circ$ für den Bruchteil eines Kreises, dass

$$\text{II')} \quad r = x \cdot m$$

und aus Gleichung III) erhalten wir

$$\text{III')} \quad h = m \sqrt{1 - x^2}.$$

Eingesetzt in Gleichung I) erhalten wir so also

$$V = \frac{\pi}{3} m^3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

Zwecks besserer Übersichtlichkeit beim Analysieren der Funktion bietet es sich an, die Konstanten mitsamt der dritten Potenz der Mantellinienlänge als $k := \frac{\pi}{3} m^3$ abzukürzen. Die Mantellinie sollte ja laut Aufgabe ohnehin als konstant angesehen werden. Damit ergibt sich schlussendlich die Funktion

$$V_k(x) = kx^2 \sqrt{1-x^2},$$

deren Term identisch mit dem der Funktion f_k aus unserer Einleitung ist.

Nun gilt es, das Maximum dieser Funktion zu bestimmen. In einer 10. Klasse ist der Begriff der Ableitung noch nicht vorhanden, aber dennoch können zumindest grundlegende Eigenschaften der Funktion untersucht werden.

Die Funktion V_k unterscheidet sich dabei von f_k lediglich in der Definitions-, nicht aber in der Wertemenge. Wegen der Wurzel gilt:

$$D_{f_k} = [-1;1] \quad \text{und} \quad D_{V_k} = [0;1]$$

Somit ziehen wir uns auf die allgemeinere Funktion f_k zurück und behalten im Hinterkopf, dass der reale geometrische Hintergrund lediglich nicht-negative Argumente erlaubt. Da f_k nur gerade Potenzen enthält, gilt auf jeden Fall:

$$W_{f_k} = W_{V_k} \subseteq \mathbb{R}_0^+$$

Den Schülern erscheint es plausibel, dass die Wertemenge die Form

$$W_{f_k} = W_{V_k} = [0; \text{Maximum}]$$

hat. Somit verläuft der Graph also oberhalb der x-Achse.

Sobald die Schüler mit Symmetrieargumenten vertraut sind (erstes Halbjahr 11. Klasse (im G9)), können sie hier sofort sehen, dass G_{f_k} , der Graph von f_k , durch Spiegelung von G_{V_k} an der y- bzw. V-Achse hervorgeht, denn

$$f_k(-x) = f_k(x) = V_k(x).$$

Auch die Nullstellen lassen sich noch leicht ablesen:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow kx^2 \sqrt{1-x^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & x^2 = 0 & \vee \quad \sqrt{1-x^2} = 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 = 0 & \vee \quad 1-x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 = 0 & \vee \quad x^2 = 1
\end{array}$$

Damit besitzt die Funktion f_k eine doppelte Nullstelle $x_{1,2}$ in 0 und jeweils eine einfache $x_{3,4}$ in ± 1 . Der Graph von V_k ist dabei wieder auf die positive x-Achse beschränkt.

Zur näherungsweisen Bestimmung des Maximums kann man ohne Ableitungsbegriff dennoch sehr weit kommen. Bevor man sogleich an die numerische Herangehensweise mittels Wertetabelle denkt, hilft dabei eine „weichere“, weniger exakte aber nicht falsche Art, mit mathematischen Objekten umzugehen. Die Schüler lernen hierbei, mit den zunächst rein formalen Teilen eines Funktionsterms eine geometrische Bedeutung zu assoziieren, die ihnen hilft, den Einfluss der verschiedenen Teile auf das Ganze besser zu verstehen. Funktionsterme werden somit greifbarer und leichter zugänglich gemacht. Wertetabellen liefern wenig Verständnishilfen für das Wesen von Funktionen.

Man zerlege dazu $f_k(x)$ in ein Produkt zweier Funktionen. Der Einfachheit halber setzen wir hierzu im folgenden $k=1$. Im Rahmen unserer Suche nach dem Maximum ist dies vernachlässigbar, denn der „Ort“ (bzw. der x-Wert) ist nicht von k abhängig. Schülern wird dies nicht sofort einsichtig sein, doch es lohnt sich im Sinne einer besseren „Lesefertigkeit“ (literacy) von Funktionstermen dies zu thematisieren:

Wie hängt der Graph von f_1 mit der Graphenschar von f_k zusammen? Den Schülern solle anhand von

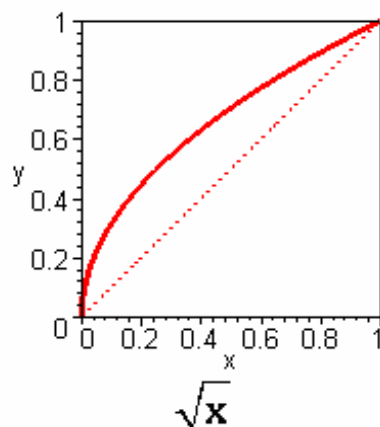
$$f_k(x) = k \cdot f_1(x)$$

auffallen, dass k nichts anderes als ein vertikaler Streckungsfaktor für den Graphen ist. Im Alltag ausgedeutet verschlüsselt diese Erkenntnis den zunächst noch trivialen Zusammenhang, dass ein längerer Kelch ein höheres Volumen aufnehmen kann. Dass ein Kelch mit doppelt so langer Mantellinie aber das Achtfache an Volumen bedeutet, sollte ebenso ins Bewusstsein der Schüler rücken.

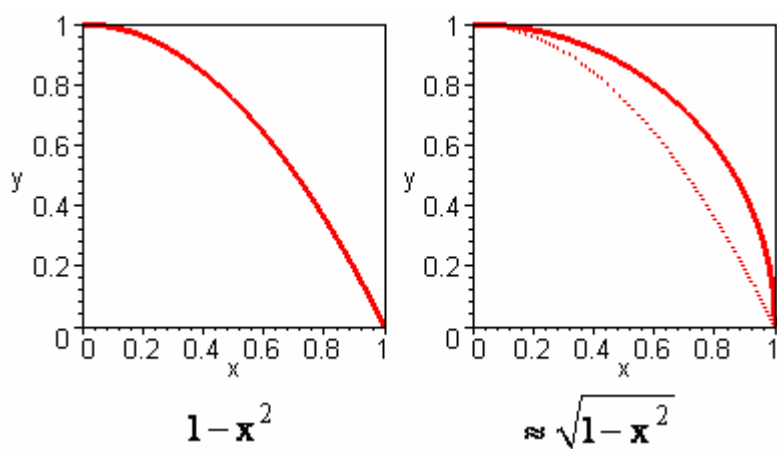
Wählen wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k=1$. Damit zerfällt der Term in ein Produkt zweier Funktionen:

$$f_1(x) = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} = g(x) \cdot h(x)$$

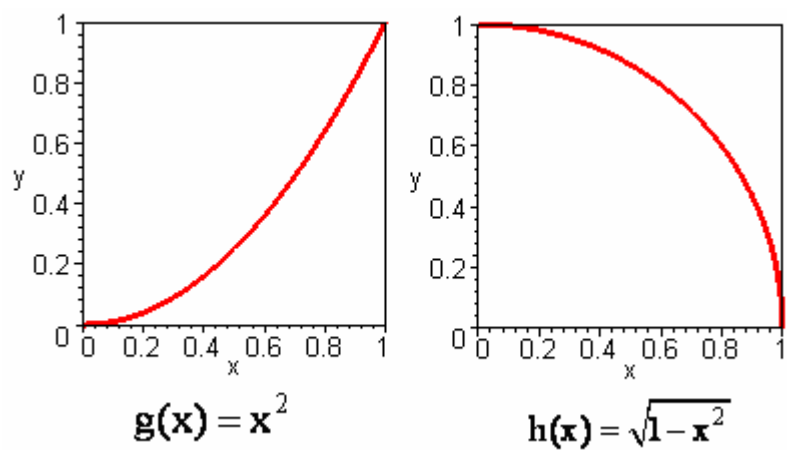
Nun betrachtet man die Graphen der beiden Funktionen g und h im Intervall $[0;1]$. Wegen der festgestellten Achsensymmetrie des Graphen genügt dies und erleichtert die Sache noch dazu. Der Graph von h ergibt sich dabei zunächst nicht aus einer exakten Tabelle, sondern aus der Argumentation, was die Wurzelfunktion mit Werten zwischen 0 und 1 macht. Dort gilt der Slogan: „Die Wurzel zieht die x-Werte nach oben.“



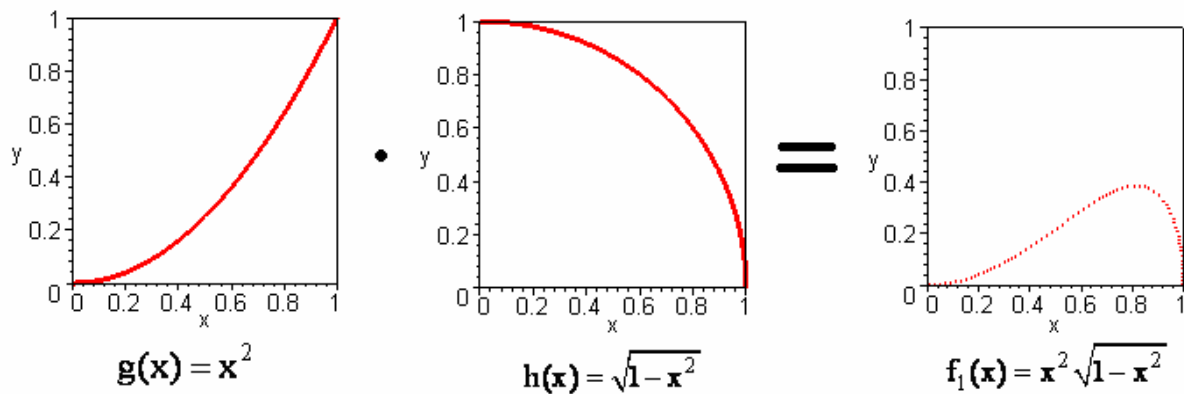
Mittels dieser Überlegung kann man einen genäherten Graphen von h aus dem Wissen um den Graphen von $1-x^2$ gewinnen:



Somit erhalten wir als genäherte Graphen für g und h :



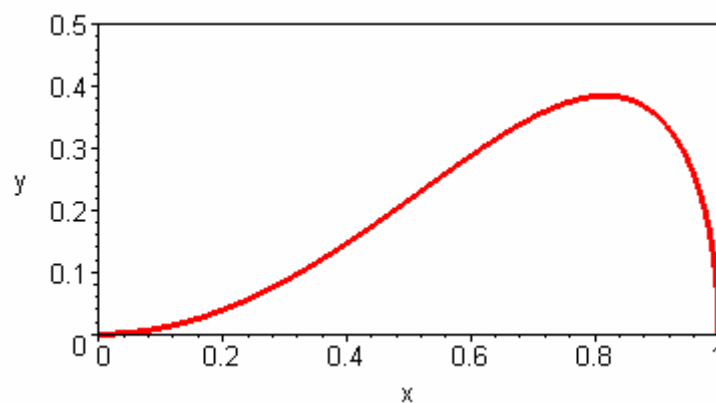
Als nächstes kann man „Graphen multiplizieren“:



Der Gedankengang hierbei ist folgender: nahe der Null zieht die Funktion g alles nach unten. Sie ist dort sehr „mächtig“ und dominiert. Ganz anders sieht es nahe der Eins aus: $g(1)=1$, d.h. dass dort alles, was an g heranmultipliziert wird, unverändert bleibt. Nahe der Eins ist g also sehr „schwach“. Analog argumentiert man beim Graphen von h und kommt somit zur endgültigen Gestalt von G_{f_1} . Die Zeichenanweisung für die Skizze lautet: Halte Dich von Null bis etwa zwei Drittel der Strecke zur Eins an den Graph von g und in der Nähe der Eins dann stark an den Graph von h . Da beide Graphen glatt sind, muss es das Resultat auch sein. Durch diese Art der Argumentation bekommen die Schüler ein echtes Gefühl für das Gewicht einzelner Terme innerhalb einer Funktion.

Aufgrund des so heuristisch erhaltenen Graphen von f_k können die Schüler den volumengrößten Kegel bereits besser einschränken: er besitzt eine eher größere Grundfläche und ist im letzten Drittel der aufgereihten Papierkörper zu finden.

Natürlich kann und sollte nun im Sinne einer höheren Exaktheit, mithilfe einer Wertetabelle oder eines Computeralgebrasystems das Ergebnis überprüft, d.h. genauer gezeichnet werden.



In der Regel sind die Schüler erstaunt (und erfreut), wie gut sie den berechneten Graph „ohne zu rechnen“ angenähert haben.

Das Maximum lässt sich nun durch Ablesen am Graphen ziemlich genau bestimmen:

$$x_{\max} \approx 0,8, \text{ das entspricht } \varphi \approx 290^\circ \text{ und } V_{\max} \approx 0,4 \cdot \text{m}^3$$

Der volumengrößte Kegel kann zumindest aus der Reihe der Papierkörper eindeutig ausgewählt werden.

Zum Abschluss kann mit den Schülern noch einmal diskutiert werden, was einen volumenmaximalen Kegel bei fester Mantellinie ausmacht. Dabei hilft die Volumenformel:

$$V = \frac{1}{3}Gh$$

Von der abkürzenden Formelsprache zurück übersetzt in Alltagssprache bedeutet dies: das Volumen wird maximal, wenn einerseits die Grundfläche und andererseits gleichzeitig die Höhe so groß wie möglich werden. Beim Vergleich mit $V_k(x)$ wird klar, dass die Grundfläche im Wesentlichen den Term $g(x) = x^2$ und die Höhe den Term $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ liefern. Unser Maximum des Produkts von g und h liefert uns einen bezüglich maximaler Grundfläche und Höhe optimierten Kegel.

Exakte algebraische Lösung (mit Ableitungsbegriff)

Besitzt man z.B. in der 11. Klasse am G9 den Ableitungsbegriff, so lässt sich mittels Produkt- und Kettenregel algebraisch exakter arbeiten:

Es ist $f_k(x) = kx^2\sqrt{1-x^2}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= 2xk\sqrt{1-x^2} + kx^2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) \\ &= 2xk\sqrt{1-x^2} - \frac{kx^3}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Das Maximum des Graphen ergibt sich wie gewohnt aus dem Nullsetzen der ersten Ableitung, $f'(x) = 0$. Hiermit erhält man:

$$\begin{aligned} 2xk(1-x^2) - kx^3 &= 0 \\ 2xk - 2x^3k - kx^3 &= 0 \\ 2xk - 3kx^3 &= 0 \\ kx(2-3x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Für den nicht trivialen Fall $k \neq 0$ erhält man somit die doppelte Nullstelle $x_{1,2}$ für das Minimum in $f(0) = 0$ und $x_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ für das bereits näherungsweise lokalisierte Maximum.

Für unseren Kegel interessiert hierbei lediglich das positive Ergebnis $x_5 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816...$. Damit ergibt sich für den Öffnungswinkel und das Volumen:

$$\begin{aligned}\varphi_{\max} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 360^\circ \approx 294^\circ \\ V_{\max} &= \frac{\pi}{3} m^3 \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{27} \sqrt{3} \pi m^3\end{aligned}$$

Eine kleine algebraische Spielerei mit geometrischer Nebenwirkung

Nun kann man den finalen Ausdruck für das Volumen aber geschickt umformen und erhält so ganz nebenbei Einblick in einen sowohl algebraisch als auch geometrisch interessanten Zusammenhang:

$$\begin{aligned}V_{\max} &= \frac{2}{27} \sqrt{3} \pi m^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \pi m^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2^2}{3^3}} \pi m^3 = \frac{1}{3} r^2 \pi h\end{aligned}$$

Man identifiziert also:

$$r^2 \pi h = \sqrt{\frac{2^2}{3^3}} \pi m^3$$

Das formelkundige Auge erfasst sofort den geometrischen Zusammenhang: dies ist das Volumen des dem maximalen geraden Kegel umschriebenen Zylinders, welches abermals durch eine erstaunlich schöne und schlichte Formel aus der Mantellinie berechnet werden kann:

$$V_{\text{umschriebener Zylinder}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^3}} \pi m^3$$

Man kann aber auch weiterspielen und sehen, dass gilt:

$$\begin{aligned}V_{\max} &= \frac{2}{27} \sqrt{3} \pi m^3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \frac{4}{3} \pi m^3 \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^2 \cdot 3^3}} \cdot V_{\text{Kugel, Radius=m}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} \cdot V_{\text{Halbkugel, Radius=m}}\end{aligned}$$

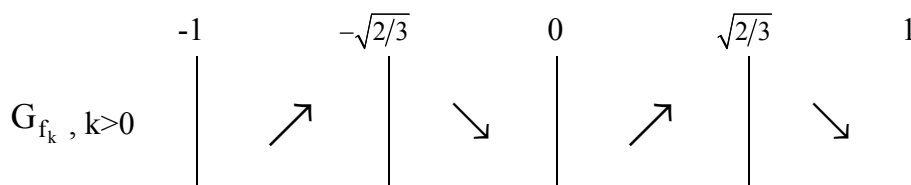
Die Form dieses Zusammenhangs erstaunt abermals mit ihrer algebraischen Eleganz.

Kurvendiskussion: bemerkenswerte Resultate

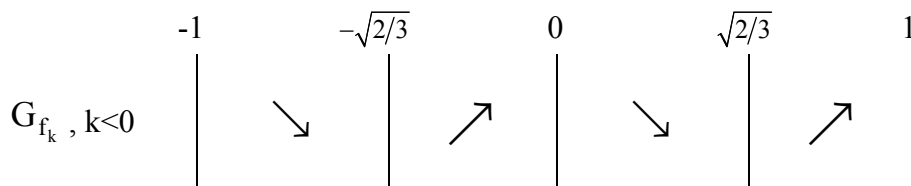
Wir beschränken uns zunächst auf den Fall $k > 0$ und stellen die bisherigen Erkenntnisse kurz zusammen:

- $D_{f_k} = [-1; 1]$
- Nullstellen: $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm 1$
- f_k ist achsensymmetrisch zur y-Achse
- Da f_k nur gerade Potenzen enthält, gilt $W_{f_k} \subseteq \mathbb{R}_0^+$ und genauer $W_{f_k} = [0; 2/3 \cdot \sqrt{3}\pi m^3]$, da $f_k(x_{3,4})$ dann Hochpunkte sind; $f_k(0)$ ist ein Tiefpunkt, ebenso $f(\pm 1)$.

Mit diesem Wissen lässt sich das Monotonieverhalten von f_k nun am besten in Form einer Tabelle darstellen:



Wie sich leicht überprüfen lässt, gilt für den Fall $k < 0$ genau die gespiegelte Situation:



Betrachten wir nun die Steigungen des Graphen an den Nullstellen genauer. Es stellt sich die Frage, wie glatt G_{f_k} an $x_{1,2} = 0$ ist bzw. unter welchem Winkel G_{f_k} in $x_{3,4} = \pm 1$ einmündet. Der bisherige heuristische Versuch, den Graph zu zeichnen, und insbesondere die numerisch berechnete Version von G_{f_k} deutet bereits darauf hin, dass der Graph sehr steil, wenn nicht sogar senkrecht auf die x-Achse trifft.

An diesem Punkt bietet es sich an, den Bedeutungstransfer einer sehr steilen bzw. sogar senkrechten Tangente an den Graphen auf den Wert der Ableitung mit den Schülern zu wiederholen und bereits bekannte Klassen von Funktionen auf diese Eigenart hin zu untersuchen. Insbesondere senkrechte Asymptoten sind den Schülern explizit vor allem von Hyperbeln bzw. gebrochen-rationalen Funktionen her vertraut. Doch es gibt zu diesem Fall hier einen feinen Unterschied, der den Schülern bewusst sein sollte. Bei Hyperbeln bzw. den Graphen gebrochen-rationaler Funktionen mit Polstellen gestaltet sich deren Funktionsterm immer dergestalt, dass Zählergrad < Nennergrad gilt. Die Folge ist ein rasches Ansteigen bzw. Abklingen des Funktionswertes ins positiv bzw. negativ Unendliche. Bei unserer Funktion hier kann dies aber nicht sein, denn es gilt $f_k(\pm 1) = 0$.

Ein Blick auf den Funktionsterm von f_k sollte die Schüler an das Monotonieverhalten der Wurzelfunktion erinnern. Wie bei der heuristischen Herleitung des Graphen bereits gezeigt, ist sie es, die am Rande des Definitionsbereichs für das extreme Verhalten sorgt; und $\sqrt{x}$ ist es auch zueigen, dass die Steigung der Halbtangente in Null gleich Unendlich ist. Demnach

sollte die Vermutung lauten, dass G_{f_k} tatsächlich senkrecht auf die x-Achse trifft. Wie lässt sich das zeigen?

Zunächst lässt sich f_k' wegen der Nullstelle im Nenner nicht direkt auswerten. Deswegen muss der Grenzwert der Ableitung an dieser Stelle untersucht werden. Für den Fall $k > 0$ erhält man für die Annäherung an +1 von links:

$$\begin{aligned}\lim_{x \nearrow +1, k > 0} f_k'(x) &= 0 - \lim_{x \nearrow +1, k > 0} \frac{kx^3}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -k \lim_{x \nearrow +1, k > 0} x^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} = -\infty\end{aligned}$$

Analog für die Annäherung an -1 von rechts:

$$\lim_{x \searrow -1, k > 0} f_k'(x) = -\infty$$

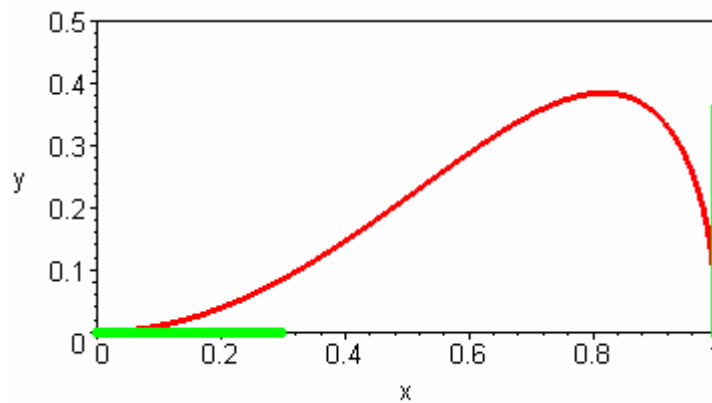
Für $k < 0$ dreht sich das Vorzeichen um und es gilt:

$$\lim_{x \nearrow +1, k < 0} f_k'(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow -1, k < 0} f_k'(x) = +\infty$$

Demnach besitzt G_{f_k} in $x_{3,4} = \pm 1$ tatsächlich eine senkrechte Asymptote bzw. Tangente an den Graphen. Das Charakteristikum der Wurzelfunktion wurde wie vermutet an f_k weitervererbt.

Wenden wir uns nun dem Verhalten des Graphen im Ursprung zu. Unsere bisherige Betrachtung legt die Vermutung nahe, dass der Graph dort ziemlich flach verlaufen muss, denn hier dominiert die Parabel mit Funktionsterm $g(x) = x^2$. Als Umkehrfunktion der Wurzelfunktion besitzt der Graph von g nun keine senkrechte, sondern eine waagrechte (Halb-)Tangente im Ursprung. Dies sollte von den Schülern wieder im Vorfeld als begründete Vermutung vorgebracht werden. Da $f_k'(0) = 0$ gilt, ist der Graph von f_k im Ursprung tatsächlich sehr flach und mündet waagrecht in die Null ein. Bereits die algebraische Tatsache, dass $x=0$ doppelte Nullstelle von f_k ist, hat auf diesen Tatbestand hingewiesen.

Somit findet man an diesem Graphen das Gegensatzpaar „unendlich steil“ und „unendlich flach“ simultan vor. Zwar liefern auch Hyperbeln diesen Umstand, doch lassen sich dort keine (Halb)Tangenten in bestimmten Punkten an den Graphen denken oder de facto für das Schülerauge einzeichnen:



Der Vollständigkeit halber und im Sinne einer noch besseren Beschreibung des Graphen berechnen wir noch die Stellen der aus Monotoniegründen zwangsweise existierenden Wendepunkte.

$$f_k''(x) = 2k \left(\sqrt{1-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \right) - k \left(\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot 3x^2 - x^3 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x)}{1-x^2} \right)$$

$$= k \left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^4}{(1-x^2)^{3/2}} \right)$$

Das Nullsetzen der (bisher noch sehr kompliziert aussehenden) zweiten Ableitung ergibt unabhängig von k:

$$2(1-x^2) - 4x^2 - \frac{x^4}{(1-x^2)} = 0$$

$$2(1-x^2)^2 - 4x^2(1-x^2) - x^4 = 0$$

$$2(1-2x^2+x^4) - 4x^2 + 4x^4 - x^4 = 0$$

$$2 - 4x^2 + 2x^4 - 4x^2 + 4x^4 - x^4 = 0$$

$$5x^4 - 8x^2 + 2 = 0$$

Wir substituieren $u = x^2$:

$$5u^2 - 8u + 2 = 0$$

Also erhalten wir:

$$u_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-40}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$$

Resubstitution ergibt dann:

$$x_{5,6,7,8} = \pm \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}}$$

Davon entfallen die Lösungen mit positiver $\sqrt{6}$, da sie außerhalb des zulässigen Definitionsbereichs liegen. Nun kann man die beiden verbleibenden x-Werte der Wendepunkte schön schreiben als

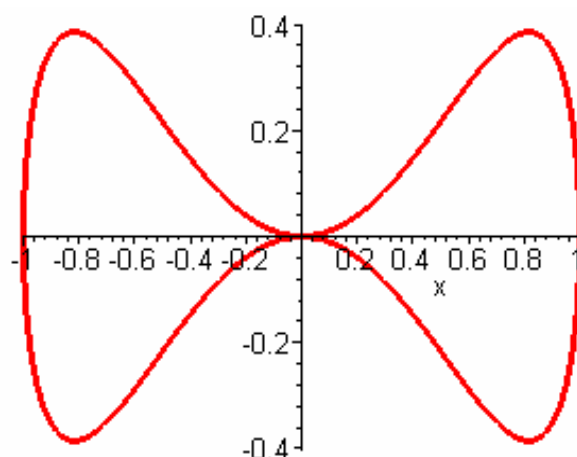
$$x_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{4 - \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3}}{5}}.$$

Die Wendepunkte in den einzelnen Quadranten liegen demnach leicht jenseits der Mitte und sein x-Wert lässt sich (wie auch schon die Abszisse der Hochpunkte) mittels aufeinander folgender natürlicher Zahlen und Wurzelzeichen schreiben.

Hiermit erschöpft sich der kanonische Inhalt der Schulmathematik wie er im Lehrplan und in den Lehrbüchern dargeboten wird. Doch durch einen kleinen Kniff, der zwar über das Übliche hinausführt, erhält der Schüler Einblick in weitere interessante und schöne Zusammenhänge, die man der spröden Anfangsgleichung und auch der lapidaren Frage nach dem volumengrößten Kegel gar nicht zugetraut hätte.

Vom Graphen zur Kurve

Spiegelt man den Graphen von f_k an der x-Achse, so erhält man aufgrund seiner bisher diagnostizierten Eigenschaften eine überall glatte, zum Ursprung punktsymmetrische Kurve $\Gamma_{f_k}^*$:



In expliziter Form liest sich die beschreibende Gleichung zu dieser Kurve wie

$$f_k^*(x) = \pm k \cdot x^2 \sqrt{1 - x^2},$$

und in impliziter Form

$$y^2 = k^2 x^4 (1 - x^2),$$

was ein gar nicht so komplizierter Term ist, der durch die Ersetzung $f_k^*(x) = y$ und anschließendes Quadrieren gewonnen wird; eine Technik, die jedem Mittelstufenschüler geläufig ist.

Einschub: Kurvendiskussion anhand einer impliziten Gleichung

Dieser Paragraph geht eindeutig über den Inhalt jeglichen Lehrplans hinaus. Doch immer wieder gibt es neugierige oder besonders begabte Schüler, denen ein besonderer Einblick in alternative Betrachtungsweisen der Mathematik gegeben werden kann.

Hier soll dies eine andere Art der Kurvendiskussion sein, nämlich diejenige, die eigentlich auf Kurven, also zweidimensionale Funktionen passt. Das Vorgehen kann schnell z.B. in [3], S.231f nachgelesen werden. Bisher hatten wir die Kurve eigentlich separat in der oberen und unteren reellen Halbebene betrachtet, mitunter auch deswegen, um unsere kanonischen Techniken der Funktionsbetrachtung anwenden zu können. Die Kurvendiskussion anhand einer impliziten Gleichung $F(x, y) = 0$ braucht derartige Umwege nicht zu gehen.

Zwar bringt dieser Abschnitt keine neuen Erkenntnisse über unsere Kurve, aber er zeigt dem Schüler auf, dass eine Kurve nicht unbedingt durch eine Funktion mit eindeutiger Wertzuweisung beschrieben sein muss, um ihn mit mathematischen Mittel zu untersuchen. Zwingend ist dieser Zugang allerdings nicht, denn wir sind auch bisher sehr weit gekommen.

Wir schreiben unsere bislang explizite Gleichung $y^2 = k^2 x^4 (1 - x^2)$ um:

$$F(x, y) := k^2 x^4 (1 - x^2) - y^2 = 0$$

Nun lässt sich das Änderungsverhalten der Kurve natürlich auch in zwei Richtungen untersuchen. Die dazu angewandte Technik ist die partielle oder Richtungs-Ableitung:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = 4k^2 x^3 - 6k^2 x^5 \\ &= 2k^2 x^3 (2 - 3x^2) \\ F_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = -2y \end{aligned}$$

Das Auffinden von interessanten Punkten der Kurve führt wie beim ein-dimensionalen Vorgehen über das Nullsetzen der Ableitungen:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2k^2 x^3 (2 - 3x^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 2 - 3x^2 &= 0, k \neq 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x &= \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, k \neq 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
F_y(x, y) &= 0 \\
\Leftrightarrow -2y &= 0 \\
\Leftrightarrow y &= 0
\end{aligned}$$

Nun ist zu prüfen, welche der soeben bestimmten extremalen Punkte der impliziten Funktionsgleichung $F(x, y) = 0$ genügen und somit zulässig sind. Einsetzen und Nachrechnen ergibt:

$$F(\pm\sqrt{2/3}, 0) \neq 0 \quad \text{und} \quad F(0, 0) = 0$$

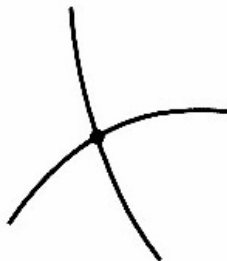
Demnach gibt es nur in $(0, 0)$ eine zulässige interessante Stelle. Über die Art des Punktes geben nun die zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle $(0, 0)$ zusammen mit der Funktionaldeterminante Auskunft. Es gilt:

$$\begin{aligned}
F_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y) = 12k^2 x^2 - 30k^2 x^4 \\
F_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F_y(x, y) = 0 \\
F_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y) = 0 \\
F_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y) = -2
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
F_{xx}(0, 0) &= 0, \\
F_{xy}(0, 0) &= 0, \\
F_{yx}(0, 0) &= 0, \\
F_{yy}(0, 0) &= -2 \neq 0.
\end{aligned}$$

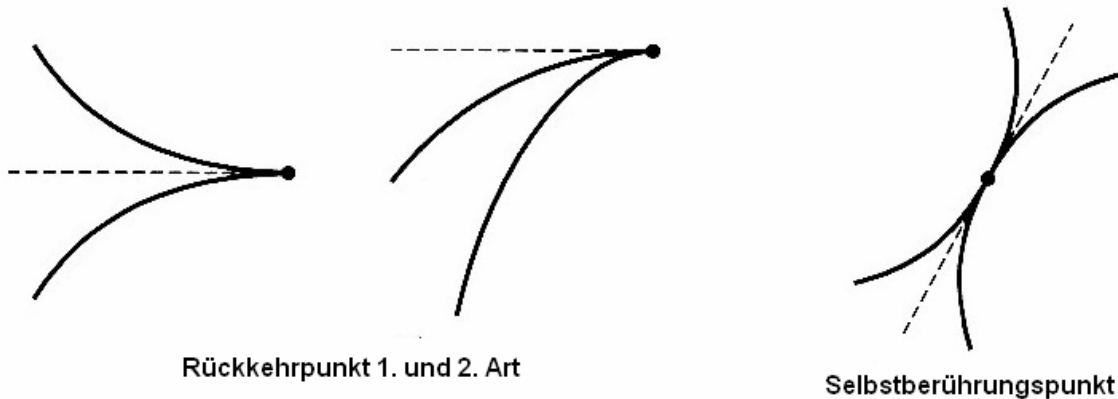
Demnach ist $(0, 0)$ ein **Doppelpunkt**, d.h. die Kurve schneidet sich selbst:



Hiervon gibt es allerdings verschiedene Ausprägungen. Um die Art des Doppelpunktes zu charakterisieren, muss die Funktionaldeterminante an der Stelle $(0, 0)$ ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}
\Delta(0,0) &= \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} (0,0) \\
&= F_{xx}(0,0) \cdot F_{yy}(0,0) - F_{yx}(0,0) \cdot F_{xy}(0,0) \\
&= 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis besagt, dass es sich entweder um einen **Rückkehr-** oder einen **Selbstberührungspunkt** handelt:



Um diese Frage zu beantworten muss noch der Richtungskoeffizient der Tangente untersucht werden:

$$\tan \alpha = -\frac{F_{xy}}{F_{yy}} = -\frac{0}{-2} = 0$$

Demnach besitzt die Kurve im Ursprung also eine waagrechte Tangente $y=0$. Damit ist das Koordinatensystem bereits so beschaffen, dass die x-Achse gleich der Kurventangente im Ursprung ist. Nun hilft ein Blick auf die Geradengleichung und die darin enthaltene Symmetrie weiter: Da y gemäß der expliziten Notation $y = \pm kx^2 \sqrt{1-x^2}$ für alle Werte von $x \in [-1;1]$ und deswegen zu beiden Seiten des Ursprungs definiert ist, können wir wegen der Punktsymmetrie schließen, dass im Ursprung ein **Selbstberührungspunkt** vorliegt.

Flächeninhalt mit Fingerzeig

Interessant ist nun die Berechnung des Flächeninhalts der Kurve (machbar ab der 12. Klasse im G8 bzw. 13. Klasse im G9), der sich aufgrund der Symmetrieeigenschaften aus dem Vierfachen des Inhalts im ersten Quadranten zusammensetzt:

$$\int f_k^*(x) dx = 4 \cdot \int_0^1 f_k(x) dx = 4k \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = (*)$$

Der Radikand lässt aufgrund des trigonometrischen Pythagoras die Substitution $x = \sin t$ als nahe liegend erscheinen. Damit gilt die Transformation

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

Eingesetzt ergibt dies unter zweifacher Verwendung des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\begin{aligned} (*) &= \int \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \int \sin^2 t - \sin^4 t dt = \int \sin^2 t dt - \int \sin^4 t dt = (**) \end{aligned}$$

Nun hilft ein bisschen Trigonometrie weiter. Zusammen mit dem trigonometrischen Pythagoras liefert das Additionstheorem $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, dass $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Damit erhält man die hilfreichen Identifikationen

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{aligned}$$

Damit lässt sich weiter rechnen:

$$\begin{aligned} (**) &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt - \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4} \int 1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t dt \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4} \int \cos^2 2t dt \\ &= \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4t) dt \\ &= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t \\ &= \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t = (***) \end{aligned}$$

Damit haben wir das Integral schon ein ganzes Stück vereinfacht. Nun hilft die Formel von MOIVRE weiter und wir erhalten unter Ausführung der Resubstitution $t = \arcsin x$:

$$\begin{aligned} (***) &= \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}(8\cos^3 t \sin t - 4\cos t \sin t) \\ &= \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}(1 - \sin^2 t)^{3/2} \sin t + \frac{1}{8}\sqrt{1 - \sin^2 t} \sin t \\ &= -\frac{x}{4}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{8}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right) \end{aligned}$$

Das sieht alles noch nicht so schön aus und man hört die Schüler schon stöhnen, wozu denn dieser Aufwand gut sein soll. Aber die Auswertung des Integrals führt nun zur Überraschung aller auf ein sehr schönes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
4 \cdot \int_0^1 f_k(x) dx &= 4k \cdot \left\{ 0 + \frac{1}{8} \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) - \left[0 + \frac{1}{8} (0 + 0) \right] \right\} \\
&= 4k \cdot \frac{\pi}{16} = k \cdot \frac{\pi}{4} = m^3 \cdot \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Wer hätte das gedacht? Der Inhalt der Kurve, die sich nun doch sehr von einem Kreis unterscheidet, ist im Wesentlichen bestimmt durch die Kreiszahl π ! Woher dieser Zusammenhang?

Wir wollen versuchen, darauf eine plausible Antwort zu suchen. Wenn wir aber nach verwandten Eigenschaften von $\Gamma_{f_k^*}$ mit einem Kreis Ausschau halten, so kommen wir nicht sehr weit. Was auffällt ist, dass $\Gamma_{f_k^*}$ wie ein Kreis überall glatt ist. Allerdings ist die Krümmung nicht konstant. Sinnt man ein bisschen über diesen Sachverhalt nach, so fällt auf, dass man sich von der Kreiszahl π zu schnell in Richtung Kreis hat führen lassen.

Eine andere, dem Kreis sehr verwandte, Kurve besitzt ebenfalls einen Flächeninhalt, der im Wesentlichen durch π bestimmt wird: die Ellipse.

Die Ellipse als Mutterkurve

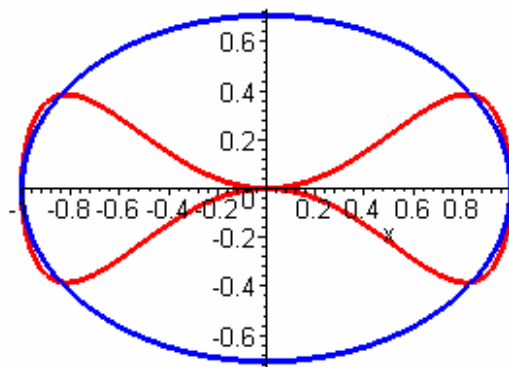
Die Ellipse wird bekanntlich durch die Formel

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

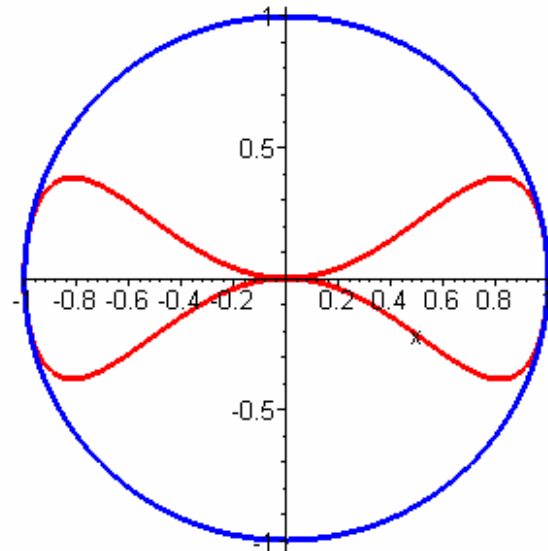
beschrieben, wobei a und b die beiden Halbachsen bezeichnen. Ihr Flächeninhalt ergibt sich zu

$$A = ab\pi .$$

Zeichnet man die Ellipse zusammen mit unserer Kurve $\Gamma_{f_k^*}$ in ein Koordinatensystem, so wird man zunächst keine Ähnlichkeit feststellen. Für eine Übereinstimmung des Definitionsbereiches ist die Halbachse $a = 1$ zu wählen. Wählt man auch $b = 1$, so verbleiben wir doch wieder zunächst beim Kreis. Für die anschließende Diskussion ist dieser Spezialfall aber eher hinderlich. Deswegen empfiehlt sich eine Wahl $b \neq a$.



$$a=1, b=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$a=b=1$$

Wir wollen es aber auf einen Versuch ankommen lassen und überlegen, wie man aus der Ellipse (bzw. dem Kreis) unsere Kurve erhalten könnte. Hierbei hilft ein eher unmathematisches und haptisches Vorgehen: man stelle sich die Ellipse als schwach elastisches Ei vor, z.B. aus dünnem Plastik oder hartem Gummi gefertigt (womöglich ist ein derartiges Modell in der Schule auch vorhanden). Nun greife man das Maximum und Minimum der Kurve auf der y-Achse und drücke die Ellipse soweit zusammen bis sie sich im Ursprung berührt. Voila – hier ist unsere Kurve $\Gamma_{f_k}^*$! (Eventuell muss an am linken und rechten Rand etwas nachsichtig sein...)

So weit, so gut. Doch wie beschreiben wir diese Deformation mathematisch? Nun ja. Hierbei hilft nun hilft ein Blick von der Ellipse zur Kurve $\Gamma_{f_k}^*$ und ein bisschen unsere gewonnene Erfahrung beim „Graphischen Multiplizieren von Funktionen“ weiter. Was passiert in der Nähe des Ursprungs? Beide Äste werden bis nahe auf Null zusammengestaucht, und je weiter weg man kommt, desto schwächer ist dieses Verhalten ausgeprägt. Am linken und rechten Rand wird die Ellipse eventuell sogar etwas nach oben bzw. unten gezogen, also gedehnt. Als nächstes wollen wir verstehen, was eine Halbachse der Ellipse faktisch ist: der Abstand des höchsten Punktes vom Ursprung. Wenn wir jetzt etwas weicher argumentieren und die Halbachsen als eine Art Teilradius auffassen, was sie de facto ja als entartete Kreisradien auch sind, so kommen wir zu folgender Argumentation: die kleine Halbachse b ist im Nullpunkt gleich 0; beim Entfernen von der Null verhält sich die Ellipse dann aber so, als würde die Halbachse langsam wachsen – und sie wächst ganz enorm, je weiter wir dem linken bzw. rechten Scheitel der Ellipse kommen. Betrachtet man die Form der Kurve $\Gamma_{f_k}^*$ am zusammengestauchten Punkt, so kommt man zu dem Schluss, dass b zum einen von x abhängen muss und zum anderen sehr wahrscheinlich quadratischen Typs ist. Versuchen wir es daher mit

$$b = b(x) = k \cdot x^2,$$

wobei wir die Konstante auf Verdacht wieder k nennen. Eingesetzt in die Ellipsengleichung ergibt das

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{kx^2}\right)^2 = 1$$

und nach y aufgelöst

$$y^2 = k^2 x^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Setzen wir nun noch die große Halbachse $a=1$, so erhalten wir tatsächlich unsere Kurve $\Gamma_{l_k^*}$:

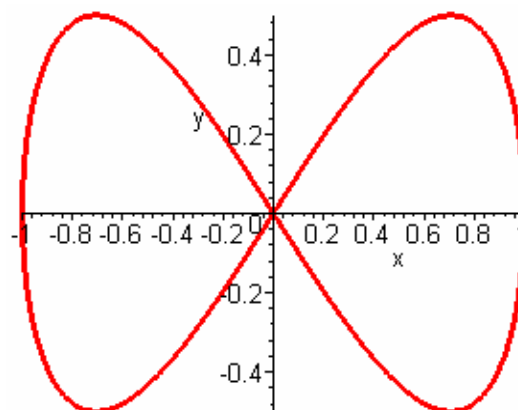
$$y^2 = k^2 x^4 (1 - x^2)$$

Somit sind wir durch eine „dynamisch-haptische“ Überlegung vom Kreis über die Ellipse mittels einer ungewöhnlichen Substitution in Form einer von x abhängigen Halbachse zu unserer Kurve gekommen. Ein höchst erstaunlicher und schöner Weg!

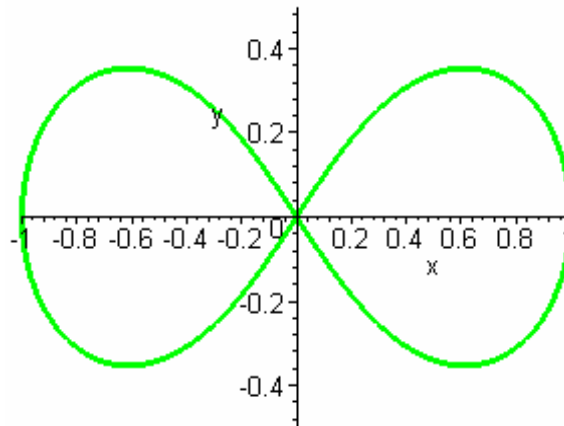
Von der Ellipse zur Lemniskate

Mit dieser „funktionalen Substitution“ lässt sich nun natürlich spielen. Was passiert, wenn man keine quadratische, sondern eine lineare Funktion für b ansetzt?

Bevor wir das Computeralgebrasystem anwerfen oder den Bleistift zücken, wollen wir wieder unser Vorstellungsvermögen trainieren. Eine lineare Funktion mündet natürlich nicht waagerecht in den Ursprung ein. Durch das Quadrieren in der Ellipsengleichung verschwindet dann auch jedes potenzielle Minuszeichen. Deshalb macht es keinen Unterschied, ob wir eine lineare Funktion oder deren Betrag einsetzen. Der Betrag einer linearen Funktion erzeugt aber diesen charakteristischen Knick am Ursprung und zu erwarten ist dann wohl insgesamt eine Art Kreuz. Die Überprüfung am Funktionsplotter gibt uns dabei tatsächlich Recht:



Eine höchst interessante Kurve, erinnert sie doch an eine große Berühmtheit unter den höheren ebenen algebraischen Kurven: die Lemniskate:



Information zu dieser schönen Kurve bekommt man z.B. aus [4], [5] oder [6]. Aber mittlerweile ist auch das Internet eine gute und zuverlässige, wenngleich auch oberflächliche, Quelle geworden. Im Besonderen heißt die Kurve „Lemniskate von Jakob BERNOULLI (1654-1705)“, auch „schlichte Lemniskate“ oder „Schleifenlinie“, vom griechischen λεμνίσκος, Bändchen, Schleife. Sie ergibt sich als Sonderfall der nach James BOOTH (1810-1878) benannten „BOOTHschen Lemniskaten“. Man kann diese zwar, genau wie wir angenommen haben, tatsächlich nicht aus der Ellipse erhalten. Aber eine leichte Modifikation der Ellipsengleichung führt dennoch weiter: wir schreiben keine Summe, sondern eine Differenz und erhalten

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Dies ist (im Gegensatz zur elliptischen) die hyperbolische Mittelpunktsform der Kegelschnitte. Nicht durch eine Manipulation der Halbachsen, sondern durch eine geeignete Koordinatentransformation, die einen interessanten geometrischen Vorgang beschreibt, kommt man nun weiter. Mittels der Ersetzungen

$$x = \frac{c^2 x'}{x'^2 + y'^2}, y = \frac{c^2 y'}{x'^2 + y'^2}$$

invertiert man die Ellipse an einem Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt (vgl. [5], S. 16f). Setzt man dies in die Ellipsengleichung ein, so erhält man nach kurzer Rechnung die Gleichung für die hyperbolischen BOOTHschen Lemniskaten:

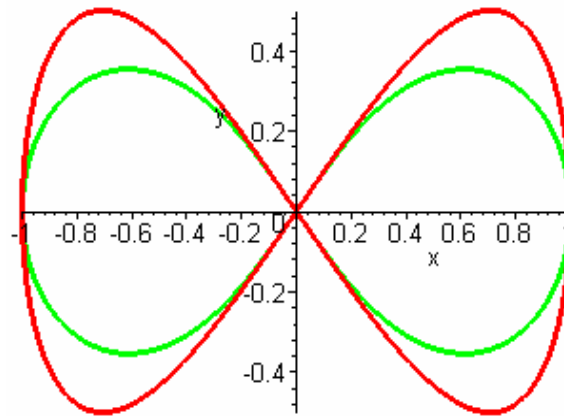
$$(x^2 + y^2)^2 = c^4 \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right)$$

Dabei schreiben wir der Übersichtlichkeit halber wieder x für x' und y für y' , behalten aber im Hinterkopf, dass wir mit transformierten Koordinaten rechnen.

Hieraus ergibt sich nun für den Sonderfall $a = b = c \cdot \sqrt{2}/2$ die so genannte „BERNOULLIsche Lemniskate“. Für sie gilt

$$(x^2 + y^2) = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Noch bleibt die Frage offen, ob es sich bei unserer neuen Kurve tatsächlich um die - oder zumindest eine Verwandte der - Lemniskate handelt. Sehen wir uns dazu zunächst die beiden Kurven (entsprechend skaliert mit $c = \sqrt{2}/2$) im grafischen Vergleich an:



Wie es scheint, passt die Übereinstimmung in der Nähe des Ursprungs ganz gut. Allerdings verliert sich die Ähnlichkeit immer mehr, je weiter wir uns vom Nullpunkt entfernen. Die Flanken fallen zu steil ab, als dass man wirklich von einer Ähnlichkeit mit der berühmten Kurve sprechen könnte.

Werfen wir noch einen Blick auf die Algebra. Eine lineare Halbachse von der Form $b = kx$ führt auf die Gleichung

$$y^2 = k^2 x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Die implizite Gleichung für die BERNOULLIsche Lemniskate ergibt sich in expliziter Schreibweise zu

$$y^2 = -(x^2 + c^2) \pm \sqrt{2c^2 x^2 + c^4}.$$

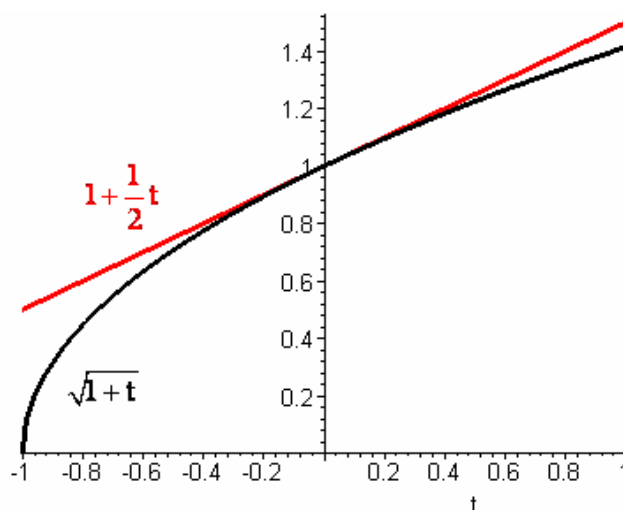
Dabei scheidet für reelle Punkte das negative Vorzeichen vor der Wurzel aus. Es bleibt:

$$y^2 = -(x^2 + c^2) + \sqrt{2c^2 x^2 + c^4}$$

Die vierte Potenz von x finden wir hier nirgends wieder. Offensichtlich ist es nicht möglich, unsere neue Kurve auf dem ganzen Definitionsbereich als echten Abkömmling der Lemniskate zu beschreiben. Trotzdem sollten wir zumindest in der Nähe des Ursprungs die Übereinstimmung auch an den Funktionstermen sehen können. Beschreiten wir dazu eine Näherung: in der Nähe der Null ist die Wurzelfunktion durch die Taylorentwicklung

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$$

gegeben. Dem Schüler kann dieses Vorgehen als „Linearisieren einer Funktion“ in einem bestimmten Punkt nahe gebracht werden, was am besten am Graphen veranschaulicht wird:



Interessanter Nebenaspekt ist hierbei die Tatsache, dass $1 + \frac{1}{2}t$ sich in der Taylorentwicklung aus der Vorschrift $T(0) + T'(0) \cdot t$ mit $T(t) = \sqrt{1+t}$ ergibt, was mit wachem Auge betrachtet nichts anderes als die Gleichung der Tangente an den Graphen im Punkt $(0, T(0))$ ist. Die Ableitung T' im Punkt Null gibt die Steigung der Tangente an. Dies ist die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung, wie sie Schülern stets im Gedächtnis bleiben sollte. Eine Rückbesinnung ist in diesem Kontext also sehr zu empfehlen; außerdem kann mit einem derartigen Vorgehen auch der Begriff einer Taylor-Entwicklung vermieden werden. Wir vernachlässigen also die quadratischen Terme, bei denen es sich ja bereits wegen $t = (4/c^2)x^2$ um Terme der Ordnung 4 handelt, und erhalten somit für die Lemniskatengleichung

$$\begin{aligned} y^2 &= -(x^2 + c^2) + c^2 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{c^2}} \\ &= -(x^2 + c^2) + c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4x^2}{c^2} \right) \right) \\ &= -x^2 - c^2 + (c^2 + 2x^2) \end{aligned}$$

Dies ergibt gerade

$$y^2 = x^2,$$

womit wir unser Kreuz erhalten. Mit der Vernachlässigung der 4. Potenzen in der Funktionsgleichung unserer neuen Kurve und der Wahl $k=1$ erhalten wir ebenfalls

$$y^2 = x^2$$

und damit die Übereinstimmung der beiden Kurven in der Nähe des Ursprungs.

Eine Überraschung bei weiterer Annäherung

Nun gut, mag mancher denken, dann ist es eben keine Lemniskate. Schade. Doch so leicht wollen wir uns nicht geschlagen geben! Mit $k=1$ und $a=1$ lautet unsere Gleichung bisher

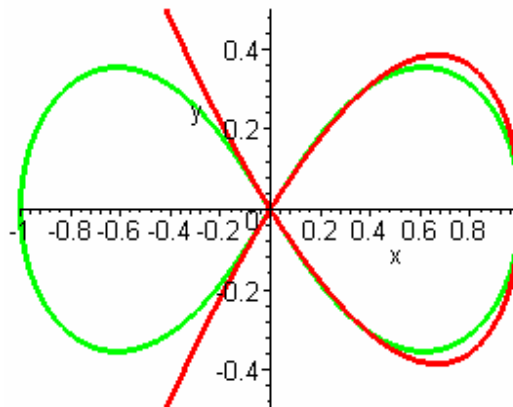
$$y^2 = x^2(1 - x^2).$$

Dabei resultierte der erste Faktor aus der Halbachsenwahl $b=b(x)=x$. Damit haben wir immerhin das Kreuz der Lemniskate und die Übereinstimmung mit ihr am Ursprung erhalten; deswegen lassen wir diesen Faktor unangetastet. Aber der zweite Faktor steht noch zur Diskussion.

Wir möchten näher an die Lemniskate heran, also im Bereich nahe der Eins die Kurve weniger stark von der x-Achse wegziehen. Algebraisch bedeutet dies nun wiederum einen Subtrahenden, der nahe unterhalb der Eins mehr von der Eins abzieht als x^2 . Die Antwort hierauf ist einfach, denn es bleibt nur der Fall x übrig, zumindest wenn man sich in seiner Betrachtung vernünftigerweise auf die ganzzahligen Potenzen von x beschränkt, will man doch auch die negative x-Achse bis zur -1 einsetzen dürfen. Alle höheren Potenzen ziehen im Bereich $x < 1$ noch weniger von der Eins ab als x^2 . Also lautet der Term unserer neuen Testkurve

$$y^2 = x^2(1 - x)$$

Wir erwarten aufgrund unserer Überlegungen etwas, das aussieht wie die Lemniskate. Doch der Funktionsplotter bzw. Einsetzen und Auftragen liefert uns eine illustre Überraschung: eine Schleife entsteht.

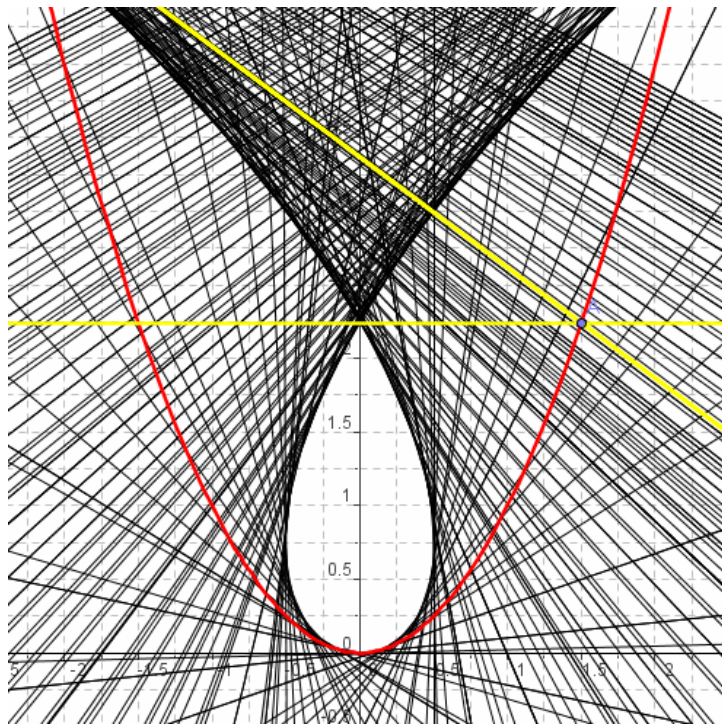


Reichlich schade wäre es nun abermals, wenn diese schöne Schleifenkurve auch keinen berühmten Verwandten hätte. Doch diesmal haben wir Glück! Durch unser munteres Spiel sind wir bei einem Vertreter der rationalen Kubiken gelandet: der TSCHIRNHAUS-Kubik (nach Ehrenfried Walter Graf von TSCHIRNHAUS, 1651-1708). Sie wurde von TSCHIRNHAUS 1690 zuerst betrachtet und daher von R.C. ARCHIBALD um 1900 nach ihm benannt (zwischenzeitlich wurde sie auch „cubique de l'Hôpital“ und „Trisektrix von Catalan“ genannt). Für nähere Details kann man z.B. [6] von S. 53 bis 56 aufschlagen. Sie wird beschrieben durch die Gleichung

$$2x^3 = 2qx^2 + py.$$

Durch die Wahl $q = 1$ und $p = -2$ erkennen wir unseren Vertreter wieder.

Nun gibt es einen interessanten Zusammenhang zwischen dieser schönen Schleifenkurve und der realen physikalischen Welt um uns herum. Lässt man Lichtstrahlen von der Seite auf eine parabelförmige Oberfläche treffen, so ist die Brennnlinie bzw. die Hüllkurve der (an beiden Parabelästen) reflektierten Strahlen, auch Katakaustik genannt, nichts anderes als eben die TSCHIRNHAUS-Kubik:



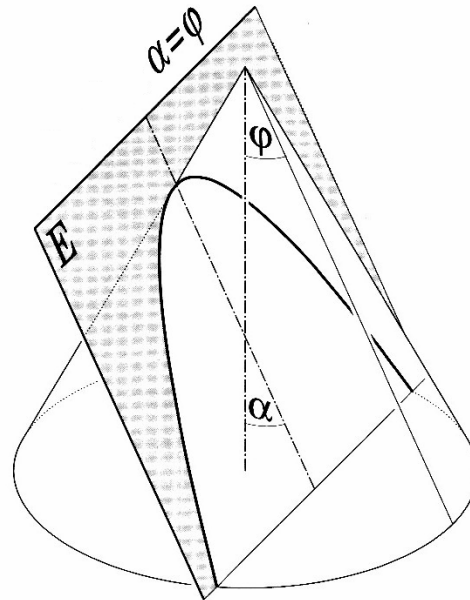
Das physikalische Verhalten ist durch das Reflexionsgesetz beschrieben, wonach einfallender Strahl, ausfallender Strahl und Einfallslot in einer Ebene liegen sowie Einfallswinkel und Ausfallswinkel maßgleich sind. Die TSCHIRNHAUS-Kubik ist insbesondere eine Katakaustik 2. Art, da die Lichtstrahlen parallel zu einer Koordinatenachse auf die Kurve treffen. Von ihrem Konstruktionsprinzip her ist sie also eine „Normalenkurve der Parabel“. Sie ist symmetrisch, hat im Ursprung einen Doppelpunkt und gehört zu den NEWTONschen divergierenden Parabeln, d.h. sie hat unendlich ferne Geraden zur Wendetangente.

Zur Erzeugung dieser und anderer Katakaustiken bietet sich zum Beispiel das Programm GeoGebra an. Folgende kurze und einfache Konstruktionsanleitung führt hier schnell zum Ziel:

1. Zeichne eine Normalparabel.
2. Setze einen Gleiter A auf die Parabel.
3. Erzeuge die Tangente a in A an die Parabel.
4. Erzeuge durch A eine Parallele b zur x-Achse.
5. Spiegle b an a. So erhält man die Gerade c.
6. Schalte die Spur von c an (und lasse a verschwinden).
7. Bewege A auf der Parabel.

Von der Parabel zurück zum Kegel

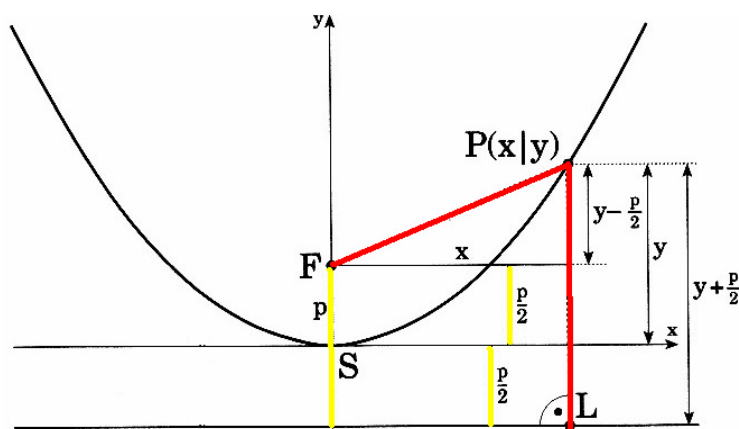
Aus dem Lehrplan der bayerischen Gymnasien leider verschwunden sind die Kegelschnitte. Schade, denn sind sie es doch, die uns eine befriedigende Rückkehr unserer Reise zu unserem Ausgangspunkt ermöglichen: man nehme einen beliebigen Kegel aus unserer langen Experimentalreihe und schneide ihn mit einer Ebene, die parallel zu einer Mantellinie ist und nicht durch die Spitze geht:



(Quelle: [1], S. 247, leicht verändert)

Nun betrachte man die Schnittlinie – und siehe da: sie sieht aus wie eine Parabel.

Geht man dieser Konstellation detaillierter auf den Grund, wie man sie z.B. schnell in [1] auf S. 248 nachlesen kann, so stellt man aus rein geometrischen Betrachtungen heraus fest, dass die Schnittkurve nichts anderes ist als derjenige Ort aller Punkte, deren Entfernung von einem gegebenen Punkt (Brennpunkt) gleich ist ihrem Abstand von einer gegebenen Gerade. Dass es sich bei diesem Kegelschnitt tatsächlich um die im Algebra-Unterricht als Parabel kennen gelernte Kurve mit der Gleichung $y = ax^2$ handelt, kann man dann mit der eben erwähnten Eigenschaft und einer hilfreichen Skizze schnell zeigen:



(Quelle: [1], S. 249, leicht verändert)

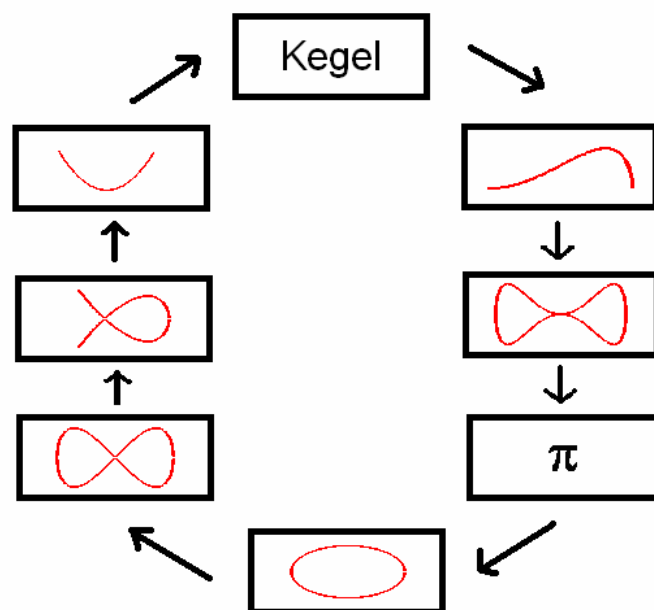
Aus dem geometrischen Zusammenhang leiten wir die Parabelgleichung her:

$$\begin{aligned}\overline{PF} &= \overline{PL} \\ \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= y + \frac{p}{2} \\ x^2 + y^2 - yp + \frac{p^2}{4} &= y^2 + yp + \frac{p^2}{4} \\ x^2 &= 2py \\ y &= \frac{1}{2p}x^2\end{aligned}$$

Quod erat demonstrandum.

Resümee

In einem grafischen Zirkel fassen wir unsere kleine Reise durch die Mathematik noch einmal zusammen:



Nichts steht für sich allein im großen Gedankengebäude der Mathematik, und erst der spielerische Umgang mit Formeln und Graphen lässt uns die Freude erleben, die der sonst ach so trockene Algebrasermon erfolgreich verdeckt. Unser Spaziergang soll als Einladung an Lehrer und Schüler verstanden werden, selbst auf Entdeckungsreise zu gehen – egal woher, egal wohin. Irgendwo weiß die Mathematik immer zu überraschen und zu bezaubern. Man muss ihr nur findig auf die Schliche kommen ...

Literatur:

- [1] Barth E., Barth F., Krumbacher G., Osslander K.: „Anschauliche Geometrie 10“, 2. korrigierte Auflage, R. Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1997
- [2] Brandl M.: „Von Kegeln zu höheren algebraischen Kurven und zurück“, Unterrichtseinheit bei lehrer-online, 2008
- [3] Bronstein I.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Mühlig H.: „Taschenbuch der Mathematik“, 4. überarbeitete und erweiterte Auflage der Neubearbeitung, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1999
- [4] Schmidt, H.: „Ausgewählte höhere Kurven: Für Schüler oberer Klassen und Studenten der ersten Semester“, Kesselringsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1949
- [5] Schupp, H. und Dabrock, H.: „Höhere Kurven: situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte“, in der Reihe „Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik“, Band 28, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI-Wiss.-Verl., 1995
- [6] Wieleitner, H.: „Spezielle Ebene Kurven“, in der Reihe „Sammlung Schubert“, Band LVI, Leipzig, G.J. Göschensche Verlagshandlung, 1908