

Das Haus der Vierecke und das Haus der Gleichungen experimentell erkunden

Reinhard Oldenburg

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Oldenburg, Reinhard. 2024. "Das Haus der Vierecke und das Haus der Gleichungen experimentell erkunden." In *Experimentieren im Mathematikunterricht: aktuelle Beiträge aus Forschung und Praxis*, edited by Sarah Beumann and Sebastian Geisler, 135–39. Münster: WTM-Verlag.

Nutzungsbedingungen / Terms of use:

licgercopyright

Dieses Dokument wird unter folgenden Bedingungen zur Verfügung gestellt: / This document is made available under these conditions:

Deutsches Urheberrecht

Weitere Informationen finden Sie unter: / For more information see:

<https://www.uni-augsburg.de/de/organisation/bibliothek/publizieren-zitieren-archivieren/publiz/>



Das Haus der Vierecke und das Haus der Gleichungen experimentell erkunden

1. Einleitung

Während konstruktionsbasierte Geometrieprogramme wie Euklid Dynageo oder Geogebra erfordern, dass der Benutzer eine Konstruktionsreihenfolge (also ein Programm) findet, das eine bestimmte Konfiguration herstellt, erlauben relationale Geometrieprogramme (RGS), Eigenschaften von geometrischen Objekten und Beziehungen zwischen ihnen beliebig (und in beliebiger Reihenfolge) zu setzen. Um beispielsweise ein Dreieck mit drei vorgegebenen Seitenlängen zu konstruieren, kommt man ohne die Idee aus, geeignete Hilfskreise mit vorgegebenem Radius zu zeichnen. Stattdessen skizziert man ein beliebiges Dreieck und setzt dann die Strecken auf die gewünschten Längen. Das trivialisiert geometrische Konstruktionsprobleme. Während die Betrachtung von Dreiecken damit etwas von ihrem Reiz verliert, gibt es aber schon bei Vierecken eine solche Fülle von Typen, dass sich das Explorieren mit RGS lohnt. Befreit von der Bürde eine passende Konstruktion finden zu müssen, kann man erkunden, welche Bedingungen zu welchen Viereckstypen führen. Dies wird im folgenden Beitrag gezeigt.

Bevor konkrete Aktivitäten beschrieben werden, einige didaktische Vorbemerkungen: Traditionell kommt Konstruktionsaufgaben die Rolle der Schulung des Problemlösevermögens zu, weil zu einem gewünschten Konstruktionsziel eine geeignete Abfolge von Konstruktionsschritten gefunden werden muss – dies fällt durch RGS weg (siehe z.B. Schneider, 2016). Andererseits würde man sich etwas vormachen, wenn man glaubte, mit geometrischen Konstruktionsaufgaben Lernende auf Aufgaben der modernen Lebenswelt vorzubereiten, wie sie sich Ingenieuren oder Naturwissenschaftlern stellen. Professionelle CAD Programme arbeiten relational (s. z.B. Kortenkamp, 2020 für ein auch Schüler*innen zugängliches Programm), so dass man mit RGS eher realitätsnah auf die heutige Welt vorbereitet.

Schließlich eine kurze Überlegung zum Begriff des Experimentierens in diesem Kontext. Experimentieren unterscheidet sich vom ziellosen Herumspielen durch die Systematik der Beobachtung, durch die hypothesengeleitete Manipulation der Bedingungen. Dies schult (meta)kognitive Prozesse und Strategien, die für viele MINT-Fächer typisch sind: Beim Setzen von Bedingungen an die Vierecke und dem anschließenden Erkunden durch systematisches

Lerngruppe: 7. –12. Schuljahr

Idee: In einer web-App können Vierecke durch Einschränkungen spezifiziert werden und man kann so erkunden, wie die Viereckstypen zusammenhängen. In höheren Jahrgängen können die Einschränkungen auch algebraisch verstanden werden.

Ziehen an den vier Ecken bewährt sich die gleiche Strategie, die man auch bei naturwissenschaftlichen Experimenten oder beim Debuggen von Programmen anwendet: Man hält immer die meisten Größen fest, so dass man den Einfluss der variierten Größe erkennen kann.

2. FeliX im WWW

Die Plattform für die hier beschriebenen Experimente ist FeliX (Oldenburg, 2021a), ein RGS, dass auch die algebraischen Gleichungen hinter den Beziehungen transparent und manipulierbar macht. Es verfügt zudem über weit mehr Fähigkeiten als sie für die hier beschriebenen Experimente notwendig sind (siehe Oldenburg, 2021b).

Abbildung 1 zeigt das Layout der Benutzeroberfläche: Es gibt ein Geometriefenster sowie Tabellen der Objekte und der Gleichungen, die zwischen den Koordinaten der Objekte gelten sollen. Für die hier beschriebenen Experimente können diese Tabellen teilweise ignoriert werden. Stattdessen sind die Buttons oberhalb des Geometriefensters wichtig: Sie erlauben, Objekte zu erzeugen und auszuwählen, und für ausgewählte Objekte Beziehungen zu setzen. Mögliche Beziehungen zwischen Strecken könnten hierbei sein: Orthogonalität und Parallelität. Die Bedingung, dass zwei Strecken gleich lang sind, kann aktuell noch nicht über einen Button gesetzt werden, sondern dadurch, dass man eine neue Gleichung anlegt und beispielsweise $Len(s1)=Len(s2)$ in das Textfeld eingibt. Damit werden die beiden Strecken s1 und s2 auf gleiche Länge gesetzt.

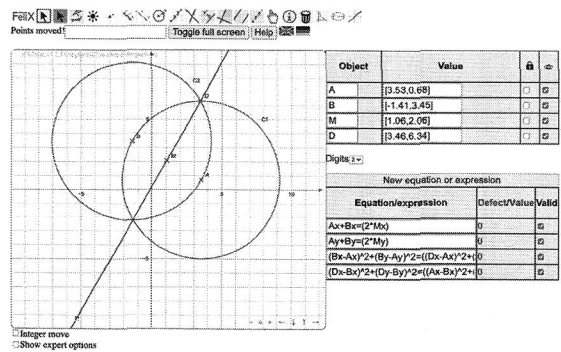


Abbildung 1: FeliX

3. Das Haus der Vierecke

Um die Vielfalt der Vierecke systematisch zu erkunden, erzeugt man ein Viereck, das zunächst völlig beweglich ist. Dann fügt man sukzessive Bedingungen hinzu. Wenn man beispielsweise

zunächst fordert, dass zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, entstehen Trapeze. Aus diesen können dann leicht Parallelogramme gemacht werden. Interessanterweise ergeben sich ebenso Parallelogramme, wenn man fordert, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Daraus ergibt sich schon die erste Forschungsfrage: Kann man die Bedingungen auch mischen, d.h. entstehen auch dann immer Parallelogramme, wenn man fordert, dass ein Paar gegenüberliegende Seiten gleich lang ist, und das andere Paar parallel? Das digital umgesetzte Experiment beantwortet die Frage positiv – ein letzter Zweifel kann z.B. durch einen Kongruenzbeweis ausgeräumt werden. Beim Betrachten der so erzeugten Parallelogramme kann auffallen, dass gegenüberliegende Winkel gleich groß sind. Reicht auch diese Bedingungen aus, um aus einem allgemeinen Viereck ein Parallelogramm zu machen? Um das mit FeliX zu erkunden, benötigt man die Funktion $\text{angle3}(A,S,B)$, mit der der Winkel des Schenkels bei S hin zu den Punkten A und B gemessen wird.

Welche Vierecke ergeben sich, wenn zwei benachbarte Seiten gleich lang sind? Welche, wenn zwei Paare benachbarter Seiten gleich lang sind? (symmetrische Drachen) Das Stellen von solchen Fragen gehört ebenso zum Lerneffekt wie ihre Beantwortung. Hilfreich sind dabei die gleichen Strategien wie allgemein beim Problemlösen, beispielsweise das Variieren von Bekanntem: Die Parallelogramme bilden eine wichtige Vierecksklasse. Kann man in ihrer Definition „parallel“ durch „orthogonal“ ersetzen? D.h. gibt es Vierecke, bei denen gegenüberliegende Seiten orthogonal sind? Nur mit Papier oder einem herkömmlichen DGS „bewaffnet“, ist diese Frage für die allermeisten Schüler*innen zu anspruchsvoll, mit einem RGS kann sie aber geklärt werden und führt zu einem Aha-Effekt: Es sind nämlich all diese „Orthogramme“ konkav (Abb. 2).

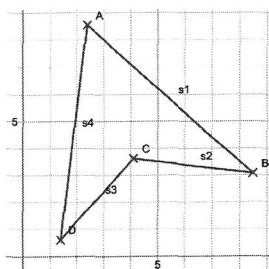


Abbildung 2: Ein „Orthogramm“

Mit diesen Aktivitäten können alle üblichen Klassen von Vierecken zusammen mit verschiedenen Charakterisierungsmöglichkeiten entdeckt werden, und wie das Beispiel der Orthogramme zeigt, evtl. auch noch neue Klassen. Indem man eine der Bedingungen außer Kraft setzt, gelangt

man zum entsprechenden Oberbegriff. Auf diese Art lässt sich das Haus der Vierecke systematisch erkunden.

4. Das Haus der Gleichungen

Neben geometrischen Relationen können auch algebraische Beziehungen gesetzt werden, die sich auf innere Eigenschaften wie Längen oder Winkel beziehen, oder auch auf die Lage im Koordinatensystem. Hat man in FeliX einen Punkt A, so können in Gleichungen die Variablen A_x und A_y für seine Koordinaten verwendet werden. Damit lässt sich beispielsweise erforschen, welche Eigenschaften Vierecke haben, für die $A_x=C_x$ und $B_y=D_y$ gilt. Auch mit solchen Beziehungen gruppieren sich Vierecke in eine Hierarchie, eben das „Haus der Gleichungen“. Die algebraische Sicht wird von FeliX deutlich unterstützt. Das ergibt sich schon daraus, dass alle gesetzten Relationen algebraisiert werden und die resultierenden Gleichungen in der Gleichungstabelle sichtbar (und veränderbar) sind. Werden etwa zwei Strecken als orthogonal deklariert, findet sich in der Gleichungstabelle eine Gleichung, die das Skalarprodukt der entsprechenden Vektoren zu null setzt, was im Sinne des Spiralcurriculums anschlussfähig an die analytische Geometrie der Oberstufe ist. Damit wird zum einen transparent gemacht, wie das RGS funktioniert (es formuliert geometrische Eigenschaften algebraisch und löst das entsprechende Gleichungssystem), zum anderen kann damit der Übergang zur analytischen Geometrie begleitet werden.

5. Fazit

Computerwerkzeuge sind nicht neutrale Medien, sie stellen die Dinge nicht transparent dar, sondern je nach Werkzeugkonzeption ermöglichen sie sehr unterschiedliche Zugriffe auf die mathematischen Objekte. Noch präziser sollte man sagen, dass es nicht die mathematischen Objekte an sich sind, sondern dass man immer mit computerbasierten Modellen von mathematischen Objekten arbeitet. Das gleiche geometrische Objekt, zum Beispiel ein Parallelogramm, kann mit digitalen Werkzeugen durch unterschiedliche digitale Modelle realisiert werden, die sich in der Interaktion deutlich unterscheiden. Die Modellierung von geometrischen Figuren mithilfe relationaler Geometrieprogramme fühlt zu flexibel veränderbaren Figuren. Die oder der Nutzer*in wird davon entlastet, eine Konstruktionssequenz zu finden, die die gewünschten Objekte erstellt. Stattdessen können sie sich eher darauf konzentrieren, welche Eigenschaften eine Figur hat.

Beobachtungen bei Studierenden haben gezeigt, dass solche Konstruktionen oft zu einschränkend ausfallen, d.h. es wird nur ein Spezialfall des intendierten Begriffs realisiert. In der Dissertation von Michael Schneider (2016) wurde dokumentiert, wie RGS Lehramtsstudierenden helfen können, die die Frage explorieren, ob alle Vierecke mit vier gleichlangen Seiten Quadrate sind (eine elementare Frage, aber nicht für alle Studierende ohne Hilfsmittel leicht zu beantworten). Mit DGS konstituierend haben die Studierenden dabei ihre Fehlvorstellung, dass es sich notwendig um Quadrate handelt, in die Konstruktion eingebaut, und konnten damit ihren Fehlschluss nicht aufdecken. Der Nutzen des RGS in solchen Situationen besteht darin, dass nur die explizit gesetzten Bedingungen und solche, die daraus logisch folgen, gelten.

Aber ebenso wie in DGS erfordert auch ein RGS eine systematische Nutzung des Zugmodus. Dabei wird die Analogie zu klassischen naturwissenschaftlichen Experimenten deutlich: Das RGS ist ein flexibles Labor, aber die Anlage von Versuchsreihen bleibt eine herausfordernde Aufgabe für die Lernenden, an denen sie weit über die Mathematik hinausreichende Kompetenzen entwickeln können.

Literatur

- Kortenkamp, U. (2020). Was geht App?! 3D wie die Profis. *mathematik lehren*, 223, 41.
- Oldenburg, R. (2021a). *FeliX*. <https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~oldenbre/jsfelix/F2d/jxfelix.html>
- Oldenburg, R. (2021b). Relational Thinking supported by an Algebraic Modeling Tool on the Web. *Proceedings ICMT15*.
- Schneider, M. (2016). *Relationale Geometriesoftware und relationales Denken in der Geometrie*. [Dissertation], Augsburg.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Universität Augsburg

reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de