

Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden: Ergebnisse einer qualitativen Untersuchung von Lernprozessdokumentationen beim entdeckenden Lernen

Felix Moors

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Moors, Felix. 2025. "Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden: Ergebnisse einer qualitativen Untersuchung von Lernprozessdokumentationen beim entdeckenden Lernen." Augsburg: Universität Augsburg.



**Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden: Ergebnisse einer
qualitativen Untersuchung von Lernprozessdokumentationen
beim entdeckenden Lernen**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Dr. rer. nat.

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät

der Universität Augsburg

von

Felix Ferdinand Moors

Augsburg, Juli 2024



Erstgutachter: Prof. Dr. Wolfgang Schneider

Zweitgutachter: Prof. Dr. Reinhard Oldenburg

Datum der mündlichen Prüfung: 29. Oktober 2024

Zusammenfassung

In der heutigen Lehramtsausbildung ist die von KLEIN formulierte *doppelte Diskontinuität* nach wie vor relevant. Gerade im Hinblick auf den Übergang von der Universität zurück an die Schule ist das Verständnis einer ganzheitlichen Mathematik bei Lehramtsstudierenden entscheidend. Als zentraler Aspekt eines solchen Verständnisses kann das mathematische Problemlösen identifiziert werden. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, inwieweit die fachliche und fachdidaktische Ausbildung an der Universität Lehramtsstudierende dazu befähigt, schulische wie universitäre mathematische Probleme selbstständig zu lösen. Die vorliegende Arbeit untersucht diesbezüglich die Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden für Gymnasien. Zunächst wurde eine stoffdidaktische Analyse der Relevanz der universitären Algebra für den gymnasialen Lehrberuf durchgeführt. Dabei wurden zwei elementare Inhaltsbereiche identifiziert, die eine unmittelbare Verknüpfung von schulischer und universitärer Algebra hervorheben: *Zahlenbereiche als algebraische Strukturen* und *Kegelschnitte als quadratische Gleichungen in zwei Variablen*. In einem Seminar für Studierende des gymnasialen Lehramts im höheren Semester wurden diese beiden Inhaltsbereiche in einer selbstentdeckenden Lernform für drei Semester vermittelt. Dabei bearbeiteten die Studierenden offen formulierte Fragestellungen und waren angehalten, den Lösungsprozess ganzheitlich und chronologisch zu dokumentieren. Diese Lernprozessdokumentationen wurden anschließend mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse auf die verwendeten Arbeitsweisen hin untersucht. Es ergab sich eine Typologie der Arbeitsweisen, die die Lehramtsstudierenden im Wesentlichen nach der generellen Möglichkeit zur Problembearbeitung sowie dem Einsatz von planenden und bzw. oder reflexiven Schritten unterscheidet. Insgesamt konnten sechs Typen beobachtet werden. Die untersuchten Studierenden waren prinzipiell nicht in der Lage, ein Problem vollständig zu lösen und in der Regel kam es nur selten zu einer teilweisen Problemlösung. Weiterhin zeigte sich, dass die jeweils besseren fachlichen Bearbeitungen eines Typs zwischen den verschiedenen Typen auf einem ähnlichen Niveau liegen. Lediglich das Auftreten relativ schlechter Bearbeitungen variierte von Typ zu Typ. Hier zeigten Typen mit einer umfangreicheren Verwendung von Arbeitsweisen – insbesondere von planenden und bzw. oder reflexiven Schritte – seltener schlechtere Bearbeitungen. Als limitierender Faktor für sehr gute Bearbeitungen konnte eher das fachliche Vorwissen und die fachliche Kompetenz als die verwendeten Arbeitsweisen ausgemacht werden. Eine abschließen-

de komplexe Sekundäranalyse konnte zudem mögliche Zusammenhänge innerhalb der verwendeten Arbeitsweisen aufzeigen: Planende Schritte stehen mit einer gewinnbringenden Nutzung allgemeinerer mathematischer Techniken und reflexive Schritte mit einer gewinnbringenden Nutzung problemspezifischer fachmathematischer Techniken in Verbindung. Zusammenfassend kann bei den untersuchten Lehramtsstudierenden nicht von einer tatsächlichen Problemlösekompetenz gesprochen werden, was auf ein mögliches grundsätzliches Defizit in der fachlichen und fachdidaktischen Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts hinweisen kann.

Abstract

The *double discontinuity* formulated by KLEIN is still relevant in today's teacher training. Particularly with regard to the transition from university back to school, an understanding of holistic mathematics is crucial for students who study to become high school teachers. This understanding includes mathematical problem solving as a central aspect. Against this background, the question arises as to what extent the subject-specific and didactic training at the university enables these students to solve mathematical problems independently. In this regard, this thesis analyses the working methods of students studying to become high school teachers. Firstly, a didactic analysis of the relevance of university algebra to the profession of high school teacher was carried out. Two elementary content areas were identified that emphasise a direct link between school and university algebra: *Number ranges as algebraic structures* and *conic sections as quadratic equations in two variables*. These two content areas were taught in a self-discovery learning format over three semesters in a seminar for those students in their final semesters. The students worked on openly formulated questions and were required to document the solution process holistically and chronologically. These learning process documentations were then analysed with the help of a qualitative content analysis to determine the working methods used. A typology of working methods emerged, which essentially differentiates the students according to their general ability to work on problems and the use of planning and/or reflective steps. A total of six types were observed. In principle, the students analysed were not able to solve a problem completely and, as a rule, they were only rarely able to solve it partially. Furthermore, it can be seen that the better solutions of each type are at a similar level between the different types. Only the incidence of relatively poor processing varies from type to type. Here, types with a more extensive use of working methods – especially with planning and/or reflexive steps – show less frequent poorer processing. The limiting factor for very good processing was found to be prior knowledge and expertise rather than the used working methods. A final complex secondary analysis was also able to show possible correlations within the occurring working methods: Planning steps are associated with a profitable use of more general mathematical techniques whereas reflective steps are associated with a profitable use of problem-specific specialised mathematical techniques. In conclusion, it is not possible to speak of actual problem-solving skills among the students included in

the survey, which may indicate a possible fundamental deficit in the subject-specific and didactic training of students studying to become high school teachers.

Danksagung

Ich möchte mich bei allen (un-)wissentlichen Helfer*innen bedanken, die mir im Verlaufe dieser Arbeit beigestanden haben. Ohne euch hätte das so viel mehr Kraft gekostet, als es sowieso schon getan hat. Dazu zählen vor allem, aber nicht nur:

Allen voran WOLFGANG SCHNEIDER, der bei mir die Begeisterung für die höhere Mathematik und insbesondere eine Leidenschaft an der abstrakten Algebra entfacht hat. Dieser Einfluss hat nicht nur meine mathematischen Fähigkeiten immer weiter vertieft, sondern auch mein didaktisches Wirken nachhaltig geprägt. Ich wäre ohne Sie heute nicht die Person, die ich bin; und ich würde es auch morgen nicht sein.

Prof. Dr. WOLFGANG SCHNEIDER und Prof. Dr. REINHARD OLDENBURG für deren Betreuung, die gleichermaßen von Freiheit und Sicherheit gekennzeichnet war. Ich hatte das große Glück, mich wissenschaftlich völlig frei bewegen zu können und dabei jederzeit verfügbare Ansprechpartner an der Seite zu haben.

Dr. RENATE MOTZER und Dr. SABRINA BERSCH, die mich maßgeblich bei meinem qualitativen Forschungsteil unterstützt haben. Die vielen Gespräche und Diskussionen über Methodik und über konkrete Fallbeispiele haben immer wieder für neue Denkansätze gesorgt, ohne die diese Arbeit nicht derart umfangreich geführt hätte werden können.

Prof. Dr. HANS-GEORG WEIGAND mit seinen kritischen, aber allseits konstruktiven Anmerkungen zu meinen Fortschritten. Ich wurde dadurch einerseits zu einer immer präziseren Ausschärfung meines Forschungsinteresses und andererseits zu einer umfangreichen und tiefgreifenden Analyse motiviert.

Meine Kolleg*innen, die mir mit ihrer Kreativität und Begeisterung einen so inspirierenden Einstieg in Wissenschaft und Lehre ermöglicht haben.

Meine Student*innen, die sich mit mir auf ein alternatives Veranstaltungskonzept eingelassen haben.

Meine Freund*innen – allen voran VERENA, SIMONE und SAMMY – und meine Familie, die neben allem Spaß auch immer für konstruktive Kritik gesorgt haben. Ihr seid

mein mentaler Rückzugsort, ohne den es um meine geistige Gesundheit deutlich schlechter bestellt stände.

Meine Eltern, die mir schon immer das Privileg eines sorgenfreien Lernens und Entfaltens ermöglicht haben, ohne auch nur eine einzige Bedingung zu stellen, obwohl es nicht immer einfach war.

Besonders meine Mutter ANKE, die sich immer auch für die mathematischen Dinge interessiert hat, mit denen ich nach Hause kam. Unsere nächtlichen Gespräche über Philosophie und Mathematik sind mir bis heute eine wertvolle Erinnerung; und natürlich auch für das komplette Durchlesen meiner Arbeit.

Alle anderen Korrekturleser*innen, die sich meinen sprachlichen Irrungen und Wirrungen angenommen haben.

NICOLE, die auch in den schweren Phasen Worte gefunden hat, die mich in die richtige Richtung gelenkt haben. Ich bewundere die Offenheit und das Interesse an neuen Dingen mit dem du durch die Welt gehst. Vor allem diese Eigenschaften haben auch meine eigene Arbeit und meine eigene Forschung maßgeblich positiv beeinflusst.

MORITZ, der ein solch unerschütterliches Vertrauen in mich hat, dass es unmöglich ist, daraus keine Kraft zu schöpfen. Ich schätze mich unendlich glücklich, einen Bruder zu haben, der mich einerseits bedingungslos unterstützt und zu dem ich andererseits selbst aufschauen kann – nein muss.

Danke!

FELIX

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xi
Tabellenverzeichnis	xix
Symbolverzeichnis	xxi
1. Einleitung	1
1.1. Grundlegende Ziele der Arbeit	7
1.2. Struktureller Aufbau der Arbeit	7
2. Aktueller Forschungsstand	11
2.1. Studieneingangsphase als erste Stufe der doppelten Diskontinuität	11
2.2. Relevanz fachlicher Inhalte für das Lehramtsstudium	14
2.3. Problemlösen und mathematische Arbeitsweisen bei Lernenden	20
3. Theoretischer Rahmen	23
3.1. Problemlösen als mathematische Kernkompetenz	23
3.2. Lehr-Lern-Modelle für offene und elementare Problemstellungen	48
3.3. Forschungslücke im Bereich Arbeitsweisen und Problemlösen bei Lehr- amtsstudierenden	56
4. Methodik	61
4.1. Zur Aktualität interpretativer Sozialforschung und qualitativer For- schungsmethoden	63
4.2. Descriptive Coding	66
4.3. Qualitative Inhaltsanalyse	67
4.4. Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING	70
4.5. Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ	74
4.6. Grounded Theorie	84
4.7. Methodischer Ablauf der vorliegenden Studie	85
4.8. Kriterien der Güte bei qualitativer Forschung	94

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung	103
5.1. Algebraische Themen im bayerischen Lehrplan für Gymnasien	104
5.2. Anforderungen an algebraische Inhalte im Staatsexamen für Gymnasium	106
5.3. Diskussion der Einflussfaktoren auf relevante algebraische Themen in der gymnasialen Lehramtsausbildung	108
5.4. Zahlen und Zahlenbereiche	111
5.5. Quadratische Gleichungen in zwei Variablen	169
5.6. Fragestellungen zur Bearbeitung im Seminarkonzept	190
6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen	195
6.1. Seminarkonzept und Materialauswahl	195
6.2. Inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse	196
6.3. Evaluative Inhaltsanalyse	219
6.4. Typenbildende Inhaltsanalyse	229
7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung	237
7.1. Prozessorientierte Merkmale	237
7.2. Fachliche Merkmale	243
7.3. Sonstige Merkmale	252
7.4. Einzelfallbetrachtungen	257
8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen	285
8.1. Checkliste zur internen Studiengüte nach KUCKARTZ und RÄDIKER . .	285
8.2. Intercoder-Übereinstimmung	292
8.3. Qualitative Güte der evaluativen Inhaltsanalyse	295
9. Fazit	297
10. Ausblick	305
A. Grundlegende Definitionen zu algebraischen Strukturen	309
B. Abbildungen und Tabellen	313
C. Codierleitfäden der unterschiedlichen qualitativen Inhaltsanalysen	341
C.1. Inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse	341
C.2. Evaluative Inhaltsanalyse	349
Literatur	351

Abbildungsverzeichnis

3.1. Verwandtschaft der Kategorien von STILLER et al. und den Phasen des Problemlösens nach PÓLYA. (STILLER et al., 2021, S. 225)	41
4.1. Allgemeiner Ablaufplan einer qualitativen Inhaltsanalyse.	69
4.2. Allgemeiner Ablaufplan einer qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING. (MAYRING, 2022, S. 61)	72
4.3. Konkrete Schritte innerhalb der einzelnen Analysetechniken von Mayring: Zusammenfassung (türkis), Explikation (rot), Strukturierung (gelb). (MAYRING, 2022, S. 69, 90, 97)	73
4.4. Allgemeiner Ablaufplan einer qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 106)	78
4.5. Ablaufplan einer inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 132)	79
4.6. Ablaufplan einer evaluativen qualitativen Inhaltsanalyse. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 159)	81
4.7. Ablaufplan einer typenbildenden qualitativen Inhaltsanalyse. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 186)	83
4.8. Allgemeiner Ablauf der vorliegenden Studie.	86
4.9. Methodischer Ablauf der Analyse der zu behandelnden Inhaltsbereiche. .	88
4.10. Analyseformen innerhalb der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 147).	91
4.11. Analyseformen innerhalb der evaluativen Inhaltsanalyse (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 167).	93
4.12. Konkreter Ablauf der qualitativen Inhaltsanalysen.	95
5.1. Anzahl Codes algebraischer Themen pro Jahrgangsstufe in den Fachlehrplänen des bayerischen Mathematiklehrplans für Gymnasien mit Hervorhebung der Kategorie <i>Implizite Anwendung der Algebra als Hilfsmittel</i> . .	106
5.2. Verbindungen zwischen schulischer (links) und universitärer Algebra (rechts) mittels der Themenfelder <i>Zahlenbereiche</i> (rot), <i>endliche Gruppen</i> (blau), <i>Galoistheorie</i> (gelb) und <i>Kegelschnitte</i> (grün).	109

5.3. Konstruktion einer Strecke der Länge $2 = 1 + 1$ aus zwei Strecken der Länge 1.	143
5.4. Konstruktion einer Strecke der Länge $n \cdot 1$ aus einer Strecke der Länge 1.	143
5.5. Konstruktion einer Strecke der Länge $a + b$ aus Strecken der Länge a und b .	144
5.6. Konstruktion einer Strecke der Länge $a - b$ aus Strecken der Länge a und b für $a \geq b$	145
5.7. Mögliche Konstruktion einer Strecke der Länge $a - b$ aus Strecken der Länge a und b für $a < b$	145
5.8. Veranschaulichung der Gleichung $(a + b) - b = (a - b) + b$ für $a \geq b$. . .	146
5.9. Problematik der Gleichung $(a + b) - b = (a - b) + b$ für $a < b$	146
5.10. Geometrische Veranschaulichung des Assoziativgesetzes $a - (b + c) = (a + b) - c$ für $b + c < a$	147
5.11. Konstruktion einer Strecke der Länge $a \cdot b$ aus den Strecken der Länge a und b	148
5.12. Konstruktion einer Strecke der Länge $a : b$ aus den Strecken der Länge a und $b \neq 0$	148
5.13. Konstruktion einer Strecke der Länge $\sqrt{2}$ mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks und Strecken der Länge 1.	150
5.14. Konstruktion einer Strecke der Länge \sqrt{n} mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks und Strecken der Länge 1 und $\sqrt{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$	151
5.15. Konstruktion einer Strecke der Länge \sqrt{a} aus einer gegebenen Strecke der Länge a mit Hilfe des Höhensatzes und des Satz des THALES.	151
5.16. Konstruierte Differenz zweier Strecken der Länge a und b einmal als $a - b$ und einmal als $b - a$	152
5.17. Einführung einer Richtung bei den Operationen Addition und Subtraktion.	153
5.18. Resultierende Zahlenbereiche nach Einführung einer Richtung bei den Operationen Addition und Subtraktion.	154
5.19. Darstellung der Konstruktionen der Multiplikation der drei neuen Fälle, die aus dem Ansatz einer Richtung einer Zahl entstehen.	154
5.20. Geometrische Veranschaulichung des Falles $a + (b - c) = (a + b) - c$ für $a \geq c \geq b$	155
5.21. Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + bx = c$	161
5.22. Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = bx + c$	161
5.23. Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + c = bx$ (Lösung 1).	162
5.24. Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + c = bx$ (Lösung 2).	163
5.25. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene. Gegebene Punkte sind schwarz, neu konstruierte Punkte weiß markiert (KARPFINGER & MEYBERG, 2017, S. 294).	165

5.26. Doppelkegel (links) und Kreiszyylinder (rechts) als Teilmengen des \mathbb{R}^3 . . .	170
5.27. Beispielhafte Darstellung eines Koordinatenwechsels in \mathbb{R}^2	173
5.28. Affine Typen von Quadriken in \mathbb{R}^2 . In grau sind zusätzlich die allgemeineren euklidischen Normalformen angegeben. $(a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	178
5.29. Mittelpunkt einer Quadrik in \mathbb{R}^2	179
5.30. Mengen der Mittelpunkte (blau) der affinen Typen in \mathbb{R}^2	182
6.1. Übersicht über das entstandene Kategoriensystem der inhaltlich- strukturierenden Inhaltsanalyse.	197
6.2. Anzahl codierter Segmente nach Hauptkategorien.	198
6.4. Anzahl codierter Segmente nach Subkategoriegruppen.	199
6.5. Anzahl codierter Segmente nach Subkategorien.	199
6.7. Vergleich der Hauptkategorien mit den Phasen des Problemlösens nach PÓLYA.	201
6.10. Absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Semester (türkis: SoSe 22, rot: WiSe 22/23, gelb: SoSe 23).	205
6.11. Relative Anzahlen codierter Segmente pro Student*in nach Hauptkatego- rien pro Semester (türkis: SoSe 22, rot: WiSe 22/23, gelb: SoSe 23). . . .	205
6.12. Skalierte absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Semester (türkis: SoSe 22, rot: WiSe 22/23, gelb: SoSe 23).	206
6.13. Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Inhaltsbereich (türkis: „Zahlenbereiche“, gelb: „Quadratische Gleichungen in zwei Varia- blen“). Es sind die absoluten Anzahlen (oben), pro Inhaltsbereich relativen Anzahlen (mitte) und skalierten Anzahlen (unten) dargestellt.	208
6.14. Absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Student*in.	209
6.15. Absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Stu- dent*in mit farblicher Hervorhebung von wenig umfangreichen Bearbei- tungen.	210
6.16. Skalierte absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Student*in.	211
6.17. Skalierte absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Student*in mit farblicher Hervorhebung von ähnlichen Verteilungen. . .	212
6.18. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Äußere Form und Dokumentation</i> nach Proband. . .	215
6.19. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Problemspezifische fachmathematische Techniken</i> nach Proband.	216

6.20. Absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Problemspezifische fachmathematische Techniken</i> pro Arbeitsauftrag.	218
6.21. Mittelwerte der Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse über alle Probanden.	220
6.22. Mittelwerte der Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse (links) und absolute Anzahlen codierter Segmente nach Subkategoriegruppen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse (rechts) über alle Probanden. Die Anordnung der Subkategoriegruppen links folgt der Anordnung aus Abbildung 6.21. Die Anordnung rechts ist von links nach rechts entsprechend der Anordnung aus Tabelle 6.6 gegeben.	221
6.23. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband.	222
6.24. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von wenig umfangreichen Bearbeitungen.	223
6.25. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Probanden mit Fokus auf konkreter Problemlösung.	224
6.26. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Probanden mit teilweise planenden Schritten.	225
6.27. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Probanden mit teilweise reflexiven Überlegungen.	226
6.28. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Sonderfällen.	227
6.29. Anzahl der mit jeweils einem Typ codierten Probanden.	230
6.32. Evaluative Ausprägung (links) und Ausprägungsverlauf über die sieben Arbeitsaufträge des Merkmals <i>Überlegungen zum Vorgehen</i> (rechts) bei Proband #25.	232
6.33. Ausprägungsverläufe der Merkmale <i>Allgemeinere mathematische Techniken</i> (links), <i>Beispielgebundenes Vorgehen</i> (mittig), <i>Einordnung von Ergebnissen</i> (rechts) bei Proband #25.	232
6.34. Evaluative Ausprägung bei Proband #07 (links) und #24 (rechts).	233
6.35. Evaluative Ausprägung bei Proband #22.	233
7.1. Beispielhafter Verlauf der Ausprägungen der Merkmalsdimensionen über alle Arbeitsaufträge von Proband #01 mit Legende zur Farbgebung.	238
7.2. Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #14, #18 und #19 als Beispiele für vereinzelte Spitzen in Typ 1.	239

7.3. Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #06, #07 und #08 als Beispiele für Einbrüche bei den Arbeitsaufträgen 4 und 7 in Typ 2.	240
7.4. Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #01, #10 und #20 als Beispiele für ausbleibende größere Einbrüche bei den Arbeitsaufträgen 4 und 7 in Typ 3.	240
7.5. Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #13 und #22 als Beispiele für ausbleibende größere Einbrüche bei den Arbeitsaufträgen 4 und 7 in Typ 6.	240
7.7. Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #09 und #25 als Beispiele für relativ konstante Ausprägungen der Merkmalsdimension <i>Allgemeinere mathematische Techniken</i>	242
7.8. Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #03, #15 und #23 als Beispiele für relativ stark schwankende Ausprägungen der Merkmalsdimension <i>Problemspezifische fachmathematische Techniken</i>	242
7.9. Ausprägungsverläufe der Arbeitsweise <i>Allgemeinere mathematische Techniken</i> der einzelnen Probanden mit Kennzeichnung von keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung.	244
7.10. Ausprägungsverläufe der Arbeitsweise <i>Beispielgebundenes Vorgehen</i> der einzelnen Probanden mit Kennzeichnung von keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung.	244
7.11. Ausprägungsverläufe der Arbeitsweise <i>Problemspezifische fachmathematische Techniken</i> der einzelnen Probanden mit Kennzeichnung von keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung.	245
7.12. Anzahl keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung der Arbeitsweise <i>Allgemeinere mathematische Techniken</i>	246
7.13. Anzahl keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung der Arbeitsweise <i>Beispielgebundenes Vorgehen</i>	246
7.14. Anzahl keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung der Arbeitsweise <i>Problemspezifische fachmathematische Techniken</i>	246
7.15. Relative Ausprägung gewinnbringender Verwendung der Arbeitsweise <i>Allgemeinere mathematische Techniken</i> innerhalb der Typen pro Proband pro Arbeitsauftrag.	247
7.16. Relative Ausprägung gewinnbringender Verwendung der Arbeitsweise <i>Beispielgebundenes Vorgehen</i> innerhalb der Typen pro Proband pro Arbeitsauftrag.	248

7.17. Relative Ausprägung gewinnbringender Verwendung der Arbeitsweise <i>Problemspezifische fachmathematische Techniken</i> innerhalb der Typen pro Proband pro Arbeitsauftrag.	248
7.19. Anzahl Gesamtfachnoten nach Typen.	250
7.20. Anzahl Fachnoten nach Arbeitsaufträgen.	251
7.22. Fachsemester der Student*innen nach Typen.	253
7.23. Zweitfächer der Student*innen nach Typen.	254
7.24. Geschlechtsidentität nach eigener Angabe der Student*innen nach Typen.	255
8.1. Intercoder-Übereinstimmung der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsana- lyse bei unterschiedlichen Toleranzgrenzen der Bewertung von überein- stimmend codierten Segmenten.	293
8.2. Vergleich der Ergebnisse zur Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband. Oben immer die Gesamtbewertung, unten die Mittelwerte der Einzelbewertungen.	296
B.1. Absolute Anzahlen codierter Segmente der ersten Hauptkategorie <i>Planung und Strukturierung</i> nach entsprechenden Subkategorien.	313
B.2. Absolute Anzahlen codierter Segmente der zweiten Hauptkategorie <i>Strat- egien der Durchführung</i> nach entsprechenden Subkategorien.	314
B.3. Absolute Anzahlen codierter Segmente der dritten Hauptkategorie <i>Refle- xion und Einordnung</i> nach entsprechenden Subkategorien.	315
B.4. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Überlegungen zum Vorgehen</i> nach Proband.	316
B.5. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Allgemeinere mathematische Techniken</i> nach Proband.	317
B.6. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Beispielgebundenes Vorgehen</i> nach Proband.	318
B.7. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Externe Hilfsmittel heranziehen</i> nach Proband.	319
B.8. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Einordnung von Ergebnissen</i> nach Proband.	320
B.9. Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe <i>Personenbezogene Überlegungen</i> nach Proband.	321
B.10. Legende der Farbgebung für die nachfolgenden Abbildungen.	322
B.11. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #01. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.	322

B.12. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #02. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	323
B.13. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #03. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	323
B.14. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #04. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	324
B.15. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #05. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	324
B.16. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #06. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	325
B.17. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #07. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	325
B.18. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #08. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	326
B.19. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #09. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	326
B.20. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #10. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	327
B.21. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #11. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	327
B.22. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #12. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	328
B.23. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #13. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	328
B.24. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #14. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	329
B.25. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #15. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	329
B.26. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #16. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	330
B.27. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #17. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	330
B.28. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #18. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	331
B.29. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #19. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	331
B.30. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #20. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	332

B.31. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #21. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	332
B.32. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #22. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	333
B.33. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #23. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	333
B.34. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #24. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	334
B.35. Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #25. Farbgebung gemäß Abbildung B.10. . .	334
B.36. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband (Gesamtbeurteilung).	335
B.37. Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband (Mittelwerte der Einzelfallbewertungen).	336

Tabellenverzeichnis

4.13. Checkliste zur internen Güte einer qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ und RÄDIKER (2022, S. 236f.)	98
6.3. Anzahl codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Proband.	198
6.6. Anzahl codierter Segmente nach Hauptkategorien, Subkategoriegruppen und Subkategorien pro Proband.	200
6.8. Gegenüberstellung der Subkategorien bzw. Subkategoriegruppen und den Problemlösestrategien nach BRUDER und BAUER (ehem. COLLET).	201
6.9. Gegenüberstellung der Subkategorien bzw. Subkategoriegruppen und den Problemlösestrategien nach STILLER et al. und SCHWARZ.	202
6.30. Zuordnung der Probanden zu den Typen.	230
6.31. Gegenüberstellung der Mustererkennung in der evaluativen Inhaltsanalyse und der Codierung der typenbildenden Inhaltsanalyse.	231
7.6. Durchschnittliche mittlere Ausprägung und Abweichung innerhalb der einzelnen Typen.	241
7.18. Fachliche Bewertung der Bearbeitungen nach Proband.	249
7.21. Fachliche Bewertung der Bearbeitungen nach Student*in sortiert nach den Typen der qualitativen Inhaltsanalyse.	252
B.38. Ausprägungen der evaluativen Kategorien aller Arbeitsaufträge der einzelnen Probanden.	337
B.39. Mittelwerte der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über alle Arbeitsaufträge der einzelnen Probanden.	338
B.40. Empirische Varianzen der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über alle Arbeitsaufträge der einzelnen Probanden.	339

Symbolverzeichnis

\forall	Allquantor für „für alle“
\exists	Existenzquantor für „es existiert“
\wedge bzw. \vee	Konjunktion bzw. Disjunktion
\Rightarrow bzw. \Leftrightarrow	Implikation bzw. Äquivalenz
\rightarrow bzw. \mapsto	Abbildungsrichtung bzw. Abbildungszuordnung
\emptyset	Leere Menge
\subsetneq, \subseteq	(Echte) Teilmenge
\cup bzw. \cap	Vereinigungs- bzw. Durchschnittsmenge
\in	Element von ...
$A \setminus B$	Differenzmenge
$A \times B$	Kartesisches Produkt
\mathbb{N}_0, \mathbb{N}	Die Menge der natürlichen Zahlen (0,)1, 2, 3, ...
\mathbb{Z}	Die Menge der ganzen Zahlen ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
\mathbb{Q}	Die Menge der rationalen Zahlen, z. B. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \dots$
\mathbb{R}	Die Menge der reellen Zahlen, z. B. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \dots$
$\mathbb{Z}^0, \mathbb{Q}^0, \mathbb{R}^0$	Entsprechender Zahlenbereich ohne Null
\mathbb{C}	Die Menge der komplexen Zahlen, z. B. $\sqrt{-1}, 2 + 3i, e^{\frac{2\pi i}{3}}, \dots$
\mathbb{H}	Die Menge der HAMILTON-Zahlen oder Quaternionen
i, j, k	Imaginäre Einheit(en)
$\operatorname{Re}(z)$	Realteil der komplexen Zahl z
$\operatorname{Im}(z)$	Imaginärteil der komplexen Zahl z
\bar{z}	Konjugierte komplexe Zahl zu z
$\det(A)$	Determinante der Matrix A
$\operatorname{Spur}(A)$	Spur der Matrix A
$T(B, B')$	Transformationsmatrix des Basiswechsels B nach B'
$\operatorname{Grad}(f)$	Grad des Polynoms f
A/B	Faktorstruktur A modulo B
$[L : K]$	Grad der Körpererweiterung L über K

1. Einleitung

„Sobald Einsicht und Verstehen ins Spiel kommen, reicht es nicht mehr aus, beim lernenden Menschen nur die fachlichen Kompetenzen zu fördern, sondern man muss sich [...] auch um seine motivationalen und emotionalen Grundlagen kümmern.“ (GALLIN, 2010, S. 4)

So argumentiert PETER GALLIN im Einklang mit WEINERT (2013) für einen (Schul-)Unterricht der Mathematik als Geisteswissenschaft. Nicht nur in der heutigen Zeit befindet sich die Schulmathematik oftmals in einer defensiven Position der Rechtfertigung ihrer – meist herausragenden – Stellung in der schulischen Allgemeinbildung. Es wird dann vorrangig auf die Nützlichkeit der Mathematik im Hinblick auf andere Bezugswissenschaften eingegangen – man denkt hier überwiegend an Naturwissenschaften wie Physik, Chemie oder Biologie, wenngleich neuerdings die Informatik, aber auch die Medizin sowie Sozial- und Wirtschaftswissenschaften aufgeführt werden. Die Mathematik ist jedoch viel weiter zu sehen und insbesondere besitzt sie als eigenständige Wissenschaft eine eigene implizite Daseinsberechtigung mit einem eigenen Anspruch auf Nützlichkeit und Schönheit. HEINRICH WINTER formuliert dies in einem didaktischen Kontext sehr treffend:

„[Es] ist nicht einzusehen, inwiefern ausschließlich auf die Meisterung von Situationen im späteren Leben hin erzogen werden soll. Das spätere Leben bietet doch wahrscheinlich nicht nur eine ununterbrochene Kette von Problemen, die eine beständige und auf Erfolg ausgerichtete angespannte Aktivität erfordern. Müssen wir nicht auch in die Fähigkeit zum gelassenen Betrachten, zur Kontemplation, ja zum Träumen zu erziehen versuchen?“ (WINTER, 2016, S. 31)

Nun liegt aber vermutlich gerade in der Erklärung, was denn die Mathematik als eigenständige Wissenschaft ausmacht, der Kern der oben beschriebenen Problematik. Es schreibt zum Beispiel IAN STEWART:

„Eines der größten Probleme der Mathematik besteht darin, jemand anderem zu erklären, worum es in ihr geht. Die technischen Fallen ihres Themas, ihre Symbolik und peinliche Genauigkeit, ihre verwirrende Terminologie, ihre

1. Einleitung

scheinbare Lust an langatmigen Rechnungen: dies alles scheint ihre wirkliche Natur zu verdunkeln.“ (STEWART, 1990, S. 15)

Dieses scheinbare Unvermögen der Mathematik, sich selbst zu erklären, mündet dann in obigen Rechtfertigungen als Hilfswissenschaft und einer damit einhergehenden Reduktion zum Werkzeugkasten. In den vielen anderen Wissenschaften, in denen die Mathematik ja tatsächlich Anwendung findet, wird diese nun als Hürde empfunden, die nach einmaligem Überwinden schließlich ignoriert werden kann. Man denke hier an die für die Mathematik so dramatische Aussage:

« Ich war in Mathe früher auch schlecht und sieh, was aus mir geworden ist. »

Derartige Äußerungen sind häufiger in gesellschaftlichen Kontexten – zumindest implizit – anzutreffen (siehe u. a. SPIEGEL, 2009). Gerade für mathematiknahe Personen drängt sich bei derartig formulierten Sätzen sofort der Kommentar auf, dass hier eine Ergänzung in der Formulierung durch das Wort « trotzdem » angebracht wäre. Es ist (sprachliche) Genauigkeit in der Mathematik wegen des streng logischen Aufbaus als Kernelement mathematischen Arbeitens zu sehen. Die scheinbare Unverschämtheit obiger Aussagen ist für die betroffene Mathematik sicherlich unangenehm und schwer zu begreifen, aber andererseits auch schlicht zu akzeptieren. So lässt sich Respekt schlecht einfordern als vielmehr verdienen. Das Unverständnis dafür, dass die Mathematik gerade als bereits beschriebene Hilfswissenschaft eben auch einen Garant für einen gewissen Erfolg außerhalb der Mathematik darstellen kann, wiegt da schon schwerer. Zeigt es doch, dass die Natur der Mathematik und damit ihre grundlegende Relevanz für andere Wissenschaften eben auch nicht verstanden wird. Auch als Mathematiker*in sollte man gerade diese Nützlichkeit der Mathematik nicht vergessen, wie es HANS FREUDENTHAL anschaulich formuliert:

„Man kann sich für Zahlentheorie, algebraische Geometrie und Kategorien begeistern und doch einsehen, wie unendlich ärmer die Mathematik ohne die Anregungen wäre, die ihr von den Anwendungen her zugeflossen sind. [...] Man muß eher sagen: sie wäre nicht, wenn sie nicht nützlich wäre.“ (FREUDENTHAL, 1973, S. 24)

Idealerweise stünde man jedoch für ein noch tieferes Verständnis der Natur der Mathematik im allgemeinbildenden Kontext ein. Damit einhergehend ergäbe sich automatisch insbesondere die Kompetenz zur Bewertung der Anwendbarkeit der Mathematik. Diesen Anspruch an eine Allgemeinbildung erhebt zumindest die Mathematik an sich selbst.

„Ich würde von einem Nichtmathematiker durchaus nicht verlangen, daß er ohne Hilfe das Kartenkunststück durchsehe. Aber wenn Intellektuelle,

die ein bißchen Mathematik in ihrem Schulranzen gehabt haben, auf solch ein Kartenkunststück reagieren, als ob es ein Zauberkunststück oder eine empirische Zufälligkeit wäre, so ist das doch viel weniger als man verlangen kann. Sie demonstrieren, daß ihnen von ihrer Schulmathematik her keine Idee erwächst, was für Probleme mathematischer Behandlung zugänglich sind, und das zeugt nicht gerade von der Mathematik als einer *disziplina mentis*. Es darf uns aber nicht verwundern, denn sie haben Mathematik nicht als eine Tätigkeit des Problemlösens gelernt – es sei denn des Problemlösens nach festen Regeln.“ (FREUDENTHAL, 1973, S. 93f.)¹

Sieht man nun diesen Anspruch der Mathematik an die Allgemeinbildung, wie sie in der Schule zu vermitteln ist, so ergibt sich als Konsequenz, dass gerade den Mathematiklehrkräften die Aufgabe zukommt, ein derartiges Verständnis für die Mathematik zu vermitteln. Im Umkehrschluss müssen Mathematiklehrkräfte selbst ein derartiges Verständnis aufweisen, wenn man sie als Botschafter*innen der Mathematik verstehen möchte. Es zeigt sich die kontrovers diskutierte Verortung von Lehrkräften im Spannungsfeld zwischen Fach, Fachdidaktik und Pädagogik, die sich insbesondere in einer ökonomischen Konzeption der Lehramtsausbildung niederschlägt. BAUER und HEFENDEHL-HEBEKER (2019) beschreiben ein sogenanntes *Literacy*-Modell für fachmathematisches Wissen, welches an ähnliche Modelle aus den Sprachwissenschaften angelehnt ist. Sie skizzieren dort vier Stufen für derartiges Wissen: *Everyday Literacy*, *Applied Literacy*, *Theoretical Literacy* und *Reflexive Literacy*. Unter der *Everyday Literacy*-Stufe verstehen sie dabei jegliche Elemente der Mathematik, die im alltäglichen gesellschaftlichen Kontext ersichtlich und anwendbar sind. Die *Applied Literacy*-Stufe stellt die Mathematik als angewandte Hilfswissenschaft dar, wobei auch innermathematische Anwendungen gemeint sind. Die *Theoretical Literacy*-Stufe zeigt sich insbesondere in der formalen Darstellung der Mathematik, wie sie bspw. in Lehrbüchern und mathematischen Veröffentlichungen vorkommt. Die *Reflexive Literacy*-Stufe beschreibt schließlich die Kultur und das Wesen der Mathematik als Wissenschaft selbst. Darin sind vor allem gängige Arbeitsweisen und typische Vorgänge, aber auch eine Bewertung hinsichtlich Nützlichkeit und Schönheit oder Eleganz angedacht. Im Einklang mit den obigen Überlegungen fordern auch BAUER und HEFENDEHL-HEBEKER, dass gerade Lehramtstudierende in ihrer universitären Ausbildung diese vierte *Reflexive Literacy*-Stufe erreichen sollten. Sie merken aber zugleich an, dass selbige tendenziell auf der *Theoretical Literacy*- wenn nicht sogar auf der *Applied Literacy*-Stufe verbleiben (BAUER & HEFENDEHL-HEBEKER,

¹Das im vorliegenden Zitat angesprochene Kartenkunststück behandelt das Legen von Kartenmustern, die durch Zeilen und Spalten festgelegt werden können. Die Identifikation einer korrekten Karte geschieht dann nicht in einem tatsächlich mathematischen Sinne. Die Systematik ist für Menschen mit mathematischem Hintergrund aber leicht zu durchschauen.

1. Einleitung

2019, S. 14ff.). Dieser Eindruck vertieft sich in der Betrachtung typischer Aussagen von Lehramtsstudierenden in fachlichen Veranstaltungen. Das nachfolgende Zitat einer Studentin aus einer Lehrveranstaltung zur höheren Algebra im Kontext des *Chinesischen Restsatzes* kann dafür exemplarisch gesehen werden:

„[...] Dann hatten wir ein Verfahren bei dem wir einfach rechnen konnten. Das hat mir wieder mehr Spaß gemacht. Das war dann wie in der Schule. Diese [Schul-]Mathematik macht mir mehr Spaß. [...]“

Nun sind derartige Aussagen zwar öfter von Lehramtsstudierenden gerade im Bezug auf die höhere Mathematik aus deren fachlichen Lehrveranstaltungen zu hören und trotzdem in dieser Form aus dem Kontext gerissen und tendenziell populistisch dargestellt. In den meisten Fällen relativieren die Studierenden die Härte dieser Aussagen im Nachhinein selbst oder ordnen sie argumentativ hinsichtlich ihrer späteren Schulpraxis ein. Diese Studierenden stehen auch selbst nur selten für einen überzeugt rein kalkülorientierten Schulunterricht und betonen ebenfalls die Wichtigkeit von eigenem Entdecken und die Existenz von Mathematik abseits der einfachen Anwendung von auswendig gelernten Verfahren. Dennoch zeigt sich hier aus Sicht von Lehramtsstudierenden eine Diskrepanz zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik. Bereits 1908 wird diese Diskrepanz von FELIX KLEIN als *doppelte Diskontinuität* in der Lehramtsausbildung beschrieben:

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbstständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.“ (KLEIN, 1968, S. 1)

Es werden hier zwei Übergänge als die namensgebende doppelte Diskontinuität angegeben: Der Übergang von der Schule an die Hochschule und der Übergang von der Hochschule zurück an die Schule. Während sich zu Beginn eines Mathematikstudiums die erste Diskontinuität tendenziell bei allen Studierenden einstellen kann, ergibt sich die zweite Diskontinuität speziell für Lehramtsstudierende. Trotz dessen, dass die doppelte Diskontinuität nun bereits vor über hundert Jahren formuliert wurde, gilt sie heute noch

als eines der zentralen Probleme in der Lehramtsausbildung – insbesondere in der fachlichen Ausbildung von zukünftigen Lehrkräften der gymnasialen Oberstufe (ABLEITINGER et al., 2013; BAUER & HEFENDEHL-HEBEKER, 2019).

Die doppelte Diskontinuität zeigt sich in unterschiedlichen Kontexten. Für die erste Diskontinuität – also den Übergang Schule-Hochschule – wären da zum einen Dozierende aus den Fachwissenschaften zu nennen, die vermehrt fachliche Defizite bei Studienanfänger*innen bemängeln (ARTIGUE, 2001; BREIDENBACH et al., 1992; de GUZMÁN et al., 1998; HEFENDEHL-HEBEKER, 2013; HOYLES et al., 2001; KAJANDER & LOVRIC, 2005; ORTON, 1983), was sich auch in den Ergebnissen von diversen Studieneingangstests widerspiegelt (BERGER & SCHWENK, 2006). Es ist hier jedoch einschränkend zu erwähnen, dass empirische Untersuchungen zu einem generellen Trend hin zu einer Verschlechterung der Leistung von Schulabgänger*innen über die letzten Jahrzehnte zu keinem übereinstimmenden Ergebnis kommen (BUSCHHÜTER et al., 2016; WEINHOLD, 2013). Zum anderen legen auch die Studierenden selbst durch hohe Studienabbruchquoten in Studiengängen mit hohem mathematischen Anteil diese Diskrepanz nahe (DIETER, 2012; DIETER & TÖRNER, 2012; HEUBLEIN et al., 2014, 2020, 2022; NEUGEBAUER et al., 2019). Diese Merkmale lassen sich in einer institutionellen Dimension der ersten Diskontinuität zusammenfassen. Die Studienanfänger*innen sind beim Übertritt an die Hochschule mit bspw. epistemologischen, kognitiven und didaktischen Anforderungen, aber auch soziokulturellen Veränderungen im eigenen Umfeld konfrontiert (BORNKESSEL & ASDONK, 2011; CLARK & LOVRIC, 2009; DI MARTINO & GREGORIO, 2019; DI MARTINO et al., 2023; KÜHNEL & WALCHER, 2017). Diese Herausforderungen sind zwar prinzipiell nicht auf die Mathematik oder mathematische Studiengänge beschränkt, die fachübergreifend höchste Studienabbruchquote in der Mathematik mit teilweise über 50 % (HEUBLEIN et al., 2020, 2022) spricht jedoch dafür, dass sich diese in der Mathematik in besonderem Maße äußern. Dabei nennen die Studierenden als Gründe für einen Studienabbruch in einem mathematischen oder naturwissenschaftlichen Studiengang am häufigsten eine Überforderung hinsichtlich zu erbringender Leistung, motivationale Gründe und anfänglich falsche Erwartungen an den eigenen Studiengang (DIETER, 2012; HEUBLEIN et al., 2014). Es zeigt sich eindrücklich, wie unterschiedlich die Mathematik an der Schule und die universitäre Mathematik von Lernenden gerade in den ersten Semestern wahrgenommen wird.

Zur Absenkung der ersten Diskontinuität ist ein breites Feld an zusätzlichem, unterstützendem und alternativem Lehrangebot – oftmals in Form von Vor- und Brückenkursen, Mentoring-Programmen und digitalen Unterstützungsangeboten – entstanden (BAUSCH, BIEHLER et al., 2013; BIEHLER et al., 2021; HOCHMUTH et al., 2023). Die Mathematik als Wissenschaft kann hingegen selbst wenig an den eigenen Fachgebieten und damit an den zu vermittelnden fachlichen Inhalten ändern. Inwiefern dies außerhalb des Mathematik-

1. Einleitung

studiums – also insbesondere im Lehramt – ebenfalls so festgeschrieben ist, ist zumindest fraglich. Im Lehramt zeigt sich dies anhand einer immer größer werdenden Zahl an lehramtsspezifischen Fachveranstaltungen und speziellen Lerngelegenheiten zur Verknüpfung von universitären Fachinhalten mit schulischen Inhalten (HALVERSCHEID et al., 2022; ISAEV et al., 2021) sowie diversen Programmen zur Thematisierung eines praxisbezogenen Studiums (BIEHLER et al., 2021). Die Behandlung der zweiten Diskontinuität ist neben derartiger alternativer Lehrveranstaltungen noch eher weniger angegangen worden. Die didaktische Forschung beschränkt sich derzeit größtenteils auf die Untersuchung von Überzeugungen und fachdidaktischen Kompetenzen von Lehramtsstudierenden gegen Ende ihrer universitären Ausbildung sowie in den Anfängen ihrer Lehrtätigkeit (ISAEV, 2021).

Es lässt sich die erste Diskontinuität jedoch nicht ganzheitlich ohne die zweite Diskontinuität behandeln. Geht der Lehramtsstudierende nämlich nach seiner universitären Ausbildung zurück an die Schule und kann sein fachliches Wissen aus der Universität nicht auf seinen Unterricht anwenden, so wird dieser Unterricht erneut eine Schulmathematik vermitteln, die eine inhaltliche wie institutionelle Diskrepanz zur universitären Mathematik aufweist. Diese Diskrepanz vermag beim Übertritt an die Hochschule durch unterschiedliche Zusatzangebote abgeflacht werden, jedoch wird sich die universitäre Mathematik kaum inhaltlich der Schulmathematik zuwenden können. Nachhaltiger und wünschenswerter wäre hier sicherlich eine Annäherung der Schulmathematik an die universitäre Mathematik, womit Lehrkräften augenscheinlich die Aufgabe der letztendlichen Auflösung der doppelten Diskontinuität in der gymnasialen Lehramtsausbildung zukommt. Damit dies gelingen kann und die zukünftigen Lehrkräfte dieser Herausforderung gewachsen sind, gilt es, diese fachlich, aber auch im Sinne kulturell-mathematischer und motivationaler Überlegungen auszubilden (BAUER & HEFENDEHL-HEBEKER, 2019; GALLIN, 2010; WINTER, 1996).

Doch was macht nun die Mathematik aus? Es beschreibt STEWART humoristisch den Kern der Mathematik als das *Lösen von Problemen* (1990, S. 13). Auch in der Schulmathematik nimmt das *Problemlösen* als zu vermittelnde Kernkompetenz eine herausragende Stellung ein (ISB, n. d. b; KMK, 2012). Man kann darin – einmal abgesehen von fachlichen Inhalten – erkennen, dass die Schulmathematik und die universitäre Mathematik eben doch eine gemeinsame Mathematik beschreiben möchten. Fordert man von Lehramtsstudierenden in ihrem späteren Lehrberuf, dass sie ein authentisches Bild dieser Mathematik zeichnen und vermitteln können, so muss man sich demnach zwangsweise mit den fachlichen Inhalten der universitären Mathematik und zusätzlich mit den Arbeitsweisen und Motivationen der Mathematik als Wissenschaft beschäftigen. Insbesondere stellt sich die Frage, wie sehr die fachliche und didaktische Ausbildung

Lehramtsstudierende selbst dazu befähigt, mathematische Probleme – auf schulischem, wie auf universitärem Niveau – zu lösen.

1.1. Grundlegende Ziele der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird eine Studie vorgestellt, die das Ziel hat, in einem explorativen und beschreibenden Design mathematische Arbeitsweisen von Studierenden des gymnasialen Lehramts zu untersuchen. Damit soll eine Grundlage zur Beschreibung der aus den fachlichen Veranstaltungen entwickelten Kompetenzen hinsichtlich einem Verständnis für das Wesen der Mathematik geschaffen werden. Aus diesem Grund wird der Fokus auf Studierende im höheren Semester gelegt, die bereits einige Erfahrung mit der universitären Mathematik aufweisen. Hier kann ein bereits stattgefundener universitärer Einfluss erwartet werden. Zu den Wesenszügen der Mathematik zählt insbesondere das Problemlösen, das sich in den Arbeitsweisen zeigen soll. Um diese Arbeitsweisen möglichst unverfälscht beobachten zu können, wird auf jegliche didaktische und methodische Instruktion der Studierenden verzichtet. Auch die Verwendung von beliebigen Hilfsmitteln wird ausdrücklich erlaubt und nicht eingeschränkt, womit insbesondere dem unterschiedlichen Vorwissen der Studierenden entgegen gekommen wird. Insgesamt soll damit eine Problemsituation konstruiert werden, die einer realen mathematischen Problemsituation möglichst nahe kommt. Um hierbei den fachlichen Anforderungen gerecht zu werden, die man an Lehramtsstudierende stellen kann, werden elementare mathematische Themen betrachtet, die einen Bezug zur Schulmathematik aufweisen. Es wurde sich für das Fachgebiet der *Algebra* entschieden.

1.2. Struktureller Aufbau der Arbeit

Es wurde eine klassische Struktur für den Aufbau der Arbeit gewählt. In den Kapiteln 2 und 3 wird zunächst der theoretische Rahmen festgelegt. Kapitel 2 stellt den aktuellen Forschungsstand rund um das Problemfeld der doppelten Diskontinuität in der Lehramtsausbildung dar. In Kapitel 3 werden dann ausführlich gängige theoretische Modelle zum Problemlösen und Lehr-Lern-Modelle zum selbstentdeckenden Lernen vorgestellt, bevor anschließend eine Forschungslücke bei der Betrachtung von Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden im höheren Semester ausgemacht wird und die behandelten Forschungsfragen abgeleitet werden. Diese Forschungsfragen teilen die vorliegende Studie grundsätzlich in zwei Teile ein: Einen stoffdidaktischen und einen empirischen Teil.

Es folgt in Kapitel 4 eine umfangreiche Beschreibung der in der Studie verwendeten Methodik. Die vorliegende Studie ist von qualitativer Natur, weswegen insbesondere die Relevanz qualitativer Sozialforschung und darin gängige Methodiken und Methoden

1. Einleitung

vorgelegt werden. Darauf aufbauend wird vor dem Hintergrund der Forschungsfragen die Wahl der Methode begründet und der konkrete Ablauf der Studie beschrieben. Insgesamt wird die Studie entsprechend der obig beschriebenen zwei Teile in zwei methodische Abschnitte unterteilt.

Der erste Teil der Studie wird in Kapitel 5 abgebildet. Dort wird eine Analyse von Einflussfaktoren auf die Relevanz der Algebra für Lehramtsstudierende durchgeführt und die resultierenden algebraischen Themengebiete fachlich dargestellt. Abschließend werden Fragestellungen für diese Themengebiete konzipiert, die von Studierenden in einem fachlichen Seminar in einem selbstentdeckenden Setting bearbeitet werden sollen.

Kapitel 6 behandelt dann den zweiten Teil der Studie. Dort werden die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse der Bearbeitungen aus dem vorher beschriebenen Seminar vorgestellt. Die Inhaltsanalyse wird dabei in drei untergeordnete Inhaltsanalysen mit jeweils leicht unterschiedlichen Ansätzen und unterschiedlichen Zielsetzungen aufgeteilt. Diese sind aufeinander aufbauend konzipiert und werden aus diesem Grund in der vorliegenden Arbeit entsprechend nacheinander vorgestellt. Zudem wird abschließend in Kapitel 7 eine komplexe Analyse der gesamten Ergebnisse angestrebt.

Das methodische Vorgehen wird in einer Beurteilung der Studiengüte in Kapitel 8 diskutiert. Es wird dort insbesondere auf die qualitative Inhaltsanalyse und den dort verorteten Codierprozess eingegangen. Die Kapitel 9 und 10 stehen schließlich für eine abschließende Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf weiterführende Fragestellungen und Forschungsmöglichkeiten.

Teil I

Theoretischer Hintergrund und aktueller Forschungsstand

2. Aktueller Forschungsstand

In diesem Kapitel wird der aktuelle Forschungsstand rund um die universitäre Ausbildung von zukünftigen Mathematiklehrkräften dargestellt. Es wird zunächst auf die Schwierigkeiten vor bzw. zu Beginn eines Mathematikstudiums eingegangen. Die Behandlung der bereits beschriebenen doppelten Diskontinuität nach KLEIN ist einer intensiven wissenschaftlichen Untersuchung ausgesetzt. Insbesondere deshalb sind mathematische Vor- und Brückenkurse sowie begleitendes Zusatzangebot in den ersten Semestern standortübergreifend standardmäßig in mathematischen Studiengängen angedacht. Entsprechende Konzepte und empirische Untersuchungen werden hier vorgestellt. Anschließend werden Ergebnisse zu den Überzeugungen von Lehramtsstudierenden hinsichtlich der doppelten Diskontinuität skizziert. Gerade für Lehramtsstudierende zeigt sich hier unter Betrachtung des Relevanzempfindens der fachlichen Inhalte auch die zweite Stufe der doppelten Diskontinuität. Als Antwort auf diese Relevanz universitärer Mathematik für Lehramtsstudierende sind aktuell vor allem unterschiedlichste alternative Lehrkonzepte hinsichtlich Methodik und Inhalte für die fachlichen Veranstaltungen entwickelt worden. Es wird schließlich eine Forschungslücke bezüglich der Betrachtung von Arbeitsweisen vor allem von Lehramtsstudierenden identifiziert. Bevor an dieser Stelle die entsprechenden Forschungsfragen formuliert werden, wird im nachfolgenden Kapitel 3 vor allem auf theoretische Modelle zum Problemlösen eingegangen, die eine offensichtliche Verwandtschaft zur Thematik von Arbeitsweisen aufweisen. In Abschnitt 3.3 folgen schließlich die in der vorliegenden Studie behandelten Forschungsfragen.

2.1. Studieneingangsphase als erste Stufe der doppelten Diskontinuität

Das Berufsbild und das Selbstverständnis von Mathematiklehrkräften hat sich in den letzten Jahren stark verändert. Nur noch in wenigen Fällen verstehen sich diese vorrangig als Mathematiker*innen oder gar Wissenschaftler*innen. Damit einhergehend haben sich auch die Erwartungen von Lehramtsstudierenden an das Lehramtsstudium gewandelt. Insbesondere wird hier mittlerweile eine deutliche Abgrenzung zum entsprechenden Studium der Mathematik gesehen (HEFENDEHL-HEBEKER, 2013). Es „erscheint die Diagnose Felix Kleins auf neue Weise aktuell.“ (HEFENDEHL-HEBEKER, 2013, S. 2) In

2. Aktueller Forschungsstand

der Studieneingangsphase lassen sich zwei Faktoren für eine mögliche Unzufriedenheit von Lehramtsstudierenden identifizieren, wobei einer dieser Faktoren unabhängig vom Kontext des Lehramtes ist: Die unterschiedliche Wahrnehmung von schulischer und universitärer Mathematik im allgemeinen und für Lehrämter speziell die augenscheinliche Irrelevanz derart hoher abstrakter Mathematik für ihren späteren Beruf. Beide Faktoren lassen sich nicht unwesentlich auf die unterschiedliche Darstellungsform und die verschiedenen Schwerpunkte von schulischer und universitärer Mathematik zurückführen. Die schulische Mathematik ist tendenziell auf ein Kalkül orientiert, betont historische und elementare Lerngelegenheiten und wird generell eher in einem außermathematischen anwendungsorientierten Kontext am Beispiel praktiziert. Die universitäre Mathematik hingegen ist axiomatisch und abstrakt aufgebaut. Zudem entsteht hier die herausragende Stellung von (formalen) Beweisen. Diese stehen zu Beginn für Studierende oftmals konträr zu den bildhaften Begründungen aus der Schule, die zusätzlich meist nur an Spezialfällen entwickelt werden. Universitäten begegnen diesen Schwierigkeiten mit Vor- und Brückenkursen auf der einen Seite sowie begleitendem und zusätzlichem Lehr- und Lernangebot auf der anderen Seite. Damit soll der Übergang von der Schule an die Universität abgeflacht werden. Das Zusatzangebot betont dabei gerade bei Lehramtsstudierenden eine Möglichkeit zur Verknüpfung von schulischer und universitärer Mathematik, um damit den Einstieg in die abstrakte Mathematik weiter zu erleichtern und zusätzlich eine Relevanz für den Lehrberuf zu schaffen.

Vor- und Brückenkurse

Nahezu jeder Standort der universitären Mathematikausbildung in Deutschland hat heutzutage ein Angebot zur (fachlichen) Vorbereitung auf den Studienstart vor Studienbeginn. Dabei sind unterschiedlichste Konzepte mit verschiedenen Lehrformaten und Zielsetzungen entstanden (BAUSCH, FISCHER & OESTERHAUS, 2013; HAASE, 2013; REICHERSDORFER et al., 2013; ROEGNER et al., 2013). REICHERSDORFER et al. (2013) formulieren fünf Lernzielbereiche, die als allgemeine Ziele derartiger Vorbereitungskurse gesehen werden können: *Arbeitsweisen der Mathematik, Lernstrategien, Methodenwissen, spezielle neue Fertigkeiten der universitären Mathematik* und *Studienorganisation*. In München sind daraus in Kooperation von Ludwigs-Maximilians-Universität (LMU) und der Technischen Universität München (TUM) die sogenannten *Münchener Brückenkurse* als relativ klassische Form von Brückenkursen entstanden. Diese sind als zweiwöchiger, ganztägiger Kurs konzipiert, der direkt vor Semesterbeginn angeboten wird. Das Lehrangebot unterteilt sich in Vorlesungen und Übungen, die sich stark am Konzept von Fachvorlesungen orientieren. Als Schwerpunkt werden Lernstrategien als Lernziel angegeben. Die Inhalte sollen schulische Themen abstrakt auf universitärem Niveau

2.1. Studieneingangsphase als erste Stufe der doppelten Diskontinuität

fortführen. In einer nachgelagerten Untersuchung von 120 Studierenden (60 davon mit Teilnahme an einem Brückenkurs, 60 davon ohne Teilnahme an einem Brückenkurs) im Kontext einer Vorlesung zur *Linearen Algebra II* konnten signifikant bessere Leistungen der Studierenden nachgewiesen werden, die einen solchen Brückenkurs besucht haben.

Das Projekt *VEMINT* der Standorte Kassel, Darmstadt, Paderborn und Hannover entwickelt und untersucht ebenfalls mathematische Vor- und Brückenkurse. Die Inhalte sind dabei von multimedialer Form und unterstützen ein Format des *Blended-Learnings*. In konkret umgesetzten Vorkursen an mehreren dieser Standorte wird das Material dazu genutzt, neben den fachlichen Inhalten einerseits in das neuartige Umfeld der Institution Universität einzuführen und andererseits durch einen hohen Anteil an selbstreguliertem Lernen frühzeitig Strategien zur Selbstorganisation zu entwickeln (BAUSCH, FISCHER & OESTERHAUS, 2013; BIEHLER et al., 2013). Einen ähnlichen Ansatz des E-Learnings verfolgt das EU-Projekt *Math-Bridge*. Darin wird Material für mathematische Vor- und Brückenkurse in mehreren Sprachen konzipiert (SOSNOVSKY et al., 2013).

Auch an den Standorten TU Berlin, RWTH Aachen, TU Braunschweig und TU Kaiserslautern wird ein virtueller Kurs in einem Blended-Learning-Konzept umgesetzt. Der sogenannte *Online Mathematik Brückenkurs* (OMB) ist ganzjährig verfügbar und wird auf freiwilliger Basis angeboten. Das Material besteht aus einem Skript, Einzel- und Gruppenübungsaufgaben sowie Prüfungsaufgaben mit automatischer Korrektur. Die Übungsaufgaben können online von einem*r Tutor*in korrigiert werden. Als virtueller Lernraum steht ein Forum zur Verfügung, in dem die Studierenden zunächst Fragen untereinander selbstständig klären können, aber auch auf Tutor*innen zurückgreifen können. Der Kurs baut maßgeblich auf dem schwedischen Projekt *MATH.SE* auf. In einer Untersuchung wurden Studierende aus den Ingenieurwissenschaften später im Studium in einer Veranstaltung zur *Linearen Algebra für Ingenieure* betrachtet. Dabei konnte gezeigt werden, dass diejenigen Studierenden, die neben dem OMB auch einen Einführungskurs in Präsenz besucht haben, am ehesten das ausgeschriebene Ziel erreichen, die beschriebene Veranstaltung innerhalb eines Semesters zu bestehen (ROEGNER et al., 2013).

Hinsichtlich der institutionellen Hürde beim Übergang Schule-Hochschule berichten insbesondere die Vor- und Brückenkurse, die in Präsenz stattfinden, in den meisten Evaluationen von einer deutlich gesteigerten Selbstsicherheit, Selbstwirksamkeit, Zufriedenheit mit der Wahl des Studiengangs und einem erhöhten Gefühl der korrekten Vorbereitung auf das Studium (BOMKE & REITMAIER-KREBS, 2017; HAASE, 2013; REICHERSDORFER et al., 2013; REITMAIER-KREBS, 2016; RIEDL et al., 2013; ROEGNER et al., 2013). Zudem zeigt sich, dass die Studienanfänger*innen mit sehr heterogenen Wissensständen hinsichtlich schulmathematischen Wissens in die Vor- und Brückenkurse starten (HALVERSCHEID et al., 2013). An derartige Kurse entsteht also eine hohe Anfor-

2. Aktueller Forschungsstand

derung im Bezug auf eine Leistungsdifferenzierung, wobei sich diese Problematik auch in die ersten Semester fortsetzt.

Ergänzendes Angebot in der Studieneingangsphase

Neben den gängigen Fachvorlesungen der ersten Semester bieten viele Universitäten zusätzliche Kurse oder Unterstützungsmaßnahmen für Studienanfänger*innen an. In den meisten Fällen fokussiert sich dieses Angebot auf eine entschleunigte Umgebung zur Vermittlung von typischen Arbeitsweisen der höheren Mathematik (ABLEITINGER & HERRMANN, 2013; HAMANN et al., 2013; STEINBAUER et al., 2013) und zur Vernetzung der neuen Inhalte mit der bereits erlernten Schulmathematik. Es entsteht eine weitere Möglichkeit, das neu Gelernte einzüben und zu vertiefen. Zudem werden diverse Mentoring-Programme realisiert, die insbesondere eine Vernetzung der Studierenden sowie eine kollegiale Unterstützung etablieren möchten (PARAVICINI, 2013).

An der Universität Hildesheim sind die sogenannten *Hildesheimer Stufen zum Einstieg in die Mathematik (HiStEMa)* als ganzheitliches Angebot in der Studieneingangsphase konzipiert worden. Es umfasst neben einem typischen Vorkurs mit Übungen auch zusätzliche mathematische Workshops zur Erarbeitung, Einübung und Vernetzung von mathematischen Arbeitsweisen und Fachwissen sowie Projektstage zur Behandlung der institutionellen Hürde. Am Ende des Angebots steht zudem ein Gruppengespräch mit Dozierenden an, in dem über den eigenen Fortschritt und Wissensstand reflektiert und aufgeklärt werden soll (HAMANN et al., 2013). Das gesamte Programm wird durch einen diagnostischen Test zum Kenntnisstand der Studienanfänger*innen hinsichtlich des mathematischen Schulstoffs eingeleitet (KREH et al., 2021).

2.2. Relevanz fachlicher Inhalte für das Lehramtsstudium

Die Entscheidung zu einem Mathematikstudium fällt gerade bei Lehramtsstudierenden eher selten aus einem tieferen Interesse zur – abstrakten – Mathematik und einer wissenschaftlichen Behandlung selbiger (HAMANN et al., 2013; STEINBAUER et al., 2013). Bei einer Befragung von Studienanfänger*innen an der Universität Wien gaben insbesondere Lehramtsstudierende als Gründe für ihre Wahl eines mathematischen Lehramtsstudiums an, dass „sie in der Schule schon immer in Mathematik gut waren“, „ihnen die Mathematik leicht gefallen ist und Spaß gemacht hat“ und „das Berufsbild ihren Vorstellungen entspricht“ (STEINBAUER et al., 2013, S. 420). Ein weiterführendes Interesse hinsichtlich der Mathematik ist hier nicht zu erkennen.

Weitere qualitative Untersuchungen bestätigen diesen Eindruck, dass Lehramtsstudierende und auch bereits praktizierende Lehrkräfte der fachlichen Ausbildung an der

2.2. Relevanz fachlicher Inhalte für das Lehramtsstudium

Hochschule nur wenig bis gar keine Relevanz zuschreiben (EVEN, 2011; GILDEHAUS & LIEBENDÖRFER, 2021; LIEBENDÖRFER, 2018; WASSERMANN et al., 2018; R. ZAZKIS & LEIKIN, 2010). In der Mathematikdidaktik als Wissenschaft wird dem Fachwissen neben dem fachdidaktischen Wissen jedoch große Bedeutung beigemessen (DEPAEPE et al., 2013). Innerhalb des Fachwissens erfolgt dabei oftmals eine Unterscheidung in universitäres (CK) und schulbezogenes Fachwissen (SRCK)¹ (HEINZE et al., 2016). Eine quantitative Untersuchung von HOTH et al. (2020) zeigt jedoch, dass die universitäre Fachausbildung bei Lehramtsstudierenden keinen Trickle-Down-Effekt hin zu einem höheren schulrelevanten Fachwissen vermuten lässt. Die Studie wurde als Längsschnittstudie entlang von zwei Messzeitpunkten (erstes und drittes Semester) angelegt. Die Konstrukte für Fachwissen und fachdidaktisches Wissen sowie kognitive Grundfähigkeiten wurden durch standardisierte Tests erhoben. Zusätzlich sind in einem Fragebogen Daten zur individuellen Praxiserfahrung und andere Hintergrundmerkmale aufgenommen worden. Die Erhebung erfolgte an 20 verschiedenen Universitäten Deutschlands und es konnten zum ersten Messzeitpunkt 167 und zum zweiten Messzeitpunkt 118 Studierende des jeweiligen Semesters gewonnen werden. Dabei lagen am Ende für 72 Studierende Längsschnittdaten vor. Während das akademische Wissen CK zwischen den beiden Messzeitpunkten einen Anstieg verzeichnet, tritt dieser Effekt für das schulbezogene Fachwissen SRCK nicht auf. Es zeigte sich zusätzlich, dass zu Beginn des Studiums das schulbezogene Fachwissen substantiell mit dem akademischen Fachwissen korreliert. Später im Studium ist diese Korrelation nur noch gering vertreten. Die Interpretation wird nun dahingehend getroffen, dass die recht stabile einzelne Entwicklung des akademischen Fachwissens CK und des schulbezogenen Fachwissens SRCK jeweils nicht mit der jeweils anderen Entwicklung erklärbar ist. Insgesamt ist auf der Grundlage dieser Daten eine Trickle-Down-Annahme eher nicht haltbar. In einer weiterführenden Analyse sind auch andere Merkmale in das Modell miteinbezogen worden. Beispielsweise zeigen kognitive Grundfähigkeiten und individuelle Praxiserfahrungen eine Korrelationen zum schulbezogenen Fachwissen, wodurch sich dessen Entwicklung besser deuten lässt.

Zur weiteren Unterstützung von Studierenden speziell in den konkreten Fachveranstaltungen sind deshalb diverse Übungsgelegenheiten und Aufgabenkonzepte konzipiert worden, die eine alternative Form des klassischen Übungsbetriebs darstellen. Zentraler Gedanke ist hier oftmals eine niedrigere Einstiegshürde in mathematische Arbeitsweisen und insbesondere eine geleitete Einführung in das formale Beweisen (BIKNER-AHSBAHS & SCHÄFER, 2013; FISCHER, 2013). Die explizite Behandlung der Verknüpfung von schulischer und universitärer Mathematik und damit die Thematisierung der zweiten

¹CK für *Content knowledge*; SRCK für *School-related content knowledge*

2. Aktueller Forschungsstand

Stufe der doppelten Diskontinuität wird hingegen größtenteils in eigenen Veranstaltungen mit alternativen Konzepten angegangen.

Um einerseits die erste Stufe der doppelten Diskontinuität speziell für Lehramtsstudierende zu mindern und andererseits deren Akzeptanz für fachliche Veranstaltungen zu erhöhen, gibt es vielfältige Ansätze für angepasste Veranstaltungsformen und zusätzliche Angebote zur Verknüpfung von schulischer und universitärer Mathematik. Damit sollen Lehramtsstudierende gezielt gefördert werden, die „sich häufig nicht angesprochen“ (DANCKWERTS, 2013, S. 78) fühlen und prinzipiell Schwierigkeiten haben, „die wissenschaftlich ausgerichtete Mathematik mit ihrem Berufsziel in Verbindung zu bringen“ (DANCKWERTS, 2013, S. 78). Man kann die universitäre Mathematik in der fachlichen Ausbildung dabei prinzipiell auf zwei Arten mit der Schulmathematik verbinden: Einerseits ließe sich die Schulmathematik quasi als Spezialfall einer höheren Mathematik im Nachhinein ableiten und damit die universitäre Ausbildung rückwirkend legitimieren. Diesen Ansatz verfolgt bspw. KLEIN in seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“ (1908). Andererseits ließe sich die Schulmathematik auch zu einer abstrakten Mathematik fortsetzen. Der höhere Standpunkt würde dabei selbstständig herausgearbeitet werden und insbesondere aus einem Wechsel des Fokus, was mathematisch interessant ist, entstehen. Das Ziel ist dabei die Abkehr „von der vertrauten Beherrschung von Kalkülen hin zu einer verstehensorientierten begrifflichen Durchdringung“ (DANCKWERTS, 2013, S. 79). Entsprechende Lehrveranstaltungen sind also insbesondere in den ersten Semestern sinnvoll, um an elementaren mathematischen Problemstellungen, die bereits in der Schule thematisiert worden sind, die neuartigen Arbeits- und Sichtweisen der höheren Mathematik zu erarbeiten und einzuüben. Derartige Überlegungen finden sich unter anderem in den Bereichen der Arithmetik (EICHLER et al., 2022), der Geometrie (CEDERBAUM & HILKEN, 2022; EICHLER et al., 2022), der linearen Algebra (DORIER, 2000) oder auch der Analysis (BAUER, 2013a; DANCKWERTS, 2013; OLDENBURG & SCHLOTTERER, 2022). Eine grundlegend neue Sichtweise der Mathematikausbildung für Lehramtsstudierende des Gymnasiums liefern BEUTELSPACHER et al. (2011) mit dem Projekt *Mathematik neu denken*, in dem eine komplette Neugestaltung insbesondere der fachlichen Lehrinhalte und Lehrkonzepte vorgeschlagen wird.

Eine weitere Möglichkeit, die Relevanz der höheren Mathematik für Lehramtsstudierende herauszustellen, liegt in speziell dafür konzipierten Übungsgelegenheiten. PREDIGER (2013) beschreibt bspw. sogenannte *Unterrichtsmomente*. Dabei handelt es sich um authentische Unterrichtssituationen, in denen spezifisches Fachwissen der betroffenen Lehrkräfte abgefragt wurde oder gewinnbringend verwendet werden konnte. Die Behandlung derartig beschriebener Situationen bietet für Lehramtsstudierende zum einen die Möglichkeit, zu erkennen, dass ein Fachwissen über den Schulstoff hinaus zu einer berufsbezogenen Expertise dazugehört und zum anderen lassen sich daran fachliche

Inhalte auch besser einüben und weiter vertiefen. Es lassen sich hiermit unterschiedlichste – zukünftig relevante – Situationen thematisieren: Beispielsweise Situationen aus dem Schulunterricht, Äußerungen von Lernenden sowie Analysen von Aufgaben und Schulbuchseiten.

Einen ähnlichen Ansatz thematisieren vielfach untersuchte *Schnittstellenaufgaben* – oftmals auch *Lehramts-* oder *Vernetzungsaufgaben* genannt (ÁLVAREZ et al., 2020; BAUER, 2013b; EICHLER & ISAEV, 2017; SCHADL et al., 2019). Hierbei werden Aktivitäten im Lernprozess angestrebt, die speziell die Verbindung von schulischer und universitärer Mathematik ansprechen. Die Studierenden sollen sich direkt selbst mit der vermeintlichen Diskrepanz zwischen diesen beiden Feldern auseinandersetzen und dabei ebenfalls einerseits Verbindungen entdecken und explizieren und andererseits ein tieferes Fachwissen generieren. Der Fokus liegt hier auf einem ständigen Wechsel von Sichtweisen zur Vernetzung des Fachwissens. BAUER beschreibt bspw. vier Kategorien von Schnittstellenaufgaben: *Grundvorstellungen aufbauen und festigen*, *Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren*, *mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen* und *mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren* (2013b, S. 41).

Wie sich solche Schnittstellenaufgaben auf Lehramtsstudierende auswirken, berichten bspw. SCHADL et al. (2019). Es werden zwei Projekte mit derartigen Aufgabenkonzepten vorgestellt: *connexercise@math.lmu* und *reflect@math.lmu*. Bei ersterem werden Schnittstellenaufgaben in eine fachliche Vorlesung zu Beginn des Studiums eingebettet und damit das Ziel verfolgt, die Vorlesungsinhalte einerseits zu vertiefen und andererseits in Beziehung zur Schulmathematik zu stellen. Bei zweiterem werden Schnittstellenaufgaben in einem offenen Setting innerhalb eines Seminars behandelt. Es soll dabei das an der Universität erworbene Fachwissen mit fachdidaktischen Inhalten verknüpft werden. Die Schnittstellenaufgaben im Vorlesungskontext erfreuten sich nur geringer Teilnahme, da sie neben den klassischen Übungsaufgaben freiwillig angelegt und daraufhin von den Studierenden überwiegend auf Grund von Zeitproblemen selten bearbeitet wurden. Aber auch mangelndes Interesse wurde als Grund genannt. Eine quantitative Auswertung war hier nicht mehr sinnvoll möglich, jedoch lässt sich qualitativ einige Konsequenzen ziehen: Unter vorab befragten Lehramtsstudierenden höheren Semesters sind Schnittstellenaufgaben sehr beliebt und es wird oft der Wunsch geäußert, dass derartige Aufgabenkonzepte von Anfang an das Studium begleiten. Im Hinblick auf nicht vernachlässigbares Desinteresse an solchen Aufgaben in den ersten Semestern, muss möglicherweise eine verpflichtende Bearbeitung dieser Aufgaben angedacht werden. Zusätzlich darf aber der Punkt der Mehrbelastung nicht ignoriert werden. Das Seminarkonzept wurde durch Fragebögen zu Beginn und zu Ende eines Semesters wissenschaftlich begleitet. Dabei wurden fachmathematisches Wissen, Interesse und Motivation hinsichtlich der Fach- und Schulmathematik

2. Aktueller Forschungsstand

sowie die Einschätzung der Relevanz von fachlichen und fachdidaktischen Veranstaltungen für den späteren Lehrberuf gemessen. Es zeigte sich dabei ein deutlicher Zuwachs an Fachwissen und auch die Relevanz der Fachmathematik für den späteren Beruf ist angestiegen. Beim Interesse und bei der Motivation konnten keine signifikanten Unterschiede festgestellt werden. Da es sich bei den untersuchten Studierenden teilweise um Studierende eines Masterstudiengangs *Wirtschaftspädagogik* handelte, ist die Aussagekraft der Ergebnisse für angehende Mathematiklehrkräfte gemindert.

EICHLER und ISAEV (2022) haben die Auswirkungen von Lehramtsaufgaben auf die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden hinsichtlich der Relevanz und Kohärenz von schulischen und akademischen Fachwissens untersucht. Die Evaluationsstudie erfolgte an 72 Lehramtsstudierenden für die Sekundarstufe II aus dem ersten und dritten Semester anhand eines Pre-Post-Test-Designs mit Fragebögen. Die Studierenden wurden dabei zufällig in eine Treatment- und eine Kontrollgruppe aufgeteilt, wobei 25 % der Übungsaufgaben aus der Treatmentgruppe spezielle Lehramtsaufgaben darstellten. Beim Relevanzempfinden wurde in der Treatmentgruppe ein leichter Anstieg und in der Kontrollgruppe ein signifikanter Abfall gemessen. Damit scheint es so, dass Lehramtsaufgaben die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Relevanz der Fachwissenschaft nicht erhöhen, aber stattdessen ein stärkeres Absinken verhindern können. Bei den Überzeugungen zur Kohärenz von schulischem und akademischem Fachwissen konnte kein signifikanter Effekt der Intervention festgestellt werden. Beim Faktor Messzeitpunkt zeigte sich jedoch ein signifikanter Haupteffekt, wonach ein generelles Absinken der Wahrnehmung einer Kohärenz anzunehmen ist.

In einer weiteren Studie haben ISAEV et al. (2022) die Auswirkungen von Lehramtsaufgaben auf die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur doppelten Diskontinuität behandelt. Auch diese Untersuchung erfolgte in einem Pre-Post-Test-Design. Es wurden dabei insgesamt 48 Studierende aus dem Lehramt für Sekundarstufe II untersucht. Diese waren auf zwei Standorte aufgeteilt, wobei an einem Standort eine Treatment- und eine Kontrollgruppe und am anderen Standort nur eine Treatmentgruppe gebildet wurde. Untersucht wurden erneut Überzeugungen zur Relevanz und Kohärenz von schulischem und akademischem Fachwissen. Im Bezug auf die Relevanz konnten ähnliche Ergebnisse wie bei EICHLER und ISAEV (2022) beobachtet werden. Bei der Kohärenz konnte zumindest an einem Standort ein signifikanter Anstieg der Überzeugungen in der Treatmentgruppe festgestellt werden.

Auch WEBER et al. (2024) haben in einer aktuellen Studie die Auswirkungen von Lehramtsaufgaben auf Überzeugungen zur doppelten Diskontinuität von Studierenden des gymnasialen Lehramts untersucht. Es wurden dabei ebenfalls Lehramtsaufgaben innerhalb einer klassischen Fachvorlesung im Übungsbetrieb untergebracht. Die Studie folgt dem Pre-Post-Test-Design und verwendet den von EICHLER und ISAEV (2022) und ISAEV

et al. (2022) genutzten Fragebogen zur doppelten Diskontinuität (ISAEV & EICHLER, 2022) mit den beiden Subskalen zur Kohärenz von schulischem und akademischem Fachwissen sowie zur Relevanz von Fachwissen für den Lehrberuf. Die Studierenden wurden in eine Treatment- und eine Kontrollgruppe aufgeteilt. Dabei bildeten die Lehramtsstudierenden die Treatmentgruppe und die restlichen Fachstudierenden die Kontrollgruppe. Der Übungsbetrieb wurde durch vier bis fünf wöchentliche Übungsaufgaben umgesetzt, wovon maximal eine für die Treatmentgruppe als Lehramtsaufgabe konzipiert wurde. Zum ersten Messzeitpunkt nahmen 306 Studierende (225 Lehramt, 81 Fach), zum zweiten Zeitpunkt 154 Studierende (111 Lehramt, 43 Fach) teil. Insgesamt ergaben sich 98 Längsschnittdaten (74 Lehramt, 24 Fach) die schließlich zur Analyse herangezogen wurden. Hinsichtlich der Kohärenz trat bei den Faktoren Gruppe und Messzeitpunkt kein Haupteffekt auf. Die Lehramts- und die Fachstudierenden schätzten also die Verbindung von schulischer und akademischer Mathematik nicht grundsätzlich verschieden ein. Bei der Treatmentgruppe stieg die Überzeugung zur Kohärenz jedoch im Verlauf des Messzeitraums leicht an, bei der Kontrollgruppe sank sie hingegen leicht ab. Bei der Relevanz zeigt sich ein Haupteffekt im Faktor Gruppe mit geringer Effektstärke. Die Kontrollgruppe schätzt die Relevanz von Fachwissen für den Lehrberuf höher ein. Es zeigt sich zudem auch ein Interaktionseffekt zwischen den Faktoren Gruppe und Messzeitpunkt. Dabei sinkt das Relevanzempfinden in der Kontrollgruppe von anfänglich deutlich höher als die Treatmentgruppe zum zweiten Zeitpunkt hin auf das über den Messzeitraum stabile Empfindungsniveau der Treatmentgruppe. Es ist zum zweiten Messzeitpunkt kein signifikanter Unterschied mehr zwischen den Lehramts- und den Fachstudierenden messbar.

Es zeigt sich, dass Lehramtsaufgaben zwar einer negativen Verschärfung der Überzeugung einer existenten doppelten Diskontinuität bei Lehramtsstudierenden vorbeugen kann; eine Auflösung der Diskontinuitätsstufen ist damit allerdings nicht zu erwarten. Ebenso bleibt offen, inwiefern Lehramtsaufgaben zu einem höheren schulbezogenen Fachwissen SCRK führen. Die Trickle-Down-Annahme, nach der höheres Fachwissen CK zu höherem schulbezogenen Fachwissen SCRK führen soll, zeigt sich auch nicht verlässlich. Insgesamt entsteht der Eindruck, dass die isolierte Behandlung von Fachwissen ohne ganzheitliche Konzepte zu Wesenszügen der Mathematik nicht ausreichend für die Lehramtsausbildung ist. Es ist insbesondere von Interesse, inwiefern die fachliche Ausbildung von Lehramtsstudierenden diese zum mathematischen Denken und Arbeiten befähigt.

Vor diesem Hintergrund ist in Kapitel 1 bereits die Bedeutung des (mathematischen) Problemlösen angeklungen. Im nachfolgenden Abschnitt wird auf aktuelle Forschungsprojekte zum Problemlösen im Kontext schulischer und universitärer Lehre eingegangen.

2.3. Problemlösen und mathematische Arbeitsweisen bei Lernenden

Zum Problemlösen ist in der Mathematikdidaktik über die letzten Jahrzehnte ein breites Forschungsfeld entstanden. Hieraus haben sich einerseits theoretische Modelle zur normativen Beschreibung von Problemlösesituationen und andererseits eine umfassende Beforschung von Schulungs- und Interventionsmöglichkeiten ergeben. Bei den theoretischen Modellen kann man allgemeine Modelle zur Beschreibung von Problemen und Problemlösesituationen, die an die pädagogische Psychologie angelehnt sind (PÓLYA, 1995; ROTT, 2013a; SCHOENFELD, 1992) und Taxonomien für konkrete schulische (BRUDER & COLLET, 2011; HOLZÄPFEL et al., 2018; STILLER et al., 2021) sowie universitäre (SCHWARZ, 2018) Problemlösestrategien unterscheiden. Eine Auswahl derartiger theoretischer Modelle wird im nachfolgenden Kapitel 3 genauer dargestellt. An dieser Stelle sollen noch einige Ergebnisse der Untersuchung konkreter Problemlösestrategien bei Lernenden – insbesondere Studierenden – beschrieben werden.

Neben der theoretischen Behandlung von Problemlösesituationen werden insbesondere im schulischen Kontext diverse Möglichkeiten zur Unterstützung von Lernenden bei der (eigenständigen) Lösung von (mathematischen) Problemen entwickelt (z. B. GÜNER und NUR ERBAY, 2021; HEROLD-BLASIUS, 2021; ROTT, 2013b) sowie die explizite Nutzung von Heuristiken analysiert (z. B. CAO, 2024; ROTT, 2013a). Die Hochschuldidaktik liefert insbesondere zur Behandlung der ersten Diskontinuitätsstufe ebenfalls einen Anlass, das mathematische Arbeiten und Problemlösen gerade in der Studieneingangsphase zu unterstützen. Die oben bereits beschriebenen diesbezüglichen Ansätze sind dabei meist aus den theoretischen Modellen und damit aus der schuldidaktischen Problemlöseforschung motiviert.

Eine konkrete Betrachtung von Arbeitsweisen bei Studierenden liefert hingegen bspw. STENZEL (2022). Hier mündet die qualitative Untersuchung in der Beobachtung von sehr feingliedrigen und stark problemspezifischen Heuristiken. Es konnte dabei eine herausragende Bedeutung des Vorwissens für die erfolgreiche Bearbeitung mathematischer Probleme identifiziert werden.

KIRSTEN (2021) wendet in ihrer Arbeit die Phasen des mathematischen Problemlösens (PÓLYA, 1995; SCHOENFELD, 1992) auf Beweisprozesse von 24 untersuchten Studierenden an. Es werden dabei fünf Phasen der Beweisführung sichtbar: *Verstehen*, *Argumente identifizieren*, *Argumente strukturieren*, *Formulieren* und *Validieren*. Es sind die ersten vier Phasen aufeinander aufbauend zu beobachten, wohingegen das *Validieren* prozessübergreifend und parallel stattfindet. Insgesamt beschäftigen sich die untersuchten Studierenden bei der Beweisführung überwiegend mit dem Verstehen der Problemsituati-

on und dem Planen ihres Vorgehens. Diese kreative Betätigung nimmt bis zu zwei Drittel des Prozesses ein.

Eine grundsätzliche Untersuchung von Problemlösekompetenzen von (Lehramts-) Studierenden im höheren Semester bzw. am Ende ihrer universitären Ausbildung und damit eine Kontrolle der entsprechenden fachlichen wie fachdidaktischen Ausbildung findet nur selten statt (z. B. D. ZAZKIS et al., 2015). Lediglich im Kontext der Lehr-Lern-Forschung bspw. bei der Betrachtung von Expertise von Lehrkräften kann von einer tatsächlichen Überprüfung der Vermittlung von Problemlösekompetenz die Rede sein (z. B. BESSER et al., 2015; CAO, 2024). Hier ist jedoch anzumerken, dass eine solche Betrachtung eher den Blick auf diejenigen Kompetenzen wirft, die im konkreten Lehrberuf erworben werden, als auf solche, die in der universitären Ausbildung vermittelt worden sind.

Bevor nun auf Grundlage dieser Erkenntnisse die Forschungsfragen für die vorliegende Studie in Abschnitt 3.3 formuliert werden, wird im nachfolgenden Kapitel 3 der für die Mathematik so zentrale Begriff des *Problemlösens* ausführlich beschrieben.

3. Theoretischer Rahmen

Der Forschungsgegenstand der vorliegenden Arbeit sind Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden. Hier ist sofort eine Nähe zum Problemlösen bzw. genauer gesagt zu Problemlösestrategien erkennbar. Dabei sind Arbeitsweisen weiter gefasst als Problemlösestrategien. Diese setzen rein technisch ein Problem voraus, welches von der problemlösenden Person behandelt wird. Hier ist nun der Unterschied zwischen Arbeitsweisen und Problemlösestrategien ersichtlich. Der Begriff eines Problems ist in der pädagogischen Psychologie klar definiert – entsprechende Charakterisierungen werden im nachfolgenden Abschnitt 3.1 gegeben – und eine Problemlösestrategie ist dann eine Handlung der problemlösenden Person zur Auflösung der Problematik. Eine Arbeitsweise kann allgemeiner als eine Handlung einer Person zur Bearbeitung von beliebigen Aufgabenstellungen verstanden werden. So gesehen sind dann Problemlösestrategien spezielle Arbeitsweisen, denn nicht jede Aufgabe ist auch direkt ein Problem im Sinne der psychologischen Definition.

Die vorliegende Arbeit hat nicht zum Ziel, eine eigene Theorie zum Problemlösen aufzustellen oder die Theorien zum Problemlösen zu einer Theorie der Arbeitsweisen zu erweitern. Vielmehr sollen bestehende Theorien zum Problemlösen im universitären Kontext kontrolliert werden. Zudem soll mit ihnen stattdessen die fachliche Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts im Fach Mathematik auf Relevanz und Effektivität untersucht werden. Es stellt sich mitunter die Frage, inwiefern die entsprechenden Studierenden zu Problemlöser*innen ausgebildet werden.

Dazu werden zunächst die verwendeten Begrifflichkeiten sowie die entsprechende Einordnung in der pädagogischen Psychologie geklärt. Anschließend sollen einige theoretische Modelle zum Problemlösen und zu Problemlösestrategien vorgestellt werden. Dabei stellen sich unterschiedliche Anforderungen an Situationen heraus, in denen Problemstellungen angesiedelt werden können. Abschließend werden einige Lehr-Lern-Modelle vorgestellt, die genau diesen Anforderungen begegnen können.

3.1. Problemlösen als mathematische Kernkompetenz

Das Problemlösen wird im Fachprofil der Mathematik des bayerischen Lehrplans für Gymnasien als zentraler Bestandteil der Mathematik betitelt (ISB, n. d. b; KMK, 2012). Namentlich wird das Problemlösen aus den von WINTER (1996) formulierten

3. Theoretischer Rahmen

Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts zitiert: „Der Mathematikunterricht sollte anstreben, [...] in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“ (WINTER, 1996, S. 35) Auch im Kompetenzstrukturmodell taucht das Problemlösen als eigene Kernkompetenz des Mathematikunterrichts auf (ISB, n. d. b; KMK, 2012). Aber auch für die Mathematik als gesamte Disziplin ist das Lösen von Problemen ein zentraler, wenn nicht sogar der zentrale Bestandteil. STEWART (1990) beschreibt dies humoristisch in einem fiktiven Interview zwischen einem Moderator als Mathematik-Laien und einem Mathematiker:

„[Moderator]: [...] Was ist die Hauptsache, um die es in der Mathematik geht?
Mathematiker: Probleme zu lösen.“ (S. 13)

Es werden zunächst die verwendeten Begriffe rund um Probleme und das Problemlösen geklärt. Dazu werden insbesondere gängige Definitionen und Charakterisierungen der pädagogischen Psychologie aufgeführt, bevor einige theoretische Modelle zum Problemlösen aus der Didaktik der Mathematik vorgestellt werden.

Problemlösen in der pädagogischen Psychologie

Der Begriff des Problemlösens ist implizit bereits Anfang des 20. Jahrhunderts in der Psychologie thematisiert worden. Als Beispiel dafür stehen insbesondere die Studien zum produktiven Denken von WERTHEIMER (1920, 1945) und die Experimente mit Schimpansen von KÖHLER (1921) zum Thema des *Lernens mit Einsicht*. Der Begriff des Problems ist später bspw. von DUNCKER (1935) definiert:

„Ein ‚Problem‘ entsteht z. B. dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht ‚weiß‘, wie es dieses Ziel erreichen soll. Wo immer der gegebene Zustand sich nicht durch bloßes Handeln (Ausführen selbstverständlicher Operationen) in den erstrebten Zustand überführen lässt, wird das Denken auf den Plan gerufen. Ihm liegt es ob, ein vermittelndes Handeln allererst zu konzipieren.“
(S. 1)

Es lässt sich bereits in dieser Definition der wesentliche Unterschied zu einer (Routine-)Aufgabe erkennen, die durch einfache Anwendung bekannter Mechanismen zu lösen ist. In den Folgejahren der von WERTHEIMER geprägten sogenannten *Gestaltpsychologie* musste jedoch im Hinblick auf ein umfangreiches Verständnis von Denkprozessen eine Verzögerung hingenommen werden. Die Gestaltpsychologie wirft insbesondere ein Auge auf intrapersonelle Vorgänge und pflegt einen interpretativen Ansatz. Sie wird in der Folge durch das Aufkommen des Behaviorismus abgelöst. Dieser ist rein objektiv als Zweig der Naturwissenschaften zu sehen. Darin ist nahezu keine Introperspektive

3.1. Problemlösen als mathematische Kernkompetenz

vorgesehen. Im Bezug auf lerntheoretische Erkenntnisse konnten behavioristische Ansätze deutliche Fortschritte verzeichnen. Für das Verständnis zum Problemlösen blieb dieser Erfolg jedoch aus (GRUBER et al., 2015). Ende der 1950er Jahre gab es einen erneuten Wechsel in der Psychologie: Der Behaviorismus wurde durch eine kognitive Psychologie abgelöst. Es ist heute auch von der sogenannten *kognitiven Wende* in der Psychologie die Rede. Die kognitive Psychologie greift Ansätze der Gestaltpsychologie wieder auf und baut insbesondere auf dem Konzept auf, dass Denken als algorithmischer Prozess verstanden werden kann, der stark an eine informationstechnologische Umsetzung angelehnt ist. BARTLETT (1958) beschreibt Denken bspw. als Prozess, bei dem es darum geht, Lücken systematisch zu füllen. Je nach der Art der Lücke unterscheidet er zwei Vorgehensweisen, wie diese Lücken gefüllt werden: Interpolation und Extrapolation. Bei der Interpolation wird eine Lücke zwischen zwei bekannten Zuständen geschlossen, wohingegen bei der Extrapolation von einem bekannten Zustand ausgehend explorativ in neue Bereiche vorgedrungen wird. Es wird eine Sicht auf den Denkprozess ersichtlich, die sich stark an der aufkommenden Entwicklung von computergestützten Rechensystemen und entsprechenden informationstechnologischen Theorien zur Arbeitsweise von logischen Automaten orientiert. Auch in SIMONS *Behavioral model of rational choice* (1955) nimmt der Denkprozess eindeutig algorithmische Züge an. Weiter beschreiben MILLER et al. (1960), dass Verhalten planbar ist und gewissen Strategien folgt. Zudem kann und sollte ständig die Funktionalität des Vorgehens kontrolliert werden. Ähnlich wie DUNCKER definiert KLIX (1971) ein Problem über drei Merkmale: Anfangszustand, Zielzustand und das nicht unmittelbare Gelingen einer Überführung des Anfangs- in den Zielzustand. Hier werden eindeutig Gedanken der Gestaltpsychologie wieder aufgegriffen und durch insbesondere handlungsorientierte Formulierungen ergänzt. Die vielfältigen Theorien zum Denkprozess und zur Lösung von Problemsituationen gipfeln 1972 in der populären Darstellung einer Problemlösetheorie von NEWELL und SIMON mit dem Titel *Human problem solving*. Spätestens ab hier lässt sich ein Wechsel im Fokus der Theorien zum Problemlösen erkennen. Die bisherigen Analysen von Aufgabenbearbeitungen sind zwar umfangreich und zahlreich geschehen und haben für vielfältige theoretische Modelle gesorgt. Dennoch ist die Aussagekraft dieser Theorien nur begrenzt (GRUBER et al., 2015). Erst unter Mitbetrachtung des theoretischen Begriffs von *Wissen* lässt sich Problemlösen wirklich untersuchen. Betrachtet man beispielhaft Expert*innen eines Fachgebiets, so zeichnen sich diese eben nicht ausschließlich durch ein ausgeprägtes Talent oder Begabung, ein hohes Fachwissen oder umfangreiche methodische Ansätze aus. Vielmehr verkörpern Expert*innen eine möglichst hohe Ausprägung in all diesen Faktoren. Insbesondere erscheint das Problemlösen also nicht ohne Betrachtung von (Fach-)Wissen verständlich zu sein. BOURNE et al. (1971) beschreiben hier bereits vier Merkmale für problemlösendes Denken:

3. Theoretischer Rahmen

- **Wissen**

Hier ist im Allgemeinen Faktenwissen oder heutzutage auch oftmals *deklaratives* Wissen gemeint.

- **Fähigkeiten**

Diese sind heute größtenteils unter dem Begriff des *prozeduralen* Wissens zusammengefasst.

- **Absichten**

Hier ist insbesondere das Vorhandensein eines Ziels ausschlaggebend.

- **Leistung**

Es ist dabei eine kognitive Anstrengung zur Erreichung des Ziels gemeint.

Neben den Punkten eines Zielzustandes und einer Lücke zwischen derzeitigem Zustand und diesem Zielzustand, die durch eine kognitiv anspruchsvolle Leistung überbrückt werden muss, ist hier auch der intrapersonelle Faktor des (Vor-)Wissens mitberücksichtigt. Dadurch wird die Subjektivität einer Problemsituation betont. Auch DÖRNER (1976) formuliert eine Definition eines Problems derart, dass die Abhängigkeit der Beschaffenheit des Problems unmittelbar vom Individuum abhängt:

„Ein Individuum steht einem Problem gegenüber, wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, aber im Moment nicht über die Mittel verfügt, um den unerwünschten Zustand in den erwünschten Zustand zu überführen.“
(S. 640)

Diese Definition führt bei DÖRNER zu einer zweidimensionalen Klassifikation von Problemsituationen, die sich anhand der Lücke unterscheiden, die zu überbrücken ist. Es wird zwischen dem Bekanntheitsgrad der Mittel und der Klarheit der Zielkriterien unterschieden. Ist ein Problem durch bekannte Mittel und bekannte Zielsetzung vorgegeben, so gibt DÖRNER die Interpolation analog zu BARTLETT (1958) als Überbrückungsstrategie an. Bei unbekanntem Mittel ist hingegen eine Synthese notwendig. Hierbei wird der Einsatz kreativer Lösungsansätze verlangt, die möglicherweise nicht direkt gelingen müssen. Bei unbekannter Zielsetzung ist ein dialektischer Prozess notwendig, der zu einer Ausschärfung und Verbesserung der Zielsetzung führen soll. Ähnlich äußert sich die Definition von LÜER und SPADA (1990):

„Ein Problem liegt dann vor, wenn ein Subjekt an der Aufgabenumwelt Eigenschaften wahrgenommen hat, sie in einem Problemraum intern repräsentiert

und dabei erkennt, dass dieses innere Abbild eine oder mehrere unbefriedigende Lücken enthält. Der Problemlöser erlebt eine Barriere, die sich zwischen dem ihm bekannten Istzustand und dem angestrebten Ziel befindet.“ (S. 256)

Auch nach dieser Definition lassen sich Probleme klassifizieren:

- **Lücke bei der Abbildung von Istzustand oder Ziel**
Entspricht den dialektischen Problemen bei DÖRNER. Der Istzustand oder das Ziel müssen sprachlich besser umrissen und damit konkreter herausgearbeitet werden. Danach kann erst eine konkrete Problembewältigung geschehen.
- **Lücke bei der Abbildung allgemeiner Problemzustände**
Hier sind Schwierigkeiten bei der Vernetzung von (Sach-)Gegenständen des Problems gemeint. Hierzu zählen insbesondere relationale Probleme des analogen Schließens wie sie bspw. beim Dreisatz der Prozentrechnung auftreten.
- **Lücke bei der Abbildung von Operatoren, also den Mitteln zur Überbrückung von Lücken**
Gemäß DÖRNER sind das gerade Synthesprobleme, aber es sind auch Transformationsprobleme gemeint, bei denen die Ausführung der Operatoren schwerfällt.
- **Lücke bei der Abbildung von Wissen im Gedächtnis**
Es zählen hierzu insbesondere die Beschreibungen von komplexen Problemen, die sich auf eine moderne Sichtweise der Psychologie anhand von Wissensaufbau, Wissensorganisation und Wissensverwendung beruft. Hier wird die Betonung der Verwandtschaft von Wissen und Problemlösen deutlich.

Gerade letzteres, also eine Lücke bei der Abbildung von Wissen im Gedächtnis kann auch als Oberklasse der vorigen drei Punkte verstanden werden. Es ist nämlich bspw. auch eine Lücke bei der Abbildung eines Zustandes auf fehlendes Wissen zurückzuführen und damit als komplexes Problem zu sehen. Die Taxonomien von DÖRNER sowie LÜER und SPADA sind demnach eher als Klassifikationen einfacher Probleme zu verstehen und das tatsächliche Problemlösen ist weiter zu denken (FUNKE, 2003). In einer Arbeitsdefinition zur Behandlung von Problemsituationen gibt FUNKE (2003) problemlösendes Denken wie folgt an:

„Problemlösendes Denken erfolgt, um Lücken in einem Handlungsplan zu füllen, der nicht routinemäßig eingesetzt werden kann. Dazu wird eine gedankliche Repräsentation erstellt, die den Weg vom Ausgangs- zum Zielzustand überbrückt.“ (S. 25)

3. Theoretischer Rahmen

Es sind zwei Aspekte hervorzuheben: Eine funktionale Sichtweise, wozu Problemlösen überhaupt verwendet wird und ein handlungstheoretisches Konzept, das Problemlösen als planvolles Vorgehen sieht. Bereits 1990 gibt FUNKE zudem eine Taxonomie komplexer Szenarien an, wobei er Problemsituationen anhand der folgenden Merkmale klassifiziert:

- **Personenmerkmale**

Beispielsweise Intelligenz, Motivation oder Persönlichkeit.

- **Situationsmerkmale**

Beispielsweise die Transparenz der Anforderungen oder die Art der Zielvorgabe.

- **Aufgabenmerkmale**

Hier wird weiter in formale und inhaltliche Aspekte unterschieden. Formale Aspekte meint bspw. Zeitverzögerungen oder auch die Eigendynamik von Problemen. Unter inhaltlichen Aspekten sind bspw. semantische Charakteristiken und die Verwendung von Fachsprache, aber auch fachliche Anforderungen gemeint.

Auch zu diesem System gibt es allerdings Kritik. Beispielsweise merkt STROHSCHNEIDER (in WAGENER, 2001) an, dass derartige Faktoren für Schwierigkeit weder in der Relevanz eindeutig noch objektiv formuliert sind.

Als Vorbereitung auf einen idealen Problemlöseprozess, wie er später nach PÓLYA skizziert wird, ist an dieser Stelle noch die Beschreibung von Expert*innen im Problemlösen gemäß GRUBER und STAMOULI (2015) aufgeführt. Sie schreiben entsprechenden Expert*innen drei grundlegende Fähigkeiten zu:

- **Fähigkeit zur Veränderung der mentalen Repräsentation von Problemen**

Diese Fähigkeit ist in Teilen mit einer hohen Kompetenz des (mathematischen) Modellierens vergleichbar. Allgemein zeigt sich hier jedoch prinzipiell die Möglichkeit zum abstrakten Denken innerhalb stark vernetzter Schemata.

- **Fähigkeit zur Veränderung der Analyseebene**

Diese Fähigkeit lässt sich vermutlich mit einer hohen Flexibilität hinsichtlich Abstraktions- und Reduktionsvermögen und der Fähigkeit zur Einschränkung oder Gewährleistung einer Allgemeingültigkeit sowie der Möglichkeit zur Betrachtung von Beispielen und Spezialfällen beschreiben.

- **Fähigkeit zum Wechsel der Verarbeitungsstrategien**

Hierunter fällt augenscheinlich das Vorhandensein sowie die Bereitschaft zum Einsatz von möglichst vielen (inner- und außermathematischen) Ansätzen der konkreten Problembehandlung.

Im Folgenden wird das Problemlösen aus mathematischer Sicht und insbesondere im Sinne der Didaktik der Mathematik beschrieben. Die dortige Darstellung entspringt maßgeblich den eben beschriebenen vielfältigen Definitionen der pädagogischen Psychologie. Wenngleich Problemlösen als Phänomen beschrieben werden kann, das in allgemeinen Lebenssituationen zum Tragen kommt und damit insbesondere in diversen Wissenschaften und handwerklichen Disziplinen als zentraler Aspekt zu sehen ist, nimmt das Problemlösen in der Mathematik eine herausragende Stellung ein und ist in den vergangenen Jahren einer intensiven wissenschaftlichen Untersuchung ausgesetzt. Die Nähe der didaktischen Strömungen zu den kognitionspsychologischen Erkenntnissen ist schon in der Beschreibung des mathematischen Problemlösens von PÓLYA (2004; in der Erstausgabe von 1945) ersichtlich. Ausgehend davon wird zu einer Arbeitsdefinition des Begriffs *Arbeitsweise* in Abgrenzung zur Problemlösestrategie übergegangen.

Problemlöseprozess nach PÓLYA

Auch PÓLYA unterscheidet zwischen Routineaufgaben und Aufgaben, die durch eine nicht triviale Barriere zwischen Anfangs- und Zielzustand gekennzeichnet sind. Um diese Barriere zu überwinden, sieht PÓLYA (1995, 2004) vier Schritte vor, die im Folgenden beschrieben sind.

- **Das Problem verstehen**

Für die Lösung eines Problems ist es essentiell das Problem in seiner Gänze überhaupt zu verstehen. Was ist das Ziel? Warum stellt sich dieses Problem? An welcher Stelle befinde ich mich im Bezug zum Ziel? Das sind alles Fragen, die zum Verständnis der Problemsituation beitragen können. PÓLYA schlägt hier auch direkt Strategien vor, die zur konkreten Umsetzung genutzt werden können. Insbesondere betont er die Möglichkeit, die Problemstellung zu skizzieren und in der Problemskizze bekannte und unbekannte Komponenten zu identifizieren. Vor allem die sprachliche Klärung der Problemstellung und das Vertraut machen mit der entsprechenden Fachsprache stellt oftmals einen guten ersten Ansatzpunkt dar. Auch die eigenständige (sinnvolle) Benennung unbekannter Teile eines Problems können hilfreich sein. Man erkennt eine Nähe zu Schritten der Synthese analog zu DÖRNER.

- **Einen Plan aufstellen**

Hierbei werden möglichst alle Schritte und deren Reihenfolge festgelegt, die notwendig sind, um die Barriere zu überwinden und zum Zielzustand gelangen zu können. Ein Plan kann und muss aber nicht unbedingt direkt komplett korrekt oder umsetzbar sein. Hier ist möglicherweise eine Art zirkulärer Ansatz im Vorgehen

3. Theoretischer Rahmen

zu erkennen, denn bei der Umsetzung eines Plans im nächsten Schritt ergeben sich ggf. Schwierigkeiten, die zu einer Planänderung führen können. PÓLYA betont zudem, dass der Schritt vom Verständnis eines Problems hin zu einem Plan der Durchführung in den meisten Fällen den Hauptteil der gesamten Problemlösung darstellt. Das Aufstellen eines Plans ist oftmals stark von vorigen Erfahrungen geprägt. Nur in seltenen Fällen ist mit einer Eingebung zu rechnen. Hier können Fragen nach ähnlichen bereits gelösten Problemen fruchtbar sein. Sind keine derartigen Vorkenntnisse vorhanden oder anwendbar, dann ist die Problemstellung genauer zu analysieren: Lässt sich das Problem in der Darstellung ändern? Lässt sich das Problem auf einzelne Teilprobleme aufteilen? Welche Teile des Problems sind weniger unbekannt als andere? Was lässt sich aus diesen bereits ableiten? Man sieht an diesen möglichen Fragestellungen, dass dieser Schritt ein stark transformativer Prozess sein kann, der einerseits durch Vorwissen, aber eben auch durch Kreativität und Flexibilität beeinflusst ist.

- **Den Plan durchführen**

Die Durchführung eines bereits aufgestellten Plans mag auf den ersten Blick einfach erscheinen und sicher sind hier bereits große Teile der strukturellen Problemlösung getan. Dennoch ist bei diesem Schritt auf eine saubere Arbeitsweise zu achten. Insbesondere das Behalten eines Überblicks und eine Kontrolle der tatsächlichen Anwendbarkeit der einzelnen Schritte ist entscheidend. Auch eine schrittweise Begründung des Vorgehens ist in diesem Prozess anzugeben.

- **Auf das Vorgehen zurückblicken**

Ist ein Plan erfolgreich durchgeführt, so erscheint ein Problem zunächst gelöst und damit der Arbeitsprozess beendet. Auch PÓLYA merkt an, dass selbst starke Lernende in den meisten Fällen nach einer Plandurchführung ein Problem als nicht weiter der Betrachtung wert erachten. Er meint, dass dadurch ein sehr wichtiger Prozess gerade im Hinblick auf ein tieferes Verständnis der Problemstellung an sich, aber auch im Hinblick auf zukünftige Problemstellungen verloren geht. Es soll hier eine Vernetzung mit weiterführenden Problemen oder bereits bekannten Teilgebieten stattfinden. Hier ließen sich insbesondere Kompetenzen bilden, die BAUER und HEFENDEHL-HEBEKER (2019) in ihrem Literacy-Modell unter der *Reflexive Literacy*-Stufe einordnen würden.

In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff eines Problems gemäß PÓLYA und in Anlehnung an die kognitionspsychologischen Definitionen als Situation verstanden, die aus einem (unerwünschten) Anfangszustand, einem (erwünschten) Zielzustand und einer nicht unmittelbar überbrückbaren Lücke zwischen jenem Anfangs- und Zielzustand

3.1. Problemlösen als mathematische Kernkompetenz

besteht. Der Prozess, bei dem vom Anfangs- in den Zielzustand übergegangen wird, wird dann *Problemlösen* genannt und als planvolles Vorgehen gesehen. Die in diesem Prozess verwendeten Mittel nennt man *Problemlösestrategien*. Eine *Routineaufgabe* – oftmals auch einfach *Aufgabe* genannt – ist dann eine Situation bestehend aus einem Anfangszustand und einem Zielzustand, wobei der Übergang von Anfangs- zum Zielzustand auch durch einfache Anwendung bekannter Verfahren ohne größere kognitive Leistung möglich sein kann. Als Arbeitsdefinition werden *Arbeitsweisen* dann zudem als Handlungen eines Individuums verstanden, die zur Bearbeitung einer Aufgabe oder eines Problems vollzogen werden. Weiter müssen Arbeitsweisen nicht geplant oder bewusst durchgeführt sein.

In der Mathematik sind in den letzten Jahren mehrere theoretische Klassifikationen von Problemlösestrategien entstanden, die größtenteils darauf abzielen, eine systematische Vermittlung dieser für mathematische (Lern-)Prozesse so wichtigen Konzepte zu fördern, aber auch deren Anwendung bei Lernenden besser untersuchen zu können. Die besondere Bedeutung von Problemlösestrategien für die Mathematik zeigt sich darin, dass die Mathematik eine beweisende Disziplin ist. Das heißt nicht nur im Lernprozess oder im alltäglichen Leben lassen sich mathematische Problemlösestrategien anwenden, erkennen oder entdecken, sondern die logische Struktur der Mathematik als eigenständige Disziplin liefert implizite Beweistechniken, die als Problemlösestrategien verstanden werden können. Im weiteren Verlauf werden zunächst drei jüngere Klassifizierungen von Problemlösestrategien in der Mathematik vorgestellt, bevor abschließend einige Kriterien für gute Probleme in der Mathematik – im weiteren Verlauf *Problemlöseaufgaben* genannt – formuliert werden.

Problemlösestrategien nach BRUDER und BAUER (ehem. COLLET)

BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) (2011) gehen von der kognitionspsychologischen Definition des Problemlösens nach HUSSY (1984) aus, die sich in die bereits vorgestellten Definitionen einreicht und von einem Anfangs- und einem Zielzustand sowie dem Übergang von ersteren in zweiten spricht. Sie betonen hier ebenfalls die für die Mathematik so entscheidende Tatsache, dass ein mathematisches Problem – und damit analog mathematisches Problemlösen – eine kognitive Anstrengung beim Übergang vom Anfangs- in den Zielzustand erfordert. Sie sprechen also von einer Anforderungssituation, „die subjektiv als (kognitiv) schwierig erlebt wird.“ (BRUDER & COLLET, 2011, S. 11) In ihren weiteren Ausführungen zu Heuristiken und ihrem Fokus auf das Thema des *Lernens von Problemlösen* beziehen sie sich maßgeblich auf Merkmale, die bei erfolgreichen Problemlöser*innen zu beobachten sind. Hier greifen sie auf eine Weiterentwicklung derartiger

3. Theoretischer Rahmen

Merkmale von HASDORF (1976) durch BRUDER (2000) zurück. Demnach sind erfolgreiche Problemlöser*innen insbesondere durch die folgenden Fähigkeiten gekennzeichnet:

- **Reduktion**

Hierbei wird ein Problem meist in einer abstrahierenden Weise auf wesentliche Bestandteile heruntergebrochen. Dazu sind auch oftmals Visualisierungen und andere Hilfsmittel zur Strukturierung des Problems heranzuziehen.

- **Reversibilität**

Hierunter sind Vorgänge zu verstehen, bei denen Gedankengänge umgekehrt oder Lösungswege in umgekehrter Reihenfolge gedacht werden. Es handelt sich dabei um weniger intuitive Ansätze, die eine hohe Flexibilität und ein größeres Maß an hypothetischem Denken erfordern.

- **Aspektbeachtung**

Es ist die Fähigkeit gemeint, nicht nur einzelne, sondern direkt mehrere Aspekte eines Problems zu betrachten bzw. diese zunächst zu erkennen und dann in den Lösungsprozess mit einzubeziehen. Es wird dadurch die gesamte Struktur des Problems besser verstanden und die Abhängigkeiten der einzelnen Teile eines Problems können identifiziert und untereinander aufgelöst werden. Dieses Miteinbeziehen unterschiedlicher Aspekte und Sichtweisen verhindert mitunter die Gefahr, an einem einzelnen Ansatz zu scheitern und damit den gesamten Lösungsprozess zu blockieren.

- **Aspektwechsel**

Bei einem Aspektwechsel wird im einfachsten Fall die Darstellungsform des Problems gewechselt. Dadurch sollen neue Lösungsansätze generiert werden und insgesamt das Verständnis über die Natur des Problems erweitert werden. Es sind hier jedoch auch weiterführende Prozesse gemeint. Beispielsweise ließen sich Anfangs- oder Zielzustand geschickt verändern, wodurch Abgrenzungs- oder Spezialfälle sichtbar werden, die die Problematik veranschaulichen können.

- **Transferierung**

Hierunter fallen Ansätze, bei denen bereits bekannte Verfahren übertragen oder neu kombiniert werden. Dazu ist es vor allem notwendig, die Struktur eines Problems klar zu erkennen. (S. 33)

Zusammenfassend zeichnen sich gute Problemlöser*innen also durch ein umfangreiches Vorwissen, aber insbesondere auch einen flexiblen und kreativen Umgang mit selbigem aus. BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) sprechen von einer „geistigen Beweglichkeit“

(2011, S. 11), was sich mit der neueren psychologischen Sichtweise deckt, dass Wissen und Problemlösen zusammen zu denken sind.

BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) beschreiben anschließend eine Unterteilung von *Heurismen*, wobei Heurismen oder heuristische Verfahren in diesem Kontext gerade die Problemlösestrategien sind. PÓLYA (1995) beschreibt die Heuristik als wissenschaftliche Disziplin wie folgt:

„Die Heuristik beschäftigt sich mit dem Lösen von Aufgaben. Zu ihren spezifischen Zielen gehört es, in allgemeiner Formulierung die Gründe herauszustellen für die Auswahl derjenigen Momente bei einem Problem, deren Untersuchung uns bei der Auffindung der Lösung helfen könnten.“ (S. 5)

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sind Heurismen und Problemlösestrategien gleichbedeutend zu verstehen.

Bei der Klassifizierung von Heurismen stellen BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) allgemein Heurismen vor, die sowohl bei der Bearbeitung von schweren Aufgaben im Mathematikunterricht hilfreich sind, als auch eine alltägliche Bedeutung haben können. Prinzipiell merken sie allerdings an, dass Heurismen insbesondere im Bereich der Begabtenförderung und in Situationen von Wettbewerben zu bestimmen sind, da sie dort vermehrt beobachtet werden können und derartige mathematische Heurismen durch eine Generalisierung auch auf leichtere Problemsituationen anwendbar sind (2011, S. 36).

BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) unterscheiden nach *heuristischen Hilfsmitteln*, *heuristischen Strategien* und *heuristischen Prinzipien* und differenzieren diese weiter konkret aus. Diese Unterteilung von Heurismen lässt sich durch eine Lokalität des jeweiligen Heurismus beschreiben. Heuristische Hilfsmittel sind dabei jene Heurismen, die unmittelbar in einem Schritt der Problemlösung Anwendung finden können. Heuristische Strategien und Prinzipien sind hingegen Heurismen, die ein globaleres Vorgehen für den gesamten Problemlöseprozess oder eine Teilmenge von Lösungsschritten vorgeben.

Zu den heuristischen Hilfsmitteln zählen BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) insbesondere solche Heurismen, die für sich gesehen keine eigenständigen Lösungsstrategien sind. Einzelnen angewendet werden diese Heurismen kein Problem lösen können. Vielmehr sind sie Hilfsmittel – daher die Namensgebung – um ein Problem besser zu verstehen, eine Struktur vorzugeben oder das Problem zu visualisieren bzw. zu reduzieren. Auch nach der Problembewältigung können heuristische Hilfsmittel für reflexive Betrachtungen oder dokumentarische Verfahren herangezogen werden. BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) (2011) führen die folgenden Heurismen als heuristische Hilfsmittel auf:

- **Informative Figuren**

Darunter fallen Visualisierungen, die versuchen, das Problem in seiner Struktur

3. Theoretischer Rahmen

darzustellen. Es sollen dabei die Beziehungen der einzelnen Aspekte eines Problems und möglichst viele zusätzliche Informationen abgebildet werden. Oftmals geschieht dies im Sinne einer Abstraktion. Informative Figuren (oder auch Skizzen) dienen grundsätzlich dazu, eine Problemsituation zu strukturieren und daraus mögliche Lösungsansätze abzuleiten. Das Anfertigen von passenden Skizzen und generell von fruchtbaren informativen Figuren ist hier jedoch selbst auch als Prozess zu sehen, der von einem tieferen Verständnis der Problemstellung und seinen impliziten Relationen abhängt. Zusätzlich können sinnvolle informative Figuren meistens nur mit einem generellen Verständnis der relevanten Sachgegenstände überhaupt korrekt dargestellt werden.

- **Tabellen**

In Tabellen werden meistens gegebene (numerische) Informationen direkt abgebildet und zusammengetragen. Sie stellen also zunächst ein Datenblatt mit Werten dar, die eine Problemstellung mit sich bringt. In einer bewussten Anwendung bieten sie die Möglichkeit, Probleme zu strukturieren und ggf. sogar zu reduzieren. Zudem lässt sich mit ihnen eine Übersicht möglicher Lösungsansätze generieren oder festhalten. Weiter sind sie neben informativen Figuren eine Möglichkeit, Muster eines Problems offen zu legen und daran grundsätzlich mögliche Lösungsansätze zu entdecken. Im Gegensatz zu informativen Figuren benötigen sie zur Erstellung weniger Vorwissen. Dennoch ist eine gewisse Erfahrung im Umgang mit Datenblättern, aber auch ein teilweises Verständnis für die Struktur der Problematik hilfreich, da die oben angesprochenen Muster nicht in jeder tabellarischen Darstellung ersichtlich werden müssen. Ein geschickter, flexibler und kreativer Umgang mit Darstellungsformen ist hier hilfreich. Als spezielle Muster, die von Tabellen aufgedeckt werden können, sind bspw. Inter- und Extrapolationsphänomene zu nennen. Es lassen sich auch oftmals invariante Merkmale in den Daten erkennen.

- **Wissensspeicher**

Unter Wissensspeicher sind vielfältige Sammlungen von Wissen gemeint. Dazu zählen Sammlungen von Faktenwissen oder auch gängige Formelsammlungen, aber eben auch Sammlungen, in denen Lösungsansätze und heuristische Verfahren mit Beispielen und Anwendungsfeldern zusammengetragen sind. Für die alltägliche Problembewältigung ist heutzutage oftmals entscheidender, dass der Zugriff auf derartige Wissensspeicher schnell und treffsicher geschieht, als dass das entsprechend abgebildete Wissen unmittelbar verfügbar ist. In einem problemlöseorientierten Denkprozess ist auswendiggelerntes und unmittelbar verfügbar gehaltenes (Fakten-)Wissen sogar möglicherweise hinderlich, wie es bspw. die *Cognitive-Load-Theorie* aus der Psychologie anschaulich beschreibt. Dennoch ist anzumerken, dass

die Wissensspeicher, bzw. das in ihnen festgehaltene Wissen nicht losgelöst vom Individuum und dessen eigenen Wissen gesehen werden sollte. Der Zugriff auf Wissensspeicher kann nur dann fruchtbar für den Problemlöseprozess sein, wenn das darin enthaltene Wissen vom Individuum auch anwendbar ist. Dazu muss das Individuum mit dem entsprechenden Wissen vertraut sein. Der Umgang mit Wissensspeichern ist also im Vorfeld zu üben und im Idealfall werden Wissensspeicher selbstständig angelegt.

- **Lösungsgraphen**

Diese dienen der strukturellen Darstellung des Vorgehens. Im Unterschied zu informativen Figuren bilden sie das Vorgehen bei der Problembearbeitung ab und nicht das Problem an sich. Dennoch wird anhand ihnen auch die Struktur des Problems erkundet. Grundlegende Formen von Lösungsgraphen behandeln vor allem die Klärung von Anfangs- und Zielzustand – für den Fall, dass diese überhaupt klar feststellbar sind. Gerade in der Mathematik und spezieller bei dortigen Beweisaufgaben stellen Lösungsgraphen eine gute Möglichkeit dar, um die Struktur der Beweisführung zu erkunden, auszuloten und festzulegen.

- **Gleichungen**

Gleichungen sind Mittel der Mathematik, mit denen Problemstellungen auf eine formale Schreibweise reduziert werden können. Sie stellen dabei in den meisten Fällen eine Erhöhung des Abstraktionsgrades dar, wodurch sie als heuristisches Hilfsmittel anspruchsvoll sind. Gleichzeitig ist diese Überführung in die formale (algebraische) Schreibweise ein sehr mächtiges Mittel, mit dem plötzlich ein großes Feld der Mathematik geöffnet und damit eine große Anzahl mathematischer Ansätze verfügbar gemacht werden. Schon DESCARTES hat in seiner unvollendeten Arbeit *Regeln zur Anleitung des Geistes* eine „universelle Methode des Problemlösens“ angestrebt, wobei PÓLYA (1995) die Schritte sinngemäß folgendermaßen skizziert:

1. Reduktion eines Problems auf ein mathematisches Problem
2. Reduktion eines mathematischen Problems auf ein algebraisches Problem
3. Reduktion eines algebraischen Problems auf eine einzelne Gleichung

Nun lässt sich bekanntlich nicht jedes Problem auf eine Gleichung reduzieren. Dennoch leitet SCHREIBER (2014) in seinen Vorlesungsinhalten zum Thema *Heuristik* aus den Notizen von PÓLYA und DESCARTES einen dazu passenden Heurismus wie folgt ab:

1. Reduktion eines Problems auf die Bestimmung unbekannter Größen

3. Theoretischer Rahmen

2. Beschreibung der Beziehungen, die gemäß der Bedingung zwischen den Unbekannten und den Daten bestehen müssen
3. Abtrennen eines Teils der Bedingung, wonach dann eine Größe zwei verschiedene Ausdrucksweisen hat

Der letzte Schritt führt dann gerade zur Form einer Gleichung, bzw. bei Wiederholung zu einem Gleichungssystem. (S. 45–68)

Heuristische Strategien sind nach BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) grundsätzliche Vorgehensweisen, auf die zurückgegriffen werden kann, wenn die grundlegende Thematik eines Problems im Wesentlichen verstanden wurde. Sie sind dabei größtenteils alltagstauglich formuliert und nicht rein fachspezifisch anwendbar. Die Namensgebung als Strategie legt den strategischen Charakter dieser Heurismen nahe. Sie sind also als Vorgehensweisen zu sehen, die eine geplante und systematische Lösung eines Problems herbeiführen sollen. Zu den heuristischen Strategien zählen BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) (2011) die folgenden Heurismen:

- **Systematisches Probieren**

Das Ausprobieren im Sinne eines *trial-and-error*-Ansatzes ist ein urmenschliches Vorgehen. Das Lernen im direkten Austausch mit der Umwelt durch oftmals naive Verhaltensweisen ist vom Kindesalter an zu beobachten, wenngleich es gesellschaftlich später als eher plump und wenig erstrebenswert gesehen wird. Aus diesem Grund versuchen Menschen im weiteren Lebensverlauf weitestgehend auf derartige Ansätze verzichten zu können. Auch das Nachahmen als Lernen am Beispiel wird früh vollzogen, aber schnell als eher negativ konnotiert. Wertet man das Ausprobieren zu einem systematischen Probieren auf, so entsteht eine durchaus beachtenswerte Strategie bei der Problembewältigung. Der Unterschied zum einfachen – evtl. willkürlichen – Ausprobieren und Nachahmen liegt im systemhaften Vorgehen. Dabei werden die unterschiedlichen und nacheinander durchgeführten Ansätze jeweils aufeinander aufbauend angeordnet. Ein missglückter Ansatz liefert nicht selten direkt die Bedingung für einen angepassten erfolgversprechenden Ansatz. Dem systematischen Probieren liegt zudem ein grundlegendes Verständnis für die Beschaffenheit der Problemsituation zugrunde, wonach das Ausprobieren eben nicht ziel- und wahllos vonstattengeht. Stattdessen tritt ein Ausprobieren möglicher und plausibler Ansätze zutage, das die Problemstellung immer weiter eingrenzen und ausschärfen kann. In vielen Situationen liefern Spezialfälle und Beispiele Ideen für allgemeingültige Lösungsansätze oder Ansatzpunkte, warum bestimmte Verfahren keine Lösung bringen können. Gerade in einer derartigen Negativität der Erkenntnisse steckt ein entscheidender Vorteil des systematischen Probierens. Es

liefert nach genügend langer Zeit nicht nur womöglich einen korrekten Lösungsweg, sondern zusätzlich stehen die vorigen missglückten Ansätze jeweils für ein tieferes Verständnis für die Problemsituation und angrenzende Problemfelder – meist im Sinne einer Abgrenzung. Um das systematische Probieren möglichst erfolgreich zu gestalten, sollte das Vorgehen gut dokumentiert werden. Erst dadurch wird eine gesamte Erkenntnis aus den einzelnen Teilerkenntnissen sichtbar. Der Rückgriff auf ikonische oder enaktive Darstellungen bei den einzelnen Ansätzen ist ebenfalls sinnvoll.

- **Vorwärtsarbeiten**

Beim Vorwärtsarbeiten wird versucht, aus gegebenen Dingen die gewünschten Dinge abzuleiten. Es ist also ein vorwärts gerichteter Weg vom Anfangs- zum Zielzustand gemeint. BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) sprechen auch von einem „Probieren mit Richtung“ (2011, S. 76). Im Sinne der Mathematik können Schritte des Vorwärtsarbeitens als Implikationen verstanden werden. Ausgehend von gegebenen Voraussetzungen werden immer wieder Folgerungen abgeleitet, bis die finale Behauptung als Zielzustand erreicht ist. Das Vorwärtsarbeiten ist gerade dann anwendbar, wenn der Anfangszustand klar umrissen ist. Es bietet zudem die Möglichkeit, explorativ oder mit wenig Planung in Richtung der Zielsetzung vorzugehen, da es eben primär nur am Anfangszustand anzusetzen ist. Dennoch ist für eine erfolgreiche Anwendung ein Verständnis hinsichtlich der Einschätzung der Relevanz der abgeleiteten Erkenntnisse für das Ziel entscheidend.

- **Rückwärtsarbeiten**

Das Rückwärtsarbeiten ist eng verwandt mit dem Vorwärtsarbeiten, wobei der Ansatz ausgehend vom Zielzustand gestartet wird. Es wird sich hierbei die Frage gestellt, welche Bedingungen zur Erfüllung des Zielzustandes gelten müssten. Ausgehend davon wird in einem umgekehrten Denkprozess bis zum Anfangszustand zurück gedacht. Das Rückwärtsarbeiten ist immer dann gewinnbringend zu verwenden, wenn die Zielsetzung klar ist. Es erfordert allerdings eine hohe Flexibilität im Denkprozess und spricht insbesondere die bereits genannte Fähigkeit zur Reversibilität an.

- **Suchen von Analogien**

Bei den Analogieschlüssen wird nach anderen – idealerweise bereits gelösten – Problemsituationen gesucht, die eine Verwandtschaft zum aktuellen Problem aufweisen. In diesen Fällen werden die bereits getätigten erfolgreichen Lösungsansätze als mögliche Ansätze für die vorliegende Problemsituation herangezogen.

3. Theoretischer Rahmen

- **Rückführungsprinzip**

Das Rückführungsprinzip wird auch als das Rückführen vom Unbekannten auf Bekanntes bezeichnet. Es wird eine Nähe zum Analogieschluss deutlich, wobei das Rückführungsprinzip eine Situation für einen Analogieschluss herbeiführen möchte. Dabei wird das Problem transformiert, zerlegt, reduziert oder erweitert, um dann einen Analogieschluss zuzulassen. In der Mathematik passiert dies bspw. häufig durch eine Betrachtung von Einzel- oder Teilfällen auch oftmals im Sinne einer Fallunterscheidung. Die Fallunterscheidung selbst wird von BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) aber als eigenständiges mathematisches Prinzip verstanden. Die hier erwähnte Fallunterscheidung ist nur als Mittel zum Zwecke der Rückführung auf Bekanntes zu verstehen. (S. 68–87)

Es sind zwei Dinge anzumerken: Das Suchen von Analogien und das Zurückführen von Unbekanntem auf Bekanntes ließe sich auch als eine Strategie zusammenfassen. Die Unterscheidung lässt jedoch eine feinere Differenzierung von Problemlösevorgängen zu. Gerade in der Mathematik geschieht das Zurückführen auf Bekanntes in einer derart systematischen Weise, ohne dabei direkt einen Analogieschluss im Sinn zu haben. Beispielsweise lassen sich viele dreidimensionale geometrische Probleme in jeweils zweidimensionale Teilprobleme aufteilen, die für sich gesehen einfacher zu handhaben sind. Ein Analogieschluss auf bekannte zweidimensionale Probleme muss hier nicht das Ziel sein. Weiter können das Analogieprinzip und das Rückführungsprinzip auch als heuristisches Prinzip, also eine allgemeinere Vorgehensweise beim Problemlösen verstanden werden. BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) merken ebenfalls explizit an, dass grundsätzlich nichts gegen eine solche Einteilung spricht. Sie ordnen diese aber dennoch den heuristischen Strategien zu (2011, S. 68–70).

Unter heuristischen Prinzipien fassen BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) insbesondere diejenigen Heurismen zusammen, die mit den Fähigkeiten des Aspektwechsels und der Aspektbeachtung in Zusammenhang stehen. Diese zeichnen sich durch eine allgemeinere Form der Bearbeitungsweise als heuristische Hilfsmittel aus. Sie sind aber im Gegensatz zu heuristischen Strategien auch deutlich stärker an die fachlichen Inhalte gebunden, da sie als Prinzipien implizit und explizit aus entsprechenden Fachgebieten hervorgehen. BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) stellen hier insbesondere mathematische Prinzipien des Problemlösens vor, die in eigenen Studien (BRUDER, 1988, 2000) beobachtet wurden. Sie geben die folgenden heuristischen Prinzipien der Mathematik an:

- **Zerlegen und Ergänzen**

Das Zerlegungs- und das Ergänzungsprinzip beschreiben zueinander komplementäre Handlungen. Grundsätzlich spiegelt sich in beiden Prinzipien die Idee des Rückführens auf Bekanntes wider. Ein Teil eines Problems wird derart zerlegt oder

ergänzt, sodass schließlich ein transformiertes Problem entsteht, das mit Hilfe eines Analogieschlusses behandelt werden kann. Dabei ist das Prinzip von Zerlegen und Ergänzen sehr anschaulich in der Geometrie an der Zerlegungs- und Ergänzungsäquivalenz geometrischer Figuren ersichtlich. Aber auch in anderen Fachgebieten findet es Anwendung. Es zeigt sich bspw. in der quadratischen Ergänzung in der Algebra. In der Arithmetik wird das Zerlegen häufig mit der Division verbunden, wobei auch das Subtrahieren im Sinne des Zerlegens gesehen werden kann. Dennoch ist dieses Prinzip nicht nur in der Umsetzung in fachlichen Inhalten gemeint. Auch die Aufteilung eines Problems in Teilprobleme ist darunter zu verstehen.

- **Prinzip der Fallunterscheidung**

Die Fallunterscheidung kann dem Prinzip des Zerlegens untergeordnet werden. Tatsächlich ist sie ein Spezialfall des Zerlegens, denn hier wird ein Problem vollständig in Teile zerlegt. Mit einer vollständigen Zerlegung ist dabei gemeint, dass bei der Fallunterscheidung die Gesamtheit aller möglichen Fälle beibehalten wird. Die Einzelteile zusammengenommen stehen also für alle möglichen Fälle. Damit kann die Fallunterscheidung eine Lösung des gesamten Problems darstellen. Die Abgrenzung zum (möglicherweise unvollständigen) Zerlegen sollte bei der Anwendung einer Fallunterscheidung explizit beachtet und dokumentiert werden. Es eignen sich hier Visualisierungen wie Tabellen, Aufzählungszeichen oder (Baum-)Diagramme. In der Schulmathematik sind Fallunterscheidungen anhand informativer Figuren oder Tabellen insbesondere im Bereich der Stochastik anzutreffen.

- **Invarianzprinzip**

Das Invarianzprinzip beschreibt ein Vorgehen, bei dem systematisch nach konstanten Teilen oder Bezugs- und Vergleichsgrößen in der Problemstellung gesucht wird. Dies geht oftmals mit dem Ziel einher, in Daten oder Problemen ein Muster zu erkennen, womit die Problemstellung besser verstanden oder gänzlich erklärt werden kann. Durch das Identifizieren von invarianten oder ähnlichen Objekten können Probleme zusätzlich weiter reduziert werden.

- **Extremalprinzip**

Das Extremalprinzip weist – nicht unbedingt typisch für heuristische Prinzipien – eine deutliche Nähe zum alltäglichen Problemlösen auf. Viele Vorgänge des alltäglichen Lebens und auch der beruflichen Tätigkeit geschehen im Sinne einer Optimierung. In den meisten Fällen geht es darum, den Aufwand zu minimieren und den Ertrag zu maximieren. In der Mathematik ist die Betrachtung von extremen Werten ein Vorgehen, das maßgeblich zur modernen Analysis geführt hat. Die Betrachtung von Grenzwerten sowie Polstellen und Singulärwerten ist dort

3. Theoretischer Rahmen

ein zentraler Bestandteil, der für die Behandlung vieler Problemstellungen aus diesem Bereich essenziell ist. Aber auch in den meisten anderen mathematischen Fachgebieten lässt sich das Extremalprinzip anwenden. In der Algebra bzw. genauer der Ring- und Modultheorie ist die Zerlegung in irreduzible Elemente von großer Bedeutung. Für die Zahlentheorie ist das gerade die eindeutige Zerlegung in Primzahlen. Man kann hier von einer Suche nach kleinsten Faktoren sprechen, die zur Konstruktion von ganzen Zahlenbereichen herangezogen werden können. In der Schulmathematik wären hier die Konzepte des kleinsten gemeinsamen Vielfachen oder dem größten gemeinsamen Teiler zu nennen.

- **Symmetrieprinzip**

Beim Symmetrieprinzip geht es darum, in der Problemstellung oder den der Problemstellung zugrundeliegenden Daten gewisse Symmetrien zu finden. Diese Symmetrien könnten auch als invariante Objekte unter gewissen Transformationen interpretiert werden, womit das Symmetrieprinzip als Unterkategorie des Invarianzprinzips stehen würde. Hier soll der Begriff Symmetrie aber für ein allgemeineres mathematisches Konzept von Natürlichkeit, Vergleichbarkeit und Eleganz innerhalb von Objekten verstanden werden. Das im Bezug zu Symmetrie wohl erstgenannte Fachgebiet der Mathematik ist sicherlich die Geometrie. Hier sind Symmetrien anschaulich vorzufinden und die Suche nach ihnen intuitiv möglich. Dennoch beansprucht quasi jedes andere Fachgebiet der Mathematik ebenfalls eine gewisse innere Schönheit für sich, die sich meistens in einer Form von Symmetrie widerspiegelt. In der abstrakten Algebra zeigt sich dies bspw. in der Galoistheorie anhand von Symmetrien in Nullstellen von Polynomen, die durch spezielle Homomorphismen – hier zu Automorphismen fortgesetzte Permutationen der Nullstellen – dargestellt und untersucht werden können. Es entsteht eine mächtige Verbindung zwischen Gruppen- und Körpertheorie.

- **Transformationsprinzip**

Das Transformationsprinzip lässt sich am ehesten mit der Kernkompetenz des mathematischen Modellierens aus den Bildungsstandards für den Mathematikunterricht (ISB, n. d. b; KMK, 2012) vergleichen. Es geht hier darum, eine Problemstellung in eine mathematische Problemstellung zu überführen, um diese dort mit mathematischen Mitteln lösen zu können und die Ergebnisse anschließend interpretativ auf die ursprüngliche Problemstellung zurückzuführen. (S. 87–104)

Problemlösestrategien nach STILLER et al. und SCHWARZ

STILLER et al. (2021) geben mit ihren beiden Unterrichtskonzepten *IHiMU* und *CHIME* zwei Konzepte für einen in den Mathematikunterricht integrierten Heuristikunterricht in der Schule an. Sie fundieren beide Konzepte auf einer Auswahl und Kategorisierung von schulrelevanten Heurismen gemäß KRICHEL (2017) und STILLER (2017), wobei sie sich an zwei Grundprinzipien orientieren: Demnach sind einerseits nur solche Heurismen für einen Heuristikunterricht in der Schule relevant, „die das Curriculum der Sekundarstufe I spiralförmig durchziehen können und sich immer wieder auf neue mathematische Inhalte und Problemstellungen anwenden lassen“ (STILLER et al., 2021, S. 224). Andererseits müssen die entsprechenden Heurismen klar und trennscharf formuliert und deren Nutzen auch für Schüler*innen ersichtlich sein (STILLER et al., 2021, S. 224). Sie geben eine Unterteilung schulrelevanter Heurismen in drei Kategorien an:

- Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung
- Heurismen der Analyse und Adaption
- Heurismen der konkreten Handlung

Diese drei Kategorien lehnen sie stark an die ersten drei Phasen des Problemlösens nach PÓLYA (2004) an (siehe Abbildung 3.1).

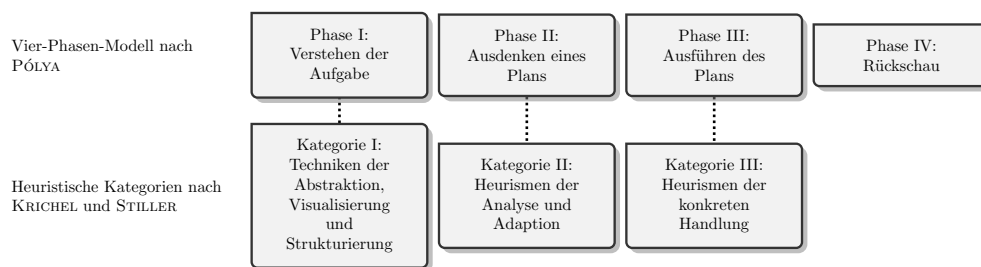


Abb. 3.1.: Verwandtschaft der Kategorien von STILLER et al. und den Phasen des Problemlösens nach PÓLYA. (STILLER et al., 2021, S. 225)

Unter einer heuristischen Technik – also gerade denjenigen Techniken zur Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung – verstehen STILLER et al. (2021) diejenigen Vorgehensweisen, mit denen ein Problem strukturiert, abstrahiert und ggf. reduziert werden kann. Es sind ähnlich den heuristischen Hilfsmitteln von BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) (2011) also gerade solche Heurismen gemeint, die weniger der tatsächlichen Problembewältigung als vielmehr diejenigen, die der Zusammenfassung, Bewusstmachung und Darstellung gegebener Informationen dienen. Damit soll das Problemfeld zuerst erkundet und erklärt werden, woraus sich weiterführende Heurismen ergeben können, die sich der tatsächlichen Problembewältigung widmen. STILLER et al. (2021) zählen

3. Theoretischer Rahmen

zu diesen Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung die folgenden schulrelevanten Heuristiken:

- **Anfertigen von Tabellen**

Analog zum Heurismus der Tabelle, wie ihn BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) beschreiben, sind hier tabellarische Darstellungen von (meist numerischen) Informationen gemeint, die einer übersichtlichen Visualisierung von gegebenen Informationen dienen sollen. Es lassen sich darin oftmals auch größere Problemfelder überschauen und daraus mögliche weiterführende Problemlösestrategien ableiten.

- **Erstellen grafischer Repräsentationsformen**

STILLER et al. fassen hier die von BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) beschriebenen Heuristiken der informativen Figuren und der Lösungsgraphen zusammen. Sie meinen damit jegliche ikonische oder enaktive Verbildlichung verbaler Problemstellungen, wodurch ein Abstraktionsgrad, aber auch eine mögliche Reduktion des Problems erreicht werden kann. Es lassen sich hier aber auch deutlich fachbezogenere mathematische Ansätze verstehen. Beispielsweise liefern Skizzen für algebraische Gleichungen möglicherweise einen Darstellungswechsel hin zu einer geometrischen Interpretation eines algebraischen Problems.

- **Aufstellen von Gleichungen**

Hierunter fällt ganz allgemein erneut das DESCARTSche Prinzip der Reduktion einer Problemstellung auf ein algebraisches Problem und die anschließende Reduktion auf eine Gleichung oder ein Gleichungssystem (SCHREIBER, 2014). Gleichungen dienen der Abstraktion eines Problems und öffnen eine Problemstellung hin zu einem weiten Feld aus innermathematischen Lösungsansätzen.

- **De- und Rekonstruktion**

Das Dekonstruieren eines Problems beschreiben STILLER et al. als das Zerlegen des Problems in mehrere (nach Möglichkeit ähnlich große) Teilprobleme. Anschließend werden diese einzelnen kleineren Probleme gelöst und die Teilergebnisse mit Hilfe einer Rekonstruktion zu einer Lösung des ursprünglichen Problems zusammengefügt. Die Dekonstruktion ist immer dann hilfreich, wenn die Problemstellung schwierig überschaubar oder komplex und umfangreich erscheint. Eine Unterteilung in kleinere Teilprobleme liefert einerseits bereits eine Strukturierung des Problemlöseprozesses und hat andererseits das Potential, die Komplexität durch weniger anspruchsvolle Teilprobleme insgesamt zu mindern. Diese Strategie lässt sich am ehesten mit einem handlungsorientierten Zerlegungsprinzip von BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) vergleichen. (S. 226-236)

Für die Phase der Planung bei PÓLYA beschreiben STILLER et al. dann die Heurismen der Analyse und Adaption. Mit ihnen soll das bereits erkundete, zusammengefasste oder abstrahierte Problem weiter analysiert und mögliche Lösungsansätze sondiert werden. Es sollen bspw. die vorliegenden Daten im Bezug auf möglicherweise sichtbare Muster untersucht werden, die eventuell sinnvolle Lösungsstrategien vorschlagen können. Zudem kann die Problemstellung hierbei angepasst, eingeschränkt oder anderweitig modifiziert werden, um das weitere Problemfeld zu veranschaulichen und die Anwendbarkeit anderer Heurismen einschätzen zu können. STILLER et al. (2021) unterscheiden hierunter zwei grundlegende schulrelevante Heurismen:

- **Heurismus der Affinität**

Bei diesem Heurismus wird eine Vorgehensweise beschrieben, die sich durch eine Suche nach ähnlichen, bereits gelösten Problemen auszeichnet. Damit sollen Strategien gewonnen werden, die bereits zur erfolgreichen Problembehandlung geführt haben und damit für die aktuelle Problemstellung geeignet erscheinen. Dabei wird die Struktur oder Teile der Problemstellung auf Ähnlichkeit zu bereits gelösten Problemen untersucht. BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) beschreiben diese Art der Heurismen mit dem Prinzip des Analogieschlusses und dem Rückführungsprinzip. STILLER et al. beschreiben diesen Heurismus in der strukturellen Richtung aber auch andersherum. Das heißt sie sehen hier auch die systematische Betrachtung bereits gelöster Probleme und einer entsprechenden Bewertung selbiger im Hinblick auf ihre Ähnlichkeit zum aktuellen Problem.

- **Heurismus der Strukturnutzung**

Hierbei wird das Problem auf zugrundeliegende Muster analysiert. Damit sollen grundsätzliche Strukturen der Problemstellung identifiziert und mögliche Lösungsansätze herausgearbeitet werden. Hierunter können insbesondere die von BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) unter den Invarianz-, Extremal- und Symmetriep Prinzipien zusammengefassten Heurismen fallen. (S. 236–243)

Die dritte Kategorie von Heurismen beschreiben STILLER et al. (2021) als Heurismen der konkreten Handlung, wobei sie darunter all diejenigen Heurismen verstehen, die zur tatsächlichen Problemlösung beitragen. Unter einer willkürlichen Anwendung dieser Strategien könnte ein gegebenes Problem also gelöst werden. Die vorigen Kategorien haben das Problem einerseits strukturiert, abstrahiert, reduziert oder visualisiert (Techniken der Abstraktion, Visualisierung und Strukturierung) und andererseits mathematisch erkundet und analysiert (Heurismen der Analyse und Adaption). In einer Anlehnung an PÓLYAs erste beiden Phasen des Problemlöseprozesses sollte damit ein – zumindest grober – Plan der Problemlösung bereits vorhanden sein. Diesen gilt es nun durchzuführen, wobei STILLER et al. (2021) die folgenden schulrelevanten Heurismen skizzieren:

3. Theoretischer Rahmen

- **Systematisches Probieren**

Auch STILLER et al. beschreiben ähnlich wie BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) das systematische Probieren als strukturiertes und geplantes Vorgehen mit klarer Zielvorgabe. Es werden dabei immer wieder veränderliche Objekte eines Problems angepasst und daraus eventuelle Spezial- und Einzelfälle oder auch Abgrenzungsbeispiele generiert, die immer weiter zur gesamten Problemlösung hinführen.

- **Vorwärtsarbeiten**

STILLER et al. sehen das Vorwärtsarbeiten als „progressives Vorgehen“ (2021, S. 247), das ausgehend von gegebenen Inhalten immer neue Erkenntnisse ableitet. Die einzelnen Schritte folgen also auch hier einer Logik der Implikation. Als Voraussetzung wird auch hier ein grundsätzliches Verständnis der Anfangssituation oder noch eher der elementaren Struktur der Problemsituation angegeben. Erst dann ist ein zum Ziel hin gerichtetes Vorwärtsarbeiten tatsächlich möglich.

- **Rückwärtsarbeiten**

Das Rückwärtsarbeiten ist ebenfalls analog zur Beschreibung von BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) angegeben. Es meint ein Vorgehen, bei dem jeweils eine Voraussetzung gesucht wird, die zum bereits bekannten Ergebnis führen kann. So wird ein Lösungsweg in umgekehrter Reihenfolge abgebildet, wobei ausgehend vom Zielzustand ein Weg zum Anfangszustand gesucht wird. (S. 244–249)

In Ergänzung zu den schulelevanten Heurismen von STILLER (2017) und KRICHEL (2017) gibt SCHWARZ (2018) eine Einteilung von Heurismen an, die er aus Sicht der universitären Mathematik konstruiert. Er orientiert sich dabei ebenfalls maßgeblich an den Phasen des Problemlösens von PÓLYA (1995, 2004). Das Ziel ist ein heuristischer Werkzeugkasten für das universitäre Lehren und Lernen von Mathematik. Er unterscheidet Heurismen dabei in Heurismen der Variation, Heurismen der Induktion und Heurismen der Reduktion. SCHWARZ unterscheidet Heurismen der Variation weiter in zwei Kategorien hinsichtlich der Art der Variation: Variation der Darstellung und Variation der Problemstellung.

- **Variation der Darstellung**

Bei der Variation der Darstellung spricht er auch von *Interpretation* und meint damit jene Strategie, die anhand unterschiedlicher Darstellungen und Repräsentationsformen der Problemstellung zu einem besseren Verständnis selbiger führen sollen und diese auch auf einer abstrakteren Ebene erschließen sollen. Er erwähnt hierbei insbesondere das auf BRUNER et al. (1971) zurückzuführende *E-I-S*-Schema, wonach drei Repräsentationsmodi unterschieden werden: *Enaktive*, *ikonische* und *symbolische* Darstellungen. Bei der Variation der Darstellung kann es sich also

insbesondere um solche Handlungen handeln, die ein Problem in eine enaktive, ikonische oder symbolisch formale Schreibweise überführen. Weiter sind hier aber auch systemhafte Wechsel gemeint, wie sie bspw. zwischen der Algebra und der Geometrie möglich sind.

- **Variation der Problemstellung**

Zur Variation der Problemstellung zählt SCHWARZ insbesondere die bereits beschriebenen Heurismen des Analogieschlusses sowie das Invarianz-, das Symmetrie- und das Extremalprinzip. Hierbei wird eine Umformulierung der Fragestellung oder die Isolierung von Teilschritten sowie das Erkennen von Mustern und Spezial- oder Abgrenzungsfällen angestrebt.

Bei den Heurismen der Induktion macht SCHWARZ in Einklang mit philosophischen Überlegungen PÓLYAS (1988) zur Natur der Mathematik eine wichtige Bemerkung, die gerade für die erste Diskontinuitätsstufe bei der Lehramtsausbildung, aber auch für alle anderen Studierenden in der Mathematik in der Anfangsphase äußerst relevant ist. Der logische Aufbau der universitären Mathematik erscheint gerade in dieser Anfangsphase oftmals dahingehend stark konträr zur erlebten Mathematik aus der Schule, dass sie als überwiegend deduktive Wissenschaft vermittelt wird – SCHWARZ spricht vom demonstrativen Charakter der Mathematik. Der Fokus auf Beweisen und die Reihung von Definition-Satz-Beweis und lediglich nachgelagerten Beispielen kann hier als Ursache genannt werden. Die Mathematik ist aber sehr viel gehaltvoller zu sehen. Gerade bei der Schaffung von Mathematik tritt ein stark induktiver Charakter zutage. Doch selbst bei der vollständigen Induktion, die viele Studierende bereits im ersten Semester als elementare Beweistechnik kennenlernen, bleibt womöglich eher eine deduktive Charakterisierung des Vorgangs durch die Formulierung des Induktionsschrittes als Implikation zurück. Tatsächlich ist die vollständige Induktion aber im Sinne eines Schließens von Einzelfällen auf eine Gesamtheit von Fällen zu verstehen. SCHWARZ führt neben dieser Form der vollendeten Induktion zusätzlich Heurismen der Induktion als unvollendete Induktionen auf und meint mit Induktion die allgemeinere Herangehensweise, von Spezial- oder Einzelfällen auf eine Allgemeingültigkeit schließen zu können. Dies kann man auch als ein Annähern an eine Lösung beschreiben. Es werden von ihm unter anderem das systematische Probieren, das Suchen nach Mustern, das Vorwärtsarbeiten und lokale und globale Approximationen zu den Heurismen der unvollendeten Induktion gezählt. Letztere sind im analytischen Sinne als Grenzwertprozesse formuliert.

Im Bezug zur vollständigen Induktion erwähnt SCHWARZ auch gängige Kritik an der Einteilung von elementaren Beweistechniken als heuristisches Mittel. Dort werden diese als Verfahren mit klar vorgegebener Struktur und Ablauf skizziert und sollten damit eher weniger als Heurismus verstanden werden. Die Unterteilung eines Beweises durch voll-

3. Theoretischer Rahmen

ständige Induktion in Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung und Induktionsschritt wird hier als zu stark vorgegebenes Verfahren gesehen. Das induktive Schließen im Sinne einer unvollendeten Induktion hingegen hat eher heuristische Züge. SCHWARZ (2018) erwidert, dass die vollständige Induktion sicherlich ein Verfahren mit klarer Struktur, aber eben auch kein Verfahren ist, das ohne jegliche kognitive Anstrengung durchführbar ist (S. 197f.). Insbesondere der Induktionsschritt erfordert ein grundlegendes Verständnis für das Problemfeld und eine Idee, wie zum Zielzustand übergegangen werden kann. Die vollständige Induktion ist für ihn also eher ein Plan, dessen konkrete Durchführung dennoch einer nicht trivialen Leistung entspricht.

Die Heurismen der Reduktion bei SCHWARZ sind durch einen Begriff der *Reduktion* charakterisiert, der sich an Verfahren der Suche nach Voraussetzungen oder falschen Folgerungen orientiert. Es sind damit insbesondere nicht nur Reduktionen der Problemstellungen auf kleinere Problemstellungen gemeint. Diese verortet SCHWARZ eher in den Heurismen der Variation. Auch die Reduktion der Komplexität ist kein hinreichendes Kriterium für einen Heurismus der Reduktion. Neben dem Rückwärtsarbeiten und einer Modularisierung der Problemstellung zählt er einen für ihn historisch bedeutsamen Heurismus zu dieser Kategorie: Die Methode des unendlichen Abstiegs. Geht man von einer Problemstellung aus, der eine endliche, streng monoton fallende Folge von Lösungen zugrunde liegt und konstruiert eine unendliche Folge immer kleiner werdender Lösungen des Problems, dann zeigt man, dass die Existenz einer endlichen Lösung des Problems nicht haltbar ist und das Problem somit keine Lösung besitzt. Die historische Relevanz ergibt sich aus der These, dass HIPPOSOS von Metapont (ca. 500-440 v. Chr.) – ein Schüler des PYTHAGORAS – mit diesem Verfahren erstmals – zumindest dokumentarisch – implizit bewiesen hat, dass das Verhältnis des *goldenen Schnitts* irrational ist. Auch dieses Verfahren erscheint ähnlich der vollständigen Induktion zunächst als vorgegebene Beweistechnik. Die kognitive Leistung und damit die Rechtfertigung als Heurismus liegt in der Konstruktion der unendlichen Folge von Lösungen. Die Anwendung dieses Prinzips ist vor allem in der Zahlentheorie gängig. Beispielsweise wird bei der Darstellung von Zahlen als Kettenbrüche oftmals auf eine Argumentation zurückgegriffen, die strukturell der Methode des unendlichen Abstiegs folgt.

Problemlösestrategien nach HOLZÄPFEL et al.

HOLZÄPFEL et al. (2018) beschreiben Komponenten von Problemlösekompetenz insbesondere nach SCHOENFELD (1992). Hier werden in diesem Zusammenhang die folgenden vier Komponenten aufgezählt: Vorwissen, Heurismen, Steuerung und Einstellungen.

- **Vorwissen**

Hierunter wird deklaratives und prozedurales Wissen zusammengefasst, das eine problemlösende Person bereits besitzt.

- **Heurismen, bzw. Problemlösestrategien**

Hier sind mathematische Tätigkeiten und Techniken gemeint, mit denen ein Problem untersucht und analysiert werden kann. Heurismen sind dabei so zu verstehen, dass sie kein Verfahren sind, das eindeutig anwendbar ist und garantiert zum Ziel führt. Sie erfordern eine eigenständige kognitive Leistung in der Anwendung und sind mehr als allgemeinere Vorgehensweisen, als als konkrete Verfahren formuliert.

- **Fähigkeit zur Steuerung**

Es sind damit einerseits lokale Handlungen gemeint, die eine Vorgehensweise kontrollieren können und andererseits werden auch weiter gefasste globale Prozesse beschrieben, die der Planung und Strukturierung des gesamten Vorgehens oder größeren Teilen davon dienen.

- **Einstellungen**

Als Einstellungen werden hier Eigenschaften von Personen beschrieben, die das Problemlösen meist indirekt beeinflussen können. Es sind sehr stabile Merkmale, die oftmals auch stark von der Situation abhängen. Unter Einstellungen werden unter anderem die psychologischen Begriffe von *Motivation* und *Affekt*¹ sowie *Überzeugung*² beschrieben.

Bei der Beschreibung eines Problemlöseprozesses unterscheiden HOLZÄPFEL et al. zwischen zwei Arten des theoretischen Modells: *Normative* und *deskriptive* Modelle. Normative Modelle beschreiben dabei einen idealisierten Problemlöseprozess und eignen sich aus diesem Grund insbesondere zur Vermittlung von Problemlösekompetenz. Sie stellen für Lernende eine Möglichkeit dar, ihren eigenen Prozess zu strukturieren und das eigene Vorgehen am Modell entlang zu verbessern. Bei der Beobachtung und Analyse von Bearbeitungen von Problemen fällt jedoch schnell auf, dass in den wenigsten Fällen ein idealtypischer Ablauf vorliegt. Deskriptive Modelle beschreiben meist real umgesetztes Problemlösen. Sie sind aus diesem Grund oftmals deutlich komplexer als normative Modelle und weisen weniger einheitliche Strukturen auf. Sie eignen sich insbesondere zur Analyse von vorliegenden oder beobachteten Problemlöseprozessen. Die vier Phasen des Problemlösens nach PÓLYA (2004) sind als theoretisches Modell eher der Art des normativen Modells zuzuordnen. Als Beispiel eines deskriptiven Modells führen HOLZÄPFEL et al. ein Problemlösemodell von ROTT (2013a) auf. Dies wurde anhand der Analyse von

¹Oftmals *attitudes* genannt; aus dem Englischen *attitude* für *Haltung*

²Oftmals *beliefs* genannt; aus dem Englischen *belief* für *Überzeugung*

3. Theoretischer Rahmen

Problemlöseprozessen von Schüler*innen der Sekundarstufe I entwickelt und weist neben strukturellen Ähnlichkeiten zu den gängigen normativen Modellen vor allem deutlich vielfältigere Wechselbeziehungen zwischen den einzelnen Phasen auf.

Bei den Problemlösestrategien selbst unterscheiden HOLZÄPFEL et al. (2018) nach drei Dimensionen, wobei sie weniger eine klassische Klassifikation vorgeben, als vielmehr eine Abgrenzung und eine stetige Unterteilung skizzieren. Sie unterscheiden hinsichtlich einer Dimension zwischen Lern- und Problemlösestrategie, einer Dimension zwischen metakognitiven und kognitiven Strategien und einer Dimension zwischen nicht-mathematischen und mathematischen Strategien.

- **Lern- und Problemlösestrategien**

Lernstrategien haben das Ziel, sich Wissen anzueignen oder aufzubauen. Problemlösestrategien hingegen sind zum Lösen von Problemen gedacht. Der Übergang ist hier fließend zu verstehen. Insbesondere wenn Probleme zur Wissenskonstruktion herangezogen werden, kann eine derartige Trennung von Lern- und Problemlösestrategie nicht mehr sinnvoll erfolgen. Zu den klassischen Lernstrategien zählt man bspw. das (Auswendig-)Lernen von Fachbegriffen, Vokabeln oder Algorithmen und Verfahren.

- **Metakognitive und kognitive Strategien**

Auch die Unterscheidung zwischen metakognitiven und kognitiven Strategien ist in der Regel nicht eindeutig möglich. Prinzipiell versteht man unter *Metakognition* das Wissen über Kognition bzw. auch die Steuerung von Kognition. Klassischerweise spricht man also genau bei denjenigen Prozessen von metakognitiven Strategien, die einen anderen kognitiven Prozess kontrollieren, regulieren oder manipulieren bzw. bei denen das Wissen über kognitive Prozesse verwendet wird, um bspw. eine planende oder strukturierende Einsicht abzuleiten.

- **Nicht-mathematische und mathematische Strategien**

Einige mathematische Strategien lassen sich auch allgemeiner auf andere Lebensbereiche ausweiten. Das systematische Ausprobieren oder eine Suche nach Fehlern ist nicht nur in der Mathematik anwendbar, sondern lässt sich auch in alltäglichen Problemsituationen verwenden. (S. 135–137)

3.2. Lehr-Lern-Modelle für offene und elementare Problemstellungen

Es wurde für das Problemlösen bereits die Bedeutung offener Fragestellungen thematisiert. Diese Offenheit lässt sich auf den gesamten Lernprozess übertragen. Schon der

Konstruktivismus beschreibt das Lernen als Vorgang, bei dem ein Individuum eine eigene Realität aus persönlichen Erfahrungen und selbstständigen Interpretationen seiner Umwelt heraus konstruiert. Nun muss man anmerken, dass es fraglich ist, wie ultimativ subjektiv jegliche persönliche Realität ist oder ob es nicht doch objektiv gleiche Objekte in der Wahrnehmung gibt. Gerade abstrakte Objekte der Mathematik mögen zwar eine subjektiv eigene mentale Form beim Individuum haben, die formale Definition beschreibt aber dennoch ein objektives Objekt. Auch in der Didaktik der Mathematik gibt es einen Begriff des Konstruktivismus. Hierunter fällt aber weniger eine psychologische Theorie des Lernens, sondern vielmehr die Idee, dass ein Lernprozess insbesondere dann nachhaltig gestaltet wird, wenn ein Individuum einen (mathematischen) Lerngegenstand selbstständig erkundet und womöglich erschließt (URHAHNE et al., 2019). Viele Lernmodelle, die sich einem derartigen Lernprozess verschreiben, lassen sich unter der Rubrik des selbstentdeckenden Lernens zusammenfassen.

Im Folgenden wird dieser Begriff des selbstentdeckenden Lernens im Mathematikunterricht – maßgeblich geprägt durch HEINRICH WINTER – beschrieben. Anschließend wird zusätzlich auf das *dialogische Lernmodell* von URS RUF und PETER GALLIN eingegangen, welches ebenfalls selbstentdeckende Züge aufweist, aber parallel unterschiedlich geartete Dialogformen im Lernprozess betont. Beide Modelle dienen später als Grundlage für ein Seminarconcept, bei dem Studierende schließlich möglichst selbstständig Probleme lösen sollen.

Selbstentdeckendes Lernen

„Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller – sowohl im Hinblick auf handfeste Leistungen, speziell Transferleistungen, als auch im Hinblick auf mögliche schwer fassbare Formung –, je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbstständigen entdeckenden Unternehmungen beruht.“ (WINTER, 2016, S. 1)

WINTER stützt diese Aussage auf sechs zentrale Merkmale aus dem Mathematikunterricht, die das selbstentdeckende Lernen als besonders fruchtbar für das Lernen von Mathematik begründen.

- **Einsicht und Verstehen als nachhaltiger Lernerfolg**

WINTER beschreibt ähnlich wie GALLIN (2010), dass ein erfolgreicher Lernprozess langfristig nicht ohne tatsächliche Einsicht und ohne ein grundständiges Verständnis für den Lerngegenstand auskommt. Von ihm „Scheinleistungen“ (WINTER, 2016, S. 1) genannte Reproduktionen von auswendiggelerntem Verhalten sind

3. Theoretischer Rahmen

zwar prinzipiell vereinzelt möglich, aber langfristig kaum anwendbar bzw. wenig ökonomisch.

- **Struktur der Mathematik**

Die „spezifische Wissensstruktur“ (WINTER, 2016, S. 2) der Mathematik und seiner Inhalte lässt eine Behandlung durch selbstständiges Erfahren im Allgemeinen zu. Sie ist technisch leicht zugänglich – sie setzt gerade an materielle Voraussetzungen quasi keine Anforderungen –, lässt sich dank ihres logischen Aufbaus auch selbstständig kontrollieren und ist durch zahlreiche alltägliche Bezüge anschaulich darstellbar bzw. mit einer Lebenswirklichkeit verknüpfbar.

- **Identifikation mit dem Lerngegenstand**

Das selbstständige Lernen und Arbeiten mit mathematischen Inhalten sorgt für vielfältige intellektuelle und emotionale Verbindungen zum Lerngegenstand. Erfolgserlebnisse und auch Misserfolge sind dort zahlreich als prägende Momente erfahrbar. Gerade im Bezug zu den psychologischen Konzepten von *Selbstkonzept* und *Selbstwirksamkeit* sind derartige Erfahrungen von großer Bedeutung.

- **Kompetenz des Transferierens**

Beim selbstständigen Lernen wird vom Lernenden ein hoher Grad an Autonomie verlangt. Insbesondere für Kompetenzen hinsichtlich des Transfers von Wissen erscheint diese Form des Lernens zuträglich.

- **Nachhaltiges Lernen**

Es wird davon ausgegangen, dass Wissensstrukturen, die in derartigen Lernformen errichtet worden sind, auch langfristig Bestand haben und zudem besser mit neuem Wissen verknüpft werden können.

- **Lernen als Prozess**

Lernen im Sinne von Entdecken ist in besonderem Maße verträglich mit der Idee, dass Lernen immer an einen vorhandenen Wissensstand anknüpft und nicht im luftleeren Raum stattfindet. Es fördert damit weiterführend auch die Idee von ständiger Weiterentwicklung.

Als besonders zentral wird hierbei die Anwendungsorientierung gesehen.

„Die Modellbildung, das Herzstück der Anwendungsorientierung, umschließt konstruktive, ja kreative Betätigung und das ist einer der Gründe, weshalb die Anwendungsorientierung für das Konzept des entdeckenden Lernens so zentral ist.“ (WINTER, 2016, S. 262)

3.2. Lehr-Lern-Modelle für offene und elementare Problemstellungen

Nun sollen anwendungsbezogene Situationen nicht einfach für sich stehend als Lerngelegenheiten vermittelt werden. Sie müssen eine Relevanz für den Lernenden aufweisen, um tatsächlich attraktiv für eine selbstständige Bearbeitung zu sein. Es lassen sich hier zwei Kriterien formulieren, anhand derer eine Auswahl von Anwendungen getroffen werden kann: Geeignete Anwendungen helfen Lernenden in ihrer aktuellen Existenz, haben also einen Einfluss auf derzeit relevante Handlungssituationen (Gegenwartsrelevanz) oder sie helfen im Bezug auf zukünftige Problemsituationen (Zukunftsrelevanz). Eine Anwendung um einer Anwendung Willen ist also für sich genommen keine Situation für selbstentdeckendes Lernen. Hierin lassen sich Parallelen zur eingangs erwähnten Erklärungsnot der Relevanz der Mathematik in der schulischen Allgemeinbildung wiedererkennen (siehe Kapitel 1). WINTER erwähnt zudem weiterführend noch Überlegungen hinsichtlich einer Auswahl von Anwendungen im Bezug auf didaktische Fragestellungen. Es wird hier von *Authentizität*, von *Zugänglichkeit*, von *Reichhaltigkeit* und von *Schwierigkeit* gesprochen. Anwendungen sollen demnach möglichst repräsentativ und anschaulich für den Lerngegenstand sein. Weiter sollen sie zugänglich in der Darstellungsform, aber auch unter Berücksichtigung von Vorerfahrungen und Vorwissen gestaltet sein. Die Reichhaltigkeit meint eine möglichst freie Erkundungssituation, die nicht durch eine zu eingengegte Behandlungsweise am Ende zu gar keinem echten selbstentdeckenden Lernprozess führt. Zuletzt sollen die Anwendungen dem fachlichen und methodischen Niveau der Lernenden angepasst sein. Gerade bei der Mathematik sollten hier womöglich allzu formale Konzepte umgangen werden. Zudem darf nicht vergessen werden, dass den Anforderungen an autonomes Arbeiten selbst bereits eine Schwierigkeit innewohnt. Die fachliche Schwierigkeit der Anwendung ist entsprechend zu mindern.

Auch TIMO LEUDERS formuliert in seinem Praxishandbuch zur Mathematikdidaktik (2020, S. 123) einige konkrete Kriterien für gute Probleme: Ein gutes Problem zielt auf allgemeinere mathematische Ideen und größere Zusammenhänge ab; es stellt eine Möglichkeit dar, selbstständig Entdeckungen, Vorgehensweisen und Ansätze zu erkunden; ihm liegt ein inner- oder außermathematischer Kontext zugrunde, der dem Niveau der Lernenden angepasst und demnach zugänglich gestaltet ist; es besteht aus einer Situation, die nicht trivial lösbar ist, sondern zu kognitiven wie auch zu metakognitiven Anstrengungen anregt. Man erkennt insbesondere im letztgenannten Kriterium die theoretischen Definitionen von Problemen aus der Psychologie. In Übereinstimmung mit WINTER lassen sich die folgenden drei zentralen Kriterien an gute Probleme stellen: *Elementarität*, *Offenheit* und *Relevanz*.

Das dialogische Lernmodell

Das Dialogische Lernmodell ist die didaktische Antwort von RUF auf Probleme, auf die er zu Beginn seiner Lehrtätigkeit in der Praxis des gymnasialen Unterrichts gestoßen ist. Seine Erfahrungen schildert er anschaulich anhand eines Modells von Angebot und Nutzung im Lernprozess.

„Als junger Deutschlehrer an einem Schweizer Gymnasium hatte ich, wie die meisten Anfänger, den Ehrgeiz, ein sehr gutes Angebot zu machen. Darum wendete ich auch sehr viel Zeit für die Vorbereitung auf. Mit dem Ertrag jedoch war ich nicht zufrieden. Also steigerte ich meine Anstrengung, um das Angebot zu verbessern. Der Effekt war erschreckend und bedrohlich zugleich. Je mehr ich mich anstrenge, so schien es mir, desto geringer war der Ertrag.“
(RUF et al., 2008, S. 13)

Die Beobachtung von RUF ist also, dass mit einem immer größeren Angebot eine geringere Nachfrage, also Nutzung dieses Angebots durch die Lernenden einhergeht. Umgekehrt kann man natürlich auch bei minimalem Angebot nicht von einer maximalen Nutzung ausgehen. Die Konsequenz für RUF ist dennoch ein vermindertes Angebot, das sich einem Maximum von Angebot und Nachfrage annähern soll. Eine hohe Nachfrage wird hier als nachhaltige und eigenständig vollzogene Auseinandersetzung mit den Lerninhalten verstanden. Es ist die Nähe zu den Ideen des selbstentdeckenden Lernens ersichtlich.

Die praktische Umsetzung mündete schließlich im dialogischen Lernmodell, das letztendlich von RUF und GALLIN aus ihrem Deutsch- und Mathematikunterricht heraus entwickelt wurde und mittlerweile in diversen anderen Fächern und auch Schulstufen umgesetzt wird (RUF et al., 2008). Zentraler Bestandteil sind deutlich weniger umfangreiche Angebotsphasen, die sich schneller und häufiger mit konkreten Nutzungsphasen abwechseln. Es entsteht ein abwechslungsreicher und diverser Austausch zwischen Lehrperson, Lernenden und Lerngegenstand. Die kleinschrittigen Prozessphasen sind immer wieder durch Rückmeldungssituationen abgeschlossen, wodurch insbesondere im Hinblick auf Leistungskontrollen eine Nutzung von Rückmeldungen für Lernende attraktiv und sinnvoll gestaltet werden. In klassischen Prüfungssituationen stellen Rückmeldungen – in Form von Korrekturen oder auch Noten – nur geringen Anlass zum Reflektieren und daraus Lernen dar. Die Prüfungssituation ist zu diesem Zeitpunkt bereits beendet und kann nicht mehr beeinflusst werden. Ein weiterer markanter Unterschied zur klassischen Prüfungs- oder Unterrichtssituation ist der Fokus auf Gutem und Richtigem und keine Defizitorientierung. Wie der Name bereits suggeriert und auch die Idee von kleinschrittigen Phasen mit ständigen Rückmeldungen nahelegt, soll der Unterricht in einem umfangreichen Dialog münden. Dabei soll dieser Dialog nicht einseitig als Monolog

von der Lehrperson zu den Lernenden stattfinden, sondern bidirektional und auch zwischen den Lernenden selbst geführt werden. Die praktische Umsetzung wird anhand eines nahezu vollständig verschriftlichten Prozesses vorgeschlagen. Dadurch kann einerseits eine reale Umsetzung in größeren Lerngruppen ökonomisch gestaltet werden und andererseits dem fachlichen Anspruch von selbstentdeckten Zugängen zu Lerninhalten besser begegnet werden. Lehrpersonen haben so insbesondere die Gelegenheit, auf schriftlich festgehaltene fachliche Äußerungen auch im Nachhinein ausführlich und angemessen eingehen zu können.

Alle diese Ansätze sollen vor allem drei zentralen Herausforderungen im Unterricht begegnen: Der Schule als Institution, den Lehrpersonen und den Lernenden (RUF et al., 2008).

- **Schule als Institution**

Beim Dialogischen Lernen steht die Anwendung und der Transfer von eigenem Wissen im Vordergrund. Damit erfüllt dieses Lernmodell insbesondere die allgemeine Anforderung an schulische Bildung, wonach die Vermittlung von handlungsrelevantem Fachwissen und Fachkompetenzen über die „nächste Prüfung hinaus“ (RUF et al., 2008, S. 7) angestrebt wird. Ebenso fördern variable Problemsituationen und der Fokus auf Kommunikation – mit sich selbst und mit anderen – eine Relevanz des Lernens für die alltägliche Lebensrealität der Schüler*innen.

- **Lehrpersonen**

Der stark verschriftlichte Lernprozess und die dokumentarische Form des Dialogischen Lernens vereinfacht die diagnostische Arbeit von Lehrkräften dahingehend, dass sie sich intensiv in den Lernprozess der Schüler*innen hineinversetzen können. Insbesondere im Hinblick auf differenzierende Maßnahmen ist dies als besonders gewinnbringend einzustufen.

- **Lernende**

Das Dialogische Lernen fordert und fördert ein hohes Maß an selbstständigem Arbeiten und Denken. Es stellt damit eine Möglichkeit dar, Schüler*innen prinzipiell – also insbesondere zunächst unabhängig vom Lerngegenstand – auf typische Problemsituationen des alltäglichen Lebens vorzubereiten. Es geht damit eine Stärkung der Persönlichkeit und ein gesteigertes Selbstwirksamkeitsempfinden einher. Für die fachlichen Inhalte entsteht ein Lernprozess bei dem der Lerngegenstand nicht losgelöst vom Lernindividuum vermittelt wird. (S. 7f.)

RUF et al. (2008) stellen für die Umsetzung von Unterricht im Sinne des dialogischen Lernens mehrere Instrumente vor, die nachfolgend genauer beschrieben werden.

3. Theoretischer Rahmen

- **Kernidee**

Die Kernidee steht für den fachlichen Aspekt des Lernangebots. Dabei soll es sich nicht um eine objektive, rein formale Darstellung eines Lerngegenstandes handeln, sondern die subjektive Sichtweise der Lehrperson dargelegt werden. In dieser Kernidee der Lehrkraft ist die fachliche Sichtweise, aber auch das individuelle Interesse und metakognitive Strategien zur Behandlung des Lerngegenstandes abgebildet. Die Kernidee fungiert für die Lernenden damit als erster Zugang zum Lerninhalt und dient als Wegweiser durch ein größeres Problemfeld über einen möglicherweise längeren Zeitpunkt. Die Benennung als Kernidee kann damit aus stoffdidaktischer Sicht irritierend sein. Aus einem höheren Standpunkt geht man beim Begriff einer Kernidee vor allem von einer fachlichen, sachlogischen Darstellung eines Lerngegenstandes aus. In Kreisen von Anwender*innen des dialogischen Lernmodells spricht man bei der Kernidee aber oftmals auch vom *Witz der Sache*. Es sind also neben den grundlegenden fachlichen Inhalten auch motivationale und interessengetriebene Gedanken vorhanden.

- **Offener Auftrag**

Der offene Auftrag soll den Lernenden nun selbst die Möglichkeit geben, den Lerngegenstand zum einen fachlich, aber eben auch im Sinne der obigen Kernidee auf Interessen, metakognitive Überlegungen und sonstige Auffälligkeiten hin zu untersuchen. Eine derartige Erschließung eines Lerngegenstandes soll eine umfangreiche Handlungskompetenz ansprechen und ausbauen, bei der neben fachlichen Komponenten auch personale, soziale und metakognitive Aspekte angesprochen werden.

- **Lernjournal**

Der Dialog im dialogischen Lernmodell ist maßgeblich im Lernjournal abgebildet. Die Lernenden sind angehalten, ihren Bearbeitungsprozess zu dokumentieren. Es sollen dabei nicht nur fachliche Überlegungen, sondern auch die angesprochenen motivationalen, emotionalen und metakognitiven Überlegungen bewusst gemacht werden. Zusätzlich stellt das Lernjournal eine Möglichkeit für die Lehrperson oder andere Lernende dar, gezielte Rückmeldungen zu platzieren.

- **Rückmeldung**

Die Rückmeldungen werden ebenfalls in Schriftform abgegeben und größtenteils im Lernjournal umgesetzt. RUF und GALLIN schlagen insbesondere bei Rückmeldungen im Lernjournal die schlichte Kennzeichnung von positiven Auffälligkeiten mittels Häkchen vor. Dies fördert mitunter die Betrachtung der Bearbeitungen als eigenständige Lösungen der Lernenden und verhindert eine Fokussierung auf

eine defizitäre Betrachtung. Das dialogische Lernen soll stattdessen ein „aktive[s] und konstruktive[s] Zuhören“ (RUF et al., 2008, S. 22) darstellen. Die erbrachte Leistung wird damit gewürdigt und eine gleichberechtigte Position zwischen Lehr- und Lernperson eingenommen. Fehlerhafte Prozesse werden als Gelegenheiten verstanden, den weiteren Lernprozess positiv beeinflussen zu können. Damit begegnet das dialogische Lernen einer zentralen Eigenschaft des mathematischen Denkens: In der Mathematik werden Objekte exakt definiert oder axiomatisch charakterisiert. Für ein umfassendes Verständnis sind insbesondere Abgrenzungsfälle bei diesen Definitionen oder axiomatischen Systemen nützlich. Derartige Überlegungen fördern insbesondere eine anschauliche mentale Repräsentation eines mathematischen Objekts beim Individuum.

- **Autographensammlung**

Nachdem die Lernenden einen offenen Auftrag erfolgreich oder genügend umfangreich bearbeitet haben, erstellt die Lehrperson ausgehend von den Dokumentationen eine Sammlung von interessanten Ideen und Vorgehensweisen. Es soll damit einerseits der Lösungsprozess anschaulich abgebildet werden und andererseits besonders zielführende, elegante, clevere oder kreative Ansätze gewürdigt werden.

- **Zweidimensionale Leistungsbewertung**

RUF und GALLIN streben eine zweifache Bewertung von Leistung an. Zum einen soll am Ende eines Lernprozesses weiterhin, wie in einer klassischen Unterrichtssituation, das resultierende Produkt bewertet werden. Zusätzlich fordern sie aber zum anderen eine Bewertung des Prozesses, welcher zu diesem Produkt führt. Hier sind individuelle und metakognitive Gesichtspunkte zu berücksichtigen. (S. 19–23)

Das dialogische Lernmodell spiegelt mit diesen Instrumenten maßgeblich das *Ich-Du-Wir*-Prinzip³ (siehe BARZEL et al., 2022) wieder. Die Kernidee und der offene Auftrag regen zunächst zur selbstständigen Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand an. Das Lernjournal hält diese Gedanken fest und liefert die Möglichkeit in einen schriftlichen Austausch mit der Lehrperson oder anderen Lernenden zu treten. Am Ende steht die Autographensammlung stellvertretend für die gesamten Ideen und Errungenschaften der Lerngruppe.

³Öfter auch als *Think-Pair-Share* bezeichnet.

3.3. Forschungslücke im Bereich Arbeitsweisen und Problemlösen bei Lehramtsstudierenden

Neben der fachlichen und institutionellen Dimension der doppelten Diskontinuität, wie sie in den vorigen Abschnitten dargestellt wurden, benötigt die Lehramtsausbildung auch eine Komponente zur Vermittlung von Wesenszügen und außerfachlichen Charakteristika der Mathematik. Es wurde hier bereits die Rolle des Problemlösens herausgestellt.

„Es ist allerdings eine Binsenweisheit, dass man Problemlösen nur durch Problemlösen lernen kann. Das könnte ein recht langwieriger Prozess werden! Diesen Lernprozess effektiv zu gestalten und ggf. geschickt abzukürzen, indem man aus einzelnen Musteraufgaben besonders viel Übertragbares lernt, das ist unser Anliegen.“ (BRUDER und COLLET, 2011, S. 29)

Es wird sich in der aktuellen Untersuchung der universitären Ausbildung von Lehramtsstudierenden größtenteils auf fachliche Inhalte und eine methodische Passung zur Verknüpfung von schulischer und universitärer Mathematik beschränkt. Dabei wird für die Rechtfertigung von gesonderten Inhalten und Veranstaltungsformen eine ähnliche Argumentation aufgeführt, wie sie für einen gezielten Heuristikunterricht beim Thema Problemlösen in der Schule ebenfalls Anwendung findet: Es genügt nicht einfach nur einen höheren Standpunkt einzunehmen, diesen zu vermitteln und davon auszugehen, dass Lernende daraus selbstständig eine Verknüpfung zu ihrem bisherigen Wissensstand herstellen. Ebenso genügt es beim Problemlösen nach obigem Zitat von BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) nicht nur Lernende in Problemsituationen zu versetzen und zu hoffen, dass daraus zielgerichtet und verlässlich eine höhere Problemlösekompetenz hervorgeht. Es gibt keinen Anlass dafür, bei der Vermittlung des Problemlösens an Lehramtsstudierende von anderweitigen Resultaten auszugehen. Im Bezug auf das Erreichen einer reflexiven Literacy-Stufe nach BAUER und HEFENDEHL-HEBEKER und hinsichtlich der Relevanz des Problemlösens für das Wesen der Mathematik erscheint ein konkreter Heuristikunterricht auch in der universitären Fachausbildung von Lehramtsstudierenden notwendig. Tatsächlich erfolgt die aktuelle Untersuchung von Lehramtsstudierenden allerdings größtenteils in Richtung von Lernstrategien (GRÜNER, 2011; KOLTER et al., 2015; WILD, 2005) und in Richtung fachlicher Fehlkonzepte bei der Bearbeitung mathematischer Fragestellungen zu Beginn des Studiums (FRISCHEMEIER et al., 2015; GRIESER, 2014; LIEBENDÖRFER & OSTSEKER, 2013). Zudem wird die Problemlösekompetenz bei Schüler*innen untersucht (PHONAPICHAT et al., 2014; ROTT, 2013a; SÖHLING, 2017), woraus sich bereits einige Erkenntnisse für das Lehren und Lernen vom Problemlösen und für einen Heuristikunterricht an der Schule ergeben haben (BRUDER & COLLET, 2011; LEUDERS, 2020). Eine genaue Betrachtung von Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden

bei der Bearbeitung umfangreicherer mathematischer Probleme fehlt bisher. Die vorliegende Arbeit möchte diese Lücke füllen und fokussiert sich dabei auf die Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden der gymnasialen Oberstufe im höheren Semester. Es sollen Arbeitsweisen lokal in den Bearbeitungen einzelner Aufgaben identifiziert und gleichzeitig ein längerer Problemprozess aufgezeichnet werden, sodass typische Arbeitsweisen in einer globalen Form beschrieben werden können. Zudem soll keine Intervention hinsichtlich einer Schulung von entsprechenden Studierenden in den betrachteten Arbeitsweisen stattfinden. Die vorliegende Studie bildet den Status Quo der derzeitigen Fachausbildung ab und leitet daraus mögliche Konsequenz für zukünftige Lehrinhalte und Lehrkonzepte – mindestens aber dahingehende Hypothesen – ab.

Neben der Thematik des Problemlösens liefert diese Arbeit auch eine stoffdidaktische Analyse der universitären algebraischen Ausbildung von gymnasialen Lehramtsstudierenden, die insbesondere als Beitrag zur Vernetzung von schulischer und universitärer Algebra zu sehen ist und damit ebenfalls der Behandlung der doppelten Diskontinuität in der Lehramtsausbildung gewidmet ist.

Es stellen sich insgesamt die folgenden Forschungsfragen:

Forschungsfrage 1

- (F1) „Inwiefern eignet sich die universitäre Algebra zur Vernetzung von schulischem und universitärem Fachwissen?“

Die erste Forschungsfrage nimmt sich der stoffdidaktischen Analyse algebraischer Themen der gymnasialen Lehramtsausbildung an der Hochschule an. Es stellt sich primär die Frage, inwiefern sich die algebraischen Themen aus Schule und Hochschule vernetzen lassen. Im Hinblick auf die bereits angesprochene Behandlung von Arbeitsweisen und einer möglichen Vermittlung von heuristischen Kompetenzen in der Lehramtsausbildung ist zudem von Interesse, inwiefern diese algebraischen Themen von Studierenden möglicherweise selbstständig erschlossen werden können oder gekonnt werden sollten. Damit ergeben sich die folgenden untergeordneten Subforschungsfragen:

- (F1a) „Welche Themen der universitären Algebra weisen eine fachliche Relevanz für Studierende des gymnasialen Lehramts im Bezug zu ihrem späteren Beruf auf?“
- (F1b) „Welche dieser Themen eignen sich zu einer Bearbeitung in einem selbstentdeckenden Lehrkonzept an der Universität und wie?“

Forschungsfrage 2

(F2) „Wie bearbeiten Studierende des gymnasialen Lehramts offene Arbeitsaufträge zu mathematischen Problemen?“

Mit der zweiten Forschungsfrage soll der Status Quo der fachlichen Ausbildung von Lehramtsstudierenden hinsichtlich deren Verständnis für mathematisches Arbeiten thematisiert werden. Es sollen damit insbesondere auch Aussagen bezüglich einer Kompetenz zum mathematischen Problemlösen getroffen werden können und insgesamt hinterfragt werden, inwiefern die fachliche Ausbildung dem Ziel dient, Lehramtsstudierende darauf vorzubereiten, ein ganzheitliches Bild der Mathematik an Schulen vermitteln zu können.

Die zweite Forschungsfrage wird aus methodischen Gründen in drei Subfragen aufgeteilt. Dies dient einer genaueren Betrachtung und Beantwortung der Fragestellung. Die methodische Begründung wird in Abschnitt 4.7 näher beschrieben.

(F2a) „Welche Arbeitsweisen werden von solchen Studierenden bei derartigen Arbeitsaufträgen verwendet?“

(F2b) „Welche dieser Arbeitsweisen werden in welchen Ausprägungen genutzt?“

(F2c) „Inwiefern lassen sich Typen von Studierenden hinsichtlich Arbeitsweisen beobachten?“

Teil II

Methodenteil

4. Methodik

Dieses Kapitel stellt den Methodenteil der vorliegenden Arbeit dar. Es werden die verwendeten wissenschaftlichen Verfahren dargestellt und erläutert sowie gegen andere Methoden abgegrenzt. Dabei werden passende Forschungsmethoden für beide Forschungsfragen behandelt. Da diese Forschungsfragen jeweils unterschiedliche Anforderungen an die Methode stellen, wird jede Frage gesondert diskutiert und ggf. für beide Fragen eine eigene Methode ausgewählt.

Man kann in der empirischen Sozialforschung allgemein zwischen zwei Formen von Daten und zwei Formen von Analysen unterscheiden: Qualitative und quantitative Daten und qualitative und quantitative Analysen. Unter quantitativen Daten wird im Folgenden die sozialwissenschaftliche Definition als Daten verstanden, die in numerischer Form vorliegen. Qualitative Daten können hingegen unterschiedlicher Art sein. Hier sind Transkripte und Textüberlieferungen, aber auch Audio- und Videoaufzeichnungen denkbar. Die Unterscheidung zwischen qualitativen und quantitativen Analysen ist hingegen schwieriger. Es wird im weiteren Verlauf die gröbere Unterscheidung dahingehend getroffen, dass die quantitative Analyse einer solchen mit numerischen und stochastischen Mitteln gleichkommt, wohingegen die qualitative Analyse insbesondere den Blick auf die Bedeutung des untersuchten Materials wirft. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022)

Die in Abschnitt 3.3 beschriebenen Forschungsfragen sind von qualitativer Natur. Für das vorliegende Forschungsinteresse wird demnach eine qualitative Analyse angestrebt. Da es sich bei der Betrachtung von Arbeitsweisen auch in Teilen implizit um die Frage nach dem Verstehen von Lern- und Denkprozessen handelt – solche Merkmale sind eindeutig als latent zu bezeichnen – ist davon auszugehen, dass das zu untersuchende Material in Form von qualitativen Daten vorliegen wird. Die hier beschriebene Studie ist demnach im Bereich der qualitativen Analyse von qualitativen Daten anzusiedeln.

Für die qualitative Forschung ist der Begriff der *Kategorie* von zentraler Bedeutung. Kategorien stellen eine Möglichkeit dar, Teile eines Materials durch abstraktere Beschreibungen zu klassifizieren. In vielen Fällen wird dadurch eine Reduktion des Materials angestrebt, bei der die Sinnhaftigkeit des Materials im Gesamten in Form der Kategorien erhalten bleibt. Aber auch ein Herausarbeiten der tatsächlichen Sinnstiftungen im Material kann damit versucht werden. Der Begriff der Kategorie wird im Folgenden derart verwendet, dass darunter die sozialwissenschaftliche Bedeutung verstanden wird, die

4. Methodik

man im gemeinen Volksmund auch mit Klasse bezeichnen kann. Demnach ist eine Kategorie „das Ergebnis der Klassifizierung von Einheiten.“ (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 53) Im Sinne der Mathematik könnte man auch von einer Einteilung von Objekten hinsichtlich eines Merkmals reden und zwei Objekte als zueinander in Relation stehend nennen, wenn sie sich in einem Merkmal ähneln oder gar übereinstimmen. Kategorien wären dann genau die Klassen, die durch Anwendung der Relation auf eine Menge von Objekten entstehen. Die Menge der entstehenden Kategorien wird Kategoriensystem genannt. Kategorien werden dabei entweder deduktiv auf Grundlage bereits vorhandener Theorien oder Hypothesen oder induktiv im Material gebildet. Gerade zweiteres Vorgehen ist für explorative Ansätze und in Forschungsgebieten, in denen noch keine grundständigen Theorien oder theoretischen Modelle existieren, sehr gewinnbringend. Auch deduktiv-induktiv-gemischte Ansätze sind denkbar. Hier wird oftmals von einer noch nicht vollständigen Theorie mit abgeleiteten deduktiven Kategorien an das Material herangegangen und diese induktiv ergänzt und ausdifferenziert. (FLICK, 2019; KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022)

Der Vorgang, bei dem einem Teil des Materials eine Kategorie zugeordnet wird, nennt man *Codieren*. Dabei unterscheidet man allgemein zwischen *Auswertungseinheit* und *Codiereinheit*. Eine Auswertungseinheit legt die Unterteilung der Gesamtheit des Materials in zu betrachtende Fälle fest. Beispielsweise können das die einzelnen Proband*innen einer Interviewstudie sein. Die Codiereinheit ist eine explizite Stelle im Material, der eine Kategorie zugeordnet wird. Die minimale und maximale Größe einer Codiereinheit variiert je nach konkreter Forschungsmethode stark. Es kann sich hier um ein einziges Wort oder einzelne Wörter bis Sätze handeln, aber auch ganze Abschnitte oder gar Seiten von Material sind möglich.

Im Folgenden wird zunächst die jüngere Entstehungsgeschichte der qualitativen Forschung insbesondere im deutschen Raum skizziert. Anschließend werden einige Ansätze zur qualitativen Analyse von qualitativen Daten vorgestellt. Den Anfang macht das sogenannte *Descriptive Coding* (WOLCOTT, 1994), das eine eher oberflächliche Methode des Codierens beschreibt, die stark an die quantitative Inhaltsanalyse angelehnt ist. Es folgen zwei prominente Vertreter der jüngeren qualitativen Sozialforschung: Die *qualitative Inhaltsanalyse* (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; MAYRING, 2022) und die *Grounded Theorie* (GLASER & STRAUSS, 2010). Für die qualitative Inhaltsanalyse werden zudem zwei Varianten skizziert. Es folgt eine Diskussion und eine Abgrenzung der vorgestellten Methoden und Methodologien, die abschließend im methodischen Ablauf mündet, der für die Forschungsfragen aus Abschnitt 3.3 festgesetzt wird.

4.1. Zur Aktualität interpretativer Sozialforschung und qualitativer Forschungsmethoden

Anfang des 20. Jahrhunderts entstand in Deutschland erstmals eine Konzeption der *Verstehenden Soziologie*. Grundgedanke war die Feststellung, dass Gesellschaft in den Wechselwirkungen ihrer Teilnehmenden stattfindet und zum Verstehen von eben dieser Gesellschaft, jene Wechselwirkungsprozesse untersucht werden müssen. Da es sich dabei aber meist um latente und situative Vorgänge handelt – insbesondere, wenn man an intrapersonale Vorgänge denkt – scheinen vor allem quantitative Methoden der empirischen Forschung an ihre Grenzen zu stoßen. Stattdessen zeichnet sich eine Notwendigkeit nach „Instrumenten der Datenerhebung und -auswertung [ab] [...], die [...] sowohl Zugang zu den Wahrnehmungen und Definitionsprozessen der Alltagshandelnden als auch zur Konstitution der gesellschaftlichen Wirklichkeit [...] in den interaktiven Prozessen sozialen Handelns ermöglichen.“ (ROSENTHAL, 2015, S. 32) Im deutschen Raum entwickelte sich daraufhin eine eher theoretische Soziologie mit Schwerpunkt auf makrosoziologischen Fragestellungen, die aber dennoch einen wesentlichen Teil im Sinne von methodologischen Grundlagen zu den später aufkommenden interpretativen Methoden beisteuern werden. In einem ähnlichen Zeitfenster entwickelte sich dagegen in den USA um die *Chicago School* ein tatsächlich qualitativer Empirismus, der später in den 1960er Jahren erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der *Grounded Theory* durch GLASER und STRAUSS (2010) haben soll. Hier finden sich erstmals ernsthafte Überlegungen hinsichtlich einer empirischen Rekonstruktion von subjektiven Sinnstiftungen und eine Betrachtung des einzelnen Falls. Es wurde sich insbesondere auf eine philosophische Form des Pragmatismus berufen, der auf den Philosophen und Mathematiker CHARLES SANDERS PEIRCE und den Psychologen WILLIAM JAMES zurückgeht. Demzufolge bemisst sich die Wahrheit einer Aussage unter anderem daran, welchen praktischen Nutzen die sich daraus ergebenden Ableitungen haben. Das Vorgehen ist demnach auch stark abduktiv und Hypothesen generierend formuliert. (FLICK, 2019; ROSENTHAL, 2015)

Mit zwei Weltkriegen und dem Aufschwung propagandistischer Maßnahmen sowie einer technologischen Entwicklung der Printmedien und Audio- und Videoaufnahmen zeigte sich in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts zudem die Notwendigkeit nach Instrumenten zur Auswertung großer Datenmengen in einem interpretativen Kontext. Die Inhaltsanalyse beschreibt in der Sozialwissenschaft gerade ein solches Instrument, wengleich zu Beginn das Hauptaugenmerk auf der Bestimmung von „Häufigkeiten eines bestimmten Merkmals“ (ROSENTHAL, 2015, S. 232f.) und damit auf einer quantitativen Auswertung von eher manifesten Inhalten lag. Auch nach den Kriegsjahren wurde die soziologische Forschung in der Bundesrepublik überwiegend durch quantitative Methoden sowie Verfahren, die an den Naturwissenschaften ausgerichtet sind, geprägt. Erst in

4. Methodik

den 1970er Jahren erstarkte die interpretative Sozialforschung insbesondere durch die *Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen* durch eine Rückbesinnung auf die Grundgedanken der verstehenden Soziologie aus dem Anfang des Jahrhunderts. Ins Zentrum rückte dabei erneut die Frage nach dem Unterschied zwischen Selbst- und Fremdverstehen und wie sich dieser Unterschied überbrücken lässt. Weiter diskutierte bspw. ULRICH OEVERMANN in seinem Forschungsprojekt *Elternhaus und Schule* Verfahren der objektiven Hermeneutik, die auch für die heutigen Verfahren der qualitativen Inhaltsanalyse in Teilen von Bedeutung sind. (FLICK, 2019; KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; ROSENTHAL, 2015)

Mit Blick auf die vielfältigen Ansätze innerhalb der interpretativen Forschung lassen sich grundsätzlich zwei Prinzipien formulieren, die bereits 1980 von CHRISTA HOFFMANN-RIEM diskutiert wurden. Als wesentlicher Bestandteil einer interpretativen Forschungsweise fordert sie ein *Prinzip der Kommunikation* und ein *Prinzip der Offenheit*. Das Prinzip der Kommunikation meint dabei, dass sich der Forschungsprozess in seiner Gesamtheit an der sozialen Wirklichkeit der Alltagshandelnden, also insbesondere an der wahrgenommenen Wirklichkeit der zu untersuchenden Subjekte orientieren soll. Dies betont vor allem die Unmöglichkeit, als Forschende tatsächlich objektiv und wertfrei Einsicht in die Wirklichkeit von Alltagshandelnden zu bekommen, ohne diese mit zu beeinflussen, bzw. ohne durch diese selbst beeinflusst zu werden. Weiter lässt sich daraus ableiten, dass die Sinnzuschreibung immer unter Berücksichtigung des gesamten Prozesses geschehen muss. Das Prinzip der Offenheit meint einen offenen Umgang mit Einflüssen im gesamten Forschungsprozess. Dazu zählt bspw. eine Offenheit gegenüber dem Ablauf einer Studie, aber auch eine Offenheit gegenüber dem Forschungsinteresse und den Forschungsfragen. Gerade das abduktive Vorgehen und der Fokus auf die Generierung von Hypothesen zeigt sich darin als zentrales Merkmal interpretativer Forschung. (FLICK, 2019; KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; MAYRING, 2022; ROSENTHAL, 2015; RÖSSLER, 2010)

Speziell die Inhaltsanalyse wurde in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts immer mehr für die Orientierung an quantitativen Verfahren und strengen Vorgaben an die Methode kritisiert. Einer der prominentesten dieser Kritiker war SIEGFRIED KRACAUER (1952), der auch erstmals eine qualitative Inhaltsanalyse thematisierte. Ihm zufolge sollen in der qualitativen Inhaltsanalyse im Gegensatz zur damals geläufigen Inhaltsanalyse nicht nur objektive Bedeutungen thematisiert werden, sondern eben auch latente Merkmale untersucht werden. Er forderte dabei selbstverständlich keine willkürliche Interpretation von sozialem Verhalten. Vielmehr sind bei ihm latente Bedeutungszuschreibungen immer im Sinne einer intersubjektiven Verständigung gemeint. KRACAUER sieht darin die Möglichkeit, dem tatsächlichen Sinn einer Handlung näher kommen zu können, als sie durch Quantifizierung zu abstrahieren und womöglich gänzlich aus dem Kontext ihrer Entstehung herauszulösen. Damit rückt das Verstehen von Texten und Handlungen

4.1. Zur Aktualität interpretativer Sozialforschung und qualitativer Forschungsmethoden

in den Vordergrund, wonach sich wie oben beschrieben das Prinzip der Hermeneutik anbietet. (FLICK, 2019; KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; ROSENTHAL, 2015)

Mit der Beschreibung eines Verfahrens der qualitativen Inhaltsanalyse durch PHILIPP MAYRING (1985) manifestierte sich die interpretative Sozialforschung endgültig in der gängigen Forschungspraxis. Er beschreibt dabei ein strukturiertes und theoriegeleitetes Verfahren, das eine Rekonstruktion im Sinne der objektiven Hermeneutik anstrebt. Es wird also versucht, durch Anwendung intersubjektiver sprachlicher Regeln, Textinhalte auszulegen und mit diesen Auslegungen auf die von dem*der Textsteller*in gemeinten Sinnstiftungen schließen zu können. Zentrales Werkzeug der qualitativen Inhaltsanalyse von MAYRING ist dabei ein sogenanntes Kategoriensystem, welches gerade die intersubjektiven sprachlichen Regeln vorgeben soll. Hier können nun im Unterschied zur allgemeinen Inhaltsanalyse auch latente Inhalte beschrieben und analysiert werden. Die Bedeutungszuschreibung bzw. die generelle Auswertung hin zu möglichen Erkenntnissen geschieht bei MAYRING dann aber wieder in einem überwiegend quantitativen Sinne. Beispielsweise konstatiert GABRIELE ROSENTHAL, dass sein Verfahren gleichzeitig Kriterien der quantitativen Sozialforschung erfüllen und Vorteile aus qualitativen Vorgehensweisen zumindest in eingeschränkter Form behalten möchte. „Damit fällt er [...] hinter die von Siegfried Kracauer 1952 formulierten Forderungen an die qualitative Inhaltsanalyse zurück.“ (ROSENTHAL, 2015, S. 232) Auch die stark theoriegeleitete Kategoriengenerierung ist für einen interpretativen Ansatz eher einschränkend und sicherlich nicht für jeden Kontext – insbesondere, wenn es noch keine ausreichend fundierte Theorie gibt – denkbar. Gerade im Fall fehlender Theorie ist aber ein qualitativer Ansatz im Sinne einer Abduktion wünschenswert. MAYRING formuliert zwar auch eine Variante der induktiven Kategorienbildung, so ist diese aber ebenfalls stark theoriegeleitet und wenig frei gestaltbar. Die qualitative Inhaltsanalyse nach UDO KUCKARTZ (2022) stellt hingegen die Entwicklung des Kategoriensystems in den Mittelpunkt des Verfahrens. Insbesondere wird eine Kategoriengenerierung am Material betont und generell das Vorgehen am Material orientiert und weniger strukturiert vorgegeben. Prinzipiell birgt eine kategoriebasierte qualitative Inhaltsanalyse jedoch die Gefahr, dass durch die Zergliederung des Materials, die „Textsegmente [...] aus ihrem Entstehungszusammenhang herausgenommen [...]“ (ROSENTHAL, 2015, S. 230) werden. Eine vorige Orientierung am Material selbst scheint aber auch für diesen Kontext und im Hinblick auf eine verstehende Sozialforschung mit Blick auf den Einzelfall gewinnbringender. (FLICK, 2019; KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; MAYRING, 2022; ROSENTHAL, 2015; SCHREIER, 2014)

4.2. Descriptive Coding

Beim Descriptive Coding (*descriptive* Englisch für *beschreibend*) wird ein Kategoriensystem angestrebt, das – wie der Name schon sagt – das vorliegende Material inhaltlich gut beschreibt. Dabei soll als Kategoriensystem eine Sammlung der Themen entstehen, die im Material angesprochen werden. Es wird ausdrücklich auf die Untersuchung hinsichtlich einer Sinnzuordnung oder die Betrachtung von Meinungen verzichtet. Die entstehenden Kategorien können als Schlüsselwörter für die im Material vorkommenden Themen verstanden werden. Aus diesem Grund spricht man auch öfter von *topic coding*, *topic tagging* und *index coding* (*topic* Englisch für *Thema*, *tagging* Englisch für *zuordnen*). Das Descriptive Coding liefert demnach eine grundlegende Begriffssammlung, mit der das weitere thematische Feld einer Forschungsfrage gut beschrieben werden kann. Man kann darin eine in Teilen quantitative Analyse von qualitativen Daten erkennen. (HUBERMANN & MILES, 2002; MILES, 2019; SALDAÑA, 2021; WOLCOTT, 1994)

Als Material eignet sich für die Methode des Descriptive Codings prinzipiell jede Art von qualitativen Daten. Dennoch findet die Methode insbesondere außerhalb von Interviewtranskripten Anwendung. Das Ziel, lediglich thematische Begriffe herauszuarbeiten, eignet sich für Interview-Studien nicht unbedingt, bei denen typischerweise das Verständnis vom Gesagten im Mittelpunkt steht. Aber auch hier kann das Descriptive Coding wie auch bei allen anderen Arten von Material eine Möglichkeit darstellen, einen groben inhaltlichen Überblick über das Material und die behandelten Themen zu bekommen. Am Ende der Methode steht das Kategoriensystem als Ergebnis, wobei das Material selbst für diese Methode keine Rolle mehr spielt. Damit kann diese Methode nur einen Einstieg in und eine Übersicht über das vorliegende Material liefern. Tiefere Sinnzuordnungen und weiterführende Analysen müssen anderweitig vollzogen werden. (MILES, 2019; SALDAÑA, 2021; WOLCOTT, 1994)

Beim Descriptive Coding werden einzelne Sinnabschnitte des Materials mit einem einzelnen Wort oder einer kurzen bildhaften Beschreibung thematisch zusammengefasst. Es soll dabei keine tiefere Interpretation der Bedeutung angestrebt, sondern lediglich eine beschreibende Form erreicht werden. Oftmals liefert das Material selbst bereits die Formulierung. Idealerweise wird das Material dabei mindestens zweimal durchgearbeitet. Im ersten Durchlauf werden die ersten Bezeichnungen selbst erstellt oder im Material ausgewählt. Im Anschluss folgt eine Organisation der entstanden Kategorien. Dabei werden Gruppen von möglicherweise identischen, ähnlichen oder verwandten Kategorien gebildet und das Kategoriensystem gegebenenfalls entsprechend angepasst. Der zweite Durchlauf erfolgt nun mit diesem angepassten Kategoriensystem, wobei dessen Anwendbarkeit auf das vorliegende Material kontrolliert wird. Eventuell müssen weitere Durchläufe und weitere Anpassungen am Kategoriensystem angehängt werden. Das

Vorgehen erinnert stark an einen eher quantitativ geprägten Ansatz zur Analyse von qualitativem Datenmaterial. Gerade die mögliche Suche nach Schlüsselwörtern verstärkt diesen Eindruck. (HUBERMANN & MILES, 2002; SALDAÑA, 2021)

4.3. Qualitative Inhaltsanalyse

Die qualitative Inhaltsanalyse ist grundsätzlich aus der quantitativen Inhaltsanalyse heraus mit dem Gedanken entstanden, gewisse Daten nicht nur auf numerisch messbare Merkmale hin untersuchen zu können, sondern auch die Möglichkeit zu haben, latente Merkmale zu behandeln. Das entsprechende Verfahren soll systematisch vorgegeben sein, um forschungstheoretischen Grundsätzen zu genügen. Dabei ist zu betonen, dass es keine übergreifende Definition der qualitativen Inhaltsanalyse gibt. Stattdessen werden verschiedene Methoden, die den Anspruch erheben, verschriftlichte Kommunikation hinsichtlich latenter Merkmale analysieren zu können, unter dem Begriff der qualitativen Inhaltsanalyse zusammengefasst. Es lassen sich dennoch einige zentrale Merkmale ausmachen, die dem Großteil der Methoden, die unter die Rubrik der qualitativen Inhaltsanalyse fallen, zuzuordnen sind: Die Zentralität des Begriffs der Kategorie, wie er oben beschrieben ist; der Fokus auf Material in Schriftform sowie der systematische und regelgeleitete Ablauf. Das Ziel einer qualitativen Inhaltsanalyse ist dabei immer die Möglichkeit, anhand eines Kategoriensystems, das Material anschaulich beschreiben und interpretieren zu können. (FLICK, 2019; GLÄSER-ZIKUDA & MAYRING, 2008; KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; MAYRING, 2022; SCHREIER, 2014; STAMANN et al., 2016)

Für eine qualitative Inhaltsanalyse kommen diverse Formen von qualitativen Daten in Frage. Hier können Texte wie Mitschriften, Zeitungsartikel und Zeitzeugendokumente, aber auch Transkripte von Audio- und Videoaufzeichnungen herangezogen werden. Einzig das Vorliegen in Schriftform wird typischerweise als Bedingung an das Material gestellt. Aus diesem Grund geht vielen qualitativen Inhaltsanalysen ein vorheriger Prozess des Transkribierens voraus. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; SCHREIER, 2014)

Grundsätzlich lassen sich bei Verfahren der qualitativen Inhaltsanalyse die folgenden Schritte identifizieren (siehe Abbildung 4.1):

- **Festlegen des Forschungsinteresses**

Zu Beginn steht die Beschreibung des Forschungsinteresses, idealerweise mit der Formulierung der Forschungsfragen. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass viele Methoden der qualitativen Forschung nicht zwangsweise von vorher festgelegten Forschungsfragen ausgehen. Vielmehr ist der Analyseprozess Teil des Explizierens des Forschungsinteresses. Es entstehen dabei häufig sich wiederholende Prozessschleifen, die jeweils mit leicht angepassten Verfahren oder Forschungsschwer-

4. Methodik

punkten durchlaufen werden. Gerade der Umgang mit derartigen Wiederholungen stellt ein gängiges Unterscheidungsmerkmal der einzelnen Verfahren innerhalb der Rubrik der qualitativen Inhaltsanalyse dar. Das Forschungsinteresse legt den gesamten weiteren Ablauf fest, der gerade darauf abzielt, dieses Interesse zu stillen bzw. die entsprechenden Forschungsfragen zu beantworten.

- **Auswählen des Materials**

Hierbei wird entschieden, welche Teile des vorliegenden Materials zur Analyse herangezogen werden. Insbesondere die Ausklammerung von Teilen des Materials ist klar zu begründen. Gleichzeitig wird auch der Entstehungsprozess bzw. der Entstehungskontext des Materials dargestellt. Dies ist gerade für die spätere Auswertung und Interpretation der Ergebnisse von Bedeutung.

- **Erstellen eines Kategoriensystems**

Das Kategoriensystem soll insgesamt eine abstrakte Darstellung des untersuchten Materials liefern und vor allem das Forschungsinteresse widerspiegeln. Die Kategorienbildung kann entweder deduktiv anhand vorhandener theoretischer Modelle oder bereits getätigter Hypothesen geschehen oder wird induktiv direkt am Material vollzogen. Gerade im Falle einer induktiven Kategorienbildung wird hier mit einer initialen Textarbeit vorangegangen. Dabei wird ein Teil des Materials genauer betrachtet und hinsichtlich der Bildung eines vorläufigen Kategoriensystems untersucht. Stichwörter, Textmarkierungen, Memos und Fallzusammenfassungen helfen hier bei der Identifikation relevanter Äußerungen und Merkmale. Auch im Fall der deduktiven Kategorienbildung kann das angesetzte Kategoriensystem in einer initialen Textarbeit auf seine Anwendbarkeit auf das vorliegende Material kontrolliert werden.

- **Codieren des Materials**

Der Codierprozess ist dadurch geprägt, dass den einzelnen relevanten Textabschnitten des Materials die Kategorien des Kategoriensystems zugeordnet werden. Dies geschieht in den meisten Varianten der qualitativen Inhaltsanalyse durch eine vorherige Unterteilung des Materials in Codiereinheiten. Welche Kriterien für eine Codiereinheit gelten müssen, ist unter den Varianten der qualitativen Inhaltsanalysen stark verschieden. Anschließend werden allen Codiereinheiten entsprechend Kategorien zugeordnet. Meist sind hier auch mehrere Durchläufe vorgesehen, zwischen denen jeweils Kontrollen und mögliche Anpassungen des Kategoriensystems, des Forschungsinteresses, aber auch der Materialauswahl angedacht sind.

- **Darstellen und Auswerten der Ergebnisse**

Nach dem Codieren stehen das Kategoriensystem sowie die Zuordnung der Ka-

tegorien zu den Textstellen als Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse fest. Diese gilt es nun darzustellen und mit weiteren Analyseformen zu untersuchen bzw. zu interpretieren. Zur Darstellung werden häufig Fallbeschreibungen und Beschreibungen des entstandenen Kategoriensystems gegeben. Prinzipiell lassen sich bei qualitativen Inhaltsanalysen zweierlei Auswertungsrichtungen angeben: Die kategorie- oder die fallbezogene Auswertung. Bei der kategoriebezogenen Auswertung werden insbesondere die resultierenden Kategorien als Ergebnis interpretiert. Hier lassen sich bspw. Diskussionen mit bestehender Theorie oder vorher aufgestellten Hypothesen führen, woraus eine Theorie ggf. verstärkt oder eingegrenzt werden bzw. eine Hypothese verfestigt oder hinterfragt werden kann. Bei der fallbezogenen Auswertung bleibt insbesondere das Material selbst für die weitere Analyse relevant. Die Kategorien dienen hier eher der Reduktion oder der anschaulichen Beschreibung des Materials.

- **Beurteilen der Güte des Vorgehens**

Abschließend muss das gesamte Vorgehen vor dem Hintergrund forschungstheoretischer Gesichtspunkte reflektiert und bewertet werden. Da die qualitative Inhaltsanalyse in den Bereich der qualitativen Forschung fällt, sollten hier eigens begründete Gütekriterien herangezogen werden und nicht einfach nur auf quantitative Gütekriterien zurückgegriffen werden. Diesen kann ein qualitatives Forschungsdesign nur schwer oder gar nicht genügen. Eine ausführliche Behandlung der Thematik der Güte qualitativer Forschung wird in Abschnitt 4.8 gegeben. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022; MAYRING, 2022; STAMANN et al., 2016)

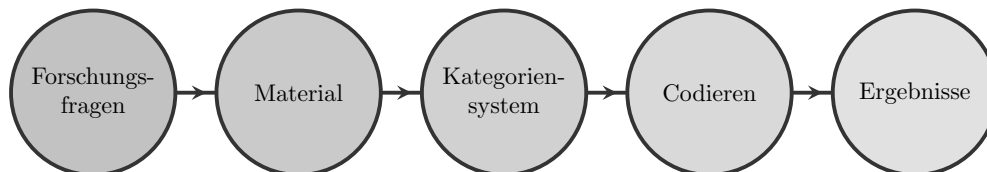


Abb. 4.1.: Allgemeiner Ablaufplan einer qualitativen Inhaltsanalyse.

In Abgrenzung zu anderen Forschungsmethoden der qualitativen Sozialforschung ist zunächst herauszustellen, dass bspw. KUCKARTZ und RÄDIKER (2022) die qualitative Inhaltsanalyse als Methode und eben nicht als Methodologie verstehen. Insbesondere liegt ihr kein theoretisches Modell zugrunde. KUCKARTZ und RÄDIKER erwähnen dies explizit im Hinblick auf die von bspw. bei STAMANN et al. (2016) und UHLENDORFF und PRENGEL (2013) aufgeworfene Kritik, dass es sich bei der qualitativen Inhaltsanalyse entweder um eine Methode ohne theoretischen Hintergrund oder eine an die quantitative Inhaltsanalyse angelehnte Methodik handelt, die dann nicht mehr als tatsächlich qualita-

4. Methodik

tive Methodik bezeichnet werden kann. Als reine Methode zur Analyse qualitativer Daten stellt sich diese Frage nicht unbedingt. Es ergibt sich dadurch auch eine bedeutende Konsequenz für die Verträglichkeit mit tatsächlichen Methodologien, insbesondere aus dem Bereich der interpretativen Sozialforschung: Ob also die qualitative Inhaltsanalyse zusammen mit einer anderen Methodologie oder auch im Sinne von *Mixed-methods*-Ansätzen umsetzbar ist, muss die zusätzliche Methodologie beantworten. Vor allem aber kann die qualitative Inhaltsanalyse auch als Methode innerhalb einer anderen Methodologie Anwendung finden. Man erkennt eine deutliche Abgrenzung gegenüber recht prominenten Methodologien der modernen (qualitativen) Forschung wie bspw. der *Grounded Theorie* oder auch dem *Design-Based Research* (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 15–52). Für MAYRING (2022) ist die oben formulierte Problematik nicht unbedingt gegeben, da er die qualitative Inhaltsanalyse gerade im Zwischenraum zwischen quantitativer Inhaltsanalyse und interpretativer Sozialforschung sieht. Die Anlehnung an die Systematik der quantitativen Inhaltsanalyse ist demnach nicht problematisch. Vielmehr ermöglicht es eine qualitative Analyse mit Mitteln, die eben auch größere Materialsammlungen bewältigen und damit einem rein explorativen und auf den Einzelfall beschränkten Ansatz entfliehen können (MAYRING, 2019).

Es werden nun diese zwei bereits angesprochenen prominenten Varianten einer qualitativen Inhaltsanalyse vorgestellt: Die Variante nach MAYRING und die Variante nach KUCKARTZ. Anschließend folgt eine Beschreibung der Methodologie der gegenstandsbezogenen Theoriebildung von STRAUSS und CORBIN (2010), die auch oftmals als *Grounded Theorie* bezeichnet wird.

4.4. Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING

Die Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING (2022) ist ein theoriegeleitetes, stark systematisiertes Verfahren der qualitativen Analyse von Daten in Textform, das sich eng an der quantitativen Inhaltsanalyse orientiert. MAYRING sieht dabei einen festen Ablaufplan vor, der jedoch mit einigen verschiedenen Unterformen seiner qualitativen Inhaltsanalyse an das jeweilige Forschungsinteresse angepasst werden kann. Durch diese strenge Festlegung des Ablaufs bereits vor dem Start der Analyse erreicht das Verfahren eine hohe Nachvollziehbarkeit, was MAYRING als Gütemerkmal qualitativer Forschung sieht.

MAYRING unterscheidet in seiner qualitativen Inhaltsanalyse zwischen mehreren Analyseeinheiten: *Auswertungs-*, *Codier-* und *Kontexteinheiten*. Die Auswertungseinheit legt bei ihm fest, welche Texte oder welche Textstellen zur Analyse herangezogen werden sollen. Zudem ist dadurch auch eine Reihenfolge der Analyse vorgegeben. Als Konsequenz ist aber auch nicht unbedingt das gesamte vorliegende Material zur Analyse heranzuzie-

hen. Eine Fokussierung auf das für die Forschungsfragen Relevante ist ein entscheidender Kern der qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING. Weiter wird zwischen Codier- und Kontexteinheit unterschieden. Die Codiereinheit gibt die Größe des kleinsten zu codierenden Textausschnitts vor, die Kontexteinheit hingegen die Größe des größten zu codierenden Textausschnitts.

MAYRING beschreibt in seiner Variante der qualitativen Inhaltsanalyse mehrere Formen, die jeweils für unterschiedliche Fragestellungen geeignet sind. Er spricht auch von Analysetechniken und unterscheidet allgemein zwischen den Techniken zur *Zusammenfassung*, zur *Explikation* und zur *Strukturierung*. Diese drei Analysetechniken werden von ihm jeweils in weitere Analyseformen ausdifferenziert, womit er insgesamt auf eine größere Anzahl unterschiedlicher Formen seiner qualitativen Inhaltsanalyse kommt. Bevor nun die einzelnen Analysetechniken näher betrachtet werden, kann man einen allgemeinen Ablauf skizzieren. Grundsätzlich lässt sich jede Form der qualitativen Inhaltsanalyse von MAYRING anhand der folgenden Schritte beschreiben (siehe Abbildung 4.2):

- **Festlegen des Materials und Analyse des Kontextes**

Hierbei wird die Gesamtheit des zu untersuchenden Materials festgelegt. Es erfolgt auch eine Begründung für die Auswahl bzw. für das eventuelle Ausklammern von nicht zu betrachtenden Materialteilen. Zusätzlich wird das gesamte Material genau beschrieben. Dazu gehören der Typ und die Form des Materials aber auch die jeweilige Entstehungssituation und etwaige Besonderheiten, die für den Kontext des Materials wichtig sind.

- **Aufstellen der Forschungsfrage**

Der weitere Verlauf der Analyse wird entscheidend vom Forschungsinteresse vorgegeben. MAYRING sieht hier in Anlehnung an quantitative Forschungsmethoden eine frühe Festlegung der konkreten Fragestellung vor. Etwaige Anpassungen sind für ihn im weiteren Verlauf nur an bestimmten Stellen angedacht.

- **Auswählen einer Analysetechnik und beschreiben des Ablaufplans**

Auf Grundlage der Fragestellung wird nun eine passende Analysetechnik ausgewählt und begründet. Anschließend kann ein Ablaufplan für die folgende Analyse festgesetzt werden. Dieser Ablaufplan gibt die Reihenfolge der weiteren Schritte vor. Insbesondere der Codierprozess ist hier genau beschrieben.

- **Definieren der Analyseeinheiten**

Zu Beginn des Codierprozesses müssen die drei Analyseeinheiten der Auswertungseinheit, der Codiereinheit und der Kontexteinheit definiert werden.

- **Herausarbeiten eines Kategoriensystems**

Bevor nun tatsächlich das Material codiert werden kann, muss zunächst ein Kategori-

4. Methodik

ensystem aufgestellt werden. MAYRING sieht hier eine deduktive Kategorienbildung anhand von vorhandener Theorie oder eine induktive Kategorienbildung aus dem Material heraus vor.

- **Durchführen des Ablaufplans**

Hier findet nun die Anwendung des Kategoriensystems in einem Prozess des Codierens statt. Die Analyseeinheiten legen die Strukturierung des Materials und die Kategorien die inhaltliche Zuordnung fest.

- **Darstellen der Ergebnisse**

Nach dem Codierprozess müssen die Ergebnisse der Fragestellung angemessen zusammengetragen, dargestellt und interpretiert werden.

- **Kontrollieren von inhaltsanalytischen Gütekriterien**

Dieser letzte Schritt stellt sicher, dass das Vorgehen gängigen inhaltsanalytischen Gütekriterien genügt und insbesondere nachvollziehbar dokumentiert ist. (MAYRING, 2022; MAYRING & FENZL, 2019)

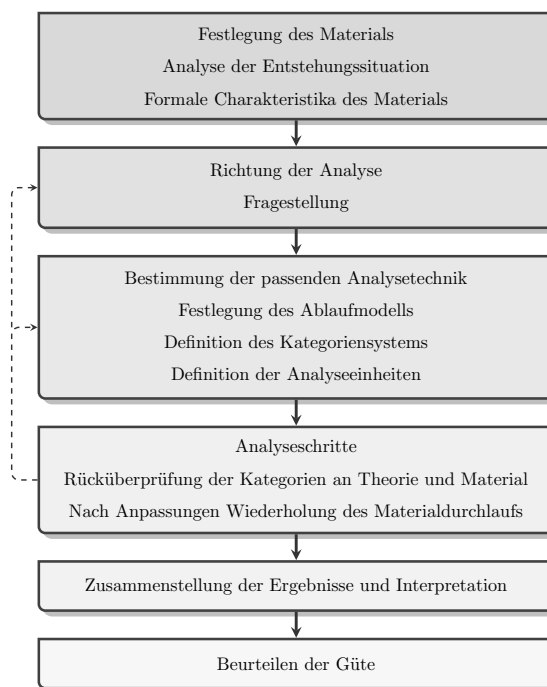


Abb. 4.2.: Allgemeiner Ablaufplan einer qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING. (MAYRING, 2022, S. 61)

Die Unterform der Zusammenfassung ist für MAYRING eine Möglichkeit, das Material zu reduzieren, während essenzielle Bestandteile, also gerade die für die Fragestellung relevanten Teile des Materials, erhalten bleiben. Bei der Explikation wird zusätzliches

4.4. Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING

Material herangezogen, um schwierig zu interpretierende Textteile besser analysieren zu können. Bei der Strukturierung erfolgt eine Untersuchung des Materials hinsichtlich festgelegter Kriterien, was auch eine Einordnung des gesamten Materials oder einzelner Analyseeinheiten im Bezug zu selbigen Kriterien zulässt. Für jede dieser drei Analysetechniken beschreibt MAYRING eigens angepasste Ablaufmodelle, die sich insbesondere auf den Analyseteil des Prozesses beziehen. Diese sind in Abbildung 4.3 dargestellt.

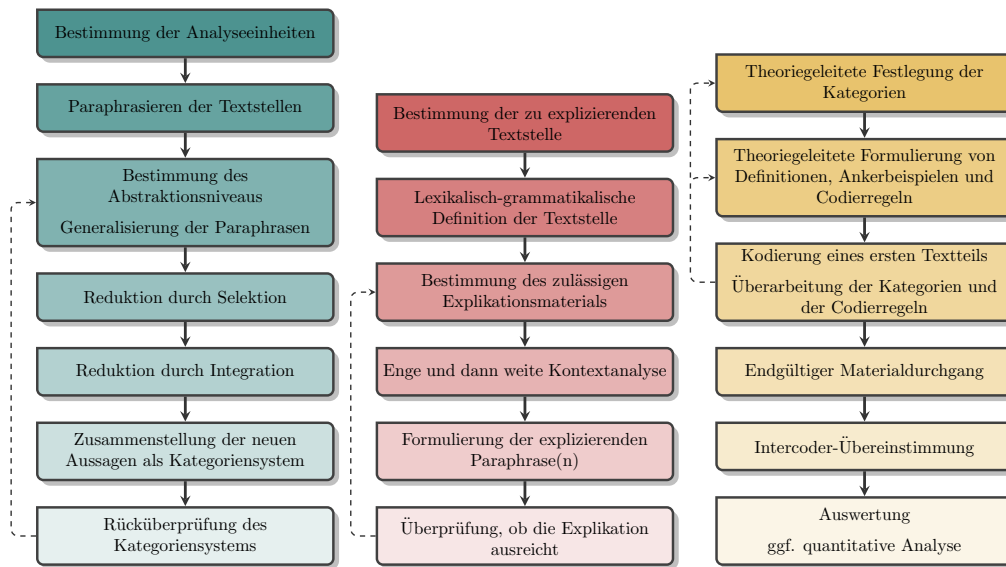


Abb. 4.3.: Konkrete Schritte innerhalb der einzelnen Analysetechniken von Mayring: Zusammenfassung (türkis), Explikation (rot), Strukturierung (gelb). (MAYRING, 2022, S. 69, 90, 97)

Die qualitative Inhaltsanalyse von MAYRING eignet sich gerade für Forschungsvorhaben, die auf eine quantitativ orientierte Auswertung oder Weiternutzung der Ergebnisse der Codierung abzielen. MAYRING selbst verortet seine Inhaltsanalyse analog zu GROEBEN und RUSTEMEYER (1995) klar im Grenzbereich zwischen der quantitativen Inhaltsanalyse und qualitativer Sozialforschung. Er sieht dies auch deutlich als Vorteil hinsichtlich einer größeren Materialmenge, die seine regelgeleitete und weniger offen gestaltete Variante der qualitativen Inhaltsanalyse bewältigen kann. Generell ist diese Variante aber für jegliche Analyse textbasierten Materials denkbar und durch die stark strukturierte Vorgehensweise auch gut in Mixed-Method-Umgebungen einsetzbar (MAYRING, 2019; MAYRING & FENZL, 2019). Nicht unbedingt ideal ist die Variante von MAYRING bei stark fallorientierten Fragestellungen, die nach der Codierung den Blick auf das Material selbst gelenkt halten möchten. Hier kann ein offenerer Umgang mit dem Material und auch ein generell offeneres Verfahren besser geeignet sein.

4.5. Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ

Die qualitative Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ ist ebenfalls ein regelgeleitetes Verfahren zur Analyse schriftlicher Kommunikation auf latente Inhalte gemäß einer objektiven Hermeneutik. Im Gegensatz zu MAYRING orientiert sich KUCKARTZ weniger an einer theoriegeleiteten Vorgehensweise, sondern setzt auf einen Ansatz, der am Material ausgerichtet ist. Kernpunkt des Verfahrens ist dabei die Generierung der Kategorien und nicht die strukturelle Anwendung selbiger.

An ein Kategoriensystem lassen sich laut KUCKARTZ und RÄDIKER (2022) einige Anforderungen stellen, um feststellen zu können, ob ein vorliegendes System aus Kategorien der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse genügt. Grundsätzlich sollen Kategorien thematisch eng mit den Forschungsfragen verknüpft sein. Dies dient offensichtlich der Tatsache, dass sie ansonsten überflüssig für das Forschungsvorhaben sind. Diese Verbindung muss jedoch nicht unbedingt explizit gegeben sein, sondern kann sich auch implizit äußern. Eine große Entfernung von den Forschungsfragen sollte dabei dennoch vermieden werden. Weiter sollen Kategorien *erschöpfend*, *trennscharf*, *wohldefiniert* und *verständlich* bzw. *nachvollziehbar* formuliert sein. Unter einer erschöpfenden Formulierung ist dabei keine allgemein abschließende Formulierung zu verstehen, sondern lediglich eine auf den Forschungsgegenstand bezogene Erschöpfung gemeint. Dies ist im Allgemeinen durch die Hinzunahme einer Restkategorie gewährleistet, was gerade zu Beginn der Auswertung gängig ist. In dieser Restkategorie lassen sich dann jegliche Materialabschnitte sammeln, die keiner anderen Kategorie zuzuordnen sind, aber scheinbar dennoch für die Behandlung der Forschungsfrage interessant sein könnten. Eine nicht restfreie Auflösung ist unter gegebenen Umständen zulässig, sollte nach Möglichkeit jedoch vermieden werden. Die Trennschärfe der Kategorien ist nicht damit zu verwechseln, dass Kategorien zwangsweise disjunkt sein müssen und bei der Codierung keine Überlappungen von unterschiedlich kategorisierten Textsegmenten vorkommen dürfen. Vielmehr ist hier die saubere Definition als Grundlage einer möglichst eindeutigen Codierung gemeint. Beispielsweise soll dadurch festgestellt werden, ob Kategorien überflüssig oder implizit in bereits vorhandenen Kategorien abgedeckt sind. Einem Textsegment dürfen dabei auch mehrere Kategorien zugeordnet werden. Die Trennschärfe soll lediglich sicherstellen, dass die Zuordnung klar begründet werden kann. Auch die Wohldefiniertheit der Kategorien thematisiert ein eindeutiges Zuordnen. Eine verständliche bzw. nachvollziehbare Formulierung der Kategorien dient der Lesbarkeit und Anschaulichkeit der Ergebnisse der Studie und ermöglicht eine Öffnung des Forschungsvorhabens hin zu einer wissenschaftlichen Diskussion. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 61–65)

KUCKARTZ und RÄDIKER unterscheiden gewisse Typen von Kategorien. Es werden im Folgenden einige dieser Typen vorgestellt, um insbesondere die für diese Arbeit relevanten Typen zu beschreiben und abzugrenzen. Der Typ einer Kategorie ist wesentlich verantwortlich für den weiteren methodischen Umgang mit dieser Kategorie. Die Auflistung ist nicht erschöpfend formuliert.

- **Faktenkategorie**

Unter einer Faktenkategorie wird eine Kategorie verstanden, deren Merkmale (vermeintlich) objektiver Natur sind. Das können bspw. der Beruf oder der Wohnort sein. Faktenkategorien entsprechen bei KUCKARTZ und RÄDIKER am ehesten der Idee des Descriptive Codings, das in Abschnitt 4.2 beschrieben ist.

- **Evaluative Kategorie**

Evaluative Kategorien meinen Kategorien, die zur Bewertung von Daten genutzt werden. Diesen Kategorien liegt ein Maßstab inne, der die Bewertung vorgibt. In den meisten Fällen beschreiben diese Kategorien dann unterschiedliche Ausprägungen des Bewertungsschemas. Die Zuordnung geschieht oftmals nach einer ordinalen Skala, in einigen Fällen sogar mit einer Intervallskala.

- **Thematische Kategorie**

Eine thematische Kategorie bezeichnet eine Kategorie, die ein spezielles Thema behandelt. Unter einem Thema können bspw. gesellschaftliche oder historische Vorgänge fallen. Es können aber auch abstraktere Dinge wie Auffassungen und Denkmuster abgebildet werden.

- **Analytische Kategorie**

Eine Kategorie, die im Gegensatz zur thematischen Kategorie eine tiefgründigere Bedeutung besitzt – diese geht meist durch eine Analyse der thematischen Beschreibungen hervor – und sich oftmals durch implizite Sinnzuschreibungen äußert, nennt man analytische Kategorie. Es ist anzumerken, dass der Unterschied zwischen thematischer und analytischer Kategorie als fließend zu interpretieren ist. Eine thematische Kategorie fungiert eher als Zeiger auf eine Beschreibung einer Sache, wohingegen analytische Kategorien mehr eine implizite Bedeutung betonen. Beide Kategorien sind gerade bei der Zuordnung nicht eindeutig abgrenzbar. Für beide ist aber auch die Zuordnung zu einem Textabschnitt entscheidender als die tatsächlich festgelegten Grenzen des zugeordneten Textabschnitts.

- **Theoretische Kategorie**

Als letzte vorgestellte Kategorie ist noch die theoretische Kategorie zu nennen. Sie stellt eine Form der analytischen Kategorie dar, die auf einem bestehenden theoretischen Modell aufbaut. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 55–58)

4. Methodik

Innerhalb eines Kategoriensystems werden zwischen *Hauptkategorien* und *Subkategorien* unterschieden. Diese stellen eine hierarchische Struktur des Kategoriensystems dar, liefern eine übersichtliche und strukturierte Form und sorgen gleichzeitig für den Erhalt einer möglichen Vielfalt im Material. Hauptkategorien sind Kategorien, die dem gesamten Kategoriensystem eine grobe, aber sinnvolle Struktur verleihen, die dem Forschungsinteresse dienlich ist. In den meisten Fällen sind Hauptkategorien unmittelbar in den Forschungsfragen ersichtlich oder zumindest auffällig implizit im Forschungsinteresse gegeben. Subkategorien differenzieren die Hauptkategorien weiter aus und ermöglichen eine genauere Analyse des Materials. Es sind mehr als zwei hierarchische Ebenen im Kategoriensystem denkbar, wenngleich eine zu starke Ausdifferenzierung schnell zu einer unübersichtlichen Datensammlung führt. Zudem kann dies unter Umständen auch dem Grundgedanken der Kategorienbildung im Sinne einer Reduktion des Materials widersprechen. Die Strukturierung der Kategorien lässt sich aus unterschiedlichen Blickwinkeln durchführen. Hier sind Überlegungen am Material oder an externer Theorie umsetzbar. Aber auch eine Orientierung an forschungsmethodischen oder ökonomischen Gesichtspunkten ist denkbar. Bei der Variante von KUCKARTZ ist eine deduktive, induktive oder auch deduktiv-induktive Kategorienbildung möglich. In allen Fällen ist aber eine explizite Orientierung bzw. Kontrolle am Material angedacht (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022).

- **Deduktive Kategorienbildung**

Unter einer deduktiven Kategorienbildung wird das Ableiten von Kategorien aus externen Quellen abseits des Materials verstanden. Dies können vorhandene Theorien oder der aktuelle Forschungsstand, aber auch Vermutungen und persönliche Erfahrungen sein.

- **Induktive Kategorienbildung**

Die induktive Kategorienbildung setzt stattdessen auf eine Generierung von Kategorien ausgehend vom vorhandenen Material. Die induktive Suche nach Kategorien geschieht dabei nicht willkürlich oder ausschließlich intuitiv, sondern orientiert sich insbesondere an den Forschungsfragen. Zu Beginn sollte hier das Ziel der Kategorienbildung und der dazu passende Kategorientyp ermittelt sowie ein möglicher Abstraktionsgrad des Kategoriensystems festgelegt werden. Mit ersten Blicken in das Material können dann Kategorien direkt am Material generiert und benannt werden, wobei der Text sequenziell durchgearbeitet und jeweils kontrolliert wird, ob für eine relevante Codiereinheit eine bereits gefundene Kategorie anwendbar ist oder eine neue Kategorie gebildet werden muss. Mit steigender Zahl von Kategorien sollte eine Struktur und ggf. eine Hierarchie in die bereits gefundenen Kategorien

gebracht werden, bevor das schlussendliche Kategoriensystem sauber dargestellt wird und die Kategoriendefinitionen festgelegt werden.

- **Deduktiv-induktive Kategorienbildung**

Das deduktiv-induktive Verfahren stellt eine hybride Zwischenform dar. Beispielsweise können hier anhand von vorhandener – möglicherweise lückenhafter – Theorie deduktive Kategorien aufgestellt und mittels Textarbeit am Material induktiv durch Kategorien ergänzt oder in ihrer Formulierung bestätigt werden. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 70–103)

Das Codieren ist für KUCKARTZ und RÄDIKER (2022) ebenfalls das Zuordnen von Kategorien zu Textstellen im schriftlichen Material. Sie beschreiben zusätzlich, dass eine vorherige Unterteilung des Materials in Codiereinheiten nicht sinngemäß ist. Dies würde ihnen zufolge zu sehr dem Gedanken widersprechen, dass Kategorien auch überlappend im Material gefunden werden können. Sie schlagen stattdessen ein (offenes) Codieren von Sinneinheiten im Text vor. Die Grenzen von Sinneinheiten sind dabei derart charakterisiert, dass dadurch Segmente des Materials entstehen, die für sich stehend außerhalb des restlichen Textes verständlich sind (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 65–69).

Auch bei KUCKARTZ lässt sich ein allgemeines Ablaufmodell der qualitativen Inhaltsanalyse skizzieren (siehe Abbildung 4.4):

- **Initiierende Textarbeit**

Hierbei werden Teile des Materials in einer ersten Sichtung durchgearbeitet und die für das Forschungsvorhaben interessanten Textstellen markiert. Zusätzlich sollen hier schon erste Bemerkungen und Fallzusammenfassungen erstellt werden. Diese initiale Arbeit am Material soll das Forschungsinteresse schärfen und auch schon erste Ansätze für mögliche Kategorien liefern.

- **Bilden der Kategorien**

Es erfolgt eine Kategorienbildung nach den oben beschriebenen Vorgehensweisen (induktiv, deduktiv, induktiv-deduktiv). Ist ein erstes Kategoriensystem erstellt, so wird ein Teil des Materials mit dem Kategoriensystem codiert und dadurch dessen Anwendbarkeit auf das Material kontrolliert. Es werden etwaige Anpassungen am Kategoriensystem direkt umgesetzt und dokumentiert.

- **Codieren des Materials**

Mit dem finalen Kategoriensystem wird das gesamte Material codiert.

- **Analysieren der Ergebnisse**

Die entstandenen Kategorien sowie die Zuordnung der Textstellen zu den Kategorien aus dem Codierprozess werden nun analysiert und vor dem Hintergrund des

4. Methodik

Forschungsinteresses diskutiert. Dabei verliert insbesondere das Material selbst nicht an Bedeutung. Die Analyse kann kategorie- oder fallorientiert geführt werden.

- **Darstellen der Ergebnisse**

Zum Schluss gilt es, die Ergebnisse nachvollziehbar und anschaulich sowie für das Forschungsinteresse passend darzustellen.

Für KUCKARTZ ist die Betonung besonders wichtig, dass in jeglicher Phase immer auch eine Reflexion vor den Forschungsfragen und sogar eine Reflexion über die Forschungsfragen selbst angestrebt werden soll. Es ergibt sich insgesamt ein Verfahren, das weniger durch eine strikt geregelte Abfolge als durch regelmäßige Wiederholungs- und Rückkopplungsschleifen sowie parallellaufende Überlegungen geprägt ist. Das Forschungsinteresse und die Fragestellungen werden mit fortlaufendem Forschungsprozess immer weiter expliziert und ggf. eingegrenzt oder angepasst (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 105–108).

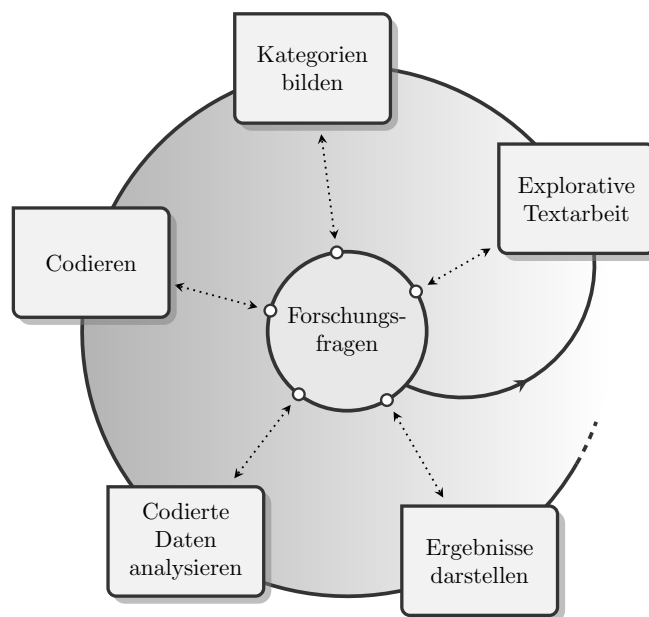


Abb. 4.4.: Allgemeiner Ablaufplan einer qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 106)

Auch KUCKARTZ und RÄDIKER beschreiben mehrere verschiedene Formen ihrer qualitativen Inhaltsanalyse. Sie sprechen von drei sogenannten *Basistypen*, wobei keiner der Basistypen einem anderen hinsichtlich Qualität oder Nützlichkeit hierarchisch übergeordnet sein soll. Alle Typen sind für sich stehend relevant und der jeweilige Forschungskontext entscheidet über den größeren Nutzen eines Basistyps. Die drei Basis-

typen sind die *inhaltlich-strukturierende*, die *evaluative* und die *typenbildende* qualitative Inhaltsanalyse.

Inhaltlich-strukturierende qualitative Inhaltsanalyse

Die inhaltlich-strukturierende qualitative Inhaltsanalyse strebt eine reduktive Strukturierung des Materials an, die sich am Inhalt orientiert und für eine überschaubare Datensammlung sorgen kann. Diese Form der qualitativen Inhaltsanalyse arbeitet größtenteils an den Kategorien orientiert, kann aber auch bedingt eine Fallorientierung aufweisen. Dementsprechend ist die Kategorienbildung von zentraler Bedeutung. Hier sind deduktive, induktive und auch deduktiv-induktive Ansätze möglich. Es lässt sich zudem ein differenzierteres Ablaufmodell im Gegensatz zum allgemeinen Ablaufmodell skizzieren (siehe Abbildung 4.5).

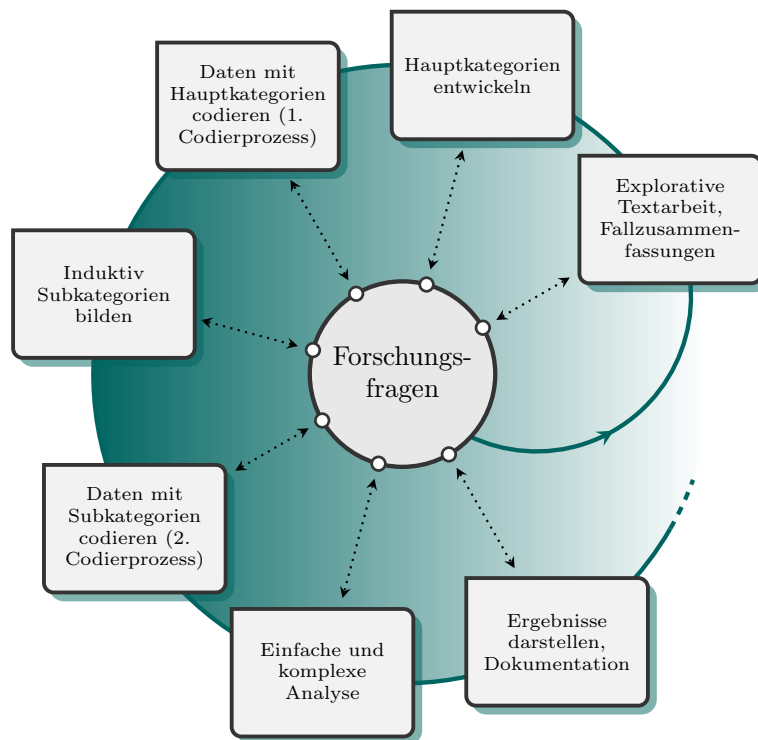


Abb. 4.5.: Ablaufplan einer inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 132)

Die initiiierende Textarbeit am Material nimmt eine prominente Rolle ein. Bei ihr wird das Material erstmals aufmerksam studiert und für das Forschungsinteresse relevante Stellen markiert und ggf. mit Anmerkungen (Memos) versehen. Es sollten an dieser Stelle auch einzelne Fallzusammenfassungen geschrieben werden, durch die interessante und strukturelle Merkmale festgehalten und gesammelt werden. Je nach Typ der Kate-

4. Methodik

gorienbildung und zusammen mit den Erkenntnissen aus dieser ersten Textarbeit sowie im Einklang mit theoretischen Überlegungen werden anschließend die Hauptkategorien gebildet. Diese Hauptkategorien können dann auf das gesamte Material angewendet werden, was den ersten Codierprozess darstellt. Es wird an dieser Stelle nochmals betont, dass gerade bei der inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse in einer Textstelle mehrere Kategorien codiert werden können. Derart codierte Stellen können sich auch überlappen oder ineinander verschachtelt sein. Im Anschluss sollen diese größeren Hauptkategorien feiner ausdifferenziert werden. Es werden dazu Subkategorien für die Hauptkategorien gebildet. Dies geschieht derart, dass Teile der mit einer Hauptkategorie codierten Textstellen zusammengetragen werden und daran nun Stück für Stück induktiv Subkategorien gebildet werden. Es folgt eine Strukturierung und Systematisierung der gefundenen Subkategorien, bevor das Vorgehen für alle Hauptkategorien wiederholt wird. Im zweiten Codierprozess wird nun das gesamte Material mit den Subkategorien codiert. Hierbei wird jeder codierten Textstelle aus dem ersten Codierprozess eine Subkategorie der entsprechend codierten Hauptkategorie zugeordnet. Die derart gewonnenen Daten können nun analysiert und abschließend eine Kontrolle der Güte des Vorgehens vorgenommen werden (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 123–156).

Evaluative qualitative Inhaltsanalyse

Bei der evaluativen qualitativen Inhaltsanalyse wird dem Material eine Art Ausprägung hinsichtlich gewisser Merkmale zugeordnet. Es steht im Gegensatz zur inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse die „Einschätzung, Klassifizierung und Bewertung von Inhalten durch die Forschenden im Mittelpunkt.“ (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 157) Dies geschieht in einem interpretativen Ansatz aus Sicht der Forschenden. Die Untersuchung des Materials ist dabei eher fallorientiert und das Kategoriensystem an sich verliert an Bedeutung. Die Kategorien selbst sind größtenteils vom Typ der evaluativen Kategorie und spiegeln meistens ordinale, wenn nicht sogar kardinale Skalen wider. Die evaluative Analyse ist oftmals die Grundlage für eine weiterführende Theoriebildung oder die Kontrolle von vorhandenen Hypothesen. Der Ablauf einer evaluativen qualitativen Inhaltsanalyse orientiert sich analog zur inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse am allgemeinen Ablaufschema (siehe Abbildung 4.4), wenngleich sich leichte Unterschiede ergeben. Für die evaluative Analyse ist vor der tatsächlichen Kategorienbildung zunächst eine Festlegung der relevanten Merkmale notwendig. Hier muss entschieden werden, welche Merkmale im Material in ihrer Ausprägung interpretiert werden und warum diese für das Forschungsinteresse relevant sind. Anschließend lassen sich die evaluativen Kategorien analog der oben genannten Kategorienbildung der Hauptkategorien entwickeln und strukturieren. Ist das evaluative Kategoriensystem

4.5. Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ

festgelegt, so wird das gesamte Material codiert und ausgewertet (siehe Abbildung 4.6). (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 157–175)

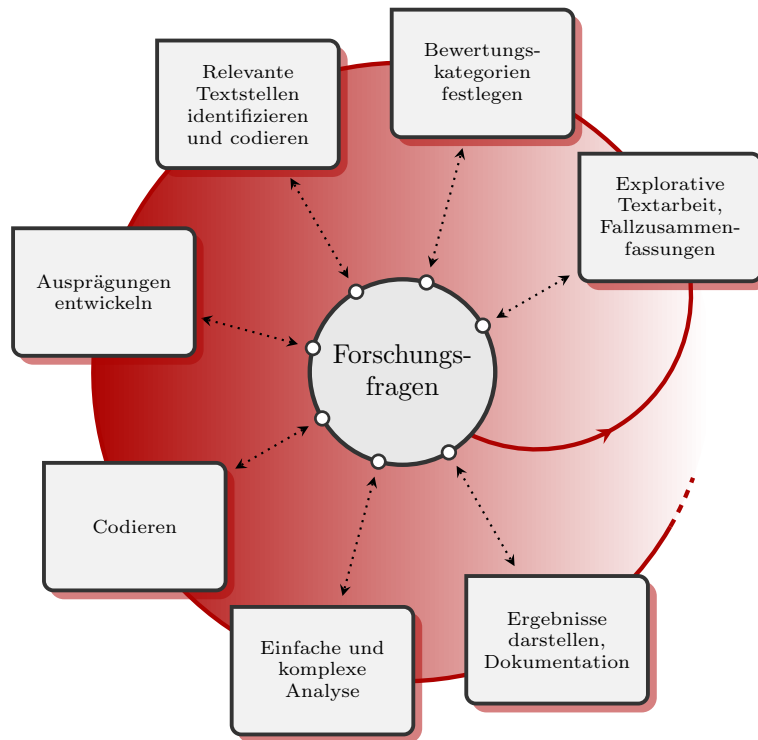


Abb. 4.6.: Ablaufplan einer evaluativen qualitativen Inhaltsanalyse. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 159)

Typenbildende qualitative Inhaltsanalyse

Eine typenbildende qualitative Inhaltsanalyse ist eine Form der qualitativen Inhaltsanalyse, die zumeist auf den Erkenntnissen aus einer inhaltlich-strukturierenden und bzw. oder einer evaluativen qualitativen Inhaltsanalyse aufbaut. Typenbildung kann als eine grundlegend menschliche Tätigkeit verstanden werden. Zum Beispiel beschreibt SCHÜTZ (1972, S. 8), dass die Wahrnehmung eines jeden Menschen eine Form der Typisierung ist. Es werden dabei bspw. Menschen, Bäume und Tiere wahrgenommen, was einer Unterteilung in Typen gleichkommt. Auf der anderen Seite ist eine Typenbildung ein Prozess der Sozialwissenschaft, bei dem nach (komplexen) Mustern innerhalb eines Datensatzes gesucht wird. Ziel ist dabei immer, dass durch diese erkannten Muster der Inhalt besser verstanden, beschrieben und erklärt werden kann. Im Unterschied zum Anspruch der Psychologie, das „Seelenleben des Einzelnen [zu verstehen]“ (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 178f.), möchte die sozialwissenschaftliche Analyse von Typen eben das Typische verstehen, also im Sinne eines Verständnisses von Gesellschaft und

4. Methodik

gesellschaftlichen Strukturen agieren. Ganz allgemein meint Typenbildung in der Sozialwissenschaft das Suchen von ähnlichen Objekten innerhalb einer Menge von Objekten. Es sollen dann Teilmengen¹ der Gesamtmenge entstehen, die sich untereinander in bestimmten Merkmalen möglichst klar unterscheiden lassen und die Gesamtmenge heterogen aufteilen. Die Elemente einer Teilmenge sollen sich dann analog in gewissen Merkmalen ähnlich sein, also ein homogenes Bild abgeben. Alle Teilmengen selbst als Objekte zusammengenommen werden häufig als Typologie bezeichnet, die aus der Typisierung entsteht. Als Abgrenzung zu quantitativen Forschungsansätzen möchte die Typenbildung keine allgemeingültige Theorie, also eine Verallgemeinerung von Spezialfällen liefern. Vielmehr soll eine weitere Kontrastierung der vorliegenden Fälle erreicht werden. Die Typenbildung geht also von einer Einzelfallbetrachtung hin zu einer Betrachtung der Gesamtheit der Fälle, nicht aber hin zur Allgemeinheit, die außerhalb der Gesamtheit der Fälle liegt. Es können daraus aber weiterhin Hypothesen generiert, bzw. Grundlagen für verallgemeinernde Ansätze geschaffen werden. Für eine konkrete Typenbildung wird zunächst ein Merkmalsraum benötigt. Dieser wird durch mehrere Merkmale festgelegt, besteht aber mindestens aus zwei Merkmalen. Zieht man allgemeiner n Merkmale heran, so entsteht ein n -dimensionaler Merkmalsraum. Die Gruppierung der vorliegenden Fälle entsteht dann aus ihrer jeweiligen Verortung in diesem Merkmalsraum. Die zu untersuchenden Merkmale gehen in den meisten Fällen direkt aus vorangegangenen inhaltlich-strukturierenden und evaluativen qualitativen Inhaltsanalysen hervor. Auch die Verortung der Fälle im Merkmalsraum lässt sich auf Grundlage dieser vorherigen Analysen vollziehen. Sind alle Fälle im Merkmalsraum angeordnet, lässt sich durch Gruppenbildung der Fälle eine Typologie generieren, deren Typen anschließend definiert werden. Abschließend werden allen Fällen entsprechend der resultierenden Definitionen ein Typ zugeordnet. Hierbei muss insbesondere eine eindeutige Zuordnung gegeben sein. Die Gruppierung der Fälle im Merkmalsraum liefert demnach zunächst nur die Definition der Typen und noch nicht die abschließende Codierung der Fälle mit den Typen. Dies wird nachträglich für die Gesamtheit der Fälle anhand der Definitionen vorgenommen (siehe Abbildung 4.7).

Ist der Merkmalsraum einmal aufgestellt und sind die Fälle dort verortet, dann lassen sich Typen auf unterschiedliche Weise bilden.

- **Monothetische Typen**

Hierbei werden Objekte mit exakt gleichen Merkmalsausprägungen zu Typen zusammengefasst. Es entstehen homogene Gruppierungen hinsichtlich der Merkmalsdimensionen. Bei dieser Variante der Typenbildung ist oftmals nur ein niedrig-dimensionaler Merkmalsraum möglich, da sonst eine zu große Zahl verschiedener

¹Es wird auch oft von Gruppen oder Clustern gesprochen.

4.5. Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ

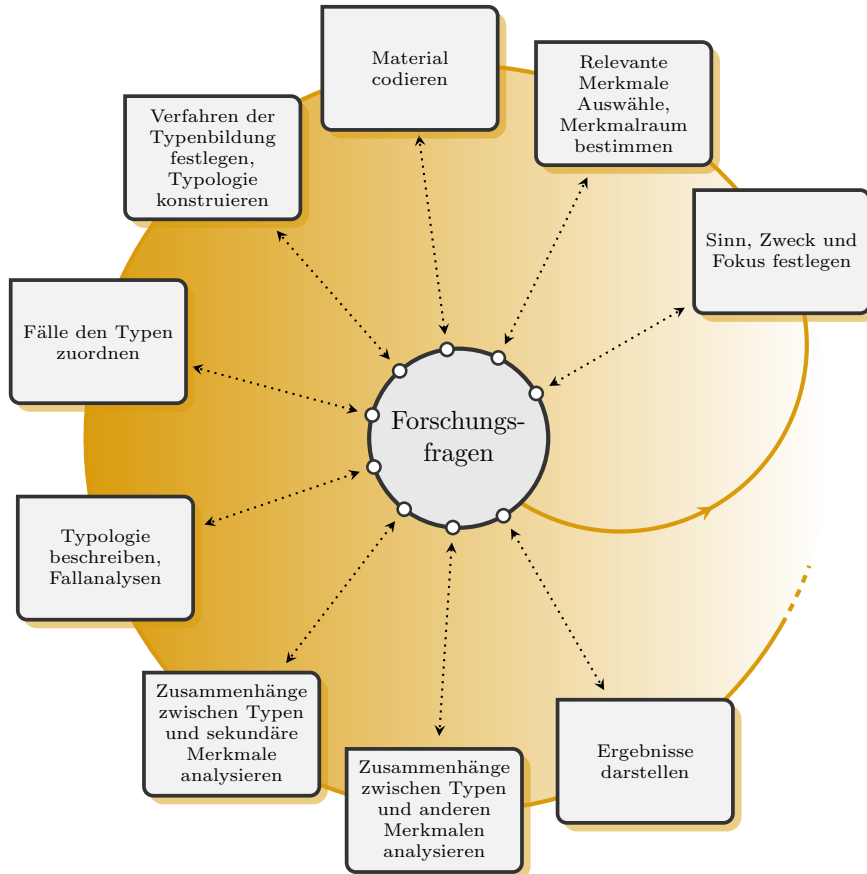


Abb. 4.7.: Ablaufplan einer typenbildenden qualitativen Inhaltsanalyse. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 186)

Typen entsteht. Möglicherweise stellt dann jeder Fall einen eigenen Typ dar, was das Forschungsvorhaben nicht voranbringen würde. Zudem müssen die Merkmale des Merkmalsraums eine relativ eindeutige Zuordnung zulassen, um hier wirklich von identischen Merkmalsausprägungen sprechen zu können. Bei stark interpretativen Merkmalszuordnungen besteht die Gefahr, das vorliegende Material zu stark zu trivialisieren oder zu homogenisieren und damit schon jetzt die Qualität einer späteren Interpretation der entstandenen Typologie zu mindern.

- **Pragmatische Reduktion**

Ist der Merkmalsraum von höherer Dimension, so lässt sich dieser ggf. synthetisch auf eine niedrigere Dimension projizieren. Dabei werden Merkmalsausprägungen gesucht, die zusammengefasst werden können. Es entsteht ein reduzierter Merkmalsraum, der eine mögliche Typenbildung offenbaren kann.

- **Polythetische Typen**

Für den Fall, dass die Ausprägungen der Merkmale innerhalb der Fälle eher heterogen auftreten, lassen sich keine eindeutigen Typen lediglich an den Ausprägungen im Merkmalsraum definieren. Insbesondere bei höher dimensionalen Merkmalsräumen kommt es häufig zu dem Phänomen, dass sich zwar Gruppen von ähnlichen Fällen identifizieren lassen, aber die Fälle eben nicht an identischen Orten im Merkmalsraum verortet sind. Es lässt sich also nicht mehr von monothetischen Typen sprechen. Auch stark interpretative Ausprägungszuordnungen lassen solch identische Verknüpfungen nicht mehr zu. In diesen Fällen kann die Typenbildung anhand einer gewissen Nähe bzw. Gruppierung im Merkmalsraum erfolgen. Dabei werden weniger Teilbereiche im Merkmalsraum zusammengefasst als vielmehr durch die Verortung der Fälle im Merkmalsraum nach größeren Ansammlungen oder Musterbildungen mehrerer Fälle gesucht. Diese Gruppierungen werden zu merkmalsheterogenen Typen zusammengefasst und diese Typen anhand der tendenziellen Merkmalsausprägungen definiert. Es entstehen innerhalb eines Typs also hinsichtlich der Merkmalsausprägungen nicht identische, aber besonders ähnliche Fälle. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 70–103)

Die Typenbildung anhand monothetischer Typen oder mittels einer Reduktion des Merkmalsraums liefert Typen, die bereits vor der tatsächlichen Gruppierung der vorliegenden Fälle festgelegt werden können. Man spricht hier auch von *künstlichen* Typisierungen, da auch Typen abgebildet werden, die im Material gar nicht vorhanden sein müssen. Die Typenbildung durch polythetische Typen knüpft diese an die Verortung der Fälle im Merkmalsraum an. Dies äußert sich insbesondere darin, dass für diese Typisierung nicht auftretende, aber dennoch denkbare Kombinationen von Merkmalsausprägungen im Material nicht vorhanden sind und dementsprechend nicht als Typ definiert werden. Diese fehlenden Typen lassen sich später dennoch in die Interpretation des Materials und der Ergebnisse aufnehmen. Man spricht bei der Typisierung mittels polythetischer Typen auch von *natürlichen* Typen, da diese tatsächlich im Material auftreten. (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 176-195)

4.6. Grounded Theorie

Bei der *gegenstandsbezogenen Theoriebildung* oder auch *Grounded Theorie* nach GLASER und STRAUSS (2010) handelt es sich um eine Methodologie, dessen Verfahren eine Theoriebildung auf Grundlage von qualitativen Daten anstrebt. Die Grounded Theorie besteht dabei aus mehreren Verfahren, die jeweils in nicht-linearen, zirkulären und in Teilen auch parallelen Prozessen durchgeführt werden. Generell lässt sich die Grounded

4.7. Methodischer Ablauf der vorliegenden Studie

Theorie als Möglichkeit verstehen, einen pragmatischen, handlungsorientierten Ansatz durch eine theoriefundierte Struktur darzustellen. Als zentrales Ziel der Grounded Theorie steht dabei die Entwicklung einer realitätsnahen Theorie zum Forschungsgegenstand. Aus diesem Grund bietet sich die Grounded Theorie immer dann an, wenn es zum Forschungsgegenstand noch keine oder nur unzureichende theoretische Modelle gibt. Das Forschungsdesign ist oftmals stark explorativ geprägt.

Auch die Grounded Theorie basiert in weiten Teilen auf einem System des Codierens. Das Material wird in Sinnabschnitte unterteilt und diesen Abschnitten dann Codes bzw. Kategorien zugeordnet. Dabei soll das Codieren jedoch nicht darauf abzielen, eine Reduktion oder inhaltliche Strukturierung des Materials zu liefern. Das Codieren soll vielmehr dazu genutzt werden, den Sinn hinter den Daten zu ergründen und zum Vorschein zu bringen sowie durch eine Neuordnung den Grundstein für eine Theoriebildung zu legen. Ein weiteres Grundprinzip der Grounded Theorie ist die Methode des ständigen Vergleichs. Dabei wird der Prozess der Codierung und die Phase der Datenanalyse nicht strikt getrennt, sondern stattdessen parallel und zirkulär miteinander verbunden. Insgesamt entsteht ein Prozess, der durch ständig wiederkehrende Datenerhebung, Datenanalyse und Revision der Fragestellung geprägt ist (GLASER & STRAUSS, 2010; STRAUSS & CORBIN, 2010).

4.7. Methodischer Ablauf der vorliegenden Studie

Es wird nun der Ablauf der vorliegenden Studie festgelegt und beschrieben. Insbesondere werden die für die einzelnen Forschungsfragen herangezogenen Methoden festgelegt und begründet.

Betrachtet man zunächst die zweite Forschungsfrage, so ist hier anzumerken, dass ein zentraler Bestandteil der Beantwortung dieser Frage, die Entscheidung über die Form des zu untersuchenden Materials ist. Es wird bei dieser Frage eine Antwort auf mögliche Arbeitsweisen von Studierenden des gymnasialen Lehramts gesucht, d. h. es ist idealerweise Material notwendig, das direkt von den Studierenden selbst stammt und deren Arbeitsweisen gut darstellt. Um eine möglichst aussagekräftige Betrachtung von Arbeitsweisen ermöglichen zu können, ist es notwendig, sich auf eine tendenziell längere Beobachtung der Studierenden einzustellen. Vor diesem Hintergrund sind audio- oder videographische Aufnahmen ökonomisch fraglich. Diese sind lediglich bei kürzeren Interventionen oder von größeren Forschungsgruppen bewältigbar. Weiter stellt sich dort auch die Frage, inwiefern die Aufnahmeperson oder das Aufnahmegerät einen Einfluss auf die Verhaltensweisen der Studierenden hat, wenngleich sich diese Frage auch bei empirischer Forschung stellt. Dennoch ist zu vermuten, dass gerade bei Audio- und Videoaufzeichnungen das Aufzeichnungsobjekt (oder -subjekt) einen deutlich höheren Faktor beim

4. Methodik

Verhalten der untersuchten Proband*innen spielt, als wenn bspw. Bearbeitungen im Nachhinein analysiert werden. Noch ein Punkt, der gegen Audio- oder Videoaufzeichnungen spricht, ist die dafür notwendige Form der Lernumgebung. Zum einen werden eher kleinere und abgegrenzte Problemstellungen benötigt, was dem Konzept von offenen Problemstellungen widersprechen kann (siehe Abschnitt 3.2). Zum anderen ließen sich die Aufzeichnungen dadurch ökonomischer gestalten, dass nicht einzelne Studierende, sondern Gruppen von Studierenden gemeinsam an der Bearbeitung der Problemstellung teilnehmen. Dadurch ist ein Rückschluss auf einzelne Studierende und deren individuelle Arbeitsweisen schlechter möglich. Es besteht die Gefahr, dass einige Arbeitsweisen nicht beobachtet werden und generell ein verzerrtes Bild gerade im Bezug auf eine Typisierung von Studierenden hinsichtlich deren Arbeitsweisen entsteht. Aus genannten Gründen wird in dieser Studie der Beobachtungszeitraum auf ein gesamtes Semester erweitert.

Zur Datenerhebung wird aus obigen Gründen ein Seminar angesetzt, das sich an den didaktischen Ideen des selbstentdeckenden Lernens und des dialogischen Lernmodells (siehe Abschnitt 3.2) orientiert. Dabei bekommen die Studierenden regelmäßig offene Problemstellungen gestellt, die sie überwiegend selbstständig zu bearbeiten haben. Sie sind dabei angehalten, ihren gesamten Bearbeitungsprozess ganzheitlich und chronologisch zu dokumentieren. Die im Seminar entstehenden Lernprozessdokumentationen der Studierenden werden dann als Material für eine weiterführende Analyse herangezogen. Die fachliche Struktur der Arbeitsaufträge wird aus der Beantwortung der ersten Forschungsfrage heraus abgeleitet.

Insgesamt kann also ein allgemeiner Ablauf der Studie in die folgenden drei Schritte formuliert werden (siehe Abbildung 4.8):

- Schritt 1: Festlegung der Inhaltsbereiche
- Schritt 2: Durchführung des Seminars
- Schritt 3: Analyse der Dokumentationen

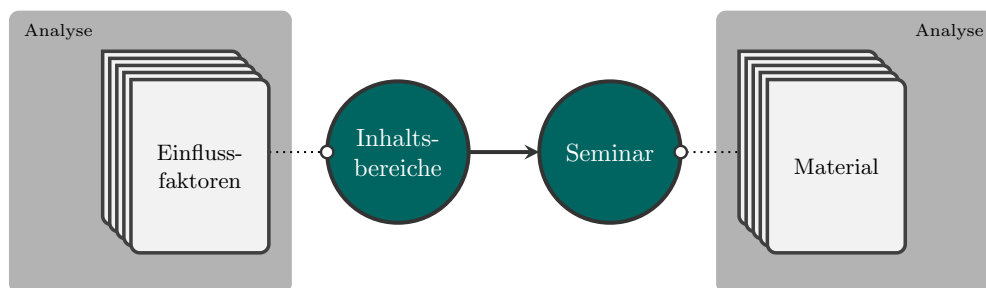


Abb. 4.8.: Allgemeiner Ablauf der vorliegenden Studie.

Dabei stellt die Beantwortung der ersten Forschungsfrage gerade Schritt 1 dar, bei dem die für Studierende des gymnasialen Lehramts relevanten algebraischen Themen herausgearbeitet werden. Dazu werden diverse Einflussfaktoren auf diese Relevanz hin untersucht. Schritt 2 ist anschließend die Phase der Datenerhebung. Hier wird das Seminar mehrere Semester lang angeboten und die von den Studierenden erstellten Bearbeitungen als Material gesammelt. In Schritt 3 wird dieses Material abschließend ausgewertet und damit eine Antwort auf die zweite Forschungsfrage gegeben.

Forschungsfrage 1: Descriptive Coding und Sachanalyse

- (F1) „Inwiefern eignet sich die universitäre Algebra zur Vernetzung von schulischem und universitärem Fachwissen?“
 - (F1a) „Welche Themen der universitären Algebra weisen eine fachliche Relevanz für Studierende des gymnasialen Lehramts im Bezug zu ihrem späteren Beruf auf?“
 - (F1b) „Welche dieser Themen eignen sich zu einer Bearbeitung in einem selbstentdeckenden Lehrkonzept an der Universität und wie?“

Für die Beantwortung der ersten Forschungsfrage wird zunächst geklärt, welche algebraischen Themen für Studierende des gymnasialen Lehramts relevant sind. Als Einflussfaktoren auf diese Relevanz lassen sich mehrere Institutionen identifizieren. Zum einen legen schulische Vorgaben an den Mathematikunterricht größtenteils in Form von Fachlehrplänen eine Relevanz für den späteren Beruf fest. Während der universitären Ausbildung von Lehrkräften nimmt zudem die Fachdidaktik – spezifischer die Didaktik der Algebra – Einfluss auf die Studierenden. In der fachlichen Ausbildung ist auch die Sichtweise der Fachmathematik als Wissenschaft von großer Bedeutung, wobei insbesondere die Anforderungen, die aus dem Staatsexamen resultieren, eine unmittelbare Relevanz schaffen. Am Ende soll eine Sammlung an algebraischen Themen stehen, die allesamt relevant für Studierende des gymnasialen Lehramts sein können. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf die Methode des Descriptive Coding zurückgegriffen, mit dem die einzelnen oben genannten Einflussfaktoren auf die Relevanz algebraischer Themen analysiert werden. Diese Methode stellt ein ideales Instrument zur Sammlung von Oberbegriffen oder Themenbezeichnungen dar. Zudem erhalten die unterschiedlichen Einflussfaktoren dadurch eine vergleichbare Form.

Die relevanten algebraischen Themen der einzelnen Einflussfaktoren werden anschließend untereinander diskutiert und damit eine erste Themenauswahl erstellt. Vor dem Hintergrund der Theorie rund um das Problemlösen (siehe Abschnitt 3.1) werden daraus Themen ausgewählt, welche im weiteren Verlauf als zu behandelnde Inhaltsbereiche

4. Methodik

bezeichnet werden. Diese werden zunächst aus einem höheren Standpunkt fachlich dargestellt, um einen Erwartungshorizont abstecken zu können. Diese fachliche Auseinandersetzung wird möglichst breit und ausführlich geführt, um damit insbesondere der Theorie von offenen Problemstellungen genügen zu können. Aus dieser fachlichen Abhandlung werden unter erneuter Berücksichtigung der Theorie zum Problemlösen und vor allem offenen Problemstellungen abschließend die finalen Formulierungen der offenen Arbeitsaufträge festgelegt, die die Studierenden im Seminar zu bearbeiten haben. In Abbildung 4.9 ist der Ablauf der Festlegung der Inhaltsbereiche skizziert.

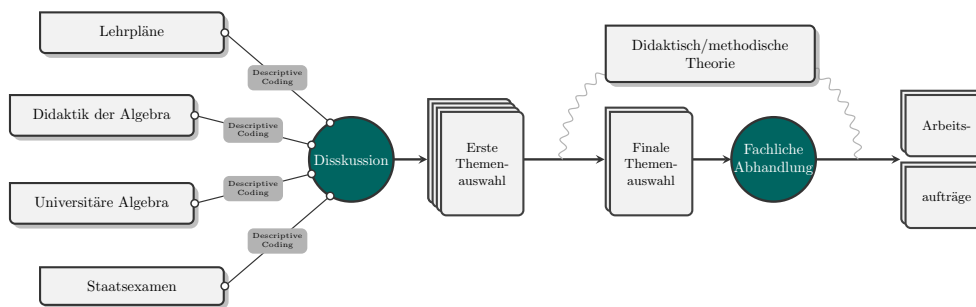


Abb. 4.9.: Methodischer Ablauf der Analyse der zu behandelnden Inhaltsbereiche.

Forschungsfrage 2: Qualitative Inhaltsanalysen nach KUCKARTZ

(F2) „Wie bearbeiten Studierende des gymnasialen Lehramts offene Arbeitsaufträge zu mathematischen Problemen?“

Der Begriff der Arbeitsweise weist eine unbestrittene Nähe zum Begriff der Problemlösestrategie auf. Aus diesem Grund kann bei der zweiten Forschungsfrage unmöglich von einem Forschungsgegenstand gesprochen werden, der sich durch eine Abstinenz oder geringe Ausprägung vorhandener Theorie auszeichnet. Vielmehr ist das Problemlösen bereits breit untersucht und auch durch diverse theoretische Modelle (siehe Abschnitt 3.1) beschrieben. Aufgrund dieser Tatsache erscheint ein Design im Sinne der Grounded Theorie nicht sinnvoll. Dennoch weist die Fragestellung einen klar explorativen Charakter auf und auch die Materialauswahl der Lernprozessdokumentationen spricht eher für ein offeneres Verfahren als ein zu strenges Vorgehen. Es wird sich in der vorliegenden Studie deshalb methodisch auf die Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ berufen. Insbesondere die strikte Unterteilung des Materials gemäß der verschiedenen Analyseeinheiten in der Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING erscheint vor den möglicherweise sehr unterschiedlich gestalteten Lernprozessdokumentationen der einzelnen Studierenden unpassend. Auch der quantitative Fokus bei der Auswertung wird

der qualitativen Fragestellung nicht vollständig gerecht. Hier sollte eine Rückbesinnung auf den konkreten Einzelfall angedacht sein.

Die Fragestellung wird für eine methodische Genauigkeit in drei Teilfragen aufgeteilt.

(F2a) „Welche Arbeitsweisen werden von solchen Studierenden bei derartigen Arbeitsaufträgen verwendet?“

(F2b) „Welche dieser Arbeitsweisen werden in welchen Ausprägungen genutzt?“

(F2c) „Inwiefern lassen sich Typen von Studierenden hinsichtlich Arbeitsweisen beobachten?“

Jede Teilfrage wird durch eine eigene qualitative Inhaltsanalyse beantwortet, wobei jeweils ein anderer Basistyp der qualitativen Inhaltsanalyse von KUCKARTZ angesetzt wird. Die erste Teilfrage wird durch eine inhaltlich-strukturierende, die zweite Teilfrage durch eine evaluative und die dritte Teilfrage durch eine typenbildende qualitative Inhaltsanalyse behandelt. Die drei Inhaltsanalysen sind dabei nicht gänzlich voneinander getrennt, sondern werden vielmehr aufeinander aufbauend durchgeführt. Die inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse liefert hier insbesondere die für die evaluative Inhaltsanalyse relevanten evaluativen Kategorien und die evaluative Inhaltsanalyse bildet anschließend die Grundlage für die Festlegung des Merkmalsraums der typenbildenden Inhaltsanalyse.

Ablaufplan der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse

Die inhaltlich-strukturierende qualitative Inhaltsanalyse wird am Ablaufplan aus Abbildung 4.5 ausgerichtet. Die Kategorienbildung findet dabei in einer induktiven Form statt, was das insgesamt explorative und offene Vorgehen unterstützen soll. Es ist jedoch ein regelmäßiger Abgleich mit den theoretischen Modellen von Problemlösestrategien (siehe Abschnitt 3.1) vorgesehen. Die Verwandtschaft von Arbeitsweisen und Problemlösestrategien soll auch im Forschungsdesign verankert sein, weswegen man prinzipiell auch von einem deduktiv-induktiven Kategoriensystem sprechen kann. Für die inhaltlich-strukturierende Analyse sind die folgenden Schritte vorgesehen (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022):

- **Initiierende Textarbeit und Fallzusammenfassungen**

Hierbei wird das Material das erste Mal gesichtet. Parallel zum aufmerksamen Lesen werden Bemerkungen und erste Ideen für Kategorien und Auswertungsrichtungen notiert. Zudem können erste Fallzusammenfassungen eine erste Reduktionsstufe des Materials erzeugen.

- **Bilden der Hauptkategorien**

Mit Hilfe der initiierenden Textarbeit wird eine erste Generation von Kategorien

4. Methodik

für Arbeitsweisen angestrebt. Diese sollen das Material inhaltlich strukturieren. Dabei werden zunächst übergeordnete Hauptkategorien gebildet, die eine grobe Einteilung der Arbeitsweisen vorgeben sollen. Mit diesen ersten Kategorien wird dann ca. 20 % des Materials codiert und so die Hauptkategorien auf Anwendbarkeit kontrolliert. Parallel werden die Hauptkategorien ggf. angepasst und erweitert sowie abschließend durch Definitionen und Ankerbeispiele festgehalten.

- **1. Codierprozess: Codieren mit Hauptkategorien**

Es wird nun das gesamte Material mit den entstandenen Hauptkategorien codiert. Dieser Codierprozess wird zusätzlich in zwei Codierschleifen unterteilt. In der ersten Codierschleife wird das gesamte Material in einem Setting des konsensuellen Codierens bearbeitet. Dabei wird regelmäßig mit anderen Forschenden, die ebenfalls Teile des Materials (ca. 20 %) codieren, Rücksprache zu den Hauptkategorien gehalten und diese ggf. erneut angepasst. Am Ende dieser Codierschleife werden die Hauptkategorien final definiert und in einer zweiten Codierschleife das gesamte Material erneut mit den Hauptkategorien codiert.

- **Bilden der Subkategorien**

Hier werden die entstandenen Hauptkategorien durch Subkategorien ausdifferenziert. Dazu werden die aus dem ersten Codierprozess entstandenen Codes jeweils pro Hauptkategorie zusammengefasst. Dann werden anhand der Codes je einer Hauptkategorie induktiv Subkategorien gebildet, die die jeweilige Hauptkategorie weiter strukturieren sollen. Es wird wie bei der Bildung der Hauptkategorien auf ca. 20 % des Materials zurückgegriffen und abschließend eine Organisation der entstandenen Subkategorien pro Hauptkategorie vorgenommen. Hier werden erste Definitionen und Ankerbeispiele für die Subkategorien festgehalten.

- **2. Codierprozess: Codieren mit Subkategorien**

Nachdem die Subkategorien vorerst festgelegt sind, wird das Material in einem zweiten Codierprozess codiert. Dabei wird erneut mit zwei Codierschleifen gearbeitet. In der ersten Codierschleife wird wieder auf die Technik des konsensuellen Codierens zurückgegriffen. Das gesamte Material wird mit Subkategorien codiert, während parallel ca. 20 % des Materials auch von anderen Forschenden codiert wird. Die Rückmeldungen und Diskussionen mit den anderen codierenden Personen fließen auch hier in eine mögliche Anpassung oder Verfeinerung der Subkategorien ein. Nach der ersten Codierschleife werden auch die Subkategorien final festgelegt und in der zweiten Codierschleife auf das gesamte Material angewendet.

- **Analyse der Codierung**

Nach der Codierung wird das entstandene Kategoriensystem sowie die Zuordnung

zum Material analysiert und ausgewertet. Von besonderer Bedeutung sind hierbei die entstandenen Kategorien. Zur Analyse eignen sich unterschiedliche Ansätze. Dazu zählen bspw. die Diskussion der hierarchischen Struktur des Kategoriensystems, vertiefende Betrachtungen der einzelnen Fälle und Visualisierungen der Daten, aber auch eine Reflexion vor theoretischen Modellen (siehe Abbildung 4.10).

• **Darstellen der Ergebnisse**

Abschließend sind die Ergebnisse anschaulich aufzubereiten und zu dokumentieren. In den Darstellungen soll die Relevanz für die Forschungsfragen deutlich zu erkennen sein. (S. 132–156)

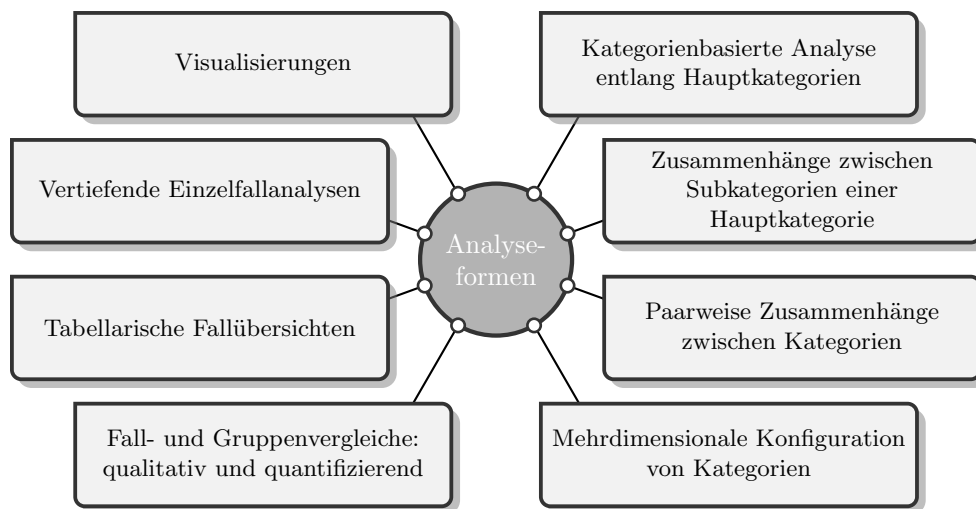


Abb. 4.10.: Analyseformen innerhalb der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 147).

Ablaufplan der evaluativen Inhaltsanalyse

Die evaluative qualitative Inhaltsanalyse wird im Anschluss auf Grundlage der vorherigen inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse durchgeführt. Diese liefert insbesondere die Merkmale, hinsichtlich derer die einzelnen Fälle auf einen Ausprägungsgrad hin untersucht werden sollen. Damit entfällt ein Teil der anfänglichen Phasen aus dem Ablaufplan aus Abbildung 4.6. Als einzelner Fall wird bei der evaluativen Analyse gerade die Bearbeitung eines*r Student*in² von einem einzelnen Arbeitsauftrag herangezogen. Da die Student*innen im Semester mehrere dieser Arbeitsaufträge zu bearbeiten haben, entstehen pro Student*in auch mehrere zu betrachtende Fälle, denen dann jeweils eine

²Mit *Studierenden* sind bisher Personen einer allgemeineren Studierendenschaft gemeint. Unter *Student*innen* werden in dieser Arbeit jene Studierende verstanden, die am untersuchten Seminar tatsächlich teilgenommen haben.

4. Methodik

Ausprägung in den festgelegten Merkmalen zugeordnet werden. Für die evaluative Analyse ergeben sich die folgenden Schritte (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022):

- **Festlegen der evaluativen Kategorien**

Hierbei werden die in der evaluativen Analyse zu untersuchenden Kategorien festgelegt. Die Grundlage dafür bilden die Ergebnisse der inhaltlich-strukturierenden Analyse. Es ist abzuwägen, welche Merkmale hinsichtlich einer Untersuchung auf Ausprägung interessant und sinnvoll sein können. Zudem werden die Ausprägungsstufen festgelegt und begründet. Dazu werden die in der vorangegangenen Analyse entstandenen Codes, die je zu einer evaluativ zu untersuchenden Kategorie gehören zusammengetragen und fallweise auf mögliche Ausprägungsgrade hin betrachtet. Dies wird ähnlich der induktiven Subkategorie-Bildung an ca. 20 % des Materials durchgeführt, bis eine fundierte Skala der Ausprägungsstufen der Merkmale vorliegt, die auf das Material anwendbar erscheint und dem Forschungsinteresse dienlich ist.

- **Codieren der Fälle**

In einem weiteren Codierprozess wird nun das gesamte Material mit den evaluativen Kategorien codiert. Dabei wird jedem Fall – also jeder Bearbeitung eines Arbeitsauftrages jedes*r Student*in – eine Ausprägung in den einzelnen zu untersuchenden Merkmalen zugeordnet.

- **Analyse der Ausprägungen**

Die Analyse der evaluativen Codierung erfolgt überwiegend fallorientiert. Es werden die zugeordneten Ausprägungen der Merkmale innerhalb einzelner Fälle, aber auch zwischen den Fällen sowie in einer Gesamtheit für jede*n einzelne*n Student*in verglichen. Zudem werden einzelne untersuchte Kategorien zusätzlich interpretativ betrachtet (siehe Abbildung 4.11).

- **Darstellen der Ergebnisse**

Auch die Darstellung der Ergebnisse zielt hauptsächlich auf eine Fallorientierung ab. Hier wird insbesondere eine Visualisierung der Merkmalsausprägungen pro Student*in angestrebt. (S. 159–174)

Ablaufplan der typenbildenden Inhaltsanalyse

Abschließend wird die typenbildende qualitative Inhaltsanalyse im Anschluss an die evaluative Inhaltsanalyse umgesetzt. Die in der evaluativen Analyse untersuchten Merkmale und die dort entstandenen Ausprägungen liefern dabei die Grundlage für die Typisierung. Die untersuchten Merkmale stellen den Ausgangspunkt für die Festlegung des Merkmalsraums dar und mithilfe der Ausprägungen dieser Merkmale wird eine Verortung der

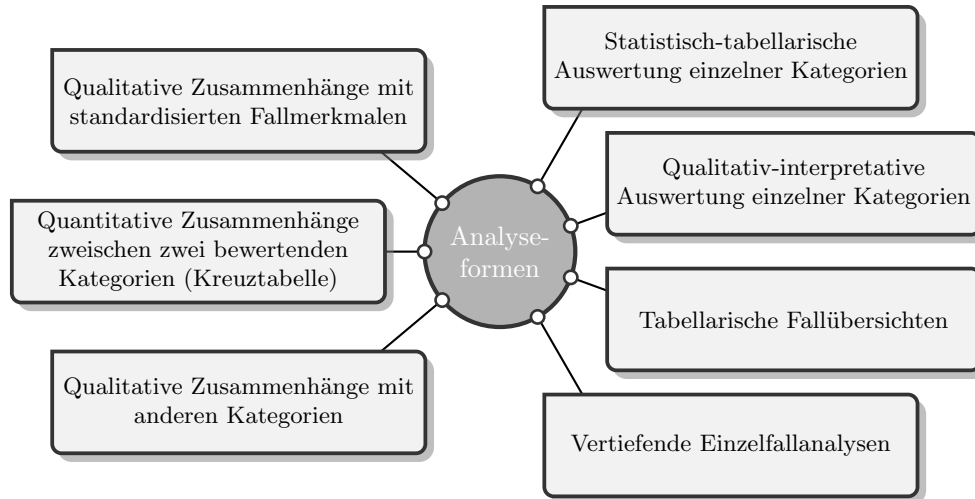


Abb. 4.11.: Analyseformen innerhalb der evaluativen Inhaltsanalyse (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 167).

Student*innen in diesem Merkmalsraum angestrebt. Es ist zu betonen, dass auch die typenbildende Analyse fallorientiert durchgeführt wird. Ein Fall ist hier jedoch nicht mehr eine einzelne Bearbeitung wie bei der evaluativen Analyse, sondern es werden die einzelnen Student*innen als Fall betrachtet. Damit keine begrifflichen Verwechslungen entstehen, wird in der typenbildenden Analyse statt von *Fällen*, von *Probanden* gesprochen. Zum einen wird dies dem realen Gegenstand gerechter, zum anderen ist der Begriff *Fall* damit nicht überladen. Die typenbildende Analyse bleibt dennoch von der Form her fallorientiert ausgelegt. Gemäß Abbildung 4.7 ergeben sich die nachfolgend aufgezählten Schritte für die typenbildende Analyse, wobei insbesondere einige der ersten Schritte aufgrund der vorher geleisteten Analysen nicht erneut durchgeführt werden müssen. Insbesondere ein Codieren des Materials mit den in den Merkmalsdimensionen verankerten Kategorien ist nicht notwendig, da die Merkmalsdimensionen aus den Kategorien der inhaltlich-strukturierenden bzw. evaluativen Inhaltsanalyse hervorgehen sollen und somit bereits in den Daten vorhanden sind (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 176–195).

- **Bestimmen des Merkmalsraums**

Hier ist zu entscheiden, welche Merkmale des Materials für die Einteilung in Typen herangezogen werden. In diesem Fall werden die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Analysen für die Entscheidung berücksichtigt. Insbesondere die evaluativen Kategorien geben bereits jede für sich gesehen eine theoretische Merkmalsdimension vor. Die tatsächliche Relevanz und etwaige Berücksichtigung eines Merkmals können aber nur mit den konkreten Ergebnissen der evaluativen Analyse eingeschätzt werden. Die final festgelegten Merkmalsdimensionen sind an dieser Stelle begründet festzuhalten.

4. Methodik

- **Konstruieren der Typologie**

Hierbei werden alle Proband im vorher festgelegten Merkmalsraum verortet. Die Konstruktion der Typologie kommt dann der Suche von Mustern innerhalb der Gesamtheit der Proband im Merkmalsraum gleich. Die Typisierung erfolgt anhand merkmalsheterogener Typen. Dabei wird nach größeren Gruppierungen im Merkmalsraum gesucht und etwaige vorhandene Gruppen von Proband anschließend in einer Fallbetrachtung auf Gemeinsamkeiten untersucht. Hieraus können dann Charakteristiken für die entstehenden Typen beschrieben und in einer Typendefinition festgehalten werden.

- **Zuordnen der Typen**

Mit den Definitionen der einzelnen Typen können nun alle Proband einem Typ zugeordnet werden. Dabei ist von zentraler Bedeutung, dass jeder Proband exakt einem Typ zuzuordnen ist.

- **Analyse und komplexe Sekundäranalyse**

Die Analyse der Typisierung kann jetzt wieder fall- und kategorieorientiert stattfinden. Zusätzlich werden in einer sekundären Analyse auch Merkmale zur Interpretation der entstandenen Typen herangezogen, die auf die Festlegung der Typisierung keine Auswirkung hatten. Es können auch Merkmale herangezogen werden, die im Material bisher noch gar nicht untersucht wurden oder sogar außerhalb des Materials liegen. Insgesamt wird eine breite sowie tiefe Auseinandersetzung mit der entstandenen Typologie erstellt, um eine möglichst vielschichtige und saturierte Thematisierung der Fragestellung gewährleisten zu können.

- **Darstellen der Ergebnisse**

Zur Darstellung der Ergebnisse werden zunächst die entstandenen Typen dokumentiert und die Zuordnung visualisiert. Zusätzlich werden dann vor allem die Ergebnisse der Sekundäranalyse präsentiert. Jeder Schritt der drei Inhaltsanalysen ist durch eine ständige Rückbesinnung auf die entsprechenden Forschungsfragen geprägt.

Da die drei Inhaltsanalysen fließend ineinander übergehen, lässt sich in Abbildung 4.12 ein allgemeiner Ablaufplan für die gesamte qualitative Inhaltsanalyse skizzieren.

4.8. Kriterien der Güte bei qualitativer Forschung

Die qualitative Forschung als erkenntnisorientierter Forschungsprozess ist einer kontroversen Debatte rund um die Güte der eigenen Methoden und der getroffenen Interpretationen bzw. vorgestellten Ergebnisse ausgesetzt. Insbesondere im Bezug auf die quantitative

4.8. Kriterien der Güte bei qualitativer Forschung

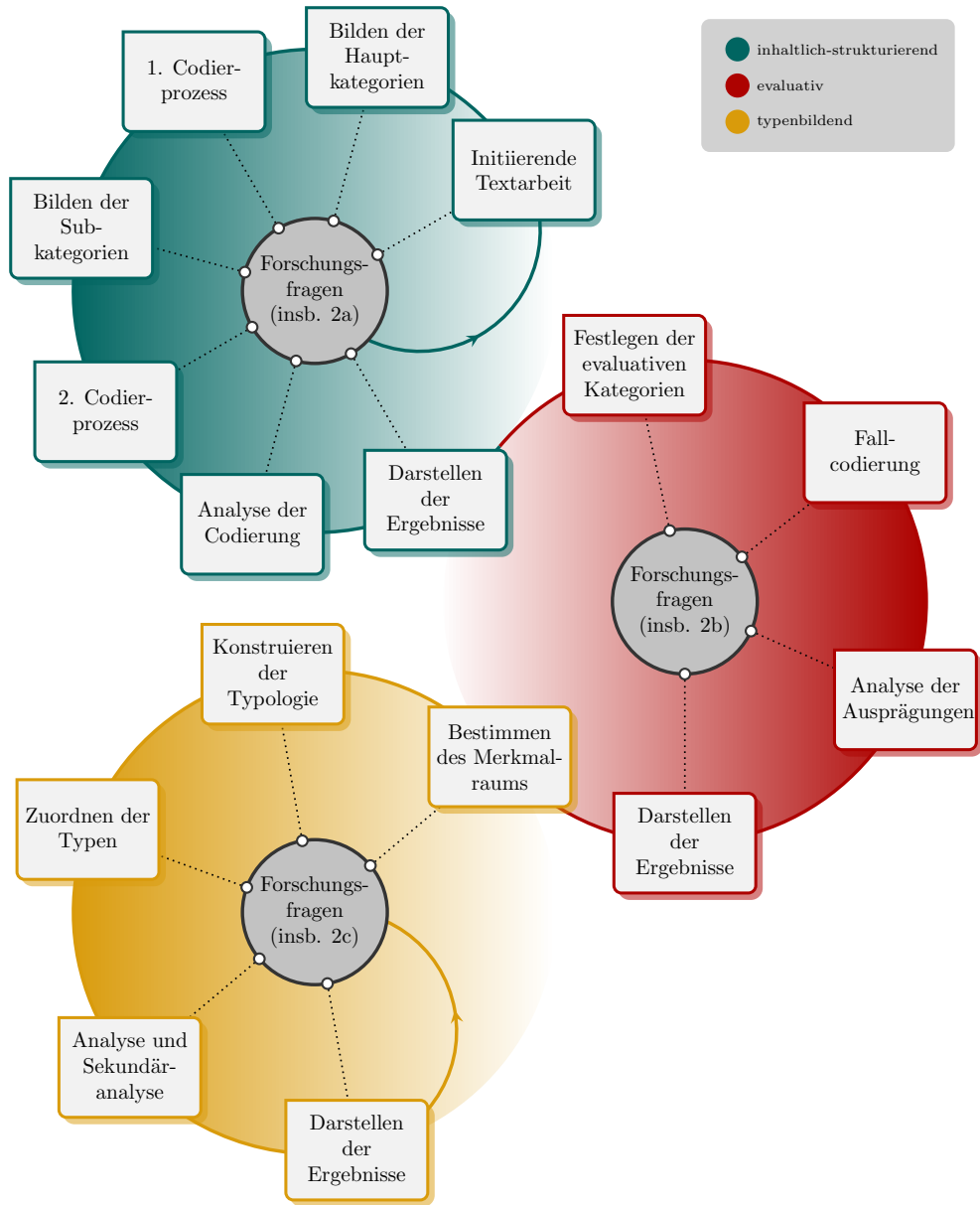


Abb. 4.12.: Konkreter Ablauf der qualitativen Inhaltsanalysen.

4. Methodik

Forschung, mit den etablierten Gütekriterien von *Objektivität*, *Reliabilität* und *Validität* sind unterschiedliche Ansichten vorhanden. Es lassen sich hier grob vier Standpunkte identifizieren: Zum einen können an qualitative Forschung die gleichen Maßstäbe wie an quantitative Forschung angesetzt werden. Die gegensätzliche Extremposition lehnt generell jegliche Gütekriterien in qualitativen Forschungssettings ab. Zum anderen siedeln sich dazwischen einerseits die Standpunkte von für die qualitative Forschung spezifischen und angemessenen Kriterien sowie andererseits die Möglichkeit zur Abkehr von strikten Kriterien und stattdessen einer Hinwendung zu einer Beurteilung des gesamten Forschungsprozesses an (FLICK, 2019; KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022).

Die beiden vorgestellten Varianten der qualitative Inhaltsanalyse von MAYRING und KUCKARTZ sind gleichermaßen als regelgeleitetes Verfahren beschrieben. In beiden Varianten wird die Notwendigkeit nach spezifischen Gütekriterien für qualitative Forschung betont, wobei sich MAYRING deutlich stärker an den quantitativen Gütekriterien orientiert als dies KUCKARTZ und RÄDIKER tun. Das strengere Vorgehen und die Orientierung hin zu einer Quantifizierung in der Analyse bei MAYRING ziehen als logische Konsequenz eine derartige Nähe nach sich (MAYRING, 2022). In der qualitativen Forschung wird in diesem Sinne auch von einer Reformulierung der quantitativen Gütekriterien gesprochen.

Bei der Formulierung inhaltsanalytischer Gütekriterien orientiert sich MAYRING wie bereits erwähnt stark an der quantitativen Inhaltsanalyse. Insbesondere die klassischen Gütekriterien der Validität und der Reliabilität sind für ihn von entscheidender Bedeutung. Die Validität meint dabei die Genauigkeit, mit der die Methode das misst, was sie vorgibt zu messen und die Reliabilität beschreibt die Zuverlässigkeit der Methode. Beispielsweise ließe sich anhand der Reliabilität darstellen, inwiefern bei einer Wiederholung der Methode mit gleichen Ergebnissen zu rechnen ist. Während der Prozess des Codierens noch durch eine angepasste Reliabilität – KUCKARTZ und RÄDIKER sprechen sicherheits halber von einer Intercoder-Übereinstimmung, statt von einer Intercoder-Reliabilität – durchaus bewertbar erscheint, ist anzumerken, dass man diese quantitativen Kriterien nicht allgemein ohne Anpassung oder Einschränkung auf Verfahren der qualitativen Forschung anwenden kann. Es wird aus diesem Grund auf eher verfahrensorientierte Überprüfungen ausgewichen. Der Fokus auf ein stark regelgeleitetes Vorgehen, ausführliche Dokumentationen und hoch saturierte Diskussionen ist eine direkte Konsequenz daraus. MAYRING betont insbesondere eine intersubjektive Nachvollziehbarkeit des Vorgehens, eine Validierung des Verfahrens durch dialogisch angelegte Kontrollen und eine methodische Triangulation. Die intersubjektive Nachvollziehbarkeit zielt darauf ab, dass die Begründungen für das Vorgehen, die Durchführung und auch die Interpretationen transparent und nachvollziehbar dokumentiert sind. Bei der Validierung des Verfahrens soll ein wissenschaftlicher Diskurs zur Forschungsmethode angestoßen werden, dessen Einigung direkten Einfluss auf den durchgeführten Prozess hat. Bei der Triangulation sol-

len im gesamten Verfahren durch Einbeziehen unterschiedlicher Daten sowie Erhebungs- und Auswertungsmethoden maximal viele Stärken zusammengetragen und maximal viele Schwächen kompensiert werden. (MAYRING, 2022; MAYRING & FENZL, 2019)

KUCKARTZ und RÄDIKER gehen zusätzlich den Weg einer teilweisen Neuformulierung qualitativer Gütekriterien. Sie berufen sich in ihren weiteren Ausführungen maßgeblich auf einen *subtilen Realismus* nach SEALE und HAMMERSLEY (GRUNENBERG, 2001; HAMMERSLEY, 1992; SEALE, 1999), der von drei zentralen Prämissen ausgeht: Es gibt keine Gewissheit über die Gültigkeit von Wissen, wonach sich getroffene Annahmen lediglich im Hinblick auf Plausibilität und Glaubwürdigkeit beurteilen lassen; Phänomene existieren unabhängig von getroffenen Annahmen, d. h. Annahmen nähern sich Phänomenen an, nicht umgekehrt; einen Zugang zu einer Wirklichkeit erschließt sich durch mehrere Blickwinkel auf Phänomene, wodurch die Relevanz einer saturierten Betrachtung entsteht (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022, S. 236). KUCKARTZ und RÄDIKER leiten daraus insbesondere zwei Dimensionen von Gütekriterien für ihre qualitative Inhaltsanalyse ab: Die interne und die externe Studiengüte. Bei der internen Güte stellt sich die Frage nach „Zuverlässigkeit, Verlässlichkeit, Auditierbarkeit, Regelgeleitetheit, intersubjektive Nachvollziehbarkeit, Glaubwürdigkeit, etc.“ (KUCKARTZ und RÄDIKER, 2022, S. 236). Die externe Studiengüte zielt auf eine Allgemeingültigkeit bzw. Verallgemeinerbarkeit und Übertragbarkeit der Annahmen auf eine größere Gesamtheit ab. Die externe Studiengüte lässt sich bei qualitativen Forschungsvorhaben nur in einer Betrachtung des gesamten Forschungsprozesses beurteilen. Hier sind bspw. Einschätzungen zur Wahl und Durchführung von Forschungsmethodiken angedacht. Für die qualitative Inhaltsanalyse als Instrument zur Auswertung qualitativer Daten formulieren KUCKARTZ und RÄDIKER eine Liste von Punkten, die zur Beurteilung der internen Studiengüte herangezogen werden sollten. Diese sind in Form einer Checkliste als Fragen formuliert und zielen einerseits auf die Datenerhebung und andererseits auf die konkrete Durchführung der Inhaltsanalyse ab. In Tabelle 4.13 ist die Liste zur internen Studiengüte von KUCKARTZ und RÄDIKER aufgeführt. Es wurden dabei Punkte ausgelassen, die lediglich für Interviews relevant sind, da im vorliegenden Forschungsprojekt keinerlei Interviews geführt oder analysiert wurden.

Zusätzlich zu dieser prozessorientierten Beurteilung beschreiben KUCKARTZ und RÄDIKER eine *Intercoder-Übereinstimmung*, die den Codiervorgang im Sinne einer Intercoder-Reliabilität beurteilen soll. Die Wortwahl als Intercoder-Übereinstimmung soll eine angemessene Distanz zum Begriff des quantitativen Gütekriteriums der Reliabilität betonen. Bei der Intercoder-Übereinstimmung wird ein numerischer Koeffizient zur Beurteilung der reliablen Anwendung eines Kategoriensystems auf ein Datenmaterial unter mehreren codierenden Personen ermittelt. Die Erstellung eines Kategoriensystems wird dabei nicht kontrolliert. KUCKARTZ und RÄDIKER merken insbesondere an, dass

4. Methodik

Datenerfassung und Transkription

- Wurden die Daten fixiert?
- Wurde eine interviewbegleitende Dokumentation erstellt?
- Wurde eine vollständige Transkription des Materials vorgenommen?
- Wurden Transkriptionsregeln genutzt und werden diese offengelegt?
- Wie sah der Transkriptionsprozess konkret aus?
- Wer hat transkribiert?
- Wurde eine Transkriptionssoftware benutzt?
- Wurden die Daten anonymisiert?
- Wurden die Transkriptionsregeln eingehalten?

Inhaltsanalyse

- Ist die gewählte inhaltsanalytische Methode der Fragestellung angemessen?
- Wird die Wahl der Methode begründet?
- Wurde die jeweilige Methode in sich richtig angewendet?
- Wurde die Inhaltsanalyse computergestützt durchgeführt?
- Wurden das Material oder Teile desselben durch mehrere Codierend unabhängig voneinander bearbeitet?
- Wie wurde die Übereinstimmung der Codierenden ermittelt? Welches Vorgehen wurde bei Nicht-Übereinstimmung gewählt?
- Ist das Kategoriensystem in sich konsistent?
- Sind die Kategorien und Subkategorien gut ausgearbeitet?
- Wie präzise und ausführlich sind die Kategoriendefinitionen?
- Gibt es konkrete Beispiele als Illustrationen?
- Wurden alle erhobenen Daten bei der Analyse berücksichtigt?
- Wie oft wurde das Material bis zur endgültigen Codierung durchlaufen?
- Ist Auditierbarkeit gegeben?
- Wurden auch abweichende Fälle berücksichtigt? Wird auf Ausnahmefälle und Extremfälle hingewiesen und wurden diese analysiert?
- Wurden im Verlauf der Analyse Memos geschrieben?
- Wurde mit Originalzitataten gearbeitet?
- Sind die gezogenen Schlussfolgerungen jeweils in den Daten begründet?

Tab. 4.13.: Checkliste zur internen Güte einer qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ und RÄDIKER (2022, S. 236f.)

ausgehend von qualitativem Material nicht erwartet werden kann, dass unterschiedliche Forschende zu gleichen Kategoriensystemen kommen. Ist jedoch ein Kategoriensystem vorgegeben, so ist eine möglichst konsistente Codierung erwartbar bzw. sogar wünschenswert. Die Intercoder-Übereinstimmung liefert genau dafür einen numerischen Wert, der damit das Kategoriensystem hinsichtlich seiner Definition und Anwendbarkeit beurteilt und somit als qualitatives Gütekriterium verstanden werden kann. Eine spezielle Art der Intercoder-Übereinstimmung lässt sich auch mit einer gleichbleibenden Person bestimmen, die zu verschiedenen – hinreichend weit auseinanderliegenden – Zeitpunkten gleichbleibendes Material codiert. Man spricht von einer Intracoder-Übereinstimmung.

Bei der quantitativen Inhaltsanalyse werden vor dem Codierprozess eindeutige Codiereinheiten im Material festgelegt, denen dann Kategorien zugeordnet werden. Lässt man diese Zuordnung von zwei Forscher*innen durchführen, so stellt sich bei der Intercoder-Übereinstimmung die Frage, inwiefern in einer Codiereinheit von beiden Forscher*innen übereinstimmend mit einer Kategorie codiert oder nicht codiert wurde. Eine zufalls-

bereinigte Beurteilung einer derartigen Übereinstimmung liefert bspw. *Cohens Kappa*. Dieses Vorgehen ist bei der qualitativen Inhaltsanalyse nicht direkt umsetzbar, denn dort ist die Festlegung der Codiereinheiten neben der Zuordnung von Kategorien Teil des Codierprozesses. Verschiedene Forscher*innen kommen also möglicherweise zu unterschiedlichen Segmentgrenzen ihrer ausgewählten Codiereinheiten im Material. MAYRINGS Variante der qualitativen Inhaltsanalyse sieht zumindest eine Festlegung der Größe von Codiereinheiten vor dem Zuordnen der Kategorien vor, wodurch der Vergleich solcher Segmente ähnlich der quantitativen Inhaltsanalyse noch näherungsweise möglich ist. Insbesondere wird dabei auch die Güte der Definition der Codiereinheiten mit beurteilt. Das offene Codieren von Sinneinheiten bei KUCKARTZ und RÄDIKER führt dazu, dass unter verschiedenen Forschenden nicht mit gleichförmigen codierten Segmenten zu rechnen ist. Um dieser Problematik zu begegnen, schlagen KUCKARTZ und RÄDIKER mehrere Anpassungen vor. Zum einen können größere Materialteile – bspw. ganze Interviews oder Bearbeitungen einzelner Proband*innen – als zu betrachtende Codiereinheiten festgelegt werden. Dort lassen sich dann Übereinstimmungen dahingehend beurteilen, ob eine Kategorie innerhalb dieser größeren Codiereinheit übereinstimmend vorkommt oder nicht vorkommt. Weiterführend kann auch die Anzahl einer Kategorie innerhalb dieser größeren Codiereinheit betrachtet und dann gemäß der Einordnung in übereinstimmende Anzahl und nicht übereinstimmende Anzahl beurteilt werden. Bei diesen Variationen ist allerdings keine Beurteilung der lokalen Anwendung einer Kategorie sichtbar. Aus diesem Grund wird zum anderen noch eine letzte Variante vorgestellt, welche alle codierten Segmente beider Forschenden jeweils für sich gesehen als Codiereinheiten ansetzt. Die Beurteilung der Güte erfolgt dann gemäß einer Übereinstimmung einer codierten Kategorie an exakt diesen Stellen. Damit diese Beurteilung nicht an zu genau gemessenen Segmentgrenzen scheitert, kann eine Übereinstimmung auch gemäß einer prozentualen Toleranzgrenze hinsichtlich einer Überschneidungsfläche derartig codierter Segmente mit einer Kategorie bestimmt werden. Das konkrete Vorgehen sieht hierbei also wie folgt aus: Zunächst werden alle codierten Segmente von Forscher*in 1 als Codiereinheiten festgelegt. Anschließend werden diese Stellen bei Forscher*in 2 betrachtet. Dort wird nun entschieden, bei welchen dieser Stellen Forscher*in 2 innerhalb der Toleranzgrenze eine gleiche Kategorie wie Forscher*in 1 codiert hat. Abschließend wird dieses Vorgehen analog für die codierten Segmente von Forscher*in 2 wiederholt. Es ist anzumerken, dass nach diesem Verfahren exakt gleich codierte Segmente doppelt als Übereinstimmung gezählt werden. Das Vorgehen ist dennoch praktisch, da dadurch komplexere Situationen behandelt werden können. Beispielsweise könnte Forscher*in 1 an einer Stelle eine Kategorie A und Forscher*in 2 an dieser Stelle innerhalb der Toleranzgrenze mehrere Kategorien B und C codiert haben. Diese Situation sollte hinsichtlich eines Übereinstimmungsgrades

4. Methodik

negativer gewertet werden, als wenn Forscher*in 2 an selber Stelle lediglich eine einzelne Kategorie B abweichend codiert hätte.

Zusätzlich zu dieser nachträglichen numerischen Beurteilung der Intercoder-Übereinstimmung beschreiben KUCKARTZ und RÄDIKER das sogenannte Verfahren des konsensuellen Codierens. Hierbei sollen Teile des Materials ebenfalls von mehreren Forschenden unabhängig voneinander codiert werden. Die Ergebnisse dieser Codierungen sollen dann aber gewinnbringend in den Forschungsprozess eingebracht werden und dadurch das Kategoriensystem verbessert werden. Bei gleichen Codierungen wird das Kategoriensystem gestärkt und bei unterschiedlichen Codierungen kann selbiges anhand einer Diskussion und Einigung verbessert werden. Gleichzeitig ist damit selbstverständlich auch im Sinne einer Intercoder-Übereinstimmung gehandelt worden. Dieser Schritt des konsensuellen Codierens zur Sicherung der forschungsorientierten Güte des qualitativen Vorgehens ist in der oben beschriebenen Liste zur internen Studiengüte bereits verortet.

Für das vorliegende Forschungsprojekt wird zur Beurteilung der Güte die Liste zur internen Studiengüte von KUCKARTZ und RÄDIKER herangezogen und zusätzlich eine Intercoder-Übereinstimmung ermittelt. Der Codierprozess ist zusätzlich stark durch konsensuelles Codieren geprägt. Die Intercoder-Übereinstimmung wird dabei für die inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse mittels des Vergleichs lokaler Übereinstimmungen mit unterschiedlichen Toleranzgrenzen bestimmt. Für die evaluative Inhaltsanalyse werden stattdessen die einzelnen Bearbeitungen als Codiereinheiten festgelegt und dort die Übereinstimmung nach „codiert“ und „nicht codiert“ beurteilt. Die typenbildende Inhaltsanalyse wird hinsichtlich der Plausibilität der Typisierung kontrolliert. Dies geschieht im Sinne einer Intercoder-Übereinstimmung. Dabei werden die Ergebnisse der evaluativen Analyse von mehreren Forschenden auf mögliche Clusterbildungen untersucht und diese verschiedenen Gruppierungen qualitativ diskutiert.

Teil III

Sachanalyse der Inhaltsbereiche

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

(F1) „Inwiefern eignet sich die universitäre Algebra zur Vernetzung von schulischem und universitärem Fachwissen?“

In diesem Kapitel wird eine Antwort auf die erste Forschungsfrage gegeben. Es werden dazu zunächst Einflussfaktoren auf die Relevanz algebraischer Themen der universitären Mathematik für Studierende des gymnasialen Lehramts analysiert. Dazu gehören einerseits schulische Einflussfaktoren, die eine Relevanz dahingehend vorgeben, dass sie festlegen, welche algebraischen Themen im späteren Beruf implizit und explizit von Lehrkräften beherrscht und vermittelt werden müssen. Stellvertretend für die schulischen Einflussfaktoren wird der aktuelle bayerische Lehrplan für das Gymnasium und gängige Fachliteratur zur Mathematikdidaktik und Didaktik der Algebra betrachtet. Andererseits gibt es auch universitäre Einflussfaktoren. Diese äußern sich insbesondere in Bayern durch die erste Staatsprüfung mit einer Teilprüfung im Fach Algebra. Zur Analyse der universitären Einflussfaktoren werden die Anforderungen an das Staatsexamen aus der LPO I sowie gängige Fachliteratur zu einer typischen Bachelor-Veranstaltung zur *Einführung in die Algebra* herangezogen. Methodisch wird die Analyse anhand eines Descriptive Codings durchgeführt, mit dem eine Sammlung an algebraischen Themen erstellt wird, die für die jeweiligen Einflussfaktoren relevant sind. Anschließend werden diese Themen der beiden beschriebenen Einflussfaktoren gegenübergestellt und damit eine Antwort auf die erste Teilfrage gegeben:

(F1a) „Welche Themen der universitären Algebra weisen eine fachliche Relevanz für Studierende des gymnasialen Lehramts im Bezug zu ihrem späteren Beruf auf?“

Unter Berücksichtigung theoretischer Überlegungen zur Umsetzbarkeit in einem Seminar mit selbstentdeckendem Lernformat wird dann eine reduzierte Sammlung algebraischer Themen abgeleitet. Die entsprechenden Themen werden fachlich möglichst ausführlich dargestellt, um einen erwartbaren Horizont bei einer entsprechenden Behandlung der Themengebiete mit Studierenden abstecken zu können. Abschließend werden aus diesen fachlichen Überlegungen Fragestellungen konzipiert und hier vorgestellt, die für die

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

spätere Durchführung in einem Seminar herangezogen werden sollen. Damit wird die zweite Teilfrage beantwortet:

(F1b) „Welche dieser Themen eignen sich zu einer Bearbeitung in einem selbst-entdeckenden Lehrkonzept an der Universität und wie?“

5.1. Algebraische Themen im bayerischen Lehrplan für Gymnasien

Es werden zunächst die Ergebnisse der Analyse des Lehrplans für Mathematik am Gymnasium und anschließend die Ergebnisse der Analyse der Lehrbücher aus der Mathematikdidaktik dargestellt. Bei der Lehrplan-Analyse wird sich auf den LehrplanPLUS (ISB, n. d. a) bezogen, da dieser für Studierende am Standort Augsburg relevant ist, an dem die Studie durchgeführt wurde. Zur Analyse der Mathematikdidaktik und der Didaktik der Algebra wird sich auf das Standardwerk *Didaktik der Bruchrechnung* von PADBERG und WARTHA (2017) und die Fortführung der *Didaktik der Algebra* von VOLLRATH durch WEIGAND et al. (2022) bezogen.

Im bayerischen Lehrplan konnten vier algebraische Themen identifiziert werden:

- Zahlen und Zahlenbereiche
- Grundrechenarten und Rechengesetze
- Variablen, Terme und Gleichungen
- Funktionen

Alle vier Themen weisen die spiralcurriculare Form auf, die den gymnasialen Lehrplan in der Mathematik prägt. Die Themen sind dabei nicht klar zu trennen, sondern bedingen sich gegenseitig und weisen zudem Schnittmengen auf.

Der Themenbereich *Zahlen und Zahlenbereich* beschreibt die für die Schule relevanten Zahlenbereiche in einer eher arithmetischen Sichtweise. Er kann dennoch als Grundlagenkonstrukt und auch als Anwendungsfeld der Algebra zugeordnet werden – mindestens lässt sich aber eine Verwandtschaft erkennen. Der Übergang zum Themenbereich der *Grundrechenarten und Rechengesetze* ist fließend, liefern doch gerade unterschiedliche Rechenoperationen die Motivation für eine Erweiterung von Zahlenbereichen und lassen umgekehrt größere Zahlenbereiche weiterführende Rechengesetze zu. Zu Beginn der Sekundarstufe I steht der Zahlenbereich der *natürlichen Zahlen* und seine Fortsetzung zu den *ganzen Zahlen*, wobei gleichzeitig die Grundrechenarten der *Addition* und *Subtraktion* thematisiert werden (Jhgst. 5). Auch die Rechenoperationen *Multiplikation* und *Division* werden auf den natürlichen und ganzen Zahlen behandelt (Jhgst. 5). Als nächstes

steht die Erweiterung hin zu den *rationalen Zahlen* an, wobei erneut insbesondere die Grundrechenarten von Multiplikation und Division angesprochen werden (Jhgst. 6). Die Jahrgangsstufen 7 bis 9 sind stark von den Grundrechenarten auf rationalen Zahlen geprägt. Die Fortführung der Zahlenbereiche hin zu den *reellen Zahlen* erfolgt bspw. im Einklang mit einer Verallgemeinerung der Multiplikation zu einer Potenzrechnung und Wurzelausdrücken (Jhgst. 9). Hier erfolgt auch die Betrachtung von weiterführenden Rechengesetzen und Rechenoperationen wie Potenzgesetze, exponentielles Wachstum und Logarithmen (Jhgst. 10).

Wenngleich der Themenbereich *Variablen, Terme und Gleichungen* bereits durch Termausdrücke auf natürlichen und ganzen Zahlen (Jhgst. 5 und 6) behandelt wird, wird die Einführung des Variablenbegriffs in Jahrgangsstufe 7 oftmals als tatsächlicher Übergang von der Arithmetik hin zur Algebra gesehen. Die Verbindung von Termstrukturen und Variablen liefert dann auch den Übergang zu einer funktionalen Sichtweise und zum Begriff der Funktion, wobei sich hier zunächst auf lineare und gebrochenrationale Zusammenhänge im Einklang mit den zur Verfügung stehenden Zahlenbereichen beschränkt wird (Jhgst. 8). Neben dem funktionalen Zusammenhang lassen sich Terme zu Gleichungen fortsetzen. In der Jahrgangsstufe 8 werden explizit Bruchgleichungen und auch lineare Gleichungssysteme untersucht. Die Behandlung irrationaler Zahlen in Jahrgangsstufe 9 eröffnet dann das Gebiet von quadratischen Funktionen und Potenzfunktionen, bis schließlich in Jahrgangsstufe 10 ganzrationale Funktionen, Sinus und Kosinus als trigonometrische Funktionen sowie Exponentialfunktion und der Logarithmus als funktionaler Zusammenhang thematisiert werden. In der Oberstufe wird ein Übergang zu einer analytischen Behandlung von Funktionen vollzogen.

Gerade im Hinblick auf den Übergang von der Sekundarstufe I zur Sekundarstufe II lässt sich eine Abkehr von einer rein algebraischen Betrachtung mathematischer Inhalte erkennen. Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen rund um die Begriffe Variable, Gleichung und Funktion dienen in der Sekundarstufe II nunmehr als Hilfsmittel bei einer analytischen Behandlung mathematischer Gebiete – namentlich hauptsächlich die Differential- und Integralrechnung. Auch in der Raumgeometrie im Sinne einer analytischen Geometrie finden die algebraischen Grundlagen weiterhin Anwendung. Man kann hier von einer impliziten Anwendung der Algebra als Hilfsmittel reden. Bereits in der Sekundarstufe I findet das gerade erst erlernte algebraische Wissen oftmals direkt Anwendung in anderen mathematischen Teilgebieten. Als Beispiel ist hier die Elementargeometrie bei der Anwendung von Termstrukturen auf die Ermittlung von Flächeninhalten zu nennen. Dies steigert sich mit höheren Jahrgangsstufen sukzessive hin zu einer ausschließlich impliziten Anwendung in der Oberstufe (siehe Abbildung 5.1).

Auch in der didaktischen Fachliteratur zur *Didaktik der Algebra* (WEIGAND et al., 2022) und zur *Didaktik der Bruchrechnung* (PADBERG & WARTHA, 2017) konnten die

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

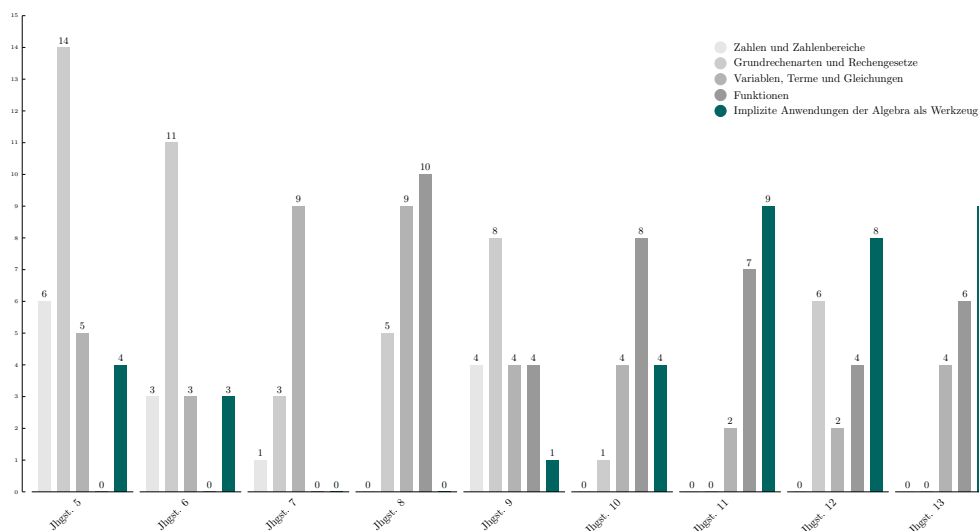


Abb. 5.1.: Anzahl Codes algebraischer Themen pro Jahrgangsstufe in den Fachlehrplänen des bayerischen Mathematiklehrplans für Gymnasien mit Hervorhebung der Kategorie *Implizite Anwendung der Algebra als Hilfsmittel*.

obigen Themen identifiziert werden. Dies ist nicht weiter verwunderlich. Es behandelt die Didaktik – hier im stoffdidaktischen Sinne – selbstverständlich die in der Schule behandelten Themengebiete. Umgekehrt hat die Didaktik als Wissenschaft auch einen Einfluss auf die Ausgestaltung der Lehrpläne. WEIGAND et al. beschreiben im Einklang mit VOLLRATH die zentralen Inhalte der Schulalgebra als die Themengebiete rund um „Variablen und Terme, Funktionen und Gleichungen“ (WEIGAND et al., 2022, S. 21). Eine genauere Übersicht (siehe WEIGAND et al., 2022, Tab 1.2, S. 22) bestätigt zudem die Lehrplananalyse von oben. Die Ausklammerung des Themengebiets der *Zahlenbereiche* ist nur in der expliziten Nennung zu verstehen. Die Zuordnung in der Didaktik ist meist innerhalb der Didaktik der Arithmetik zu finden, wenngleich Zahlenbereiche in ihrer Relevanz auch in der eben zitierten Übersicht auftauchen. Die Thematisierung von Grundrechenarten, Rechengesetzen und auch von speziellen Zahlenbereichen – hier natürlich den rationalen Zahlen – erfolgt in der *Didaktik der Bruchrechnung* von PADBERG und WARTHA (2017). Es werden auch Variablen, Terme und Gleichungen behandelt.

5.2. Anforderungen an algebraische Inhalte im Staatsexamen für Gymnasium

In diesem Abschnitt werden die algebraischen Themen der fachlichen Lehramtsausbildung an der Hochschule beschrieben. Die Darstellung erfolgt anhand einer Analyse der Prüfungsordnung für die zentrale Abschlussprüfung im vertieften Lehramt als Staatsex-

5.2. Anforderungen an algebraische Inhalte im Staatsexamen für Gymnasium

amen. Die entsprechenden Themengebiete werden mittels einer weiterführenden Analyse typischer Literatur für Anfängerveranstaltungen für Bachelor- und Lehramtsstudierende im Bereich der linearen Algebra und der modernen Algebra ausdifferenziert. Die Relevanz im Hinblick auf die erste Staatsprüfung wird durch beispielhafte Zuordnung von konkreten ehemaligen Examensaufgaben zu den resultierenden algebraischen Themen der universitären Mathematik herausgestellt. Die Literaturanalyse wurde stellvertretend anhand der Werke *Lineare Algebra* von BOSCH (2008) und *Algebra: Gruppen – Ringe – Körper* von KARPFFINGER und MEYBERG (2017) durchgeführt.

In der Ordnung der ersten Prüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfungsordnung I bzw. LPO I) werden die fachlichen Inhalte der schriftlichen Prüfung für Mathematik im vertieften Lehramtsstudium unter anderem mit „eine[r] Aufgabengruppe aus Lineare Algebra, Algebra und Elemente der Zahlentheorie“ (BAYERISCHE STAATSKANZLEI, n. d., Kap. II Abs. V § 73 (3) 2.) angegeben. Eine genauere Beschreibung liefert die Analyse der oben genannten Literatur.

Die lineare Algebra wird typischerweise als Einstieg in die Mathematik an Hochschulen gelehrt. Sie dreht sich zentral um die algebraische Struktur des *Vektorraums* und die Untersuchung linearer Unterstrukturen und Abbildungen (z. B. F24-III-1, H23-II-4). Dies mündet in einer ausführlichen Behandlung von *linearen Gleichungssystemen*, von einer umfassenden *Matrizenrechnung* sowie von Determinante (z. B. F24-I-1) und Eigen- bzw. Haupträumen (z. B. F24-I-5). *Skalarprodukte* stehen meist repräsentativ für *Bilinearformen* und stellen einen Einstieg in *normierte Vektorräume* und eine *analytische Geometrie* dar.

Die Algebra für das Lehramt an Gymnasien findet maßgeblich im Sinne einer kommutativen Algebra statt. Der nicht kommutative Fall wird lediglich am Rande thematisiert und nicht als allgemeine Theorie von Ringen und Moduln behandelt. Eine grobe Struktur der kommutativen Algebra liefert die Unterteilung in *Gruppen-, Ring- und Körpertheorie*.

Unter die Gruppentheorie fällt die Behandlung von *Gruppen* (z. B. F24-II-3) und deren *Unterstrukturen* – insbesondere *Normalteiler* und damit auch *Faktorgruppen* (z. B. F24-II-3) –, der Satz von LAGRANGE für endliche Gruppen (z. B. F24-II-3), *zyklische Gruppen* (z. B. F24-I-2), *Permutationen* als symmetrische und alternierende Gruppe (z. B. F22-I-3), *Gruppenwirkungen* (z. B. F23-III-1) und die Sätze von SYLOW (z. B. F24-I-4, H23-I-4, F23-II-2) sowie (kleine) *endliche Gruppen* bzw. *Isomorphietypen* (z. B. F24-I-2, F24-I-4).

In der Ringtheorie werden insbesondere *Ringe* (z. B. F24-II-4, F24-III-3) und *Ideale* (z. B. F24-I-3, F23-II-5), *Polynomringe* (z. B. H23-I-1, H23-III-5), der Begriff der *Teilbarkeit* und *Irreduzibilität* (z. B. F23-II-3) sowie ein strukturierter Aufbau besonderer Ringtypen – *faktorielle Ringe* (z. B. F23-II-3, F23-II-3), *Hauptidealringe*, *euklidische Ringe*, usw. – thematisiert.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Die Körpertheorie dreht sich maßgeblich um *Körper* (z. B. F24-I-5) und *Körpererweiterungen*. Dabei werden *einfache* und *algebraische* (z. B. F22-I-5) sowie *separable* und *galoische* Körpererweiterungen betrachtet. Letztere vor allem im Hinblick auf eine *Galoistheorie* (z. B. F24-I-5, F24-II-5, F24-III-4). Auch die Konstruktion *endlicher* Körper (z. B. F23-I-4, F23-II-5) sowie *Kreisteilungskörper* (z. B. F24/III/5) finden Anwendung.

5.3. Diskussion der Einflussfaktoren auf relevante algebraische Themen in der gymnasialen Lehramtsausbildung

Es werden nun die identifizierten algebraischen Themen aus der Schulmathematik denjenigen der universitären Mathematik gegenübergestellt und entsprechende Verbindungspunkte herausgearbeitet. Anschließend werden für die stärksten Verbindungen stellvertretende Problemfelder der universitären Lehramtsausbildung aufgeführt. Unter Einbeziehung didaktischer Überlegungen aus Abschnitt 3.2 wird dann schließlich eine Entscheidung zu zwei Inhaltsbereichen getroffen, die in einem Seminar für Studierende des gymnasialen Lehramts im Sinne eines offenen, selbstentdeckenden Lernmodells behandelt werden.

Der schulische Themenbereich von *Zahlen und Zahlenbereichen* taucht oftmals implizit als anschauliches Beispiel in jeweils Gruppen-, Ring- und Körpertheorie auf. Die schulischen Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ spiegeln den Weg der algebraischen Strukturen von Gruppen über Ringe hin zu Körpern wider. Die universitäre Algebra beschränkt sich allerdings nicht auf diese Zahlenbereiche. Insbesondere abstraktere Konstrukte wie endliche abelsche Gruppen und Polynomringe lassen sich zwar auch oftmals beispielhaft auf diesen Zahlenbereichen konstruieren, eine allgemeine Theorie, wie sie in der universitären Mathematik angestrebt wird, kommt jedoch auch ohne diese Anschaulichkeit aus. In der elementaren Zahlentheorie spielen insbesondere die ganzen Zahlen und Überlegungen zu Primzahlen eine große Rolle. Auch Teilbarkeiten und damit der schulische Themenbereich der *Grundrechenarten und Rechengesetze* zeigen sich hier. Hinsichtlich der algebraischen Strukturen der Gruppe, des Rings und des Körpers weisen Grundrechenarten und Rechengesetze ebenfalls eine Verwandtschaft auf.

Variablen, Terme und Gleichungen sind quasi in allen algebraischen Problemen wiederzufinden. In der obigen Auflistung lässt sich aber insbesondere zwischen der linearen Algebra und der Körpertheorie – repräsentiert von einer Galoistheorie – eine Verbindung zum schulischen Themenbereich von Variablen, Termen und Gleichungen ziehen. Die Matrizenrechnung kann stellvertretend für eine ausführliche Thematisierung des Lösens von linearen Gleichungssystemen verstanden werden und die Galoistheorie beschreibt

das Lösen allgemeiner polynomialer Gleichungen und die Beziehung – bzw. Symmetrien – von Nullstellen von Polynomen.

Funktionen spielen in Form von Abbildungen – spezieller Homomorphismen – eine herausragende Rolle in der höheren Algebra. In diesem abstrakten Sinn zur Untersuchung von Unterstrukturen werden Funktionen aber in der Schule kaum genutzt. Die Behandlung linearer Abbildungen in der linearen Algebra folgt der entsprechenden Sichtweise auf Funktionen und eine derartige Analyse noch am ehesten. Gerade die Verbindung von Vektorraumtheorie und Matrizenrechnung kann als anwendungsorientierte Veranschaulichung von abstrakten Homomorphismen gesehen werden, was dem schulischen Gedanken sehr nahe kommt.

Vor allem die impliziten Anwendungen der Algebra in der Schulmathematik in der Raumgeometrie wird in der universitären Lehramtsausbildung in Teilen durch die lineare Algebra abgedeckt. Hier sind Skalarprodukte und eine analytische Geometrie zu nennen.

Es lassen sich somit vier vielversprechende universitäre Problemfelder erkennen, die Lehramtsstudierenden die Möglichkeit eröffnen können, Verbindungen zwischen der schulischen Algebra und ihrer algebraischen Fachausbildung an der Universität zu bilden: *Zahlenbereiche als algebraische Strukturen, Symmetrien auf Nullstellen mittels Galoistheorie, endliche (zyklische) Gruppen* und *Kegelschnitte in der analytischen Geometrie* (siehe Abb. 5.2).

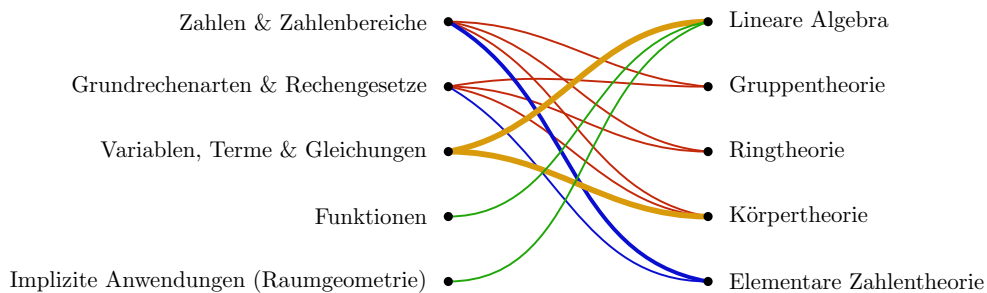


Abb. 5.2.: Verbindungen zwischen schulischer (links) und universitärer Algebra (rechts) mittels der Themenfelder *Zahlenbereiche* (rot), *endliche Gruppen* (blau), *Galoistheorie* (gelb) und *Kegelschnitte* (grün).

Bezieht man nun den Wunsch mit ein, eines dieser Problemfelder in einer selbstentdeckenden Lernform von Studierenden möglichst autonom bearbeiten zu lassen, dann ergeben sich im Einklang mit den theoretischen Überlegungen aus Abschnitt 3.1 und 3.2 drei fundamentale Anforderungen an diese Problemfelder: Sie sollen möglichst elementarer, offener sowie anschaulicher Natur sein. Die Elementarität liefert die Möglichkeit, dass sich die Studierenden schnell in die Problemstellung einfinden und sich darin grundsätzlich bewegen können. Zudem wird damit einem möglicherweise heterogenen Vorwissen begegnet. Eine ausgeprägte derartige Heterogenität ist gerade bei der späteren Unter-

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

suchung von Studierenden im höheren Semester durchaus zu erwarten. Die Offenheit des Problemfeldes ist bereits in Abschnitt 3.1 als Möglichkeit herausgestellt worden, Aufgabenstellungen zu Problemstellungen transformieren zu können. Weiter kommt eine Offenheit einer höheren Anforderung an die Selbstständigkeit des Lernenden gleich, womit eine authentische Beobachtung von eigenständigen Arbeitsweisen erwartet werden kann. Die Anschaulichkeit meint nicht unbedingt eine verminderte Abstraktion, sondern vielmehr eine offensichtliche Relevanz des Problemfeldes für Lehramtsstudierende, die sie selbst erkennen können. Eine Bewertung der obigen vier Problemfelder hinsichtlich dieser drei Kriterien wird im Folgenden gegeben:

- **Zahlenbereiche als algebraische Strukturen**

Zahlen und Zahlenbereiche an sich, aber auch die Darstellung als algebraische Strukturen sind elementarste Formen der Algebra. Auch eine Offenheit ist in diesem Problemfeld stark gegeben. Die Anknüpfungspunkte mit geometrischen Überlegungen wie Konstruierbarkeit oder auch die Fortführung zu komplexen abstrakteren Zahlenbereichen wie \mathbb{C} oder \mathbb{H} sind nur zwei angrenzende Themenfelder. Die Relevanz für die Schulmathematik ist zudem explizit gegeben, da Zahlenbereiche einen großen Anteil an der Schulalgebra in der Sekundarstufe I haben.

- **Symmetrien auf Nullstellen mittels Galoistheorie**

Das Problemfeld rund um Nullstellen von Polynomen und die Galoistheorie ist von sehr offener Natur. Es lassen sich hier Symmetrien und dann Galoisgruppen behandeln, aber auch Brücken zur Auflösbarkeit, zur Körpertheorie und zu Körpererweiterungen bzw. Vektorräumen schlagen. Die Relevanz ist in gängigen Nullstellenproblemen und insbesondere in der Thematisierung von allgemeinen Lösungsformeln polynomialer Gleichungen deutlich erkennbar. Die Galoistheorie als umfassendes Problemfeld ist aber nicht gerade elementarer Natur. Vor allem die Verknüpfung von Symmetrien und Galoisgruppen mit speziellen Körpererweiterungen im Hauptsatz der Galoistheorie ist nicht trivial und eignet sich gerade im Hinblick auf das heterogene Vorwissen nicht unbedingt für eine selbstständige Bearbeitung.

- **Endliche (zyklische) Gruppen**

Endliche und speziell zyklische Gruppen lassen sich sehr früh und mit nur wenigen vorausgesetzten Werkzeugen untersuchen. Dabei geben gerade die vielfältigen Isomorphietypen schon kleiner endlicher Gruppen den Blick auf ein breites Spektrum an unterschiedlichen Mustern frei. Die Untersuchung zyklischer Unterstrukturen ist ebenfalls sehr abwechslungsreich und bietet auch die Möglichkeit, selbst für abstrakte Konstrukte anschauliche Visualisierungen zu finden. Eine explizite Anwendung

in der Schulalgebra finden endliche Gruppen jedoch kaum. Die Studierenden erarbeiten sich damit tendenziell Nischenwissen, das zwar durchaus im schulischen Kontext – bspw. bei der Kryptographie oder allgemeiner bei zahlentheoretischen Problemen – Anwendung finden kann, jedoch kein fundamental tieferes Verständnis für die Schulalgebra mit sich bringt.

- **Kegelschnitte in der analytischen Geometrie**

Kegelschnitte bzw. Quadriken werden in der analytischen Geometrie typischerweise mit Mitteln der linearen Algebra behandelt. Diese Mittel sind eine der wenigen Voraussetzungen, die man an die Studierenden stellen muss, womit dieses Problemfeld eine näherungsweise elementare Natur aufweist. Es ist zudem ein recht offenes Problemfeld, bei dem bspw. orthogonale Abbildungen, die Thematisierung einer Typenbildung, aber auch abstraktere Begriffe wie Irreduzibilität Anwendung finden. Die Relevanz ist mit der unmittelbaren Nähe zur Raumgeometrie konkret gegeben.

Anhand dieser Überlegungen wird sich auf die Inhaltsbereiche *Zahlen und Zahlenbereiche* sowie *Quadratische Gleichungen in zwei Variablen* festgelegt. Es folgt eine ausführliche fachliche Beschreibung dieser beiden Inhaltsbereiche.

5.4. Zahlen und Zahlenbereiche

Im Folgenden werden die für die Schule und darüber hinaus relevanten Zahlenbereiche auf zwei verschiedenen Wegen erarbeitet. Zum einen ist die algebraische Darstellung im Sinne algebraischer Strukturen abgebildet. Zum anderen wird ein historisch-genetischer Zugang über konstruierbare Zahlen mit Mitteln der elementaren (ebenen) Geometrie dargestellt. Der algebraische Weg orientiert sich maßgeblich am Werk *Grundbegriffe der Mathematik* von KASCH und PAREIGIS (1991) und wird durch KARPFFINGER und MEYBERG (2017) und BOSCH (2009) sowie HIEN (2021) angereichert. Die Überlegungen zu den Quaternionen entstammen BUCHMANN (2009) und einem Buchreview von BAEZ (2004) zum Werk *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic and Symmetry* von CONWAY und SMITH (2003). Der Beweis zum Satz von FROBENIUS ist nach einem Paper zum Thema *Scalar Algebras and Quaternions* von ARTZ (2009) geführt. Die Idee für den geometrisch motivierten Weg stammt von LEUDERS (2016), wobei die Reihenfolge der dortigen Erarbeitung aus didaktischen Gründen angepasst wurde.

Zahlen sind für die Menschheit jeher ein Mittel zur Beschreibung ihrer Umwelt. Als Teil arithmetischer Überlegungen lässt sich bspw. ein kardinaler Aspekt in der Aussage

« Ich besitze drei Ziegen und vier Schafe, also insgesamt sieben Tiere. »

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

erkennen. Auch ordinale Aspekte sind durch die Aussage

« Ich besitze zwei Obstplantagen und mein Nachbar nur eine, also besitze ich mehr Obstplantagen als er. »

vorzufinden. Und selbst grundlegende algebraische Probleme werden früh relevant:

« Ich habe heute bereits zwei Münzen verdient. Mein Essen kostet mich drei Münzen. Wie viele Münzen muss ich heute also noch mindestens verdienen, damit ich genügend zu Essen bekomme? »

Die Behandlung der historischen Entwicklung der Begriffe *Zahlen* und *Rechnen* bietet gerade für Lehramtsstudierende eine gewinnbringende Lernerfahrung in mehrfacher Hinsicht: Zum einen entwickeln sich die schulelevanten Zahlenbereiche auch im Unterricht in einigen Teilen analog zur historischen Entwicklung – mindestens aber orientiert an den Grundrechenarten –, wodurch ein tieferes sowie breiteres schulelevantes Fachwissen erlangt werden kann. Zum anderen stellen Zahlenbereiche eine Möglichkeit dar, auf sehr elementarem Niveau die Entwicklung und Finesse moderner Algebra selbstständig nachzuempfinden und auch die Relevanz für die Schulmathematik zu stärken.

Es wird im Folgenden zunächst eine formale Herleitung der Zahlenbereiche im Sinne der modernen Algebra als algebraische Strukturen gegeben und anschließend ein alternativer Weg aufgezeigt, der durch eine historisch-genetische Sichtweise insbesondere die Grundrechenarten als Motivation heranzieht. Man kann daran einerseits einen Übergang zwischen geometrischem und algebraischem Vorgehen und andererseits die Stärken der modern algebraischen Schreibweisen erkennen.

Zahlenbereichserweiterungen als algebraische Strukturen

Die Zahlenbereiche \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} , die größtenteils in der Schulmathematik thematisiert werden, lassen sich sukzessive durch algebraische Strukturen beschreiben. Der Aufbau von der *Halbgruppe* über das *Monoid*, die *Gruppe* und den *Ring* hin zum *Körper* wird auch in der Schulmathematik durchlaufen. Dies spiegelt sich insbesondere in der Behandlung der Grundrechenarten *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division* wider. Für algebraische Strukturen sind die Subtraktion und Division jedoch genau genommen keine eigenständigen Operationen. Stattdessen wird hier die Addition bzw. Multiplikation mit entsprechenden inversen Elementen formuliert.

Natürliche Zahlen

Einer der grundlegenden Zahlenbereiche der Mathematik ist der Zahlenbereich der *natürlichen Zahlen*. Die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen lieferten DEDEKIND und

PEANO unabhängig voneinander bereits Ende des 18. Jahrhunderts. Aufgrund ihrer Einfachheit sind die sogenannten PEANO-Axiome heute als Grundlage zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen verbreitet.

Axiomensystem 5.1. (PEANO-Axiome – moderne Form) Sei n eine natürliche Zahl, dann bezeichne $\mu(n)$ den eindeutigen *Nachfolger* von n . Die Menge der natürlichen Zahlen entsteht aus den folgenden Axiomen:

- (P1) 0 ist eine natürliche Zahl.
- (P2) Für jede natürliche Zahl n ist auch ihr Nachfolger $\mu(n)$ eine natürliche Zahl.
- (P3) Für alle natürlichen Zahlen n und m mit $\mu(n) = \mu(m)$ gilt bereits $n = m$.
- (P4) Für jede natürliche Zahl n gilt $\mu(n) \neq 0$.
- (P5) Ist M eine Menge, sodass
 - (a) 0 liegt in M .
 - (b) Für jede natürliche Zahl n , die in M liegt, liegt auch ihr Nachfolger $\mu(n)$ in M .
 gelten, dann enthält M alle natürlichen Zahlen.

In seiner ursprünglichen Form gab PEANO die Axiome beginnend bei 1 an. Wenige Jahre später ergänzte er die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen um die obige analoge Variante beginnend bei 0. Gerade die später thematisierte historische Behandlung von Zahlenbereichen motiviert zunächst erst die ursprüngliche Form. Für die moderne Schreibweise lohnt sich dieser Zwischenschritt nur bedingt. Es entsteht einfach direkt ein Monoid statt erst einer Halbgruppe, die dann um ein neutrales Element ergänzt werden müsste. Damit aber überhaupt eine algebraische Struktur im Sinne der modernen Algebra thematisiert werden kann, benötigt es eine Operation auf einer Menge an Objekten – hier eine Verknüpfung von Zahlen.

Es wird im weiteren Verlauf \mathbb{N} als die Menge der natürlichen Zahlen beginnend bei 1 und \mathbb{N}_0 als die oben beschriebene Menge der natürlichen Zahlen beginnend bei 0 bezeichnet. Es liegt damit der mengentheoretische Zusammenhang $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ vor.

Die PEANO-Axiome sind auch über den entstehenden Zahlenbereich hinaus nützlich. Gerade das Axiom (P5) sichert eine besondere Beweistechnik – den Beweis durch vollständige Induktion – ab, mit dem im weiteren Verlauf einige grundlegende Eigenschaften von natürlichen Zahlen nachgewiesen werden können.

Auf der obigen Menge lässt sich dann eine Addition definieren.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Definition 5.2. Die Verknüpfung

$$+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, (n, m) \mapsto n + m$$

wird *Addition* genannt und ist durch die Eigenschaften

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n + 0 := n$
- (ii) $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : n + \mu(m) := \mu(n + m)$

rekursiv definiert. Zudem bezeichne 1 den Nachfolger von 0, d. h. $1 := \mu(0)$.

Aus Definition 5.2 folgt bereits eine Vielzahl an typischen Eigenschaften natürlicher Zahlen.

Lemma 5.3. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ drei natürliche Zahlen. Dann gilt:

- (i) $\mu(m) = m + 1$
- (ii) $0 + m = m$
- (iii) $\mu(m) + n = \mu(m + n)$
- (iv) $m + n = n + m$
- (v) $m + (n + k) = (m + n) + k$
- (vi) $m + n = 0 \Rightarrow m = n = 0$
- (vii) $m + n = m + k \Rightarrow n = k$

Beweis. Zu (i). Es gilt nach Definition 5.2 $\mu(m) = \mu(m + 0) = m + \mu(0) = m + 1$.

Zu (ii). Beweis durch vollständige Induktion über m .

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach Definition 5.2 bereits $0 + 0 = 0$.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte $0 + m = m$.

IS: $0 + \mu(m) = \mu(0 + m) = \mu(m)$

Zu (iii). Beweis durch vollständige Induktion über n für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $n = 0$, dann gilt $\mu(m) + 0 = \mu(m) = \mu(m + 0)$.

IV: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $m \in \mathbb{N}_0 : \mu(m) + n = \mu(m + n)$.

$$\text{IS: } \mu(m) + \mu(n) = \mu(\mu(m) + n) = \mu(\mu(m + n)) = \mu(m + \mu(n)).$$

Zu (iv). Beweis durch vollständige Induktion über n für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $n = 0$, dann gilt nach (ii) und Definition 5.2 bereits $m + 0 = m = 0 + m$.

IV: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gerade $m + n = n + m$.

$$\text{IS: } m + \mu(n) = \mu(m + n) = \mu(n + m) = \mu(n) + m.$$

Zu (v). Beweis durch vollständige Induktion über m für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach (ii) bereits $0 + (n + k) = n + k = (0 + n) + k$.

IV: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$ gerade $m + (n + k) = (m + n) + k$.

$$\text{IS: } \mu(m) + (n + k) = \mu(m + (n + k)) = \mu((m + n) + k) = \mu(n + m) + k = (n + \mu(m)) + k = (\mu(m) + n) + k.$$

Zu (vi). Angenommen $m \neq 0$, dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}_0$, sodass $m = \mu(l)$. Dies lässt sich durch vollständige Induktion zeigen. Nun ist aber wegen (P4) $0 = m + n = \mu(l) + n = \mu(l + n) \neq 0$ ein Widerspruch.

Zu (vii). Beweis durch vollständige Induktion über m für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach (ii) bereits $n = 0 + n = 0 + k = k$.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gerade $m + n = m + k \Rightarrow n = k$.

IS: Es gilt:

$$\begin{aligned} & \mu(m) + n = \mu(m) + k \\ \Rightarrow & \mu(m + n) = \mu(m + k) \\ \Rightarrow & m + n = m + k \\ \Rightarrow & n = k \end{aligned}$$

□

Nach Lemma 5.3 ist $(\mathbb{N}_0, +)$ ein Monoid mit neutralem Element 0.¹ Zur nächst „besseren“ algebraischen Struktur fehlen die additiv inversen Elemente, was in Aussage (vi) bereits angeklungen ist. Demnach besitzt sogar keine von Null verschiedene natürliche Zahl ein additives Inverses in den natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 .

¹Für Definitionen grundlegender algebraischer Strukturen wie *Halbgruppe*, *Monoid*, *Gruppe*, *Ring*, *Körper*, *Vektorraum*, usw. wird an dieser Stelle auf Anhang A verwiesen.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Die Addition natürlicher Zahlen lässt bereits jetzt eine totale Anordnung zu. Die Charakterisierung über eine Nachfolgerabbildung liefert dafür den Grundgedanken, dass sich alle natürlichen Zahlen in einer Reihe anordnen lassen, die durch feste und eindeutige Stellen beschrieben werden kann. Ein weiteres Merkmal, das dabei auffällt, ist die Tatsache, dass es sogar für jede nicht leere Teilmenge von \mathbb{N}_0 ein kleinstes Element zu geben scheint.

Lemma 5.4. Sei $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Relation auf \mathbb{N}_0 , wobei für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ die Relation folgendermaßen definiert ist:

$$(n, m) \in R :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : k + n = n + k = m$$

Dann ist R eine *Wohlordnung*.

Beweis. Es gilt:

- Zur Reflexivität. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann gibt es $k = 0 \in \mathbb{N}_0$, sodass mit Lemma 5.3 (ii) gilt, dass $k + n = 0 + n = n$, also $(n, n) \in R$.
- Zur Antisymmetrie. Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$, sodass $(n, m) \in R$ und $(m, n) \in R$, d. h. es gibt $r, s \in \mathbb{N}_0$, sodass $r + m = n$ und $s + n = m$. Es folgt mit Lemma 5.3 (ii) und (v) $0 + n = n = r + m = r + (s + n) = (r + s) + n$. Nach Lemma 5.3 (iv) und (vii) folgt dann $r + s = 0$, also ist nach Lemma 5.3 (vi) $r = s = 0$. Demnach gilt $n = r + m = 0 + m = m$.
- Zur Transitivität. Seien $n, m, k \in \mathbb{N}_0$, sodass $(n, m) \in R$ und $(m, k) \in R$, d. h. es gibt $r, s \in \mathbb{N}_0$, sodass $r + n = m$ und $s + m = k$. Also ist mit Lemma 5.3 (v) $k = s + m = s + (r + n) = (s + r) + n$ und wegen $s + r \in \mathbb{N}_0$ dann auch $(n, k) \in R$.
- Zur Wohlordnung. Sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ohne kleinstes Element. Weiter sei

$$S := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall m \in M : (n, m) \in R\}.$$

Da M kein kleinstes Element besitzt, hat M kein Element mit S gemeinsam, d. h. $S \cap M = \emptyset$. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, dann gilt $(0, m) \in R$, denn nach Lemma 5.3 (ii) und (iv) ist $m = 0 + m = m + 0$. Somit ist zumindest $0 \in S$. Sei $s \in S$ und $m \in M$, dann gibt es wegen $(s, m) \in R$ ein $k \in \mathbb{N}_0$, sodass $k + s = m$. Angenommen $k = 0$, dann ist $m = k + s = 0 + s = s \in S \cap M = \emptyset$. Also gilt $k \neq 0$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$, sodass $k = \mu(r)$ und es gilt nach Definition 5.2 und Lemma 5.3 (iii) $r + \mu(s) = \mu(r) + s = k + s = m$, d. h. $(\mu(s), m) \in R$. Für $s \in S$ ist

also auch $\mu(s) \in S$ und da sowieso $0 \in S$ gilt, folgt nach (P5) $S = \mathbb{N}_0$. Also ist $\emptyset = S \cap M = \mathbb{N}_0 \cap M$ und wegen $M \subseteq \mathbb{N}_0$ folgt $M = \emptyset$.

□

Es wird für die in Lemma 5.4 beschriebene Relation R im Folgenden \leq geschrieben. Man schreibt dann für $(n, m) \in R$ auch $n \leq m$.

Satz 5.5. Seien $n, m, k \in \mathbb{N}_0$. Es ist genau dann $n \leq m$ wenn $k + n \leq k + m$.

Beweis. Zu „ \Rightarrow “. Sei $n \leq m$, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, sodass $r + n = m$. Dann ist $k + m = k + (r + n) = (k + r) + n$. Also ist wegen $k + r \in \mathbb{N}_0$ schon $k + n \leq k + m$.

Zu „ \Leftarrow “. Sei $k + n \leq k + m$, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, sodass $r + (k + n) = k + m$. Dann folgt mit Lemma 5.3 (iv), (v) und (vii) aus $r + (k + n) = k + (r + n) = k + m$ schon $r + n = m$, d. h. $n \leq m$. □

Auf den natürlichen Zahlen lässt sich zusätzlich auch eine Multiplikation einführen.

Definition 5.6. Die Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, (n, m) \mapsto n \cdot m$$

wird *Multiplikation* genannt und ist durch die Eigenschaften

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 0 \cdot n = 0$
- (ii) $\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : \mu(n) \cdot m = (n \cdot m) + m$

rekursiv definiert.

Gerade in der Eigenschaft (ii) aus Definition 5.6 lässt sich die Multiplikation natürlicher Zahlen als wiederholte Addition erkennen. Analog zur Addition folgen auch aus dieser Definition der Multiplikation bereits die grundlegenden Eigenschaften, wie man sie für Produkte natürlicher Zahlen kennt. Zudem lassen sich die Addition und die Multiplikation auch verknüpft ausführen und entsprechende Rechengesetze formulieren.

Lemma 5.7. Seien $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ drei natürliche Zahlen. Dann gilt:

- (i) $m \cdot 0 = 0$
- (ii) $m \cdot \mu(n) = (m \cdot n) + m$
- (iii) $m \cdot n = n \cdot m$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$$(iv) \quad m \cdot (n + k) = (m \cdot n) + (m \cdot k)$$

$$(v) \quad m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$$

$$(vi) \quad 1 \cdot m = m$$

$$(vii) \quad m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ oder } n = 0$$

$$(viii) \quad m \neq 0 \wedge m \cdot n = m \cdot k \Rightarrow n = k$$

Beweis. Zu (i). Beweis durch vollständige Induktion über m .

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach Definition 5.6 bereits $0 \cdot 0 = 0$.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte $m \cdot 0 = 0$.

IS: $\mu(m) \cdot 0 = (m \cdot 0) + 0 = 0 + 0 = 0$.

Zu (ii). Beweis durch vollständige Induktion über m für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach Definition 5.6 bereits $0 \cdot \mu(n) = 0 = 0 + 0 = (0 \cdot n) + 0$.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gerade $m \cdot \mu(n) = (m \cdot n) + m$.

IS: Es gilt:

$$\begin{aligned} \mu(m) \cdot \mu(n) &= (m \cdot \mu(n)) + \mu(n) \\ &= ((m \cdot n) + m) + \mu(n) \\ &= ((m \cdot n) + \mu(m)) + n \\ &= ((m \cdot n) + n) + \mu(m) = (\mu(m) \cdot n) + \mu(m) \end{aligned}$$

Zu (iii). Beweis durch vollständige Induktion über n für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $n = 0$, dann gilt nach (i) und Definition 5.6 bereits $m \cdot 0 = 0 = 0 \cdot m$.

IV: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gerade $m \cdot n = n \cdot m$.

IS: $m \cdot \mu(n) = m + (m \cdot n) = m + (n \cdot m) = \mu(n) \cdot m$.

Zu (iv). Beweis durch vollständige Induktion über m für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach Definition 5.6 bereits $0 \cdot (n+k) = 0 = 0+0 = (0 \cdot n) + (0 \cdot k)$.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gerade $m \cdot (n+k) = (m \cdot n) + (m \cdot k)$.

IS: Es gilt:

$$\begin{aligned}\mu(m) \cdot (n + k) &= (m \cdot (n + k)) + (n + k) \\ &= ((m \cdot n) + (m \cdot k)) + (n + k) \\ &= ((m \cdot n) + n) + ((m \cdot k) + k) = (\mu(m) \cdot n) + (\mu(m) \cdot k)\end{aligned}$$

Zu (v). Beweis durch vollständige Induktion über m für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach Definition 5.6 bereits $0 \cdot (n \cdot k) = 0 = 0 \cdot k = (0 \cdot n) \cdot k$.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gerade $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$.

IS: Es gilt:

$$\begin{aligned}\mu(m) \cdot (n \cdot k) &= (m \cdot (n \cdot k)) + (n \cdot k) \\ &= ((m \cdot n) \cdot k) + (n \cdot k) \\ &= ((m \cdot n) + n) \cdot k = (\mu(m) \cdot n) \cdot k\end{aligned}$$

Zu (vi). Beweis durch vollständige Induktion über m .

IA: Sei $m = 0$, dann gilt nach (i) bereits $1 \cdot 0 = 0$.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte $1 \cdot m = m$.

IS: $1 \cdot \mu(m) = \mu(m) \cdot 1 = (m \cdot 1) + 1 = m + 1 = \mu(m)$.

Zu (vii). Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Beweis durch vollständige Induktion über m für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: Sei $m = 0$, dann ist $0 \cdot n = 0$. Damit ist die Implikation $0 \cdot n = 0 \Rightarrow 0 = 0 \vee n = 0$ wahr.

IV: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gelte $m \cdot n = 0 \Rightarrow m = 0 \vee n = 0$.

IS: Sei $\mu(m) \cdot n = 0$, dann gilt $0 = \mu(m) \cdot n = (m \cdot n) + n$ und dann wegen Lemma 5.3 (vi) $\mu(m) \cdot n = 0 \wedge n = 0$, also insbesondere $m = 0 \vee n = 0$ wahr.

Zu (viii). Sei o. E. $n \leq k$, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$, sodass $r + n = k$. Es ist dann mit (iv) und Lemma 5.3 (ii) $0 + m \cdot n = m \cdot n = m \cdot k = m \cdot (r + n) = m \cdot r + m \cdot n$. Nach Lemma 5.3 (vii) folgt dann $0 = m \cdot r$ und wegen (vii) von oben sowie $m \neq 0$ ist dann $r = 0$. Also ist $k = r + n = 0 + n = n$. \square

Mit den Erkenntnissen aus Lemma 5.7 ergibt sich auch (\mathbb{N}_0, \cdot) zu einem Monoid. Bezüglich der Multiplikation ist hierbei 1 das neutrale Element. Wieder sind alle vom

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

neutralen Element verschiedenen Zahlen nicht invertierbar. Denn angenommen $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \cdot m = 1$, dann folgt zunächst offensichtlich $n, m \neq 0$, da sonst $n \cdot m = 0 \neq 1$. Sind aber $n, m \neq 0$, dann gibt es $n', m' \in \mathbb{N}_0$ sodass $n = 1 + n'$ und $m = 1 + m'$. Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} 1 &= m \cdot n \\ &= (1 + m') \cdot (1 + n') \\ &= (1 \cdot 1) + (1 \cdot n') + (m' \cdot 1) + (m' \cdot n') \\ &= 1 + (n' + (m' + (m' \cdot n'))) \\ \Leftrightarrow 0 &= n' + (m' + (m' \cdot n')) \\ \Leftrightarrow n' &= m' = 0 \end{aligned}$$

d. h. $m = n = 1$ ist die einzig mögliche Konstellation für die Gleichung $1 = m \cdot n$ und damit besitzt lediglich das neutrale Element 1 ein multiplikatives Inverses.

Satz 5.8. Seien $n, m \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$. Es ist genau dann $n \leq m$ wenn $k \cdot n \leq k \cdot m$.

Beweis. Zu „ \Rightarrow “. Sei $n \leq m$, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, sodass $r + n = m$. Dann ist nach Lemma 5.7 (iv) $k \cdot m = k \cdot (r + n) = (k \cdot r) + (k \cdot n)$. Wegen $k \cdot r \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $k \cdot n \leq k \cdot m$. Hier ist anzumerken, dass diese Richtung sogar für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Zu „ \Leftarrow “. Sei $k \cdot n \leq k \cdot m$ und angenommen $n \not\leq m$. Wegen der Wohlordnung muss aber die Teilmenge $\{n, m\} \subset \mathbb{N}_0$ ein kleinstes Element besitzen. Es kommt nur noch m dafür in Frage, also gilt $m \leq n$. Nach der Hinrichtung ist dann aber $k \cdot m \leq k \cdot n$ und dann wegen der Antisymmetrie sogar $k \cdot m = k \cdot n$. Nach Lemma 5.7 (viii) folgt dann $m = n$. Es ist also $n \leq n = m$, was ein Widerspruch zu $n \not\leq m$ ist. \square

Ganze Zahlen

Es zeigt sich, dass die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation gleichermaßen nur eine Monoid-Struktur aufweisen. Aus diesem Grund wird zunächst eine Zahlenbereichserweiterung hin zu den ganzen Zahlen \mathbb{Z} vollzogen, um die Problematik der inversen Elemente bei der Addition zu lösen. Dabei werden die ganzen Zahlen nicht wie die natürlichen Zahlen durch ein Axiomensystem charakterisiert, sondern aus den natürlichen Zahlen heraus konstruiert. Es wird die Menge $M := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ betrachtet und darauf eine Äquivalenzrelation mittels

$$\forall k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : (k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow k + n = m + l$$

eingeführt. Man bezeichne nun $\mathbb{Z} = M/\sim$ als die Menge der *ganzen Zahlen* und definiert dort eine Addition gemäß

$$\forall k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : [(k, l)] + [(m, n)] := [(k + m, l + n)].$$

Diese Definition ist wohldefiniert, denn für alle $k', l', m', n' \in \mathbb{N}_0$ mit $[(k, l)] = [(k', l')]$ und $[(m, n)] = [(m', n')]$, d. h. $k + l' = k' + l$ und $m + n' = m' + n$ gilt:

$$\begin{aligned} [(k, l)] + [(m, n)] &= [(k', l') + (m', n')] \\ \Leftrightarrow [(k + m, l + n)] &= [(k' + m', l' + n')] \\ \Leftrightarrow (k + m) + (l' + n') &= (k' + m') + (l + n) \\ \Leftrightarrow (k + l') + (m + n') &= (k' + l) + (m' + n) \end{aligned}$$

Nun ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe mit neutralem Element $[(0, 0)]$. Denn für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt offensichtlich

$$[(m, n)] + [(0, 0)] = [(m + 0, n + 0)] = [(m, n)] = [(0 + m, 0 + n)] = [(0, 0)] + [(m, n)].$$

Zudem gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $[(n, n)] = [(0, 0)]$, denn $n + 0 = 0 + n$.

Für ein Element $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$ ist ein inverses Element durch $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$ gegeben, denn es gilt:

$$[(m, n)] + [(n, m)] = [(m + n, n + m)] = [(0, 0)] \Leftrightarrow (m + n) + 0 = m + n = n + m = 0 + (n + m)$$

Analog gilt dies für $[(n, m)] + [(m, n)] = [(0, 0)]$. Dieses inverse Element ist sogar eindeutig, denn angenommen es gibt $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit

$$[(m, n)] + [(a, b)] = [(m + a, n + b)] = [(0, 0)],$$

dann gilt also $m + a = n + b$ bzw. $a + m = n + b$, womit $(a, b) \sim (n, m)$ ist, also $[(a, b)] = [(n, m)]$.

Die Assoziativität geht direkt auf das assoziative Verhalten der natürlichen Zahlen zurück. Sind nämlich $r, s, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} [(m, n)] + (([k, l)] + [(r, s)]) &= [(m, n)] + [(k + r, l + s)] \\ &= [(m + (k + r), n + (l + s))] \\ &= [((m + k) + r, (n + l) + s)] \\ &= [(m + k, n + l)] + [(r, s)] \end{aligned}$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$$= [(m, n)] + [(k, l)] + [(r, s)]$$

Zudem lassen sich alle Elemente von \mathbb{Z} entweder durch einen Repräsentanten der Form $(n, 0)$ oder einen Repräsentanten der Form $(0, n)$ darstellen. Ist $(k, m) \in M$ mit $k > m$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $k = m + n$. Dann gilt

$$[(k, m)] = [(m + n, m)] = [(m, m)] + [(n, 0)] = [(n, 0)]$$

Analog gilt dies für $k < m$, d. h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $m := k + n$ und

$$[(k, m)] = [(k, k + n)] = [(k, k)] + [(0, n)] = [(0, n)].$$

Man spricht bei Elementen der Form $[(n, 0)]$ von positiven ganzen Zahlen und bei Elementen der Form $[(0, n)]$ von negativen ganzen Zahlen und interpretiert die Schreibweise $[(m, n)]$ als Differenz $m - n$. Es ergeben sich damit die gängigen Schreibweisen $[n - 0] = n$ für positive ganze Zahlen und $[0 - n] := -n$ für negative ganze Zahlen.

Die Multiplikation kann ebenfalls auf \mathbb{Z} erweitert werden. Dabei wird in Zukunft für die Multiplikation natürlicher Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Schreibweise $m \cdot n := mn$ verwendet. Die Multiplikation auf den ganzen Zahlen \mathbb{Z} wird wie folgt definiert:

$$k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : [(k, l)] \cdot [(m, n)] := [(km + ln, kn + lm)]$$

Auch diese Definition ist wohldefiniert, denn für alle $k', l', m', n' \in \mathbb{N}_0$ mit $[(k, l)] = [(k', l')]$ und $[(m, n)] = [(m', n')]$, d. h. $k + l = k' + l'$ und $m + n = m' + n'$ gilt:

$$\begin{aligned} & [(km + ln, kn + lm)] = [(k'm' + l'n', k'n' + l'm')] \\ \Leftrightarrow & km + ln + k'n' + l'm' = k'm' + l'n' + kn + lm \\ \Leftrightarrow & (km + ln + k'n' + l'm') + (l'm + k'n + ln' + km') \\ & = (k + l')m + (k' + l)n + (k' + l)n' + (k + l')m' \\ & = (k' + l)m + (k + l')n + (k' + l)n' + (k + l')m' \\ & = k'm + lm + kn + l'n + k'n' + ln' + km' + l'm' \\ & = k'(m + n') + l(m + n') + k(m' + n) + l'(m' + n) \\ & = k'(m' + n) + l(m + n') + k(m' + n) + l'(m + n') \\ & = (k'm' + l'n' + kn + lm) + (l'm + k'n + ln' + km') \end{aligned}$$

Es wird (\mathbb{Z}, \cdot) zu einem Monoid, aber nicht zu einer Gruppe. Das neutrale Element ist dabei $[(1, 0)]$, denn für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$[(m, n)] \cdot [(1, 0)] = [(m \cdot 1 + n \cdot 0, m \cdot 0 + n \cdot 1)] = [(m + 0, 0 + n)] = [(m, n)].$$

Analog auch $[(1, 0)] \cdot [(m, n)] = [(m, n)]$. Dass (\mathbb{Z}, \cdot) keine Gruppe ist, lässt sich bereits am einfachen Element $[(2, 0)]$ demonstrieren. Angenommen es existiert ein Element $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$, sodass

$$[(2, 0)] \cdot [(m, n)] = [(m, n)] \cdot [(2, 0)] = [(1, 0)],$$

dann muss nach der Definition der Multiplikation auf \mathbb{Z} schon die Gleichungen $2m = m + m = 1$ auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 erfüllt sein. Dies ist nicht möglich, denn $0 + 0 = 0$ und $1 + 1 = 2 > 1$.

Die ganzen Zahlen lösen also die Problematik hinsichtlich der Invertierbarkeit der Addition auf natürlichen Zahlen, aber nicht die fehlende Invertierbarkeit der Multiplikation. Dennoch lassen sich hier einige Eigenschaften für die Multiplikation formulieren.

Lemma 5.9. Seien $k, l, m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

- (i) $[(1, 0)] \cdot [(m, n)] = [(m, n)]$
- (ii) $[(m, n)] \cdot [(k, l)] = [(k, l)] \cdot [(m, n)]$
- (iii) $[(m, n)] \cdot ([(k, l)] \cdot [(r, s)]) = (([m, n]] \cdot [(k, l)]) \cdot [(r, s)]$
- (iv) $[(m, n)] \cdot ([(k, l)] + [(r, s)]) = [(m, n)] \cdot [(k, l)] + [(m, n)] \cdot [(r, s)]$
- (v) $(-m)n = -(mn) = m(-n)$
- (vi) $(-m)(-n) = mn$
- (vii) $[(m, n)] \cdot [(k, l)] = [(r, r)] \Rightarrow m = n$ oder $k = l$
- (viii) $(-[m, n]) \cdot [(k, l)] = -([m, n] \cdot [(k, l)]) = [(m, n)] \cdot (-[(k, l)])$

Beweis. Zu (i). $[(1, 0)] \cdot [(m, n)] = [(1m + 0n, 1n + 0m)] = [(m, n)]$.

Zu (ii). $[(m, n)] \cdot [(k, l)] = [(mk + nl, nk + ml)] = [(km + ln, kn + lm)] = [(k, l)] \cdot [(m, n)]$.

Zu (iii). Es gilt:

$$\begin{aligned} & [(m, n)] \cdot ([(k, l)] \cdot [(r, s)]) \\ &= [(m, n)] \cdot [(kr + ls, ks + lr)] \end{aligned}$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$$\begin{aligned}
 &= [(m(kr + ls) + n(ks + lr), n(kr + ls) + m(ks + lr))] \\
 &= [(m(kr) + m(ls) + n(ks) + n(lr), n(kr) + n(ls) + m(ks) + m(lr))] \\
 &= [((mk)r + (ml)s + (nk)s + (nl)r, (nk)r + (nl)s + (mk)s + (ml)r)] \\
 &= [((mk + nl)r + (ml + nk)s, (nk + ml)r + (nl + mk)s)] \\
 &= [((mk + nl)r + (ml + nk)s, (ml + nk)r + (mk + nl)s)] \\
 &= [(mk + nl, nk + ml)] \cdot [(r, s)] = [(m, n)] \cdot [(k, l)] \cdot [(r, s)]
 \end{aligned}$$

Zu (iv). Es gilt:

$$\begin{aligned}
 [(m, n)] \cdot [(k, l)] + [(r, s)] &= [(m, n)] \cdot [(k + r, l + s)] \\
 &= [(m(k + r) + n(l + s), n(k + r) + m(l + s))] \\
 &= [(mk + mr + nl + ns, nk + nr + ml + ms)] \\
 &= [((mk + nl) + (mr + ns), (nk + ml) + (nr + ms))] \\
 &= [(mk + nl, nk + ml)] + [(mr + ns, nr + ms)] \\
 &= [(m, n)] \cdot [(k, l)] + [(m, n)] \cdot [(r, s)]
 \end{aligned}$$

Zu (v). $(-m)n = [(0, m)] \cdot [(n, 0)] = [(0n + m0, nm + 0 \cdot 0)] = [(0, mn)] = -(m \cdot n)$ und $m(-n) = [m, 0] \cdot [0, n] = [(m0 + 0n, 0 \cdot 0 + mn)] = [(0, mn)] = -(mn)$.

Zu (vi). $(-m)(-n) = [0, m] \cdot [0, n] = [(0 \cdot 0 + mn, 0m + 0n)] = [(mn, 0)] = mn$.

Zu (vii). $[(m, n)] \cdot [(k, l)] = [(mk + nl, nk + ml)] = [(0, 0)]$, d. h. $mk + nl = 0$ und $nk + ml = 0$. Nach Lemma 5.3 sind dann $mk = nl = nk = ml = 0$. Aus Lemma 5.7 folgt zunächst $m = 0$ oder $k = 0$. Angenommen $m \neq 0$, dann muss $k = l = 0$ sein. Analog folgt aus $k \neq 0$ direkt $m = n = 0$.

Zu (viii). Es gilt mit (ii) und (iv):

$$\begin{aligned}
 &(-[(m, n)]) \cdot [(k, l)] + [(m, n)] \cdot [(k, l)] \\
 &= (-[(m, n)] + [(m, n)]) \cdot [(k, l)] \\
 &= [(0, 0)] \cdot [(k, l)] = [(0, 0)]
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &[(m, n)] \cdot (-[(k, l)]) + [(m, n)] \cdot [(k, l)] \\
 &= [(m, n)] \cdot (-[(k, l)] + [(k, l)]) \\
 &= [(m, n)] \cdot [(0, 0)] = [(0, 0)]
 \end{aligned}$$

□

Man beachte, dass aus (viii) direkt auch $(-[m, n]) \cdot (-[k, l]) = [(m, n)] \cdot [(k, l)]$ folgt. Setze dazu $[(k', l')] := [(l, k)] = -[k, l]$. Es ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nach Lemma 5.9 ein kommutativer Ring mit Eins.

Die Ordnung \leq auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 lässt sich zu einer Ordnung auf den ganzen Zahlen \mathbb{Z} fortsetzen². Die Motivation dahinter ist die Idee, dass für zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ genau dann $x \leq y$ gelten soll, wenn $y - x \in \mathbb{N}_0$. Seien also $m, n, k, l \in \mathbb{N}_0$, dann lässt sich Folgendes schreiben:

$$y - x = [(k, l)] + (-[m, n]) = [(k, l)] + [(n, m)] = [(k + n, l + m)]$$

Es ist dann $[(k + n, l + m)] \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow l + m \leq k + n$.

Lemma 5.10. Sei $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Relation auf \mathbb{Z} , wobei für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ die Relation folgendermaßen definiert ist:

$$([m, n], [k, l]) \in S \Leftrightarrow l + m \leq k + n$$

Es ist S dann eine totale Ordnung und eine Fortsetzung der Ordnung \leq von \mathbb{N}_0 auf \mathbb{Z} .

Beweis. Es gilt:

- Zur Wohldefiniertheit. Seien $k, l, m, n, k', l', m', n' \in \mathbb{N}_0$, sodass $[(k, l)] = [(k', l')]$, $[(m, n)] = [(m', n')]$ und $([(m, n)], [(k, l)]) \in S$, d. h. $k + l' = k' + l$, $m + n' = m' + n$ und $l + m \leq k + n$. Man betrachte folgende Rechnung

$$\begin{aligned} (k + n) + (l' + m') &= (k + l') + (m' + n) \\ &= (k' + l) + (m + n') \\ &= (l + m) + (k' + n') \leq (k + n) + (k' + n'). \end{aligned}$$

Mit Satz 5.5 folgt $l' + m' \leq k' + n'$ und damit $([(m', n')], [(k', l')]) \in S$.

- Zur Reflexivität. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $n + m \leq m + n$, d. h. $([(m, n)], [(m, n)]) \in S$.
- Zur Antisymmetrie. Seien $m, n, k, l \in \mathbb{N}_0$, sodass $([(k, l)], [(m, n)]) \in S$ und $([(m, n)], [(k, l)]) \in S$, dann gilt $n + k \leq m + l$ und $l + m \leq k + n$. Es folgt nach Lemma 5.4 $k + n = m + l$, d. h. $[(k, l)] = [(m, n)]$.

²Seien M, N Mengen mit $N \subseteq M$ und sei $R \subseteq N \times N$ eine Ordnung auf N . Dann heißt eine Ordnung $S \subseteq M \times M$ auf M eine Fortsetzung von R auf M , wenn S eingeschränkt auf N gerade R entspricht.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

- Zur Transitivität. Seien $m, n, k, l, r, s \in \mathbb{N}_0$, sodass $([(r, s)], [(k, l)]) \in S$ und $([(k, l)], [(m, n)]) \in S$, d. h. $l + r \leq k + s$ und $n + k \leq m + l$. Betrachte $k + n + r \leq m + l + r \leq m + k + s = k + m + s$. Aus Satz 5.8 folgt dann $n + r \leq m + s$, d. h. $([(r, s)], [(m, n)]) \in S$.
- Zur Totalität. Seien $m, n, k, l \in \mathbb{N}_0$ und angenommen $([(k, l)], [(m, n)]) \notin S$, d. h. $n + k \not\leq m + l$. Wegen der Wohlordnung auf \mathbb{N}_0 muss dann aber die Teilmenge $\{n + k, m + l\} \subset \mathbb{N}_0$ ein kleinstes Element besitzen und dafür kommt dann nur noch $m + l$ in Frage, d. h. $m + l \leq n + k$ und damit $([(m, n)], [(k, l)]) \in S$.
- Zur Fortsetzung. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, sodass $([(m, 0)], [(n, 0)]) \in S$. Dann gilt $0 + m \leq n + 0$, also $m \leq n$ auf \mathbb{N}_0 .

□

Es wird im Folgenden auch für die Ordnung auf \mathbb{Z} für $([(m, n)], [(k, l)]) \in S$ kürzer $[(m, n)] \leq [(k, l)]$ geschrieben.

Lemma 5.11. Seien $n, m, k, l, r, s, t \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

- (i) $[(m, n)] \leq [(k, l)] \Rightarrow [(r, s)] + [(m, n)] \leq [(r, s)] + [(k, l)]$
- (ii) $[(m, n)] \leq [(k, l)] \Rightarrow [(t, 0)] \cdot [(m, n)] \leq [(t, 0)] \cdot [(k, l)]$

Beweis. Sei $[(m, n)] \leq [(k, l)]$, d. h. $l + m \leq k + n$.

Zu (i). Es ist $[(r, s)] + [(m, n)] = [(r + m, s + n)]$, $[(r, s)] + [(k, l)] = [(r + k, s + l)]$ und es gilt:

$$(s + l) + (r + m) = (s + r) + (l + m) \leq (s + r) + (k + n) = (r + k) + (s + n)$$

Also ist $[(r, s)] + [(m, n)] \leq [(r, s)] + [(k, l)]$.

Zu (ii). Es ist $[(t, 0)] \cdot [(m, n)] = [(tm, tn)]$, $[(t, 0)] \cdot [(k, l)] = [(tk, tl)]$ und es gilt mit Satz 5.8:

$$tl + tm = t(l + m) \leq t(k + n) = tk + tn$$

Also ist $[(t, 0)] \cdot [(m, n)] \leq [(t, 0)] \cdot [(k, l)]$. □

Es wird ab sofort für die Menge der ganzen Zahlen ohne die Null $\mathbb{Z}^0 := \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ notiert und die Elemente von \mathbb{Z} einfacher als $z \in \mathbb{Z}$ geschrieben. Steht z für eine positive

ganze Zahl, so steckt dahinter die Äquivalenzklasse $[(z, 0)]$, steht z hingegen für eine negative ganze Zahl, dann ist damit die Äquivalenzklasse $[(0, |z|)]$ gemeint³.

Rationale Zahlen

Damit nun auch die Invertierbarkeit hinsichtlich der Multiplikation gegeben ist, werden die ganzen Zahlen \mathbb{Z} zu den rationalen Zahlen erweitert. Wieder lässt sich der neue Zahlenbereich aus dem bestehenden Zahlenbereich heraus konstruieren. Sei dazu $N := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^0$ und darauf eine Äquivalenzrelation mittels

$$p, r \in \mathbb{Z}, q, s \in \mathbb{Z}^0 : (p, q) \sim' (r, s) \Leftrightarrow p \cdot s = r \cdot q$$

definiert. Man bezeichne $\mathbb{Q} := N/\sim'$ als die Menge der *rationalen Zahlen* und es lässt sich dort ebenfalls eine Addition und eine Multiplikation einführen. Seien also $p, r \in \mathbb{Z}, q, s \in \mathbb{Z}^0$ und nun auch auf \mathbb{Z} die Schreibweise $y \cdot z = yz$ gängig, dann sind durch

$$\begin{aligned} [(p, q)] + [(r, s)] &:= [(ps + rq, qs)] \\ [(p, q)] \cdot [(r, s)] &:= [(pr, qs)] \end{aligned}$$

zwei wohldefinierte Verknüpfungen auf N definiert, denn für $q, s \in \mathbb{Z}^0$ ist wegen der Nullteilerfreiheit von \mathbb{Z} aus Lemma 5.9 (viii) auch $qs \in \mathbb{Z}^0$. Zudem gilt für zusätzliche $p', r' \in \mathbb{Z}, q', s' \in \mathbb{Z}^0$ mit $[p, q] = [p', q']$ und $[r, s] = [r', s']$, d. h. $pq' = p'q$ und $rs' = r's$ gerade

$$\begin{aligned} [(ps + rq, qs)] &= [(p's' + r'q', q's')] \\ \Leftrightarrow (ps + rq) \cdot (q's') &= (ps) \cdot (q's') + (rq) \cdot (q's') \\ &= (pq') \cdot (ss') + (rs') \cdot (qq') \\ &= (p'q) \cdot (ss') + (r's) \cdot (qq') \\ &= (p's') \cdot (qs) + (r'q') \cdot (qs) = (p's' + r'q') \cdot (qs) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [(pr, qs)] &= [(p'r', q's')] \\ \Leftrightarrow (pr) \cdot (q's') &= (pq') \cdot (rs') = (p'q) \cdot (r's) = (p'r') \cdot (qs). \end{aligned}$$

³Der Betrag ist hier als Notation zur Veranschaulichung verwendet. Er ließe sich mit der eben behandelten Ordnungsrelation auch formal einführen.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Es ist zunächst $(\mathbb{Q}, +)$ eine Gruppe mit neutralem Element $[(0, 1)]$, denn für alle $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^0$ gilt

$$[(p, q)] + [(0, 1)] = [(p \cdot 1 + 0 \cdot q, q \cdot 1)] = [(p + 0, q)] = [(p, q)].$$

und analog $[(0, 1)] + [(p, q)] = [(p, q)]$. Das additiv inverse Element eines Elements $[(p, q)] \in \mathbb{Q}$ ist durch $[(-p, q)] \in \mathbb{Q}$ gegeben, denn

$$[(p, q)] + [(-p, q)] = [(pq + (-p)q, qq)] = [(pq + (-pq), qq)] = [(0, qq)] = [(0, 1)]$$

und analog $[(-p, q)] + [(p, q)] = [(0, 1)]$.

Lemma 5.12. Für alle $z \in \mathbb{Z}^0$ gilt $[(0, z)] = [(0, 1)]$. Umgekehrt gilt zudem für ein $[(p, q)] \in \mathbb{Q}$ mit $p \neq 0$ bereits $[(p, q)] \neq [(0, 1)]$.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{Z}^0$, dann gilt $z \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 1$. Seien $p, q \in \mathbb{Z}^0$ und angenommen $[(p, q)] = [(0, 1)]$, d. h. $p \cdot 1 = 0 \cdot q = 0$. Es steht $p \cdot 1 = p = 0$ aber im Widerspruch zu $p \in \mathbb{Z}^0$. \square

Nun ist das additiv inverse Element von oben erneut eindeutig, denn angenommen für $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^0$ gilt

$$[(p, q)] + [(a, b)] = [(pb + qa, qb)] = [(0, 1)],$$

dann ist insbesondere $pb + qa = 0$, d. h. $-pb = (-p)b = qa$ und somit $(-p, q) \sim' (a, b)$, also $[(a, b)] = [(-p, q)]$.

Weiter ist (\mathbb{Q}^0, \cdot) auch eine Gruppe, wobei mit $\mathbb{Q}^0 = \mathbb{Q} \setminus \{(0, 1)\}$ analog zu \mathbb{Z}^0 die Menge der rationalen Zahlen ohne die Null gemeint ist. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist hier $[(1, 1)]$, denn für alle $p, q \in \mathbb{Z}^0$ gilt

$$[(p, q)] \cdot [(1, 1)] = [(p \cdot 1, q \cdot 1)] = [(p, q)]$$

und analog $[(1, 1)] \cdot [(p, q)] = [(p, q)]$. Das multiplikativ Inverse eines Elements $[(p, q)] \in \mathbb{Q}^0$ ist durch $[(q, p)] \in \mathbb{Q}^0$ gegeben, denn

$$[(p, q)] \cdot [(q, p)] = [(pq, qp)] = [(1, 1)] \Leftrightarrow pq \cdot 1 = 1 \cdot qp$$

und analog $[(q, p)] \cdot [(p, q)] = [(1, 1)]$. Es ist $[(q, p)] \neq [(0, 1)]$, denn $q \neq 0$, da $q \in \mathbb{Z}^0$.

Lemma 5.13. Es gilt $[(1, 1)] = \{(z, z) \in N \mid z \in \mathbb{Z}^0\}$.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{Z}^0$, dann gilt $(1, 1) \sim' (z, z)$, denn $1 \cdot z = z \cdot 1$. Ist $[(p, q)] \in \mathbb{Q}$ mit $[(p, q)] = [(1, 1)]$, d. h. $(p, q) \sim' (1, 1)$, dann gilt $p \cdot 1 = 1 \cdot q$, also $p = q$. \square

Auch hier lässt sich die Eindeutigkeit des multiplikativ inversen Elements schnell zeigen. Angenommen es gibt $a, b \in \mathbb{Z}^0$ mit

$$[(p, q)] \cdot [(a, b)] = [(pa, qb)] = [(1, 1)],$$

dann gilt $pa = qb$ bzw. $ap = qb$, d. h. $(a, b) \sim' (q, p)$, also $[(a, b)] = [(q, p)]$.

Generell lässt sich für jedes Element aus \mathbb{Q} ein geeigneter Repräsentant finden. Sind $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}^0$ mit $q \mid p$, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{Z}^0$ mit $p = rq$, dann gilt $[(p, q)] = [(r, 1)]$, denn $p \cdot 1 = p = r \cdot q$. Gilt jedoch $q \nmid p$, dann führt man den sogenannten *größten gemeinsamen Teiler* d der Zahlen p und q ein und schreibt $\text{ggT}(p, q) := d$. Dieser erfüllt die folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad d \mid p \wedge d \mid q$$

$$(ii) \quad \forall k : k \mid p \wedge k \mid q \Rightarrow k \mid d$$

Es gibt dann $s, t \in \mathbb{Z}^0$ mit $p = sd$ und $q = td$ und dann gilt $[(p, q)] = [(s, t)]$, denn $p \cdot t = s \cdot d \cdot t = s \cdot q$. Ein solches Element (s, t) , für das dann automatisch $\text{ggT}(s, t) = 1$ gilt, nennt man auch einen *vollständig gekürzten Bruch*. Die Bezeichnung als *Bruch* ist mit der bekannten Schreibweise für die Elemente aus \mathbb{Q} als $[(p, q)] \hat{=} \frac{p}{q}$ nachvollziehbar. In dieser Schreibweise sind auch die ganzen Zahlen als Teil der rationalen Zahlen erkennbar, denn für $p \in \mathbb{Z}$ ist $[(p, 1)] \hat{=} \frac{p}{1} \hat{=} p \in \mathbb{Q}$.

Satz 5.14. Es ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper mit Nullelement $[(0, 1)]$ und Einselement $[(1, 1)]$.

Beweis. Es wurde bereits gezeigt, dass $(\mathbb{Q}, +)$ und (\mathbb{Q}^0, \cdot) Gruppen sind. Die entsprechenden neutralen Elemente sind tatsächlich $[(0, 1)]$ und $[(1, 1)]$. Es handelt sich zudem um abelsche Gruppen, denn für $[(p, q)], [(r, s)] \in \mathbb{Q}, [(r', s')] \in \mathbb{Q}^0$ gilt

$$[(p, q)] + [(r, s)] = [(ps + rq, qs)] = [(rq + ps, sq)] = [(r, s)] + [(p, q)]$$

und

$$[(p, q)] \cdot [(r', s')] = [(pr', qs')] = [(r'p, s'q)] = [(r', s')] \cdot [(p, q)].$$

Weiter gilt für $[(p, q)], [(r, s)], [(u, v)] \in \mathbb{Q}$ auch

$$[(p, q)] \cdot ([(r, s)] + [(u, v)]) = [(p, q)] \cdot [(rv + us, sv)]$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$$\begin{aligned}
 &= [(p(rv + us), qsv)] \\
 &= [(prv + pus, qsv)] \\
 &= [(prv + pus, qsv)] \cdot [(q, q)] \\
 &= [(q(prv + pus), q(qsv))] \\
 &= [(prqv + puqs, qsqv)] \\
 &= [(pr, qs)] + [(pu, qv)] \\
 &= [(p, q)] \cdot [(r, s)] + [(p, q)] \cdot [(u, v)]
 \end{aligned}$$

und analog $([(p, q)] + [(r, s)]) \cdot [(u, v)] = [(p, q)] \cdot [(u, v)] + [(r, s)] \cdot [(u, v)]$. Man beachte, dass $q \neq 0$ gilt. \square

Es wird im Folgenden für die Elemente aus \mathbb{Q} kürzer $\frac{p}{q}$ statt $[(p, q)]$.

Die totale Ordnung von \mathbb{Z} lässt sich ebenfalls zu einer totalen Ordnung von \mathbb{Q} fortsetzen. Die Motivation dafür liegt in der folgenden Überlegung: Man gehen von einer Ordnung auf \mathbb{Q} aus, dann erwartet man für $p, r \in \mathbb{Z}, q, s \in \mathbb{Z}^0, k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Beziehung:

$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Rightarrow k \cdot \frac{p}{q} \leq k \cdot \frac{r}{s}$$

Durch eine geschickte Wahl von bspw. $k = qs$ führt man diese Ordnung direkt auf die Ordnung von \mathbb{Z} zurück. Eine ausführliche Behandlung ist KASCH und PAREIGIS (1991, S. 225–228) zu entnehmen. Die Ordnung auf \mathbb{Q} macht \mathbb{Q} insbesondere zu einem angeordneten Körper und in einem angeordneten Körper sind alle Quadrate größer oder gleich Null.

Weil \mathbb{Q} also ein Körper ist, löst sich die allgemeine lineare Gleichung $ax + b = 0$ für $a \in \mathbb{Q}^0, b \in \mathbb{Q}$ durch $x = \frac{-b}{a} \in \mathbb{Q}$. Darüber hinaus lassen sich aus der Multiplikation aber auch höhere Potenzen von Elementen bilden. Beispielsweise lässt sich die 9 als $3 \cdot 3 = 3^2$ schreiben. Umgekehrt entsteht dadurch eine Fragestellung der Form: „Gibt es zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Q}$ eine Zahl $b \in \mathbb{Q}$, sodass $a = b^2$?“ Die entsprechende algebraische Gleichung sucht eine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ für $x^2 - a = 0$.

Definition 5.15. Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ zwei rationale Zahlen und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl größer 0, sodass $a = b^n$. Dann nennt man b eine n -te Wurzel von a . In Symbolen schreibt man auch $b = \sqrt[n]{a}$. Für $n = 2$ spricht man zudem auch von einer *Quadratwurzel* von a und schreibt $b = \sqrt{a}$.

Wegen der Anordnung folgt die Unmöglichkeit, die Gleichung $x^2 - a = 0$ für ein $a < 0$ in \mathbb{Q} zu lösen. Aber es gibt auch positive rationale Zahlen, die keine Quadratzahlen sind. Ein einfaches Beispiel ist $2 \in \mathbb{Q}$, denn $\sqrt{2}$ ist bekanntlich eine irrationale Zahl.

Lemma 5.16. Es ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

Beweis. Angenommen es gibt $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \text{ggT}(p, q) = 1$, sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, dann folgt $2q^2 = p^2$, d. h. $2 \mid p^2$. Da 2 eine Primzahl⁴ ist, folgt dann direkt $2 \mid p$, d. h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $p = 2k$. Also gilt $2q^2 = p^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. Analog wie eben folgt dann auch $2 \mid q$, was nun ein Widerspruch zu $\text{ggT}(p, q) = 1$ ist. \square

Reelle Zahlen

Für jeden angeordneten Körper K – also insbesondere für \mathbb{Q} – kann man einen absoluten Betrag einführen, der es wiederum ermöglicht, in K *Cauchy-Folgen* und *konvergente Folgen* einzuführen. Die Menge $\mathcal{C}(K)$ der Cauchy-Folgen in K lässt sich zu einem kommutativen Ring mit Eins machen. Die Menge $\mathcal{N}(K)$ der Cauchy-Folgen in K , die gegen $0 \in K$ konvergieren, bildet ein Ideal von $\mathcal{C}(K)$. Der Faktorring $\mathcal{C}(K)/\mathcal{N}(K)$ ist ein angeordneter Körper und stellt im Fall $K = \mathbb{Q}$ die reellen Zahlen \mathbb{R} dar. Die Ordnung auf $\mathcal{C}(K)/\mathcal{N}(K)$ setzt die Ordnung auf K fort. Die Bildung der reellen Zahlen auf diesem Wege ist stark topologischer Natur und nicht nur algebraisch geprägt. Auf eine genaue Analyse des Vorgehens wird daher an dieser Stelle verzichtet. Der derartige Aufbau der reellen Zahlen mit Cauchy-Folgen ist im gleichnamigen Kapitel von KASCH und PAREIGIS (1991, S. 230–249) ausführlich beschrieben.

Komplexe Zahlen

Während die reellen Zahlen einen vollständigen Zahlenstrahl anschaulich ohne Lücken darstellen und dort insbesondere jede positive reelle Zahl als Quadratzahl einer reellen Zahl geschrieben werden kann, ist die Motivation für die komplexen Zahlen, dass eben auch negative reelle Zahlen als Quadratzahlen möglich seien sollen. Die womöglich einfachste zugehörige algebraische Gleichung lautet $x^2 + 1 = 0$. In der bekannten Schreibweise von Wurzeln ist also die Frage nach dem Element $\sqrt{-1}$. Tatsächlich steht diese Frage bereits für die allgemein Frage nach der Wurzel negativer Ausdrücke, denn für ein beliebiges $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$ gilt $\sqrt{-r} = \sqrt{(-1) \cdot r} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{r}$ ⁵ und $\sqrt{r} \in \mathbb{R}$. Es ist nun aber $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, denn für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt $r^2 \geq 0$ ⁶. Man führt für $\sqrt{-1}$ also einen Ausdruck i ein und charakterisiert diesen durch $i^2 = -1$. Für die Ringerweiterung $\mathbb{R}[i]$ lassen sich nun die Addition und Multiplikation aus \mathbb{R} fortsetzen und es ergibt sich $\mathbb{R}[i]$ dann sogar zu einem Körper. Man schreibt dann auch $\mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i)$.

⁴Es ist ein Ringelement $p \neq 0, p$ keine Einheit, genau dann ein *Primelement*, wenn für alle Ringelemente a, b gilt, dass aus $p \mid ab$ schon $p \mid a$ oder $p \mid b$ folgt.

⁵Die für diese Umformung notwendige Gesetzmäßigkeit $(-1)^2 = 1$ folgt für die reellen Zahlen direkt aus den rationalen Zahlen.

⁶Auch \mathbb{R} ist wie bereits erwähnt ein angeordneter Körper.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Satz 5.17. Auf $\mathbb{R}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ seien die zwei Verknüpfungen

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

definiert. Dann ist $(\mathbb{R}[i], +, \cdot)$ ein Körper. Er wird als Körper der *komplexen Zahlen* \mathbb{C} bezeichnet.

Beweis. Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)) &= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i) \\ &= (a + (c + e)) + (b + (d + f))i \\ &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i \\ &= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi) \\ &= ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) \end{aligned}$$

und

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

sowie analog $(0 + 0i) + (a + bi) = a + bi$ und

$$(a + bi) + (-a + (-b)i) = (a + (-a)) + (b + (-b))i = 0 + 0i$$

sowie analog $(-a + (-b)i) + (a + bi) = 0 + 0i$ und abschließend

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i = (c + di) + (a + bi). \end{aligned}$$

Es ist also $(\mathbb{R}[i], +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 + 0i$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot ((c + di) + (e + fi)) &= (a + bi) \cdot ((c + e) + (d + f)i) \\ &= (a \cdot (c + e) - b \cdot (d + f)) + (a \cdot (d + f) + b \cdot (c + e))i \\ &= (ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i \\ &= (ac - bd + ae - bf) + (ad + bc + af + be)i \\ &= (ac - bd + ae - bf) + (ad + bc)i + (af + be)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (ac - bd) + (ad + bc)i + (ae - bf) + (af + be)i \\
&= (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi)
\end{aligned}$$

und analog $((a + bi) + (c + di)) \cdot (e + fi) = (a + bi) \cdot (e + fi) + (c + di) \cdot (e + fi)$. Seien nun zusätzlich $a + bi, c + di, e + fi \neq 0 + 0i$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&(a + bi) \cdot ((c + di) \cdot (e + fi)) \\
&= (a + bi) \cdot ((ce - df) + (cf + de)i) \\
&= (a(ce - df) - b(cf + de)) + (a(cf + de) + b(ce - df))i \\
&= (ace - adf - bcf - bde) + (acf + ade + bce - bdf)i \\
&= ((ac - bd)e - (ad + bc)f) + ((ad + bc)e + (ac - bd)f)i \\
&= ((ac - bd) + (ad + bc)i) \cdot (e + fi) \\
&= ((a + bi) \cdot (c + di)) \cdot (e + fi)
\end{aligned}$$

und

$$(a + bi) \cdot (1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi$$

sowie analog $(1 + 0i) \cdot (a + bi) = a + bi$. Wegen $a + bi \neq 0 + 0i$ gilt $a^2 + b^2 \neq 0$ und dann

$$\begin{aligned}
&(a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i \right) \\
&= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) + \left(a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) i \\
&= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \cdot i = 1 + 0i
\end{aligned}$$

sowie analog $\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i \right) \cdot (a + bi) = 1 + 0i$ und abschließend

$$\begin{aligned}
&(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \\
&= (ca - db) + (cb + da)i = (c + di) \cdot (a + bi).
\end{aligned}$$

Nun ist $(\mathbb{R}[i], +, \cdot)$ ein Ring mit Eins, in dem jedes von Null verschiedene Element ein inverses Element besitzt. Es folgt daraus unmittelbar die Abgeschlossenheit der Multiplikation und damit ist $(\mathbb{R}[i] \setminus \{0 + 0i\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $1 + 0i$. \square

Es lassen sich die komplexen Zahlen \mathbb{C} auch als zweidimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum interpretieren. Dies wird besonders deutlich, wenn die Form der Elemente der Ringer-

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

weiterung etwas ausführlicher notiert werden: $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$. Man sieht eine reelle Linearkombination möglicher Basiselemente 1 und i .

Satz 5.18. Es ist \mathbb{C} ein \mathbb{R} -Vektorraum und zudem isomorph zu \mathbb{R}^2 .

Beweis. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ folgen die Vektorraum-Eigenschaften direkt aus Satz 5.17. Es ist weiter

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

eine \mathbb{R} -lineare Abbildung, denn für $a + bi, c + di \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi((a + bi) + (c + di)) &= \varphi((a + c) + (b + d)i) \\ &= \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \varphi(a + bi) + \varphi(c + di) \end{aligned}$$

und

$$\varphi(r(a + bi)) = \varphi(ra + rbi) = \begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = r \cdot \varphi(a + bi).$$

φ ist zusätzlich bijektiv, denn für $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(a + bi) = \varphi(c + di)$ folgt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d \Leftrightarrow a + bi = c + di.$$

und für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist $a + bi \in \mathbb{C}$ und $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. □

Wegen Satz 5.17 und 5.18 ist \mathbb{C} eine \mathbb{R} -Algebra, also anschaulich eine Vektorraumstruktur auf der eine sinnvolle Vektormultiplikation existiert, die insbesondere durch inverse Elemente auch umkehrbar ist. Man spricht von der algebraischen Struktur der *assoziativen Divisionsalgebra* über einem Körper. Eine assoziative Divisionsalgebra über einem Körper K ist eine assoziative, nicht notwendigerweise kommutative Struktur, auf der sinnvoll abseits des Nullelements dividiert werden kann. Assoziative Divisionsalgebren über Körpern sind automatisch Ringe. Die entsprechende Definition ist nebst anderer Definitionen von algebraischen Strukturen in Anhang A zu finden. Es stellt sich die Frage

nach assoziativen Divisionsalgebren, deren Dimension über \mathbb{R} höher als 2 ist – das ist die Dimension von \mathbb{C} über \mathbb{R} .

Reelle assoziative Divisionsalgebren

Es lässt sich zu \mathbb{C} nicht einfach ein weiteres $j \notin \mathbb{C}$ mit $j^2 = -1$ hinzunehmen, sodass $\{z + j\tau \mid z \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{R}\}$ eine dreidimensionale assoziative Divisionsalgebra über \mathbb{R} ist. Nehme man nämlich $\mathbb{C}[j] = \mathbb{R}[i, j]$ als solche dreidimensionale Divisionsalgebra über \mathbb{R} an, dann wäre $(1, i, j)$ ein Erzeugendensystem und damit eine Basis von $\mathbb{R}[i, j]$. Die Elemente z von $\mathbb{R}[i, j]$ wären von der Form $z = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Die Addition folgt aus der Vektorraumstruktur als komponentenweise Addition:

$$(a1 + bi + cj) + (d1 + ei + fj) = (a + d)1 + (b + e)i + (c + f)j$$

Die Multiplikation ergibt sich mit den Eigenschaften einer reellen assoziativen Divisionsalgebra zu:

$$\begin{aligned} (a1 + bi + cj) \cdot (d1 + ei + fj) &= a1d1 + a1ei + a1fj + bid1 + bie i + bifj + cjd1 + cje i + cjfj \\ &= ad + aei + afj + bdi + bei^2 + bfij + cdj + ceji + cfj^2 \\ &= ad + aei + afj + bdi - be + bfij + cdj + ceji - cf \\ &= (ad - be - cf)1 + (ae + bd)i + (af + cd)j + bfij + ceji \end{aligned}$$

Angenommen $ij \in \mathbb{R}[i, j]$, d. h. es gibt $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sodass $ij = \alpha 1 + \beta i + \gamma j$, dann folgt:

$$\begin{aligned} ij &= \alpha 1 + \beta i + \gamma j \\ \Rightarrow ij - \gamma j &= \alpha 1 + \beta i \\ \Rightarrow (i - \gamma)j &= \alpha 1 + \beta i \\ \Rightarrow j &= \frac{\alpha 1 + \beta i}{i - \gamma} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[i, j]) = 3$. Man beachte, dass für $\gamma \in \mathbb{R}$, der Ausdruck $i - \gamma$ nicht Null ist, da sonst $i \in \mathbb{R}$.

Man mache nun folgenden Versuch: Man nehme zu \mathbb{C} ein weiteres $j \notin \mathbb{C}$ mit $j^2 = -1$ und ein weiteres $k \notin \mathbb{C}$ mit $k^2 = -1$ hinzu und versuche $\{z + \tau j + \sigma k \mid z \in \mathbb{C}, \tau, \sigma \in \mathbb{R}\}$ zu einer vierdimensionalen assoziativen Divisionsalgebra über \mathbb{R} zu machen. Es wird also die Struktur $\mathbb{C}[j, k] = \mathbb{R}[i, j, k]$ betrachtet, deren Elemente von der Form $a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ für

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind. Die Addition ergibt sich erneut komponentenweise. Die Multiplikation wäre:

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk) \cdot (e + fi + gj + hk) \\ &= ae + (af)i + (ag)j + (ah)k + (be)i + (bf)i^2 + (bg)ij + (bh)ik \\ &\quad + (ce)j + (cf)ji + (cg)j^2 + (ch)jk + (de)k + (df)ki + (dg)kj + (dh)k^2 \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be)i + (ag + ce)j + (ah + de)k \\ &\quad + (bg)ij + (cf)ji + (bh)ik + (df)ki + (ch)jk + (dg)kj \end{aligned}$$

Setzt man $ij = k = -ji, jk = i = -kj$ und $ki = j = -ik$, dann ist die Multiplikation insgesamt durch

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk) \cdot (e + fi + gj + hk) \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i \\ &\quad + (ag + ce + df - bh)j + (ah + de + bg - cf)k \end{aligned}$$

wohldefiniert.

Eine solche Festlegung ist nicht nur technisch möglich, sondern lässt sich auch tatsächlich umsetzen. Man betrachte dazu $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und identifiziere $1 \in \mathbb{R}[i, j, k]$ mit dem Element $(1, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{R}[i, j, k]$ mit dem Element $(i, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{R}[i, j, k]$ mit dem Element $(0, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{R}[i, j, k]$ mit dem Element $(0, -i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, dann ist dadurch das Element $a + bi + cj + dk \in \mathbb{R}[i, j, k]$ mit dem Element $(a + bi, c - di) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ identifiziert. Führt man auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ für $z, w, z', w' \in \mathbb{C}$ die Multiplikation

$$(z, w) \cdot (z', w') := (zz' - \bar{w}w', \bar{z}w' + wz')$$

ein und identifiziert z mit $a + bi$, w mit $\overline{c + di}$, z' mit $e + fi$ und w' mit $\overline{g + hi}$, so ist $(a + bi + cj + dk) \cdot (e + fi + gj + hk)$ mit dem Element

$$((ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i, \overline{(ag + ce + df - bh) + (ah + de + bg - cf)i})$$

aus $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ identifizierbar. Man sieht $ij \hat{=} (i, 0) \cdot (0, 1) = (0, \bar{i}) = (0, -i) \hat{=} k$, $j^2 \hat{=} (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, \bar{0}) = (-1, 0) \hat{=} -1$ und analog die anderen Fälle.

Es wird ab sofort mit Koordinatenvektoren gearbeitet:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae - bf - cg - dh \\ af + be + ch - dg \\ ag + ce + df - bh \\ ah + de + bg - cf \end{pmatrix}$$

Seien $a, b, c, d, e, f, g, h, r, s, t, u \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} er - fs - gt - hu \\ es + fr + gu - ht \\ et + gr + hs - fu \\ eu + hr + ft - gs \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(er - fs - gt - hu) - b(es + fr + gu - ht) - c(et + gr + hs - fu) - d(eu + hr + ft - gs) \\ a(es + fr + gu - ht) + b(er - fs - gt - hu) + c(eu + hr + ft - gs) - d(et + gr + hs - fu) \\ a(et + gr + hs - fu) + c(er - fs - gt - hu) + d(es + fr + gu - ht) - b(eu + hr + ft - gs) \\ a(eu + hr + ft - gs) + d(er - fs - gt - hu) + b(et + gr + hs - fu) - c(es + fr + gu - ht) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aer - afs - agt - ahu - bes - bfr - bgu + bht - cet - cgr - chs + cfu - deu - dhr - dft + dgs \\ aes + afr + agu - aht + ber - bfr - bgt - bhu + ceu + chr + cft - cgs - det - dgr - dhs + dfu \\ aet + agr + ahs - afu + cer - cfs - cgt - chu + des + dfr + dgu - dht - beu - bhr - bft + bgs \\ aeu + ahr + aft - ags + der - dfs - dgt - dhu + bet + bgr + bhs - bfu - ces - cfr - cgu + cht \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ae - bf - cg - dh)r - (af + be + ch - dg)s - (ag + ce + df - bh)t - (ah + de + bg - cf)u \\ (ae - bf - cg - dh)s + (af + be + ch - dg)r + (ag + ce + df - bh)u - (ah + de + bg - cf)t \\ (ae - bf - cg - dh)t + (ag + ce + df - bh)r + (ah + de + bg - cf)s - (af + be + ch - dg)u \\ (ae - bf - cg - dh)u + (ah + de + bg - cf)r - (af + be + ch - dg)t - (ag + ce + df - bh)s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae - bf - cg - dh \\ af + be + ch - dg \\ ag + ce + df - bh \\ ah + de + bg - cf \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 - b0 - c0 - d0 \\ a0 + b1 + c0 - d0 \\ a0 + c1 + d0 - b0 \\ a0 + d1 + b0 - c0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

sowie analog
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} - c \cdot \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} - d \cdot \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ a \cdot \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} + b \cdot \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} + c \cdot \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} - d \cdot \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ a \cdot \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} + c \cdot \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} + d \cdot \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} - b \cdot \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ a \cdot \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} + d \cdot \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} + b \cdot \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} - c \cdot \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-ab+ba-cd+dc}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-ac+ca-db+bd}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-ad+da-bc+cb}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $ij \neq ji$ ist $\mathbb{R}[i, j, k]$ nicht kommutativ. Man nennt einen Ring mit Eins, bei dem alle Körpereigenschaften mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation erfüllt sind, einen *Schiefkörper*. Hier sind alle Elemente $a + bi + cj + dk \in \mathbb{R}[i, j, k]$ mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0 \Leftrightarrow a + bi + cj + dk \neq 0 + 0i + 0j + 0k$ invertierbar. Man nennt $\mathbb{R}[i, j, k]$ auch den *Quaternionen-Schiefkörper* und schreibt dafür \mathbb{H} , wobei diese Menge auch Menge der *Hamilton-Zahlen* – nach dem Physiker Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON – genannt wird.

Schließlich steht der Satz von FROBENIUS über assoziative Divisionsalgebren über \mathbb{R} gerade für die allgemeine Aussage, dass es neben den bereits behandelten Strukturen \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{H} keine weiteren Schiefkörper über \mathbb{R} gibt, die eine endlich-dimensionale \mathbb{R} -Algebra sind.

Satz 5.19. (Satz von Frobenius über assoziative Divisionsalgebren) Jede endlich-dimensionale, assoziative Divisionsalgebra mit Eins über \mathbb{R} ist entweder zu \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} isomorph.

Beweis. Sei A eine assoziative Divisionsalgebra mit Eins über \mathbb{R} der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Es lässt sich \mathbb{R} als Teilring von A auffassen. Man betrachte dazu den injektiven Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow A, r \mapsto r1$, d. h. $r \in \mathbb{R}$ wird mit $r1 \in A$ identifiziert. Der Ringhomomorphismus existiert, weil A eine \mathbb{R} -Algebra ist. Beispielsweise ist $\varphi(r)\varphi(r') = (r1)(r'1) = r(1(r'1)) = r(r'(1 \cdot 1)) = (rr')1 = \varphi(rr')$. Die Injektivität von φ folgt aus der Eigenschaft $1 \neq 0$, denn 1_A ist lineares unabhängiges Element des \mathbb{R} -Vektorraums A . Es bezeichne $A' := \{a \in A \mid a^2 \in \mathbb{R}, a^2 \leq 0\} \subset A$ eine Teilmenge von A . Dann gilt $A' \neq A$, denn jede von Null verschiedene reelle Zahl $r > 0$ liegt nicht in A' , da $r^2 > 0$ für $r \neq 0$ gilt. Weiter lässt sich A als endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum interpretieren und jedes Element $a \in A$ stiftet dann eine lineare Abbildung auf A mittels $\varphi_a : A \rightarrow A, x \mapsto ax$. Der weitere Beweis ist in drei Schritte unterteilt.

Schritt 1: $A' = \{a \in A \mid \text{Spur}(\varphi_a) = 0\}$

Es gilt offensichtlich $\text{Spur}(\varphi_0) = 0$. Sei nun $a \in A$ mit $a^2 \in \mathbb{R}, a^2 < 0$, d. h. $a \neq 0$ und $a \in A \setminus \mathbb{R}$. Es sei $\chi_{\varphi_a}(X) \in \mathbb{R}[X]$ das charakteristische Polynom von φ_a . Der Fundamentalsatz der Algebra liefert eine bis auf Vorzeichen und Reihenfolge eindeutige Zerlegung in Linearfaktoren: Es gibt $t, s \in \mathbb{N}_0$ mit $t + 2s = \text{Grad}(\chi_{\varphi_a})$ und $x_1, \dots, x_t \in \mathbb{R}, z_1, \dots, z_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sodass

$$\chi_{\varphi_a}(X) = (X - x_1) \cdot \dots \cdot (X - x_t) \cdot (X - z_1) \cdot (X - \bar{z}_1) \cdot \dots \cdot (X - z_s) \cdot (X - \bar{z}_s).$$

Für ein $i \in \{1, \dots, s\}$ ist

$$Q_{z_i}(X) := (X - z_i) \cdot (X - \bar{z}_i) = X^2 - 2\text{Re}(z_i)X + |z_i|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

ein reelles Polynom und zudem irreduzibel über \mathbb{R} . Die linearen Faktoren sind als Polynome von Grad 1 ebenfalls irreduzibel über \mathbb{R} . Nach dem Satz von Caley-Hamilton gilt $\chi_{\varphi_a}(\varphi_a) = 0$ und weil A ein Schiefkörper ist, ist A nullteilerfrei und es folgt

$$\exists i \in \{1, \dots, t\} : \varphi_a - x_i \text{id} = 0 \quad \text{oder} \quad \exists i \in \{1, \dots, s\} : Q_{z_i}(\varphi_a) = 0.$$

Im ersten Fall folgt insbesondere $a \in \mathbb{R}$ was ein Widerspruch zu $a \in A \setminus \mathbb{R}$ ist. Im zweiten Fall ist $Q_{z_i}(X)$ dann als irreduzibles Polynom das Minimalpolynom $m_{\varphi_a}(X)$ von φ_a

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

über \mathbb{R} . Nachdem das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom die gleichen komplexen Nullstellen besitzen, muss es ein $k \in \mathbb{N}$ geben, sodass

$$\chi_{\varphi_a}(X) = m_{\varphi_a}(X)^k = Q_{z_i}(X)^k = (X^2 - 2\operatorname{Re}(z_i)X + |z_i|^2)^k.$$

Durch Ausmultiplizieren findet man für $j \in \{0, \dots, 2k\}$ gewisse $a_j \in \mathbb{R}$, sodass

$$\chi_{\varphi_a}(X) = \sum_{j=0}^{2k} a_j X^j.$$

Dabei ist einerseits $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} \operatorname{Spur}(\varphi_a) = -\operatorname{Spur}(\varphi_a)$ und andererseits $a_{2k-1} = -2\operatorname{Re}(z_i) \cdot k$. Es folgt wegen $k \neq 0$, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur}(\varphi_a) = 0 &\Leftrightarrow -2\operatorname{Re}(z_i) \cdot k = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow Q_{z_i}(\varphi_a) = \varphi_a^2 - |z_i|^2 \operatorname{id} = 0 \Leftrightarrow \varphi_a^2 = -|z_i|^2 \operatorname{id} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A : \varphi_a^2(x) = a(ax) = a^2x = -|z_i|^2x \\ &\Leftrightarrow a^2 = -|z_i|^2 < 0 \quad (a \notin \mathbb{R}, \text{ d. h. } a \neq 0). \end{aligned}$$

Schritt 2: A' ist ein Untervektorraum von A der Dimension $n - 1$.

Die Abbildung $\operatorname{Spur} : A \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathbb{R} -linear und damit $\operatorname{Kern}(\operatorname{Spur}) = A'$ ein Untervektorraum von A . Wegen $\dim(\operatorname{Bild}(\operatorname{Spur})) = \dim(\mathbb{R}) = 1$ und dem Rangsatz gilt zudem $\dim(A') = \dim(\operatorname{Kern}(\operatorname{Spur})) = \dim(A) - 1 = n - 1$. Wegen $\mathbb{R} \cap A' = \{0\}$ gilt auch $A = \mathbb{R} \oplus A'$. A' erzeugt also A als \mathbb{R} -Algebra⁷.

Schritt 3: Abschluss durch Fallunterscheidung

Es ist $B : A' \times A' \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \frac{1}{2}(-ab - ba)$ eine positiv-definite, symmetrische Bilinearform auf A' , denn für $a, b, c \in A', \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{2}(-ab - ba) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a + b)^2) \in \mathbb{R}$$

und

$$B(a, b) = \frac{1}{2}(-ab - ba) = \frac{1}{2}(-ba - ab) = B(b, a)$$

und

$$B(\lambda a, b) = \frac{1}{2}(-\lambda ab - b\lambda a) = \lambda \frac{1}{2}(-ab - ba) = \lambda B(a, b)$$

⁷Siehe Anhang A

und

$$\begin{aligned} B(a+b, c) &= \frac{1}{2}(-(a+b)c - c(a+b)) \\ &= \frac{1}{2}(-ac - bc - ca - cb) \\ &= \frac{1}{2}(-ac - ca) + \frac{1}{2}(-bc - cb) = B(a, c) + B(b, c) \end{aligned}$$

sowie für $a \neq 0$

$$B(a, a) = \frac{1}{2}(-a^2 - a^2) = -a^2 > 0.$$

Sei nun $C \subset A'$ ein minimaler Untervektorraum von A' , der A als \mathbb{R} -Algebra erzeugt⁸. Es gilt zumindest $\dim(C) =: m \leq n-1 \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei (c_1, \dots, c_m) eine Orthonormalbasis von C bezüglich B , d. h. für $i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$ gilt

$$c_i^2 = -1 \quad \text{und} \quad c_i c_j = -c_j c_i$$

denn

$$B(c_i, c_i) = \frac{1}{2}(-c_i^2 - c_i^2) = -c_i^2 \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{und} \quad B(c_i, c_j) = \frac{1}{2}(-c_i c_j - c_j c_i) \stackrel{!}{=} 0.$$

- Fall $m = 0$. Hier ist A direkt isomorph zu \mathbb{R} .
- Fall $m = 1$. Es wird A von c_1 erzeugt. Wegen $c_1^2 = -1 \in \mathbb{R}$ sind die Elemente von A von der Form $\alpha c_1 + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Damit ist A isomorph zu \mathbb{C} .
- Fall $m = 2$. Es wird A von c_1 und c_2 erzeugt. Zusätzlich gilt $(c_1 c_2)^2 = -1$, also $c_1 c_2 \in A'$. In A' sind die Elemente c_1, c_2 und $c_1 c_2$ linear unabhängig, denn angenommen es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass $c_1 c_2 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$, dann folgt:

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ \Rightarrow (c_1 - \lambda_2) c_2 &= \lambda_1 c_1 \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{\lambda_1}{c_1 - \lambda_2} c_1 \\ &= \frac{\lambda_1 c_1 (c_1 + \lambda_2)}{c_1^2 - \lambda_2^2} = \frac{1}{-1 - \lambda_2^2} (-\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 c_1) \end{aligned}$$

⁸Es sei für eine Definition erneut auf Anhang A verwiesen.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Das wäre ein Widerspruch zur Minimalität von C . Es ist also $\dim(A') = n - 1 \geq 3$, d. h. $\dim(A) = n \geq 4$. Wegen $c_1^2 = c_2^2 = -1 \in \mathbb{R}$ und $c_1c_2 = -c_2c_1$ sind die Elemente von A von der Form $\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_1c_2 + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, d. h. $\dim(A) \leq 4$. Insgesamt gilt also $\dim(A) = 4$. Weiter gilt $c_1(c_1c_2) = c_1(-c_2c_1) = -c_1(c_2c_1) = -(c_1c_2)c_1$ und analog $c_2(c_1c_2) = -(c_1c_2)c_2$. Es ist A also isomorph zu \mathbb{H} .

- Fall $m > 2$. Betrachte $c = c_1c_2c_m$, dann ist wegen $m > 2$ insbesondere $c_m \neq c_1$ und $c_m \neq c_2$. Also folgt $c^2 = 1$, d. h. $0 = c^2 - 1 = (c + 1)(c - 1)$ was gerade $c = \pm 1$ liefert. Damit folgt aus $c_1c_2c_m = \pm 1$ schon $c_m = \pm c_2c_1$. Demnach wird A bereits von c_1, c_2, \dots, c_{m-1} erzeugt, was der Minimalität von C widerspricht.

□

Konstruierbare Zahlen als historisch-genetischer Zugang zu Zahlenbereichserweiterungen

Zu Beginn soll hier die Idee stehen, dass für frühe Mathematiker*innen Zahlen insbesondere Längen von konstruierbaren Strecken waren. Unter einer konstruierbaren Strecke wird im Folgenden eine Strecke verstanden, die ausschließlich aus Konstruktionen mit Zirkel und Lineal und einer gegebenen Einheitsstrecke – benannt mit der Einheitslänge „Eins“ oder „1“ – hervorgeht.

Zunächst sollte hier geklärt werden, dass eine gegebene Strecke zu jedem Zeitpunkt auf eine gegebene (nicht notwendigerweise durch die gegebene Strecke verlaufende) Gerade übertragen werden kann. Dazu wird die Länge der gegebenen Strecke durch den Zirkel abgenommen und anschließend auf der gegebenen Gerade abgetragen, die durch zwei beliebige verschiedene Punkte mit Hilfe des Lineals gezeichnet werden kann. Nun lässt sich die vorgegebene Einheitsstrecke um weitere Strecken der Länge 1 fortsetzen.

Nimmt man sich also zwei Strecken der Länge 1 dann kann man diese auch derart auf eine Gerade übertragen, dass sie sich gegenseitig zu einer Strecke fortsetzen. Es wird damit die Idee des *Addierens* umgesetzt. Der Länge der Strecke, die aus zwei Strecken der Einheitslänge hervorgeht, gibt man die Bezeichnung „Zwei“ oder „2“ und dahinter steckt die arithmetische Operation der Addition, die in Zeichen $1 + 1 = 2$ geschrieben wird (siehe Abb. 5.3).

Weiter lassen sich analog sukzessive aus der Einheitsstrecke neue Strecken mit Längen gerade Vielfache der Einheitslänge generieren (siehe Abb. 5.4). Es entstehen die natürlichen Zahlen \mathbb{N} . Als Grundgedanke lässt sich festhalten, dass eine Strecke der Länge $n \in \mathbb{N}$ aus einer Vorgängerstrecke und einer angesetzten Einheitsstrecke hervorgeht. Man erkennt die Idee eines Nachfolgers wie sie auch in den PEANO-Axiomen vorhanden ist.

In diesem Kontext ist wegen der vorgegebenen Einheitsstrecke der Länge 1 vermutlich die ursprüngliche Form der PEANO-Axiome passender.

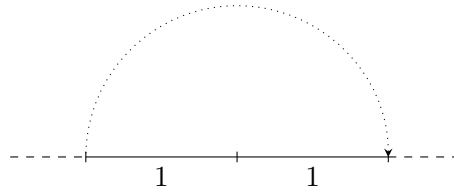


Abb. 5.3.: Konstruktion einer Strecke der Länge $2 = 1 + 1$ aus zwei Strecken der Länge 1.

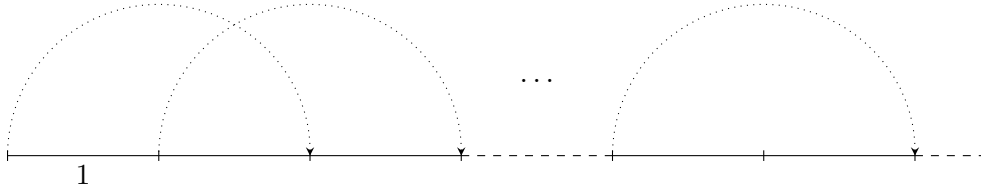


Abb. 5.4.: Konstruktion einer Strecke der Länge $n \cdot 1$ aus einer Strecke der Länge 1.

Axiomensystem 5.20. (PEANO-Axiome – ursprüngliche Form) Sei n eine natürliche Zahl, dann bezeichne $\mu(n)$ den eindeutigen *Nachfolger* von n . Die Menge der natürlichen Zahlen entsteht dann aus den folgenden Axiomen:

- (P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
- (P2) Für jede natürliche Zahl n ist auch ihr Nachfolger $\mu(n)$ eine natürliche Zahl.
- (P3) Für alle natürlichen Zahlen n und m mit $\mu(n) = \mu(m)$ gilt bereits $n = m$.
- (P4) Für jede natürliche Zahl n gilt $\mu(n) \neq 1$.
- (P5) Ist M eine Menge, sodass
 - (a) 1 liegt in M .
 - (b) Für jede natürliche Zahl n , die in M liegt, liegt auch ihr Nachfolger $\mu(n)$ in M .

gelten, dann enthält M alle natürlichen Zahlen.

Es sind Strecken der Länge 0 allerdings nicht gänzlich undenkbar, wenn man bspw. eine Verlängerung einer Strecke um keine Strecke zulässt. Für die Notation wird auch hier zwischen \mathbb{N} und \mathbb{N}_0 unterschieden und im Folgenden mit der moderneren Form der PEANO-Axiome aus Axiomensystem 5.1 weitergearbeitet.

Zudem lässt sich auch bei konstruierten natürlichen Zahlen die Addition von Einheitsstrecken analog zur Beschreibung der Addition in Definition 5.2 erkennen. Über die endliche Rekursion der Addition lassen sich zwei Strecken von natürlicher Länge jeweils

ohne Rest in endlich viele Einheitsstrecken zerlegen. Die Summe ist dann genau die Aneinanderreihung dieser entstandenen Einheitsstrecken. In der Konstruktionsvorschrift für die Addition zweier Einheitsstrecken steckt aber auch schon eine deutlich schnellere Konstruktion der Summe zweier beliebiger Strecken von natürlicher Länge. Sind nämlich zwei Strecken mit natürlicher Länge gegeben, so lässt sich eine Strecke der Länge der Summe der beiden Einzellängen ähnlich wie oben konstruieren: Man zieht durch eine der beiden Strecken eine Gerade und legt die zweite an einem Ende der ersten entlang der Gerade an. Noch allgemeiner bemerkt man, dass dieses Vorgehen sogar für alle zwei bereits vorgegebenen Strecken funktioniert – insbesondere also für zwei konstruierbare Strecken der Länge a und b (siehe Abb. 5.5). Es lässt sich also eine Definition einer Addition für natürliche Zahlen definieren, die über die Konstruktionsvorschrift auch auf konstruierbare Zahlen fortsetzbar ist. Der Ausdruck $\mu(b)$ für $b \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{N}$ in der nachfolgenden Definition ist entsprechend als $b + 1$ zu interpretieren, was genau genommen einem Vorgriff gleichkommt, welcher aber von der geometrischen Veranschaulichung gedeckt ist.

Definition 5.21. Die Verknüpfung

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a + b$$

wird *Addition* genannt und ist durch die Eigenschaften

- (i) $\forall a \in \mathbb{K} : a + 0 := a$
- (ii) $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + \mu(b) := \mu(a + b)$

rekursiv definiert. Zudem bezeichne 1 den Nachfolger von 0, d. h. $1 := \mu(0)$.

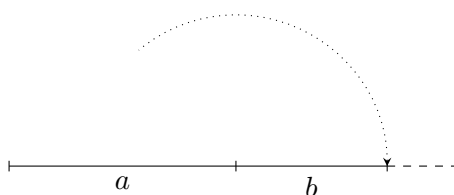


Abb. 5.5.: Konstruktion einer Strecke der Länge $a + b$ aus Strecken der Länge a und b .

Neben der Summe zweier Zahlen steht Abbildung 5.5 auch in Ansätzen bereits für die Differenz zweier Zahlen. Es muss nur eine bedeutende Einschränkung gemacht werden, auf die nachfolgend noch genauer eingegangen wird. Sind zwei Strecken mit den Längen a und b gegeben, wobei die Strecke der Länge a nicht kürzer als die Strecke der Länge b ,

d. h. $a \geq b$ ⁹ sein soll, dann lässt sich eine Strecke mit der Länge der Differenz von a und b konstruieren, indem man ausgehend von der Summenkonstruktion die zweite Strecke nicht an die erste anlegt, sondern sie in die erste Strecke hineinlegt. Das Streckenstück der ersten Strecke, das nun nicht von der zweiten Strecke überdeckt wird hat gerade die Länge $a - b$ (siehe Abb. 5.6).

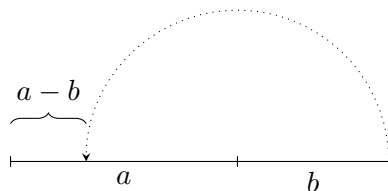


Abb. 5.6.: Konstruktion einer Strecke der Länge $a - b$ aus Strecken der Länge a und b für $a \geq b$.

Fordert man bei der Differenz $a - b$ keine Voraussetzung der Art $a \geq b$, so könnte eine Konvention für die Differenz $a - b$, wobei $a < b$ ist, gemäß Abbildung 5.6 als gerade die Länge des Streckenstücks vom Anfangspunkt der Strecke der Länge a lauten, an dem die Strecke der Länge b nicht angelegt wurde, zum Endpunkt der Strecke der Länge b , welcher außerhalb der Strecke der Länge $a + b$ liegt (siehe Abb. 5.7).

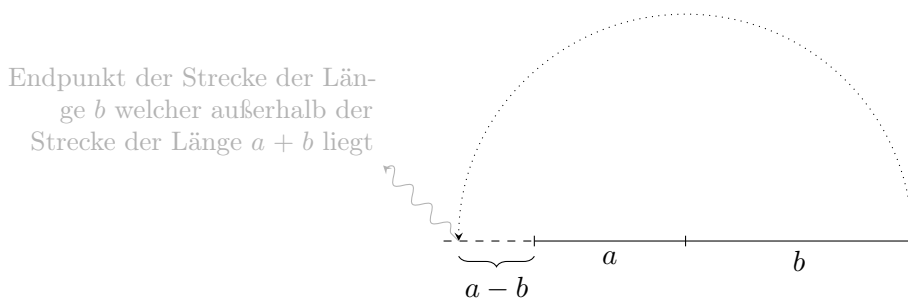


Abb. 5.7.: Mögliche Konstruktion einer Strecke der Länge $a - b$ aus Strecken der Länge a und b für $a < b$.

Für diese Handhabung der Differenz kommt es dann aber zu Interpretationsschwierigkeiten bei einem speziellen Fall der Aneinanderreihung mehrerer Rechenoperationen. Addition und Subtraktion sind gemäß den obigen Beschreibungen anschaulich zueinander inverse Operationen. Es sollte sich demnach kein Unterschied ergeben, wenn man zu einer Strecke der Länge a zunächst die Strecke der Länge b addiert und anschließend wieder subtrahiert oder wenn man erst die Strecke der Länge b subtrahiert und dann wieder addiert. In beiden Fällen sollte jeweils wieder eine Strecke der Länge a zurückbleiben. Für den Fall $a > b$ ergeben sich hier keine Probleme (siehe Abb. 5.8).

⁹Eine solche Ordnungsrelation ist auf konstruierbaren Strecken intuitiv gegeben. Sie lässt sich wie folgt einführen: Man kann dort eine Strecke der Länge a als länger als eine Strecke der Länge b bezeichnen,

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

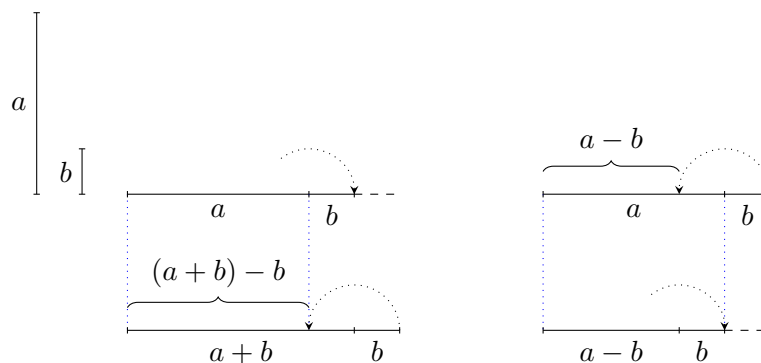


Abb. 5.8.: Veranschaulichung der Gleichung $(a + b) - b = (a - b) + b$ für $a \geq b$.

Geht man allerdings von Strecken mit $a < b$ aus, so resultieren zwei unterschiedlich lange Strecken, d. h. geometrisch ergibt sich $(a + b) - b \neq (a - b) + b$ (siehe Abb. 5.9).

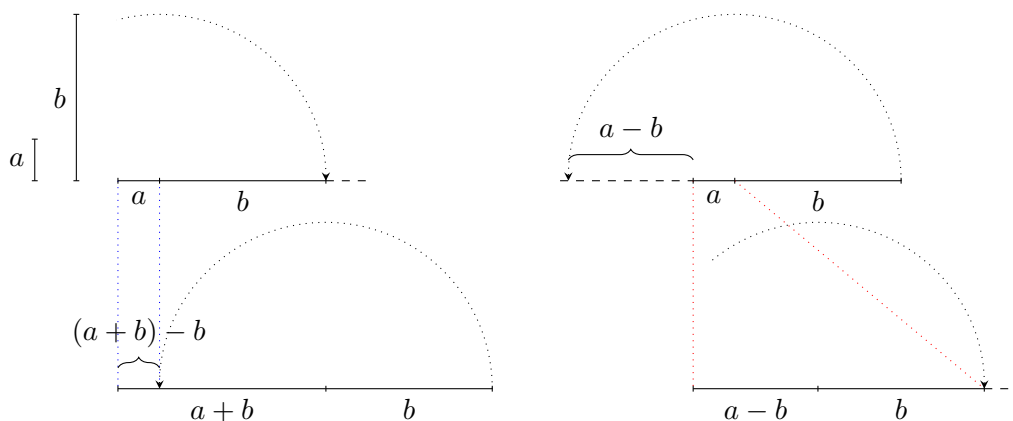


Abb. 5.9.: Problematik der Gleichung $(a + b) - b = (a - b) + b$ für $a < b$.

Der Kern der Problematik stellt hier die Charakterisierung von Zahlen als Längen von Strecken dar. Um die Konvention der Differenz von oben für beliebige a und b zu retten, müssten Zahlen neben der Länge einer Strecke auch eine Information über eine Richtung beinhalten. Damit nähert man sich dem Begriff eines Pfeils. Auf diese Überladung des Begriffs einer Zahl wird zunächst verzichtet und stattdessen nur Differenzen $a - b$ für $a \geq b$ zugelassen.

Für Addition und Subtraktion lassen sich nun einige Regeln zur Kommutativität und Assoziativität formulieren.

wenn der zweite Endpunkt der Strecke der Länge b nach anlegen selbiger Strecke „in“ die Strecke der Länge a in dieser liegt (vgl. synthetische Geometrie).

Lemma 5.22. (Kommutativität und Assoziativität der konstruierbaren Zahlen) Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ konstruierbare Zahlen. Dann gilt:

$$(K1) \quad a + b = b + a$$

$$(A1) \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(A2) \quad \text{Für } c \leq b \text{ gilt } a + (b - c) = (a + b) - c$$

$$(A3) \quad \text{Für } b + c \leq a \text{ gilt } a - (b + c) = (a - b) - c$$

$$(A4) \quad \text{Für } c \leq b \leq a \text{ gilt } a - (b - c) = (a - b) + c$$

Beweis. Es wird exemplarisch Aussage (A3) bewiesen. Da alle Aussagen vor dem Kontext von geometrischen Konstruktionen getroffen wurden, werden auch geometrische Konstruktionsvorschriften als Beweise gegeben. Die Allgemeingültigkeit wird durch eine Kontrolle der geometrischen Sinnhaftigkeit angedeutet. Wegen $b + c \leq a$ ist auch $b \leq a$ und auch $c \leq a - b$. Somit ist die rechte Seite der Gleichung geometrisch sinnvoll. Ohne Einschränkung ist in Abb. 5.10 $c < b$ dargestellt. \square

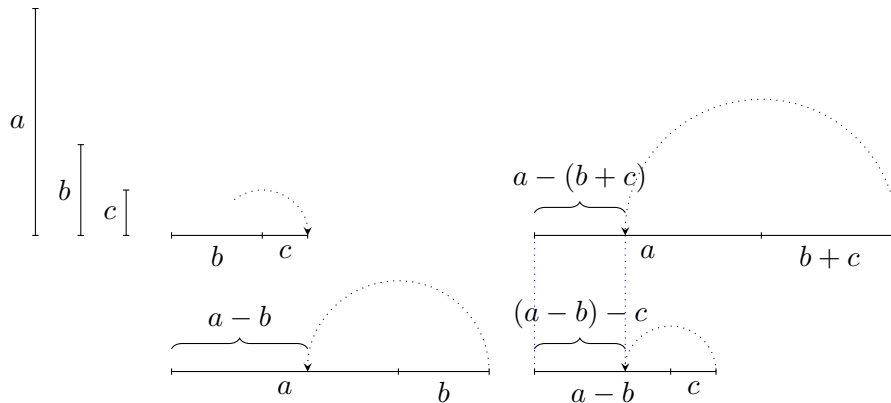


Abb. 5.10.: Geometrische Veranschaulichung des Assoziativgesetzes $a - (b + c) = (a - b) - c$ für $b + c < a$.

Weiterführend lassen sich noch einige weitere besondere Rechenregeln für die Addition und Subtraktion konstruierbarer Zahlen formulieren.

Lemma 5.23. (Besondere Rechengesetze zu Addition und Subtraktion konstruierbarer Zahlen) Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ konstruierbare Zahlen. Dann gilt:

$$(AN) \quad a + 0 = a = 0 + a$$

$$(SN) \quad a - 0 = a$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

(Ä1) $a + b = c + b \Leftrightarrow a = c$

(Ä2) Für $b \leq a$ und $b \leq c$ gilt $a - b = c - b \Leftrightarrow a = c$

Beweis. Analog zu den Beweisen von Lemma 5.22. □

Neben der Summe und der Differenz zweier gegebener Strecken lassen sich auch die beiden anderen Grundrechenarten auf Strecken anwenden. Für die Multiplikation und die Division wird ein elementarer geometrischer Satz herangezogen: Der Strahlensatz¹⁰. Die Konstruktionsvorschriften für die Multiplikation und die Division zweier Strecken mit Längen a und b gehen aus den Abbildungen 5.11 und 5.12 hervor.

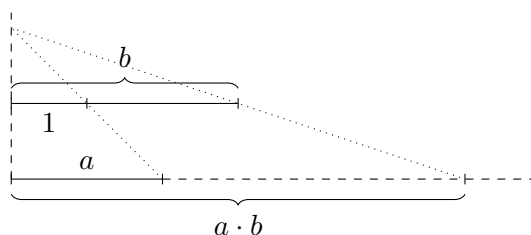


Abb. 5.11.: Konstruktion einer Strecke der Länge $a \cdot b$ aus den Strecken der Länge a und b .

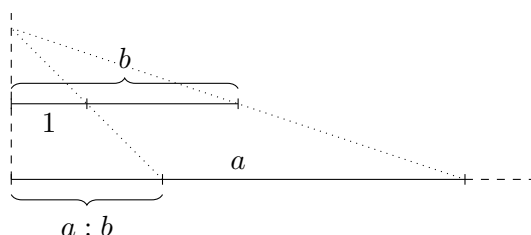


Abb. 5.12.: Konstruktion einer Strecke der Länge $a : b$ aus den Strecken der Länge a und $b \neq 0$.

An der Konstruktion der Division in Abbildung 5.12 erkennt man auch direkt eine Einschränkung dieser Operation. Ist nämlich $b = 0$, so liegt der Schnittpunkt der Geraden durch die Endpunkte der Strecken mit Längen a und b und der vertikalen Gerade auf Höhe der oberen horizontalen Gerade. Die anschließende Gerade durch diesen Schnittpunkt und den Endpunkt der Strecke der Länge 1 ist dann parallel zur unteren horizontalen Gerade und wird diese damit nicht schneiden. Die Division durch 0 wird daher ausgeschlossen.

Für die Multiplikation und die Division lassen sich ebenfalls gängige Rechengesetze einführen und anhand geometrischer Konstruktionen kontrollieren.

¹⁰Der Strahlensatz ist ein zulässiges Werkzeug für konstruierbare Zahlen. Hier wird lediglich die Konstruktion von senkrechten und parallelen Geraden benötigt, was durch Errichten und Fällen von Loten mit Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen ist.

Lemma 5.24. (Rechengesetze zu Multiplikation und Division konstruierbarer Zahlen) Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ konstruierbare Zahlen. Dann gilt:

$$(K2) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(K3) \quad (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

$$(K4) \quad (a : b) : c = (a : c) : b$$

$$(NT) \quad \text{Aus } a \cdot b = 0 \text{ folgt } a = 0 \text{ oder } b = 0$$

$$(MN) \quad a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

$$(ME) \quad a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$$

$$(QN) \quad \text{Für } a \neq 0 \text{ gilt } 0 : a = 0$$

$$(QE) \quad a : 1 = a$$

$$(QI) \quad \text{Für } a \neq 0 \text{ gilt } a : a = 1$$

$$(A5) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(A6) \quad \text{Für } c \neq 0 \text{ gilt } a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$$

$$(A7) \quad \text{Für } b \cdot c \neq 0 \text{ gilt } a : (b \cdot c) = (a : b) : c$$

$$(A8) \quad \text{Für } b \cdot c \neq 0 \text{ gilt } a : (b : c) = (a : b) \cdot c$$

$$(\ddot{A}3) \quad a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c \text{ und für } c \neq 0 \text{ gilt auch } a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$$

$$(\ddot{A}4) \quad \text{Für } c \neq 0 \text{ gilt } a = b \Leftrightarrow a : c = b : c$$

Beweis. Analog zu den Beweisen von Lemma 5.22. □

Weiter sind mit den beiden Operationsfamilien *Addition* und *Multiplikation* dann auch gemischte Rechenterme denkbar, die ebenfalls gewissen Regeln folgen. Man spricht von *Distributivgesetzen*.

Lemma 5.25. (Distributivgesetze für konstruierbare Zahlen) Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ konstruierbare Zahlen. Dann gilt:

$$(D1) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(D2) \quad \text{Für } c \leq b \text{ gilt } a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$$(D3) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(D4) \quad \text{Für } b \leq a \text{ gilt } (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$(D5) \quad \text{Für } c \neq 0 \text{ gilt } (a + b) : c = a : c + b : c$$

$$(D6) \quad \text{Für } c \neq 0 \text{ und } b \leq a \text{ gilt } (a - b) : c = a : c - b : c$$

Beweis. Analog zu den Beweisen von Lemma 5.22. □

Zusammenfassend lässt sich jetzt sagen, dass bereits große Teile der schulrelevanten Zahlenbereiche auch im Sinne von konstruierbaren Zahlen abgedeckt werden. Führt man für die Menge der konstruierbaren Zahlen die Schreibweise \mathbb{K} ein, so ist zum jetzigen Zeitpunkt bereits bekannt, dass $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{K}$ gilt. Negative Zahlen sind wegen obiger Problematik der Differenz noch ausgeklammert. Weiter stellt sich die Frage, ob auch irrationale Zahlen konstruierbar sein können. Ein prominentes Beispiel, das auch in der Schulmathematik häufig die Motivation für den Übergang von \mathbb{Q} zu \mathbb{R} darstellt, ist die Quadratwurzel aus 2. Dass es sich bei $\sqrt{2}$ tatsächlich um eine nicht rationale Zahl handelt, wurde in der vorigen Behandlung von Zahlenbereichen bereits thematisiert. Hier stellt sich vielmehr die Frage, ob $\sqrt{2}$ eine konstruierbare Zahl ist. Betrachtet man ein einfach zu konstruierendes rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge 1¹¹, dann ergibt sich die Hypotenuse nach dem Satz des PYTHAGORAS gerade zu einer Strecke der Länge $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (siehe Abb. 5.13). Damit ist $\sqrt{2} \in \mathbb{K}$ eine konstruierbare Zahl.

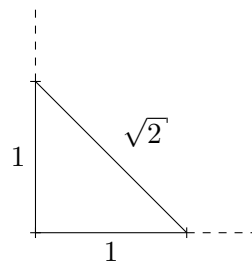


Abb. 5.13.: Konstruktion einer Strecke der Länge $\sqrt{2}$ mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks und Strecken der Länge 1.

Dieses Vorgehen lässt sich auf Wurzeln von natürlichen Zahlen ausweiten. Wählt man für ein rechtwinkliges Dreieck die Katheten mit Länge 1 und $\sqrt{n-1}$, dann hat die Hypotenuse gerade Länge \sqrt{n} (siehe Abb. 5.14). Induktiv ergeben sich damit alle \sqrt{m} für $m \in \mathbb{N}$.

Die Satzgruppe des PYTHAGORAS lässt in Verbindung mit dem Satz des THALES sogar noch eine mächtigere Wurzeloperation auf konstruierbaren Zahlen zu: Ist eine Strecke der

¹¹Auch hierzu wird lediglich die Konstruktion senkrechter Geraden benötigt.

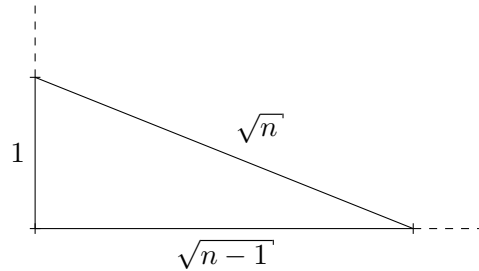


Abb. 5.14.: Konstruktion einer Strecke der Länge \sqrt{n} mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks und Strecken der Länge 1 und $\sqrt{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Länge a vorgegeben, so ergibt sich mit dem Höhensatz die Höhe über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gerade aus zwei Strecken der Länge 1 und a zusammengesetzt ist, zu einer Strecke der Länge \sqrt{a} ¹² (siehe Abb. 5.15).

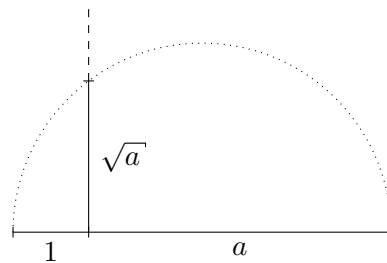


Abb. 5.15.: Konstruktion einer Strecke der Länge \sqrt{a} aus einer gegebenen Strecke der Länge a mit Hilfe des Höhensatzes und des Satz des THALES.

Es sind also beliebige Wurzel­ausdrücke konstruierbarer Zahlen konstruierbar. Vorsicht ist lediglich bei höheren Wurzeln geboten. Beispielsweise ist die dritte Wurzel aus 2 nicht konstruierbar. In der Sprache der modernen Algebra lässt sich dies innerhalb der Körpertheorie beweisen. Es lässt sich dort zeigen, dass einzelne irrationale konstruierbare Zahlen x jeweils Zwischenkörper $\mathbb{Q}(x)$ von $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ mit $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^k, k \in \mathbb{N}$ stiften. Das Minimalpolynom $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ von $\sqrt[3]{2}$ hat jedoch Grad 3 und liefert einen Zerfällungskörper von Grad 6 als Körpererweiterung über \mathbb{Q} . Da 6 keine Potenz von 2 ist, kann $\sqrt[3]{2}$ nicht konstruierbar sein. Eine formale algebraische Klärung mit Mitteln der Körpertheorie ist am Ende dieses Abschnittes aufgeführt.

Zwei weitere prominente irrationale Zahlen, die nicht konstruierbar sind, sind Pi oder π und die eulersche Zahl e . Diese sind dahingehend sogar noch bemerkenswerter als $\sqrt[3]{2}$, als dass sie nicht mal algebraische Zahlen, sondern transzendente Zahlen sind. d. h. sie sind nicht Nullstelle eines ganzzahligen Polynoms. Damit ist auch klar, warum sie nach

¹²Höhensatz und Satz des THALES sind beide ebenfalls durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal abgedeckt.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

nachfolgender Ausführung aus der Theorie der Körpererweiterungen nicht konstruierbar sind.

Die konstruierbaren Zahlen liegen also irgendwo zwischen \mathbb{Q}_+ und \mathbb{R}_+ . Zudem lässt sich auf ihnen auch die allgemeine lineare Gleichung

$$ax + b = c \text{ für } a, b, c \in \mathbb{K}$$

für den Fall, dass $b \leq c$ ist, mit der eindeutigen Lösung $x = (c - b) : a$ lösen. Damit ist \mathbb{K} zum jetzigen Zeitpunkt im Sinne moderner algebraischer Struktur nicht sehr brauchbar. Gerade weil die additive Verknüpfung derartige Probleme mit den Inversen entwickelt, lässt sich keine nützliche Struktur mit zwei Verknüpfungen generieren. In *Ring*en und *Körper*n wird die Addition nämlich immer als sogar *kommutative Gruppe* vorausgesetzt. Im Folgenden wird also eine Lösung der Differenzproblematik angestrebt, wobei diese zunächst wie gewohnt geometrisch motiviert ist und anschließend algebraisch übersetzt wird.

Betrachtet man die Differenz zweier Strecken der Länge a und b einmal als $a - b$ und ein andermal als $b - a$ (o. E. $a \geq b$) und setzt in beiden Fällen die Differenz wie gewohnt an, dann wurde in Abbildung 5.7 auf Seite 145 bereits eine mögliche Interpretation gegeben. Die Hoffnung, dass dies möglicherweise sinnvoll sein kann, entsteht dadurch, dass die beiden resultierenden Strecken tatsächlich die gleiche Länge haben (siehe Abb. 5.16).

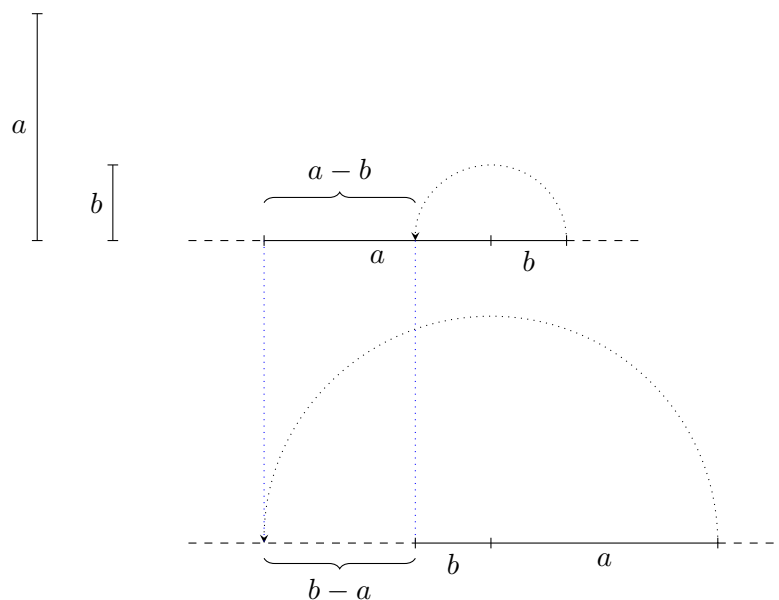


Abb. 5.16.: Konstruierte Differenz zweier Strecken der Länge a und b einmal als $a - b$ und einmal als $b - a$.

Eine Verwandtschaft der beiden Differenzen ist offensichtlich nicht von der Hand zu weisen. Führt man nun die Konvention ein, dass eine Addition einer Strecke immer in den rechtsseitigen Halbraum vom Endpunkt der letzten Operation und die Subtraktion in genau die andere Richtung geht, dann lässt sich die oben entdeckte Verwandtschaft weiter beobachten (siehe Abb. 5.17).

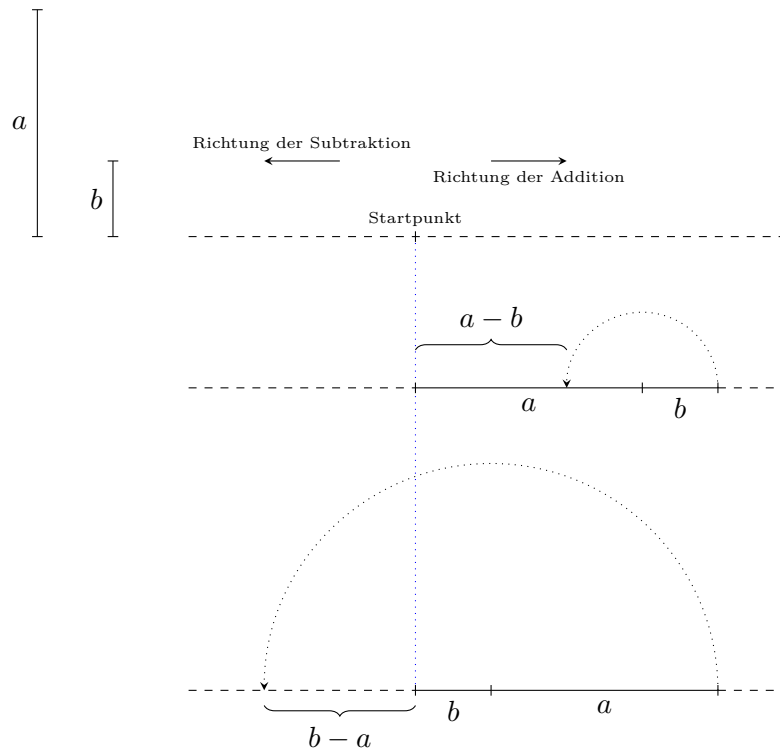


Abb. 5.17.: Einführung einer Richtung bei den Operationen Addition und Subtraktion.

Mit dieser Konvention ergeben sich alle bisherigen konstruierten Zahlen bei Festlegung eines beliebigen Startpunktes immer rechts von diesem. Zusätzlich kommen Zahlen links vom Startpunkt dazu, die jeweils zu einem Zahlenpaar auf der rechten Seite insofern verwandt sind, als dass sie als deren Differenz anzusehen sind (siehe Abb. 5.18). Die Verwandtschaft wird durch eine Symbolik mit hochgestelltem $+$ gekennzeichnet, da es sich augenscheinlich um eine Verwandtschaft bezüglich der Addition als Rechenoperation handelt.¹³

Diese Richtungs-idee ist auch mit den Konstruktionsvorschriften für die Multiplikation und Division kompatibel. In Abbildung 5.19 sind die drei Sonderfälle der Multiplikation $a^+ \cdot b$, $a \cdot b^+$ und $a^+ \cdot b^+$ dargestellt. Die Division ist analog weiterhin möglich.

¹³Diese Notation ist in Absprache mit Student*innen festgelegt worden. Andere Kennzeichnungen wie bspw. mit „-“ für Differenzen oder „*“ für neue Elemente sind auch denkbar.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

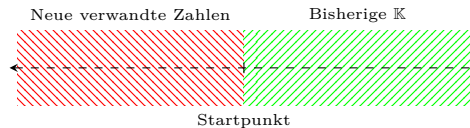


Abb. 5.18.: Resultierende Zahlenbereiche nach Einführung einer Richtung bei den Operationen Addition und Subtraktion.

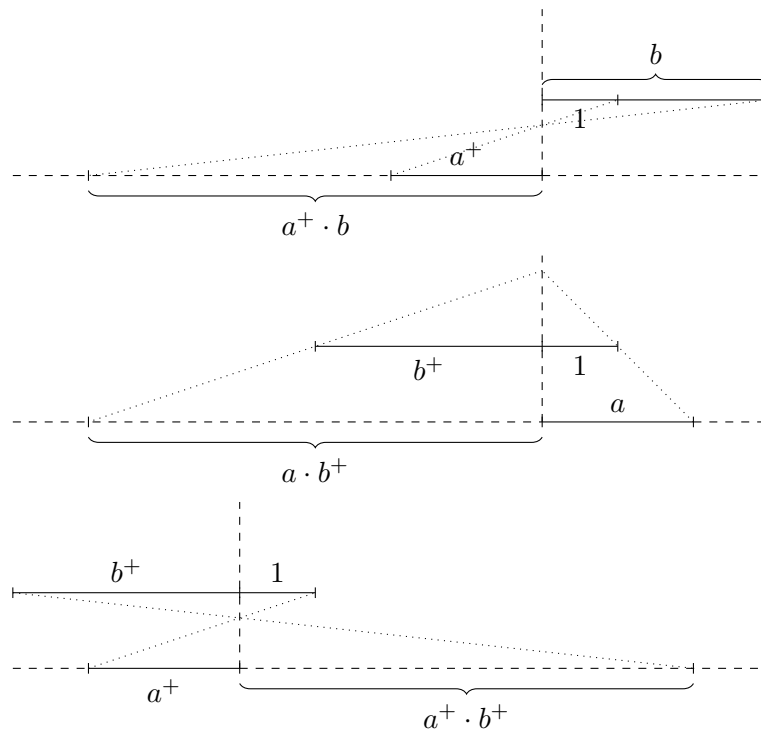


Abb. 5.19.: Darstellung der Konstruktionen der Multiplikation der drei neuen Fälle, die aus dem Ansatz einer Richtung einer Zahl entstehen.

Die bisher geltenden Rechengesetze aus den Lemmata 5.22, 5.23, 5.24 und 5.25 sind ebenfalls weiterhin gültig. Zusätzlich entfallen ab sofort auch die Einschränkungen und es ergibt sich eine neue Art des Kommutativgesetz, das vielmehr die Unabhängigkeit der Reihenfolge von additiven Rechenoperationen darstellt.

Lemma 5.26. (Verallgemeinerte Kommutativität und Assoziativität)

Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ konstruierbare Zahlen. Dann gilt

$$(K1') \quad a - b = (0 - b) + a$$

$$(A2') \quad a + (b - c) = (a + b) - c$$

$$(A3') \quad a - (b + c) = (a - b) - c$$

$$(A4') \quad a - (b - c) = (a - b) + c$$

$$(D2') \quad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$(D4') \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$(D6') \quad \text{Für } c \neq 0 \text{ gilt } (a - b) : c = a : c - b : c$$

Beweis. Damit die geometrischen Begründungen, auf die sich auch weiterhin berufen wird, einer mathematischen Beweisführung maximal genügen können, ist es an dieser Stelle nötig, mehrere Fallunterscheidungen einzeln geometrisch abzudecken. Gerade für die Assoziativ- und Distributivgesetze ist eine grundsätzliche Unterscheidung gemäß nachfolgender Aufzählung vorausgesetzt:

- $a \geq b \geq c$
- $b \geq a \geq c$
- $c \geq a \geq b$
- $a \geq c \geq b$
- $b \geq c \geq a$
- $c \geq b \geq a$

Innerhalb dieser ergeben sich gegebenenfalls zusätzlich notwendige Fallunterscheidungen. Beispielsweise müssen für (A3') im Fall $c \geq a \geq b$ die Fälle $c \geq a + b$ und $a + b \geq c \geq a$ unterschieden werden. In Abbildung 5.20 wird exemplarisch der erste Teil von Aussage (A2') für den Fall $a \geq c \geq b$ geometrisch abgebildet. □

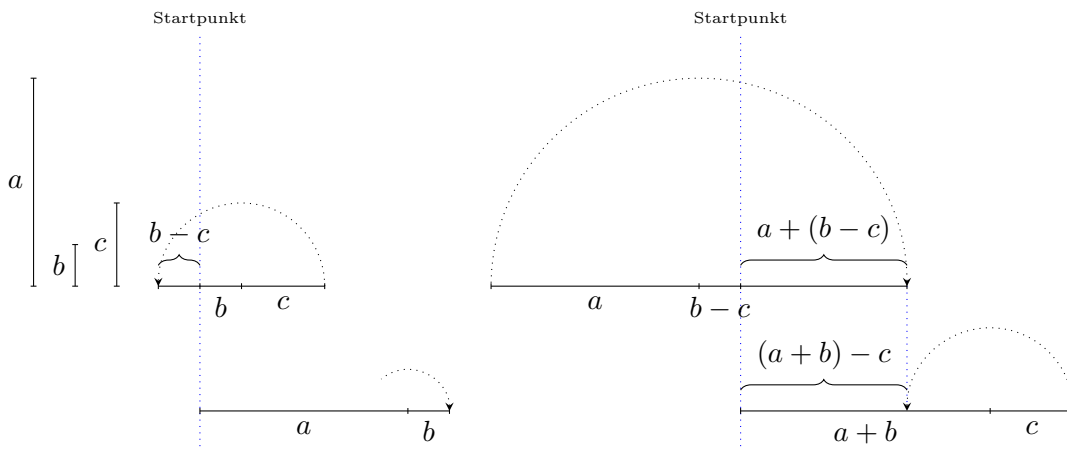


Abb. 5.20.: Geometrische Veranschaulichung des Falles $a + (b - c) = (a + b) - c$ für $a \geq c \geq b$.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Algebraisch lässt sich die obige Konvention einer Richtung gerade durch das Auflösen der Differenzproblematik durch eine formale Einführung der verwandten Zahlen darstellen. Man definiere dazu die Differenz folgendermaßen:

$$a - b = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ (b - a)^+ & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Am Übergang der Fallunterscheidung kann man zudem die Konvention $0^+ = 0$ einführen, was der geometrischen Intuition entspricht, dass die 0 gerade am neu eingeführten Startpunkt verortet liegt. Für negative konstruierbare Zahlen lässt sich damit eine Charakterisierung auf Grundlage der bekannten konstruierbaren Zahlen ableiten.

Axiomensystem 5.27. (Charakterisierung negativer Zahlen) Ist $z \in \mathbb{K}$ eine konstruierbare Zahl, dann bezeichne z^+ die zu z gehörige neue Zahl. Sie wird auch *Gegenzahl* von z genannt. Diese Gegenzahlen sind durch die nachfolgende Eigenschaft charakterisiert:

$$(N1) \text{ Für } a < b \text{ gilt } a - b = (b - a)^+$$

Um nun zu einer gegebenen konstruierbaren Zahl $x \in \mathbb{K}$ die entsprechende Gegenzahl $x^+ \in \mathbb{K}^+$ zu konstruieren, nimmt man sich eine beliebige Strecke der Länge $a \in \mathbb{K}$ und konstruiert zunächst eine Strecke der Länge $a + x$. Anschließend konstruiert man die Strecke der Länge $a - (a + x)$ mittels der nun immer durchführbaren Differenz zweier Strecken. Der wohl anschaulichste Fall liegt für $a = 0 \in \mathbb{K}$ vor.

Es wird im Folgenden die Menge der konstruierbaren Zahlen zusammen mit den verwandten Gegenzahlen mit \mathbb{K}^+ abgekürzt und als *erweiterte konstruierbare Zahlen* bezeichnet. Für die weitere algebraische Behandlung dieses neuen Zahlenbereichs lohnen sich zwei Darstellungen für die neuen Gegenzahlen.

Lemma 5.28. Sei $a \in \mathbb{K}$ eine konstruierbare Zahl, dann gelten für die entsprechende Gegenzahl $a^+ \in \mathbb{K}^+$ die folgenden beiden Eigenschaften:

$$(N2) \quad 0 - a = a^+.$$

$$(N3) \quad a + a^+ = 0 = a^+ + a.$$

Beweis. Zu (N2). Es gilt $0 - 0 = 0 = 0^+$ und für $a > 0$:

$$\begin{aligned} a^+ &= (a - 0)^+ \\ &\stackrel{(N1)}{=} 0 - a \end{aligned}$$

Zu (N3). Es gilt:

$$\begin{aligned} a + a^+ &\stackrel{(N2)}{=} a + (0 - a) \\ &\stackrel{(K1)}{=} (0 - a) + a \\ &\stackrel{(A4')}{=} 0 - (a - a) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a^+ + a &\stackrel{(N2)}{=} (0 - a) + a \\ &\stackrel{(K1')}{=} a - a = 0 \end{aligned}$$

□

Die Eigenschaften (N2) und (N3) stellen zwei zentrale Eigenschaften der neuen Zahlen dar. (N2) liefert für jede Gegenzahl z^+ eine anschauliche Darstellung in konstruierbaren Zahlen und spiegelt die Operationen auf dem Zahlenstrahl wieder. (N3) hingegen ist ein Schritt hin zur modernen Schreibweise von algebraischen Strukturen, kann aber auch als die Idee der generellen Umkehrbarkeit der Addition interpretiert werden.

Nach der Zahlenbereichserweiterung ist natürlich interessant, ob die bisherigen Rechengesetze weiterhin gültig oder mit der Konstruktion nicht mehr vereinbar sind. Es lässt sich jedoch schnell feststellen, dass gerade mit der Darstellung aus (N2) alle Gesetzmäßigkeiten auf konstruierbare Zahlen zurückzuführen sind und entsprechend gleichbedeutend gelten. Die Eigenschaften aus den Lemmata 5.22, 5.23, 5.24, 5.25 und 5.26 gelten demzufolge auch für $a, b, c \in \mathbb{K}^+$. Es wird an dieser Stelle beispielhaft die Aussage $a^+ + (b + c) = (a^+ + b) + c$ gezeigt.

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} a^+ + (b + c) &\stackrel{(N2)}{=} (0 - a) + (b + c) \\ &\stackrel{(A4')}{=} 0 - [a - (b + c)] \\ &\stackrel{(A3')}{=} 0 - [(a - b) - c] \\ &\stackrel{(A4')}{=} [0 - (a - b)] + c \\ &\stackrel{(A4')}{=} [(0 - a) + b] + c \\ &\stackrel{(N2)}{=} [a^+ + b] + c \end{aligned}$$

□

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Mit den neuen Gegenzahlen lassen sich aber auch zusätzliche besondere Rechenregeln formulieren.

Lemma 5.29. (Besondere Eigenschaften der Gegenzahlen) Seien $a, b \in \mathbb{K}$ konstruierbare Zahlen. Dann gilt:

$$(N4) \quad a + b^+ = a - b \text{ und } a - b^+ = a + b$$

$$(N5) \quad a^+ + b^+ = (a + b)^+ \text{ und } a^+ - b^+ = (a - b)^+$$

$$(N6) \quad a^+ \cdot b = a \cdot b^+ = (a \cdot b)^+$$

$$(N7) \quad a^+ \cdot b^+ = a \cdot b$$

$$(N8) \quad (a^+)^+ = a$$

Beweis. Zu (N4). Es gilt:

$$\begin{aligned} a + b^+ &\stackrel{(N2)}{=} a + (0 - b) \\ &\stackrel{(A2')}{=} (a + 0) - b \stackrel{(AN)}{=} a - b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a - b^+ &\stackrel{(N2)}{=} a - (0 - b) \\ &\stackrel{(A4')}{=} (a - 0) + b \stackrel{(SN)}{=} a + b \end{aligned}$$

Zu (N5). Es gilt:

$$\begin{aligned} a^+ + b^+ &\stackrel{(N2)}{=} (0 - a) + (0 - b) \\ &\stackrel{(A2')}{=} ((0 - a) + 0) - b \\ &\stackrel{(A4')}{=} (0 - (a - 0)) - b \\ &\stackrel{(SN)}{=} (0 - a) - b \\ &\stackrel{(A3')}{=} 0 - (a + b) \stackrel{(N2)}{=} (a + b)^+ \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a^+ - b^+ &\stackrel{(N2)}{=} (0 - a) - (0 - b) \\ &\stackrel{(A4')}{=} ((0 - a) - 0) + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(\text{SN})}{=} (0 - a) + b \\ & \stackrel{(\text{A4}')}{=} 0 - (a - b) \stackrel{(\text{N2})}{=} (a - b)^+ \end{aligned}$$

Zu (N6). Es gilt:

$$\begin{aligned} a^+ \cdot b & \stackrel{(\text{N2})}{=} (0 - a) \cdot b \\ & \stackrel{(\text{D4}')}{=} 0 \cdot b - a \cdot b \\ & \stackrel{(\text{MN})}{=} 0 - a \cdot b \stackrel{(\text{N2})}{=} (a \cdot b)^+ \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a \cdot b^+ & \stackrel{(\text{N2})}{=} a \cdot (0 - b) \\ & \stackrel{(\text{D2}')}{=} a \cdot 0 - a \cdot b \\ & \stackrel{(\text{MN})}{=} 0 - a \cdot b \stackrel{(\text{N2})}{=} (a \cdot b)^+ \end{aligned}$$

Zu (N7). Es gilt:

$$\begin{aligned} a^+ \cdot b^+ & \stackrel{(\text{N2})}{=} (0 - a) \cdot (0 - b) \\ & \stackrel{(\text{D2}')}{=} (0 - a) \cdot 0 - (0 - a) \cdot b \\ & \stackrel{(\text{D4}')}{=} (0 \cdot 0 - a \cdot 0) - (0 \cdot b - a \cdot b) \\ & \stackrel{(\text{MN})}{=} (0 - 0) - (0 - a \cdot b) \\ & \stackrel{(\text{SN})}{=} 0 - (0 - a \cdot b) \\ & \stackrel{(\text{N2})}{=} 0 - (a \cdot b)^+ \\ & \stackrel{(\text{N4})}{=} 0 + a \cdot b = a \cdot b \end{aligned}$$

Zu (N8). Es gilt:

$$\begin{aligned} (a^+)^+ & \stackrel{(\text{N2})}{=} (0 - a)^+ \\ & \stackrel{(\text{N5})}{=} 0^+ - a^+ = 0 - a^+ \\ & \stackrel{(\text{N2}')}{=} 0 - (0 - a) \\ & \stackrel{(\text{A4}')}{=} (0 - 0) + a \\ & \stackrel{(\text{SN})}{=} 0 + a \stackrel{(\text{AN})}{=} a \end{aligned}$$

□

Die allgemeine lineare Gleichung $ax+b=0$ ist nun für alle $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ mit $x = b^+ : a$ eindeutig aufgelöst. Bei der allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ reicht der Zahlenbereich der erweiterten konstruierbaren Zahlen aber erneut nicht aus. Bevor jedoch eine allgemeine Lösungsformel hergeleitet wird, werden quadratische Gleichungen zunächst auf geometrische Lösungswege untersucht. Diese liefern nämlich gerade die Idee der quadratischen Ergänzung und zeigen zudem anschaulich auf, inwiefern die neuen Gegenzahlen bzw. die Beschreibung in algebraischen Formalismen die Auflösung von Gleichungen vereinfacht.

Es wird im Folgenden zunächst wieder nur auf den konstruierbaren Zahlen gearbeitet. Insbesondere sind dort Differenzen der Form $a-b$ für $b > a$ nicht definiert. Dementsprechend zurückversetzt in die Verwendung von konstruierbaren Zahlen ergeben sich vier Typen von quadratischen Gleichungen:

$$\text{Typ 1: } x^2 + bx = c$$

$$\text{Typ 2: } x^2 = bx + c$$

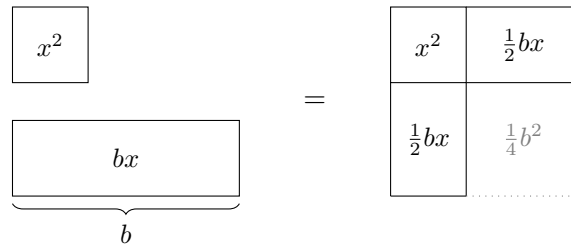
$$\text{Typ 3: } x^2 + c = bx$$

$$\text{Typ 4: } x^2 + bx + c = 0$$

Ohne Einschränkung wird von polynomialen Gleichungen mit Leitkoeffizient 1 ausgegangen. Die Teilbarkeit durch einen von Null verschiedenen Leitkoeffizienten ist auf den konstruierbaren Zahlen gewährleistet. Zusätzlich lässt sich Typ 4 schnell als geometrisch überflüssig abhandeln. Die geometrische Interpretation sieht quadratische Gleichungen als Aussagen über Flächeninhalte. Bei Typ 4 sollen also Summen von Flächeninhalten einen nicht existenten Flächeninhalt ergeben. Das ist nur für Flächeninhalte 0 möglich, womit lediglich der trivial Fall für $c=0$ und die Nulllösung $x=0$ abgebildet werden kann. Der zweite Term $x+b$ liefert auf den konstruierbaren Zahlen keine weitere Lösung durch Nullsetzen.

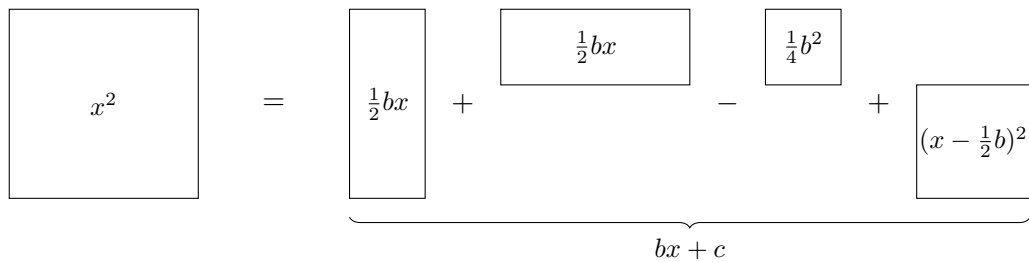
In den Abbildungen 5.21 und 5.22 sind geometrische Lösungswege zur Herleitung je einer Lösung der quadratischen Gleichungen der Typen 1 und 2 dargestellt. Die Abbildungen 5.23 und 5.24 zeigen geometrische Lösungswege zur Herleitung zweier Lösungen der quadratischen Gleichung von Typ 3 durch zwei verschiedene Ansätze.

An diesen geometrischen Lösungswegen lassen sich gleich mehrere interessante Beobachtungen anstellen. Zum einen wird dort die *quadratische Ergänzung* als geometrische Ergänzung um ein Quadrat ersichtlich. Zum anderen fällt auf, dass es für manche Gleichungen zwei Lösungen geben kann. Jede einzelne Lösung benötigt jedoch einen eigenen geometrischen Ansatz. Es entsteht eine Motivation für eine formalere und einheitlichere



$$\begin{aligned}
 \text{d. h.} \quad & x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = c + \frac{1}{4}b^2 = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 \\
 \Rightarrow & x + \frac{1}{2}b = \sqrt{c + \frac{1}{4}b^2} \\
 \Rightarrow & x = \sqrt{c + \frac{1}{4}b^2} - \frac{1}{2}b
 \end{aligned}$$

Abb. 5.21.: Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + bx = c$.



$$\begin{aligned}
 \text{d. h.} \quad & \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{4}b^2 = c \\
 \Rightarrow & \left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 = c + \frac{1}{4}b^2 \\
 \Rightarrow & x - \frac{1}{2}b = \sqrt{c + \frac{1}{4}b^2} \\
 \Rightarrow & x = \sqrt{c + \frac{1}{4}b^2} + \frac{1}{2}b
 \end{aligned}$$

Abb. 5.22.: Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = bx + c$.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$$\frac{1}{2}b \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{1}{2}bx} \\ \boxed{\frac{1}{2}bx} \end{array} \right. + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}bx}}_{\frac{1}{2}b} = \underbrace{\boxed{x^2} + \boxed{(\frac{1}{2}b - x)^2}}_{x^2 + c}$$

$$\begin{aligned} \text{d. h.} \quad & \frac{1}{4}b^2 - (\frac{1}{2}b - x)^2 = c \\ \Rightarrow & \frac{1}{4}b^2 - c = (\frac{1}{2}b - x)^2 \quad (c \leq \frac{1}{4}b^2) \\ \Rightarrow & \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c} = \frac{1}{2}b - x \\ \Rightarrow & x = \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c} \end{aligned}$$

Abb. 5.23.: Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + c = bx$ (Lösung 1).

Behandlungsmöglichkeit – nicht nur, weil verschiedene Ansätze für verschiedene Lösungen einen deutlichen Mehraufwand bedeuten, sondern auch, weil von vornherein nicht ersichtlich ist, ob es nun zwei (geometrisch interpretierbare) Lösungen gibt oder nur eine (oder gar überhaupt keine). Bemerkenswerterweise lässt sich dieses Problemfeld gerade mit Einführung der bereits hergeleiteten Gegenzahlen lösen. Dies ist aus dem Grunde besonders überraschend, da die obigen Gegenzahlen zunächst als Lösung einer linearen Problematik angedacht sind. Die Eigenschaft (N7) aus Lemma 5.29 liefert nun in der algebraischen Schreibweise der geometrischen Überlegungen beim Übergang vom Flächeninhalt eines Quadrats zur Seitenlänge des Quadrats eine zweite Lösung, die natürlich nicht mehr als Länge einer Strecke interpretiert werden kann. Ist also nun $x^2 = A$, dann gibt es die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{A}$ und $x_2 = \sqrt{A}^+$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} (\sqrt{A}^+)^2 &= \sqrt{A}^+ \cdot \sqrt{A}^+ \\ &\stackrel{(N7)}{=} \sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \sqrt{A}^2 = A \end{aligned}$$

Zieht man zusätzlich die erste binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ heran, die auf den erweiterten konstruierbaren Zahlen ohne weiteres mit Hilfe der geltenden Rechengesetzen rechnerisch gezeigt werden kann, lässt sich formal die quadratische Ergänzung in der

$$x \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{1}{2}bx} \\ + \end{array} \right. \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}bx}}_x = \boxed{(x - \frac{1}{2}b)^2} + \boxed{\frac{1}{4}b^2}$$

also

$$\underbrace{\boxed{x^2} - \boxed{(x - \frac{1}{2}b)^2} + \boxed{\frac{1}{4}b^2}}_{x^2 + c} = \boxed{\frac{1}{2}bx} + \boxed{\frac{1}{4}b^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d. h. } c &= \frac{1}{4}b^2 - (x - \frac{1}{2}b)^2 \\ \Rightarrow (x - \frac{1}{2}b)^2 &= \frac{1}{4}b^2 - c \quad (c \leq \frac{1}{4}b^2) \\ \Rightarrow x - \frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c} \\ \Rightarrow x &= \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c} + \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

Abb. 5.24.: Geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + c = bx$ (Lösung 2).

allgemeine quadratische Gleichung durchführen. Es entsteht die folgende – in der Schule oftmals *Mitternachtsformel* genannte – Lösungsformel:

$$\begin{aligned} &x^2 + bx + c = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}b \cdot x + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}b^2 + c &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 + c &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}b)^2 &= \frac{1}{4}b^2 - c \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c} \text{ oder } x + \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c}^+ \end{aligned}$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c} - \frac{1}{2}b \text{ oder } x = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c} + \frac{1}{2}b$$

Ohne Einschränkung ist die allgemeine quadratische Gleichung wieder als polynomialer Ausdruck mit Leitkoeffizient 1 betrachtet worden. Auf den erweiterten konstruierbaren Zahlen \mathbb{K}^+ sind demnach beide Lösungen auffindbar. Weiter zeigt sich, dass es auch passieren kann, dass nur eine oder gar keine Lösung vorhanden ist. Ist $\frac{1}{4}b^2 - c = 0$, so gibt es wegen $0 = 0^+$ nur eine Lösung, nämlich $x = 0 - \frac{1}{2}b = (\frac{1}{2}b)^+$. Ist hingegen $\frac{1}{4}b^2 - c < 0$, so gibt es keine Lösung, denn wegen (N7) gilt für alle $a \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ gerade, dass $a^2 = (a^+)^2 > 0$ ist.

Ähnlich zur Lösung der Differenzproblematik bei konstruierbaren Zahlen, lässt sich diese Quadratproblematik bei den erweiterten konstruierbaren Zahlen durch eine weitere Zahlenbereichserweiterung auflösen.

Es wird zunächst ein Rechengesetz für Wurzelausdrücke formuliert, womit sich die Problematik auf einen einzelnen Spezialfall reduziert. Auch gilt wegen (N6) und (ME) für jede konstruierbare Zahl $a \in \mathbb{K}$ gerade $a^+ = (1 \cdot a)^+ = 1^+ \cdot a$. Es wird im Anschluss gezeigt, dass sich damit der Fall von oben folgendermaßen vereinfacht:

$$\sqrt{a^+} = \sqrt{1^+ \cdot a} = \sqrt{1^+} \cdot \sqrt{a}$$

Lemma 5.30. Seien $a, b \in \mathbb{K}^+$ zwei erweiterte konstruierbare Zahlen. Dann gilt:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \\ &\stackrel{(A5)}{=} \sqrt{a} \cdot [\sqrt{b} \cdot (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})] \\ &\stackrel{(A5)}{=} \sqrt{a} \cdot [(\sqrt{b} \cdot \sqrt{a}) \cdot \sqrt{b}] \\ &\stackrel{(K2)}{=} \sqrt{a} \cdot [(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}] \\ &\stackrel{(A5)}{=} \sqrt{a} \cdot [\sqrt{a} \cdot (\sqrt{b} \cdot \sqrt{b})] \\ &\stackrel{(A5)}{=} (\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}) \\ &= \sqrt{a}^2 \cdot \sqrt{b}^2 = a \cdot b. \end{aligned}$$

□

Es lässt sich demnach $\sqrt{a^+}$ tatsächlich auf den Fall $\sqrt{1^+} \cdot \sqrt{a}$ zurückführen. Dort ist $\sqrt{a} \in \mathbb{K}$ bereits bekannt. Lediglich der einzelne Fall $\sqrt{1^+}$ muss behandelt werden.

Ab dieser Stelle folgt die weitere Betrachtung von Zahlenbereichen der oben bereits dargestellten Behandlung als algebraische Strukturen. Die geometrische Veranschaulichung musste größtenteils nach Einführen negativer Zahlen verlassen werden und wird hier nicht weiter fortgesetzt. Der Vollständigkeit halber wird an dieser Stelle abschließend eine kurze Abhandlung konstruierbarer Zahlen – oder besser konstruierbarer Punkte – im Sinne einer moderneren Körpertheorie dargestellt. Sie richtet sich maßgeblich nach KARPFFINGER und MEYBERG (2017).

Es bezeichne \mathcal{E} die euklidische Ebene und $S \subseteq \mathcal{E}$ eine Teilmenge von Punkten von \mathcal{E} . Mit Zirkel und Lineal lassen sich aus diesen Punkten von S weitere Punkte in \mathcal{E} konstruieren, die nicht notwendigerweise selbst in S liegen müssen. Die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal umfassen dabei Schnittpunkte zweier nicht paralleler Geraden durch je zwei Punkte von S , Schnittpunkte eines Kreises um einen Punkt aus S mit Radius dem Abstand zweier Punkte aus S und einer Geraden durch zwei Punkte aus S und Schnittpunkte zweier Kreise um je einen Punkt aus S mit jeweils Radius dem Abstand je zweier Punkte aus S (siehe Abbildung 5.25).

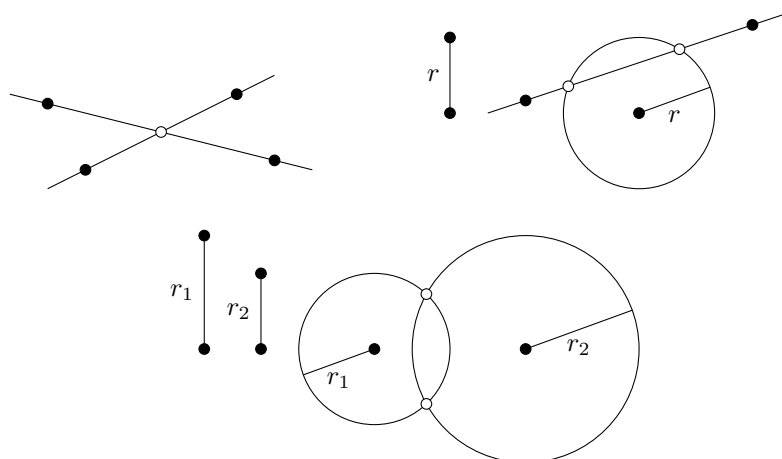


Abb. 5.25.: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene. Gegebene Punkte sind schwarz, neu konstruierte Punkte weiß markiert (KARPFFINGER & MEYBERG, 2017, S. 294).

Es bezeichne weiter S^+ die Menge S vereinigt mit der Menge aller wie oben beschriebenen möglichen Schnittpunkte. Definiert man nun schrittweise $S_0 := S$ und $S_i := S_{i-1}^+$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$ und man nennt

$$\mathcal{K}(S) := \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

die Menge der aus S mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte. Im Folgenden wird die euklidische Ebene mit \mathbb{C} interpretiert. Seien dazu $A, B \in S$ zwei verschiedene Punkte, dann wähle man ein kartesisches Koordinatensystem derart, dass $A = (0|0)$ und $B = (1|0)$. Man beachte, dass hier $|S| \geq 2$ gelten muss. Zudem wird der Punkt $(x|y) \in \mathcal{E}$ mit dem Punkt $z = x + yi \in \mathbb{C}$ identifiziert.

Lemma 5.31. Für eine Menge an Punkten S ist $\mathcal{K}(S)$ der Durchschnitt aller Teilkörper K von \mathbb{C} , die die Eigenschaften

- (i) $S \subseteq K$
- (ii) $z \in K \Rightarrow \sqrt{z} \in K$
- (iii) $z \in K \Rightarrow \bar{z} \in K$

erfüllen.

Beweis. Es wurde mit den Konstruktionen der Grundrechenarten in den Abbildungen 5.5 (Addition), 5.17 (Subtraktion), 5.19 (Multiplikation) und 5.12 (Division) bereits gezeigt, dass $\mathcal{K}(S)$ ein Körper ist. Es werden dazu lediglich der Strahlensatz, der Höhensatz und der Satz des THALES benötigt, welche jeweils durch die dargestellten Konstruktionen abgedeckt sind. Damit ist $\mathcal{K}(S)$ insbesondere ein Teilkörper von \mathbb{C} . Sei nun K ein beliebiger Teilkörper von \mathbb{C} , der die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) erfüllt. Es wird nun behauptet, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ schon $S_n \subseteq K$ gilt. Dies wird mit Hilfe einer vollständigen Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

- Sei $n = 0$. Dann gilt $S_0 = S \subseteq K$ wegen (i).
- Sei $n > 0$ und $S_n \subseteq K$. Es ist $S_{n+1} = S_n^+$. Sind $z_1, z_2 \in S_n$ zwei Punkte, dann gibt es $a, b, c \in \mathbb{R} \cap S_n \stackrel{\text{IV}}{\subseteq} \mathbb{R} \cap K$, sodass die Gerade durch z_1 und z_2 durch die Gleichung

$$ax + by + c = 0 \tag{5.1}$$

beschrieben ist. Ebenfalls gibt es für einen Kreis um $w_1 \in S_n$ durch $w_2 \in S_n$ Koeffizienten $d, e, f \in \mathbb{R} \cap S_n \stackrel{\text{IV}}{\subseteq} \mathbb{R} \cap K$, sodass dieser Kreis durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \tag{5.2}$$

beschrieben ist. Jeder Schnittpunkt zweier nicht-paralleler Geraden durch je zwei Punkte aus S_n erfüllt dann ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen

der Form (5.1). Wegen $S_n \subseteq K$ und weil K ein Körper ist, sind Real- und Imaginärteil der Lösung jeweils aus $\mathbb{R} \cap K$ und damit die Lösung selbst aus K , denn $i = \sqrt{-1} \in K$, wegen (ii). Eine Lösung (falls vorhanden) eines Gleichungssystems aus einer linearen Gleichung der Form (5.1) und einer quadratischen Gleichung der Form (5.2) ist Lösung einer quadratischen Gleichung in einer Variablen. Wegen $S_n \subseteq K$, K Körper und (ii) ist die Lösung wieder aus K . Eine Lösung (falls vorhanden) eines Gleichungssystems aus zwei quadratischen Gleichungen der Form (5.2) erfüllt schließlich die lineare Gleichung

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 = x^2 + y^2 + d'x + e'y + f' \Leftrightarrow (d-d')x + (e-e')y + (f-f') = 0.$$

Wegen $S_n \subseteq K$ und K ist Körper, liegt auch die Lösung dieser Gleichung in K . Also ist $S_{n+1} \subseteq K$.

Damit liegt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge S_n in K und es folgt $\mathcal{K}(S) \subseteq K$. □

Lemma 5.32. Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in S$. Es liegt $a \in \mathbb{C}$ genau dann in $\mathcal{K}(S)$, wenn es Teilkörper $K_1, \dots, K_n, n \in \mathbb{N}$ von \mathbb{C} mit den Eigenschaften

(i') $\mathbb{Q}(S \cup \overline{S}) =: K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$

(ii') $[K_i : K_{i-1}] = 2$ für $i \in \{1, \dots, n\}$

(iii') $a \in K_n$

gibt.

Beweis. Zu „ \Leftarrow “. Seien K_1, \dots, K_n Teilkörper von \mathbb{C} die (i'), (ii') und (iii') erfüllen. Es wird behauptet, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ schon $K_n \subseteq \mathcal{K}(S)$ gilt. Es folgt erneut eine Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

- Sei $n = 0$. Wegen $\mathbb{Q}, S, \overline{S} \subseteq \mathcal{K}(S)$ und $\mathcal{K}(S)$ Körper, folgt $K_0 \subseteq \mathcal{K}(S)$.
- Sei $n > 0$ und $K_n \subseteq \mathcal{K}(S)$. Wegen $[K_{n+1} : K_n] = 2$, gibt es für ein $z \in K_{n+1} \setminus K_n$ gewisse $\alpha, \beta \in K_n$, sodass $z^2 + \alpha z + \beta = 0$. Setze $c := z + \frac{1}{2}\alpha$, dann gilt $c^2 \in K_n$, denn

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(z + \frac{1}{2}\alpha\right)^2 \\ &= z^2 + \alpha z + \frac{1}{4}\alpha^2 \\ &= z^2 + \alpha z + \beta - \beta + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta \in K_n \end{aligned}$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

und $K_{n+1} = K_n(c)$, denn $c \notin K_n$, da sonst $z = c - \frac{1}{2}\alpha \in K_n$. Wegen $c^2 \in K_n \stackrel{\text{IV}}{\subseteq} \mathcal{K}(S)$ folgt gemäß Lemma 5.31 (ii), dass $c \in \mathcal{K}(S)$ und damit $K_{n+1} = K_n(c) \subseteq \mathcal{K}(S)$.

Wegen (iii') folgt dann direkt die Aussage.

Zu „ \Rightarrow “. Sei Ω die Menge aller $a \in \mathbb{C}$, für die es jene Teilkörper K_1, \dots, K_n von \mathbb{C} gibt, die die Eigenschaften (i'), (ii') und (iii') erfüllen. Seien $a, b \in \Omega, a \neq 0$, dann gibt es folglich wegen (ii') endlich viele $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ und $b_1, \dots, b_s \in \mathbb{C}$, sodass

$$\begin{aligned} K_0 \subseteq K_0(a_1) \subseteq \dots \subseteq K_0(a_1, \dots, a_r) \ni a \\ K_0 \subseteq K_0(b_1) \subseteq \dots \subseteq K_0(b_1, \dots, b_s) \ni b \end{aligned}$$

mit $a_{i+1}^2 \in K_0(a_1, \dots, a_i)$ und $b_{i+1}^2 \in K_0(b_1, \dots, b_i)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} K_0 \subseteq K_0(a_1) \subseteq \dots \subseteq K_0(a_1, \dots, a_r) \\ \subseteq K_0(a_1, \dots, a_r, b_1) \subseteq \dots \subseteq K_0(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) =: M \end{aligned}$$

und $a, b \in M$. Weiter gilt für zwei aufeinanderfolgende Körper $L \subseteq L'$ dieses Körperturms gerade $[L' : L] \leq 2$. Dann gilt insbesondere $a + b, a - b, ab, a^{-1} \in M \subseteq \Omega$. Also ist Ω ein Teilkörper von \mathbb{C} . Man kann zeigen, dass Ω sogar ein Teilkörper von \mathbb{C} ist, der (i), (ii) und (iii) von Lemma 5.31 erfüllt.

- Zu (i). Wegen (i') gilt auch direkt $S \subseteq \Omega$.
- Zu (ii). Ist weiter $z \in \Omega$, dann wegen (iii') auch $z \in K_n$ und somit gilt $[K_n(\sqrt{z}) : K_n] \leq 2$ mit dem Polynom $X^2 - z \in K_n[X]$ als Kandidat für ein Minimalpolynom. Man setze $K_{n+1} := K_n(\sqrt{z})$, dann gilt $\sqrt{z} \in K_{n+1}$ und die Eigenschaften (i') und (ii') werden vom Körperturm $K_0 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq K_{n+1}$ auch erfüllt, also ist $\sqrt{z} \in \Omega$.
- Zu (iii). Man betrachte zusätzlich den Automorphismus

$$\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$$

aus \mathbb{C} . Es ist dann auch für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Menge $\overline{K_i} := \tau(K_i)$ ein Teilkörper von \mathbb{C} . Zusätzlich gilt $\tau(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ sowie $\tau(S \cup \bar{S}) = S \cup \bar{S}$. Demnach ist $K_0 \subset \tau(K_0)$ und insgesamt $K_0 = \tau(K_0)$. Sei nun $z \in \Omega$, dann gibt es eine Kette $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$ mit $[K_{i+1} : K_i] = 2$ und $z \in K_n$. Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $[K_{i+1} : K_i] \leq 2$, d. h. es gibt analog zu oben ein a_i , sodass es für jedes $a \in K_{i+1}$

gewisse $\alpha, \beta \in K_i$ gibt, sodass a von der Form $a = \alpha + \beta a_i$, wobei $a_i^2 \in K_i$ ist, d. h. $K_{i+1} = K_i(a_i)$. Es gilt

$$\overline{K_{i+1}} \ni \bar{a} = \overline{\alpha + \beta a_i} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \bar{a}_i$$

und $\bar{a}_i^2 = \overline{a_i^2} \in \overline{K_i}$, d. h. $\overline{K_{i+1}} = \overline{K_i}(\bar{a}_i)$ und $[\overline{K_{i+1}} : \overline{K_i}] \leq 2$. Wegen $\bar{z} \in \overline{K_n}$ gilt dann $\bar{z} \in \Omega$.

Es erfüllt also Ω alle drei Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus Lemma 5.31 und es folgt $\mathcal{K}(S) \subseteq \Omega$. Liegt also a in $\mathcal{K}(S)$, so liegt a in Ω und erfüllt damit (i'), (ii') und (iii'). \square

Als unmittelbare Konsequenz ist also $a \in \mathbb{C}$ nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn $[K_0(a) : K_0]$ eine Zweierpotenz ist. Nimmt man $S = \{0, 1\}$, so ist $K_0 = \mathbb{Q}(S \cup \bar{S}) = \mathbb{Q}$. Dann ist $a \in \mathbb{C}$ nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ eine Zweierpotenz ist. Ist a algebraisch über \mathbb{Q} , so muss das Minimalpolynom von a über \mathbb{Q} in diesem Fall eine Zweierpotenz als Grad haben, denn dieser Grad ist gerade gleich $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$.

5.5. Quadratische Gleichungen in zwei Variablen

Lösungsmengen von quadratischen Gleichungen in zwei Variablen sind besondere Punkt-mengen in einer Ebene. Sie sind derzeit fester Bestandteil des nicht vertieften Lehramtsstudiums für Hauptfach Mathematik in Bayern und dort auch Teil der abschließenden ersten Staatsexamensprüfung. Im vertieften Studium und den Bachelor-Studiengängen finden sie ab und zu Einzug in eine *Lineare Algebra* zu Beginn des Studiums. In einigen Wahlbereichen können sie auch in einer (*algebraischen*) *Geometrie* behandelt werden. Gerade im Hinblick auf die Sekundarstufe II bietet dieses Thema eine Möglichkeit zur Vertiefung der Kenntnisse der ebenen analytischen Geometrie. Zudem ist es ein sehr anschauliches Themenfeld, das gerade die Idee der Mustererkennung und Klassifizierung in der Mathematik bildlich darstellen kann. Die weiteren Ausführungen sind an der *Analytischen Geometrie* von SCHNEIDER (2015) orientiert. Ergänzungen stammen von BOSCH (2008).

Kegelschnitte sind Punkt-mengen, die beim Schnitt von Doppelkegeln bzw. Kreiszy-lindern mit Ebenen im Raum entstehen. Algebraisch lassen sich diese als quadratische Polynomgleichungen in zwei Variablen beschreiben. Doppelkegel und Kreiszyylinder sind spezielle Flächen im Raum, wohingegen Kegelschnitte dann Kurven in der Ebene sind. Allgemeiner lässt sich der Begriff einer *Quadrik* definieren.

Definition 5.33. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $p(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ mit $\text{Grad}(p) = 2$ ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann nennt man die Menge

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

eine *Quadrik*. Für $n = 2$ spricht man auch von *Kurven* zweiter Ordnung; Für $n = 3$ von *Flächen* zweiter Ordnung. Die Ordnung bezieht sich dabei auf den Grad des Polynoms p .

Als Beispiele für Flächen zweiter Ordnung ist der oben bereits erwähnte Doppelkegel bspw. durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ bzw. für $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ der Kreiszyylinder bspw. durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$ beschrieben (siehe Abb. 5.26).

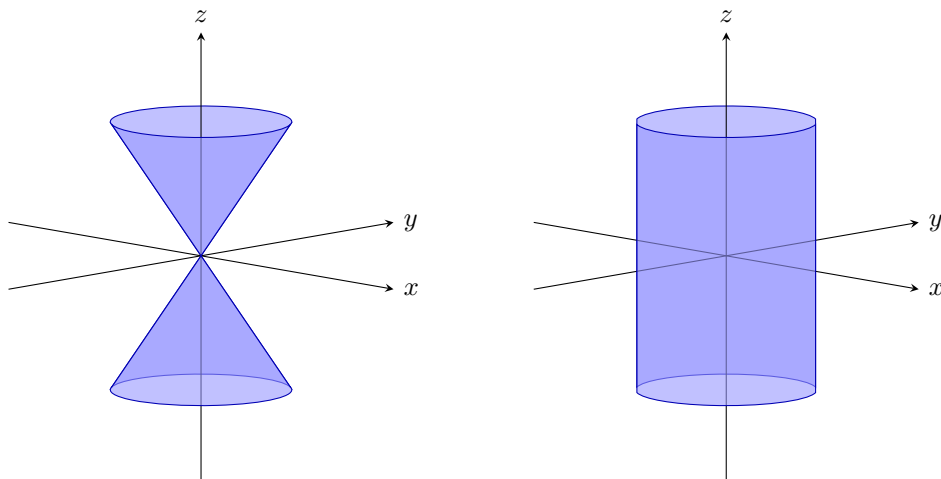


Abb. 5.26.: Doppelkegel (links) und Kreiszyylinder (rechts) als Teilmengen des \mathbb{R}^3 .

Ist Q eine Fläche zweiter Ordnung und E eine Ebene im \mathbb{R}^3 , dann lässt sich der Schnitt $Q \cap E$ von Q und E durch ein geeignetes Koordinatensystem ermitteln. Es bezeichne K das Grundkoordinatensystem, bzgl. dem die Quadrik und die Ebene gegeben sind. Die Quadrik habe dort die folgende Darstellung:

$$Q : ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + gx_1 + ix_2 + jx_3 + k = 0$$

Dabei sind $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Weiter seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ sodass die Ebene E durch

$$E : \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$$

beschrieben ist. Wählt man nun eine Orthonormalbasis¹⁴ $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ von \mathbb{R}^3 derart, dass b'_1, b'_2 parallel und b'_3 orthogonale zu E stehen und zusätzlich $P' \in E$ ein Punkt auf E ist, dann nimmt E bzgl. des Koordinatensystems $K' = (P', B')$ die Form

$$E : x'_3 = 0$$

an. Der Koordinatenwechsel ist dabei mit der orthogonalen Basiswechselmatrix $T(B', B)$ als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T(B', B) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} + \vec{p}'$$

gegeben, wobei \vec{p}' den Ortsvektor von P' bzgl. K beschreibt. Auch Q lässt sich bzgl. K' darstellen:

$$Q : a'x'^2_1 + b'x'^2_2 + c'x'^2_3 + d'x'_1x'_2 + e'x'_1x'_3 + f'x'_2x'_3 + g'x'_1 + i'x'_2 + j'x'_3 + k' = 0$$

Hier sind weiterhin $a', b', c', d', e', f', g', h', i', j', k' \in \mathbb{R}$ mit $(a', b', c', d', e', f') \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Die Schnittmenge $Q \cap E$ ist dann durch

$$Q \cap E : a'x'^2_1 + b'x'^2_2 + d'x'_1x'_2 + g'x'_1 + i'x'_2 + k' = 0$$

festgelegt. In der Ebene E selbst beschreibt diese Gleichung eine Kurve zweiter Ordnung.

Für die weitere Untersuchung von Quadriken sind also offensichtlich derartige Koordinatenwechsel nützlich. Man kann diese auch als umkehrbare Abbildungen im \mathbb{R}^n interpretieren, die affine Unterräume auf affine Unterräume von gleicher Dimension abbilden. Es lassen sich dann Typen von Kurven zweiter Ordnung unterscheiden. Vor allem die Beschreibung in Normalformen ist damit von Interesse. Fordert man zusätzlich eine Längentreue der Abbildungen, so lassen sich die betrachteten Punktmenge sogar beliebig im Raum anordnen, ohne dass deren Form verändert wird. Eine Unterscheidung hinsichtlich der Kongruenz von geometrischen Figuren wird hiermit angestoßen.

Definition 5.34. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Man nennt eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann eine *affine Punktabbildung*, wenn es eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen reellen Vektor $t \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass für die Ortsvektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ eines Punktes X und seines Bildpunktes $Y = \varphi(X)$ im Bezug auf

¹⁴Beispielsweise bzgl. des Standardskalarprodukts.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

das kanonische Koordinatensystem die Beziehung $y = Ax + t$ gilt. Die lineare Abbildung

$$\varphi' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$$

wird oftmals die von φ induzierte lineare Vektorabbildung und t der Translationsvektor von φ genannt. Ist φ eine bijektive Abbildung, so spricht man auch von einer Affinität oder affinen Transformation. Ist φ zusätzlich längentreu, so nennt man sie eine Bewegung und im vorliegenden Fall der ebenen Geometrie auch eine Kongruenzabbildung.^a

^aZur Sicherheit sei erwähnt, dass hier und bei allem Zukünftigem das Standardskalarprodukt das relevante Skalarprodukt ist.

Für $A = E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ handelt es sich bei φ um die einfache Translation $x \mapsto x + t$. Diese ist bijektiv mit der Umkehrabbildung $x \mapsto x - t$. Eine affine Punktabbildung φ ist demnach genau dann bijektiv, wenn die von ihr induzierte lineare Vektorabbildung φ' bijektiv ist. Auch die Entscheidung, ob eine affine Punktabbildung eine Bewegung ist, lässt sich anhand der induzierten linearen Vektorabbildung treffen.

Lemma 5.35. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Punktabbildung. Dann ist φ genau dann eine Bewegung, wenn die von φ induzierte lineare Vektorabbildung φ' orthogonal ist.

Beweis. Zu einem Punkt $A \in \mathbb{R}^n$ sei a der zugehörige Ortsvektor. Zum Punkt $\varphi(A)$ dann entsprechend der Ortsvektor $\varphi(a)$. Seien $X, Y \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte. Dann gilt zwischen φ und φ' der folgende Zusammenhang:

$$\varphi(x) - \varphi(y) = Ax + t - (Ay + t) = Ax - Ay = \varphi'(x) - \varphi'(y).$$

Es bleibt zu zeigen: φ Bewegung $\Leftrightarrow \varphi'$ orthogonal.

Zu „ \Rightarrow “. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es einen Punkt X , sodass x gerade der Ortsvektor von X ist. Weiter bezeichne O den Ursprung des vorliegenden Koordinatensystems. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| &= |\varphi'(x - o)| \\ &= |\varphi'(x) - \varphi'(o)| \\ &= |\varphi'(x) + t - \varphi'(o) - t| \\ &= |\varphi(x) - \varphi(o)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{dist}(\varphi(X), \varphi(O)) \\
&= \text{dist}(X, O) = |x|
\end{aligned}$$

Zu „ \Leftarrow “. Seien X und Y zwei Punkte des \mathbb{R}^n mit Ortsvektoren x, y . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\text{dist}(\varphi(X), \varphi(Y)) &= |\varphi(y) - \varphi(x)| \\
&= |Ay + t - (Ax + t)| \\
&= |Ay - Ax| \\
&= |\varphi'(y) - \varphi'(x)| \\
&= |\varphi'(y - x)| \\
&= |y - x| = \text{dist}(X, Y)
\end{aligned}$$

□

Darstellende Matrizen von orthogonalen Abbildungen bezüglich Orthonormalbasen sind bekanntlich orthogonale Matrizen und haben Determinante ± 1 . Man nennt Bewegungen mit einer induzierten linearen Vektorabbildung mit Determinante 1 auch *orientierungserhaltend* und ansonsten *orientierungswechselnd*. Da umgekehrt eine orthogonale Matrix auch eine orthogonale lineare Abbildung induziert und eine Matrix genau dann orthogonal ist, wenn ihre Spalten als Vektoren eine Orthonormalbasis bilden, sind Bewegungen auch gerade die bereits verwendeten Koordinatentransformationen zwischen Koordinatensystemen $K = (P, B)$ und $K' = (P', B')$ von \mathbb{R}^n bei denen die Basen B und B' jeweils Orthonormalbasen sind (siehe Abb. 5.27).

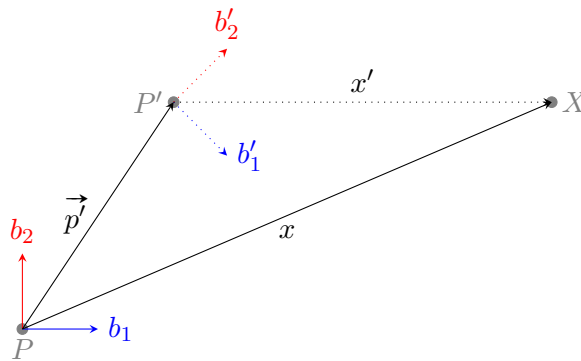


Abb. 5.27.: Beispielhafte Darstellung eines Koordinatenwechsels in \mathbb{R}^2 .

Um nun die möglichen Kurven zweiter Ordnung in Typen unterteilen zu können und insbesondere auch auf anschauliche Formen überführen zu können, lohnt es sich, die algebraische Schreibweise als Gleichung in eine Matrix-Schreibweise zu übersetzen. Ist also

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

eine Kurve zweiter Ordnung beschrieben durch $Q : ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$ für $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, dann gilt

$$0 = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f.$$

Es bezeichne ab sofort $A := \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die *Koeffizientenmatrix* von Q , $\vec{\beta} := \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ den *Translationsanteil* von Q und $\gamma := f$ den *konstanten Term* von Q . Es ist $A \neq 0$ eine reelle symmetrische Matrix und damit insbesondere orthogonal diagonalisierbar, d. h. es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A , sodass A bzgl. dieser Basis in Diagonalform vorliegt. Bezeichne B die Standardbasis und B' eine solche Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, dann ist $T := T(B, B')$ die Basiswechselmatrix und diese ist orthogonal. Weiter gilt für die Eigenwerte λ_1 und $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ von A , dass

$$A = T^{-1}DT = T^TDT, \text{ für } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Sei nun $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}' = T\vec{x}$ der Vektor \vec{x} bzgl. B' und $\vec{\beta} = T^T\vec{\beta}'$, also $\vec{\beta}'$ der Vektor $\vec{\beta}$ bzgl. B' ist, dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{\beta}^T \vec{x} + \gamma \\ &= \vec{x}^T (T^T D T) \vec{x} + (T^T \vec{\beta}')^T \vec{x} + \gamma \\ &= (T \vec{x})^T D (T \vec{x}) + \vec{\beta}'^T (T \vec{x}) + \gamma = \vec{x}'^T D \vec{x}' + \vec{\beta}'^T \vec{x}' + \gamma. \end{aligned}$$

Demnach lässt sich jede Kurve zweiter Ordnung durch einen Basiswechsel auf eine Form bringen, bei der der gemischte Term mit $x'_1 x'_2$ verschwindet. Zudem sind in dieser Form die Vorfaktoren vor den x'_1 - und x'_2 -Termen gerade die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A . Die Form

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \beta_1' x_1' + \beta_2' x_2' + f = 0$$

wird auch *Hauptachsenform* einer Quadrik Q genannt.

Die linearen Terme lassen sich nun ebenfalls reduzieren. Ist für ein $i \in \{1, 2\}$ der Eigenwert $\lambda_i \neq 0$ verschieden von Null, dann lässt sich der Term $\lambda_i x_i'^2 + \beta_i' x_i'$ durch quadratische Ergänzung auf die Form $\lambda_i (x_i' + \frac{\beta_i'}{2\lambda_i})^2 - \frac{\beta_i'^2}{4\lambda_i}$ bringen. Setzt man also

$$p_i' := \begin{cases} -\frac{\beta_i'}{2\lambda_i} & \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

dann verschwindet durch die Translation $x \mapsto x - \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$ für jedes $i \in \{1, 2\}$ mit $\lambda_i \neq 0$ der lineare Term mit x_i' . Diese Form nennt man auch *euklidische Normalform*. Sieht man die Koordinaten in der euklidischen Normalform bzgl. des kanonischen Koordinatensystems an, so gibt es eine Translation und eine Bewegung, die Q auf diese euklidische Normalform abbildet. Da die eben beschriebenen Transformationen jeweils für alle möglichen Kurven zweiter Ordnung möglich sind und insbesondere auch umkehrbar beschrieben sind, lassen sich aus den erreichten sehr einfachen Schreibweisen Klassen von Kurven ableiten.

Definition 5.36. Seien $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^2$ zwei Kurven zweiter Ordnung und $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Affinität, sodass $\varphi(Q_1) = Q_2$. Dann nennt man Q_1 und Q_2 vom selben *affinen Typ*. Ist φ sogar eine Bewegung, dann heißen Q_1 und Q_2 *kongruent*.

Lemma 5.37. Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ eine Kurve zweiter Ordnung. Dann ist Q zu einer Quadrik kongruent, die in euklidischer Normalform vorliegt. Namentlich sind das für $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die durch die folgenden Gleichungen beschriebenen Kurven zweiter Ordnung:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \quad -\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1, \quad -\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} = 0, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0,$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2}{a_2} = 0$$

Beweis. Wie oben beschrieben, lässt sich eine Kurve zweiter Ordnung Q durch eine reelle symmetrische Matrix $0 \neq A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, einen Vektor $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^2$ und einen Skalar $\gamma \in \mathbb{R}$ mittels $\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{\beta}^T \vec{x} + \gamma = 0$ beschreiben. Sei weiter B' eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dann beschreibt die Koordinatentransformation

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

$\vec{x} \mapsto T(B, B')\vec{x}$ eine Bewegung. Bezüglich des Koordinatensystems $K' = (O, B')$ ist Q von der Form $\vec{x}'^t D \vec{x}' + \vec{\beta}'^T \vec{x}' + \gamma' = 0$. Es ist dabei D in Diagonalf orm mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ von A auf der Diagonalen, wobei o. E. $\lambda_1 \geq \lambda_2$ angenommen wird. Sei weiter $P'(p'_1 | p'_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, der durch

$$p'_i := \begin{cases} -\frac{\beta'_i}{2\lambda_i} & \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

festgelegt ist. p'_1 und p'_2 sind die Koordinaten bzgl. K' . Die Koordinatentransformation zwischen K' und $K'' := (P', B')$ ist als Translation um den Ortsvektor \vec{p}' von P' auch eine Bewegung. Sie ist durch $\vec{x}' \mapsto \vec{x}'' + \vec{p}'$ beschrieben. Bezüglich K'' hat Q die Form

$$\vec{x}''^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \vec{x}'' + \begin{pmatrix} \beta''_1 & \beta''_2 \end{pmatrix} \vec{x}'' + \gamma'' = 0.$$

Die Koordinatentransformationen sind jeweils Bewegungen und damit Q kongruent zu seinen Darstellungen in den anderen Koordinatensystemen, insbesondere zu letzterer Darstellung. Eine Fallunterscheidung nach λ_1 und λ_2 liefert:

- Fall $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$: Es ist $\beta''_1 = \beta''_2 = 0$ und dann die beiden Fälle $\gamma'' = 0$ und $\gamma'' \neq 0$ zu unterscheiden. Im ersten liegt für $a_i := \sqrt{\lambda_i}^{-1}$ die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ vor. Im zweiten liegt für $a_i := \sqrt{\lambda_i}^{-1} \cdot \sqrt{|\gamma''|}$ die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ oder $-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ vor.
- Fall $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$: Es ist $\beta''_1 = 0$. Für den Fall, dass $\beta''_2 = 0$ sind die Fälle $\gamma'' = 0$ und $\gamma'' \neq 0$ zu unterscheiden. Im ersten liegt für $a_1 := \sqrt{\lambda_1}^{-1}$ die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ vor. Im zweiten liegt für $a_1 := \sqrt{\lambda_1}^{-1} \cdot \sqrt{|\gamma''|}$ die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ oder $-\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ vor. Ist stattdessen $\beta''_2 \neq 0$, dann liegt zunächst die Form

$$\vec{x}''^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}'' + \begin{pmatrix} 0 & \beta''_2 \end{pmatrix} \vec{x}'' + \gamma'' = 0$$

vor. Durch eine zusätzliche Verschiebung entlang der x_2'' -Achse um $\beta_2''^{-1} \cdot \gamma''$ mittels $\vec{x}'' \mapsto \vec{x}''' + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2''^{-1} \cdot \gamma'' \end{pmatrix}$ entsteht die Form

$$\vec{x}'''^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}''' + \begin{pmatrix} 0 & \beta''_2 \end{pmatrix} \vec{x}''' = 0.$$

Für $a_1 := \sqrt{\lambda_1}^{-1}$ und $a_2 := \beta_2''^{-1}$ liegt also die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ vor.

- Fall $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: Es ist $\beta_1'' = \beta_2'' = 0$ und dann die beiden Fälle $\gamma'' = 0$ und $\gamma'' \neq 0$ zu unterscheiden. Im ersten liegt für $a_1 := \sqrt{\lambda_1}^{-1}, a_2 := \sqrt{-\lambda_2}^{-1}$ die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ vor. Im zweiten liegt für $a_1 := \sqrt{\lambda_1}^{-1} \cdot \sqrt{|\gamma''|}, a_2 := \sqrt{-\lambda_2}^{-1} \cdot \sqrt{|\gamma''|}$ die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ oder $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = -1$ vor. Die weitere Form ist nach tauschen von x_1 und x_2 ebenfalls von ersterer Form.
- Fall $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$: Es ist $\beta_2'' = 0$. Für den Fall, dass $\beta_1'' = 0$ sind die Fälle $\gamma'' = 0$ und $\gamma'' \neq 0$ zu unterscheiden. Im ersten liegt für $a_2 := \sqrt{-\lambda_2}^{-1}$ die Form $-\frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ vor. Diese ist durch Vertauschen der x_1'' - und x_2'' -Achse mittels einer Spiegelung kongruent zur Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$. Im zweiten liegt für $a_2 := \sqrt{-\lambda_2}^{-1} \cdot \sqrt{|\gamma''|}$ die Form $\pm \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ vor. Ist stattdessen $\beta_1'' \neq 0$, dann lässt sich dieser Fall ebenfalls durch Vertauschen der x_1'' - und x_2'' -Achse auf die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ zurückführen.
- Fall $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2$: Es ist $\beta_1'' = \beta_2'' = 0$ und dann die beiden Fälle $\gamma'' = 0$ und $\gamma'' \neq 0$ zu unterscheiden. Im ersten lässt sich die Gleichung durch Multiplikation mit -1 auf den Fall $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ zurückführen. Es liegt also wieder die Form $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ vor. Im zweiten liegt für $a_i := \sqrt{-\lambda_i}^{-1} \cdot \sqrt{|\gamma''|}$ die Form $-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ oder $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ vor.

□

Setzt man in Lemma 5.37 die Parameter $a_1 = a_2 = 1$, so lassen sich aus den unterschiedlichen euklidischen Normalformen direkt sogenannte affine Typen von Quadriken in \mathbb{R}^2 ablesen.

Korollar 5.38. Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ eine Kurve zweiter Ordnung. Dann ist Q vom selben affinen Typ wie eine Quadrik, die in folgender Form vorliegt:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1^2 = 1, \quad x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad -x_1^2 = 1, \quad -x_1^2 - x_2^2 = 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_1^2 = 0, \quad x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

$$x_1^2 + x_2 = 0$$

Man nennt diese Formen auch *affine Typen*.

Man mache sich dazu bewusst, dass besondere Affinitäten gerade Skalierungen der Achsen sind. Beispielsweise streckt bzw. staucht die affine Transformation $x \mapsto \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} x$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

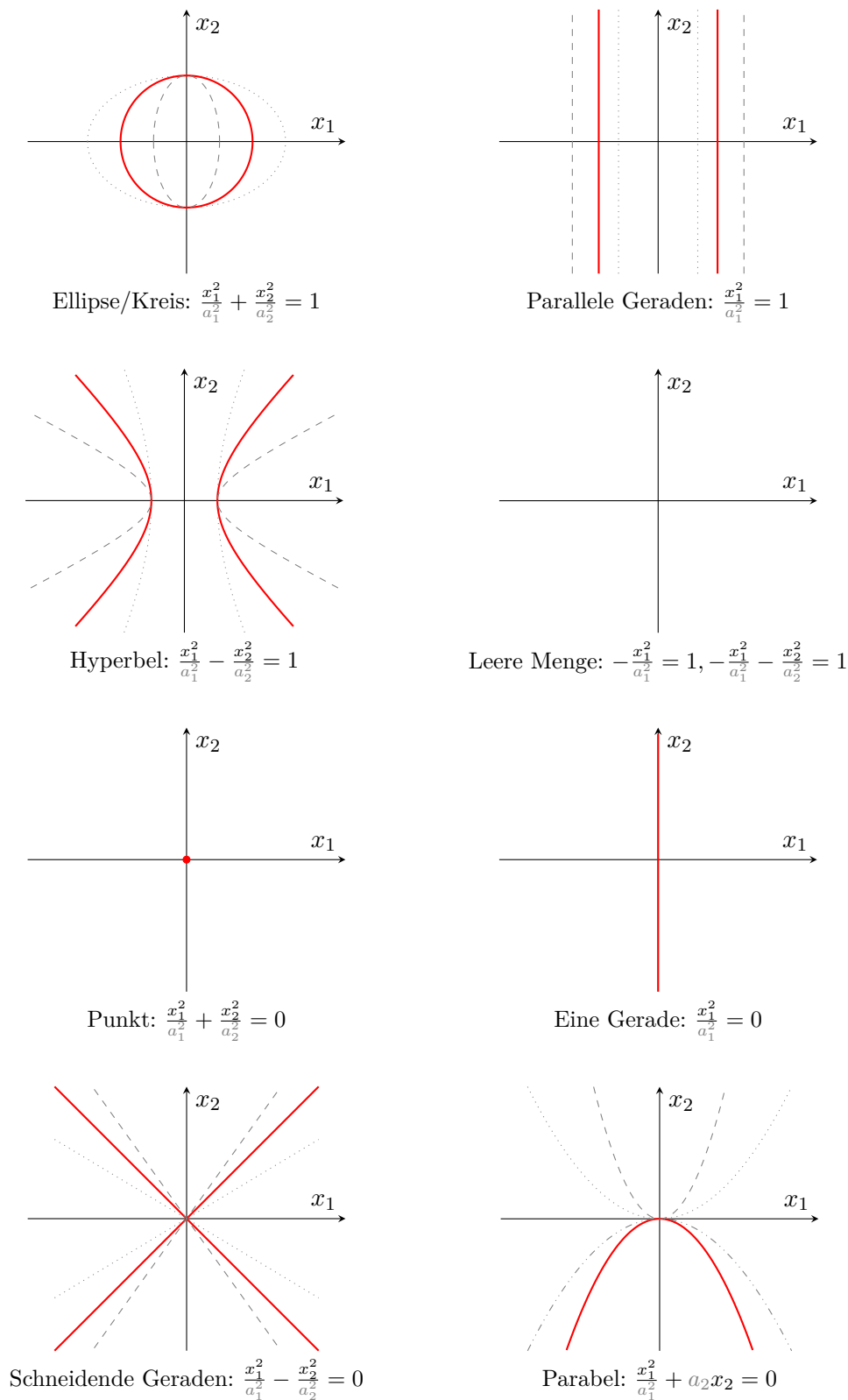


Abb. 5.28.: Affine Typen von Quadriken in \mathbb{R}^2 . In grau sind zusätzlich die allgemeineren euklidischen Normalformen angegeben. ($a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

für $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die x_1 -Achse um den Faktor λ und die x_2 -Achse um den Faktor μ . Während bei Bewegungen wie auch bei Affinitäten Punkte auf Punkte, parallele/schneidende Geraden auf parallele/schneidende Geraden sowie Zusammenhangskomponenten auf Zusammenhangskomponenten abgebildet werden, erhalten lediglich Bewegungen Abstände und Winkel. Als Konsequenz lässt sich bspw. jede Ellipse durch entsprechende Skalierung der Achsen auf den Einheitskreis abbilden. In Abb. 5.28 sind die affinen Typen mit den entsprechenden affinen Normalformen und ihre Verwandtschaft zu den euklidischen Normalformen abgebildet.

Bevor nun ein Verfahren vorgestellt wird, mit dem der affine Typ einer Kurve zweiter Ordnung bereits anhand der Koeffizienten der polynomialen Gleichung ermittelt werden kann, wird zunächst noch eine Typisierung hinsichtlich eines möglichen Mittelpunkts vorgenommen. Man bezeichnet dabei einen Punkt der Ebene \mathbb{R}^2 als Mittelpunkt einer Quadrik, wenn diese Quadrik nach Punktspiegelung an dieser Punkt wieder auf sich selbst abgebildet wird.

Definition 5.39. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ eine Quadrik und $M \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit Ortsvektor $m \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt M genau dann *Mittelpunkt* von Q , wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ aus $m + v \in Q$ schon $m - v \in Q$ folgt. (Siehe Abb. 5.29)

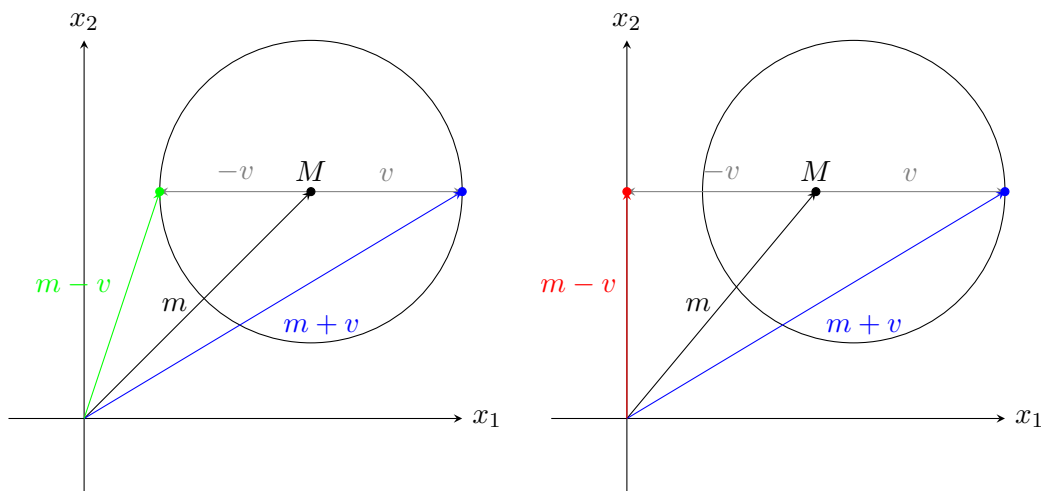


Abb. 5.29.: Mittelpunkt einer Quadrik in \mathbb{R}^2

Lemma 5.40. Sei $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ eine nicht leere Quadrik mit Gleichung $x^T A x + \beta^T x + \gamma = 0$ für eine symmetrische Matrix $0 \neq A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \beta, x \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit Ortsvektor $m \in \mathbb{R}^n$. Dann ist M genau dann ein Mittelpunkt von Q , wenn $A m + \frac{1}{2} \beta = 0$.

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Beweis. Zu „ \Rightarrow “. Sei M ein Mittelpunkt von Q und $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Sei weiter $m+v \in Q$, dann folgt $m-v \in Q$, d. h. einerseits

$$\begin{aligned} 0 &= (m+v)^T A(m+v) + \beta^T(m+v) + \gamma \\ &= m^T A m + m^T A v + v^T A m + v^T A v + \beta^T m + \beta^T v + \gamma \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} 0 &= (m-v)^T A(m-v) + \beta^T(m-v) + \gamma \\ &= m^T A m - m^T A v - v^T A m + v^T A v + \beta^T m - \beta^T v + \gamma. \end{aligned}$$

Es gilt zudem $m^T A v = (m^T A v)^T = v^T A^T m = v^T A m$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= 2m^T A v + 2v^T A m + 2\beta^T v \\ &= 4v^T A m + 2v^T \beta = 4v^T \left(A m + \frac{1}{2} \beta \right). \end{aligned}$$

Damit dies für beliebige $v \in \mathbb{R}^n$ immer gilt, muss es insbesondere für $v = A m + \frac{1}{2} \beta$ gelten. Dann ist $0 = 4(A m + \frac{1}{2} \beta)^T (A m + \frac{1}{2} \beta) = 4|A m + \frac{1}{2} \beta|^2$ und wegen der positiven Definitheit des Standardskalarprodukts folgt dann $A m + \frac{1}{2} \beta = 0$.

Zu „ \Leftarrow “. Es gelte $A m + \frac{1}{2} \beta = 0$ für den Ortsvektor $m \in \mathbb{R}^n$ eines Punktes $M \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} 0 &= 4v^T \left(A m + \frac{1}{2} \beta \right) \\ &= 4v^T A m + 2v^T \beta = 2m^T A v + 2v^T A m + 2\beta^T v. \end{aligned}$$

Ist nun $m+v \in Q$, d. h.

$$\begin{aligned} 0 &= (m+v)^T A(m+v) + \beta^T(m+v) + \gamma \\ &= m^T A m + m^T A v + v^T A m + v^T A v + \beta^T m + \beta^T v + \gamma. \end{aligned}$$

Erneute Subtraktion liefert schließlich:

$$\begin{aligned} 0 &= m^T A m - m^T A v - v^T A m + v^T A v + \beta^T m - \beta^T v + \gamma \\ &= (m-v)^T A(m-v) + \beta^T(m-v) + \gamma \end{aligned}$$

Also ist $m-v \in Q$ und damit M ein Mittelpunkt von Q . □

Die Formel $Am + \frac{1}{2}\beta$ liefert auch für leere Quadriken Mittelpunkte mit reellen Koordinaten, die aber wegen ihrer Nichtexistenz als imaginäre Mittelpunkte bezeichnet werden.

Lemma 5.41. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ eine Quadrik, $M \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Bewegung. Dann ist M genau dann ein Mittelpunkt von Q , wenn $\varphi(M)$ ein Mittelpunkt von $\varphi(Q)$ ist.

Beweis. Sei Q eine Quadrik, die durch $x^T Ax + \beta^T x + \gamma = 0$ beschrieben ist. Wie immer ist $0 \neq A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $\beta \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$. Weiter gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^n$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^n$, sodass $\varphi(x) = Tx + t =: y$. Es ist dann $\varphi(Q)$ von der Form

$$\begin{aligned} 0 &= (T^T(y-t))^T A(T^T(y-t)) + \beta^T(T^T(y-t)) + \gamma \\ &= (T^T y - T^T t)^T A(T^T y - T^T t) + \beta^T(T^T y - T^T t) + \gamma \\ &= (y^T T - t^T T)A(T^T y - T^T t) + \beta^T T^T y - \beta^T T^T t + \gamma \\ &= y^T T A T^T y - y^T T A T^T t - t^T T^T A T^T y + t^T T^T A T^T t + \beta^T T^T y - \beta^T T^T t + \gamma \\ &= y^T A' y + (\beta^T T^T - 2t^T A')y + \gamma' = y^T A' y + \beta'^T y + \gamma' \end{aligned}$$

für $0 \neq A' := T A T^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $\beta' := T\beta - 2A't \in \mathbb{R}^n, \gamma' := t^T A't - \beta^T T^T t + \gamma \in \mathbb{R}$.

Zu „ \Rightarrow “. Sei M ein Mittelpunkt von Q , d. h. für den Ortsvektor $m \in \mathbb{R}^n$ von M gilt $Am + \frac{1}{2}\beta = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} A'\varphi(m) + \frac{1}{2}\beta' &= T A T^T(Tm + t) + \frac{1}{2}(T\beta - 2T A T^T t) \\ &= T A m + T A T^T t + \frac{1}{2}T\beta - T A T^T t \\ &= T(Am + \frac{1}{2}\beta) = T0 = 0 \end{aligned}$$

Zu „ \Leftarrow “. $\varphi(Q)$ ist eine Quadrik. Sei $\varphi(M)$ ein Mittelpunkt von $\varphi(Q)$. $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Bewegung und nach „ \Rightarrow “ $\varphi^{-1}(\varphi(M)) = M$ ein Mittelpunkt von $\varphi^{-1}(\varphi(Q)) = Q$. \square

Insgesamt sind also die Mittelpunkte jeder (nicht leeren) Quadrik der Form $x^T Ax + \beta^T x + \gamma = 0$ genau die Menge

$$\mathcal{M} := \{X \in \mathbb{R}^n \mid Ax + \frac{1}{2}\beta = 0\}.$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Es genügt demnach die Betrachtung der Mittelpunkte an Quadriken in euklidischer Normalform (siehe Abb. 5.30). Dass hier nur von einer nicht-leeren Quadrik gesprochen werden sollte, liegt an der logischen Struktur der Definition von Mittelpunkten über eine Implikation. Man stelle sich die Quadrik der leeren Menge mit der Gleichung $x_1^2 = -1$ vor. Jeder Punkt $M \in \mathbb{R}^2$ erfüllt die Definition eines Mittelpunkts. Jedoch liefert das Gleichungssystem $Am + \frac{1}{2}\beta = 0$ in diesem Fall die Lösungsmenge $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subsetneq \mathbb{R}^2$. Auch die leere Menge $-x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ hat per Definition ganz \mathbb{R}^2 als Mittelpunkte und nach der Mittelpunktgleichung aber nur den Mittelpunkt $(0|0)$. Betrachtet man diese beiden affinen Normalformen der leeren Menge genauer, dann ließe sich eine Lösung zumindest in $(i\mathbb{R})^2$ angeben. Die Form würde sich entsprechend zu

$$(ix_1)^2 = -1 \Leftrightarrow x_1^2 = 1, \text{ bzw. } -(ix_1)^2 - (ix_2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$$

wandeln. Man spricht aus diesem Grund auch von einem *imaginären parallelen Geradenpaar*, bzw. von einer *imaginären Ellipse*. Die aus den Mittelpunktgleichungen resultierenden Mittelpunkte sind jetzt anschaulich akzeptabel.

Eine Quadrik, die mindestens einen Mittelpunkt besitzt, nennt man auch *Mittelpunktquadrik*. Quadriken ohne Mittelpunkte werden *parabolische* Quadriken genannt. In \mathbb{R}^2 ist lediglich die Parabel eine parabolische Quadrik.

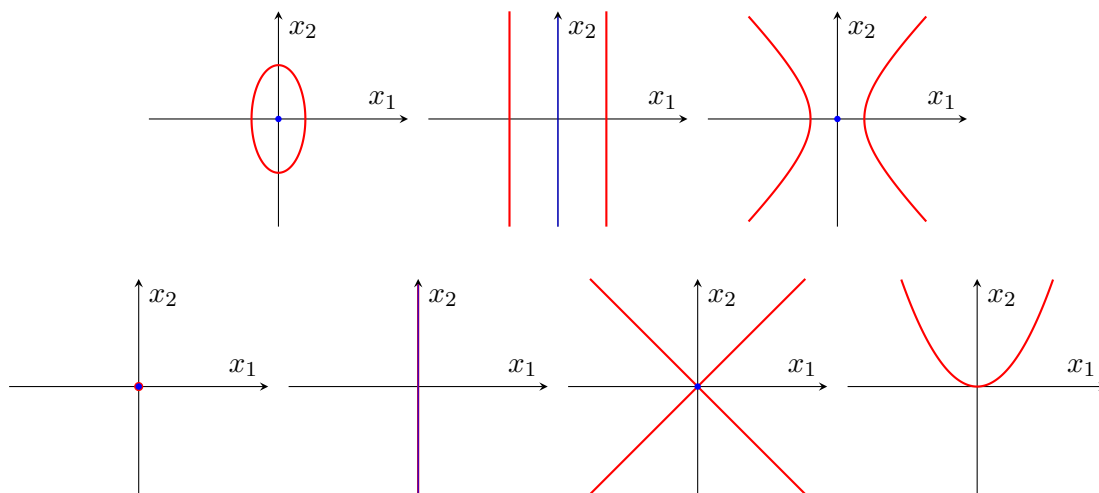


Abb. 5.30.: Mengen der Mittelpunkte (blau) der affinen Typen in \mathbb{R}^2 .

Im Folgenden wird die imaginäre Ellipse zum affinen Typ der Ellipse und das imaginäre parallele Geradenpaar zum affinen Typ paralleler Geraden gezählt. Dann lässt sich eine Entscheidung hinsichtlich des affinen Typs einer beliebigen Quadrik fast vollständig deterministisch anhand der Koeffizienten der polynomialen Gleichung treffen.

Satz 5.42. Sei $Q : ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$ eine Quadrik in \mathbb{R}^2 mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Seien weiter

$$A_1 := \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \text{ sowie } A_2 := \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$$

die sogenannte *Koeffizientenmatrix* bzw. *erweiterte Koeffizientenmatrix* von Q mit $\delta_1 := \det(A_1), \delta_2 := \det(A_2)$. Dann gilt:

- $\delta_2 \neq 0$:
 - $\delta_1 > 0$: Q ist eine Ellipse
 - $\delta_1 = 0$: Q ist eine Parabel
 - $\delta_1 < 0$: Q ist eine Hyperbel
- $\delta_2 = 0$:
 - $\delta_1 > 0$: Q ist ein Punkt
 - $\delta_1 = 0$: Q ist ein Paar paralleler Geraden
 - $\delta_1 < 0$: Q ist ein Paar schneidender Geraden

Beweis. Sei Q die entsprechende Quadrik mit der Form $x^T A_1 x + \beta^T x + \gamma = 0$, d. h. $\beta = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma = f \in \mathbb{R}$. Sei weiter Q' die Quadrik Q in Hauptachsenform und Q'' die Quadrik Q in euklidischer Normalform. Der Übergang $Q \rightarrow Q'$ wird durch eine orthogonale lineare Abbildung $x \mapsto Tx$ mit orthogonaler Matrix $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ erreicht. Für den Übergang $Q' \rightarrow Q''$ ist eine Verschiebung $x \mapsto x + t$ zuständig. Es wird nun gezeigt, dass für $i \in \{1, 2\}$ $\det(A_i) = \det(A'_i) = \det(A''_i)$ gilt. Dabei sind A_i, A'_i, A''_i jeweils die (erweiterten) Koeffizientenmatrizen von Q bzw. Q' bzw. Q'' .

In Hauptachsenform liegt Q' als $x'^T A'_1 x' + \beta'^T x' + \gamma' = 0$ mit $A'_1 = T A_1 T^T$ in Diagonalform, $\beta' = T\beta$ und $\gamma' = \gamma$ vor. Damit haben A_1 und A'_1 als ähnliche Matrizen die gleiche Determinante. Weiter ist

$$A'_2 = \begin{bmatrix} A'_1 & \beta' \\ \beta'^T & \gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T A_1 T^T & T\beta \\ \beta^T T^T & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

d. h.

$$\det(A'_2) = \det\left(\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \det(A_2) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det(T) \cdot \det(A_2) \cdot \det(T^T) = \det(A_2)$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Es gilt weiter $A'_1 = A''_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, λ_1, λ_2 Eigenwerte von A und damit auch $\det(A'_1) = \det(A''_1)$. Ist Q' nun eine Mittelpunktsquadratik und P' ein Mittelpunkt durch den Ortsvektor $p' = \begin{pmatrix} -\frac{\beta'_1}{2\lambda_1} \\ -\frac{\beta'_1}{2\lambda_1} \end{pmatrix}$, dann liefert die Translation $x' \mapsto x' - p'$ gerade die euklidische Normalform Q'' von Q' bzw. Q . Zudem gilt $A'p' + \frac{1}{2}\beta' = 0 \Leftrightarrow A'p' = -\frac{1}{2}\beta'$. Für die erweiterten Koeffizientenmatrizen ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= (x'' + p')^T A'_1 (x'' + p') + \beta'^T (x'' + p') + \gamma \\ &= x''^T A'_1 x'' + 2p'^T A'_1 x'' + p'^T A'_1 p' + \beta'^T x'' + \beta'^T p' + \gamma \\ &= x''^T A'_1 x'' + (2p'^T A'_1 + \beta'^T) x'' + p'^T A'_1 p' + \beta'^T p' + \gamma \\ &= x''^T A''_1 x'' + \beta''^T x'' + \gamma'', \end{aligned}$$

wobei $A''_1 = A'_1$, $\beta'' = 2A'_1 p' + \beta'$, $\gamma'' = p'^T A'_1 p' + \beta'^T p' + \gamma$. Wegen $A'_1 p' + \frac{1}{2}\beta' = 0$ gilt dann sogar $\beta'' = 0$ und $\gamma'' = \frac{1}{2}\beta'^T p' + \gamma$. Also:

$$A'_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \frac{\beta'_1}{2} \\ 0 & \lambda_2 & \frac{\beta'_2}{2} \\ \frac{\beta'_1}{2} & \frac{\beta'_2}{2} & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A''_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta'^T p' + \gamma \end{bmatrix}$$

Damit sind die Determinanten

$$\det(A'_2) = \lambda_1 \lambda_2 \gamma - \frac{\beta_1'^2}{4} \lambda_2 - \frac{\beta_2'^2}{4} \lambda_1$$

und

$$\begin{aligned} \det(A''_2) &= \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{1}{2} \beta'^T p' + \gamma \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{\beta'_1}{2\lambda_1} \beta'_1 - \frac{\beta'_2}{2\lambda_2} \beta'_2 \right) + \gamma \right) = \lambda_1 \lambda_2 \gamma - \frac{\beta_1'^2}{4} \lambda_2 - \frac{\beta_2'^2}{4} \lambda_1 \end{aligned}$$

gleich. Ist nun abschließend Q eine Parabel, also o. E. $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$ die Eigenwerte von A_1 , dann ist Q' von der Form $x'^T A'_1 x' + \beta'^T x' + \gamma' = 0$ mit

$$A'_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma' = \gamma.$$

Der Übergang von Q' zur euklidischen Normalform Q'' erfolgt nun mittels der Translation $x' \mapsto x' - q'$, wobei diesmal $q' = \begin{pmatrix} -\frac{\beta'_1}{2\lambda_1} \\ q'_2 \end{pmatrix}$ mit $q'_2 := \beta_2'^{-1} \left(\frac{\beta_1'^2}{4\lambda_1} - \gamma \right)$. Man beachte, dass in der Hauptachsenform der Parabel $\beta_2' \neq 0$ gilt. Es ist jetzt nicht $A'p' + \frac{1}{2}\beta' = 0$, weswegen

die Form von Q'' händisch ermittelt wird. Insbesondere β'' und γ'' müssen gesondert betrachtet werden.

$$\begin{aligned}\beta'' &= 2A_1'q' + \beta' = 2 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1'}{2\lambda_1} \\ q_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\beta_1' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2' \end{pmatrix} \\ \gamma'' &= q'^T A_1' q' + \beta'^T q' + \gamma \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1'}{2\lambda_1} & q_2' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1'}{2\lambda_1} \\ q_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1'}{2\lambda_1} \\ q_2' \end{pmatrix} + \gamma \\ &= \frac{\beta_1'^2}{4\lambda_1} - \frac{\beta_1'^2}{2\lambda_1} + \beta_2'q_2' + \gamma = 0\end{aligned}$$

Es sind also

$$A_2' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \frac{\beta_1'}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2'}{2} \\ \frac{\beta_1'}{2} & \frac{\beta_2'}{2} & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2'' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2'}{2} \\ 0 & \frac{\beta_2'}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

und damit

$$\det(A_2') = -\lambda_1 \frac{\beta_2'^2}{4} = \det(A_2'').$$

Man erkennt hier bereits, dass für eine Parabel die Determinante der erweiterten Koeffizientenmatrix nicht Null wird.

Es genügt insgesamt also lediglich die Betrachtung der Determinanten der (erweiterten) Koeffizientenmatrizen der euklidischen Normalformen. Diese sind für $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

- Ellipse $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} > 0, \quad \det(A_2) = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2} < 0, \quad \text{insbesondere } \det(A_2) \neq 0,$$

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

oder imaginäre Ellipse $-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2^2} \end{bmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} > 0, \det(A_2) = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2} < 0, \text{ insbesondere } \det(A_2) \neq 0.$$

- Parabel: $\frac{x_1^2}{a_1^2} + a_2 x_2 = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_2}{2} \\ 0 & \frac{a_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = 0, \det(A_2) = -\frac{a_2^2}{4a_1^2} < 0, \text{ insbesondere } \det(A_2) \neq 0.$$

- Hyperbel: $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2^2} \end{bmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2} < 0, \det(A_2) = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} > 0, \text{ insbesondere } \det(A_2) \neq 0.$$

- Punkt: $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} \end{bmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} > 0, \det(A_2) = 0.$$

- Parallele Geraden: $\frac{x_1^2}{a_1^2} - 1 = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = 0, \det(A_2) = 0,$$

oder imaginäres paralleles Geradenpaar $-\frac{x_1^2}{a_1^2} - 1 = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = 0, \det(A_2) = 0.$$

- Schneidende Geraden: $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$, d. h.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2^2} \end{bmatrix} \text{ und } A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also

$$\det(A_1) = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2} < 0, \det(A_2) = 0.$$

□

Abschließend werden die Kurven zweiter Ordnung aus einem abstrakt algebraischen Blickwinkel betrachtet. Lediglich die Hyperbel und das Paar paralleler Geraden besteht augenscheinlich aus zwei Zusammenhangskomponenten. Davon sind selbige nur beim

5. Sachanalysen der algebraischen Inhalte in der Lehramtsausbildung

Geradenpaar von mutmaßlich linearer Struktur. Umgekehrt lässt sich allerdings ein Paar sich schneidender Geraden direkt aus den beiden einzelnen Geradengleichungen rekonstruieren. Es beschreibt bspw. $x_1 - x_2 = 0$ die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten wohingegen $x_1 + x_2 = 0$ die Winkelhalbierende des zweiten und vierten Quadranten darstellt. Das Produkt $0 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1^2 - x_2^2$ ist gerade die affine Normalform der zwei sich schneidenden Geraden. Dass dieser algebraische Effekt tatsächlich die geometrische Zeichnung darstellt liefert die Nullteilerfreiheit auf \mathbb{R} . Derzufolge folgt für $r, s \in \mathbb{R}$ aus $rs = 0$ schon $r = 0$ oder $s = 0$. Ist nun aber $P(p_1|p_2)$ ein Punkt der Ebene \mathbb{R}^2 , dann liegt P genau dann auf dem sich schneidenden Geradenpaar, wenn $0 = p_1^2 - p_2^2 = (p_1 - p_2)(p_1 + p_2)$. Damit muss aber $p_1 - p_2 = 0$ oder $p_1 + p_2 = 0$ gelten, was äquivalent dazu ist, dass P auf der einen oder auf der anderen Geraden liegt.

Lemma 5.43. Sei $f(X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ ein reelles Polynom in zwei Variablen mit $\text{Grad}(f) = 2$ und $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine bijektive affine Punktabbildung. Ist $f(X_1, X_2)$ reduzibel, dann ist auch $f(\varphi_1(X_1, X_2), \varphi_2(X_1, X_2))$ reduzibel.

Beweis. Seien $g(X_1, X_2), h(X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$, sodass $f(X_1, X_2) = g(X_1, X_2)h(X_1, X_2)$. Weil $f(X_1, X_2)$ reduzibel ist, gilt $\text{Grad}(g) = \text{Grad}(h) = 1$. Weiter gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ sodass $\varphi(x) = Tx + t$. Es ist dann

$$\varphi_1(X_1, X_2) = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + t_1, \quad \varphi_2(X_1, X_2) = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + t_2,$$

wobei $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, sodass $T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$. Es gilt offensichtlich

$$\text{Grad}(f(\varphi(X_1, X_2))) \leq \text{Grad}(f(X_1, X_2)) = 2.$$

Analog gilt auch

$$\begin{aligned} 2 = \text{Grad}(f(X_1, X_2)) &= \text{Grad}(f(\varphi(\varphi^{-1}(X_1, X_2)))) \\ &\leq \text{Grad}(f(\varphi(X_1, X_2))), \end{aligned}$$

also $\text{Grad}(f(\varphi_1(X_1, X_2), \varphi_2(X_1, X_2))) = 2$. Analog gilt dies für

$$\text{Grad}(g(\varphi_1(X_1, X_2), \varphi_2(X_1, X_2))) = \text{Grad}(h(\varphi_1(X_1, X_2), \varphi_2(X_1, X_2))) = 1.$$

□

Satz 5.44. Sei $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ ein reelles Polynom in zwei Variablen mit $\text{Grad}(f) = 2$ und $Q : f(x_1, x_2) = 0$ eine Quadrik in \mathbb{R}^2 . Dann ist Q genau dann eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn f irreduzibel in $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ ist. Andererseits ist Q genau dann ein sich schneidendes oder paralleles Geradenpaar oder ein Punkt, wenn f reduzibel in $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ ist.

Beweis. Wegen Lemma 5.43 genügt die Betrachtung der affinen Normalformen der ebenen Quadriken aus Korollar 5.38. Es ist im Folgenden oftmals die Sichtweise $\mathbb{C}[X_1, X_2] = (\mathbb{C}[X_2])[X_1]$ wichtig. Da \mathbb{C} ein Körper ist, ist $\mathbb{C}[X_2]$ ein Hauptidealbereich, also insbesondere ein faktorieller Ring, d. h. dort sind irreduzible Elemente auch Primelemente. Da auf Integritätsbereichen die Umkehrung sowieso gilt, sind hier irreduzible Element nicht mehr von Primelementen zu unterscheiden.

- Ellipse: Es ist $f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 - 1 = X_1^2 + (X_2 + 1)(X_2 - 1) \in (\mathbb{C}[X_2])[X_1]$ bzw. $f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 + 1 = X_1^2 + (X_2 + i)(X_2 - i)$. Das Element $p = X_2 + 1 \in \mathbb{R}[X_2]$ bzw. $p = X_2 + i$ ist als Polynom von Grad 1 irreduzibel in $\mathbb{C}[X_2]$ und damit prim in $\mathbb{C}[X_2]$. f ist ein primitives Polynom in $\mathbb{C}[X_2][X_1]$ und es gilt $p \nmid 1, p \mid (X_2 + 1)(X_2 - 1)$ bzw. $p \nmid 1, p \mid (X_2 + i)(X_2 - i)$ und $p^2 \nmid (X_2 + 1)(X_2 - 1)$ bzw. $p^2 \nmid (X_2 + i)(X_2 - i)$. Nach dem Kriterium von Eisenstein ist f dann irreduzibel in $(\mathbb{C}[X_2])[X_1] = \mathbb{C}[X_1, X_2]$.
- Hyperbel: Es ist $f(X_1, X_2) = X_1^2 - X_2^2 - 1 = X_1^2 - (X_2 + 1)(X_2 - 1) \in (\mathbb{C}[X_2])[X_1]$. Das Element $p = X_2 + 1 \in \mathbb{C}[X_2]$ ist erneut als Polynom von Grad 1 irreduzibel in $\mathbb{C}[X_2]$ und damit prim in $\mathbb{C}[X_2]$. f ist ein primitives Polynom in $\mathbb{C}[X_2][X_1]$ und es gilt $p \nmid 1, p \mid -(X_2 + 1)(X_2 - 1)$ und $p^2 \nmid -(X_2 + 1)(X_2 - 1)$. Nach dem Kriterium von Eisenstein ist f dann wieder irreduzibel in $(\mathbb{C}[X_2])[X_1] = \mathbb{C}[X_1, X_2]$.
- Parabel: Es ist $f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2 \in (\mathbb{C}[X_2])[X_1]$. Das Element $p = X_2 \in \mathbb{C}[X_2]$ ist als Polynom von Grad 1 ebenfalls irreduzibel in $\mathbb{C}[X_2]$ und damit prim in $\mathbb{C}[X_2]$. f ist ein primitives Polynom in $\mathbb{C}[X_2][X_1]$ und es gilt $p \nmid 1, p \mid X_2$ und $p^2 \nmid X_2$. Nach dem Kriterium von Eisenstein ist f dann auch irreduzibel in $(\mathbb{C}[X_2])[X_1] = \mathbb{C}[X_1, X_2]$.
- Punkt: Es ist $f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2 = (X_1 + iX_2)(X_1 - iX_2)$.
- Parallele Geraden: Es ist $f(X_1, X_2) = X_1^2 + 1 = (X_1 + i)(X_1 - i)$ bzw. $f(X_1, X_2) = X_1^2 - 1 = (X_1 + 1)(X_1 - 1)$.
- Schneidende Geraden: $f(X_1, X_2) = X_1^2 - X_2^2 = (X_1 + X_2)(X_1 - X_2)$.

Es sind damit alle möglichen affinen Normalformen behandelt und deshalb gilt die zu zeigende Aussage. \square

5.6. Fragestellungen zur Bearbeitung im Seminarkonzept

In diesem Abschnitt werden die Fragestellungen vorgestellt, die die Studierenden im beschriebenen Seminar möglichst selbstständig bearbeiten sollen. Die Fragestellungen müssen entsprechend offen formuliert sein, wodurch eine selbstständig Bearbeitung initiiert werden soll, damit die Beobachtung von authentischen Arbeitsweisen bei den Studierenden gelingen kann.

Für den ersten Inhaltsbereich *Zahlen und Zahlenbereiche* werden die folgenden vier Fragestellungen für offene Arbeitsaufträge angesetzt:

- (OA1) Man definiere eine *konstruierbare Zahl* als die Länge einer konstruierbaren Strecke. Dabei ist eine konstruierbare Strecke eine Strecke, die durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal und aus einer Grundstrecke der Länge 1 hervorgeht. Diskutieren Sie den Zahlenbereich der konstruierbaren Zahlen ausführlich.
- (OA2) Erstellen Sie ein minimales Axiomensystem für die formale Einführung negativer Zahlen ausgehend von folgender Konvention:

$$a - b = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ (b - a)^* & \text{falls } a < b \end{cases}$$

- (OA3) Interpretieren Sie die folgenden quadratischen Gleichungen geometrisch und versuchen Sie damit Lösungen der Gleichungen abzuleiten.
- (i) $x^2 + 10x = 39$
- (ii) $x^2 = 10x + 39$
- (iii) $x^2 + 32 = 12x$
- (OA4) Führen Sie auf \mathbb{R} drei imaginäre Einheiten ein und überprüfen Sie, inwiefern eine körperähnliche Struktur entstehen kann.

Es soll in (OA1) der historisch-genetische Zugang zu den schulrelevanten Zahlenbereichen über die Konstruierbarkeit angestoßen werden. In (OA2) soll dann zu einer formalen Beschreibung übergegangen sowie in (OA3) deren Stärken selbst erfahren werden. Es ist anzumerken, dass (OA2) eine gewisse Schwierigkeit in der Fragestellung dadurch generiert, dass die angegebenen Eigenschaften bereits für ein minimales Axiomensystem stehen. Die kognitive Leistung, die hier also von den Studierenden gefordert wird, ist gerade die Erkenntnis, dass alle Rechengesetze, die man für die Grundrechenarten auf ganzen Zahlen formulieren kann, durch die angegebene Charakterisierung bereits gültig sind. (OA4) steht abschließend als Ausblick auf abstraktere Zahlenbereiche, die dennoch als logische Fortsetzung zu verstehen sind.

Für den zweiten Inhaltsbereich *Quadratische Gleichungen in zwei Variablen* werden die folgenden drei Fragestellungen für offene Arbeitsaufträge angesetzt:

(OA5) Betrachten Sie die Gleichung

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0,$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Vergleichen Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung mit den Schnittmengen eines Doppelkegels D , bzw. eines Kreiszyinders K mit einer Ebene E im \mathbb{R}^3 .

(OA6) Beschreiben Sie die Parameter A, β, γ, A' dahingehend ausführlich, dass damit neue Schreibweisen für die allgemeine quadratische Gleichung in zwei Variablen folgendermaßen entstehen:

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{\beta}^T \vec{x} + \gamma = 0, \quad \vec{v}^T A' \vec{v} = 0$$

Entwickeln Sie ausgehend von der Koeffizientenmatrix A zusammen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix A' ein Verfahren zur Bestimmung des Typs der Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung in zwei Variablen.

(OA7) Ein Paar sich schneidender Geraden lässt sich als Grenzfall einer Hyperbel betrachten. Diskutieren Sie zunächst diesen Gedanken und arbeiten Sie Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten von Hyperbel und Paar sich schneidender Geraden heraus. Kontrollieren Sie, ob sich insbesondere die Unterschiede auch an den entsprechenden algebraischen Gleichungen erkennen lassen und übertragen Sie ihre Erkenntnisse auf die restlichen affinen Typen.

(OA5) soll zunächst eine Verbindung von algebraischer Schreibweise und geometrischer Anschauung schaffen. Gerade die Gleichung ist hier Anlass, die eigenen algebraischen Werkzeuge und Strategien zu transformieren und zu erweitern. (OA6) liefert dann eine formale Beschreibung von Kegelschnitten und eröffnet die Möglichkeit, sich über deterministische Möglichkeiten Gedanken zu machen, was einer grundlegenden mathematischen Überlegung gleich kommt. (OA7) soll erneut einen Weg hin zu einer abstrakteren Thematisierung des Problemgegenstands führen, wobei die Formulierung das Aufstellen von Hypothesen ermutigen soll.

Teil IV

Qualitative Inhaltsanalyse der Lernprozess- dokumentationen

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der durchgeführten qualitativen Inhaltsanalyse zunächst dargestellt und anschließend interpretiert. Zu Beginn wird in Abschnitt 6.1 das Seminarkonzept festgelegt, im Rahmen dessen die Fragestellungen zu den Inhaltsbereichen aus Abschnitt 5.6 gestellt werden und in dessen Durchführung die zu untersuchenden Dokumentationen der Studierenden entstehen. Im Anschluss werden die Ergebnisse der drei einzelnen Inhaltsanalysen vorgestellt. Dabei wird in der Reihenfolge ihrer Durchführung vorgegangen. Zudem werden die Ergebnisse der einzelnen Inhaltsanalysen immer auch zuerst zwischeninterpretiert, bevor mit den Ergebnissen der nachfolgenden Analyse fortgefahren wird. Dies folgt dem strukturellen Aufbau der Studie, wonach die einzelnen Inhaltsanalysen nicht losgelöst voneinander durchgeführt wurden, sondern jeweils aufeinander aufbauend angeordnet sind (siehe Abschnitt 4.7).

6.1. Seminarkonzept und Materialauswahl

Die Konzeption des Seminars orientiert sich maßgeblich an den theoretischen Überlegungen zu offenen Problemstellungen, am selbstentdeckenden Lernen sowie am dialogischen Lernmodell (siehe Abschnitt 3.2). Die Fragestellungen aus Abschnitt 5.6 werden den Studierenden jeweils wöchentlich nach einer (wöchentlichen) Sitzung gestellt. Diese haben dann fünf Tage freie Bearbeitungszeit, bevor sie die Dokumentation ihres Bearbeitungsprozesses in schriftlicher Form abgeben müssen. Die Dokumentation soll dabei ganzheitlich und chronologisch erstellt sein. Das Hinzuziehen von externen Hilfsmitteln ist ausdrücklich erlaubt, solange die Verwendung dokumentiert wird. Die Dokumentationen werden bis zum nächsten Sitzungstermin von der Lehrperson gesichtet und mit minimalen Rückmeldungen versehen. Diese Rückmeldungen werden in Form von Häkchen im Sinne des dialogischen Lernmodells gesetzt. Auf Grundlage der Bearbeitungen wird eine fachlich geprägte Sitzung gehalten, die insbesondere die Ideen der Studierenden aufgreift. In den Sitzungsterminen wird eine fachliche Klärung der Fragestellung angestrebt, wobei

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

keine Präsentation einer korrekten Lösung gegeben, sondern vielmehr gemeinsam eine Einordnung der bereits gefundenen Lösungen, Ideen und Ansätze in das Themengebiet erarbeitet wird.

Das Seminar ist für einen benoteten Wahlpflichtbereich an der Universität Augsburg für das gymnasiale Lehramt entworfen. Die Vergütung im entsprechenden Modul ist mit sechs ECTS-Punkten vorgegeben. Für die Beurteilung der Modulleistung werden einerseits fachliche und andererseits dokumentarische Gesichtspunkte berücksichtigt. Damit die Studierenden die Fragestellungen auch wirklich frei selbst erkunden können, wird die fachliche Beurteilung der Bearbeitungen nicht direkt an den Dokumentationen vollzogen. Die Studierenden haben die Möglichkeit, nach Ende der gestellten Fragestellungen und im Anschluss an die Sitzungstermine die Dokumentationen mit den neu gewonnenen Eindrücken zu überarbeiten und gesammelt in Form eines Portfolios am Semesterende abzugeben. Erst diese werden abschließend auf fachliche Korrektheit beurteilt. Die Bewertung dokumentarischer Aspekte erfolgt direkt an den wöchentlich abgegebenen Dokumentationen.

Das Seminar wurde in dieser Form in drei aufeinanderfolgenden Semestern (SoSe 22, WiSe 22/23, SoSe 23) angeboten. Insgesamt haben 25 Student*innen daran teilgenommen (SoSe 22: 8, WiSe 22/23: 13, SoSe 23: 4). Für die qualitative Inhaltsanalyse werden die Dokumentationen ohne Anmerkungen der Lehrperson und vor einer etwaigen fachlichen Ergänzung herangezogen. In Inhaltsbereich 1 sind vier, in Inhaltsbereich 2 sind drei (WiSe 22/23, SoSe 23) bzw. zwei (SoSe 22) Fragestellungen gestellt worden. Das ergibt insgesamt 167 Dokumentationen von Bearbeitungen solcher Fragestellungen. Je eine solche Dokumentation wird im Folgenden als *Fall* bezeichnet. Pro Student*in sind das bis zu sieben Fälle. Ein*e Student*in und die jeweils zugehörigen sieben oder weniger Fälle zusammengenommen werden fortan als *Proband* bezeichnet.

Es folgen nun die Ergebnisse der einzelnen qualitativen Inhaltsanalysen. Es wird mit der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse begonnen, da diese auch als Grundlage der anderen beiden verwendet wird.

6.2. Inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse

Bei dieser Inhaltsanalyse sind insgesamt 2699 Segmente codiert worden. Es ist dabei ein Kategoriensystem aus drei Hauptkategorien entstanden, die in 30 Subkategorien ausdifferenziert werden konnten. Die Subkategorien sind innerhalb der Hauptkategorien noch zu insgesamt acht Subkategoriegruppen zusammengefasst worden (siehe Abbildung 6.1).

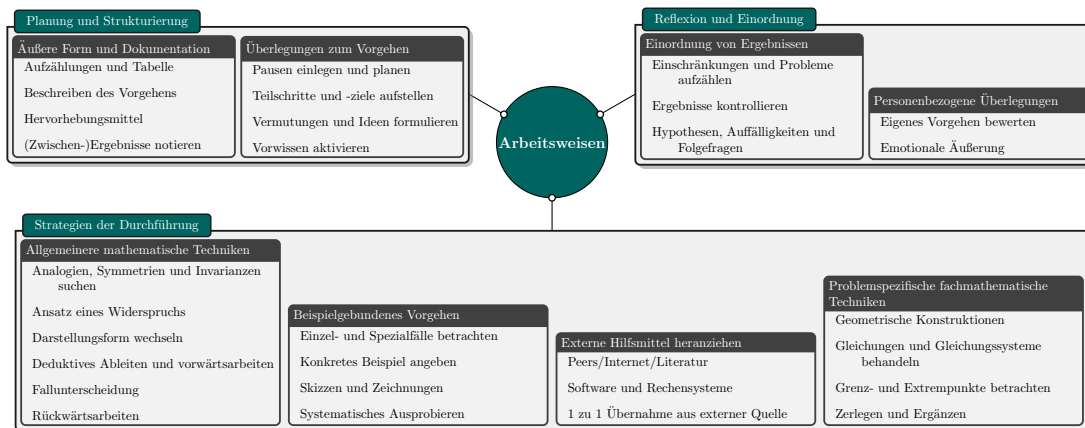


Abb. 6.1.: Übersicht über das entstandene Kategoriensystem der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse.

Hauptkategorien

Es sind die folgenden drei Hauptkategorien entstanden: *Planung und Strukturierung*, *Strategien der Durchführung* und *Reflexion und Einordnung*. Es wurde dabei unterschieden, ob ein Segment der Dokumentation einen Schritt vor der tatsächlichen Problembewältigung, einen Schritt zur konkreten Problembewältigung oder einen Schritt nach der durchgeführten Problembewältigung beschreibt. Für eine detailliertere Beschreibung der Kategorien – der Hauptkategorien sowie insbesondere der anschließend vorgestellten Subkategorien – wird an dieser Stelle auf den in Anhang C.1 aufgeführten Codierleitfaden für die inhaltlich-strukturierende qualitative Inhaltsanalyse verwiesen.

Von den insgesamt 2699 codierten Segmenten wurden 853 Segmente mit der Hauptkategorie *Planung und Strukturierung*, 1382 Segmente mit der Hauptkategorie *Strategien der Durchführung* und 464 Segmente mit der Hauptkategorie *Reflexion und Einordnung* codiert. In Abbildung 6.2 sind die Anzahlen codierter Segmente pro Hauptkategorie dargestellt. Tabelle 6.3 zeigt zusätzlich die Aufteilung der codierten Segmente auf die einzelnen Probanden. In den Visualisierungen sind die Probanden mit #xy benannt. Die dadurch entstandene Reihenfolge ist nicht gänzlich zufällig. Proband #01 bis #08 stellen die acht Probanden aus dem ersten Semester (SoSe 22), #09 bis #21 die 13 Probanden aus dem zweiten Semester (WiSe 22/23) und #22 bis #25 die vier Probanden aus dem dritten Semester (SoSe 23) dar. Innerhalb der Semester ist die Reihenfolge der Nummerierung zufällig gewählt, wodurch kein Rückschluss von der Bezeichnung auf die Identität des Probanden möglich ist. Aus Gründen der Anschaulichkeit wurde jedem Probanden eine Farbe zugeordnet, die im weiteren Verlauf der Arbeit gleichbleibend verwendet wird. Sind in zwei verschiedenen Grafiken also Daten zu einzelnen Probanden in einer gleichen Farbe markiert, dann gehören diese auch zum selben Probanden.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

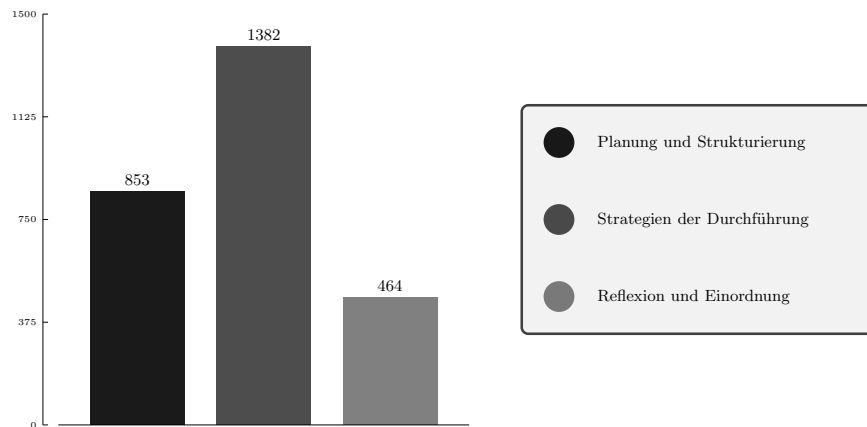


Abb. 6.2.: Anzahl codierter Segmente nach Hauptkategorien.

Kategorie	#01	#02	#03	#04	#05	#06	#07	#08	#09	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	#21	#22	#23	#24	#25	
Arbeitsweisen	104	60	85	72	82	119	110	79	152	157	112	65	173	68	123	32	87	76	72	93	47	250	200	133	148	2699
Planung und Strukturierung	28	11	23	18	18	24	34	17	58	48	47	9	71	23	48	11	22	23	26	25	16	99	75	46	33	853
Strategien der Durchführung	45	44	56	53	54	81	63	46	70	70	44	34	60	34	50	14	43	47	35	42	20	108	96	69	98	1382
Reflexion und Einordnung	31	5	6	1	10	14	13	16	18	39	21	22	42	11	25	7	22	6	11	26	11	43	29	18	17	464
	104	60	85	72	82	119	110	79	152	157	112	65	173	68	123	32	87	76	72	93	47	250	200	133	148	

Tab. 6.3.: Anzahl codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Proband.

Subkategorien und Subkategoriegruppen

Es wurden insgesamt 30 Subkategorien codiert. Dabei entfallen acht Subkategorien auf die erste Hauptkategorie *Planung und Strukturierung*, 17 Subkategorien auf die zweite Hauptkategorie *Strategien der Durchführung* und die restlichen fünf Subkategorien auf die dritte Hauptkategorie *Reflexion und Einordnung*. Die acht Subkategorien der ersten Hauptkategorie wurden anschließend in zwei Subkategoriegruppen zu je vier Subkategorien aufgeteilt. Die 17 Subkategorien der zweiten Hauptkategorie wurden in vier Subkategoriegruppen zu sechs bzw. zweimal zu vier bzw. zu drei Subkategorien aufgeteilt. Die fünf Subkategorien der dritten Hauptkategorie wurden in zwei Subkategoriegruppen zu drei bzw. zu zwei Subkategorien aufgeteilt (siehe Abbildung 6.1). Die Anzahlen codierter Segmente pro Subkategoriegruppe bzw. pro Subkategorie sind in den Abbildungen 6.4 und 6.5 dargestellt. Zusätzlich sind in Tabelle 6.6 die Anzahlen codierter Segmente für Hauptkategorien, Subkategoriegruppen und Subkategorien pro Proband zusammengefasst. Eine alternative Darstellung der Anzahlen codierter Segmente nach Subkategorien ist mit einer Unterteilung in die Subkategoriegruppen jeweils einer Hauptkategorie in Anhang B in den Abbildungen B.1 bis B.3 auf den Seiten 313 bis 315 zu finden.

6.2. Inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse

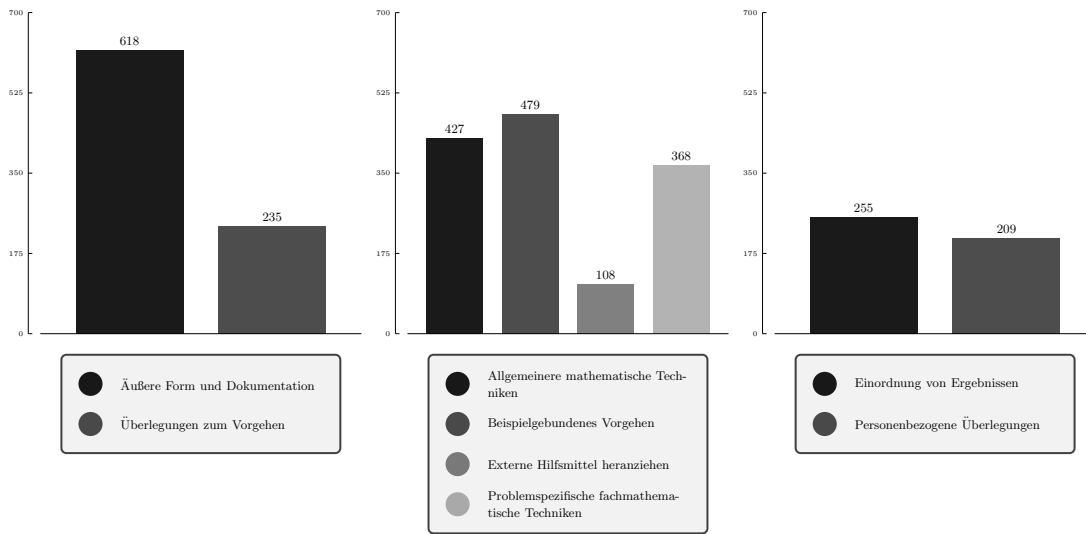


Abb. 6.4.: Anzahl codierter Segmente nach Subkategoriegruppen.

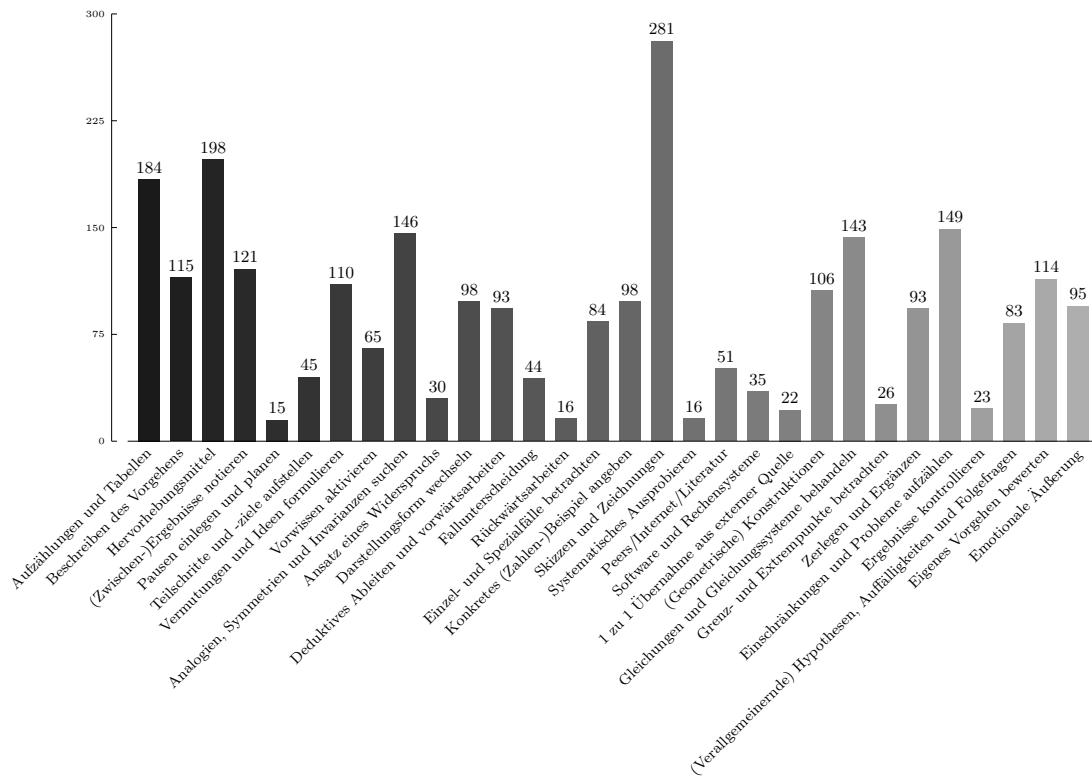


Abb. 6.5.: Anzahl codierter Segmente nach Subkategorien.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

Kategorie	#01	#02	#03	#04	#05	#06	#07	#08	#09	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	#21	#22	#23	#24	#25	
Arbeitsweisen	104	60	85	72	82	119	110	79	152	157	112	65	173	68	123	32	87	76	72	93	47	250	200	133	148	2699
Planung und Strukturierung	28	11	23	18	18	24	34	17	58	48	47	9	71	23	48	11	22	23	26	25	16	99	75	46	33	853
Äußere Form und Dokumentation	16	9	22	15	16	20	25	13	48	38	35	6	50	18	42	4	17	13	18	18	12	69	47	30	17	618
Aufzählungen und Tabellen	6	5	7	8	5	6	5	4	18	12	7	3	8	10	7	3	8	5	5	4	2	14	20	6	6	184
Beschreiben des Vorgehens	4	2	6	2	4	0	7	3	6	7	6	0	7	0	10	1	3	4	2	5	1	14	13	3	5	115
Hervorhebungsmittel	0	0	0	0	0	11	9	4	20	16	16	0	26	7	20	0	1	1	5	5	2	32	7	12	4	198
(Zwischen-)Ergebnisse notieren	6	2	9	5	7	3	4	2	4	3	6	3	9	1	5	0	5	3	6	4	7	9	7	9	2	121
Überlegungen zum Vorgehen	12	2	1	3	2	4	9	4	10	10	12	3	21	5	6	7	5	10	8	7	4	30	28	16	16	235
Pausen einlegen und planen	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	1	2	15
Teilschritte und -ziele aufstellen	6	1	0	1	1	1	1	1	3	3	3	0	0	1	0	0	0	3	0	2	0	2	6	5	5	45
Vermutungen und Ideen formulieren	3	0	1	0	0	3	3	1	5	6	6	2	10	3	6	5	5	6	7	2	2	14	8	7	5	110
Vorwissen aktivieren	3	1	0	2	1	0	5	2	2	1	3	1	8	1	0	2	0	1	1	3	2	9	10	3	4	65
Strategien der Durchführung	45	44	56	53	54	81	63	46	76	70	44	34	60	34	50	14	43	47	35	42	20	108	96	69	98	1382
Allgemeinere mathematische Techniken	16	12	16	13	17	21	12	11	17	14	9	11	19	9	18	5	14	16	12	16	8	42	37	30	32	427
Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen	4	3	6	3	5	5	5	3	0	4	3	3	8	5	6	3	2	5	6	6	5	14	21	13	8	146
Ansatz eines Widerspruchs	0	0	0	1	0	1	0	1	2	6	1	0	0	0	1	0	1	2	1	2	0	4	3	3	1	30
Darstellungsform wechseln	3	4	1	1	2	9	1	0	5	2	3	4	7	1	7	0	5	4	3	3	1	9	5	2	16	98
Deduktives Ableiten und vorwärtsarbeiten	7	2	8	4	9	4	2	5	7	1	1	2	3	3	1	1	3	1	2	2	2	4	2	11	6	93
Fallunterscheidung	1	0	1	4	0	2	2	2	2	1	0	2	1	0	1	1	3	1	0	3	0	9	6	1	1	44
Rückwärtsarbeiten	1	3	0	0	1	0	2	0	1	0	1	0	0	0	2	0	0	3	0	0	0	2	0	0	0	16
Beispielgebundenes Vorgehen	11	12	19	10	12	41	28	18	37	31	21	8	20	11	12	2	9	14	9	9	7	35	31	25	47	479
Einzel- und Spezialfälle betrachten	2	2	2	1	3	5	1	3	11	9	3	1	1	3	2	0	4	6	4	2	3	4	6	4	2	84
Konkretes (Zahlen-)Beispiel angeben	6	0	9	5	5	15	9	5	7	3	1	2	3	2	0	2	0	2	0	1	1	2	3	5	10	98
Skizzen und Zeichnungen	3	10	8	4	4	20	18	9	18	16	14	5	16	6	9	0	5	5	5	6	3	27	20	15	35	281
Systematisches Ausprobieren	0	0	0	0	0	1	0	1	1	3	3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2	2	1	0	16
Externe Hilfsmittel heranziehen	7	9	3	15	4	1	2	3	0	5	1	3	4	5	2	1	2	6	1	5	0	15	11	1	2	108
Peers/Internet/Literatur	3	4	2	6	1	1	1	0	0	1	0	2	3	1	1	1	1	1	0	4	0	6	10	1	1	51
Software und Rechensysteme	4	2	1	5	3	0	1	3	0	4	1	0	1	2	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	35
1 zu 1 Übernahme aus externer Quelle	0	3	0	4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	4	0	0	0	8	0	0	0	22
Problemspezifische fachmathematische Techniken	11	11	18	15	21	18	21	14	22	20	13	12	17	9	18	6	18	11	13	12	5	16	17	13	17	368
(Geometrische) Konstruktionen	4	3	12	10	10	8	9	5	7	8	4	2	1	1	4	2	3	1	1	1	2	4	1	2	1	106
Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln	4	4	4	4	6	6	10	3	6	8	4	5	8	4	6	3	7	4	7	5	1	9	11	4	10	143
Grenz- und Extrempunkte betrachten	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2	2	2	1	2	0	0	3	1	1	1	0	1	2	4	1	26
Zerlegen und Ergänzen	3	4	2	1	5	3	2	6	7	2	3	3	7	2	8	1	5	5	4	5	2	2	3	3	5	93
Reflexion und Einordnung	31	5	6	1	10	14	13	16	18	39	21	22	42	11	25	7	22	6	11	26	11	43	29	18	17	464
Einordnung von Ergebnissen	9	5	6	1	8	10	11	9	9	18	11	14	21	8	11	5	12	4	9	6	4	26	18	7	13	255
Einschränkungen und Probleme aufzählen	8	3	4	0	4	2	4	5	7	12	8	6	16	3	6	4	9	2	5	4	3	10	10	3	11	149
Ergebnisse kontrollieren	0	0	0	0	1	4	1	0	0	0	2	0	2	0	2	0	1	0	0	0	0	6	1	3	0	23
(Verallgemeinernde) Hypothesen, Auffälligkeiten und Folgefragen	1	2	2	1	3	4	6	4	2	6	1	8	3	5	3	1	2	2	4	2	1	10	7	1	2	83
Personenbezogene Überlegungen	22	0	0	0	2	4	2	7	9	21	10	8	21	3	14	2	10	2	2	20	7	17	11	11	4	209
Eigenes Vorgehen bewerten	12	0	0	0	2	2	2	7	7	8	9	7	9	1	9	1	7	1	2	2	2	8	8	5	3	114
Emotionale Äußerung	10	0	0	0	0	2	0	0	2	13	1	1	12	2	5	1	3	1	0	18	5	9	3	6	1	95
	104	60	85	72	82	119	110	79	152	157	112	65	173	68	123	32	87	76	72	93	47	250	200	133	148	

Tab. 6.6.: Anzahl codierter Segmente nach Hauptkategorien, Subkategoriegruppen und Subkategorien pro Proband.

Diskussion

Das entstandene Kategoriensystem spiegelt die theoretischen Modelle zum Problemlösen (siehe Abschnitt 3.1) sehr gut wider. Die drei Hauptkategorien entsprechen ziemlich genau drei Phasen des Problemlösemodells von PÓLYA (siehe Abbildung 6.7).

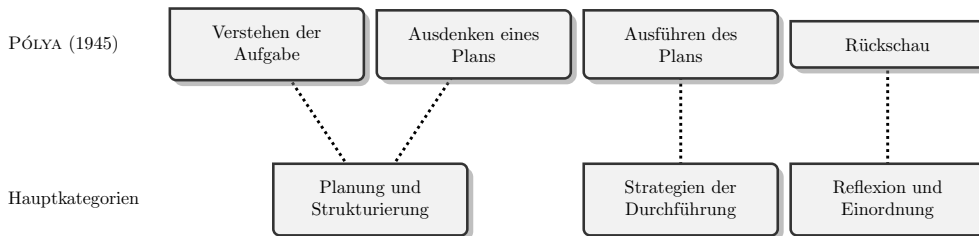


Abb. 6.7.: Vergleich der Hauptkategorien mit den Phasen des Problemlösens nach PÓLYA.

Die einzelnen Subkategorien bzw. Subkategoriegruppen lassen sich überwiegend in allen Klassifizierungen von Problemlösestrategien wiederfinden. In den Tabellen 6.8 und 6.9 ist jeweils eine Gegenüberstellung der Subkategorien und der Taxonomie von Problemlösestrategien nach BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) (2011) bzw. nach STILLER et al. (2021) und SCHWARZ (2018) gegeben.

BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) (2011)	Subkategorien
Informative Figuren Tabellen Wissensspeicher Lösungsgraphen Gleichungen	Skizzen und Zeichnungen; Hervorhebungsmittel Aufzählungen und Tabellen Externe Hilfsmittel heranziehen; Vorwissen aktivieren Beschreiben des Vorgehens; Teilschritte und -ziele aufzählen Darstellungsform wechseln; Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln
Systematisches Ausprobieren Vorwärtsarbeiten Rückwärtsarbeiten Suchen von Analogien Rückführungsprinzip	Systematisches Ausprobieren Deduktives Ableiten und Vorwärtsarbeiten Rückwärtsarbeiten Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen Vermutungen und Ideen formulieren; Teilschritte und -ziele aufstellen
Zerlegen und Ergänzen Prinzip der Fallunterscheidung Invarianzprinzip Extremalprinzip Symmetrieprinzip Transformationsprinzip	Zerlegen und Ergänzen; Teilschritte und -ziele aufstellen Fallunterscheidung Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen Grenz- und Extrempunkte betrachten Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen Darstellungsform wechseln

Tab. 6.8.: Gegenüberstellung der Subkategorien bzw. Subkategoriegruppen und den Problemlösestrategien nach BRUDER und BAUER (ehem. COLLET).

Bei den Subkategorien, die der ersten Hauptkategorie *Planung und Strukturierung* oder der dritten Hauptkategorie *Reflexion und Einordnung* zugeordnet wurden, ist eine Unterteilung in Subkategoriegruppen gut möglich. Bei den Subkategoriegruppen innerhalb der zweiten Hauptkategorie *Strategien der Durchführung* fallen hingegen insbesondere die

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

STILLER et al. (2021)	Subkategorien
Anfertigen von Tabellen Erstellen grafischer Repräsentationsformen	Aufzählungen und Tabellen Aufzählungen und Tabellen; Hervorhebungsmittel; Skizzen und Zeichnungen; Darstellungsform wechseln
Aufstellen von Gleichungen	Darstellungsform wechseln; Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln
De- und Rekonstruktion	Fallunterscheidung; Teilschritte und -ziele aufzählen
Heurismus der Affinität	Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen; Vermutungen und Ideen formulieren; Teilschritte und -ziele aufstellen
Heurismus der Strukturnutzung	Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen
Systematisches Probieren	Systematisches Ausprobieren
Vorwärtsarbeiten	Deduktives Ableiten und Vorwärtsarbeiten
Rückwärtsarbeiten	Rückwärtsarbeiten
SCHWARZ (2018)	
Variation der Darstellung	Darstellungsform wechseln
Variation der Problemstellung	Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen; Teilschritte und -ziele aufzählen; Einzel- und Spezialfälle betrachten
Induktion	Einzel- und Spezialfälle betrachten; Grenz- und Extrempunkte betrachten; (Verallgemeinernde) Hypothesen, Auffälligkeiten und Folgefragen
Reduktion	Rückwärtsarbeiten; Grenz- und Extrempunkte betrachten

Tab. 6.9.: Gegenüberstellung der Subkategorien bzw. Subkategoriegruppen und den Problemlösestrategien nach STILLER et al. und SCHWARZ.

folgenden zwei Gruppen besonders auf: *Allgemeinere mathematische Techniken* und *problemspezifische fachmathematische Techniken*. Es ist hier anzumerken, dass eine genaue Unterscheidung dieser Klassifikation nicht immer möglich ist. Hier zeigt sich weniger eine inhaltliche Überlegung als eine methodische Entscheidung hinsichtlich der Anwendbarkeit des Kategoriensystems auf das gegebene Material. Dieser Effekt lässt sich an der Subkategorie *Zerlegen und Ergänzen* gut veranschaulichen. Innerhalb der Taxonomien von Problemlösestrategien (siehe Abschnitt 3.1) ist das Zerlegen (und Ergänzen) von Problemen in Teilprobleme eng mit einem Analogieschluss, der Suche nach Symmetrien und einem Zurückführen auf Bekanntes verknüpft. Dahingehend würde man innerhalb der Mathematik beim Zerlegen und Ergänzen von einer allgemeinen Technik sprechen, die unabhängig vom Fachgebiet Anwendung findet. Im vorliegenden Material geschieht das Zerlegen und das Ergänzen jedoch ausschließlich in einem geometrischen Kontext, wobei geometrische Figuren (teilweise auch in algebraischer Schreibweise) zerlegt und um andere geometrische Figuren (ebenfalls teilweise in algebraischer Schreibweise) ergänzt werden. In diesem Sinne sind diese konkreten Anwendungen eher einer problemspezifischen Technik zuzuordnen, statt als allgemeinere Strategie zu verstehen.

Bei den Anzahlen codierter Segmente der einzelnen Subkategorien in Abbildung 6.5 fallen einige Subkategorien besonders auf. Zunächst zeigt sich eine generell hohe Anzahl codierter Segmente in den ersten vier Subkategorien. Diese sind alle in der Subkategorie-

gruppe *Äußere Form und Dokumentation* zusammengefasst. Diese hohen Anzahlen führen zu einem überdurchschnittlichen Ausschlag dieser Subkategoriegruppe in Abbildung 6.4. Damit ist die Subkategoriegruppe *Äußere Form und Dokumentation* maßgeblich für den erhöhten Anteil mit der ersten Hauptkategorie *Planung und Strukturierung* codierten Segmente in Abbildung 6.2 verantwortlich. Die zweite Subkategoriegruppe *Überlegungen zum Vorgehen* der ersten Hauptkategorie ist hingegen auf ähnlichem Niveau wie die beiden Subkategoriegruppen *Einordnung von Ergebnissen* und *Personenbezogene Überlegungen* der dritten Hauptkategorie *Reflexion und Einordnung* (siehe Abbildung 6.4). Insgesamt scheinen die Student*innen also entgegen eines ersten Eindrucks aus Abbildung 6.2 nicht mehr planende Schritte als reflexive Gedanken anzusetzen. Der Ausschlag in der ersten Hauptkategorie ist vielmehr darauf zurückzuführen, dass die Student*innen sich generell um eine saubere und anschauliche Dokumentation bemühen.

Innerhalb der zweiten Subkategoriegruppe *Überlegungen zum Vorgehen* der ersten Hauptkategorie fällt die Arbeitsweise *Vermutungen und Ideen formulieren* durch eine näherungsweise erhöhte Anzahl codierter Segmente auf. Hier ist aber fraglich, inwiefern diese Arbeitsweise tatsächlich bewusst eingesetzt wurde oder eher unwillkürlich nebenher auftritt. Für eine tatsächlich metakognitive Steuerung des Problemlöseprozesses wäre eine bewusste Verwendung wünschenswert.

Der Großteil der Bearbeitungen behandelt unverkennbar Schritte zur konkreten Problembewältigung. In dieser zweiten Hauptkategorie *Strategien der Durchführung* zeigen vor allem drei Subkategorien eine erhöhte Anzahl codierter Segmente: *Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen*, *Skizzen und Zeichnungen* und *Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln*, wobei letztere den deutlich extremeren Ausschlag aufweist (siehe Abbildung 6.5). Gerade die Verwendung dieser zweiten Strategie *Skizzen und Zeichnungen* ist mit einem erhöhten Interesse von Studierenden nach bildlichen und anschaulichen Darstellungen von Problemen zu erklären. Ohne diese fällt den Studierenden die Bearbeitung von (abstrakten) mathematischen Aufgaben oftmals schwer. Die hohe Anzahl von Behandlungen von Gleichungen ist bei den algebraischen Problemstellungen ebenfalls nicht verwunderlich. Der Fokus auf das Suchen von Analogien und Symmetrien kann als grundlegendes Verständnis der Studierenden für die logische Struktur der Mathematik interpretiert werden und ist damit positiv zu bewerten.

Innerhalb der dritten Hauptkategorie *Reflexion und Einordnung* ist insbesondere die Subkategorie *Einschränkungen und Probleme aufzählen* mit einer erhöhten Anzahl codierter Segmente auffällig. Dies suggeriert zunächst ein erhöhtes Maß an reflexiven Gedanken bei den Student*innen hinsichtlich einer Allgemeingültigkeit der Lösungen.

Zusätzlich zeigen einige Subkategorien deutlich niedrigere Anzahlen codierter Segmente als der Rest. Innerhalb der ersten Hauptkategorie *Planung und Strukturierung* zeigt sich diesbezüglich die Subkategorie *Pausen einlegen und planen*. Die niedrige Anzahl lässt

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

sich einerseits dahingehend interpretieren, dass die Student*innen Pausen einfach nicht dokumentieren, weil Pausen von den Student*innen möglicherweise gar nicht als Teil des Bearbeitungsprozesses wahrgenommen werden. Andererseits könnte angenommen werden, dass die Student*innen die Bearbeitungen überwiegend am Stück ohne größere Pausen durchgeführt haben.

Innerhalb der zweiten Hauptkategorie *Strategien der Durchführung* fallen die Subkategorien *Ansatz eines Widerspruchs*, *Rückwärtsarbeiten*, *Systematisches Ausprobieren*, *1 zu 1 Übernahme aus externer Quelle* und *Grenz- und Extrempunkte betrachten* mit niedrigen Anzahlen codierter Segmente auf.

Die Strategien um einen Widerspruch und das Rückwärtsarbeiten sind in Abschnitt 3.1 bereits als kognitiv anspruchsvolle Techniken beschrieben worden, weswegen eine verminderte Verwendung nicht überrascht.

Das systematische Ausprobieren ist möglicherweise aufgrund der strengeren Unterscheidung zwischen systematischem und willkürlichem Ausprobieren weniger häufig codiert worden. Man würde Studierenden nämlich zunächst durchaus ein generelles Vorgehen attestieren, das am Ausprobieren orientiert ist, was sich auch in der erhöhten Summe der Anzahlen codierter Segmente mit den beiden Subkategorien *Einzel- und Spezialfälle betrachten* und *Konkretes (Zahlen-)Beispiel angeben* niederschlägt.

Die niedrige Anzahl an Fällen einer unveränderten Übernahme von Inhalten aus externen Quellen ist grundsätzlich als positiv einzuordnen. Betrachtet man jedoch insgesamt die komplette zugehörige Subkategoriegruppe *externe Hilfsmittel heranziehen*, in der zusätzlich die beiden Subkategorien *Peers/Internet/Literatur* und *Software und Rechensysteme* mit ebenfalls eher niedrigen Anzahlen codierter Segmente untergebracht sind, so zeigt sich, dass die Zuhilfenahme von externen Quellen prinzipiell selten in Anspruch genommen wurde. Dies lässt sich auf zwei Arten erklären: Zum einen können sich die Student*innen ernsthaft auf eine eigenständige Bearbeitung eingelassen haben, dann haben sie dabei aber gleichzeitig auf legitime Hilfsmittel wie einen kollegialen Austausch oder auch die reflektierte Verwendung von sonstigen externen Quellen verzichtet. Zum anderen können diese Arbeitsweisen auch nicht ordentlich dokumentiert worden sein. Die zweite Erklärung wird dahingehend plausibel, als dass das gemeinsame Arbeiten und das Hinzuziehen externer Hilfsmittel in sonstigen Veranstaltungen oftmals eher negativ konnotiert wird. Vor allem auch, weil die Studierenden dabei möglicherweise selbst den Eindruck haben, Dinge nur abzuschreiben.

Die niedrige Anzahl der Betrachtung von Grenz- und Extrempunkten ist mit der algebraischen Natur der Aufgabenstellungen erklärbar. Diese Strategie ist stattdessen einem eher analytischen Vorgehen zuzuordnen und damit nicht unbedingt typisch für algebraische Probleme.

Innerhalb der dritten Hauptkategorie *Reflexion und Einordnung* fällt insbesondere die Subkategorie *Ergebnisse kontrollieren* mit einer verminderten Anzahl codierter Segmente auf. Vor dem Hintergrund, dass es sich bei den Student*innen um Lehramtsstudierende handelt, ist diese Auffälligkeit noch ausgeprägter. Gerade in der Schule wird die Kontrolle von Ergebnissen, eine Prüfung von Plausibilität oder auch die Formulierung eines Antwortsatzes in besonderem Maße eingefordert, was man zusammen im weitesten Sinn auch als Reflexion verstehen kann. Die eigene Bereitschaft zu derartigen Arbeitsschritten scheint bei den Student*innen aber selbst nicht wirklich vorhanden zu sein.

Betrachtet man die codierten Segmente aufgeteilt nach den drei Semestern, dann entfallen 711 codierte Segmente auf das erste Semester (SoSe 22), 1257 codierte Segmente auf das zweite Semester (WiSe 22/23) und 731 codierte Segmente auf das dritte Semester (SoSe 23). Bei respektive 8 bzw. 13 bzw. 4 Student*innen entspricht das im Schnitt 88,9 bzw. 96,7 bzw. 182,8 codierten Segmenten pro Student*in. Die absoluten bzw. relativen Anzahlen pro Student*in aufgeteilt auf die drei Hauptkategorien sind in Abbildung 6.10 bzw. 6.11 dargestellt.

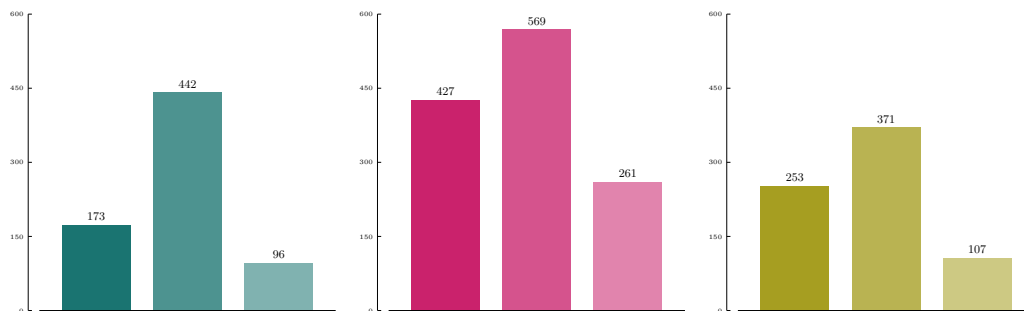


Abb. 6.10.: Absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Semester (türkis: SoSe 22, rot: WiSe 22/23, gelb: SoSe 23).

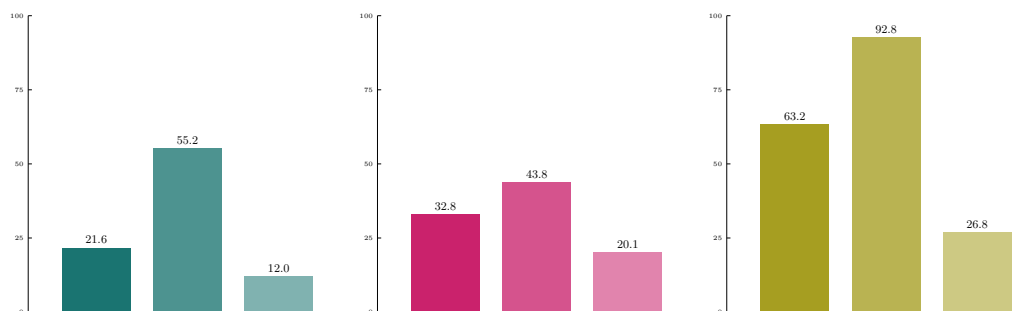


Abb. 6.11.: Relative Anzahlen codierter Segmente pro Student*in nach Hauptkategorien pro Semester (türkis: SoSe 22, rot: WiSe 22/23, gelb: SoSe 23).

Die deutlich höhere Anzahl codierter Segmente pro Student*in im dritten Semester (SoSe 23) geht auf eine auffällig ausgeprägtere Bereitschaft zur ausführlichen Aufgaben-

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

bearbeitung zurück. Die vier Student*innen dieses Semesters haben sehr umfangreiche Dokumentationen von relativ breit angelegten Bearbeitungsansätzen erstellt, was zu einer höheren Anzahl an codierten Segmenten geführt hat. Es ist hier direkt anzumerken, dass daraus keine fachliche Bewertung abgeleitet werden kann. Ob eine Arbeitsweise an entsprechender Stelle zielführend oder sinnvoll ist oder fehlerfrei durchgeführt wurde, wird im Kategoriensystem und bei der Codierung nicht berücksichtigt. Damit ist eine hohe Anzahl codierter Segmente kein hinreichendes Kriterium für eine gute Bearbeitung. Umgekehrt ist eine sehr niedrige Anzahl codierter Segmente aber sehr wohl ein Indiz für eine schwache Bearbeitung, da kaum bis keine Ansätze auch zu keinen oder wenigen fachlichen Erkenntnissen führen. Die Anzahl codierter Segmente pro Student*in der ersten beiden Semester (SoSe 22, WiSe 22/23) sind von ähnlicher Größenordnung. Bei der Aufteilung dieser codierten Segmente nach Hauptkategorien unterscheiden sich diese beiden Semester jedoch augenscheinlich. Im ersten Semester (SoSe 22) fällt der Anteil der mit der ersten und dritten Hauptkategorie (*Planung und Strukturierung* bzw. *Reflexion und Einordnung*) codierten Segmente deutlich geringer aus. Die Student*innen haben sich hier noch mehr auf die reine, konkrete Problembewältigung beschränkt. In Abbildung 6.12 sind die Daten aus Abbildung 6.10 erneut dargestellt, wobei jedes einzelne der drei Diagramme auf den entsprechend höchsten Wert skaliert wurde. Dadurch gehen die absoluten Anzahlen codierter Segmente verloren, aber die Beziehung zwischen den einzelnen Hauptkategorien wird pro Diagramm hervorgehoben. Es lässt sich damit eher auf die Art der Bearbeitungen schließen, während der Umfang der Bearbeitungen ausgeblendet wird.

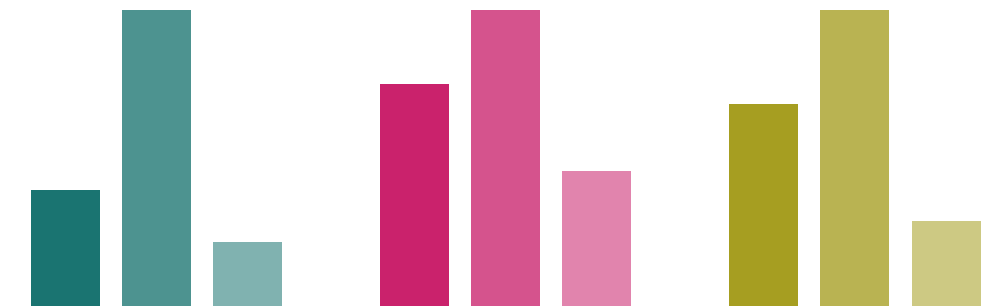


Abb. 6.12.: Skalierte absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Semester (türkis: SoSe 22, rot: WiSe 22/23, gelb: SoSe 23).

Es zeigt sich, dass die Student*innen der letzten beiden Semester (WiSe 22/23, SoSe 23) eine sehr ähnliche Verteilung der codierten Segmente nach Hauptkategorien aufweisen. Diese Verteilung gibt auch den Trend der gesamten Verteilung aus Abbildung 6.2 vor. Demnach konzentrieren sich die Student*innen in den Bearbeitungen auf die konkrete Problembehandlung (zweite Hauptkategorie: *Strategien der Durchführung*), planen und strukturieren ihr Vorgehen teilweise (erste Hauptkategorie: *Planung und Strukturierung*).

runge) und reflektieren ihre Ergebnisse nur selten (dritte Hauptkategorie: *Reflexion und Einordnung*). Die Student*innen des ersten Semesters (SoSe 22) arbeiten tendenziell ähnlich, jedoch fällt der Anteil der mit der ersten und dritten Hauptkategorie codierten Segmente noch geringer aus. Die Beziehung dieser beiden Hauptkategorien untereinander folgt den anderen beiden Semestern. Demnach planen, strukturieren und reflektieren diese Probanden ihr Vorgehen noch weniger, verwenden aber weiterhin mehr Zeit für planende und strukturierende Schritte als für reflexive Gedanken. Insgesamt ähneln sich also die letzten beiden Semester (WiSe 22/23, SoSe 23) hinsichtlich der Fokussierung der Bearbeitung, während sich die ersten beiden Semester (SoSe 22, WiSe 22/23) hinsichtlich des Umfangs der Bearbeitung ähneln. Zusammenfassend entsteht hier der Eindruck, dass die gemeinsame Betrachtung von mehreren Student*innen möglicherweise nur ungenaue Interpretationen zulässt. Schon zwischen den Semestern lassen sich bereits auf Ebene der Hauptkategorien Unterschiede erkennen. Dies deckt sich auch mit der subjektiven Wahrnehmung, dass die Student*innen von Semester zu Semester und auch innerhalb eines Semesters sehr heterogene Arbeitsweisen und fachliche Niveaus zeigen.

Zunächst wird noch eine Betrachtung der codierten Segmente nach Hauptkategorien unter Berücksichtigung der Inhaltsbereiche vorgenommen. In Abbildung 6.13 sind die entsprechenden Anzahlen dargestellt. Die oberen beiden Diagramme zeigen die absoluten Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Inhaltsbereich. Die mittleren beiden Diagramme rechnen diese Anzahlen auf einen Arbeitsauftrag herunter. Der erste Inhaltsbereich (*Zahlenbereiche*) umfasst vier Fragestellungen, der zweite Inhaltsbereich (*Quadratische Gleichungen in zwei Variablen*) lediglich drei bzw. zwei¹. Die unteren beiden Diagramme skalieren die absoluten Anzahlen getrennt jeweils auf den entsprechend höchsten Balken eines Diagramms. Auch hier gehen dabei die absoluten Anzahlen codierter Segmente verloren und es wird das Verhältnis der Hauptkategorien untereinander innerhalb eines Inhaltsbereichs hervorgehoben.

Von den insgesamt 2699 codierten Segmenten entfallen 1772 auf den ersten Inhaltsbereich und 927 auf den zweiten Inhaltsbereich. Pro Arbeitsauftrag entspricht das beim ersten Inhaltsbereich 443,0 codierten Segmenten und beim zweiten Inhaltsbereich 345,9 codierten Segmenten. Der verminderte Umfang der Dokumentationen beim zweiten Inhaltsbereich lässt sich mit einem fortgeschrittenen Semester erklären. Ab spätestens der Mitte der Behandlung dieses Inhaltsbereichs hat die Klausurvorbereitungsphase einen spürbaren Einfluss auf die Bearbeitungsdauer der Arbeitsaufträge durch die Student*innen. Eine Abnahme der Ausführlichkeit der Bearbeitungen ist hier nicht verwunderlich. Betrachtet man die skalierten Diagramme, so scheinen die beiden Inhalts-

¹Man beachte, dass im ersten Semester (SoSe 22) hier für die acht Student*innen nur je zwei statt drei Arbeitsaufträge gestellt wurden. Die Gewichtung folgt also gemäß $(8 \cdot 2 + 17 \cdot 3)/25 = 2,68$ durchschnittlichen Arbeitsaufträgen.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

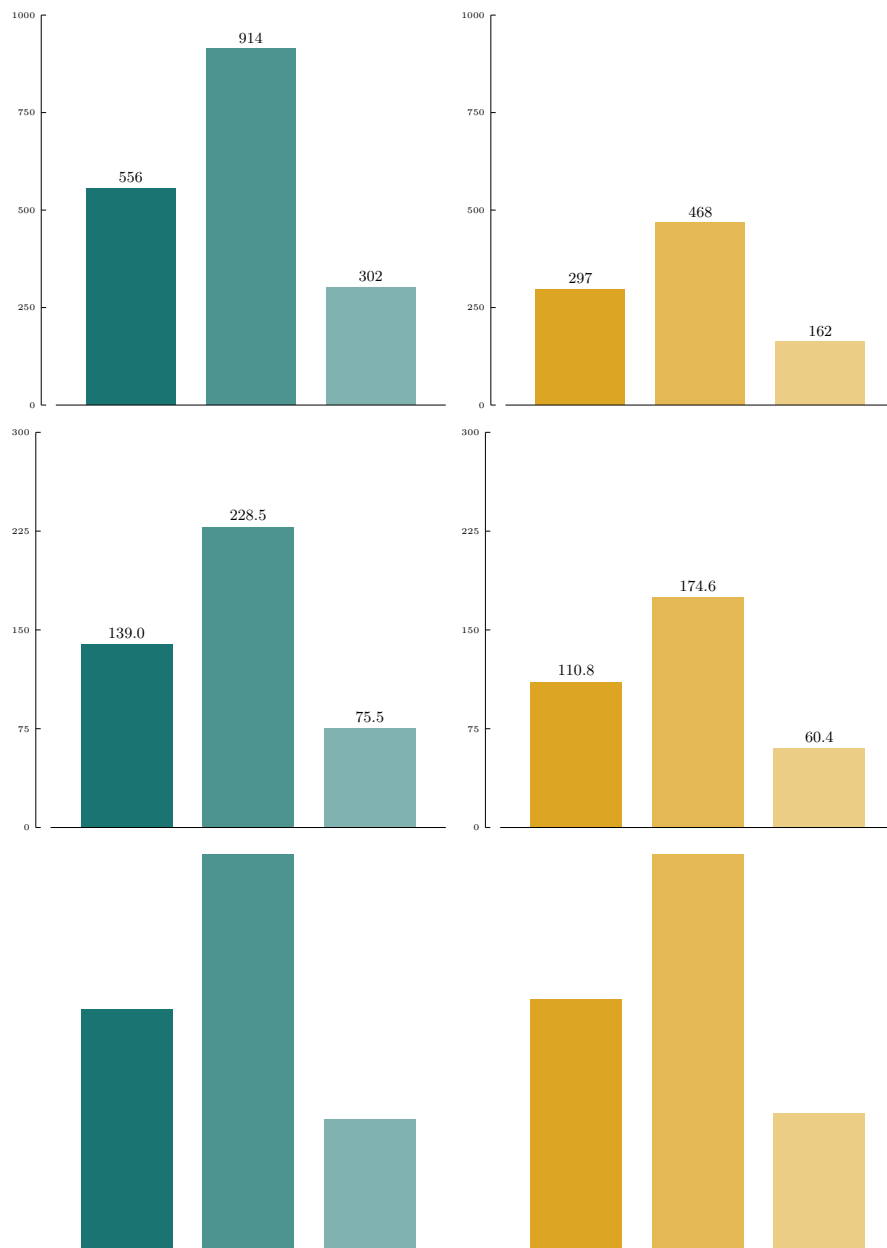


Abb. 6.13.: Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Inhaltsbereich (türkis: „Zahlenbereiche“, gelb: „Quadratische Gleichungen in zwei Variablen“). Es sind die absoluten Anzahlen (oben), pro Inhaltsbereich relativen Anzahlen (mitte) und skalierten Anzahlen (unten) dargestellt.

bereiche eine ähnliche Bearbeitungsart hervorzurufen. Eine weitere Unterscheidung nach Inhaltsbereichen wird aus diesem Grund nicht verfolgt.

Betrachtet man nun die codierten Segmente nach Hauptkategorien pro Studierenden, so ergeben sich die entsprechenden Anzahlen wie in Abbildung 6.14 dargestellt. Man erkennt, dass sich die Student*innen hinsichtlich der Gesamtanzahl codierter Segmente teilweise deutlich unterscheiden. Insbesondere fallen Student*innen auf, die sehr wenige codierte Segmente aufweisen², was auf eine nicht sonderlich umfangreiche Bearbeitung schließen lässt. In Abbildung 6.15 sind diese hervorgehoben dargestellt.

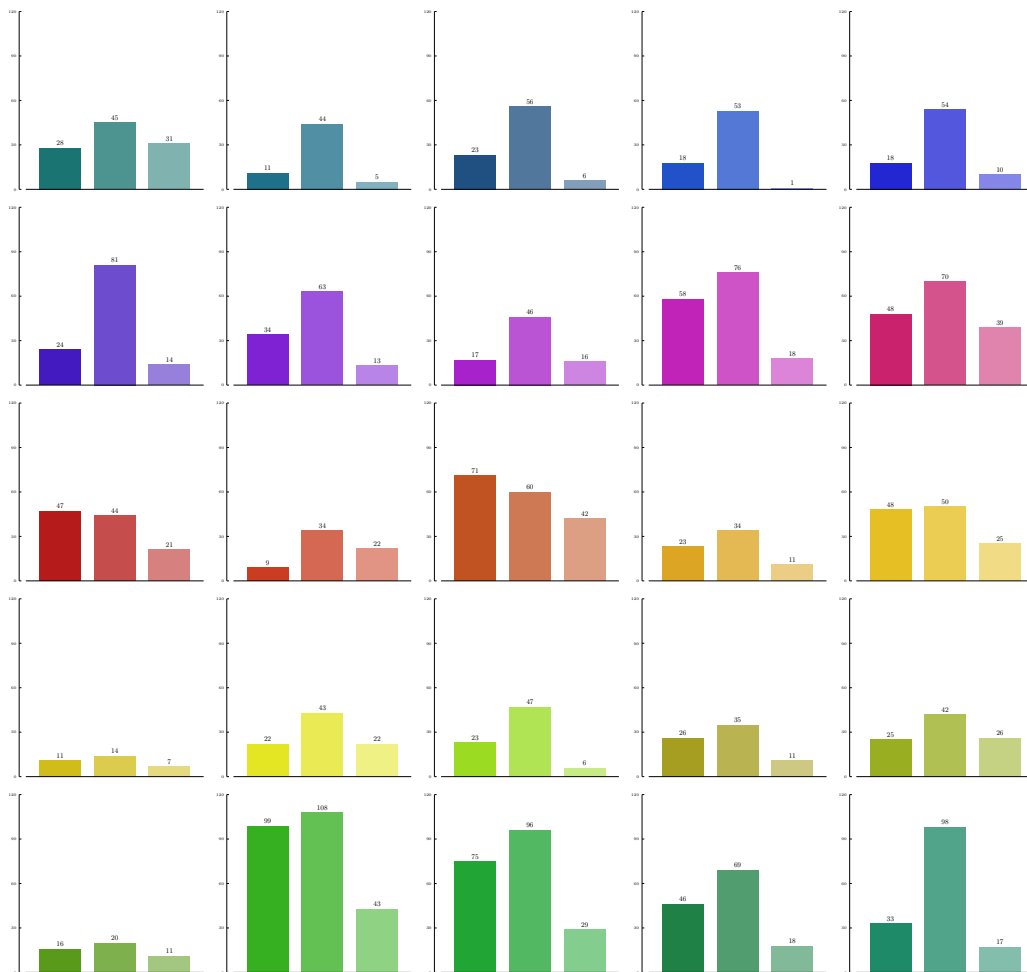


Abb. 6.14.: Absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Student*in.

Weiter lassen sich generell auch ähnliche Verteilungen der Hauptkategorien erkennen. Um gerade die Verhältnisse der Hauptkategorien untereinander innerhalb eine*r Student*in genauer betrachten zu können, wird in Abbildung 6.16 erneut eine skalierte

²#2, #8, #12, #14, #16, #17, #18, #19, #20, #21 (Die Nummerierung erfolgt zeilenweise von links oben nach rechts unten).

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

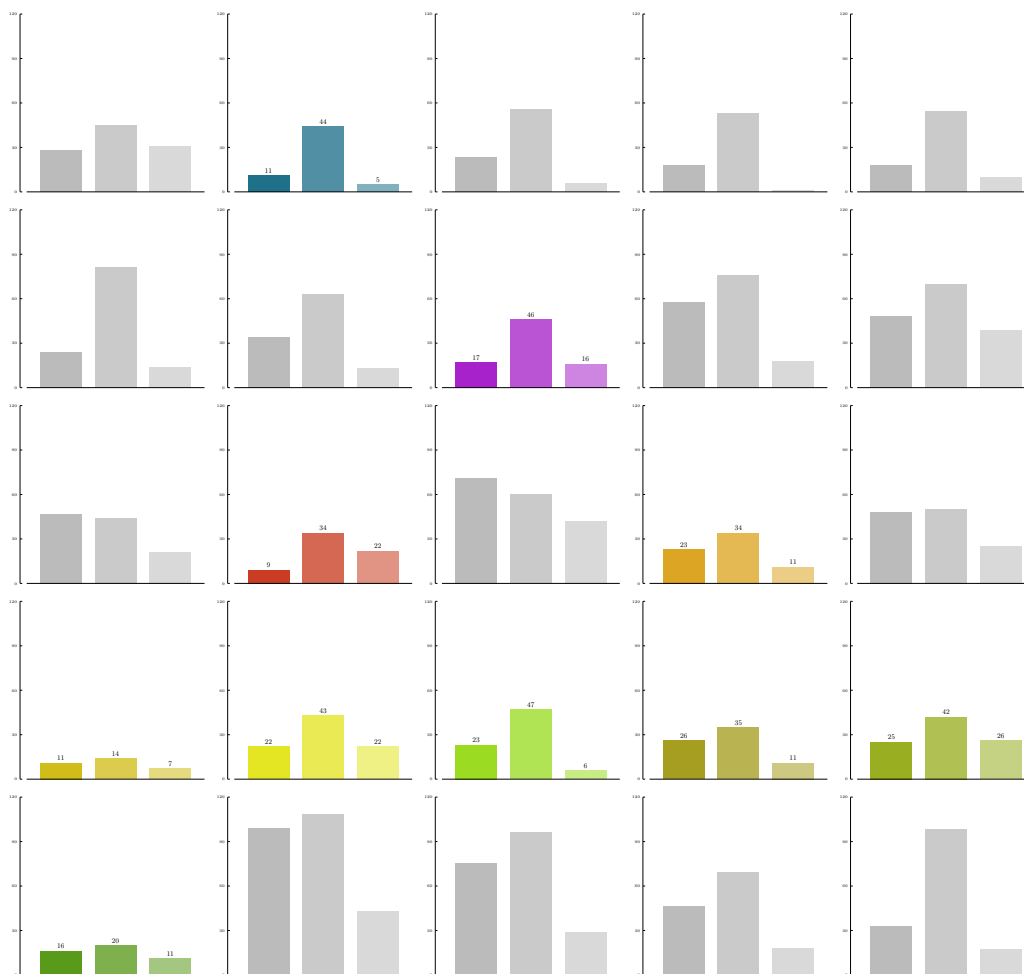


Abb. 6.15.: Absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Student*in mit farblicher Hervorhebung von wenig umfangreichen Bearbeitungen.

Darstellung der Daten aus Abbildung 6.14 gegeben. Es zeigt sich, dass ein großer Teil³ der Probanden eine tendenziell ähnliche Verteilung der Hauptkategorien aufweist (siehe Abbildung 6.17). Diese sind damit maßgeblich für die gesamte Verteilung der Hauptkategorien in Abbildung 6.2 verantwortlich. Die Verteilung der Hauptkategorien lässt sich unter den einzelnen Probanden demnach als tendenziell homogen beschreiben. Dies widerspricht der subjektiven Wahrnehmung aus der Lehre und auch den Erfahrungen aus dem Codierprozess, wonach eher der Eindruck entsteht, dass die einzelnen Probanden weniger vergleichbare Arbeitsweisen und Bearbeitungsprozesse aufweisen. Betrachtet man innerhalb dieser Gruppe zusätzlich das Ausmaß dieser ähnlichen Verteilung, so sind dennoch deutliche Unterschiede zu erkennen. Es treten solche Verteilungen auf, bei denen

³#02, #03, #05, #06, #07, #09, #10, #14, #16, #18, #19, #21, #22, #23, #24, #25

die zweite Hauptkategorie deutlich höher ausgeprägt ist, aber auch solche, bei denen insbesondere die erste und die zweite Hauptkategorie vergleichbare Anteile aufweisen.

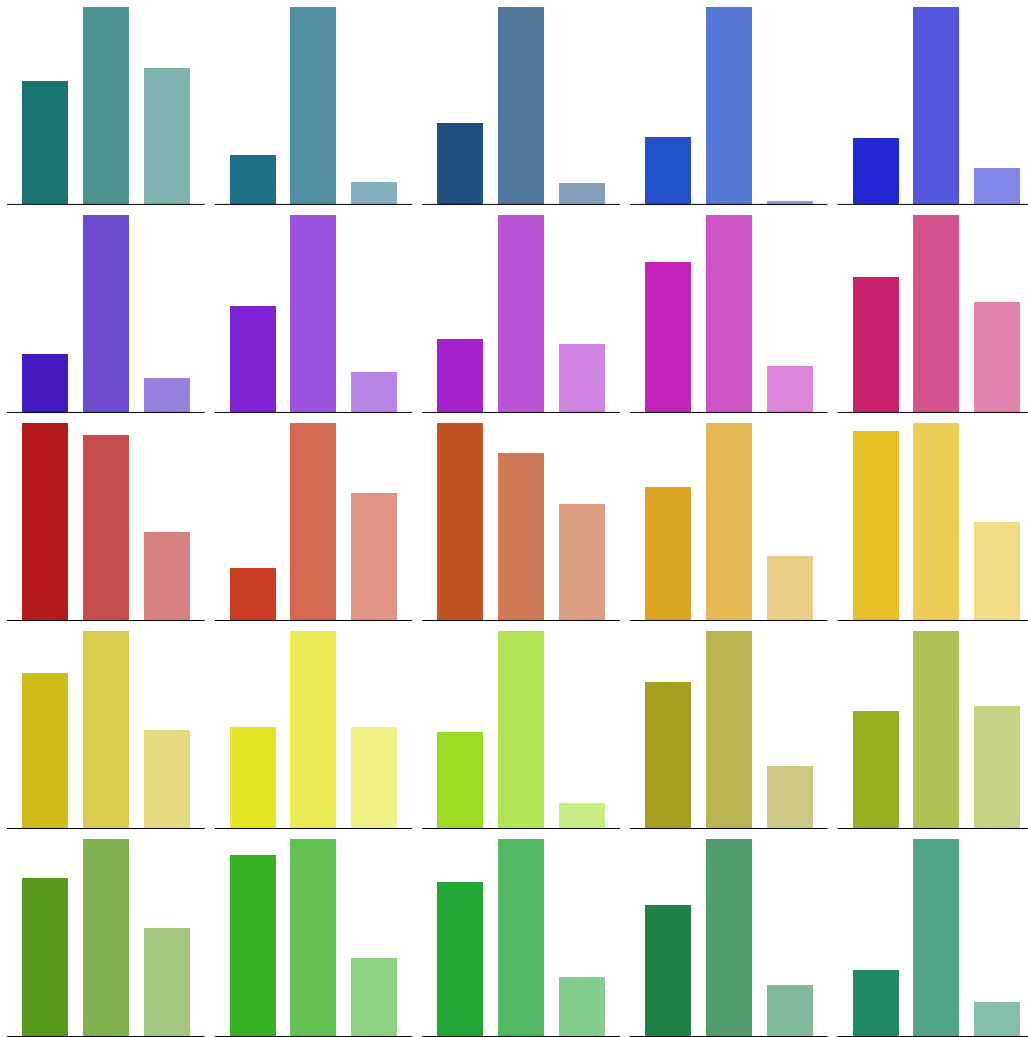


Abb. 6.16.: Skalierte absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Student*in.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Betrachtung der einzelnen Student*innen sinnvoll ist. Die Verteilung der Hauptkategorien suggeriert zwar eine Homogenität zwischen den untersuchten Student*innen, diese löst sich jedoch unter Mitbetrachtung des konkreten Ausmaßes der entsprechenden Verteilung und insbesondere vor den absoluten Anzahlen codierter Segmente mit Hauptkategorien wieder größtenteils auf. Allerdings wird der Fokus auf Hauptkategorien der Komplexität der Thematik rund um Problemlösen und Arbeitsweisen nicht gerecht. Diese sind zu grob formuliert, sodass mögliche Unterschiede in den Bearbeitungen nicht mehr scharf dargestellt werden können.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

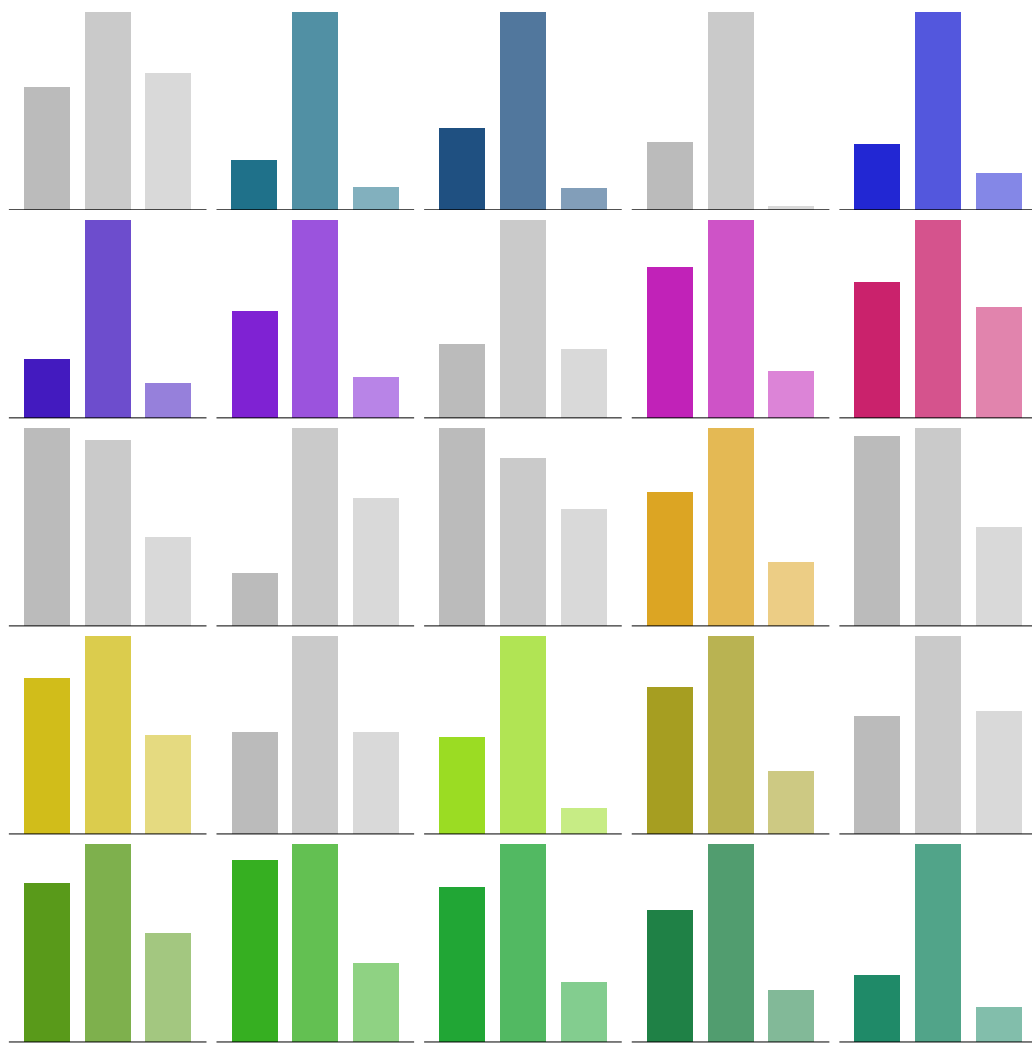


Abb. 6.17.: Skalierte absolute Anzahlen codierter Segmente nach Hauptkategorien pro Student*in mit farblicher Hervorhebung von ähnlichen Verteilungen.

Zusätzlich ist die quantitative Betrachtung von Anzahlen codierter Segmente kritisch zu bewerten. Es wurde bereits erwähnt, dass die Codierung keinerlei Aufschluss über die fachliche Korrektheit oder Sinnhaftigkeit einer verwendeten Arbeitsweise liefert. Eine hohe bzw. niedrige Anzahl codierter Segmente mit einer Kategorie lässt also nur Interpretationen hinsichtlich einer häufigen bzw. seltenen Verwendung zu. Hierbei ist aber anzumerken, dass gerade ausführliche Bearbeitungen selbst dahingehend nicht untereinander vergleichbar sind. Es könnten bspw. einerseits Dokumentationen auftreten, in denen mehrere Ansätze mit gleichbleibenden Arbeitsweisen dokumentiert sind, wobei die ersten Ansätze alle fehlschlagen, bis beim letzten Versuch ein Ergebnis erzielt wird. Andererseits könnte es Dokumentationen geben, die nur einen Ansatz mit vergleichbaren Arbeitsweisen wie eben beschrieben, wobei dieser Ansatz direkt gelingt. Beide Fälle

zeichnen sich also durch die gleichen Arbeitsweisen aus, wobei im ersten Fall deutlich mehr codierte Segmente allein durch die größere Anzahl an (nicht notwendigerweise erfolgreichen) Ansätzen entstehen. Diese Problematik spricht dafür, lediglich die Verhältnisse der Kategorien innerhalb eines Probanden zu betrachten und die absoluten Anzahlen auszublenden. Hierbei besteht dann die Gefahr, keine Aussage über ausführliche und weniger ausführliche Dokumentationen bzw. Arbeitsweisen mehr treffen zu können. Insgesamt ergibt sich die Notwendigkeit der Bewertung einer Ausprägung einer Arbeitsweise innerhalb eines Falles. In dieser Ausprägung soll sich dann widerspiegeln, ob eine Bearbeitung generell oder nur in Teilen durch eine Arbeitsweise geprägt ist. Diesen Grad der Ausprägung liefert die anschließend durchgeführte evaluative Inhaltsanalyse, wobei zunächst zu klären ist, für welche Kategorien die Betrachtung einer Ausprägung im vorliegenden Material interessant ist.

Die alleinige Verwendung von Ausprägungen der drei Hauptkategorien erscheint unter Berücksichtigung oben genannter Problematik über die Homogenität der Studierendenschaft zu grob. Im Hinblick auf eine mögliche Typisierung der Probanden anhand der Ausprägungen ist eine Berücksichtigung von 30 Subkategorien ebenfalls ungeeignet. Dies würde zu einem 30-dimensionalen Merkmalsraum führen, indem die 25 Probanden womöglich jeweils einen eigenen Typ darstellen. Stattdessen werden in der durchgeführten evaluativen Inhaltsanalyse Ausprägungen in den acht Subkategoriegruppen betrachtet.

Es wird zunächst kontrolliert, ob die Zuordnung der Subkategorien zu den Subkategoriegruppen sinnvoll getroffen wurden. Konkret stellt sich die Frage, ob in der evaluativen Inhaltsanalyse bei der eingeschränkten Betrachtung einer Subkategoriegruppe tendenziell auch ein vergleichbares Verhalten bei den untergeordneten Subkategorien erwartet werden kann. Es folgt also eine Kontrolle des Trendverhaltens dieser Subkategoriegruppen und der zugeordneten Subkategorien. Als Grundlage dieser Kontrolle wird die Annahme getroffen, dass die Anzahlen codierter Segmente eine spätere evaluativ bestimmte Ausprägung einer Arbeitsweise zumindest teilweise (qualitativ) erklären können. Dies wird insbesondere bei den Student*innen mit häufigerer Nutzung selbiger Arbeitsweise angenommen. Es ist jedoch nicht zu erwarten, dass sich ein solcher Zusammenhang quantitativ festhalten lässt.

Für die Kontrolle werden im Folgenden die Anzahlen codierter Segmente einer Subkategoriegruppe pro Student*in ermittelt und anschließend nach Häufigkeit sortiert. Diese Reihenfolge wird anschließend auch auf die Anzahlen codierter Segmente der untergeordneten Subkategorien pro Student*in angewendet. Es wird dann kontrolliert, ob sich die Reihenfolge der Anzahlen der Subkategoriegruppe in den Reihenfolgen der Anzahlen der untergeordneten Subkategorien widerspiegelt. In Abbildung 6.18 ist dies bspw. für die Subkategoriegruppe *Äußere Form und Dokumentation* dargestellt, die aus den vier Subkategorien *Aufzählungen und Tabellen*, *Beschreiben des Vorgehens*, *Hervor-*

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

hebungsmittel und *(Zwischen-)Ergebnisse notieren* zusammengesetzt ist. Die Farbgebung der Balken spiegelt die bereits thematisierte Zuordnung zu den einzelnen Student*innen wider. Man erkennt, dass die Sortierung nach der Subkategoriegruppe auch bei den Subkategorien zu einer tendenziell steigenden Anordnung führt. Bei der Subkategorie *Hervorhebungsmittel* ist dies klar ersichtlich. Bei den Subkategorien *Aufzählungen und Tabellen* sowie *Beschreiben des Vorgehens* ist der Anstieg sehr schwach, aber die Anordnung verhält sich auch nicht konträr zur Anordnung der Subkategoriegruppe. Lediglich bei der Subkategorie *(Zwischen-)Ergebnisse notieren* ist quasi kein Anstieg zu beobachten. Die Anordnung stellt hier ein konstantes weißes Rauschen dar. Die grundsätzlich geringen Anzahlen lassen hier dennoch eine übergeordnete Zuordnung zu. Es wird erwartet, dass auch eine evaluative Bewertung einer Ausprägung dieser Subkategorie nur sehr gering ins Gewicht fallen und damit kaum eine Auswirkung haben wird – zumindest keine zur Subkategoriegruppe gegensätzliche Auswirkung auf die Ausprägung und die spätere Typisierung.

Lediglich bei der Subkategoriegruppe *Problemspezifische fachmathematische Techniken* folgen die entsprechenden Subkategorien nicht dem Trend der übergeordneten Anordnung (siehe Abbildung 6.19). Hier sind deutliche Abweichungen und nicht nur ausschließlich geringes weißes Rauschen zu beobachten. Es ist zu befürchten, dass die einzelnen Subkategorien innerhalb der Probanden jeweils für andere Verortungen im Merkmalsraum führen können und so unterschiedliche Typisierungen entstehen können, falls einerseits die Subkategorien zusammengefasst oder andererseits vereinzelt als eigene Merkmalsdimension angesetzt werden. Für diese Subkategoriegruppe wird deshalb eine weiterführende Kontrolle angegeben, nach der schließlich trotzdem die Entscheidung zur Zusammenfassung der Subkategorien zur übergeordneten Subkategoriegruppe steht.

Die Trenddiagramme der restlichen Subkategoriegruppen sind im Anhang B in den Abbildungen B.4 bis B.9 auf den Seiten 316 bis 321 zu finden.

Betrachtet man die Anzahlen codierter Segmente mit den Subkategorien der oben noch hinterfragten Subkategoriegruppe *Problemspezifische fachmathematische Techniken* jeweils pro Arbeitsauftrag getrennt, so zeigt sich die namensgebende Abhängigkeit dieser Arbeitsweisen von der Problemstellung. In Abbildung 6.20 sind nebeneinander jeweils die Anzahlen aller Probanden für die sieben Arbeitsaufträge dargestellt. Dort ist zu erkennen, dass die einzelnen Arbeitsweisen der Subkategorien überwiegend getrennt bei den einzelnen Arbeitsaufträgen auftreten. Es überschneiden sich fast ausschließlich nur maximal zwei dieser Arbeitsweisen in einer Dokumentation. Dies lässt sich zum einen damit erklären, dass eine konkrete Problemstellung oder auch eine konkrete Formulierung einer Fragestellung nur eine eingeschränkte Anzahl problemspezifischer Herangehensweisen anspricht. Zum anderen scheinen sich die Student*innen auch relativ einig darüber zu sein, welche diese konkret angesprochenen Arbeitsweisen jeweils sind.

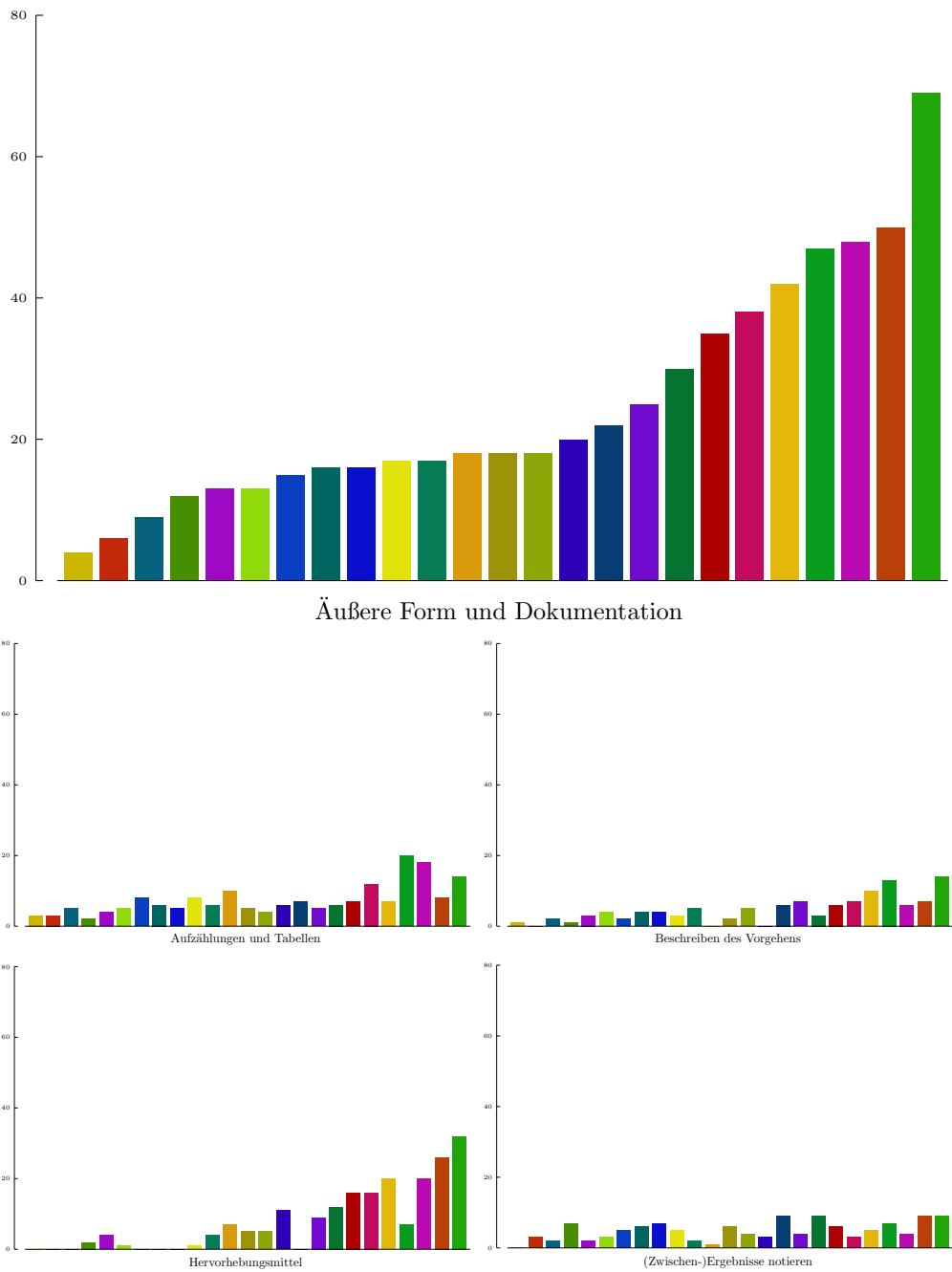


Abb. 6.18.: Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Äußere Form und Dokumentation* nach Proband.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

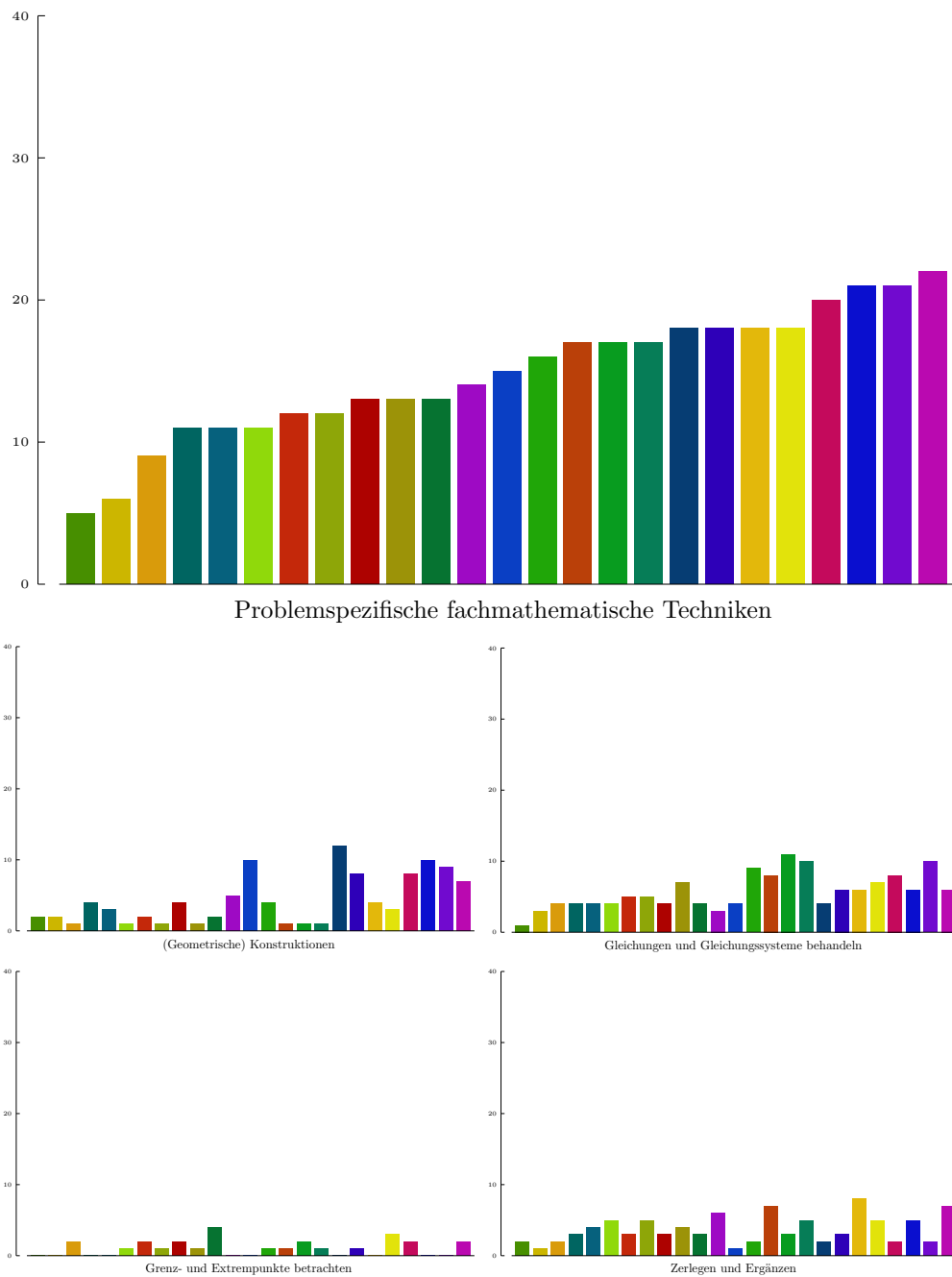


Abb. 6.19.: Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Problemspezifische fachmathematische Techniken* nach Proband.

Deshalb werden die einzelnen problemspezifischen Subkategorien aufgrund von zwei zentralen Argumenten für die evaluative Inhaltsanalyse ebenfalls zur übergeordneten Subkategoriegruppe zusammengefasst:

Einerseits interferieren die einzelnen Subkategorien kaum innerhalb eines Arbeitsauftrages, d. h. eine Zusammenfassung der Subkategorien zu einer übergeordneten Subkategoriegruppe verliert keine Information, die die einzelnen Subkategorien voneinander unterscheiden würde. Dies äußert sich insbesondere in der Möglichkeit, auch im Nachhinein noch von der Ausprägung der Subkategoriegruppe auf eine etwaige Ausprägung der Subkategorien rückschließen zu können. Dazu muss lediglich die im jeweiligen Fall konkret verwendete Subkategorie herausgefunden werden. In Abbildung 6.20 sind die Zuordnungen von Arbeitsauftrag und konkreter problemspezifischer Technik festgehalten. Die Ausprägung von Subkategoriegruppe und Subkategorie wird dort nahezu übereinstimmen.

Nimmt man andererseits die Subkategorien als eigene Merkmalsdimensionen, so werden diese nur in maximal einzelnen Fällen innerhalb eines Probanden für eine höhere Ausprägung sorgen können. In den meisten Fällen wird keine Ausprägung zu verzeichnen sein. Fasst man für die anschließende Typenbildung die Ausprägungen der Fälle eines*r beobachteten Student*in zu einer Gesamtausprägung zusammen, so wird diese für die einzelnen Subkategorien jeweils sehr gering ausfallen. Gerade in solchen Fällen, in denen die entsprechenden Student*innen in den passenden Situationen eine dazugehörige problemspezifische Arbeitsweise verwenden und in den anderen Situationen korrekterweise auf selbige verzichtet haben, wäre eine solche Bewertung nicht angemessen und könnte für fehlerhafte Interpretationen der Typisierung sorgen.

Zusammenfassend werden also acht zu untersuchende Merkmale an die evaluative Inhaltsanalyse übergeben. Es handelt sich dabei um die Subkategoriegruppen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse, die jeweils für mehrere konkrete Arbeitsweisen stehen. Als eigenständige Merkmale lassen sich die Subkategoriegruppen gemäß dem Codierleitfaden C.1 der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse folgendermaßen beschreiben:

- **Äußere Form und Dokumentation**

Arbeitsweisen, die sich der übersichtlichen und anschaulichen äußeren Darstellungsform der Dokumentation widmen. Hierzu zählen Aufzählungsformen, Tabellen und farbliche oder symbolische Hervorhebungsmittel. Zusätzlich sind damit Abschnitte gemeint, in denen das Vorgehen beschrieben und Ergebnisse notiert werden. Dabei soll keine tatsächlich kognitive Leistung erbracht werden.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

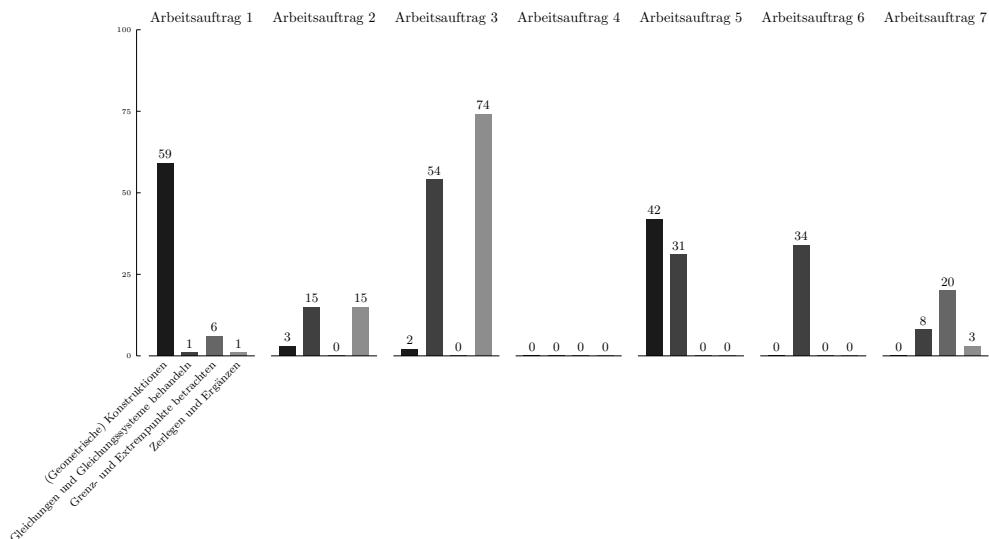


Abb. 6.20.: Absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Problemspezifische fachmathematische Techniken* pro Arbeitsauftrag.

- **Überlegungen zum Vorgehen**

Das sind Arbeitsweisen, mit denen das eigene Vorgehen geplant und vorbereitet wird. Eine einfache Beschreibung ist nicht ausreichend. Es ist hier bspw. das Planen oder begründete Einlegen von Pausen, das Aufstellen von Teilzielen, Vermutungen und Ideen sowie das Aktivieren von Vorwissen gemeint.

- **Allgemeinere mathematische Techniken**

Hiermit sind insbesondere elementare Typen der Beweisführung und andere mathematische Techniken gemeint, die nicht klassisch an ein deutlich eingegrenztes Fachgebiet der Mathematik gebunden sind.

- **Beispielgebundenes Vorgehen**

Damit sind Arbeitsweisen gemeint, bei denen sich an Beispielen und konkreten Einzel- oder Spezialfällen orientiert wird. Dazu zählen bspw. das Angeben solcher konkreter (Zahlen-)Beispiele oder das Behandeln von Einzel- und Spezialfälle, aber auch das Skizzieren von Objekten oder Anlegen von Zeichnungen.

- **Externe Hilfsmittel heranziehen**

Hier sind Schritte gemeint, bei denen externe Hilfsmittel verwendet werden. Als externe Hilfsmittel sind insbesondere andere Lernende oder Lehrende sowie Internetquellen und Literatur zu nennen. Zudem werden softwaretechnische und rechnergestützte Hilfsmittel mitgezählt.

- **Problemspezifische fachmathematische Techniken**

Das sind Schritte, die sich durch die Verwendung von speziellen Techniken einzelner Fachgebiete oder Problemfelder der Mathematik äußern. Diese Techniken zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass sie kein allgemeines Prinzip der Mathematik darstellen, das möglicherweise sogar auf außermathematische Problemsituationen übertragbar ist. Dazu zählen bspw. (geometrische) Konstruktionen und das Behandeln von (algebraischen) Gleichungen und Gleichungssystemen, aber auch die analytische Betrachtung von Grenz- und Extrempunkten. Das Zerlegen und Ergänzen im geometrischen Sinne an konkreten Objekten wird ebenfalls hinzugezählt.

- **Einordnung von Ergebnissen**

Das sind Arbeitsweisen, mit denen rückblickend auf erzielte Ergebnisse und getroffene Aussagen eingegangen wird. Dabei sind insbesondere inhaltliche Einschränkungen, Kontrollen und weiterführende Fragen gemeint.

- **Personenbezogene Überlegungen**

Es sind Abschnitte gemeint, in denen über das eigene Vorgehen und die eigenen Befindlichkeiten reflektiert wird. Hier sind insbesondere intuitive und nicht unbedingt fachlich begründete Gedanken miteinbezogen.

6.3. Evaluative Inhaltsanalyse

Bei dieser Inhaltsanalyse sind alle 167 Fälle jeweils mit Ausprägungen, der am Ende von Abschnitt 6.2 beschriebenen Merkmale für Arbeitsweisen, codiert worden. Als evaluative Kategorien haben sich vier Ausprägungsgrade ergeben: *Keine* Ausprägung (codiert mit 0), *geringe* Ausprägung (codiert mit 1), *mittlere* Ausprägung (codiert mit 2) und *hohe* Ausprägung (codiert mit 3). Dabei sind die Ausprägungsgrade folgendermaßen definiert:

- **Keine Ausprägung (0)**

Fälle, in denen entsprechende Arbeitsweisen gar nicht auftreten.

- **Geringe Ausprägung (1)**

Fälle, in denen entsprechende Arbeitsweisen nur vereinzelt und/oder willkürlich auftreten.

- **Mittlere Ausprägung (2)**

Fälle, in denen entsprechende Arbeitsweisen zwar häufiger und womöglich regelmäßig, aber nicht flächendeckend auftreten.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

• Hohe Ausprägung (3)

Fälle, in denen entsprechende Arbeitsweisen flächendeckend und auch vielfältig auftreten.

Die Ausprägungsgrade sind als evaluative Kategorien restfrei formuliert, sodass bei allen 167 Fällen jeweils exakt acht Codes gesetzt wurden – für jedes Merkmal jeweils ein Code. Im Anhang B sind in Tabelle B.38 (S. 337) alle diese Codes aufgelistet.

Diskussion

Es lassen sich zunächst alle Fälle gemeinsam betrachten und dort für jede Merkmalsdimension ein Mittelwert der codierten Ausprägungsgrade ermitteln. In Abbildung 6.21 sind diese Mittelwerte dargestellt. Dabei starten die Merkmalsdimensionen jeweils im Zentrum der Netzdarstellung und gehen dann in je eine der acht Richtungen nach außen. Jede Merkmalsdimension ist exakt einer Richtung zugeordnet. Am Ende der Merkmalsdimension ist die entsprechende Bezeichnung aufgeführt. Die Anordnung der Merkmalsdimension bleibt in der weiteren Arbeit für derartige Netzdiagramme gleich. Der Ausprägungsgrad 0 (keine Ausprägung) ist also immer im Zentrum angeordnet. Die Ausprägungsgrade 1 (geringe Ausprägung), 2 (mittlere Ausprägung) und 3 (hohe Ausprägung) sind dann schrittweise nach außen aufgetragen und jeweils durch eine Ecke eines regelmäßigen Achtecks markiert.

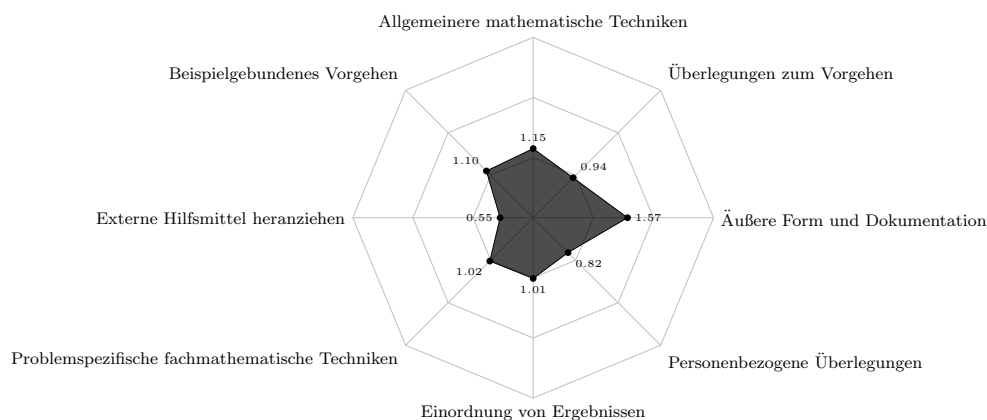


Abb. 6.21.: Mittelwerte der Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse über alle Probanden.

Zunächst ist hier zu erkennen, dass die Verhältnisse der Ausprägungen der Merkmale untereinander dem Trend der Anzahlen codierter Segmente nach entsprechenden Subkategoriegruppen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse folgen (siehe Abbildung 6.22). Gleichzeitig sieht man, dass gerade die in der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse mit sehr vielen codierten Segmenten versehenen Subkategoriegruppen nicht unbedingt für eine übermäßig hohe Bewertung der Ausprägung nach der evaluativen Inhaltsanalyse

stehen. Es bestätigt sich der Eindruck, dass eine hohe Anzahl codierter Segmente keine konkrete Aussage über die interpretative Bewertung der Ausprägung dieser Arbeitsweise treffen kann. Dafür ist eine entsprechende Fallbetrachtung unerlässlich. Dies liefert nun die evaluative Inhaltsanalyse.



Abb. 6.22.: Mittelwerte der Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse (links) und absolute Anzahlen codierter Segmente nach Subkategoriegruppen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse (rechts) über alle Probanden. Die Anordnung der Subkategoriegruppen links folgt der Anordnung aus Abbildung 6.21. Die Anordnung rechts ist von links nach rechts entsprechend der Anordnung aus Tabelle 6.6 gegeben.

Es zeigt sich dennoch weiterhin, dass die Student*innen in ihren Bearbeitungen generell wenig Zeit mit planenden (*Überlegungen zum Vorgehen*) und reflexiven (*Einordnung von Ergebnissen* bzw. *Personenbezogene Überlegungen*) Schritten verbringen. Externe Hilfsmittel werden nur selten herangezogen, wobei hier erneut die Einschränkung zu erwähnen ist, dass es sich dabei auch um eine fehlende Dokumentation entsprechender Schritte durch die Student*innen handeln kann. Vor dem Hintergrund, dass die Hinzunahme externer Hilfe oftmals eher negativ konnotiert ist, ist dies weiterhin durchaus plausibel. Die anderen drei Merkmale (*Allgemeinere mathematische Techniken*, *Beispielgebundenes Vorgehen*, *Problemspezifische fachmathematische Techniken*), die für die Hauptkategorie *Strategien der Durchführung* stehen, sind jeweils in einer ähnlichen und niedrigen Ausprägung vorhanden. Sie sind entgegen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse stark an die restlichen Merkmalsdimensionen angeglichen.

Betrachtet man nun die Ausprägungen der Merkmalsdimensionen für die Probanden einzeln, so ergibt sich ein eher differenziertes Feld. In Abbildung 6.23 sind die Mittelwerte der Ausprägungen der Merkmalsdimensionen einzeln für jeden Probanden dargestellt. Die Merkmalsdimensionen der Netzdiagramme sind wie in Abbildung 6.21 gesetzt. Die Farbgebung für die einzelnen Probanden ist aus der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse übernommen.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

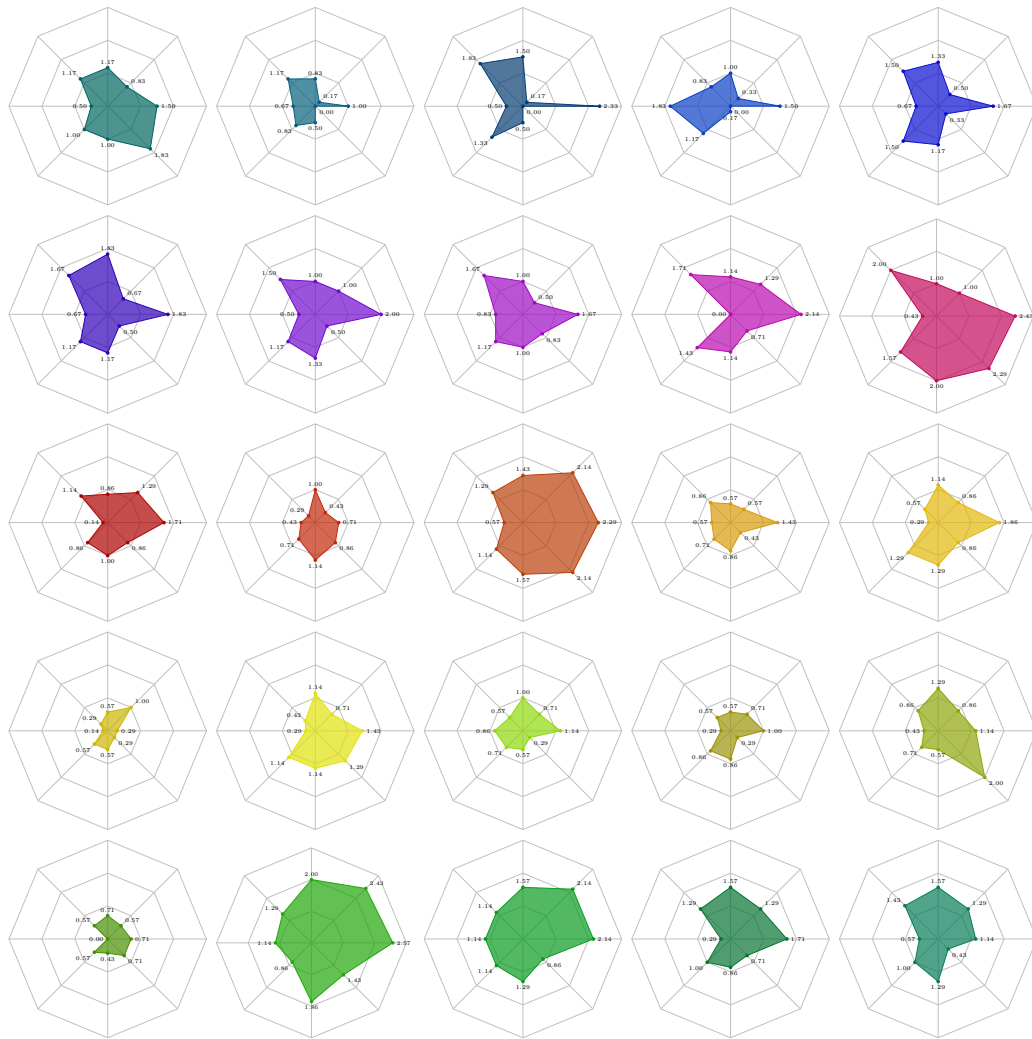


Abb. 6.23.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband.

Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass die Berechnung von Mittelwerten eine Interpretation der Ausprägungsstufen im Sinne einer Intervalskala ist. Bei den Ausprägungsstufen handelt es sich genau genommen aber nicht um eine sauber normierte Intervalskala. Es liegt insbesondere keine äquidistante Verteilung der Stufen auf einer Skala vor, da zwischen keiner Ausprägung (0) und geringer Ausprägung (1) ein kleinerer Abstand besteht, als zwischen den restlichen Stufen. In Kapitel 8 zur Beurteilung der Güte der Inhaltsanalyse wird in Abschnitt 8.3 genauer auf diese Problematik eingegangen. Es stellt sich heraus, dass eine alternative Bestimmung von Ausprägungsstufen für die Gesamtbearbeitung eines Probanden, die ohne Mittelwerte auskommt und stattdessen rein interpretativ durchgeführt wird, zu nahezu identischen Mustern gelangt, wie sie

in Abbildung 6.23 zu sehen sind. Es kann an dieser Stelle also mit den vorliegenden Diagrammen fortgefahren werden.

Es gibt weiterhin Probanden, die sich durch eine deutlich niedrigere Gesamtausprägung gegenüber dem Rest äußern (#02, #12, #14, #16, #18, #19, #21). Hier sind nahezu keine Arbeitsweisen jeglicher Merkmalsdimensionen in tatsächlich wahrnehmbarer Ausprägung vorhanden. In Abbildung 6.24 sind die entsprechenden Probanden hervorgehoben.

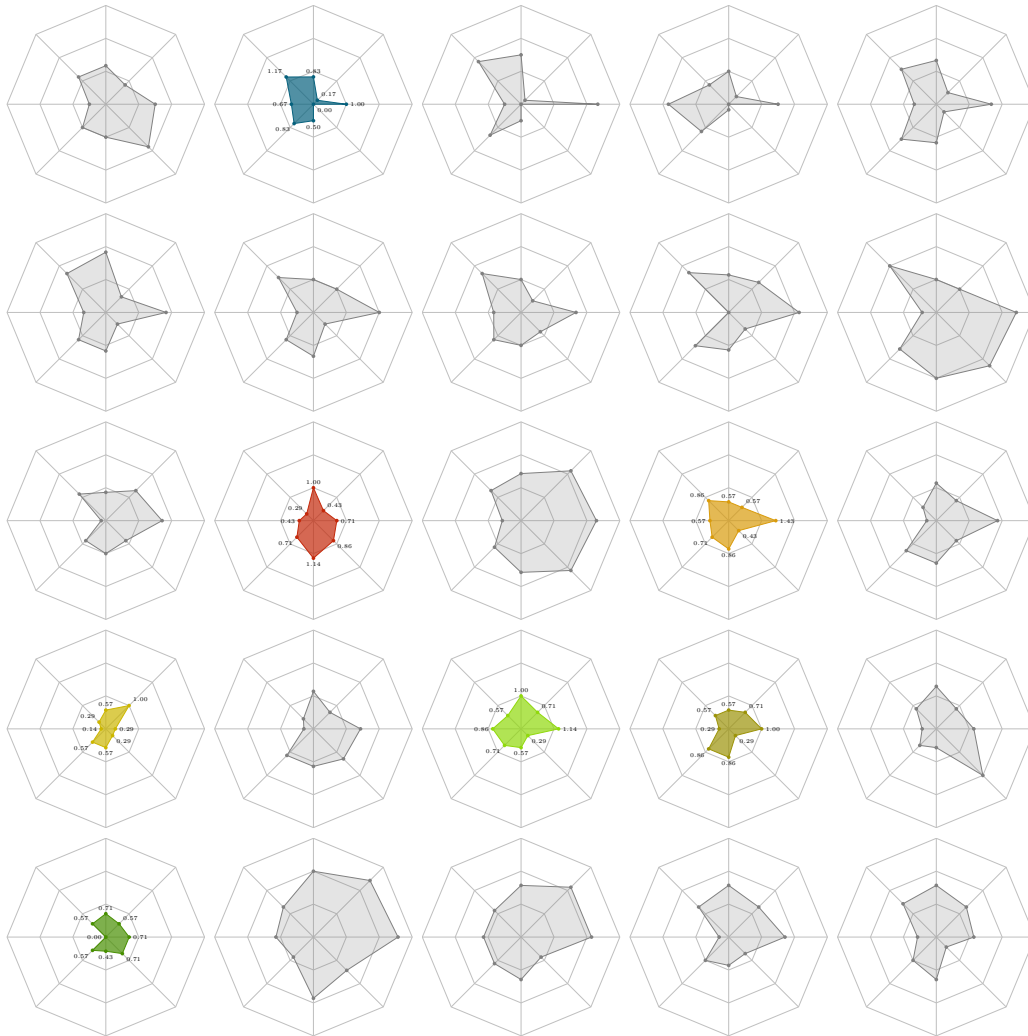


Abb. 6.24.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von wenig umfangreichen Bearbeitungen.

Im Vergleich zur geringen Anzahl codierter Segmente aus der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse (siehe Abbildung 6.15) zählen jedoch drei Probanden nicht mehr zu dieser Gruppe (#08, #17, #20). Es ist auch kein zusätzlicher Proband dazugekommen.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

Ansonsten lassen sich durch die Form der entstehenden Flächen im Netzdiagramm solche Probanden identifizieren, die sich durch eine ähnliche Bearbeitungsweise auszeichnen. Es werden nun entsprechend ähnliche Formen in den Netzdiagrammen gesucht.

Beispielsweise zeigen sich mehrere Probanden (#03, #05, #06, #08, #15), die im Vergleich zu den restlichen Merkmalen nur höhere Ausprägungen in den Merkmalen *Äußere Form und Dokumentation*, *Allgemeinere mathematische Techniken*, *Beispielgebundenes Vorgehen* und *Problemspezifische fachmathematische Techniken* aufweisen. Oftmals kommen noch höhere Ausprägungen beim Merkmal *Einordnung von Ergebnissen* vor (siehe Abbildung 6.25).

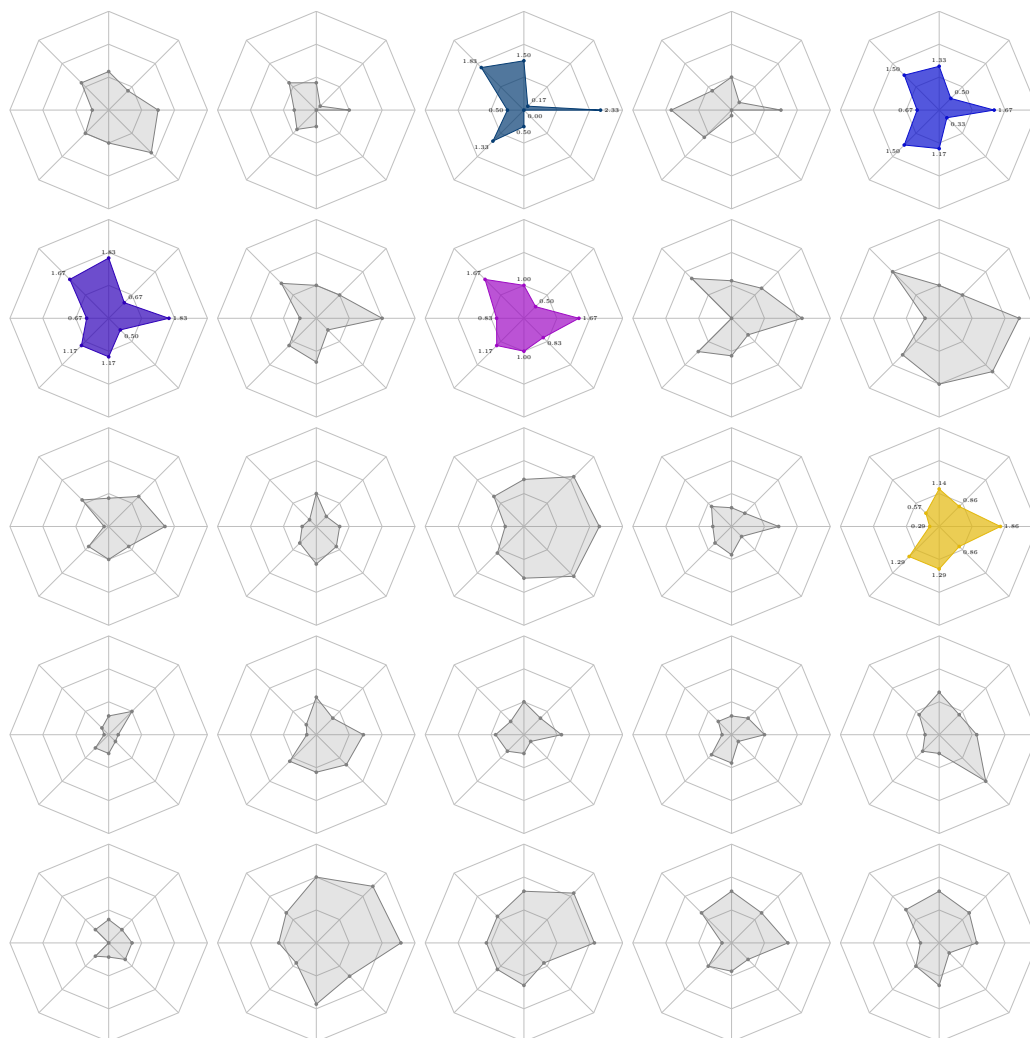


Abb. 6.25.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Probanden mit Fokus auf konkreter Problemlösung.

Demnach konzentrieren sich diese Student*innen überwiegend auf die konkrete Problembewältigung und manchmal auf eine anschließende Kontrolle des Ergebnisses. Planende

Schritte und metakognitive Überlegungen treten kaum auf. Auch externe Hilfsmittel werden nicht herangezogen oder dokumentiert.

Andererseits lassen sich neben den eben beschriebenen Ausprägungen auch Probanden erkennen (#07, #09, #11, #22, #23, #24, #25), die zusätzlich eine doch erkennbar höhere Ausprägung hinsichtlich planender Schritte (*Überlegungen zum Vorgehen*) aufweisen. Die Flächen in den Netzdiagrammen zeigen einen entsprechenden Ausschlag nach rechts oben (siehe Abbildung 6.26).

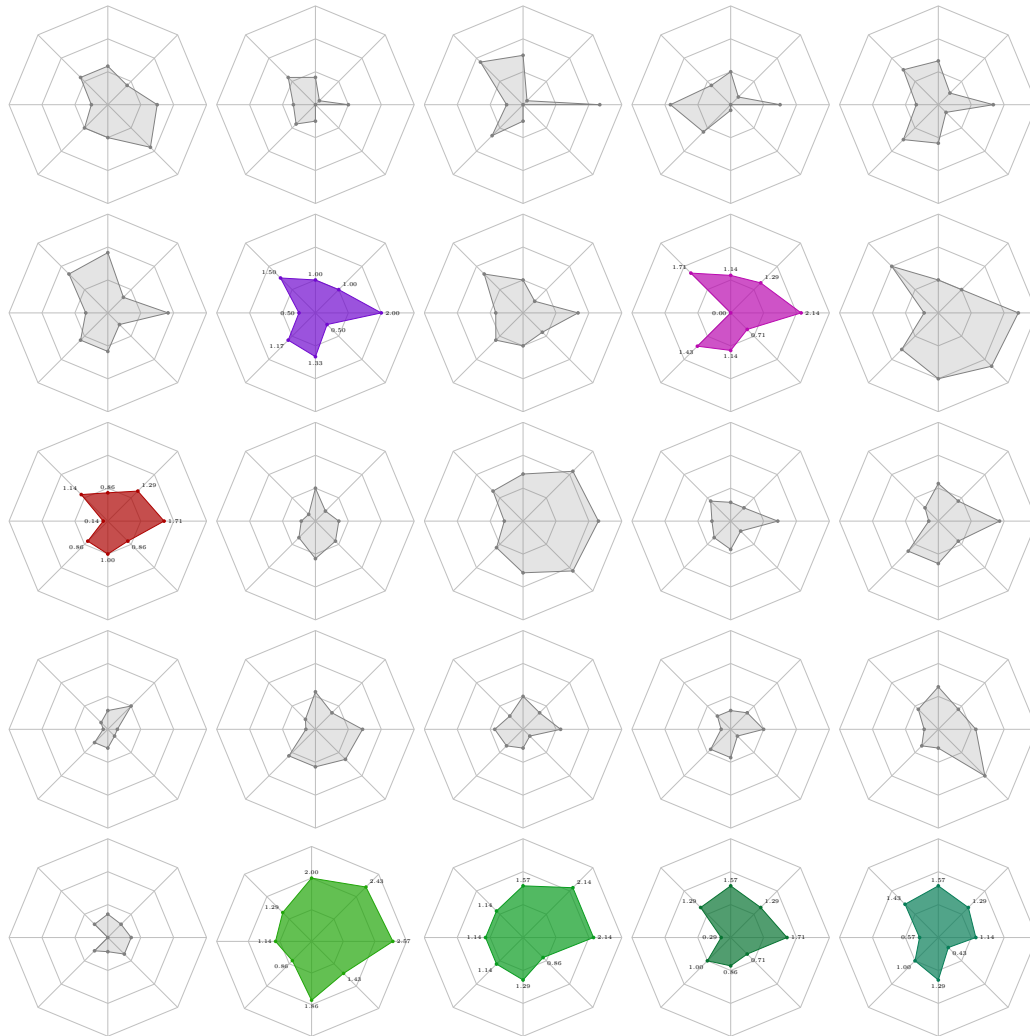


Abb. 6.26.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Probanden mit teilweise planenden Schritten.

Ebenso verhält es sich mit Probanden (#01, #10, #17, #20), die zwar keine höhere Ausprägung hinsichtlich planender Schritte (*Überlegungen zum Vorgehen*) aufweisen, aber stattdessen zu reflexiven Überlegungen zur eigenen Person und zu metakognitiven Schrit-

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

ten tendieren (*Personenbezogene Überlegungen*). Die Flächen in den Netzdiagrammen zeigen hier einen Ausschlag nach rechts unten (siehe Abbildung 6.27).

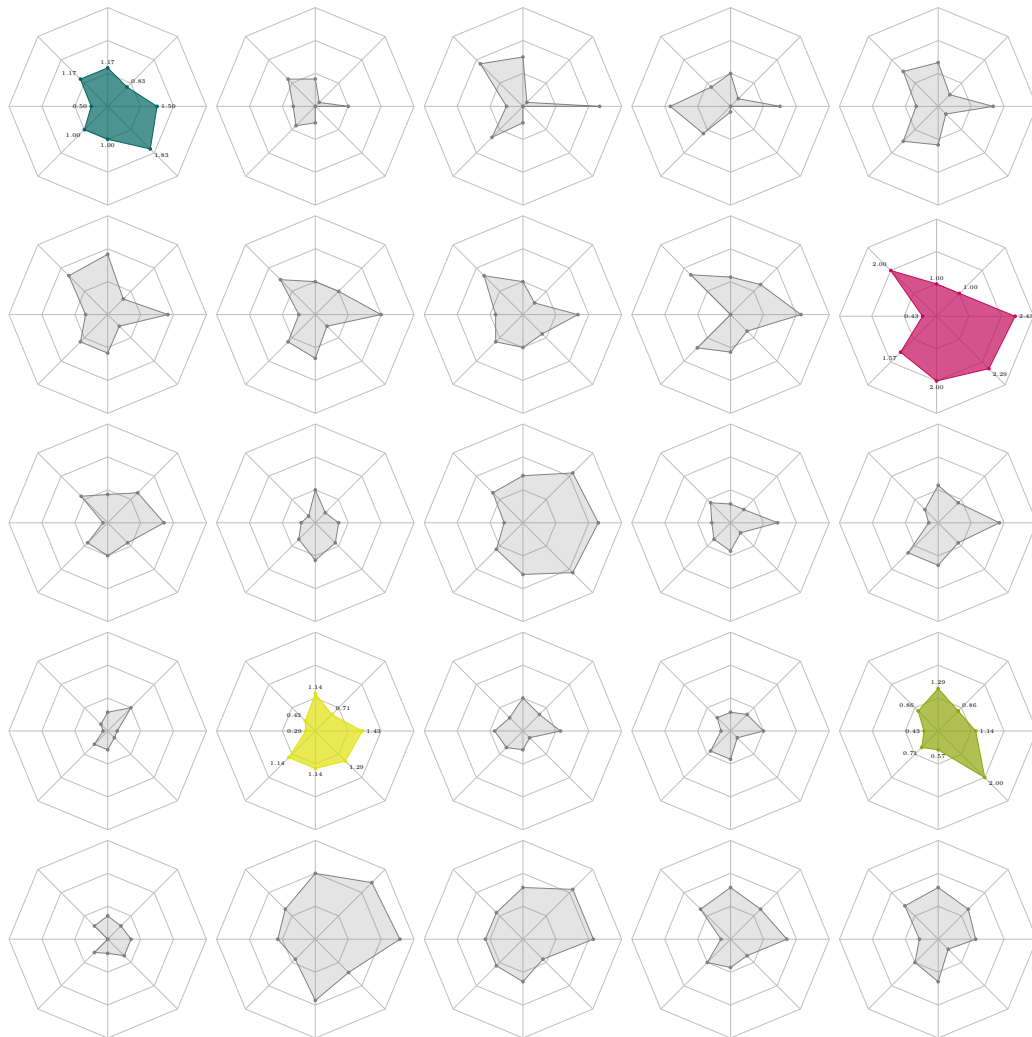


Abb. 6.27.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Probanden mit teilweise reflexiven Überlegungen.

Zuletzt sind noch zwei Sonderfälle zu erwähnen (siehe Abbildung 6.28). Ein Proband (#13) weist sogar in planenden und reflexiven Schritten eine erhöhte Ausprägung auf. Generell wirkt das gesamte Netzdiagramm sehr ausgeglichen und im Vergleich zu den meisten restlichen Diagrammen auch generell hoch ausgeprägt. Lediglich externe Hilfsmittel weisen eine niedrigere Ausprägung auf. Bedenkt man allerdings, dass die restliche hohe Ausprägung den Eindruck erweckt, dass der Proband relativ viele Strategien bereits selbst zur Verfügung hat, so ist die Abwesenheit von vielen externen Hilfsmitteln nicht unbedingt überraschend. Der Proband scheint selbstständig zur Problembearbeitung in der Lage.

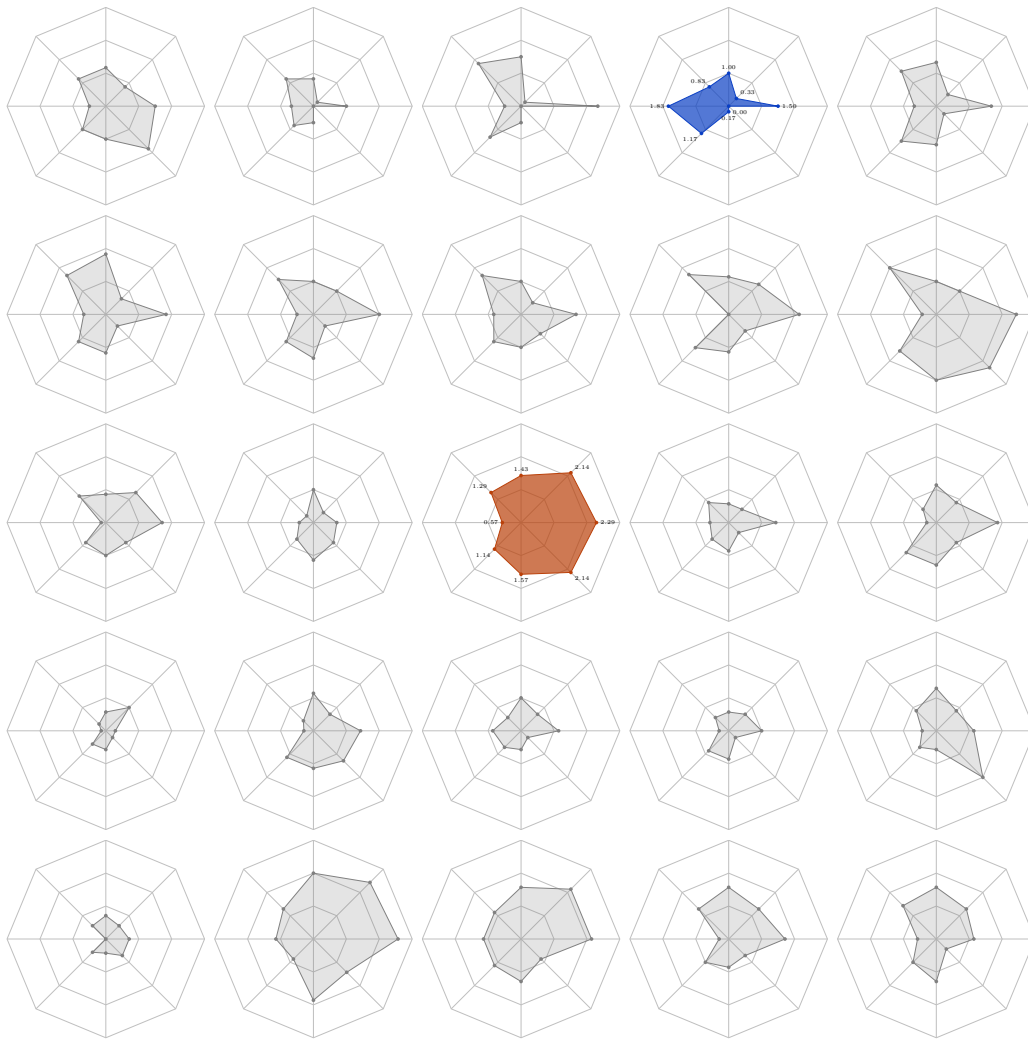


Abb. 6.28.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband mit farblicher Hervorhebung von Sonderfällen.

Ein anderer Proband (#04) ist dahingehend als Sonderfall zu sehen, als dass er der*die einzige Student*in mit einer deutlich höheren Ausprägung bei der Verwendung externer Hilfsmittel ist. Abgesehen von den Merkmalen *Äußere Form und Dokumentation* und *Problemspezifische fachmathematische Techniken* treten ansonsten keine Merkmale mit einer relevanten Ausprägung auf. Die Student*in erscheint nach diesen Ausprägungen hilflos bei der Bearbeitung der Problemstellungen und muss sich scheinbar auf das Hinzuziehen von externer Hilfe verlassen, um überhaupt eine Bearbeitung durchführen zu können.

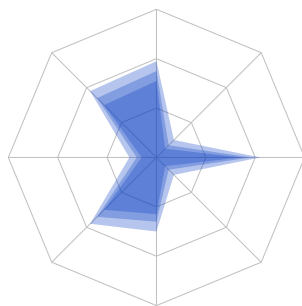
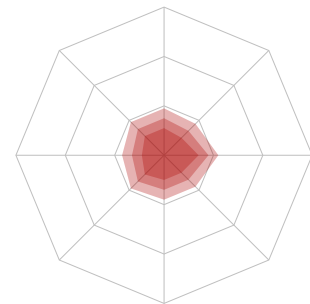
Die Ergebnisse der evaluativen Inhaltsanalyse ermöglichen zum einen eine Mustererkennung in allen Probanden, lassen zum anderen aber auch eine genauere Interpretation der einzelnen Probanden zu. Der Ausprägungsgrad der Merkmale liefert im Gegensatz

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

zu den Anzahlen codierter Segmente eine angemessene Grundlage für eine Bewertung hinsichtlich der Verwendung einer Arbeitsweise. Dabei zeigen sich die Trends aus der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse weiterhin und lassen sich zudem weiterführend ausdifferenzieren. Anhand dieser unterschiedlichen Muster in den Ausprägungen der Probanden wird nun eine typenbildende Inhaltsanalyse durchgeführt. Dazu werden im Folgenden sechs Typen beschrieben, die in den eben formulierten Ergebnissen der evaluativen Inhaltsanalyse innerhalb der Probanden identifiziert werden können. Diese Typisierung wird anschließend in der typenbildenden Inhaltsanalyse auf die Probanden als Fälle angewendet.

Der passive Typ (Typ 1)

Die Bearbeitungen sind wenig ausführlich gestaltet und nur durch sporadische Verwendung von Arbeitsweisen geprägt. Nicht mehr als zwei Arbeitsweisen werden höher als selten verwendet. Keine Arbeitsweise wird näherungsweise moderat oder stärker ausgeprägt verwendet.

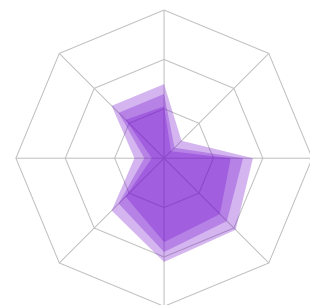


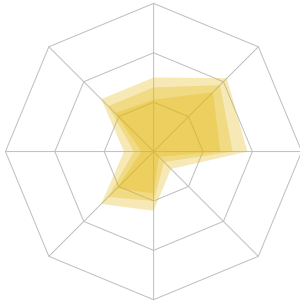
Der lösungsorientierte Typ (Typ 2)

Bei der Bearbeitung werden überwiegend konkrete Schritte zur Problemlösung vollzogen, wobei nur selten auf externe Hilfsmittel zurückgegriffen wird. Die Dokumentation wird noch ausführlich gestaltet, aber es treten nahezu keine planenden Gedanken auf. Die Ergebnisse werden größtenteils kurz eingeordnet. Das eigene Vorgehen wird jedoch kaum hinterfragt.

Der reflexive Typ (Typ 3)

Die Bearbeitung ist durch nur selten planende Schritte im Vorhinein geprägt. Die konkreten Schritte favorisieren keine Kategorie der Strategien der Durchführung deutlich und fallen ansonsten auch nur maximal moderat aus. Ein großer Teil der Bearbeitung wird mit reflexiven Gedanken verbracht. Dabei wird neben der Behandlung von Problemen oder Auffälligkeiten in der Bearbeitung und der Einordnung von Ergebnissen auch oftmals das eigene Vorgehen bewertet und die Zufriedenheit mit den Ergebnissen formuliert.



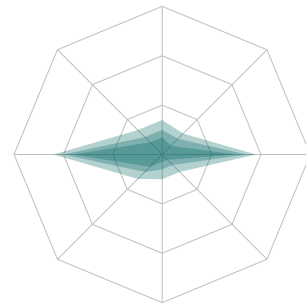


Der planende Typ (Typ 4)

Ein großer Teil der Bearbeitung wird mit der Planung der durchzuführenden Schritte und der Analyse der Problemstellung verbracht. Die Arbeitsweisen der restlichen durchführenden Schritte sind größtenteils normal verteilt. Mögliche Ergebnisse werden teils noch hinterfragt. Das eigene Vorgehen und die eigene Person werden aber im Nachhinein nur sehr selten reflektiert.

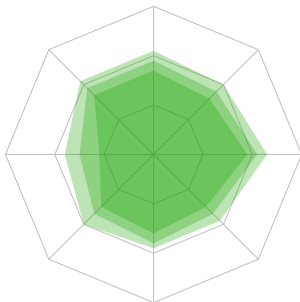
Der hilfeschuchende Typ (Typ 5)

Die Bearbeitung wird größtenteils mit externer Hilfe bestritten. Dies kann sich durch eine ausgeprägte Zusammenarbeit mit anderen Studierenden, aber auch durch eine große Zahl an hinzugezogener Literatur äußern. Die eigenen Arbeitsschritte fallen dann eher gering aus und beziehen sich überwiegend auf das externe Wissen. Die Dokumentation wird meist noch ausführlich gestaltet, wobei kaum Gedanken hinsichtlich Planung, Motivation oder Reflexion abgebildet sind.



Der ganzheitliche Typ (Typ 6)

Die Bearbeitungen sind ausführlich gestaltet und weisen eine Vielzahl unterschiedlicher Arbeitsweisen auf, die alle größtenteils mindestens moderat verwendet werden. Dabei ist keine deutliche Tendenz in Richtung einer bestimmten Kategorie von Arbeitsweisen ersichtlich. Insbesondere wird das Vorgehen auch geplant und reflektiert. Lediglich die Hilfe von außen kann variieren.



6.4. Typenbildende Inhaltsanalyse

Bei dieser Inhaltsanalyse sind alle 25 Probanden jeweils einem der am Ende von Abschnitt 6.3 beschriebenen Typen zugeordnet worden. Dazu sind jeweils alle sieben bzw. sechs Fälle eine*r Student*in zusammen betrachtet und dahingehend eine Codierung mit den beschriebenen Typen vorgenommen worden. In Abbildung 6.29 und Tabelle 6.30 sind die Zuordnungen aufgeführt – einmal nach Typen und einmal nach Proband sortiert.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

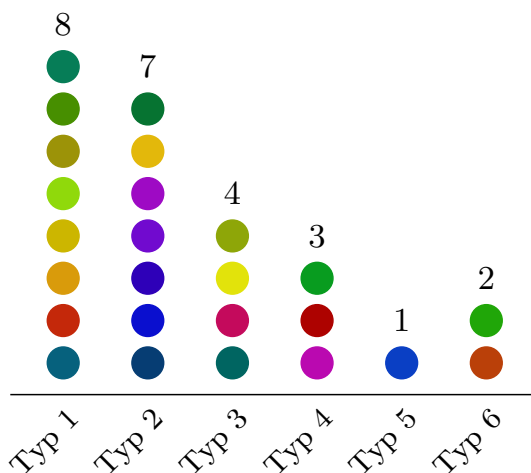


Abb. 6.29.: Anzahl der mit jeweils einem Typ codierten Probanden.

#01	#02	#03	#04	#05	#06	#07	#08	#09	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	#21	#22	#23	#24	#25
3	1	2	5	2	2	2	2	4	3	4	1	6	1	2	1	3	1	1	3	1	6	4	2	1

Tab. 6.30.: Zuordnung der Probanden zu den Typen.

Diskussion

Ein Großteil (8 von 25) der Student*innen wurde dem passiven Typ (Typ 1) zugeordnet. Diese Student*innen sind nahezu nicht in der Lage oder nicht gewillt die gestellten Arbeitsaufträge merklich zu bearbeiten. Dies ist durchaus mit der Komplexität der behandelten Problemfelder zu erklären. Die universitäre Algebra weist einen nicht zu unterschätzenden Abstraktionsgrad auf, der gerade durch die Thematisierung von elementaren Problemen möglicherweise noch erhöht wird. Die Ergebnisse decken sich damit mit gängigen Durchschnittsnoten in fachlichen Veranstaltungen zur abstrakten Mathematik an Hochschulen.

Betrachtet man die restlichen Student*innen, so ergibt sich dort ein erneut großer Anteil (7 von 25 bzw. von 17) an Student*innen, die dem problemorientierten Typ (Typ 2) zugeordnet wurden. Diese Student*innen konzentrieren sich auf die reine fachliche Bearbeitung der Problemstellung und scheinen kaum metakognitive Strategien zu beachten. Beruft man sich auf das *Literacy*-Modell von BAUER und HEFENDEHL-HEBEKER (2019), so entsteht hier der Eindruck, dass es sich hierbei um den von den Autor*innen postulierten größeren Anteil Lehramtsstudierender handeln könnte, die auf einer zweiten (*Applied Literacy*) oder dritten Stufe (*Theoretical Literacy*) verbleiben und damit möglicherweise das Wesen der Mathematik nicht vollständig durchdringen können.

Unter dem erneuten Rest treten Student*innen auf, die zusätzlich reflexive Schritte (Typ 3), zusätzlich planende Schritte (Typ 4) und zusätzlich reflexive sowie planende

Schritte (Typ 6) durchführen. Die Anzahlen sind mit 4 bzw. 3 bzw. 2 jedoch jeweils sehr gering. Inwiefern sich bei diesen neun Student*innen diese umfangreicheren Arbeitsweisen konkret äußern und insbesondere Auswirkungen auf die fachliche Lösung der Problemstellung zeigen, wird in der anschließenden komplexen Analyse in Kapitel 7 diskutiert.

Betrachtet man zusätzlich zu den codierten Typen die Beobachtungen in den Mustern aus den Abbildungen 6.24 bis 6.28 des vorigen Abschnitts 6.3, so zeigt sich, dass sich die Typzuordnung mit den Gruppierungen der Muster der evaluativen Analyse näherungsweise deckt. In Tabelle 6.31 ist eine solche Gegenüberstellung abgebildet.

evaluativ	typenbildend
Typ 1: #02 , #12, #14, #16, #18, #19, #21	#02, #12, #14, #16, #18, #19, #21, #25
Typ 2: #03 , #05, #06, #08, #15	#03, #05, #06, #07, #08, #15, #24
Typ 3: #01 , #10, #17, #20	#01, #10, #17, #20
Typ 4: #07, #09, #11, #22, #23, #24, #25	#09, #11, #23
Typ 5: #04	#04
Typ 6: #13	#13, #22

Tab. 6.31.: Gegenüberstellung der Mustererkennung in der evaluativen Inhaltsanalyse und der Codierung der typenbildenden Inhaltsanalyse.

Es ist zunächst zu sehen, dass lediglich vier Fälle, die in den evaluativen Mustern dem planenden Typ (Typ 4) zuzuordnen gewesen wären, nun neu verteilt wurden. Dabei entfallen diese abweichenden Zuordnungen bei der Typenbildung nicht auf einen einzelnen Typ, sondern verteilen sich nahezu gleichmäßig auf andere Typen. Gerade das Merkmal um planende Schritte (*Überlegungen zum Vorgehen*) scheint demnach zwar eine Ungenauigkeit zwischen der Betrachtung der Einzelfälle und der Betrachtung aller Fälle eines Probanden als Gesamtfall aufzuweisen, jedoch deutet die Verteilung auf mehrere Typen eher jeweils leichte Randeffekte, statt eine grundsätzliche Unschärfe zwischen zwei Typen an. Es werden im Folgenden die vier abweichenden Zuordnungen genauer betrachtet um insbesondere die Typisierung genauer erklären und die Möglichkeit einer solchen Unschärfe ausschließen zu können.

- **Proband #25**

Es wird besonders die für Typ 4 charakterisierende evaluative Merkmalsdimension *Überlegungen zum Vorgehen* betrachtet (siehe Abbildung 6.32).

Dort lässt sich erkennen, dass dieses Merkmal in der evaluativen Gesamtbetrachtung zwar einen leichten Ausschlag nach rechts oben aufweist, jedoch ist dieser auf wenige hohe Ausprägungen in einzelnen Arbeitsaufträgen zurückzuführen. Der Ausprägungsverlauf über das gesamte Semester äußert sich relativ sprunghaft. Bei der Codierung in der typenbildenden Inhaltsanalyse wird eine Beurteilung

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

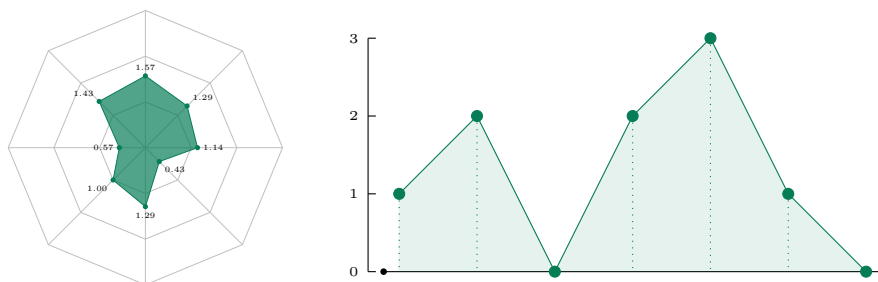


Abb. 6.32.: Evaluative Ausprägung (links) und Ausprägungsverlauf über die sieben Arbeitsaufträge des Merkmals *Überlegungen zum Vorgehen* (rechts) bei Proband #25.

aller Arbeitsaufträge zusammengefasst getroffen, wobei eine stark wechselhafte Verwendung womöglich einen niedrigeren Gesamteindruck hinterlässt. Zudem ist auch anzumerken, dass der Mittelwert in der Ausprägung der erwähnten Merkmalsdimension grundsätzlich nicht sonderlich hoch ist. Damit kann es sich hierbei auch um einen schlichten Randeffekt handeln.

Betrachtet man weiter auch die Ausprägungsverläufe der anderen drei ausgeprägteren evaluativen Merkmale (*Allgemeinere mathematische Techniken*, *Beispielgebundenes Vorgehen*, *Einordnung von Ergebnissen*), so zeigt sich zumindest bei einer weiteren Merkmalsdimension (*Beispielgebundenes Vorgehen*) ein wechselhaftes Nutzungsmuster (siehe Abbildung 6.33). Die anderen beiden Merkmalsdimensionen werden näherungsweise bzw. über einen längeren Zeitraum hinweg konstant verwendet. Hier weist die insgesamt dennoch geringe Ausprägung auf einen Randeffekt beim interpretativen Ansatz der Typisierung hin.

Alle vier Merkmale mit vergleichsweise höherer Ausprägung weisen somit dennoch in absoluten Werten eher geringe Ausprägungen auf und zwei dieser Merkmale zeigen zusätzlich tendenziell wechselhafte Ausprägungsverläufe. Insgesamt ist damit eine Codierung in der typenbildenden Inhaltsanalyse mit Typ 1 (passiver Typ) nicht abwegig.

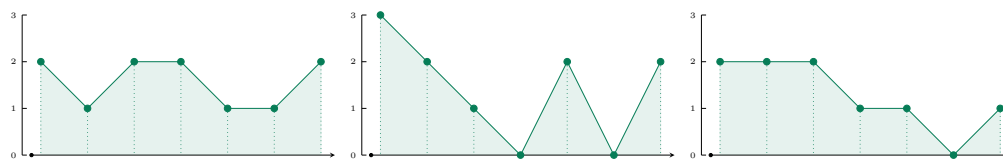


Abb. 6.33.: Ausprägungsverläufe der Merkmale *Allgemeinere mathematische Techniken* (links), *Beispielgebundenes Vorgehen* (mittig), *Einordnung von Ergebnissen* (rechts) bei Proband #25.

• Proband #07 und #24

Betrachtet man die Muster der Netzdiagramme der beiden Probanden aus der evaluativen Analyse (siehe Abbildung 6.34), so lässt sich darauf hinweisen, dass

man diese beiden Fälle bereits bei der Gruppierung dieser Muster zu Typ 2 (lösungsorientierter Typ) hinzuzählen hätte können. Lässt man die niedrige Ausprägung in der für Typ 4 (planender Typ) charakterisierenden Merkmalsdimension *Überlegungen zum Vorgehen* unbeachtet, so kommt als nächstes Typ 2 in Frage, den auch die typenbildende Analyse codiert. Es handelt sich hierbei also um minimale Randeffekte.

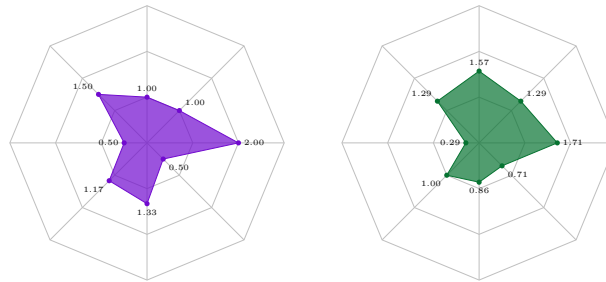


Abb. 6.34.: Evaluative Ausprägung bei Proband #07 (links) und #24 (rechts).

• Proband #22

Auch bei diesem Proband wäre durchaus bereits in der Gruppenbildung anhand der Muster der evaluativen Analyse eine Zuordnung zu Typ 6 (ganzheitlicher Typ) gerechtfertigt gewesen. Die Ausprägung nach rechts unten ist zwar im Vergleich weniger auffällig – weswegen zunächst die Zuordnung zu Typ 4 (planender Typ) getroffen wurde –, jedoch fällt sie im Vergleich zu den anderen Probanden insgesamt höher aus. Die typenbildende Analyse zeigt in diesem Fall einen deutlichen Vorteil gegenüber der Einordnung nach Mustern aus der evaluativen Analyse: Sie bewertet mehr die tatsächliche Verwendung einer Arbeitsweise, statt deren Relation zu den restlichen Arbeitsweisen. Diese spiegelt sich insbesondere in den Mustern der Netzdiagramme – durch die Darstellung als Flächenfiguren – wider.

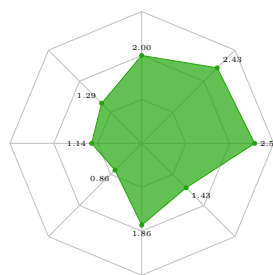


Abb. 6.35.: Evaluative Ausprägung bei Proband #22.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Typisierung eine nachvollziehbare Einteilung der Student*innen liefert. Die Zuordnung zu höheren⁴ Typen erfolgt leicht strenger

⁴Höher im Sinne von *wünschenswerter im Bezug auf Problemlösekompetenzen*.

6. Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalysen der Lernprozessdokumentationen

als es die Einteilung nach Mustern in der evaluativen Inhaltsanalyse vorgegeben hat. Die Entscheidungen hin zu bestimmten Typen bleiben dabei aber nachvollziehbar und gerechtfertigt und die Unterschiede zur evaluativen Analyse lassen insbesondere nicht auf eine Unschärfe der Ergebnisse zurückschließen. Dennoch bleibt die Erkenntnis, dass für eine genauere Beschreibung der Arbeitsweisen der individuellen Student*innen weiterhin die einzelnen Bearbeitungen als Fälle betrachtet werden müssen.

Zudem ist anzumerken, dass die Typisierung in dieser Form prinzipiell an zwei Merkmalen unterscheidbar ist: Die Verwendung von reflexiven und bzw. oder planenden Schritten.⁵ Insbesondere im Hinblick auf die Schritte zur konkreten Problembewältigung lassen sich bisher kaum Unterschiede bei den Student*innen erkennen. Es folgt eine komplexe Analyse der gewonnenen Typologie, wobei zu Beginn vor allem auf die Ausprägungsverläufe dieser Merkmalsdimensionen zur konkreten Problembewältigung eingegangen wird. Weiterführend werden solche Merkmale in die Interpretation miteinbezogen, die bisher keine oder kaum Einflüsse auf die Analyse hatten. Hier wird schließlich auch auf ein Konzept zur Beurteilung einer fachlich sinnvollen Verwendung einer Arbeitsweise zurückgegriffen. Am Ende steht eine abschließende Einzelfallbetrachtung von Fällen und Probanden, die innerhalb der Typologie besonders aufgefallen sind.

⁵Der Sonderfall Typ 5 (hilfesuchender Typ) ist hier als Anomalie ausgeklammert.

Teil V

Abschließende Betrachtung und Ausblick

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Im folgenden Kapitel wird die Typisierung der vorangegangenen qualitativen Inhaltsanalyse unter Berücksichtigung von Merkmalen, die nicht direkt für die Zuordnung der Typen relevant sind, fortführend interpretiert und ausdifferenziert. Die zusätzlich betrachteten Merkmale lassen sich in prozessorientierte, fachliche und sonstige Merkmale aufteilen. Bei den prozessorientierten Merkmalen wird insbesondere auf eine konsistente Verwendung von bestimmten Arbeitsweisen eingegangen. Bei den fachlichen Merkmalen werden fachliche Beurteilungen der Bearbeitungen und eine Bewertung der verwendeten Arbeitsweisen hinsichtlich einer gewinnbringenden Nutzung herangezogen. Zu den erhobenen sonstigen Merkmalen zählen das Fachsemester als grobes Merkmal des Vorwissens, das Zweifach der Student*innen und die Geschlechtsidentität. Die komplexe Analyse wird neben der genaueren Beschreibung und Interpretation der Typisierung auch dazu genutzt, dass daran eine Auswahl von Einzelfällen getroffen wird, die abschließend nochmals genauer betrachtet werden. Dabei werden mögliche Auffälligkeiten aus der komplexen Analyse direkt im Material überprüft und präzise erklärt.

7.1. Prozessorientierte Merkmale

Betrachtet man die einzelnen Ausprägungen der acht Merkmalsdimensionen der einzelnen Student*innen pro Arbeitsauftrag, so lässt sich ein Verlauf der Nutzung entsprechender Arbeitsweisen untersuchen. In Abbildung 7.1 ist ein solcher Verlauf beispielhaft für Proband #01 dargestellt. Die Ausprägungsgrade sind dabei nach oben von 0 bis 3 abgetragen. Von links nach rechts sind die aufeinanderfolgenden Arbeitsaufträge abgebildet. Die acht Dimensionen sind von vorne nach hinten angeordnet und zusätzlich gemäß der darunter stehenden Legende farblich gekennzeichnet. Weiter sind pro Merkmalsdimension rechtsstehend die mittlere Ausprägung als arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ und die mittlere Abweichung als korrigierte Stichprobenvarianz mittels Abweichungsquadraten $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ angegeben.

Die Verläufe aller 25 Probanden sind in gleicher Form in Anhang B in den Abbildungen B.11 bis B.35 (S. 322–334) dargestellt. Es sei an dieser Stelle erneut auf die Tabelle

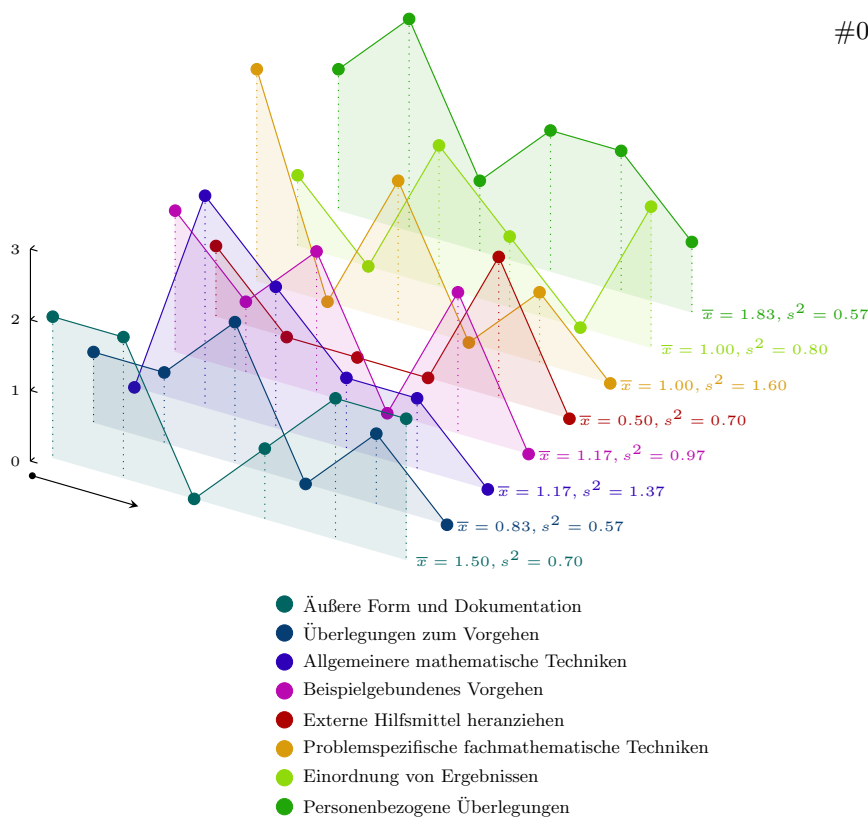


Abb. 7.1.: Beispielhafter Verlauf der Ausprägungen der Merkmalsdimensionen über alle Arbeitsaufträge von Proband #01 mit Legende zur Farbgebung.

der numerischen Werte dieser Ausprägungen in Tabelle B.38 (S. 337) in Anhang B verwiesen. Zusätzlich sind die mittleren Ausprägungen und mittleren Abweichungen in den Tabellen B.39 und B.40 (S. 338f.) zu finden. Es ist deutlich zu betonen, dass diese numerischen Daten in ihrer quantitativen Form keine statistische Aussagekraft besitzen. Es handelt sich hierbei lediglich um eine numerische Darstellung von qualitativen Daten zur Unterstützung der Interpretation der graphischen Darstellung. Die untersuchte Stichprobe besitzt keine Repräsentativität und ist insgesamt zu klein für eine quantitative Auswertung.

Insgesamt kann bei allen untersuchten Student*innen keine Tendenz hin zu einer Steigerung der Ausprägungen im Laufe aller Arbeitsaufträge erkannt werden. Die Ausprägungen bleiben überwiegend auf gleichem Niveau oder variieren flächendeckend stark. Die variierende Nutzung spricht dafür, dass die Entscheidung für Arbeitsweisen bei den Student*innen stark von der jeweiligen Problemstellung abhängt. Die konstanten Ausprägungen ohne Tendenz zur Steigerung sind hingegen ein Indiz dafür, dass bei den Student*innen kein Lerneffekt hinsichtlich der Verwendung von Arbeitsweisen auf-

tritt. Die Verwendung von Arbeitsweisen erscheint damit als aufgabenspezifische und individuell stabile Eigenschaft von Lernenden.

Die Probanden aus Typ 1 (passiver Typ) sind dadurch charakterisiert, dass sie nur selten überhaupt Arbeitsweisen dokumentieren. Dies zeigt sich im Verlauf des Semesters durch generell sehr niedrige Ausprägungen in allen acht Merkmalsdimensionen. Vereinzelt treten dabei dennoch Bearbeitungen von Arbeitsaufträgen auf, bei denen einzelne wenige Merkmalsdimensionen höhere bis sogar hohe Ausprägungen aufweisen (siehe bspw. Abbildung 7.2). Hier scheinen die entsprechenden Student*innen kurzzeitig einen Ansatz gefunden zu haben, der bei der vorliegenden Problemstellung für sie anwendbar ist und nutzen diese Arbeitsweise dann exzessiv. Womöglich geschieht dies aus der Not heraus, dass ansonsten keine weiteren Ansätze oder Ideen zur Verfügung stehen. Die Tatsache, dass die Ausprägungen in den nachfolgenden Arbeitsaufträgen aber meist wieder deutlich absinken, spricht dafür, dass die entsprechenden Arbeitsweisen bei diesen Student*innen nicht als tatsächlich beherrschte Problemlösestrategien vorhanden sind.

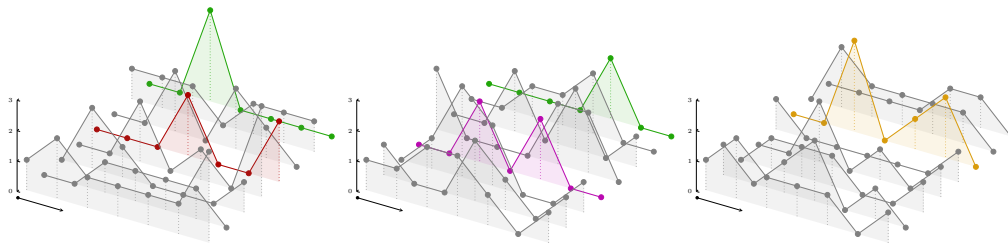


Abb. 7.2.: Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #14, #18 und #19 als Beispiele für vereinzelte Spitzen in Typ 1.

Es wird sich im weiteren Verlauf überwiegend auf die Probanden außerhalb von Typ 1 (passiver Typ) fokussiert, da nur dort tatsächliche Bearbeitungen ersichtlich sind.

Bei allen Probanden aus Typ 2 bis 6 lässt sich ein genereller Einbruch der Ausprägung vieler Merkmalsdimensionen bei Arbeitsauftrag 4 und 7 beobachten. Dabei handelt es sich jeweils um den letzten Arbeitsauftrag der beiden Inhaltsbereiche, welcher eine abstrakte Behandlung der übergeordneten Problemstellung auf universitärem Niveau ins Auge fasst. Die Tatsache, dass gerade hier nahezu alle Student*innen deutlich weniger Möglichkeiten zur Bearbeitung haben, ist mit der erhöhten fachlichen Schwierigkeit dieser Arbeitsaufträge zu erklären. Dennoch zeigen sich leichte Unterschiede zwischen den Typen. Bei Typ 2 (lösungsorientierter Typ) sind derartige Einbrüche nahezu flächendeckend in den meisten Merkmalsdimensionen zu beobachten (siehe bspw. Abbildung 7.3).

Bei Typ 3 (reflexiver Typ) widerstehen die Probanden einem Einbruch zumindest in wenigen Dimensionen, aber dort recht konsequent (siehe bspw. Abbildung 7.4).

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

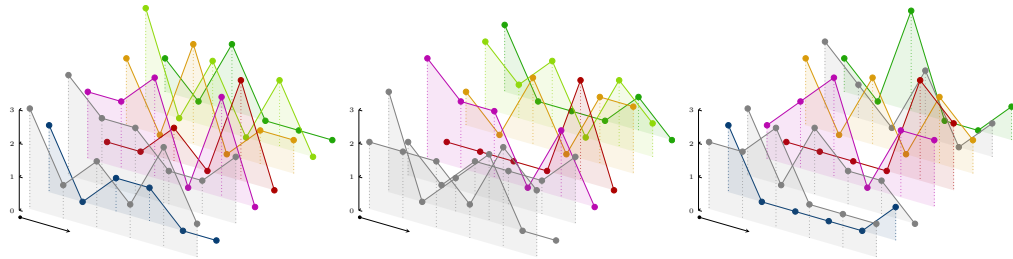


Abb. 7.3.: Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #06, #07 und #08 als Beispiele für Einbrüche bei den Arbeitsaufträgen 4 und 7 in Typ 2.

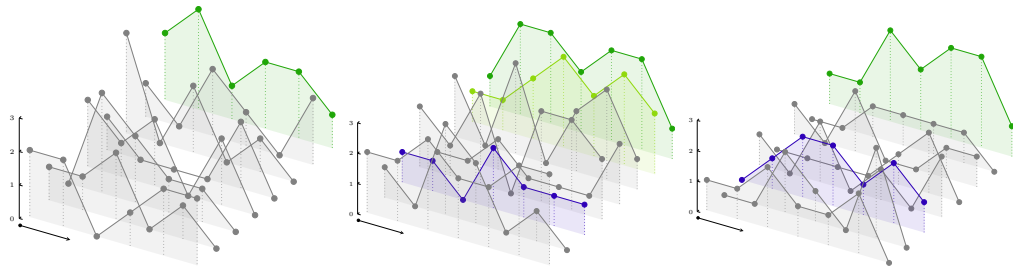


Abb. 7.4.: Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #01, #10 und #20 als Beispiele für ausbleibende größere Einbrüche bei den Arbeitsaufträgen 4 und 7 in Typ 3.

Typ 6 (ganzheitlicher Typ) zeigt die höchste Resilienz gegen derartige Einbrüche. Hier sind insbesondere die planenden und reflexiven Merkmalsdimensionen deutlich niedriger von den beschriebenen Einbrüchen betroffen (siehe bspw. Abbildung 7.5).

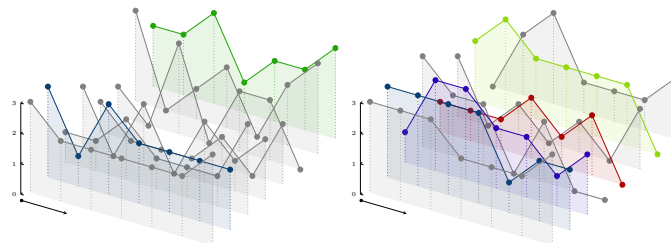


Abb. 7.5.: Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #13 und #22 als Beispiele für ausbleibende größere Einbrüche bei den Arbeitsaufträgen 4 und 7 in Typ 6.

Für Typ 3, 4, 5 und 6 lassen sich gewisse Merkmalsdimensionen als solche Merkmale bezeichnen, die diesen Typ charakterisieren. Bei Typ 3 (reflexiver Typ) sind das die Merkmalsdimensionen *Einordnung von Ergebnissen* und *Personenbezogene Überlegungen*, bei Typ 4 (planender Typ) die Merkmalsdimension *Überlegungen zum Vorgehen*, bei Typ 5 (hilfesuchender Typ) die Merkmalsdimension *Externe Hilfsmittel heranziehen* und bei Typ 6 (ganzheitlicher Typ) die Merkmalsdimensionen *Überlegungen zum Vorgehen*, *Einordnung von Ergebnissen* und *Personenbezogene Überlegungen*. Zumindest in diesen charakterisierenden Merkmalen weisen die Probanden eines Types überwiegend konstante

Ausprägungsgrade mit relativ niedrigen Abweichungen über das gesamte Semester auf. Dies zeigt sich auch numerisch in überwiegend relativ niedrigen durchschnittlichen mittleren Abweichungen innerhalb der Typen.¹ In Tabelle 7.6 sind die charakterisierenden Merkmale jeweils hervorgehoben.

	Typ: 1		2		3		4		5		6	
	\bar{x}	s^2	\bar{x}	s^2	\bar{x}	s^2	\bar{x}	s^2	\bar{x}	s^2	\bar{x}	s^2
Äußere Form und Dokumentation	0.93	0.47	1.87	0.67	1.62	0.44	2.00	0.73	1.50	0.70	2.43	0.26
Überlegungen zum Vorgehen	0.68	0.51	0.71	0.74	0.85	0.99	1.57	0.98	0.33	0.27	2.29	0.55
Allgemeinere mathematische Techniken	0.85	0.54	1.34	0.75	1.15	0.94	1.19	0.63	1.00	0.80	1.71	0.64
Beispielgebundenes Vorgehen	0.72	0.85	1.43	1.10	1.11	0.85	1.33	1.06	0.83	1.37	1.29	1.24
Externe Hilfsmittel heranziehen	0.44	0.63	0.53	1.09	0.41	0.54	0.43	0.43	1.83	1.37	0.86	0.55
Problemspezifische fachmathematische Techniken	0.75	0.84	1.23	1.32	1.11	1.32	1.14	1.08	1.17	0.97	1.00	1.14
Einordnung von Ergebnissen	0.78	0.39	1.04	0.79	1.18	0.72	1.14	0.79	0.17	0.17	1.71	1.21
Personenbezogene Überlegungen	0.41	0.50	0.53	0.77	1.85	1.01	0.81	1.40	0.00	0.00	1.79	0.71

Tab. 7.6.: Durchschnittliche mittlere Ausprägung und Abweichung innerhalb der einzelnen Typen.

Die durchschnittlichen mittleren Abweichungen s^2 sind zwar überwiegend höher als bei den nicht hervorgehobenen Typen, dies ist jedoch darauf zurückzuführen, dass die anderen Typen² diese Arbeitsweisen generell wenig bis kaum verwenden und entsprechend keine Streuung entsteht. Es zeigt sich also insbesondere, dass die Nichtverwendung von entsprechenden Arbeitsweisen bei diesen Typen sehr stabil ist. Die Probanden der Typen 3, 4, 5 und 6 weisen innerhalb eines charakterisierenden Merkmals insgesamt höhere Ausprägungen auf und zeigen zusätzlich nur leicht höhere Abweichungen, was insgesamt ebenfalls als relativ stabile Verwendung von Arbeitsweisen interpretiert werden kann.

Die Merkmalsdimensionen *Allgemeinere mathematische Techniken*, *Beispielgebundenes Vorgehen*, *Externe Hilfsmittel heranziehen* und *Problemspezifische fachmathematische Techniken* beschreiben Arbeitsweisen zur konkreten Problembewältigung. Schon bei der Festlegung der Typen in der evaluativen Inhaltsanalyse war ersichtlich, dass sich die Student*innen insgesamt zwar auf diese Arbeitsweisen fokussieren, aber die Verwendung sich dabei auf die vier Merkmalsdimensionen aufteilt. In den graphischen Darstellungen der Verläufe der Ausprägungen wie auch in den eben dargestellten numerischen durch-

¹Man ignoriere an dieser Stelle Typ 5 (hilfesuchender Typ). Hierunter fällt sowieso nur ein Proband und von einer tatsächlichen Bearbeitung kann auch bei diesem Typ nicht wirklich die Rede sein.

²Insbesondere die Typen 1 und 2.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

schnittlichen Werten für Ausprägung und Abweichung zeigt sich, dass die Student*innen derartige Arbeitsweisen eher wechselhaft verwenden. Die durchschnittlichen mittleren Abweichungen sind trotz nur leicht erhöhter durchschnittlicher mittlerer Ausprägungen auf einem ähnlichen Level wie die deutlich höher ausgeprägten charakterisierenden Merkmale. Dabei weist die Merkmalsdimension *Allgemeinere mathematische Techniken* noch die niedrigsten durchschnittlichen mittleren Abweichungen über alle Typen hinweg auf. In den graphischen Darstellungen der Verläufe der Ausprägungen äußert sich das durch relativ geringe Schwankungen (siehe bspw. Abbildung 7.7). Dies ist damit zu erklären, dass entsprechende Arbeitsweisen allgemeiner und damit universaler anwendbar sind.

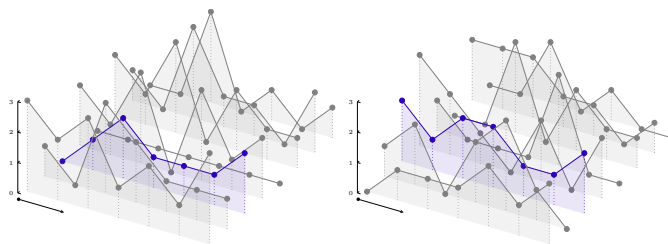


Abb. 7.7.: Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #09 und #25 als Beispiele für relativ konstante Ausprägungen der Merkmalsdimension *Allgemeinere mathematische Techniken*.

Bei der Merkmalsdimension *Problemspezifische fachmathematische Techniken* zeigt sich hingegen ein anderes Bild (siehe bspw. Abbildung 7.8). Die durchschnittliche mittlere Ausprägung ist ähnlich hoch, jedoch sind die durchschnittlichen mittleren Abweichungen bei jedem Typ höher. Auch dies ist mit der Natur der in dieser Merkmalsdimension verorteten Arbeitsweisen zu erklären. Problemspezifische Techniken sind, wie die Bezeichnung suggeriert, problemspezifisch orientiert und damit in ihrer Anwendbarkeit durch die Aufgabenstellung eingeschränkt. Eine gleichförmige Verwendung derartiger Arbeitsweisen ist bei möglicherweise unterschiedlich gearteten Fragestellungen nicht zu erwarten. Zusätzlich benötigt die Verwendung eine genauere Kontrolle der Anwendbarkeit.

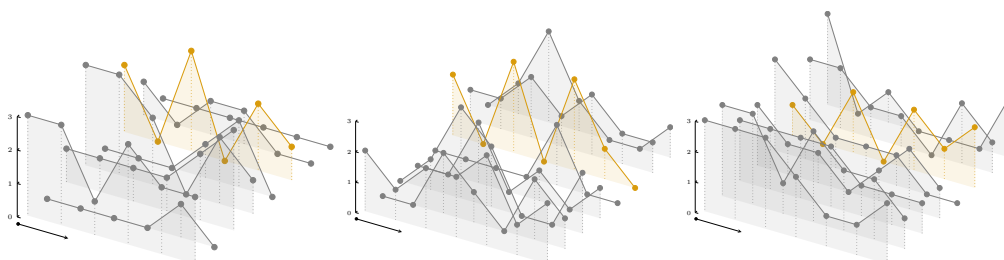


Abb. 7.8.: Ausprägungsverläufe der Merkmalsdimensionen der Probanden #03, #15 und #23 als Beispiele für relativ stark schwankende Ausprägungen der Merkmalsdimension *Problemspezifische fachmathematische Techniken*.

Eine genauere Beschreibung oder Unterscheidung der Typen ist anhand der Verläufe der Ausprägungen der lösungsorientierten Merkmalsdimensionen nicht möglich, da diese sich darin nur wenig unterscheiden und insbesondere bei Arbeitsweisen mit höheren Schwankungen selbst innerhalb eines Typs keine Konsistenz ersichtlich ist. Die schlichte Verwendung von speziellen Ansätzen zur Problemlösung scheint nur wenig mit einer übergeordneten Struktur des Vorgehens zusammenzuhängen. Aus diesem Grund wird im Folgenden zu einer Betrachtung von fachlichen Merkmalen übergegangen. Hier werden erstmals derartige Informationen mitberücksichtigt, die eine fachliche Sinnhaftigkeit oder sogar Korrektheit der Bearbeitungen beschreiben.

7.2. Fachliche Merkmale

Es werden in diesem Abschnitt zwei weitere Merkmale zur Interpretation der Typen der qualitativen Inhaltsanalyse miteinbezogen: Die Beurteilung, ob eine verwendete Arbeitsweise auch tatsächlich gewinnbringend hinsichtlich eines fachlichen Ergebnisses ist und die Fachnoten der Bearbeitungen. Es zeigt sich zum einen, dass planende Schritte mit einer gewinnbringenden Nutzung von allgemeineren mathematischen Techniken und beispielgebundenem Vorgehen sowie reflexive Schritte mit einer gewinnbringenden Nutzung problemspezifischer fachmathematischer Techniken in Verbindung zu stehen scheinen.

Im vorigen Abschnitt 7.1 konnten kaum Unterschiede bei der Verwendung von Arbeitsweisen zur konkreten Problembewältigung identifiziert werden. Die Verwendung dieser Arbeitsweisen wird nun zusätzlich danach beurteilt, ob diese Verwendung gewinnbringend oder ohne signifikantes fachliches Ergebnis stattgefunden hat. Es wird sich dabei auf die drei Merkmalsdimensionen *Allgemeinere mathematische Techniken*, *Beispielgebundenes Vorgehen* und *Problemspezifische fachmathematische Techniken* beschränkt. Die vierte Merkmalsdimension der Arbeitsweisen zur konkreten Problembewältigung (*Externe Hilfsmittel heranziehen*) wird außerhalb von Typ 5 (hilfesuchender Typ) nur sehr selten verwendet. In den Abbildungen 7.9, 7.10 und 7.11 sind die Ausprägungen der 25 Probanden für die jeweils sechs bzw. sieben Arbeitsaufträge jeweils für eine der drei Merkmalsdimensionen erneut dargestellt und es ist zusätzlich unter jedem Arbeitsauftrag entsprechend vermerkt, ob keine Verwendung (weißer Kreis), keine gewinnbringende Verwendung (roter Kreis) oder eine gewinnbringende Verwendung (grüner Kreis) aufgetreten ist.

Man kann hier erkennen, dass eine hohe Ausprägung einer Arbeitsweise nicht zwangsweise in brauchbaren fachlichen Ergebnissen münden muss³. Andererseits können auch

³Beispielsweise #08 und #17 bei Arbeitsauftrag 3 in Abbildung 7.9

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

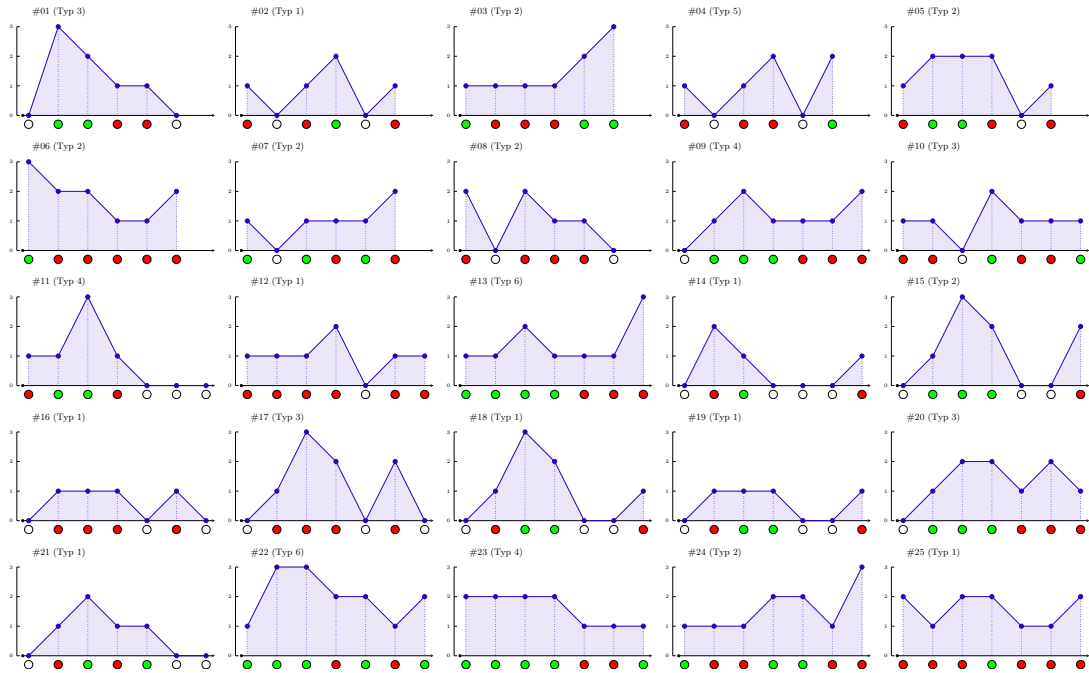


Abb. 7.9.: Ausprägungsverläufe der Arbeitsweise *Allgemeinere mathematische Techniken* der einzelnen Probanden mit Kennzeichnung von keiner \circ , nicht gewinnbringender \bullet oder gewinnbringender \bullet Verwendung.

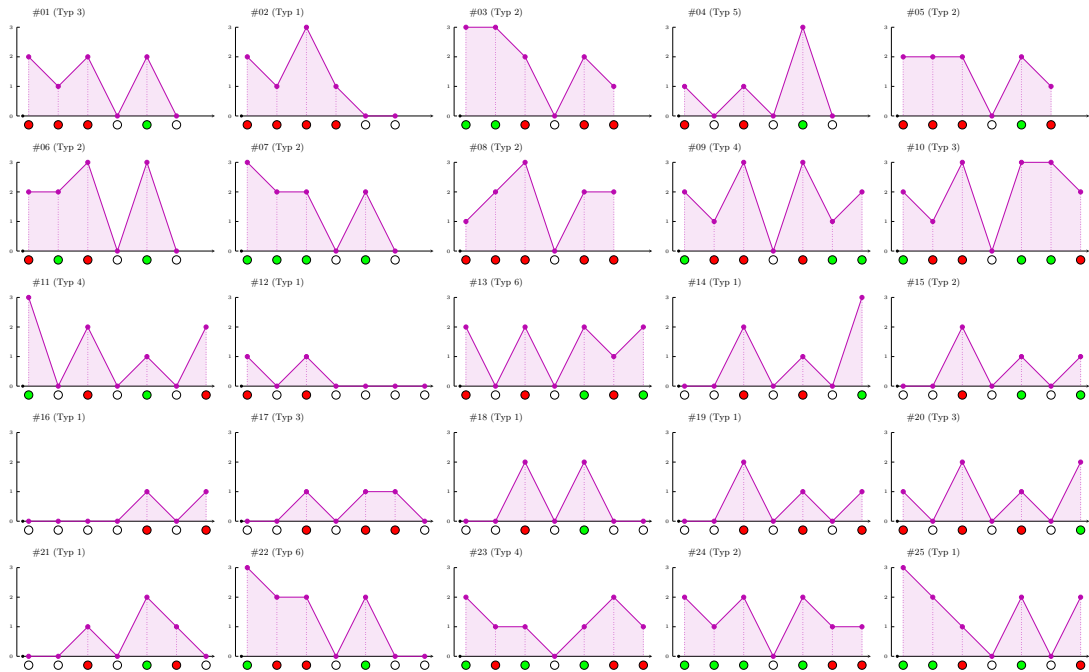


Abb. 7.10.: Ausprägungsverläufe der Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* der einzelnen Probanden mit Kennzeichnung von keiner \circ , nicht gewinnbringender \bullet oder gewinnbringender \bullet Verwendung.

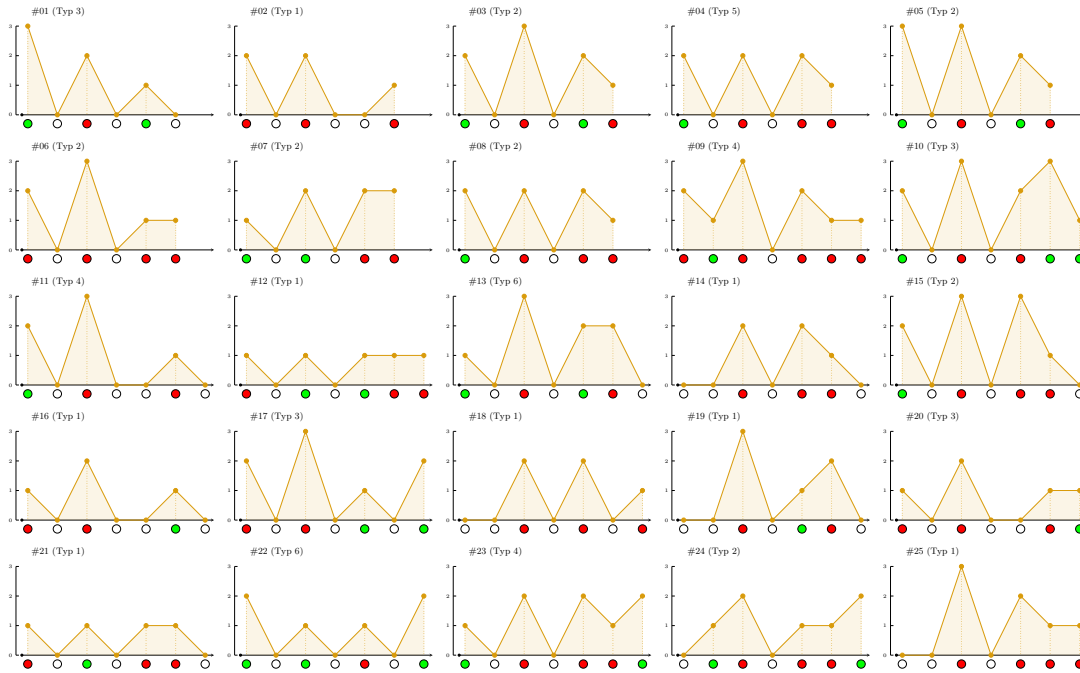


Abb. 7.11.: Ausprägungsverläufe der Arbeitsweise *Problemspezifische fachmathematische Techniken* der einzelnen Probanden mit Kennzeichnung von keiner \circ , nicht gewinnbringender \bullet oder gewinnbringender \bullet Verwendung.

geringe Ausprägungen von Arbeitsweisen einen gewinnbringenden Beitrag zur Problemlösung beisteuern⁴.

Bezüglich der gewinnbringenden Nutzung lassen sich nun gewisse Unterschiede zwischen den einzelnen Typen feststellen. In den Abbildungen 7.12, 7.13 und 7.14 sind die Anzahlen von keiner, nicht gewinnbringender und gewinnbringender Verwendung jeweils einer der drei betrachteten Merkmalsdimensionen der Strategien der Durchführung pro Typ dargestellt. Es ist hier darauf hinzuweisen, dass eine derart quantitative Darstellung dieser Daten weiterhin nicht gänzlich ohne Fehler ist. Da bei einem Teil der Student*innen sechs und beim anderen Teil sieben Arbeitsaufträge analysiert wurden und sich diese Student*innen innerhalb der Typen mischen können, addieren sich die drei Werte innerhalb eines Typs nicht zwangsweise zu 6 oder 7 auf. Die numerische Darstellung dient hier ebenso wie bei den Darstellungen der Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse der Veranschaulichung von qualitativen Daten, um eine entsprechend qualitative Interpretation zu erleichtern. Quantitative Kriterien – insbesondere im Hinblick auf statistische Genauigkeit – sind hierbei nicht erfüllt.

Für die Arbeitsweisen *Allgemeinere mathematische Techniken* und *Beispielgebundenes Vorgehen* zeigt sich die höchste Anzahl gewinnbringender Nutzung jeweils bei den Typen 4

⁴Beispielsweise #07 bei Arbeitsauftrag 1 und 3 in Abbildung 7.9

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

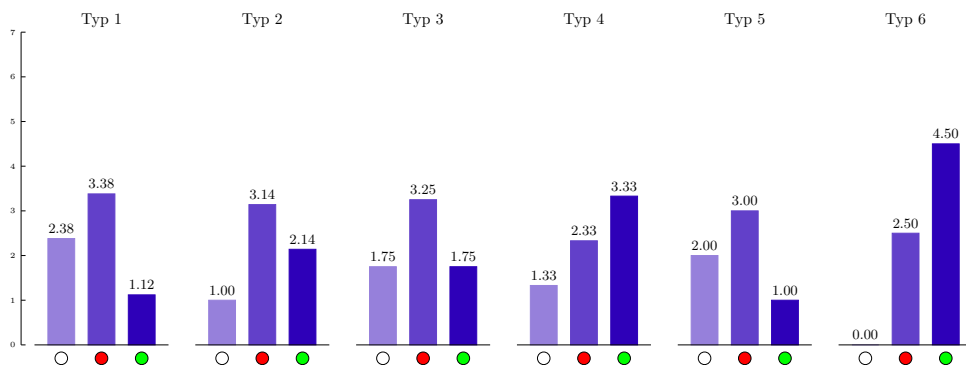


Abb. 7.12.: Anzahl keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung der Arbeitsweise *Allgemeinere mathematische Techniken*.

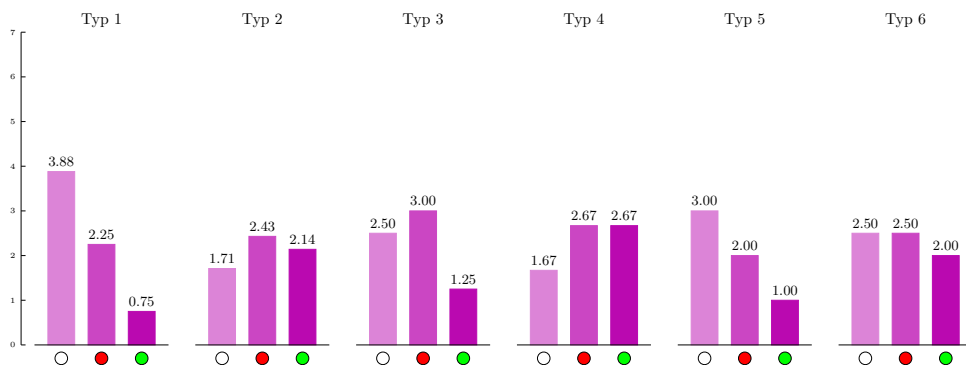


Abb. 7.13.: Anzahl keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung der Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen*.

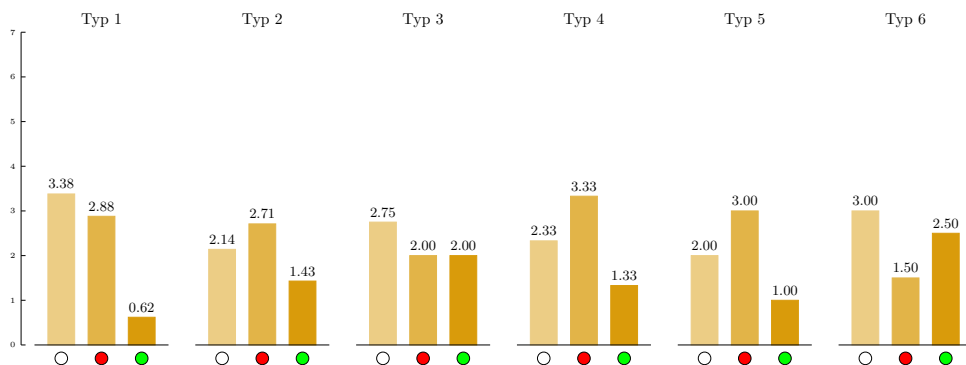


Abb. 7.14.: Anzahl keiner ○, nicht gewinnbringender ● oder gewinnbringender ● Verwendung der Arbeitsweise *Problemspezifische fachmathematische Techniken*.

und 6. Das zugrundeliegende charakterisierende Merkmal, das diese beiden Typen gemeinsam haben, ist eine hohe Ausprägung im Bereich von planenden Schritten (*Überlegungen zum Vorgehen*). Bei der Arbeitsweise *Problemspezifische fachmathematische Techniken* zeigen die Typen 3 und 6 jeweils die höchste Anzahl gewinnbringender Nutzung. Hier ist das gemeinsame charakterisierende Merkmal eine erhöhte Ausprägung bei reflexiven Schritten (*Einordnung von Ergebnissen* und *Personenbezogene Überlegungen*). Bei dieser Merkmalsdimension fällt zusätzlich besonders auf, dass Typ 3 und 6 jeweils eine deutlich niedrigere Anzahl an nicht gewinnbringender Verwendung als alle restlichen Typen aufweisen. Die Student*innen dieser Typen scheinen also nicht nur den gewinnbringenden Einsatz entsprechend problemspezifischer Strategien besser umsetzen zu können, sondern sie erkennen auch eher, ob eine problemspezifische Strategie anwendbar ist oder nicht und nutzen diese deutlich häufiger in den richtigen Situationen. Man kann von einer stärker ausgeprägten zielgerichteten und kontrollierten Nutzung dieser Techniken sprechen.

Für die weitere Interpretation der gewinnbringenden Nutzung lassen sich zusätzlich die konkreten Ausprägungsgrade bei der Nutzung einer Arbeitsweise aus der evaluativen Inhaltsanalyse miteinbeziehen. In den Abbildungen 7.15, 7.16 und 7.17 sind jeweils die gemittelten Ausprägungsgrade der drei betrachteten Merkmalsdimensionen bei gewinnbringender Nutzung pro Arbeitsauftrag pro Proband dargestellt. Keine Nutzung oder nicht gewinnbringende Nutzung sind hier ausgeblendet. Ein Wert von x in dieser Darstellung meint also, dass Arbeitsweisen einer Merkmalsdimension im Schnitt in jedem Arbeitsauftrag eines*r Student*in aus diesem Typ in der Ausprägung x gewinnbringend verwendet wurden.

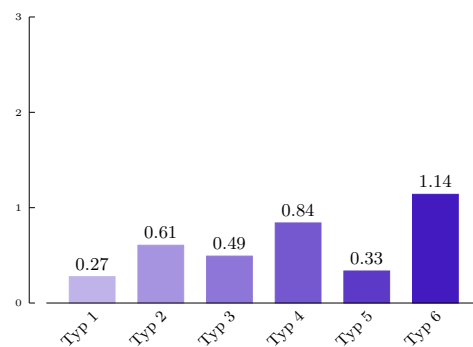


Abb. 7.15.: Relative Ausprägung gewinnbringender Verwendung der Arbeitsweise *Allgemeinere mathematische Techniken* innerhalb der Typen pro Proband pro Arbeitsauftrag.

Auch hier zeigt sich ein ähnliches Bild wie bei den eben betrachteten Anzahlen gewinnbringender Nutzung. Es ist nämlich eine höhere mittlere Ausprägung gewinnbringender Nutzung der Merkmalsdimensionen *Allgemeinere mathematische Techniken* und *Beispielgebundenes Vorgehen* bei den Typen 4 und 6 sowie eine höhere mittlere Ausprägung

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

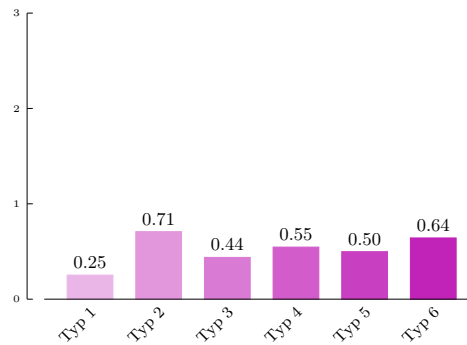


Abb. 7.16.: Relative Ausprägung gewinnbringender Verwendung der Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* innerhalb der Typen pro Proband pro Arbeitsauftrag.

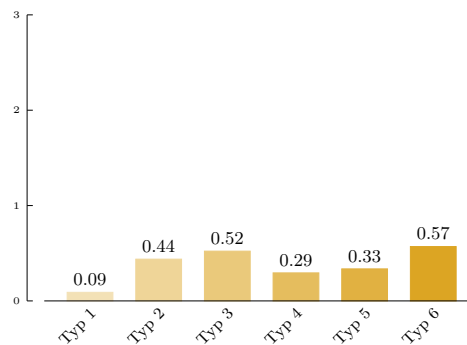


Abb. 7.17.: Relative Ausprägung gewinnbringender Verwendung der Arbeitsweise *Problemspezifische fachmathematische Techniken* innerhalb der Typen pro Proband pro Arbeitsauftrag.

gewinnbringender Nutzung der Merkmalsdimension *Problemspezifische fachmathematische Techniken* bei den Typen 3 und 6 zu beobachten. Zusätzlich zeigt sich auch Typ 2 (lösungsorientierter Typ) mit einer erhöhten mittleren Ausprägung gewinnbringender Nutzung der Merkmalsdimension *Beispielgebundenes Vorgehen*. Diese höheren mittleren Ausprägungen gewinnbringender Nutzung bewegen sich jeweils im Bereich des Ausprägungsgrades 1 (*geringe Ausprägung*). Es sind also bei Student*innen aus Typ 2 (lösungsorientierter Typ) im Schnitt pro Arbeitsauftrag zumindest vereinzelte gewinnbringende Anwendungen von beispielgebundenem Vorgehen, bei Student*innen aus Typ 3 (reflexiver Typ) vereinzelte gewinnbringende Anwendungen von problemspezifischen fachmathematischen Techniken, bei Student*innen aus Typ 4 (planender Typ) vereinzelte gewinnbringende Anwendungen von allgemeineren mathematischen Techniken und beispielgebundenem Vorgehen sowie bei Student*innen aus Typ 6 (ganzheitlicher Typ) vereinzelte gewinnbringende Anwendungen von allgemeineren mathematischen Techniken, beispielgebundenem Vorgehen und problemspezifischen fachmathematischen Techniken zu beobachten.

Es lässt sich insgesamt ein Zusammenhang zwischen planenden Schritten und allgemeineren mathematischen Techniken sowie ein Zusammenhang zwischen reflexiven Schritten und problemspezifischen fachmathematischen Techniken erkennen. Zudem ist beispielgebundenes Vorgehen offensichtlich der gemeinsame Nenner von Student*innen, die überhaupt Arbeitsweisen hinsichtlich einer konkreten Problembewältigung angehen – bzw. angehen können oder wollen. Hierbei sticht allerdings der diesbezüglich relativ niedrige Wert bei Typ 3 (reflexiver Typ) hervor. Gerade beispielhafte Überlegungen erscheinen aus einem höheren Standpunkt heraus ideal dazu geeignet, das eigene Vorgehen zu reflektieren und zu kontrollieren. Diese Auffälligkeit wird im nachfolgenden Abschnitt 7.4 der Einzelfallbetrachtung genauer behandelt.

Interpretiert man allgemeinere mathematische Techniken als weniger lokale Techniken und mehr als umfassendere strategische Techniken, so ist ein damit einhergehendes planendes Vorgehen wenig überraschend. Auch die Verbindung zwischen reflexiven Gedanken und problemspezifischen Techniken lässt sich anschaulich erklären: Problemspezifische Techniken sind gut lokalisierbare Anwendungen mit starkem Bezug zur Problemstellung. Eine Kontrolle der Anwendung dieser Arbeitsweisen ist leichter möglich, als die Reflexion über tendenziell globale Strategien.

Um die Verwendung von Arbeitsweisen weiter mit fachlichen Merkmalen in Verbindung bringen zu können, liegt es nahe, eine rein fachliche Bewertung der Bearbeitungen hinzuzuziehen. Es werden dazu die Fachnoten der einzelnen Bearbeitungen der Arbeitsaufträge betrachtet. Diese Fachnoten spiegeln eine defizitäre Bewertung der Bearbeitung aus einer rein fachlichen Sichtweise wider. Es ist also lediglich berücksichtigt, inwiefern das fachliche Problem tatsächlich bzw. bis zu welchem Grad gelöst ist. In Tabelle 7.18 sind die Fachnoten aller Student*innen für alle Arbeitsaufträge und zusätzlich die resultierende Gesamtfachnote aufgeführt.

	#01	#02	#03	#04	#05	#06	#07	#08	#09	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	#21	#22	#23	#24	#25
AA1	2.0	2.7	3.0	2.7	2.3	3.0	2.3	2.7	2.3	2.7	2.0	2.3	2.3	2.3	2.0	2.3	2.0	3.3	2.7	2.0	2.0	1.7	1.7	3.0	3.3
AA2	2.7	3.0	3.0	2.7	2.7	2.7	3.3	2.7	2.7	3.0	2.3	3.0	2.3	2.7	2.0	3.0	2.3	3.0	2.7	2.7	2.0	2.0	2.7	2.7	3.0
AA3	2.3	2.7	2.7	3.0	2.0	2.0	1.3	2.3	2.0	2.7	2.3	2.7	2.3	2.7	2.0	2.3	2.0	2.7	2.7	2.3	2.0	2.0	2.7	2.3	3.3
AA4	4.0	5.0	5.0	4.0	4.0	3.0	4.0	4.0	3.7	4.0	3.7	3.0	3.3	4.0	3.7	5.0	3.7	5.0	5.0	4.0	5.0	2.7	3.0	3.7	5.0
AA5	2.0	2.7	3.0	3.7	2.7	2.3	2.7	2.7	2.3	2.7	2.0	2.3	2.0	3.0	2.3	3.0	2.0	2.7	2.3	2.7	1.7	2.0	2.3	2.7	3.7
AA6	3.7	5.0	5.0	5.0	4.0	3.0	4.0	5.0	2.7	3.3	2.3	3.0	3.3	4.0	3.0	4.0	3.3	3.3	3.7	3.0	2.0	2.3	3.3	2.3	4.0
AA7									4.0	4.0	3.7	3.0	3.3	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	4.0	4.0	5.0	3.0	3.3	3.7	5.0
Schnitt	2.78	3.52	3.62	3.52	2.95	2.67	2.93	3.23	2.81	3.20	2.61	2.76	2.69	3.39	2.71	3.51	2.76	3.57	3.30	2.96	2.81	2.24	2.71	2.91	3.90
Note	2.7	3.7	3.7	3.7	3.0	2.7	3.0	3.3	2.7	3.3	2.7	2.7	2.7	3.3	2.7	3.7	2.7	3.7	3.3	3.0	2.7	2.3	2.7	3.0	4.0

Tab. 7.18.: Fachliche Bewertung der Bearbeitungen nach Proband.

In diesen Daten lassen sich einerseits Muster hinsichtlich der Typen aus der qualitativen Inhaltsanalyse und andererseits hinsichtlich der gestellten Arbeitsaufträge erkennen.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Zunächst die Betrachtung der Typen: In Abbildung 7.19 sind die Gesamtfachnoten der Probanden nach Typen sortiert dargestellt. Es zeigt sich hier eine Bestätigung der oben getroffenen Beurteilung von gewinnbringender Nutzung von gewissen Arbeitsweisen. Diese schlagen sich bei den Typen 3, 4 und 6 in tendenziell besseren Noten nieder. Dennoch sind bei den anderen Typen einige eher überraschend gute Ergebnisse vorhanden. Insbesondere die Anomalie bei Typ 1 (passiver Typ) mit zwei Probanden mit Gesamtfachnote 2,7 lässt sich nicht mit den (nicht gewinnbringend) verwendeten Arbeitsweisen erklären. Auch der relativ hohe Anteil (2 von 7) von nahezu guten Noten bei Typ 2 (lösungsorientierter Typ) ist auffällig. Berücksichtigt man zusätzlich, dass außer einem Probanden aus Typ 6 (ganzheitlicher Typ) keine Gesamtfachnote besser als 2,7 ausgefallen ist und diese Notenstufe aber bei allen Typen außer bei Typ 5 (hilfesuchender Typ) vorkommt, so scheint die Zuordnung zu einem Typ eher mit dem Potential in Richtung schlechterer Noten zusammenzuhängen, als mit einer Möglichkeit zum Erreichen von besonders guten fachlichen Ergebnissen. So gesehen stabilisiert eine umfangreichere Verwendung von unterschiedlichen Arbeitsweisen – insbesondere im Hinblick auf planende und reflexive Schritte – das fachliche Ergebnis dahingehend, dass schlechter zu bewertende Ausreißer seltener auftreten. Eine Möglichkeit zur tatsächlichen Verbesserung der fachlichen Möglichkeiten der Student*innen ist nicht zu erkennen.

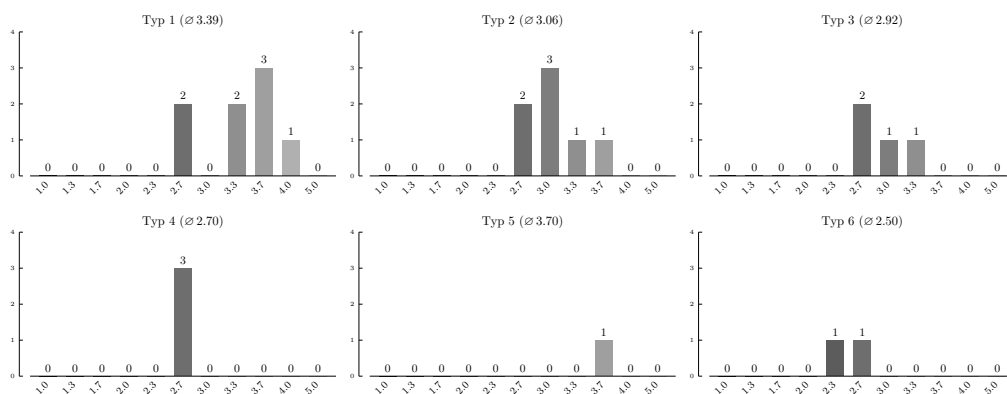


Abb. 7.19.: Anzahl Gesamtfachnoten nach Typen.

Nun zur Betrachtung der Arbeitsaufträge: Abbildung 7.20 zeigt die Anzahlen der einzelnen Fachnoten aufgeteilt auf die sieben Arbeitsaufträge. Es ist deutlich zu sehen, dass die Arbeitsaufträge innerhalb der beiden Inhaltsbereiche⁵ von den Student*innen jeweils sukzessive schlechter bearbeitet wurden. Lediglich zwischen Arbeitsauftrag 2 und 3 ist kein solches Abfallen zu erkennen. Dies liegt womöglich an der Formalität von Axiomen, auf die in Arbeitsauftrag 2 eingegangen wird. Zusätzlich thematisiert Arbeitsauftrag 3 dann wieder die anschauliche geometrische Darstellung. Das grundlegende Phänomen von

⁵Inhaltsbereich 1: Arbeitsauftrag 1 bis 4, Inhaltsbereich 2: Arbeitsauftrag 5 bis 7.

schlechter werdenden Noten lässt sich mit einer steigenden Schwierigkeit erklären, welche wiederum mit einem immer höheren Abstraktionsgrad bei der fachlichen Anforderung zusammenhängt. Es sind allerdings auch hier einige Auffälligkeiten zu beobachten: Bei den Arbeitsaufträgen 3 und 4 sind jeweils vereinzelt positive Ausreißer vorhanden. Bei Arbeitsauftrag 5 zeigen sich zwei negative Ausreißer und bei Arbeitsauftrag 6 ist eine auffällig breite Verteilung zu sehen.

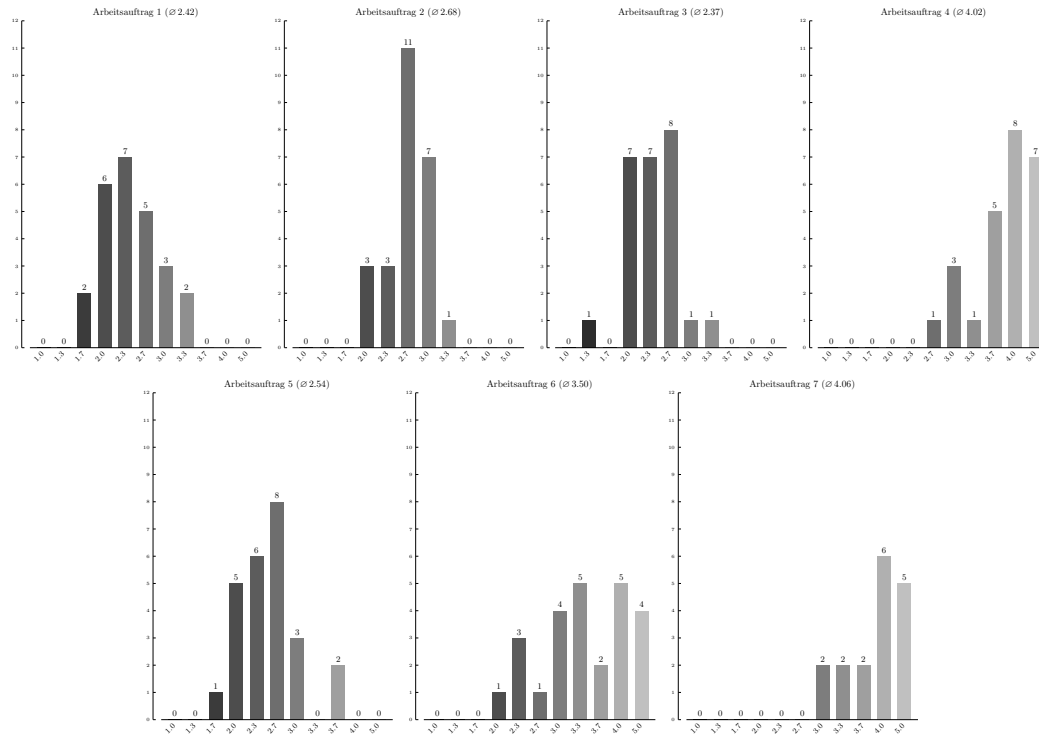


Abb. 7.20.: Anzahl Fachnoten nach Arbeitsaufträgen.

Zur besseren Interpretation hinsichtlich der Typen der qualitativen Inhaltsanalyse sind in Tabelle 7.21 die Daten aus Tabelle 7.18 erneut aufgeführt und zusätzlich nach Typen sortiert.

Man kann hier erkennen, dass die beiden untypischen Probanden mit besseren Gesamtfachnoten aus Typ 1 (passiver Typ)⁶ teilweise für die auffällig besseren Werte bei Arbeitsauftrag 4 verantwortlich sind. Diese ungewöhnlichen Werte lassen sich nicht anhand der Arbeitsweisen erklären, da innerhalb von Typ 1 (passiver Typ) kaum Arbeitsweisen identifiziert werden können. Das Zustandekommen der relativ guten Noten wird aus diesem Grund in der abschließenden Einzelfallbetrachtung in Abschnitt 7.4 qualitativ untersucht. Auch die sehr gute Fachnote von 1,3 bei Arbeitsauftrag 3 ist einem

⁶#12 und #21

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Typ:	1								2								3				4			5		6	
	#02	#12	#14	#16	#18	#19	#21	#25	#03	#05	#06	#07	#08	#15	#24	#01	#10	#17	#20	#09	#11	#23	#04	#13	#22		
AA1	2.7	2.3	2.3	2.3	3.3	2.7	2.0	3.3	3.0	2.3	3.0	2.3	2.7	2.0	3.0	2.0	2.7	2.0	2.0	2.3	2.0	1.7	2.7	2.3	1.7		
AA2	3.0	3.0	2.7	3.0	3.0	2.7	2.0	3.0	3.0	2.7	2.7	3.3	2.7	2.0	2.7	2.7	3.0	2.3	2.7	2.7	2.3	2.7	2.7	2.3	2.0		
AA3	2.7	2.7	2.7	2.3	2.7	2.7	2.0	3.3	2.7	2.0	2.0	1.3	2.3	2.0	2.3	2.3	2.7	2.0	2.3	2.0	2.3	2.7	3.0	2.3	2.0		
AA4	5.0	3.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	3.0	4.0	4.0	3.7	3.7	4.0	4.0	3.7	4.0	3.7	3.7	3.0	4.0	3.3	2.7		
AA5	2.7	2.3	3.0	3.0	2.7	2.3	1.7	3.7	3.0	2.7	2.3	2.7	2.7	2.3	2.7	2.0	2.7	2.0	2.7	2.3	2.0	2.3	3.7	2.0	2.0		
AA6	5.0	3.0	4.0	4.0	3.3	3.7	2.0	4.0	5.0	4.0	3.0	4.0	5.0	3.0	2.3	3.7	3.3	3.3	3.0	2.7	2.3	3.3	5.0	3.3	2.3		
AA7	-	3.0	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	5.0	-	-	-	-	-	4.0	3.7	-	4.0	4.0	4.0	4.0	3.7	3.3	-	3.3	3.0		
Schnitt	3.52	2.76	3.39	3.51	3.57	3.30	2.81	3.90	3.62	2.95	2.67	2.93	3.23	2.71	2.91	2.78	3.20	2.76	2.96	2.81	2.61	2.71	3.52	2.69	2.24		
Note	3.7	2.7	3.3	3.7	3.7	3.3	2.7	4.0	3.7	3.0	2.7	3.0	3.3	2.7	3.0	2.7	3.3	2.7	3.0	2.7	2.7	2.7	3.7	2.7	2.3		

Tab. 7.21.: Fachliche Bewertung der Bearbeitungen nach Student*in sortiert nach den Typen der qualitativen Inhaltsanalyse.

Probanden aus Typ 2 (lösungsorientierter Typ)⁷ zuzuordnen und lässt sich nicht mit den verwendeten Arbeitsweisen erklären. Es wird hierauf ebenfalls in einer Einzelfallbetrachtung näher eingegangen. Die schwachen Ergebnisse aus Arbeitsauftrag 5 sind Typ 1 und 5 zuzuordnen und damit auch erklärt.

7.3. Sonstige Merkmale

Es wird an dieser Stelle noch auf weitere Merkmale eingegangen, die sich nicht direkt der Prozessanalyse oder der Betrachtung von fachlichen Merkmalen zuordnen lassen. Namentlich sind das: die Fachsemesterzahl als grobes Merkmal zum Vorwissen, das zweite vertieft studierte Fach und die Geschlechtsidentität. Es handelt sich bei den Merkmalen in diesem Abschnitt um objektive Merkmale, während die Gesamtheit der untersuchten Student*innen weiterhin keine Repräsentativität für eine Allgemeinheit von Lehramtsstudierenden des Gymnasiums erfüllen. Es wird sich in diesem Abschnitt aus diesem Grund auf Beschreibungen von Auffälligkeiten in den Daten beschränkt und insbesondere keine tiefgreifende Interpretation des Vorwissens angestrebt. Eine solche Interpretation würde neben der Fachsemesterzahl auch eine Auskunft über bereits besuchte Lehrveranstaltungen und auch eine Auskunft über den dortigen Erfolg voraussetzen. Alternativ könnte spezifisches fachliches Vorwissen mit einem Test erhoben werden. Beides ist im Setting der Studie nicht umgesetzt worden. Auch bei den Merkmalen des Zweitfachs und der Geschlechtsidentität wird größtenteils auf eine Interpretation verzichtet und stattdessen auf Auffälligkeiten in deskriptiver Form eingegangen.

Betrachtet man das jeweilige Fachsemester der Student*innen der einzelnen Typen, so ergeben sich die Anzahlen der jeweiligen Studiendauern gemäß Abbildung 7.22.

⁷#07

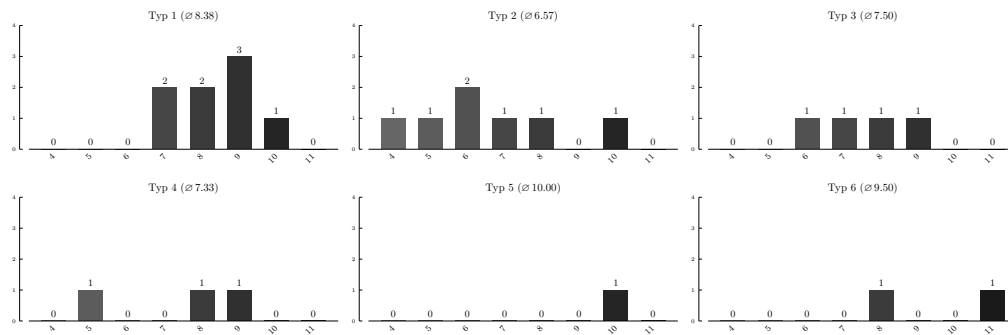


Abb. 7.22.: Fachsemester der Student*innen nach Typen.

Es zeigt sich, dass insbesondere die Student*innen von Typ 2 (lösungsorientierter Typ) tendenziell in niedrigeren Fachsemestern sind. Die einzige auffällige Ausnahme davon ist ein*e Student*in von Typ 4 (planender Typ) im fünften Fachsemester. Es entsteht der Eindruck, dass die Arbeitsweisen aus Typ 2 (lösungsorientierter Typ) im frühen Studium und womöglich auch aus der Schule antrainiert sind. Es ist hier der Fokus auf die konkrete Problemlösung und das Ausklammern von planenden und reflexiven Schritten zu betonen. Sieht man diese Tendenz vor dem Hintergrund von typischen Fachveranstaltungen mit einem klassischen Übungsbetrieb, so erkennt man gerade in der Bearbeitung von Übungsblättern und gängigen schriftlichen Klausuren einen solchen Fokus auf rein fachliche Ergebnisse. Selbstverständlich stellen diese Übungsblätter hohe Anforderungen an ein autonomes Arbeiten, was bei den meisten Student*innen sicherlich auch zu planenden und reflexiven Schritten führen kann. Die Abbildung in der Lösungsdokumentation ist aber untypisch und wird in den meisten Fällen nicht gefordert und nicht honoriert.

In den höheren Fachsemestern teilen sich die Student*innen dann auf die anderen Typen auf, wobei der Großteil in den Typ 1 (passiver Typ) verfällt. Hier werden selbst der konkrete Lösungsweg und die entsprechenden Lösungsstrategien nicht mehr dargestellt, sondern – wenn überhaupt – lediglich Ergebnisse präsentiert. Vor dem Hintergrund, dass es sich hierbei um Student*innen mit Berufsziel *Lehrkraft* handelt, ist diese Auffälligkeit besonders besorgniserregend. Die wenigen anderen Student*innen lernen offensichtlich einen breiteren Umgang mit Problemen und wenden sich planenden und/oder reflexiven Schritten zu – der Spezialfall Typ 5 (hilfesuchender Typ) ist hiervon ausgenommen.

Im gymnasialen Lehramt in Bayern belegen Studierende zwei vertieft studierte Fächer. Neben der Mathematik sind bei den untersuchten Student*innen die Fächer *Physik*, *Sport*, *evang.* und *kath. Religion* sowie *Englisch* vorgekommen. Die Anzahlen der Zweitfächer pro Typ sind in Abbildung 7.23 aufgeführt.⁸

⁸Evang. und kath. Religion wurden jeweils zusammengefasst.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

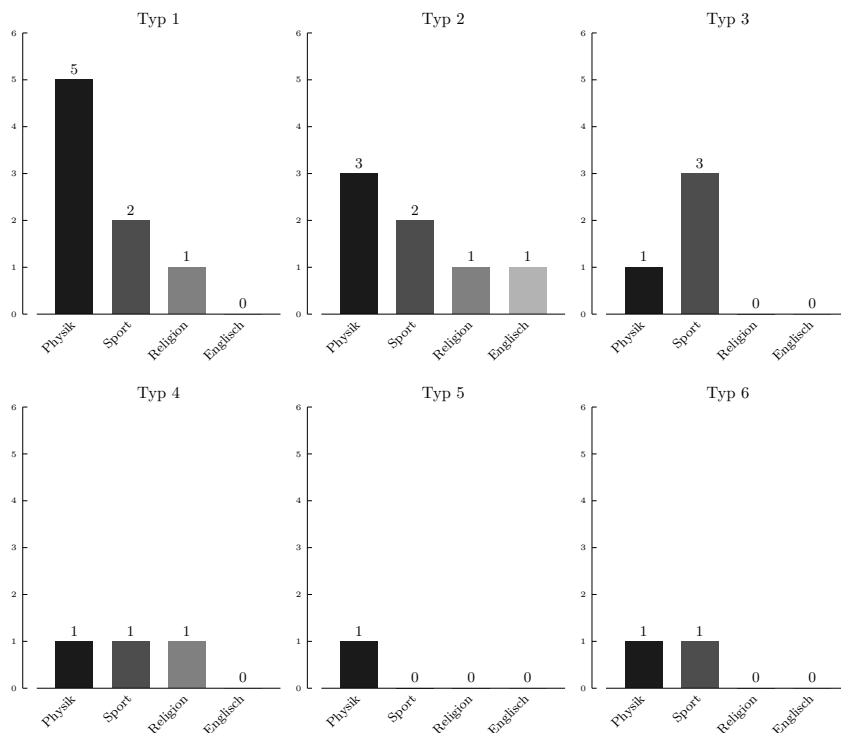


Abb. 7.23.: Zweitfächer der Student*innen nach Typen.

Die Mehrheit der Student*innen hat als Zweitfach entweder Physik oder Sport und diese Zweitfächer verteilen sich auf alle Typen ausgenommen Typ 5 (hilfesuchender Typ). Auffällig ist hierbei die Häufung der Physikstudent*innen bei Typ 1 und 2 sowie eine kleine Häufung von Sportstudent*innen bei Typ 3 (reflexiver Typ). Insbesondere die Physikstudent*innen bei Typ 1 und 2 sind unerwartet. Das Physikstudium für Lehramt an Gymnasien zeichnet sich durch eine große Zahl fachlicher Veranstaltungen ähnlich den Fachvorlesungen aus der Mathematik aus. Daneben gibt es auch diverse praktische Module zur Behandlung experimenteller Arbeitsweisen aus der Physik. Diese sind einerseits im fachlichen und andererseits im fachdidaktischen Ausbildungsteil vertreten. Man könnte bei Studierenden mit Zweitfach Physik also davon ausgehen, dass sie deutlich höhere Kompetenzen in (naturwissenschaftlich) experimentellem und geplantem Arbeiten aufweisen und diese auch auf rein mathematische Probleme übertragen können und wollen. Diese Vermutung bestätigt sich hier nicht.

In Abbildung 7.24 sind die von den Student*innen angegebenen Geschlechtsidentitäten nach Typen sortiert dargestellt.

Es zeigt sich eine Häufung männlicher Studenten bei Typ 1 (passiver Typ) und eine Häufung weiblicher Studentinnen bei Typ 2 (lösungsorientierter Typ).

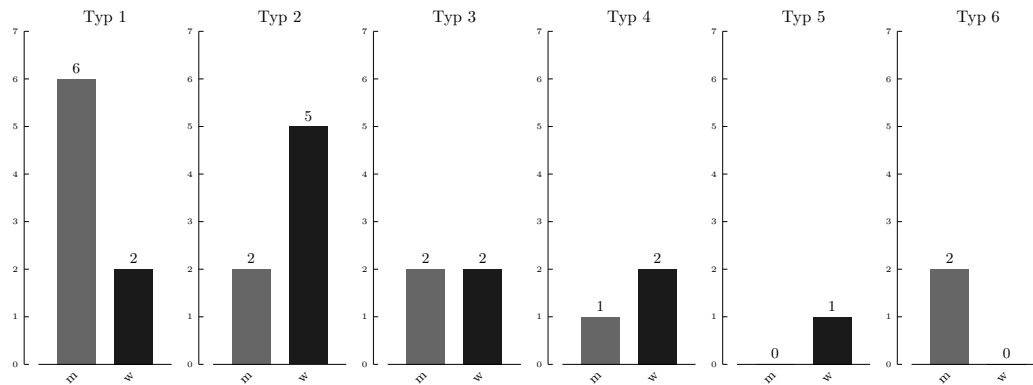


Abb. 7.24.: Geschlechtsidentität nach eigener Angabe der Student*innen nach Typen.

Zwischenfazit der komplexen Analyse und Auswahl der Einzelfallbetrachtungen

Die qualitative Inhaltsanalyse von Bearbeitungen offener Arbeitsaufträge durch Lehramtsstudent*innen des Gymnasiums hat zu unterschiedlichen Typen von Student*innen hinsichtlich ihrer verwendeten Arbeitsweisen geführt (siehe Kapitel 6). Die Unterscheidung geschieht maßgeblich in Student*innen, die überhaupt Arbeitsweisen dokumentieren und solche, die nicht dokumentieren oder lediglich fertige – oftmals vermeintlich korrekte – Ergebnisse präsentieren. Unter denjenigen Student*innen, die Arbeitsweisen dokumentieren, lassen sich insbesondere Unterschiede bei der Verwendung von planenden und reflexiven Schritten beobachten. Bei der komplexen Analyse wurden nun zusätzliche Merkmale herangezogen, um die entstandenen Typen weiter ausdifferenzieren und beschreiben zu können. Es wurde dabei auf prozessorientierte, fachliche und andere Merkmale eingegangen.

Bei den prozessorientierten Merkmalen stand die Frage im Raum, inwiefern die Arbeitsweisen in einer gleichbleibenden oder eher schwankenden Ausprägung über alle bearbeiteten Arbeitsaufträge hinweg verwendet wurden. Es zeigte sich, dass die für den Typ charakteristischen Arbeitsweisen grundsätzlich in einer eher stabilen Ausprägung über das gesamte Semester verwendet wurden. Anders sieht dies generell bei der Verwendung von Arbeitsweisen aus, die der konkreten Problembewältigung dienen. Diese sind fast flächendeckend in stark schwankenden Ausprägungen zu beobachten und auch innerhalb der Schwankungen lassen sich keinerlei Muster erkennen, außer dem Nachweis steigender Schwierigkeit der Arbeitsaufträge eines Inhaltsbereichs. Für eine Einzelfallbetrachtung lassen sich aus diesen Beobachtungen keine auffälligen Fälle ableiten. Es lohnt sich aber ein Blick auf die unterschiedlich stark auftretenden Einbrüche bei Arbeitsauftrag 4 und 7.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Für die fachlichen Merkmale wurde zunächst eine Bewertung der verwendeten Arbeitsweisen hinsichtlich einer gewinnbringenden oder nicht gewinnbringenden Nutzung getroffen. Es wurde sich dabei auf die Arbeitsweisen zur konkreten Problemlösung beschränkt, bei denen aufgrund der vorig beschriebenen Schwankungen in der reinen Nutzung keine Muster erkannt werden konnten. Die Merkmalsdimension *Externe Hilfsmittel heranziehen* wurde dabei ignoriert, da es sich hierbei um die charakterisierenden Arbeitsweisen von Typ 5 (hilfesuchender Typ) handelt, welcher nur einmalig zugeordnet wurde und die entsprechenden Arbeitsweisen außerhalb von Typ 5 (hilfesuchender Typ) generell eine niedrigere Nutzung erfahren haben. Zwischen der gewinnbringenden Nutzung von gewissen Arbeitsweisen und den Typen der qualitativen Inhaltsanalyse konnten folgende Beziehungen beobachtet werden: Die Typen 2, 4 und 6 zeigen höhere Ausprägungen gewinnbringender Nutzung von Arbeitsweisen um *Beispielgebundenes Vorgehen*; Die Typen 4 und 6 zeigen höhere Ausprägungen gewinnbringender Nutzung von Arbeitsweisen um *Allgemeinere mathematische Techniken* und die Typen 3 und 6 zeigen höhere Ausprägungen gewinnbringender Nutzung von Arbeitsweisen um *Problemspezifische fachmathematische Techniken*. Neben diesen Punkten, ist der relativ niedrige Wert der Ausprägung gewinnbringender Nutzung von Arbeitsweisen um *Beispielgebundenes Vorgehen* bei Typ 3 (reflexiver Typ) auffällig. Für die Einzelfallbetrachtung werden auf Grundlage dieser komplexen Analyse also Fälle aus den Typen 2, 3, 4 und 6 jeweils im Hinblick auf die eben beschriebenen Zusammenhänge vorgeschlagen.

Die konkrete Auswahl wird anhand der gewinnbringenden Nutzung entsprechender Arbeitsweisen aus den Abbildungen 7.9 bis 7.11 getroffen. Für die Betrachtung von Typ 2 (lösungsorientierter Typ) werden Probanden herangezogen, die einerseits eine häufige gewinnbringende Nutzung und andererseits eine weniger häufige gewinnbringende Nutzung der Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* aufweisen. Bei Typ 3 (reflexiver Typ) wird eine gewinnbringende Nutzung der Arbeitsweise *Problemspezifische fachmathematische Techniken* und sowohl eine nicht gewinnbringende als auch eine gewinnbringende Nutzung der Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* beachtet. Bei Typ 4 (planender Typ) analog mit der Arbeitsweise *Allgemeinere mathematische Techniken*. Bei Typ 6 (ganzheitlicher Typ) werden beide vorhandenen Probanden betrachtet.

Neben der gewinnbringenden Nutzung von Arbeitsweisen wurden als fachliche Merkmale auch die Fachnoten der Bearbeitungen betrachtet. Es bestätigte sich hierbei die Beurteilung der Nützlichkeit von Arbeitsweisen, womit allerdings keine neuen Auswahlkriterien für eine Einzelfallbetrachtung formuliert werden können. Zusätzlich dazu sind auch vereinzelte Anomalien beobachtet worden. Bei Typ 1 (passiver Typ) sind trotz mangelnder Dokumentation von Arbeitsweisen zwei relativ gute Gesamtbeurteilungen (2,7) aufgetreten. Das Zustandekommen dieser Beurteilung wird jeweils in einer Einzelfallbetrachtung erklärt. Betrachtet man zudem die Fachnoten der einzelnen Arbeitsaufträge, so

fällt insbesondere eine Bearbeitung auf: Ein*e Student*in von Typ 2 (lösungsorientierter Typ) wies eine Fachnote von 1,3 beim dritten Arbeitsauftrag auf, was im Vergleich zu den restlichen Bearbeitungen deutlich besser ausfällt. Auch dieses Zustandekommen wird in einer Einzelfallbetrachtung geklärt.

Es ergibt sich damit folgende Auswahl an Probanden bzw. Bearbeitungen von Arbeitsaufträgen, die im nachfolgenden Abschnitt 7.4 mittels einer Einzelfallbetrachtung abschließend qualitativ interpretiert werden sollen:

- Arbeitsaufträge 1–4 von Proband #07: Betrachtung des Zustandekommens der sehr guten Fachnote (1,3) beim dritten Arbeitsauftrag im Vergleich zu den anderen Bearbeitungen aus dem ersten Inhaltsbereich.
- Arbeitsaufträge 1–7 von Proband #12 und #21: Jeweils Betrachtung des Zustandekommens der relativ guten Gesamtnote (2,7).
- Arbeitsaufträge 1–7 von Proband #08 und #24: Betrachtung der Auswirkungen von beispielgebundenem Vorgehen bei Typ 2.
- Arbeitsaufträge 1–7 von Proband #23: Betrachtung des Zusammenhangs von beispielgebundenem Vorgehen und allgemeineren mathematischen Techniken in Verbindung mit planenden Schritten bei Typ 4.
- Arbeitsaufträge 1–7 von Proband #01 und #10: Betrachtung des Zusammenhangs von problemspezifischen fachmathematischen Techniken in Verbindung mit reflexiven Schritten bei Typ 3 sowie der weniger gewinnbringenden Nutzung von beispielgebundenem Vorgehen.
- Arbeitsaufträge 1–7 von Proband #13 und #22 : Jeweils Betrachtung der Auswirkungen von insgesamt umfangreicher (gewinnbringender) Nutzung aller Arbeitsweisen bei Typ 6.
- Generelle Betrachtung der Arbeitsaufträge 4 und 7 hinsichtlich fachlicher Schwierigkeiten und Defizite.

7.4. Einzelfallbetrachtungen

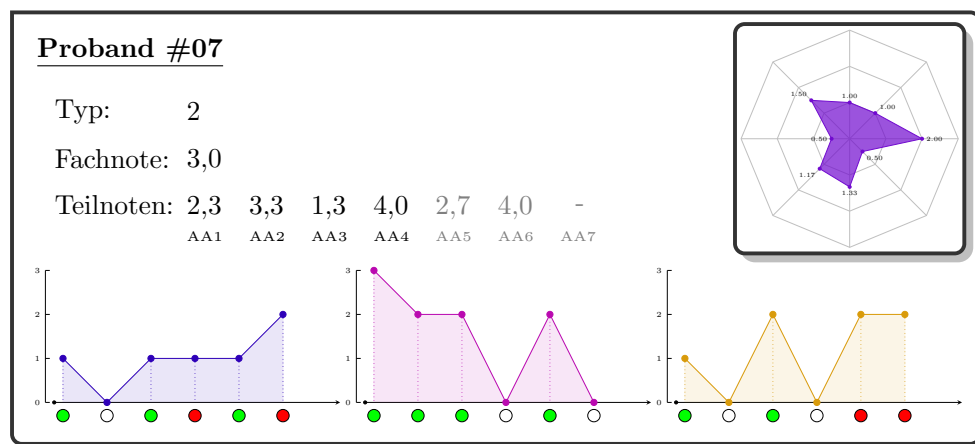
In diesem Abschnitt sollen insbesondere die in den vorigen Abschnitten identifizierten Auffälligkeiten abschließend individuell betrachtet werden. Dazu werden die entsprechenden Bearbeitungen der Student*innen als Einzelfälle konkret untersucht. Es sollen dabei vor allem die Erkenntnisse über Arbeitsweisen aus der qualitativen Inhaltsanalyse im Material direkt erklärt und mit den Auffälligkeiten aus der komplexen Analyse in

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Beziehung gesetzt werden. Hierbei lassen sich gerade die Typen von Arbeitsweisen noch exakter charakterisieren und daran auf Konsequenzen für fachliche Kompetenzen oder Defizite der einzelnen Student*innen schließen.

Die dargestellten Auszüge aus den Bearbeitungen der Student*innen sind wortwörtlich in Maschinenschrift transkribiert worden. So soll verhindert werden, dass vom Schriftbild auf einzelne Person geschlossen werden kann. Zudem ist die Lesbarkeit dadurch erhöht. Die Anordnung von Text und Symbolik sowie die Farbgebung entsprechen ebenfalls exakt den Darstellungen der Student*innen.

Proband #07: Arbeitsaufträge 1-4



Es wird zunächst die Entstehung der sehr guten Fachnote beim dritten Arbeitsauftrag beschrieben und dabei die dokumentierten Arbeitsweisen miteinbezogen. Anschließend werden die anderen drei Bearbeitungen der Arbeitsaufträge des ersten Inhaltsbereichs betrachtet und damit insbesondere die Einordnung in Typ 2 diskutiert.

(OA3) Interpretieren Sie die folgenden quadratischen Gleichungen geometrisch und versuchen Sie damit Lösungen der Gleichungen abzuleiten.

(i) $x^2 + 10x = 39$

(ii) $x^2 = 10x + 39$

(iii) $x^2 + 32 = 12x$

Die Bearbeitung wird damit begonnen, dass zunächst die erste Gleichung mit bekannten algebraischen Mitteln gelöst wird – hier mit der Mitternachtsformel. Anschließend wird bei den ermittelten Lösungen die geometrisch nicht interpretierbare negative Lösung korrekterweise ausgeschlossen. Es handelt sich bei diesem Vorgehen um eine Form des Rückwärtsarbeitens.

Zuerst einmal löse ich die Gleichung mithilfe der Mitternachtsformel:

$$x^2 + 10x - 39 = 0$$

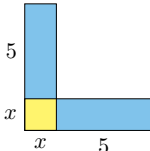
$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 39}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 16}{2} \quad \Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -13$$

Da $x_2 = -13$ hier aufgrund des positiven Flächeninhalts wegfällt, wird $x_1 = 3$ als Lösung angenommen. Dadurch lässt sich die Länge des Quadrates bestimmen:

$$3 + 5 = 8$$

Ausgehend von der nun bekannten einzigen Lösung wird eine geometrische Interpretation formuliert und daran eine geometrische Ableitung der Lösung der quadratischen Gleichung erzielt.



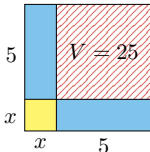
5
x
x 5

Betrachtet man die Gleichung als Flächeninhalt der Figur, ergibt das Hervorgehobene:

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 2 \cdot 5x = 39$$

Das Farbige wird zu einem Quadrat ergänzt.



5
x
x 5

$V = 25$

Da man die Seitenlängen des roten Quadrates kennt, lässt sich diese ausrechnen: $5^2 = 25$
Für die gesamte Figur erhält man:

$$x^2 + 2 \cdot 5x + 25 = \underbrace{39 + 25}_{64}$$

Um die gesamte Seitenlänge zu bekommen:

$$(5 + x)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 5 + x = 8 \quad \Leftrightarrow x = 3$$

Auch die quadratische Ergänzung wird im geometrischen Weg erkannt und explizit benannt.

Es wurde also das rote Quadrat zur Gleichung ergänzt um diese dann lösen zu können.

Nach Behandlung der ersten Gleichung wird sich daran erinnert, die Lösung quadratischer Gleichungen auf geometrischem Wege bereits zu kennen. Es wird sogar namentlich der Mathematiker AL-CHWARIZMI erwähnt. Dieser ist in einem seiner Werke zur Algebra erstmals maßgeblich auf die geometrische Lösung linearer und quadratischer Gleichungen durch Ergänzen und Ausgleichen eingegangen (HWĀRIZMĪ, 1989). In der weiteren Aufgabenbearbeitung werden die Lösungen der anderen Gleichungen dem Vorwissen nach sauber und anschaulich präsentiert.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Die gute Fachnote ist also darauf zurückzuführen, dass die Aufgabenstellung ordentlich und vollständig beantwortet wurde. Zumindes vor der Erkenntnis, dass diese Art der Lösung quadratischer Gleichungen bereits bekannt ist, sind die dokumentierten Arbeitsweisen sinnvoll gewählt und zielführend umgesetzt. Insbesondere das Rückwärtsarbeiten und die Skizzen zum geometrischen Zerlegen und Ergänzen sind hervorzuheben.

Die restliche Bearbeitung nach dieser Erkenntnis ist zwar generell eher durch ein Darstellen von festen Ergebnissen geprägt, aber auch hier wird auf eine nachvollziehbare Thematisierung des Prozesses von der Problemstellung zur Problemlösung geachtet. Insgesamt plädiert die Betrachtung von dieser einzelnen Bearbeitung nicht zu einer Einordnung in Typ 2. Es treten zwar keine reflexiven Überlegungen auf, aber das Vorgehen ist durch eine geplante Struktur und explizites Aktivieren von Vorwissen charakterisiert, was zumindest eine Tendenz zu Typ 4 vermuten lässt. Das Fehlen einer Rückschau ist im Hinblick auf fachliche Inhalte auch nicht unbedingt als Defizit zu werten, da die Vollständigkeit der Behandlung Teil des aktivierten Vorwissens ist.

Es wird nun auf die anderen drei Arbeitsaufträge aus dem ersten Inhaltsbereich geschaut, um daran die Einteilung in Typ 2 erklären zu können.

(OA1) Man definiere eine *konstruierbare Zahl* als die Länge einer konstruierbaren Strecke. Dabei ist eine konstruierbare Strecke eine Strecke, die durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal und aus einer Grundstrecke der Länge 1 hervorgeht. Diskutieren Sie den Zahlenbereich der konstruierbaren Zahlen ausführlich.

Es wird hier zunächst fundamental auf die natürlichen Zahlen eingegangen. Eine Verallgemeinerung einer Addition wird nicht angestoßen, was symptomatisch für die ganze Bearbeitung werden wird. Es folgt die Beschreibung der Konstruktion einer Mittelsenkrechten und damit dem Konzept des Halbierens. Danach wird versucht, dies auch für das Dritteln adaptieren zu können, woran der*die Student*in scheitert.

Daraufhin habe ich versucht eine Strecke in 3 gleich große Teile zu teilen. Dies habe ich durch sich nicht schneidende konstruierte Kreise versucht. Hierbei konnte ich aber nur mit Sicherheit sagen, dass die äußeren Teilstrecken gleich groß sind, nicht aber die in der Mitte.

$$\begin{array}{c} \text{---} \left. \vphantom{\text{---}} \right) \quad \left(\vphantom{\text{---}} \right) \text{---} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = x_3 \text{ da gleiche Zirkelstellung} \\ \text{keine Aussage von } x_1 \text{ zu } x_2 \end{array}$$

Im Anschluss wird direkt zur Idee einer Richtung übergegangen, wobei dann auch auf eine Multiplikation eingegangen wird. Die Strahlensätze werden hier korrekt miteinbezogen. Dennoch ist an dieser Stelle zu bemerken, dass keine gedankliche Trennung

von Zahlenbereichen und Grundrechenarten getroffen wird. Es wird ständig zwischen der Darstellung von Zahlenbereichen und der Umsetzung von Operationen gewechselt. Hierbei geht eine klare Übersicht und ein strukturiertes Vorgehen verloren. Dadurch entsteht letztendlich eine Bearbeitung, die keine vollständige Beschreibung von Addition und Subtraktion beinhaltet, die Division nur am Rande als Spezialfall der Multiplikation behandelt, wobei die entscheidende Einschränkung der Teilbarkeit durch Null nicht zur Sprache kommt und keine abschließende Klärung des entstandenen Zahlenbereichs liefert. Von einem sorgfältigen und überlegten Vorgehen, wie es vom Probanden später im dritten Arbeitsauftrag gezeigt wird, ist nichts zu sehen.

(OA2) Erstellen Sie ein minimales Axiomensystem für die formale Einführung negativer Zahlen ausgehend von folgender Konvention:

$$a - b = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ (b - a)^* & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Es werden lediglich Rechengesetze aufgezählt und dabei in die Schreibweise mit den neuen Zahlen überführt. Inwiefern diese Rechengesetze vorausgesetzt werden müssen oder bereits gelten, bleibt offen. Begründungen oder sogar Beweise werden nicht gegeben. Die Rechengesetze sind durch einfache Zahlenbeispiele veranschaulicht, womit aber lediglich die Schreibweise kontrolliert werden kann. Diese können nicht als beispielgebundene Begründungen verstanden werden.

	$a < b:$	$a > b:$
$a^* + b:$	$b - a$	$(a - b)^*$
	$-2 + 4 = 4 - 2 = 2$	$-4 + 2 = -(4 - 2) = -2$

Bei dieser Bearbeitung ist sogar eine Einordnung in Typ 2 (lösungsorientierter Typ) abwegig, da es sich nahezu ausschließlich um die Präsentation von Ergebnissen oder das unreflektierte Aufstellen von Behauptungen handelt. Denkbar ist eher Typ 1 (passiver Typ).

(OA4) Führen Sie auf \mathbb{R} drei imaginäre Einheiten ein und überprüfen Sie, inwiefern eine körperähnliche Struktur entstehen kann.

Es wird zunächst die Addition und Multiplikation korrekt in algebraischer Schreibweise gebildet. Danach folgt aber wieder eine Festlegung von Eigenschaften ohne Motivation und Begründung. Insbesondere die multiplikativen Eigenschaften der imaginären Einheiten

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

werden nicht motiviert oder in der Wahl begründet. Sie sind vermutlich aus externen Quellen ohne weitere Überlegungen abgeschrieben.

Verknüpfungstafel			
\cdot	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

außerdem $i \cdot j \cdot k = -1$

\Rightarrow nicht kommutativ

Im letzten Abschnitt der Bearbeitung zeigt sich zudem entweder ein Flüchtigkeitsfehler bei der Benennung des neutralen Elements bezüglich der Multiplikation in Vektorschreibweise. Oder aber es liegt ein grundlegendes Missverständnis bezüglich der Struktur einer K -Algebra und auch bezüglich der vorher selbst festgelegten Multiplikation vor.

Die neutralen Elemente sind $e_+ = (0, 0, 0, 0)$ und $e_\times = (1, 1, 1, 1)$ \Rightarrow Dadurch ist \mathbb{R}^4 ein Schiefkörper

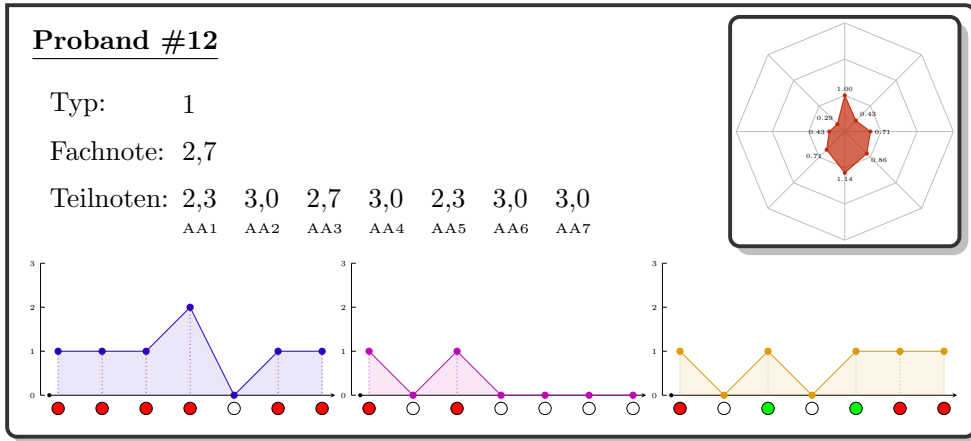
Eine ausführlichere Behandlung von Körpereigenschaften hätte diesen Fehler spätestens bei der Thematisierung eines inversen Elements bezüglich der angegebenen Multiplikation zutage gebracht. Insgesamt führt die oberflächliche Behandlung und die augenscheinlich nur minimal eigenständig durchdachte Lösung schon bei den wenigen elementaren Ergebnissen zu Fehlern.

Auch bei dieser Bearbeitung entsteht eher der Eindruck der Einteilung in Typ 1 (passiver Typ).

Insgesamt ist damit trotz der sehr guten Bearbeitung von Arbeitsauftrag 3 eine Einordnung in Typ 2 (lösungsorientierter Typ) erklärt. Es zeigt sich, dass die sehr gute Bearbeitung von Arbeitsauftrag 3 maßgeblich darauf zurückzuführen ist, dass der*die Student*in die Problemstellung bereits kannte. Es ist dennoch positiv hervorzuheben, dass es sich dabei dann nicht um eine reine Präsentation von (fachlich korrekten) Ergebnissen handelt, sondern die Lösung eine motivierte Struktur im Sinne einer eigenen Lösungsfindung skizziert. Es kann darin die Bereitschaft gesehen werden, sich bei bekannten fachlichen Problemen mit didaktischen und motivationalen Konkretisierungen auseinandersetzen zu wollen.

Proband #12 und #21

Es wird untersucht, inwiefern die näherungsweise guten Fachnoten bei den Probanden #12 und #21 zustande kommen. Diese wurden in der qualitativen Inhaltsanalyse dem Typ 1 (passiver Typ) zugeordnet, innerhalb dessen derart gute Beurteilungen überraschend sind.



(OA1) Man definiere eine *konstruierbare Zahl* als die Länge einer konstruierbaren Strecke. Dabei ist eine konstruierbare Strecke eine Strecke, die durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal und aus einer Grundstrecke der Länge 1 hervorgeht. Diskutieren Sie den Zahlenbereich der konstruierbaren Zahlen ausführlich.

Die Bearbeitung fällt zunächst direkt dahingehend auf, dass sie in reiner Textform vorliegt. Es sind keine Skizzen oder Zeichnungen angegeben. Dies ist vor dem Hintergrund der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ungewöhnlich. Zunächst werden einfache konstruierbare Bereiche dargestellt. Es wird auf die Konstruktion natürlicher Zahlen, auf die iterative Darstellung von $\frac{1}{2^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und auch auf ein Beispiel einer irrationalen konstruierbaren Zahl $\sqrt{2}$ eingegangen.

Meine ersten Ideen für mit Zirkel und Lineal konstruierbare Zahlen sind die Natürlichen Zahlen, bzw alle vielfachen einer beliebigen Zahl, indem man die Zahl mit dem Zirkel auf einer Gerade mehrfach aneinander setzt. Auch Vielfache von 1/2 durch kontinuierliches halbieren können sher einfach erzeugt werden. Auch einige irrationale Zahlen fallen auf, z.B. $\sqrt{2}$, welche als Diagonale eines rechtwinkligen Dreiecks mit zwei der Länge 1 entsprechenden Katheten konstruierbar ist.

Ein Flüchtigkeitsfehler tritt dabei bei der Benennung von $\frac{1}{2^k}$ als „Vielfache von $\frac{1}{2}$ “ auf. Die Frage nach der Konstruierbarkeit der rationalen Zahlen \mathbb{Q} kann nicht beantwortet werden. Mögliche dazu vollzogene Schritte werden nicht dokumentiert.

Bei der Frage, ob ganz \mathbb{Q} darstellbar ist musste ich passen, da mir z.B. kein Weg einfiel eine Strecke in eine höhere Primzahl gleicher Strecken aufzuteilen.

Im nächsten Schritt wird auf das Internet als Quelle zurückgegriffen und dortige Ergebnisse ohne weitere Gedanken oder Motivationen übernommen.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Eine kurze google-Suche ergab das Ergebnis, dass auch die Rechenoperation der Multiplikation, Division(!) und des Quadratwurzel ziehen auch zur Verfügung stehen, Durch die Division ist zusammen mit den natürlichen Zahlen auch ganz \mathbb{Q} erreichbar. Durch die Möglichkeit (auch mehrmals) quadrate zu ziehen ist der größte Zahlenbereich, den ich finden konnte

$$\sqrt[n]{\mathbb{Q}}, n \in \mathbb{N}_0$$

Das Vorgehen ist insgesamt nur minimal beschrieben und in dieser Form als reine Präsentation von Ergebnissen zu werten. Zudem entsteht am Beispiel der Frage zur Konstruierbarkeit der rationalen Zahlen der Eindruck, dass keine umfangreiche und motivierte Problembewältigung stattgefunden hat.

(OA2) Erstellen Sie ein minimales Axiomensystem für die formale Einführung negativer Zahlen ausgehend von folgender Konvention:

$$a - b = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ (b - a)^* & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Die erste Hälfte der Bearbeitung zeigt keine deutlichen Bezüge zur Aufgabenstellung und die einzelnen Gedanken sind in ihrer Zielsetzung und auch in ihrer Formulierung größtenteils nicht nachvollziehbar. Es werden zunächst die Körpereigenschaften als Rechengesetze vorausgesetzt und danach folgt eine Begründung der Notwendigkeit nach einer Ordnungsrelation.

Diese Axiome genügen jedoch noch nicht, da diese zum Beispiel auch auf den Körper mit zwei Elementen zutreffen. Was noch fehlt, ist eine Ordnung \leq , sodass Körper mit endlich vielen Elementen ausgeschlossen werden.

Die Körpereigenschaften decken hier natürlich die in der Aufgabenstellung thematisierten möglichen Axiome für ganze Zahlen ab. Setzt man diese einfach voraus, löst sich die ganze Problemstellung auf. Die Begründung für die Ordnungsrelation ist ebenfalls rätselhaft. Körpereigenschaften gelten selbstverständlich für alle Körper und davon gibt es bekanntlich mehr als nur gewisse schulrelevante Zahlenbereiche. Inwiefern hier eine Ordnungsrelation für eine Eindeutigkeit sorgen kann, ist ebenfalls fragwürdig.

In der zweiten Hälfte werden dann doch noch einige speziellere Rechengesetze der neuen Zahlen formuliert und sauber bewiesen.

Daraus kann nun gefolgert werden, dass $\hat{a} \cdot \hat{a} = a \cdot a$:

$$\hat{a} \cdot \hat{a} = a \cdot \hat{1} \cdot a \cdot \hat{1} = a \cdot a \cdot (\hat{1} \cdot \hat{1})$$

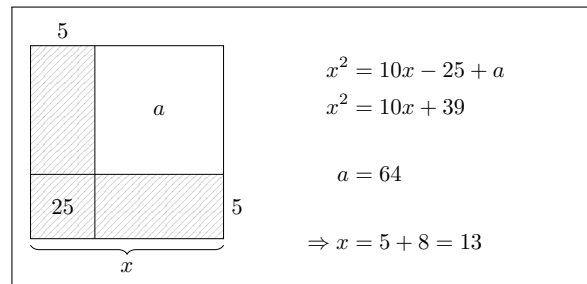
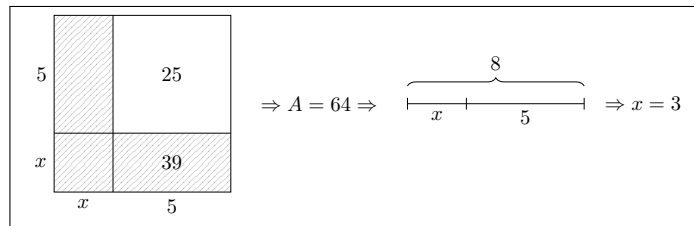
(OA3) Interpretieren Sie die folgenden quadratischen Gleichungen geometrisch und versuchen Sie damit Lösungen der Gleichungen abzuleiten.

(i) $x^2 + 10x = 39$

(ii) $x^2 = 10x + 39$

(iii) $x^2 + 32 = 12x$

Für die ersten beiden Gleichungen werden saubere geometrische Visualisierungen mit entsprechenden algebraischen Umformungen präsentiert.



Gleichzeitig wird die Verbindung von Geometrie und Algebra missverstanden. Es erfolgt sogar ein Anzweifeln der Sinnhaftigkeit derartiger geometrischer Interpretationen von algebraischen Gleichungen.

Auch der Lösungsweg aus (i) war ja ein nett verpackter, eigentlich algebraischer Weg (zwei Gleichungen gleich setzen, $10x$ kürzen, a ausrechnen, um \sqrt{a} zur Verfügung zu haben). Hier war die eigentliche Überlegung algebraisch und wurde dann irgendwie in die Zeichnung interpretiert und nicht umgekehrt. Ich sehe nicht ganz ein, wieso man für Rechnungen, die sehr einfach algebraisch lösbar sind, zwanghaft einen geometrischen Beweis suchen sollte. Der geometrische Weg ist hier sicher auch für Schüler kaum intuitiver, da man [...] ohnehin algebraisch rechnen muss (ob nun bewusst oder nicht).

Es entsteht der Eindruck, dass der*die Student*in ein klares Bild von nützlichen und nicht nützlichen Darstellungen gewisser mathematischer Objekte hat. Im Sinne von reichhaltig vernetzten Darstellungsformen ist diese Sichtweise kritisch zu sehen. Gerade in der Mathematik zeigen sich immer wieder fruchtbare Verbindungen zwischen unterschiedlichen Fachgebieten, die vorher undenkbar waren und dann mit einer neuen Sichtweise für eine weitere Produktivität sorgen. Auch im Hinblick auf einen späteren Lehrberuf ist diese eingeschränkte Sicht problematisch.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

(OA4) Führen Sie auf \mathbb{R} drei imaginäre Einheiten ein und überprüfen Sie, inwiefern eine körperähnliche Struktur entstehen kann.

Der präsentierte Ansatz für eine Multiplikation ist interessant gewählt und folgt zwei Grundüberlegungen: Zum einen wird $\mathbb{R}[i, j, k]$ mit $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ identifiziert und zum anderen wird mit einem Analogieschluss die Multiplikation von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ übertragen.

$$\begin{aligned}
 & ((a, b), (c, d)) \cdot ((e, f), (g, h)) = \\
 & = ((a, b) \cdot (e, f) - (c, d) \cdot (g, h), (a, b) \cdot (g, h) + ((c, d) \cdot (e, f)) = \\
 & = ((ae - bf - cg + dh, af + be + ch + dg), (ag - bh - ce + df, ah + bg + cf + de))
 \end{aligned}$$

Jetzt ist

$1 = ((1, 0), (0, 0))$	$1 \cdot 1 = 1$
$i = ((0, 1), (0, 0))$	$i \cdot i = -1$
$j = ((0, 0), (1, 0))$	$j \cdot j = -1$
$k = ((0, 0), (0, 1))$	$k \cdot k = 1$
	$i \cdot j = k$
	$j \cdot i = k$
	$i \cdot k = -j$
	$k \cdot i = j$
	$j \cdot k = i$
	$k \cdot j = i$

Die Multiplikationsvorschrift ist korrekt abgebildet, aber bei der Ermittlung des Produkts $k \cdot i$ tritt ein Rechenfehler auf. Es ist hier nämlich auch $k \cdot i = -j = i \cdot k$. Die nachfolgend dokumentierte Verletzung der Kommutativität tritt also nicht auf.

Diese Multiplikation stiftet dennoch keine Körperstruktur. Es wird sogar eine weitaus fundamentalere Eigenschaft als die Kommutativität verletzt: Die Nullteilerfreiheit und damit auch die globale Möglichkeit zur Bildung von Inversen. Es sind nämlich Nullteiler insbesondere keine Einheiten und damit nicht invertierbare Elemente. Beispielsweise gilt für $i - k, 1 + j \neq 0$:

$$(i - k) \cdot (1 + j) = i + ij - k - kj = i + k - k - i = 0$$

In den Bearbeitungen aller Student*innen wird ersichtlich, dass diese einen Körper maßgeblich durch die Möglichkeit zur Bildung von multiplikativen Inversen charakterisieren. Die Beschreibung durch eine Nullteilerfreiheit ist nicht vorhanden, nicht präsent oder wird nicht genutzt.

(OA5) Betrachten Sie die Gleichung

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0,$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Vergleichen Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung mit den Schnittmengen eines Doppelkegels D , bzw. eines Kreiszyinders K mit einer Ebene E im \mathbb{R}^3 .

Bei diesem Arbeitsauftrag wird die Hauptachsentransformation direkt als Vorwissen genannt. Eine entsprechend konkrete Nutzung oder erneute Aneignung dieses Verfahrens wird nicht durchgeführt. Auch eine motivationale oder veranschaulichende Vernetzung mit einer geometrischen Umsetzung wird nicht angestoßen. Es wird sich erneut auf die formale algebraische Schreibweise beschränkt und es werden lediglich Ergebnisse präsentiert.

In einem modernen Kompetenzbegriff ist neben dem Fachwissen auch die Möglichkeit und die Bereitschaft zur konkreten Anwendung abgebildet. In diesem Sinne kann hier nur von Fachwissen, nicht aber von Fachkompetenz gesprochen werden.

(OA6) Beschreiben Sie die Parameter A, β, γ, A' dahingehend ausführlich, dass damit neue Schreibweisen für die allgemeine quadratische Gleichung in zwei Variablen folgendermaßen entstehen:

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{\beta}^T \vec{x} + \gamma = 0, \quad \vec{v}^T A' \vec{v} = 0$$

Entwickeln Sie ausgehend von der Koeffizientenmatrix A zusammen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix A' ein Verfahren zur Bestimmung des Typs der Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung in zwei Variablen.

Hier wird ein größtenteils korrektes Verfahren formuliert, das sich an den Eigenwerten der Koeffizientenmatrix entscheidet. Die Betrachtung der Eigenwerte wird aus einer möglichen Diagonalform der auftretenden Matrix abgeleitet. Es wird allerdings nicht darauf eingegangen, dass nicht jede Quadrik in Normalform vorliegt und somit für eine Allgemeingültigkeit die Absicherung der Invarianz des Verfahrens unter Bewegungen notwendig wird. Es zeigt sich erneut das Phänomen, dass der*die Student*in zwar über ein relativ umfangreiches akademisches Fachwissen verfügt, dieses aber kaum motivational darstellen kann und selten gewillt ist, dieses anzuwenden und daraus neues Wissen zu generieren.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

(OA7) Ein Paar sich schneidender Geraden lässt sich als Grenzfall einer Hyperbel betrachten. Diskutieren Sie zunächst diesen Gedanken und arbeiten Sie Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten von Hyperbel und Paar sich schneidender Geraden heraus. Kontrollieren Sie, ob sich insbesondere die Unterschiede auch an den entsprechenden algebraischen Gleichungen erkennen lassen und übertragen Sie ihre Erkenntnisse auf die restlichen affinen Typen.

In der letzten Bearbeitung bestätigt sich dieser Eindruck erneut. Es wird zunächst thematisiert, wie man aus gegebenen Quadriken höhere Nullstellengleichungen konstruieren kann.

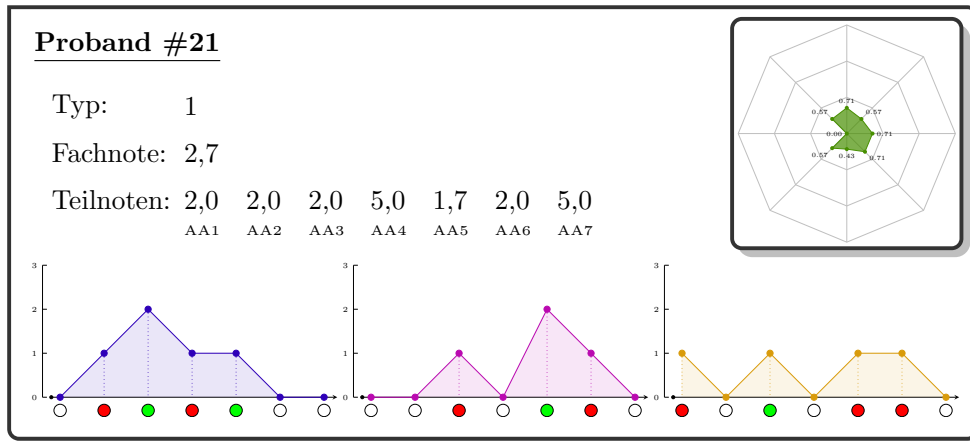
Aus Quadriken zusammengesetzte Nullstellenmengen sind von der Form

$$\prod_i p_i(x, y) = 0, \text{ mit } p_i(x, y) \text{ Polynom von Grad } \leq 2$$

Es ist an dieser Stelle spannend zu sehen, dass das Konzept der Nullteilerfreiheit, das die Grundlage einer derartigen Formulierung bildet, scheinbar vorhanden ist, aber eben nur isoliert abgerufen wird.

Ausgehend von dieser Erkenntnis wird kein Schluss auf die logisch umgekehrte Richtung getroffen: Falls ein Polynom in $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ zerfällt, was stellen dann diese Faktoren jeweils dar? Es wird stattdessen lediglich auf die qualitative Betrachtung von zwei sich schneidenden Geraden als Grenzfall einer Hyperbel eingegangen. Diese Entdeckung ist an sich positiv zu werten, zeigt jedoch eine tendenziell eher analytische Denkweise. Zudem wird diese Beobachtung nicht mit vorigen Erkenntnissen in Verbindung gebracht. Denkbar wäre hier eine Interpretation der Normalformen, die sich bei Hyperbel und sich schneidenden Geraden im konstanten Term unterscheiden.

Insgesamt bleibt der Eindruck eines*r Student*in mit relativ hohem Fachwissen und auch einem Interesse für formale Mathematik. Dabei wird kaum eine Relevanz von motivationalen, vernetzenden und veranschaulichenden Schritten sichtbar. An einigen Stellen entsteht sogar der Eindruck, dass der*die Student*in von einer einzigen *richtigen* Lösung überzeugt ist und andere Sichtweisen als überflüssig oder gar falsch erachtet. Bei der Bearbeitung wird sich überwiegend auf eine reine Ergebnispräsentation beschränkt. Die Einordnung in Typ 1 (passiver Typ) ist damit gerechtfertigt und die vergleichsweise bessere Fachnote entsteht aus dem ausgeprägten Fachwissen.



Diese Bearbeitung äußert sich strukturell ähnlich wie bei Proband #12. Es werden überwiegend Ergebnisse ohne Herangehensweise oder Motivationen präsentiert. Es wird an dieser Stelle lediglich auf verschiedene Ansätze eingegangen, um ein differenzierteres Bild insbesondere der fachlichen Kompetenzen der Student*innen zeichnen zu können.

(OA2) Erstellen Sie ein minimales Axiomensystem für die formale Einführung negativer Zahlen ausgehend von folgender Konvention:

$$a - b = \begin{cases} a - b & \text{falls } a \geq b \\ (b - a)^* & \text{falls } a < b \end{cases}$$

Bei diesem Arbeitsauftrag zeigt der*die Student*in ein grundlegendes Verständnis der Aufgabenstellung. Es wird eine Liste an Eigenschaften angelegt, die die neuen Zahlen erfüllen sollen. Anschließend werden Teile dieser Eigenschaften aus den jeweils anderen abgeleitet. Dabei wird aber sehr willkürlich vorgegangen. Von einem systematischen Ausprobieren kann hier nicht gesprochen werden. Dennoch wird das Vorgehen zumindest prinzipiell sichtbar. Es ist aus diesen Gründen dennoch fachlich nicht verwunderlich, dass das resultierende Axiomensystem nicht minimal ist. Um hier tatsächlich auf ein gering umfängliches System zu kommen, muss das Vorgehen gut strukturiert und durchdacht sein, da man ansonsten Gefahr läuft, den Überblick zu verlieren oder sogar in einen Zirkelschluss zu geraten.

(OA4) Führen Sie auf \mathbb{R} drei imaginäre Einheiten ein und überprüfen Sie, inwiefern eine körperähnliche Struktur entstehen kann.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Bei diesem Arbeitsauftrag konnte gar keine Bearbeitung durchgeführt werden. Es waren keine Möglichkeiten vorhanden, in irgendeiner Form an die Problemstellung heranzutreten.

(OA5) Betrachten Sie die Gleichung

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0,$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Vergleichen Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung mit den Schnittmengen eines Doppelkegels D , bzw. eines Kreiszylinders K mit einer Ebene E im \mathbb{R}^3 .

Es wird bei dieser Aufgabe bereits auf gewisse Normalformen bei den Gleichungen eingegangen, weswegen auf ein vorhandenes Vorwissen geschlossen werden kann. Dabei wird für Normalformen auch auf den Begriff eines *Minimalpolynoms* eingegangen.

Die Normalform ist in meiner Auffassung als eine Art Minimalpolynom, wobei bei mir eher möglichst viele Koeffizienten a bis f gleich Null sein sollen, sodass ein Objekt der obigen Form entsteht.

Die Erklärung mit den möglichst vielen verschwindenden Koeffizienten in der polynomialen Gleichung ist nachvollziehbar, wenngleich eine derartige Beschreibung keine Bezüge zum Konzept des Minimalpolynoms aus bspw. der linearen Algebra hat. Die Minimalität solcher Polynome entscheidet sich maßgeblich an dessen Grad und nicht an der Anzahl Summanden. Weiterführend könnte der*die Student*in an dieser Stelle möglicherweise schon davon ausgehen, dass es sich bei den Normalformen als Minimalpolynome insbesondere um irreduzible Polynome handelt. Eine später angestrebte abstrakte Unterscheidung in entartete und nicht entartete Quadriken anhand einer Irreduzibilität ist damit bereits jetzt erschwert.

(OA7) Ein Paar sich schneidender Geraden lässt sich als Grenzfall einer Hyperbel betrachten. Diskutieren Sie zunächst diesen Gedanken und arbeiten Sie Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten von Hyperbel und Paar sich schneidender Geraden heraus. Kontrollieren Sie, ob sich insbesondere die Unterschiede auch an den entsprechenden algebraischen Gleichungen erkennen lassen und übertragen Sie ihre Erkenntnisse auf die restlichen affinen Typen.

Es zeigt sich hier keine Möglichkeit der Aufgabenbearbeitung. Der*die Student*in scheitert bereits an einer verbalen Formulierung von geometrischen Unterschieden.

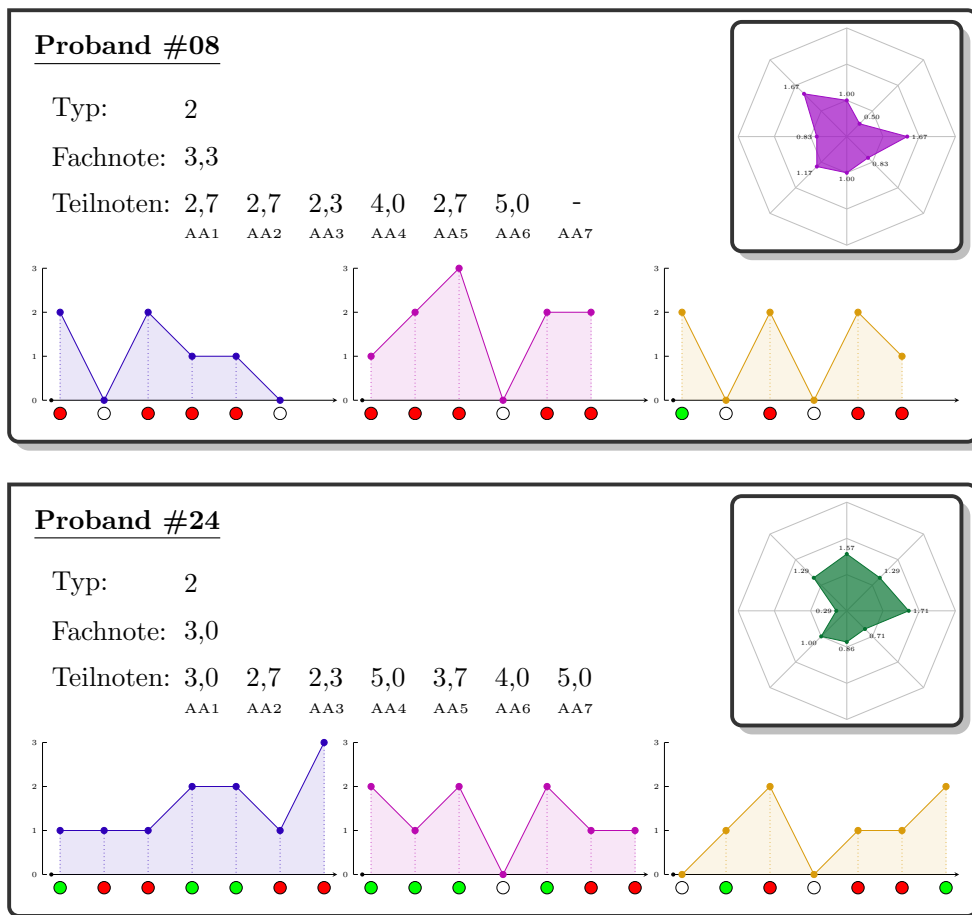
Insgesamt entsteht der Eindruck eines*r Student*in, der*die bei anschaulichen Problemstellungen mit konkreten Handlungsmustern und bei oftmals vorhandenem Vorwissen

relativ ausführliche Ergebnisse präsentieren kann. Dabei wird jedoch nur selten tatsächliches Vorgehen dokumentiert. Zusätzlich zeigt sich, dass bei abstrakten Problemen, die über eine anfängliche Anschaulichkeit hin zu einer formalen allgemeinen Formulierung hinausgehen, quasi keine Bearbeitung mehr möglich ist.

Im Vergleich zu Proband #12 kann man hier eher nicht von hohem Fachwissen reden. Stattdessen wäre die Bezeichnung als moderates Fachwissen passend. Bei Proband #12 war auf der anderen Seite eine niedrigere Bereitschaft zur Lösung von elementaren und anschaulichen Problemstellungen vorhanden. Diese ist bei Proband #21 in Teilen gegeben. Zusammengenommen führt dies zu einer vergleichbaren Fachbeurteilung. Die Einordnung in Typ 1 (passiver Typ) bleibt gerechtfertigt.

Proband #08 und #24

Für Typ 2 (lösungsorientierter Typ) wird stellvertretend insbesondere die Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* bei den Probanden #08 und #24 betrachtet. Dabei steht gemäß Abbildung 7.10 Proband #08 für eine nicht gewinnbringende und Proband #24 für eine eher gewinnbringende Nutzung dieser Arbeitsweise.



7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Es fällt bei beiden Probanden auf, dass sich die beispielgebundenen Arbeitsweisen größtenteils auf Skizzen und Zeichnungen beschränken. Oftmals treten diese Skizzen in Verbindung mit einer allgemeineren oder problemspezifischen Arbeitsweise auf und je nach der korrekten Anwendung selbiger generiert die Skizze dann eine Nützlichkeit oder aber auch ein Hindernis bei der weiteren Problembewältigung.

(OA1) Man definiere eine *konstruierbare Zahl* als die Länge einer konstruierbaren Strecke. Dabei ist eine konstruierbare Strecke eine Strecke, die durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal und aus einer Grundstrecke der Länge 1 hervorgeht. Diskutieren Sie den Zahlenbereich der konstruierbaren Zahlen ausführlich.

Bei Proband #24 kann in diesem Arbeitsauftrag eine solche gewinnbringende Nutzung beobachtet werden. Es werden gute Darstellungen der Konstruktionsschritte gegeben. Insbesondere bei einer qualitativen Begründung von Rechengesetzen, die für konstruierbare Zahlen gelten müssen, sind diese Skizzen sehr anschaulich.

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$\underbrace{a + b}_{c\text{-mal}} \dots c\text{-mal} = \underbrace{a}_{c\text{-mal}} + \underbrace{b}_{c\text{-mal}}$$

(OA3) Interpretieren Sie die folgenden quadratischen Gleichungen geometrisch und versuchen Sie damit Lösungen der Gleichungen abzuleiten.

(i) $x^2 + 10x = 39$

(ii) $x^2 = 10x + 39$

(iii) $x^2 + 32 = 12x$

Bei diesem Arbeitsauftrag zeigt sich aber bereits bei Proband #08 die Problematik, dass eine fehlerhafte Anwendung einer anderen Arbeitsweise zu nicht zielführenden Skizzen führen, die ab dann den weiteren Lösungsprozess blockieren.

$$\Rightarrow 12x = x^2 - (x-12) \cdot x$$

$$\Rightarrow 12x = x^2 - x^2 + 12x \quad \text{das hilft auch nicht}$$

Es wird an dieser Stelle allgemeiner festgehalten, dass bei der dritten Gleichung in diesem Arbeitsauftrag viele Student*innen – unter anderem auch Proband #08 – zur Darstellung von Rechtecken statt Quadraten wechseln. Dies ist zunächst für Teile der

Gleichungen nicht problematisch. Ab dem Moment, in dem jedoch aus dem Flächeninhalt eines Rechtecks auf eine Kantenlänge geschlossen werden soll, geht die Eindeutigkeit verloren. Zusätzlich wird hier häufig auf eine ganzzahlige Faktorisierung von gegebenen Zahlen zurückgegriffen.

Bei den Lösungen handelt es sich um $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$. In der ersten geometrischen Lösung zu x_1 wird zuerst ein Rechteck mit Flächeninhalt 32 gewählt. Dabei werden die Teiler 4 und 8 von 32 betrachtet. Es handelt sich also um ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 8. Die Teiler 2 und 16 können vernachlässigt werden, da das gesamte Rechteck am Ende die Seitenlänge 12 haben muss. Mit der Seitenlänge 16 ist diese Voraussetzung nicht mehr erfüllbar.

Vor dem Hintergrund, dass in Arbeitsauftrag 1 aber geklärt wurde, dass die konstruierbaren Zahlen über die ganzen Zahlen \mathbb{Z} hinaus gehen⁹, kommt eine solche Festlegung einer Beschränkung auf Einzel- bzw. Spezialfälle gleich. Bereits in \mathbb{Q} gibt es für eine Zahl $x \in \mathbb{Q}$ unendliche viele Faktorisierungen in zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$.

(OA5) Betrachten Sie die Gleichung

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0,$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Vergleichen Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung mit den Schnittmengen eines Doppelkegels D , bzw. eines Kreiszyinders K mit einer Ebene E im \mathbb{R}^3 .

In diesem Arbeitsauftrag zeigt sich zwischen den beiden Probanden #08 und #24 erneut die Problematik der Nützlichkeit von beispielgebundenem Vorgehen, je nachdem, ob diesem eine korrekte oder falsche Anwendung einer anderen Arbeitsweise voraus geht. Proband #24 startet anhand der Koeffizienten der vorgegebenen allgemeinen Gleichung eine Fallunterscheidung und betrachtet darin systematisch Einzel- und Spezialfälle. Proband #08 startet direkt mit der Betrachtung von Einzel- und Spezialfällen und formuliert diese als konkrete Zahlenbeispiele. Ohne die Konkretisierung einer Fallunterscheidung werden hier viele mögliche Fälle nicht erkannt und es geht damit eine Allgemeingültigkeit der Bearbeitung verloren.

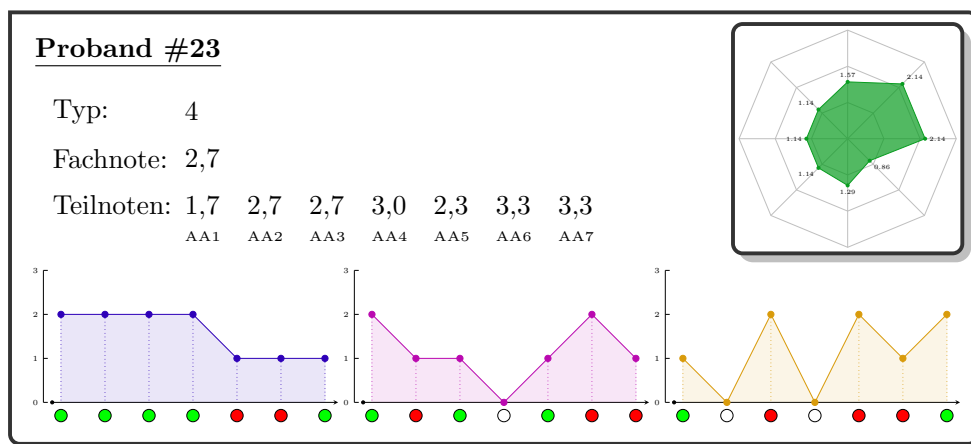
Proband #23

Die Verläufe der Ausprägungen mitsamt den Entscheidungen zur gewinnbringenden Nutzung der Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* aus Abbildung 7.10 zeigt bei Typ 4 (planender Typ) keine Fälle mit ausdrücklich mehr gewinnbringender oder nicht

⁹Die Thematik der negativen Zahlen einmal ausgeblendet.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

gewinnbringender Nutzung. Es wird sich deshalb auf Proband #23 beschränkt, da hier stattdessen eine deutliche Tendenz zur gewinnbringenden Nutzung der Arbeitsweise *Allgemeinere mathematische Techniken* zu sehen ist (siehe Abbildung 7.9). Es wird auf die Verbindung zwischen diesbezüglichen Arbeitsweisen und planenden Schritten eingegangen.



Es zeigt sich, dass eine explizite Verknüpfung von planenden Schritten mit allgemeineren mathematischen Techniken nur selten erkennbar ist. Lediglich bei den Arbeitsweisen *Teilschritte und -ziele aufstellen* und *Vermutungen und Ideen formulieren* entsteht typischerweise öfter eine nachgelagerte *Fallunterscheidung*.

Die \sqrt{a} wird hoffentlich etwas mit Pythagoras zu tun haben. Außerdem ist mir aufgefallen, dass für $a > 1$ gilt $\sqrt{a} < a$ und für $a < 1$ gilt $\sqrt{a} > a$. Vielleicht muss man die getrennt konstruieren.

- Fall 1: \sqrt{a} gesucht, $a < 1$:
 Baut auf Kathetensatz auf, da gilt: $a^2 = p \cdot c$, also $a = \sqrt{p \cdot c}$:

[...]

- Fall 2: $a > 1$, \sqrt{a} gesucht.
 Baut auf Höhensatz auf, da $h^2 = pq$ gilt wenn $p = 1$ ~~und~~ auch $h^2 = q$, also $h = \sqrt{q}$

In Arbeitsauftrag 4 ist zudem eine andere allgemeinere mathematische Technik als Konsequenz der Formulierung von Teilschritten zu sehen: Eine Art *Ansatz eines Widerspruchs*.

Allerdings stellt sich noch die Frage:	
<ul style="list-style-type: none"> • Was ist ij? • Was ist ik? • Was ist kj? 	Hierfür jeweils 8 Möglichkeiten ($\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$)
$\Rightarrow 3 \cdot 8 = 24 !!$	
Außerdem wissen wir ja nicht, ob die Multiplikation kommutativ ist. Nehme an, dass sie das nicht ist. Dann gilt: Es stellt sich auch noch die Frage nach ji, ki, jk mit auch noch je 8 Möglichkeiten!	

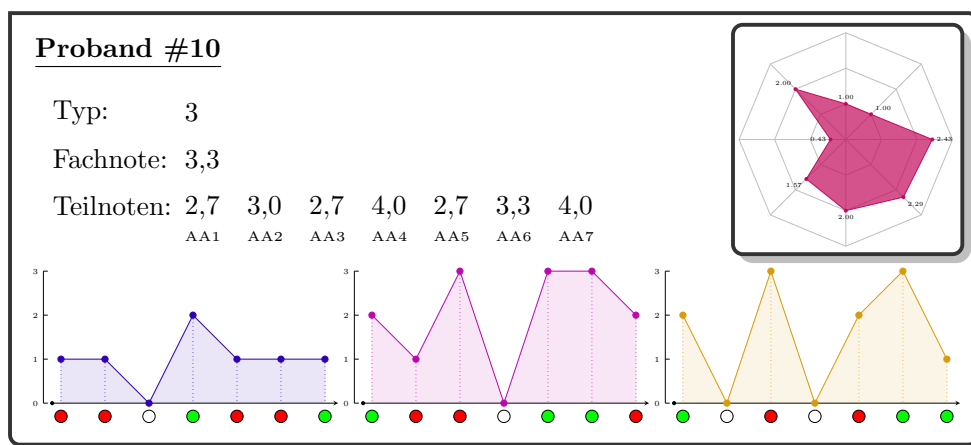
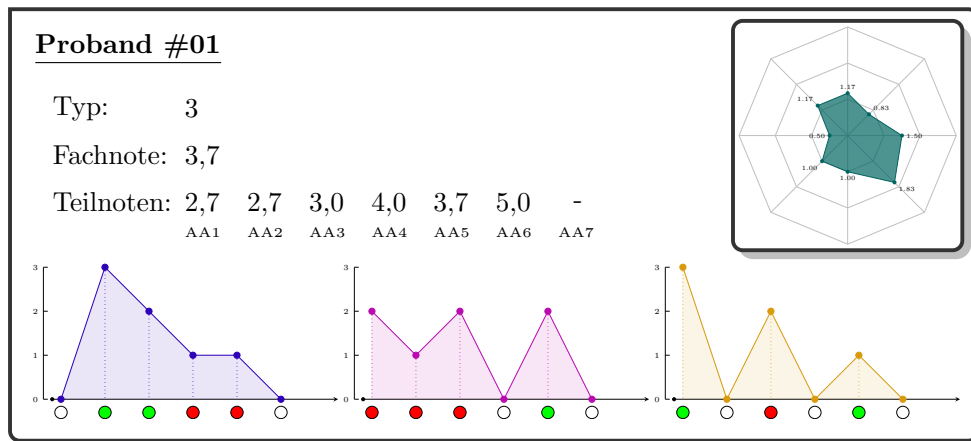
Es wird hier zunächst die Kommutativität als nicht gegeben angesetzt. Die Aufgabenstellung wurde derart interpretiert, dass eine Multiplikation für einen Körper gesucht ist, weswegen der*die Student*in davon ausgegangen ist, dass eine Kommutativität möglich ist. Es handelt sich also logisch tatsächlich um den Ansatz eines Widerspruchs, wemgleich im weiteren Verlauf selbst erkannt wird, dass hier nun genau das angesetzt wurde, was eben auch gelten muss und damit letztendlich gar kein Widerspruch gefunden werden kann.

Beispielgebundenes Vorgehen tritt nur gelegentlich in Form von konkreten Zahlenbeispielen sowie Skizzen und Zeichnungen zutage. Abgesehen von Arbeitsauftrag 3, bei dem die Skizzen intuitiv auch zur Lösungsfindung genutzt werden, dient das beispielgebundene Vorgehen stattdessen eher der eigenen Veranschaulichung oder nachträglichen Plausibilitätskontrollen.

Proband #01 und #10

Bei Typ 3 (reflexiver Typ) wird maßgeblich die Verwendung der Arbeitsweise *Problemspezifische fachmathematische Techniken* untersucht. Zusätzlich wird auch die Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* betrachtet. Die Probanden #01 und #10 unterscheiden sich nach Abbildung 7.10 tendenziell in der gewinnbringenden Nutzung zweiterer Arbeitsweise. Proband #01 zeigt eher nicht gewinnbringende und Proband #10 eher gewinnbringende Nutzung.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung



Es zeigt sich tatsächlich eine merkliche Verbindung zwischen reflexiven Schritten und problemspezifischen fachmathematischen Techniken. Insbesondere die Arbeitsweise *Einschränkungen und Probleme aufzählen*, die unter die Merkmalsdimension *Einordnung von Ergebnissen* fällt, hinterfragt oftmals explizite Schritte in der Problemlösung, die meist in Form von problemspezifischen Techniken vollzogen werden.

Beispielsweise führen bei Proband #10 in Arbeitsauftrag 1 Einschränkungen bei der Betrachtung von Grenz- und Extrempunkten zur Thematisierung von Sonderfällen und einer Beurteilung hinsichtlich einer Allgemeingültigkeit oder Vollständigkeit.

Das kann man beliebig oft wiederholen und so immer noch kleinere rationale Zahlen schaffen. Problematisch ist hier aber: ich schaffe es nicht, ungerade Nenner herzustellen

Bei Proband #01 werden explizit geometrische Konstruktionen hinterfragt.

Wie es sich mit Wurzeln höheren Grades, also z.B. dritten oder vierten Wurzeln verhält, so muss ich gestehen, dass hier keine Möglichkeit der Konstruktion gefunden habe. Ich hatte hier erst daran gedacht, entweder Quader in drei Dimensionen zu nutzen und deren Diagonale zu nutzen, jedoch erhält man hier ebenfalls quadratische Wurzeln

In Arbeitsauftrag 3 wird durch einschränkende Gedanken zum Zerlegen und Ergänzen auch die Problematik zum ganzzahligen Faktorisieren erkannt und thematisiert.

Denn um 32 zu erreichen, fällt einem schnell die Rechnung über die Faktoren 4 und 8 ein, diese erfüllen hier zufällig (ist das so?) die Gleichung. Ob das hier wirklich nur ein Zufall ist, weiß ich nicht, für mich wirkt das aber wie eine halb geratene Lösung.

In Arbeitsauftrag 5 zeigt sich zudem ein Bezug von einer emotionalen Äußerung auf konkrete Lösungsschritte in Form der problemspezifischen Technik von *Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln*.

Sehr schwer tat ich mir auch mit der rechnerischen Überprüfung

Es ist jedoch anzumerken, dass sich gerade derartige emotionale Äußerungen überwiegend auf globalere Gedanken beziehen. Hier werden meist der Arbeitsaufwand oder die Zufriedenheit mit Gesamtergebnissen angesprochen.

Das beispielgebundene Vorgehen wird hingegen wie bei den anderen Typen überwiegend in Form von Skizzen und Zeichnungen sowie konkreten Zahlenbeispielen zur reinen Veranschaulichung verwendet. Die Nützlichkeit hängt auch hier von der Korrektheit vorausgegangener anderer Arbeitsweisen ab. Selten zeigt sich jedoch ein direkter positiver Einfluss von emotionalen Äußerungen.¹⁰

→ neuer Start mit anderen Werten in der Hoffnung dass schönere EW rauskommen UND Wahl der anderen Gleichung mit A_1 , damit die Rechnungen allg. leichter werden.

Die Formulierung einer Hoffnung führt beim präsentierten Beispiel zu einem systematischen Ausprobieren.

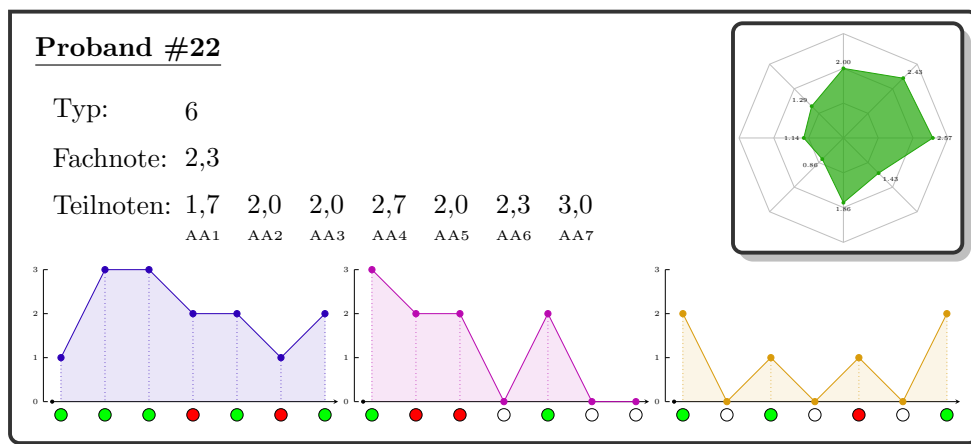
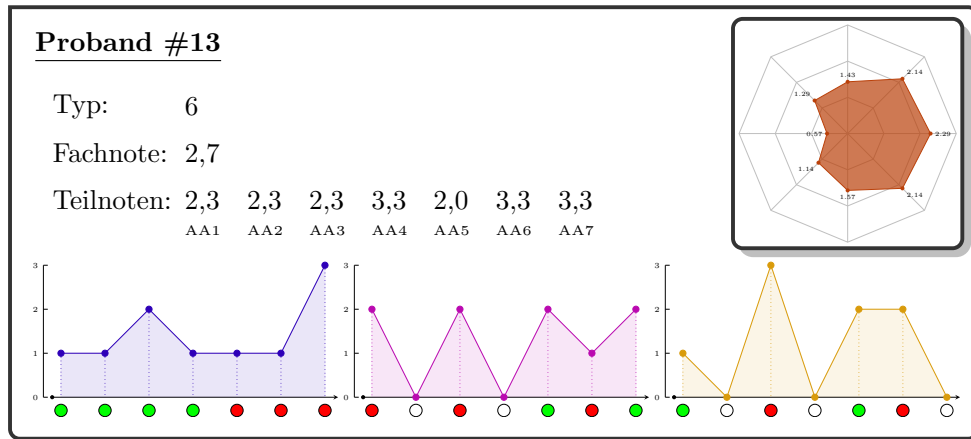
Die niedrigere gewinnbringende Nutzung der Arbeitsweise *Beispielgebundenes Vorgehen* bei Typ 3 (reflexiver Typ) aus Abbildung 7.16 lässt sich auch in der Einzelfallbetrachtung nicht erklären. Es wird deshalb von individuellen Faktoren ausgegangen.

Proband #13 und #22

Für die Betrachtung von Typ 6 (ganzheitlicher Typ) sind nun die wechselseitigen Beziehungen von planenden und reflexiven Schritten mit der gewinnbringenden Nutzung von Arbeitsweisen aller drei Merkmalsdimensionen zur konkreten Problembewältigung von Bedeutung. Zusätzlich stellt sich auch die Frage, inwiefern sich hier planende und reflexive Schritte gegenseitig bedingen. Es werden die beiden Probanden #13 und #22 betrachtet, die mit diesem Typ codiert wurden.

¹⁰Mit „EW“ ist der Begriff „Eigenwert(e)“ gemeint.

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung



Beide Probanden zeigen hinsichtlich der Nutzung von planenden und reflexiven Schritten ähnliche Muster wie sie jeweils einzeln bereits bei Typ 3 (reflexiver Typ) und Typ 4 (planender Typ) beobachtet werden konnten:

Einerseits zeigen sich Überlegungen zum Vorgehen – hier *Vermutungen und Ideen formulieren* bzw. *Teilschritte und -ziele aufstellen* – in einer schwachen Verbindung zu allgemeineren mathematischen Techniken – hier *Ansatz eines Widerspruchs*.

Die Frage ist nun, was ist mit den gemischten Teilen?
Es kommt in Frage:

$ij, ik, ji, jk, ki, kj \neq 0$ (Nullteilerfreiheit)
 $ij, ik, ji, jk, ki, kj \neq 1$

und zusätzlich ist $ij \neq i$, daraus würde folgen $j = 1$.

Ebenso bedingt das Aufstellen von Teilschritten und -zielen öfter eine saubere Verwendung einer Fallunterscheidung.

Andererseits treten reflexive Schritte insbesondere im Bezug auf problemspezifische fachmathematische Techniken auf. Beispielsweise werden geometrische Konstruktionen

öfter eingeschränkt und damit eine Allgemeingültigkeit von Rechengesetzen bei konstruierbaren Zahlen hinterfragt.

Ich möchte nun die blaue Strecke (Zahl) von der grünen Strecke abziehen. Dabei trage ich die blaue Strecke am Startpunkt der grünen Strecke, mithilfe des Zirkels, ab und erhalte so die gelbe Strecke, den Wert der Differenz. Diese Rechenoperationen funktionieren natürlich bei allen konstruierbaren Längen, solange ich die kürzere Strecke von der längeren Strecke abziehen will. An diesem Punkt stehe ich vor meinem ersten Problem.

Es zeigen sich aber zusätzlich auch die entsprechenden Kreuzverbindungen. Also bspw. eine Verbindung von reflexiven Schritten im Bezug auf allgemeinere mathematische Techniken.¹¹

Ich merke, dass das so obvious ist, so dass es schwierig wird drüber nachzudenken wie der Beweis geht. Merke: Jeden Schritt begründen und klein halten.

Hier führt die Arbeitsweise *Eigenes Vorgehen bewerten* zu einer positiven Beeinflussung der Arbeitsweise *Deduktives Ableiten und Vorwärtsarbeiten* für den gesamten weiteren Verlauf der Bearbeitung.

Auch planende Schritte – hier *Teilschritte und -ziele aufstellen* – sind innerhalb der Anwendung problemspezifischer fachmathematischer Techniken – hier *Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln* sowie *geometrische Konstruktionen* – zu beobachten.

$x^2 + 10x + 5^2 \stackrel{!}{=} 39 + 5^2$ $\Leftrightarrow x^2 + 10x + 5^2 - 5^2 - 39 = 0$ $\Leftrightarrow (x + 5)^2 - 64 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 3$ $\Rightarrow \underline{x_2 = -13}$	<p>Jetzt alles auf eine Seite bringen und dann gleich auch noch in geometrischer Form</p> <p style="color: blue;">macht in geometrischer Sichtweise eher weniger Sinn</p>
--	---

Weiterführend zeigen sich bei Typ 6 (ganzheitlicher Typ) aber auch wechselseitige Beeinflussungen zwischen planenden und reflexiven Schritten. Beispielsweise führt das Bewusstsein über neu auftretende oder noch vorhandene Probleme zu einer effizienten Zeiteinteilung in Form von Pausen.

Ob ich Längen von konstruierbaren Strecken multiplizieren und dividieren kann sehe ich noch nicht auf den ersten Blick und brauche jetzt erstmal eine Pause.

¹¹obvious Englisch (bzw. Jugendsprache) für *offensichtlich*

7. Komplexe Analyse und Einzelfallbetrachtung

Bei Proband #22 treten zudem häufig emotionale Äußerungen auf. Diese stellen oftmals intuitive Gedanken und Ausdrücke der (Un-)Zufriedenheit dar. Nicht selten entsteht daraus eine Idee für einen cleveren oder nicht konventionellen Ansatz.

Mir ist das jetzt zu aufwendig jeden möglichen Fall zu untersuchen, da es mit einem zusätzlichen c noch mehr Fälle gibt. Versuche also nun einen Fall zu finden, bei dem die Assoziativität nicht klappt.

Im abgebildeten Beispiel wollte der*die Student*in Begründungen für vorher aufgestellte Rechenregeln auf konstruierbaren Zahlen liefern. Dabei wurde insbesondere auf ein alternatives Assoziativgesetz in Verbindung mit der Subtraktion als Rechenoperation eingegangen. Der*die Student*in war sich bereits vollkommen bewusst, dass eine Regel von bspw. der Form

$$(a - b) - c = a - (b - c)$$

nicht gilt. Die ausgedrückte Unzufriedenheit führt dazu, dass der*die Student*in nicht jedes dieser alternativen Rechengesetze (Kommutativität, Assoziativität, etc.) einzeln prüft, sondern sich auf die Angabe eines Gegenbeispiels beruft, das als grundlegender Widerspruch dient. Als Konsequenz nennt der*die Student*in abschließend die Notwendigkeit von Gegenzahlen und eine strengere Handhabung der Subtraktion als Gegenoperation der Addition durch $a - b := a + (-b)$, womit die Verbindung zu algebraischen Strukturen geglückt ist.

Beim beispielgebundenen Vorgehen sind keine merklichen Unterschiede zu den anderen Typen (2, 3, 4) erkennbar. Es werden hauptsächlich die Arbeitsweisen *Skizzen und Zeichnungen* und *Konkrete (Zahlen-)Beispiele angeben* zur Veranschaulichung und teilweise zur Plausibilitätsprüfung verwendet.

Fachliche Probleme und Defizite bei Arbeitsauftrag 4 und 7

Es wird an dieser Stelle auf die Bearbeitungen hinsichtlich fachlicher Schwierigkeiten bei den beiden jeweils letzten Arbeitsaufträgen eines Inhaltsbereichs eingegangen. Diese stellen jeweils eine abschließende abstrakte Betrachtung der entsprechenden Problemfelder dar und es hat sich gezeigt, dass die Student*innen dabei generell deutlich weniger fachlich korrekte Ergebnisse erzielen konnten.

(OA4) Führen Sie auf \mathbb{R} drei imaginäre Einheiten ein und überprüfen Sie, inwiefern eine körperähnliche Struktur entstehen kann.

Die Bearbeitungen dieses Arbeitsauftrags können grob in drei Gruppen unterteilt werden, wobei anhand der angegebenen Multiplikation auf der neuen Struktur unter-

schieden wird: Keine Bearbeitung; algebraischer Ansatz über das Ausmultiplizieren mittels eines Distributivgesetzes; Fortsetzung der Vorschrift aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Letztere Variante ist nur einmal bei Proband #12 aufgetreten. Die Idee ist interessant, führt jedoch zu Nullteilern (siehe obige Betrachtung von Proband #12 ab Seite 262). Bei der zweiten Variante wird zudem häufig von vornherein von einer Kommutativität ausgegangen. Die Vorschriften, inwiefern die gemischten Produkte sinnvoll festzulegen sind (bspw. $ij = k$), werden größtenteils aus dem Internet recherchiert. In wenigen Fällen geschieht eine vollständige Fallunterscheidung mit Widerspruchsbeweisen. Resultierende Widersprüche bei Kommutativität werden nicht erkannt. Beispielsweise könnte man sehen, dass dann

$$-1 = k^2 = ijij = ijji = -i^2 = 1$$

gelten muss. Insgesamt bleibt der Eindruck, dass die strukturelle Verbindung von Vektorraum- und Körperstruktur in einer Algebra nicht erfasst wird. Es muss hier allerdings einschränkend darauf hingewiesen werden, dass dies auch auf die Aufgabenstellung zurückzuführen sein kann, die lediglich die Körperstruktur explizit erwähnt. Zudem sei angemerkt, dass K -Algebren keinen vertieften Gegenstand einer typischen Veranstaltung zur *Einführung in die Algebra* darstellen.

(OA7) Ein Paar sich schneidender Geraden lässt sich als Grenzfall einer Hyperbel betrachten. Diskutieren Sie zunächst diesen Gedanken und arbeiten Sie Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten von Hyperbel und Paar sich schneidender Geraden heraus. Kontrollieren Sie, ob sich insbesondere die Unterschiede auch an den entsprechenden algebraischen Gleichungen erkennen lassen und übertragen Sie ihre Erkenntnisse auf die restlichen affinen Typen.

Bei diesem Arbeitsauftrag zeigt sich vor allem, dass der Begriff einer abstrakten Irreduzibilität nicht abrufbar oder nicht vorhanden ist. Bei den geometrischen Darstellungen werden noch einige Unterschiede und Gemeinsamkeiten identifiziert. Dazu zählen vorrangig Überlegungen zu einer Krümmung und Geradlinigkeit, zu asymptotischem Verhalten und zur Möglichkeit, die geometrischen Objekte als Kurven ohne Absetzen zeichnen zu können – letzteres kann man als eine qualitative, anschauliche Vorstellung von Irreduzibilität deuten. Sehr selten wird auch erkannt, dass bspw. zwei sich schneidende Geraden eben aus zwei einzelnen Geraden bestehen. Alle diese Eigenschaften können jedoch nicht auf die algebraische Schreibweise in den Normalformen übertragen werden. Die Irreduzibilität von Polynomen wird gar nicht angesprochen.

Sonstige besondere Arbeitsweisen

Es wird an dieser Stelle noch auf einige spezielle Arbeitsweisen eingegangen, die bereits in der qualitativen Inhaltsanalyse, aber auch in der abschließenden Einzelfallbetrachtung besonders aufgefallen sind.

Das Rückwärtsarbeiten ist allgemein nur selten verwendet worden. Dies lässt sich auf die hohen kognitiven Anforderungen zurückführen, die selbst ein Ansatz einer solchen Arbeitsweise erfordert. Die Denkrichtung ist dabei entgegen der intuitiven Vorgehensweise und erfordert ein hohes Maß an metakognitiver Steuerung. In den wenigen Fällen, in denen das Rückwärtsarbeiten Anwendung gefunden hat, war es überwiegend erfolgreich und gewinnbringend. Die gestellten Arbeitsaufträge werfen oftmals Fragestellungen auf, die den Student*innen in Teilen bekannt sind. Dies liegt maßgeblich an der elementaren Natur der Aufgaben. Möglicherweise haben die Student*innen während ihres Studiums oder anderweitig bereits eine Lösung oder Lösungsidee mitbekommen oder die Problemstellung lässt sich fachlich mit weitaus fortgeschritteneren Verfahren lösen, die bereits bekannt sind. Für die Lösung auf elementarem Niveau ist dann ein Ansatz nach dem Rückwärtsarbeiten durchaus möglich. Dennoch wurde nur vereinzelt darauf zurückgegriffen.

Auch das systematische Ausprobieren konnte nur selten beobachtet werden. Diese Arbeitsweise setzt eine hohe Resilienz gegenüber Fehlschlägen voraus, wodurch sich nur wenige der Student*innen auszeichnen konnten. Oftmals wurde die Möglichkeit für ein Ausprobieren nach systematischen Gesichtspunkten bereits nach dem ersten Versuch abgebrochen. Es zeigt sich dabei, dass die Student*innen einerseits nur wenig Vertrauen in das eigene Vorgehen hinsichtlich fachlicher Möglichkeiten haben und andererseits einen Prozess ablehnen, der sich an Fehlschlägen orientiert.

Zusammenfassung

Es sind sehr gute Teilleistungen bei einzelnen Arbeitsaufträgen nur durch vorhandenes Vorwissen erklärbar. Generell scheint fachliches Vorwissen oder auch fachliche Kompetenz der limitierende Faktor für gute bis sehr gute fachliche Bearbeitungen zu sein.

Die verschiedene gewinnbringende Nutzung von beispielgebundenem Vorgehen lässt sich unterhalb der Typen nur indirekt erklären. Die Nützlichkeit hängt maßgeblich von der korrekten Anwendung anderer Arbeitsweisen ab – hauptsächlich allgemeinere mathematische oder problemspezifische fachmathematische Techniken. Die gewinnbringende Nutzung dieser ist aber mit den charakterisierenden Arbeitsweisen der Typen in Verbindung zu bringen.

Zwischen planenden Schritten und gewinnbringender Nutzung allgemeinerer mathematischer Techniken lassen sich schwache Verbindungen beobachten. Insbesondere führt das Aufstellen von Teilschritten und -zielen öfter zu nützlichen Fallunterscheidungen und

seltener auch die Arbeitsweise *Vermutungen und Ideen formulieren* zum Ansatz eines Widerspruchs.

Zwischen reflexiven Schritten und gewinnbringender Nutzung problemspezifischer Techniken lassen sich relativ viele explizite Verbindungen beobachten. Vor allem die Arbeitsweise *Einschränkungen und Probleme aufzählen* zeigt sich im Bezug auf diverse problemspezifische Ansätze.

Der niedrigere Wert gewinnbringender Nutzung von beispielgebundenem Vorgehen bei Typ 3 kann nicht erklärt werden. Möglicherweise hängt dies damit zusammen, dass problemspezifische Techniken spezieller und damit für die Student*innen anschaulicher sind. Dadurch benötigen sie weniger Visualisierungen in Form von konkreten Beispielen oder Skizzen und Zeichnungen. Allerdings zeigt sich das in den Daten nicht in einer merklich niedrigeren Nutzung von beispielgebundenem Vorgehen als die anderen Typen.

Insgesamt wird beispielgebundenes Vorgehen aber flächendeckend eher zur Veranschaulichung oder zur Kontrolle einer Plausibilität, statt zur expliziten Problemlösung genutzt. Das ist unter allen Typen (2, 3, 4, 6) nicht unterscheidbar.

Bei Typ 6 (ganzheitlicher Typ) zeigen sich planende und reflexive Schritte auch in Verbindung mit den jeweils anderen lösungsorientierten Techniken und auch in Verbindung untereinander. Das Vorgehen ist in der Tat stark vernetzt und durch eine wechselseitige Verwendung von Arbeitsweisen charakterisiert.

8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen

In diesem Kapitel wird die Qualität der durchgeführten Studie im Hinblick auf Merkmale qualitativer Forschung beurteilt. Es wird dabei maßgeblich auf die von KUCKARTZ und RÄDIKER (2022) in Abschnitt 4.8 vorgestellte Checkliste zur internen Studiengüte eingegangen. Die Güte ist hierbei durch eine ausführliche Dokumentation des gesamten Forschungsprozesses gewährleistet. Anschließend wird die Durchführung der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse im Sinne einer Intercoder-Übereinstimmung kontrolliert. Bei der inhaltlich-strukturierenden und der evaluativen Inhaltsanalyse wird dies vorrangig mithilfe eines numerischen Übereinstimmungswerts realisiert. Zusätzlich dazu wurde der interpretative Vorgang der evaluativen Inhaltsanalyse auf einem methodisch alternativen Weg durchgeführt. Die beiden Ergebnisse lassen sich qualitativ vergleichen und zeigen insbesondere im Hinblick auf die anschließend darauf aufbauend durchgeführte typenbildende Inhaltsanalyse kaum Unterschiede.

8.1. Checkliste zur internen Studiengüte nach KUCKARTZ und RÄDIKER

Es werden an dieser Stelle die in Tabelle 4.13 in Abschnitt 4.8 auf Seite 98 formulierten Fragen aus der Checkliste zur internen Güte einer qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ und RÄDIKER (2022) beantwortet. Damit sollen dokumentarische Anforderungen an qualitative Forschung erfüllt und eine Nachvollziehbarkeit des gesamten Prozesses sichergestellt werden.

Fragen zur Datenerfassung und Transkription

- „Wurden die Daten fixiert?“
Es handelt sich bei den Daten um verschriftlichte Prozessdokumentationen, die die Student*innen parallel zu ihrer Aufgabenbearbeitung erstellen. Die Daten sind damit in ihrer Form als schriftliches Dokument bereits von statisch fixierter Natur.

8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen

- „Wurde eine interviewbegleitende Dokumentation erstellt?“

Es wurden keine Interviews durchgeführt. Da das Material stattdessen innerhalb einer Lehrveranstaltung aufgenommen wurde, sind jegliche Auffälligkeiten in den Sitzungen des entsprechenden Seminars sowie bei der Korrektur der dort behandelten Arbeitsaufträge durch den Dozenten schriftlich festgehalten worden. Diese Dokumentationen sind insbesondere bei der abschließenden Einzelfallbetrachtung zur genaueren Interpretation erneut herangezogen worden.

- „Wurde eine vollständige Transkription des Materials vorgenommen?“

Da das Material durch die Student*innen bereits in verschriftlichter Form abgegeben wurde, ist keine Transkription notwendig. Eine Übertragung in eine eigene einheitlich verschriftlichte Form erscheint nicht sinnvoll, da die Bearbeitungen nicht als reiner Fließtext formuliert wurden. Oftmals sind Positionierungen innerhalb einer Seite für die Darstellung des Bearbeitungsprozesses relevant und sollten mit betrachtet werden. Auch Farbgebung, verwendete Symbolik und möglicherweise durchgestrichene oder unkenntliche Passagen können zum Verständnis des Vorgehens von Bedeutung sein.

Die in der Einzelfallbetrachtung in Abschnitt 7.4 abgebildeten Auszüge aus den Bearbeitungen der Student*innen wurden hingegen transkribiert, um keine Rückschlüsse von der Handschrift auf die Identität des*r Ersteller*in zuzulassen.

- „Wurden Transkriptionsregeln genutzt und werden diese offengelegt?“

Da keine vollständige Transkription durchgeführt wurde, sind derartige Regeln nicht notwendig.

Die in der Einzelfallbetrachtung in Abschnitt 7.4 abgebildeten Auszüge aus den Bearbeitungen der Student*innen wurden gemäß weniger Vorgaben erstellt:

- Jeglicher Text (digital und analog) wird in eine neutrale Maschinenschrift überführt.
- Textformen werden exakt überführt. Dazu zählen Platzierung, Wort- und Silbentrennung, Zeilenumbrüche sowie Schriftschnitt und -stil.
- Abbildungen, Markierungen und Hervorhebungsmittel werden originalgetreu umgesetzt.

- „Wie sah der Transkriptionsprozess konkret aus?“

Es wurde keine vollständige Transkription durchgeführt.

- „Wer hat transkribiert?“

Es wurde keine vollständige Transkription durchgeführt.

8.1. Checkliste zur internen Studiengüte nach KUCKARTZ und RÄDIKER

Die in der Einzelfallbetrachtung in Abschnitt 7.4 abgebildeten Auszüge aus den Bearbeitungen der Student*innen wurden vom Autor selbstständig transkribiert.

- „Wurde eine Transkriptionssoftware benutzt?“

Es wurde keine Transkriptionssoftware verwendet.

- „Wurden die Daten anonymisiert?“

Die 25 Student*innen wurden von #01 bis #25 durchnummeriert. Dabei wurden die acht Student*innen aus dem SoSe 22 auf die Stellen #01 bis #08, die 13 Student*innen aus dem WiSe 22/23 auf die Stellen #09 bis #21 und die vier Student*innen aus dem SoSe 23 auf die Stellen #22 bis #25 aufgeteilt. Innerhalb dieses Semester wurden die Student*innen zufällig einer Nummer zugeordnet und die Zuordnung extern in einer Tabelle festgehalten. Die einzelnen Dateien der Bearbeitungen von Arbeitsaufträgen wurden dann entsprechend mit diesen Nummern bezeichnet und zusätzlich zwei numerische Werte für den entsprechenden Inhaltsbereich und den entsprechenden Arbeitsauftrag ergänzend angebracht. Eine beispielhafte Dateibezeichnung lautet dann:

03-01-02.pdf

Diese Datei steht für die Bearbeitung von Arbeitsauftrag 2 aus Inhaltsbereich 1 durch Student*in #03, welche*r im SoSe 22 das Seminar besucht hat.

- „Wurden die Transkriptionsregeln eingehalten?“

Es wurde keine vollständige Transkription durchgeführt.

Fragen zur Inhaltsanalyse

- „Ist die gewählte inhaltsanalytische Methode der Fragestellung angemessen?“

Eine qualitative Inhaltsanalyse ist maßgeblich zur Untersuchung von qualitativem Material hinsichtlich latenter Merkmale zu verwenden. Bei den Bearbeitungen der Arbeitsaufträge durch die Student*innen handelt es sich um qualitatives Material, da hier keine rein numerische Darstellung vorliegt. Auch die zu untersuchenden Merkmale von Arbeitsweisen sind latenter und damit qualitativer Natur, womit insgesamt ein interpretativer Ansatz zur Untersuchung notwendig wird. Die Nähe zu Problemlösestrategien und dort bereits bestehende theoretische Modelle zur Klassifizierung gängiger und zielführender Techniken legt eine Methode nahe, die ebenfalls auf einer Klassifizierung basiert. Es sind damit insbesondere Analysemethoden naheliegend, die anhand von Kategorien eine inhaltliche Beschreibung der latenten Merkmale in den Daten anstreben. Abschließend legt die dreigeteilte Formulierung der zweiten Forschungsfrage eine qualitative Inhaltsanalyse anhand

8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen

der drei Basisformen von KUCKARTZ und RÄDIKER nahe, wobei deren tendenziell freiere Umsetzung einer Inhaltsanalyse insbesondere im Hinblick auf das offene Codieren dem zunächst explorativen Charakter der Fragestellungen entgegen kommt.

- „Wird die Wahl der Methode begründet?“

Die Wahl der Methode ist einerseits im Methodenteil in Abschnitt 4.7 auf Seite 85 ausführlich begründet. Zusätzlich werden in selbigem Kapitel 4 ab Seite 61 gängige inhaltsanalytische Methoden und Varianten vorgestellt, die durch eine Abgrenzung bei der Entscheidung berücksichtigt werden. Andererseits wird die Wahl der Methode an dieser Stelle bei der Sicherstellung der internen Güte reflektiert und nachträglich legitimiert.

- „Wurde die jeweilige Methode in sich richtig angewendet?“

Die Umsetzung der Methode richtet sich stark nach dem in der Standardliteratur (KUCKARTZ & RÄDIKER, 2022) ausführlich beschriebenen Ablauf, den die Entwickler*innen der Methode angedacht haben. Es wird dabei jeweils zwischen den entsprechenden Basisformen unterschieden.

- „Wurde die Inhaltsanalyse computergestützt durchgeführt?“

Der Codierprozess und die Analyse sind jeweils in der eigens dafür entwickelten Software *MaxQDA* umgesetzt worden. Es wurde mit der Version *MaxQDA 22* gestartet und im Laufe des Analyseprozesses auf die Version *MaxQDA 24* gewechselt.

- „Wurden das Material oder Teile desselben durch mehrere Codierende unabhängig voneinander bearbeitet?“

Bei der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse wurden in beiden Codierprozessen (Haupt- bzw. Subkategorien) jeweils in der ersten Codierschleife ca. 20 % des Materials durch mehrere Personen unabhängig im Sinne eines konsensualen Codierens codiert. Die Codierungen wurden anschließend zusammengetragen, diskutiert und die Einigungen im Codierleitfaden in den Definitionen der Kategorien festgehalten. Zusätzlich ist die Anwendung des finalen Kategoriensystems durch eine Intercoder-Übereinstimmung kontrolliert worden. Dabei sind ca. 24 % des Materials unabhängig von mehreren Personen codiert worden. Die Übereinstimmung liegt innerhalb einer Toleranzgrenze von 50 % Überschneidung der codierten Segmente bei 73 %. Die Festlegung der Toleranzgrenze und die genauere Entstehung dieser Intercoder-Übereinstimmung sind im nachfolgenden Abschnitt 8.2 beschrieben.

Für die evaluative Inhaltsanalyse wurde kein konsensuelles Codieren durchgeführt, da die evaluativen Kategorien als Ausprägungen keine ausgeprägt kontroverse

Definition hervorgebracht haben. Die Anwendung wurde anschließend durch eine Intercoder-Übereinstimmung kontrolliert. Dabei sind ca. 20 % des Materials unabhängig von mehreren Personen codiert worden. Die Übereinstimmung liegt bei 76 % und ist ebenfalls im nachfolgenden Abschnitt 8.2 genauer beschrieben.

Im Hinblick auf die typenbildende Inhaltsanalyse wurde die Typenbildung im Sinne eines konsensuellen Codierens überprüft. Dazu wurden die Diagramme mit den Ausprägungen der evaluativen Merkmale (siehe Abbildung 6.23 auf Seite 222) drei weiteren Personen vorgelegt. Diese sind nun gebeten worden, innerhalb dieser Ausprägungsdiagramme Typen von ähnlichen Diagrammen zu identifizieren. Diese drei zusätzlichen Typenbildungen weisen hohe Übereinstimmungen mit der vom Autor getroffenen Typenbildung auf. Der Vergleich dieser vier Typenbildungen ist in Abschnitt 8.3 genauer beschrieben.

- „Wie wurde die Übereinstimmung der Codierenden ermittelt? Welches Vorgehen wurde bei Nicht-Übereinstimmung gewählt?“

Beim konsensuellen Codieren wurden die unabhängig codierten Segmente anschließend verglichen und diskutiert. Es konnte sich dabei immer auf eine Entscheidung hinsichtlich einer Codierung oder hinsichtlich eines Kompromisses geeinigt werden. Diese Diskussionen wurden in Form von Anker- und Abgrenzungsbeispielen oder aber einer verbesserten Kategoriendefinition im Codierleitfaden festgehalten.

Bei der Intercoder-Übereinstimmung musste insbesondere bei der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse eine Toleranzgrenze für die Übereinstimmung zweier codierter Segmente festgelegt werden. Das offene Codieren, wie es in der Variante der qualitativen Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ und RÄDIKER praktiziert wird, führt nur in seltenen Fällen zu exakt übereinstimmenden Segmentgrenzen zwischen zwei verschiedenen codierenden Personen. In Abschnitt 8.2 ist die Entscheidung hin zu einer Toleranzgrenze von 50 % Überschneidung genauer beschrieben und begründet.

- „Ist das Kategoriensystem in sich konsistent?“

Das Kategoriensystem für Arbeitsweisen aus der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse spiegelt gängige Theorien zu Problemlösestrategien von bspw. PÓLYA (1995), BRUDER und BAUER (ehem. COLLET) (2011) sowie STILLER et al. (2021) wieder. Auch allgemeinere mathematische Techniken, wie sie bspw. SCHWARZ (2018) beschreibt, lassen sich gut wiedererkennen. Im Hinblick auf mathematisches Arbeiten ist das Kategoriensystem dementsprechend passend entwickelt und bildet damit einen logischen Prozess der Bearbeitung mathematischer Probleme ab.

8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen

- „Sind die Kategorien und Subkategorien gut ausgearbeitet?“

Die Kategorien für Arbeitsweisen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse sind anschaulich benannt, ausführlich definiert und durch Anker- und Abgrenzungsbeispiele sowie typische Identifikationsmerkmale umfangreich beschrieben. Die entsprechenden Ausführungen sind dem Codierleitfaden in Anhang C.1 auf Seite 341 zu entnehmen.

Die Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse sind ebenfalls in einem Codierleitfaden in Anhang C.2 auf Seite 349 beschrieben.

Die Typen der typenbildenden Inhaltsanalyse sind am Ende von Abschnitt 6.3 ab Seite 228 beschrieben. Es wurden bildhafte Bezeichnungen und ausführliche Definitionen angegeben sowie jeweils eine graphische Darstellung im Bezug zu den evaluativen Merkmalen erstellt.

- „Wie präzise und ausführlich sind die Kategoriendefinitionen?“

Die Übereinstimmung der Kategorien mit den in Abschnitt 3.1 ab Seite 23 beschriebenen theoretischen Modellen zu Problemlösestrategien spricht für eine treffende Formulierung der Kategorien. Auch die im nachfolgenden Abschnitt 8.2 dargelegte hohe Intercoder-Übereinstimmung und eine damit einhergehende Bestätigung der guten lokalen Anwendbarkeit der Kategorien spricht für eine saubere Kategoriendefinition.

- „Gibt es konkrete Beispiele als Illustrationen?“

Im Codierleitfaden für die inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse in Anhang C.1 auf Seite 341 sind alle Kategorien durch konkrete Beispiele aus dem vorliegenden Material veranschaulicht.

Die Typen der typenbildenden Inhaltsanalyse sind am Ende von Abschnitt 6.3 ab Seite 228 jeweils graphisch im Bezug zu den evaluativen Merkmalen dargestellt.

- „Wurden alle erhobenen Daten bei der Analyse berücksichtigt?“

Es wurden von den 27 Student*innen aus den drei betrachteten Semestern (SoSe 22, WiSe 22/23, SoSe 23) lediglich zwei Student*innen von der Analyse ausgeschlossen. Hier erfüllen die abgegebenen Dokumentationen in zu geringem Maße Kriterien für eine dokumentarische Darstellung eines Bearbeitungsprozesses. Diese Abgaben lassen keine Rückschlüsse auf die verwendeten Arbeitsweisen zu und beschränken sich lediglich auf die Darstellung von mathematischen Endergebnissen. Die Abgaben der restlichen 25 Student*innen wurden vollständig analysiert.

- „Wie oft wurde das Material bis zur endgültigen Codierung durchlaufen?“

Die gesamte Inhaltsanalyse besteht aus vier initiierten Textarbeiten anhand

8.1. Checkliste zur internen Studiengüte nach KUCKARTZ und RÄDIKER

jeweils ca. 20 % des Materials; sieben Codierschleifen, wobei jeweils das gesamte Material durchgegangen wurde; und zwei konsensuellen Codierphasen an jeweils verschiedenen 20 % des Materials. Die Aufteilung auf die einzelnen, aufeinander aufbauend konzipierten Formen der qualitativen Inhaltsanalyse ist nachfolgend genauer beschrieben.

Bei der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse wurden insgesamt zwei Codierprozesse durchgeführt: Einer für die Hauptkategorien und einer für die Ausdifferenzierung in Subkategorien. Ein Codierprozess bestand dabei aus einer initiierten Textarbeit, einer Codierschleife mit parallel laufendem konsensuellem Codieren und einer finalen Codierschleife. Bei der initiierten Textarbeit sind ca. 20 % des Materials bearbeitet worden. Beide anschließenden Codierschleifen durchlaufen das gesamte Material. Das konsensuelle Codieren einer anderen Person erfolgt jeweils an ca. 20 % des Materials. Insgesamt wurden bei der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse also zwei initiierte Textarbeiten an jeweils 20 % des Materials, vier Codierschleifen an jeweils dem gesamten Material und zwei Prozesse des konsensuellen Codierens von jeweils 20 % des Materials durchgeführt.

Bei der evaluativen Inhaltsanalyse wurde ähnlich der vorangegangenen inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse zunächst 20 % des Materials testweise durchgegangen. Nach der Festlegung erfolgt eine Codierschleife, wobei das gesamte Material codiert wird. Zur Kontrolle der Interpretation der Ausprägungsstufen im Sinne einer Intervalskala wurde das Material zusätzlich nochmals vollständig durchgearbeitet. Die Notwendigkeit dieser zusätzlichen Codierschleife wird in Abschnitt 8.3 begründet.

Auch bei der typenbildenden Inhaltsanalyse wurde zunächst 20 % des Materials durchgegangen und anschließend eine Codierschleife des gesamten Materials angehängt.

- „Ist Auditierbarkeit gegeben?“

Da es sich bei den Bearbeitungen der Student*innen um Teile deren Prüfungsleistung für das besuchte Seminarmodul handelt, kann keine Einsicht in die vollständigen Bearbeitungen gewährt werden. Die Zustimmung der Student*innen zur wissenschaftlichen Auswertung ihrer Bearbeitungen erlischt zudem nach Abschluss der inhaltsanalytischen Auswertung. Die Projektdatei in der Software *MaxQDA* ist davon ebenfalls betroffen und wird am Ende der Auswertung gelöscht. Lediglich eine anonymisierte tabellarische Auflistung der Anzahlen codierter Kategorien pro Bearbeitung wird festgehalten. Da damit insbesondere der Codierprozess im Nachhinein nicht auditiert werden kann, wurde bei der Codierung auf möglichst umfangreiche Phasen des Recodierens durch andere Personen Wert gelegt.

8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen

- „Wurden auch abweichende Fälle berücksichtigt? Wird auf Ausnahmefälle und Extremfälle hingewiesen und wurden diese analysiert?“
Die komplexe Analyse in Kapitel 7 und insbesondere die Einzelfallbetrachtungen in Abschnitt 7.4 gehen auf besondere Fälle ein, die in der Inhaltsanalyse aufgefallen sind.
- „Wurden im Verlauf der Analyse Memos geschrieben?“
Es wurden insbesondere in den Phasen der initiiierenden Textarbeit Memos bei der Arbeit im Material notiert. Diese wurden direkt in der Software *MaxQDA* eingetragen und betrafen unter anderem Anmerkungen zu den zu definierenden Kategorien, aber auch fallbezogene Auffälligkeiten.
- „Wurde mit Originalzitataten gearbeitet?“
Die Ankerbeispiele aus dem Codierleitfaden für Arbeitsweisen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse in Anhang C.1 auf Seite 341 sind jeweils Originalzitate des vorliegenden Materials. Auch die dargestellten Zitate der Einzelfallbetrachtungen aus Abschnitt 7.4 sind originalgetreue Aussagen der Student*innen.
- „Sind die gezogenen Schlussfolgerungen jeweils in den Daten begründet?“
Die gezogenen Schlussfolgerungen sind ausschließlich auf Grundlage des analysierten Materials und der daraus entstandenen Daten getroffen worden. Insbesondere bei den Einzelfallbetrachtungen in Abschnitt 7.4 wird direkt auf das Material eingegangen.

8.2. Intercoder-Übereinstimmung

Für die Kontrolle der Intercoder-Übereinstimmung bei der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse wurden insgesamt 40 Bearbeitungen von Arbeitsaufträgen von anderen Forscher*innen mit den Kategorien für Arbeitsweisen erneut codiert. Das entspricht ca. 24 % des Materials. Dabei entfielen zwölf Bearbeitungen auf das SoSe 22, 21 Bearbeitungen auf das WiSe 22/23 und sieben Bearbeitungen auf das SoSe 23. Die Bestimmung eines numerischen Werts für die Intercoder-Übereinstimmung erfolgte mithilfe der Software *MaxQDA 24*. Es werden dabei jeweils die Codierungen des Autors mit denen eines*r Recodierer*in verglichen. Der Vorgang läuft in zwei Schritten ab: Zunächst werden die codierten Segmente des Autors als Codiereinheiten festgelegt und diese Codiereinheiten bei dem*r Recodierer*in betrachtet. Ist an dieser Stelle die gleiche Kategorie innerhalb einer Toleranzgrenze codiert, so wird eine Übereinstimmung gezählt. Der Vorgang wird anschließend umgekehrt für die codierten Segmente des*r Recodierer*in wiederholt. Als Toleranzgrenzen wurden unterschiedliche prozentuale Flächenüberschneidungen gewählt.

In Abbildung 8.1 sind die Anteile übereinstimmend codierter Segmente über diesen verschiedenen Toleranzgrenzen aufgetragen.

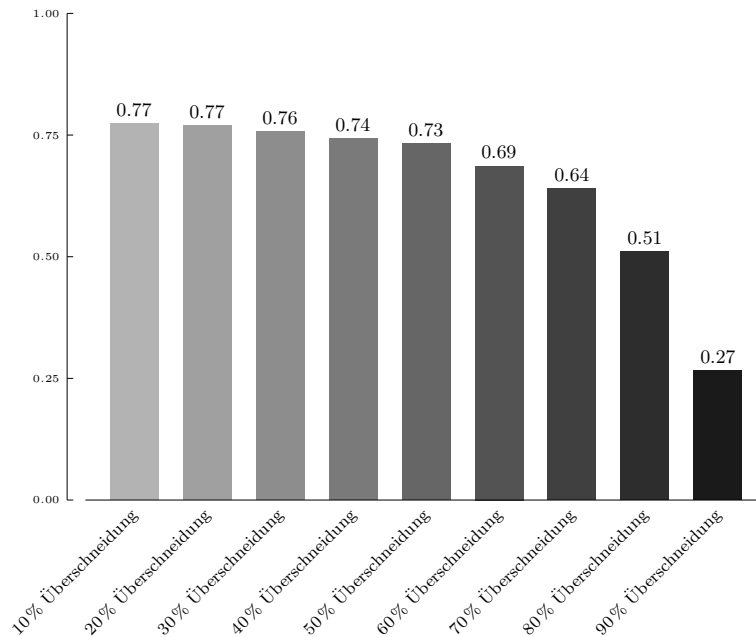


Abb. 8.1.: Intercoder-Übereinstimmung der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse bei unterschiedlichen Toleranzgrenzen der Bewertung von übereinstimmend codierten Segmenten.

Es zeigt sich, dass die prozentuale Übereinstimmung bei den Codierungen bei einer Toleranz von 50 % Überschneidung oder niedriger relativ stabil bei 0,73 bis 0,77 liegt. Bis zu einer Toleranz von 70 % Überschneidung fällt die Übereinstimmung leicht auf 0,64 ab. Bei einer Toleranz von über 70 % Überschneidung bricht die Übereinstimmung dann deutlich ein.

Im Mittel besteht eine Bearbeitung eines Arbeitsauftrages aus ca. zwei bis drei beschriebenen DIN A4-Seiten. Ein codiertes Segment innerhalb diesem Materials umfasst typischerweise zwischen zwei und fünf beschriebenen Zeilen und macht damit innerhalb einer Bearbeitung nur einen kleinen Teil aus. Da es sich bei den Dokumentationen zusätzlich um stark qualitativ geprägtes Material handelt, sind Toleranzgrenzen von über 70 % Überschneidung nicht sinnvoll. Dadurch könnte schon die Hinzunahme oder das Auslassen einzelner Wörter oder Nebensätze beim Codieren zu Nichtübereinstimmungen in der Intercoder-Übereinstimmung führen. Der Wert von 0,64 bei einer Toleranzgrenze von 70 % Überschneidung ist für eine qualitative Inhaltsanalyse bereits annehmbar. Die Werte von über 0,70 für Toleranzgrenzen von 50 % Überschneidung oder niedriger sind als sehr gut einzustufen. Die Stabilität der Übereinstimmung in diesem Toleranzbereich besagt zusätzlich, dass sich die übereinstimmende lokale Anwendung einer Kategorie meist in einer ab 50 % flächendeckenden Codierung niederschlägt. Vor dem Hinter-

8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen

grund von codierten Segmenten von typischerweise wenigen Zeilen, entspricht dies einer Abweichung von ungefähr ein bis zwei Zeilen. Im Bezug auf den Umfang einer gesamten Bearbeitung eines einzelnen Arbeitsauftrages von wenigen Seiten ist dies definitiv als lokale Übereinstimmung einer Arbeitsweise einzuordnen. Es wird sich aus diesem Grund für die inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse auf eine Toleranzgrenze von 50 % Überschneidung festgelegt, womit sich die Intercoder-Übereinstimmung von 0,73 ergibt.

Für die Kontrolle der Intercoder-Übereinstimmung bei der evaluativen Inhaltsanalyse wurden insgesamt 27 Bearbeitungen von Arbeitsaufträgen von anderen Forscher*innen erneut mit den evaluativen Ausprägungen der acht Merkmalsdimensionen codiert. Das entspricht ca. 20 % des Materials. Dabei entfielen sechs Bearbeitungen auf das SoSe 22, 14 Bearbeitungen auf das WiSe 22/23 und sieben Bearbeitungen auf das SoSe 23.

Bei 27 Bearbeitungen zu je acht Merkmalen, sind insgesamt 216 Beurteilungen hinsichtlich einer evaluativen Ausprägung zu treffen. Davon wurden 164 Fälle übereinstimmend codiert. Dies entspricht ca. 76 % der Gesamtheit des doppelt codierten Materials. Bezeichnet man die Codierung des Autors des i -ten doppelt codierten Falles mit x_i und die Codierung des*r zusätzlichen Forscher*in des entsprechenden Falles mit y_i , so lässt sich neben einer Betrachtung der absoluten Übereinstimmung auch das Ausmaß der Abweichung bewerten. Es sei die Anzahl der doppelt codierten Fälle mit N bezeichnet.

$$r_1 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - y_i, \quad r_2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|, \quad r_3 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2$$

Der Parameter r_1 behandelt die Abweichung über alle doppelt codierten Fälle und berücksichtigt dabei, ob beim Recodieren eine höhere oder niedrigere Ausprägung als beim Autor zugeordnet wurde. Es ist $r_1 \approx -0,06$, was zeigt, dass sich etwaige Abweichungen zwischen den Codierer*innen in der Richtung gegenseitig fast aufheben. Das negative Vorzeichen deutet an, dass die zusätzlichen Codierer*innen tendenziell leicht höhere Ausprägungen verorten als der Autor. Der Parameter r_2 gibt die absolute Abweichung pro Codiereinheit an. Es ist $r_2 \approx 0,26$, womit insbesondere im Hinblick auf den Skalenabstand der evaluativen Ausprägungen $r_2 \ll 1$ als ebenfalls sehr gering einzustufen ist. Der letzte Parameter r_3 behandelt analog zum Parameter r_2 die absoluten Abweichungen, gewichtet aber zusätzlich höhere Abweichungen stärker als niedrigere Abweichungen. Mit einem Wert von $r_3 \approx 0,31$ zeigt sich allerdings, dass dieser Wert nicht grundlegend verschieden von r_2 ist. Das bedeutet, dass sich der Großteil der Abweichungen durch geringe Abweichungen äußert und nur in Einzelfällen große Abweichungen auftreten. Insgesamt lässt sich die Codierung mit den evaluativen Ausprägungen damit als sehr konsistent und gut reproduzierbar beurteilen.

Für die typenbildende Inhaltsanalyse wird kein numerischer Wert zur Intercoder-Übereinstimmung ermittelt. Die niedrige Zahl von nur 25 Student*innen als zu codierende Fälle ist für eine derartige Quantifizierung nicht geeignet. Die typenbildende Inhaltsanalyse wird stattdessen nur im Bezug auf die Plausibilität der Typenbildung aus der evaluativen Inhaltsanalyse heraus kontrolliert..

8.3. Qualitative Güte der evaluativen Inhaltsanalyse

Die evaluative Inhaltsanalyse stellt einen in besonderem Maße stark qualitativen Prozess der Interpretation von Daten dar. Die methodische Anordnung als aufbauend auf einer vorangegangenen inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse verstärkt diesen interpretativen Charakter noch weiter. Es werden an dieser Stelle einige zusätzliche Merkmale des Vorgehens kontrolliert, um auch hier eine qualitative Form der Reliabilität beurteilen zu können. Es wird insbesondere auf die Interpretation der Merkmalsausprägungen als Intervallskala eingegangen. Es zeigt sich, dass die Einschätzung von Ausprägungen der evaluativen Merkmale über alle sechs, bzw. sieben Bearbeitungen einer Student*in zu ähnlichen Mustern führt wie die gebildeten Mittelwerte der Ausprägungen der einzelnen Bearbeitungen.

Bei der evaluativen Inhaltsanalyse wurden acht verschiedene Merkmalsdimensionen von Typen von Arbeitsweisen angesetzt. Jeder Bearbeitung eines Arbeitsauftrages wurde dann für jede dieser acht Merkmalsdimensionen eine Ausprägung in den Stufen *keine* Ausprägung (codiert mit 0), *geringe* Ausprägung (codiert mit 1), *mittlere* Ausprägung (codiert mit 2) und *hohe* Ausprägung (codiert mit 3) zugeordnet. Anschließend wurden die sechs, bzw. sieben Arbeitsaufträge eines*r Student*in zusammengefasst und in allen acht Merkmalsdimensionen eine Gesamtausprägung als Mittelwert der Einzelausprägungen ermittelt. Dieses Vorgehen interpretiert die Ausprägungsstufen als Intervallskala, was tendenziell nicht der Fall ist. Die Abstände der einzelnen Stufen sind nicht normiert, weisen einen stark interpretativen Charakter auf und sie sind nicht äquidistant. Insbesondere der Abstand zwischen keiner Ausprägung (0) und geringer Ausprägung (1) ist deutlich kleiner als jeweils der Abstand zweier benachbarter Ausprägungsstufen der oberen drei Ausprägungen. Um die Bildung dieser Mittelwerte nachträglich zu kontrollieren, wurde eine zusätzliche Codierschleife im Setting einer Intracoder-Übereinstimmung durchgeführt. Es wurden dabei die sechs bzw. sieben Arbeitsaufträge eines*r Student*in jeweils zusammengefasst betrachtet und eine Gesamtausprägung in den acht Merkmalsdimensionen interpretativ codiert. In Abbildung 8.2 sind die resultierenden Ausprägungsgrade dieser Merkmale pro Student*in erneut mithilfe der in Abschnitt 6.3 verwendeten Netzdiagramme dargestellt. Es sind dabei einerseits die Gesamtbewertungen aus diesem Abschnitt und die Mittelwerte der Einzelbewertungen aus Abschnitt 6.3 vergleichend

8. Beurteilung der Güte der Studie und interpretative Limitationen

dargestellt. Für eine leicht größere Darstellung der entsprechenden Netzdiagramme sei auf die Abbildungen B.36 und B.37 im Anhang auf Seite 335f. verwiesen. Es zeigen sich nahezu identische Muster wie in den Darstellungen mit den Mittelwerten. Insbesondere die Typenbildung lässt sich hieran äquivalent umsetzen.

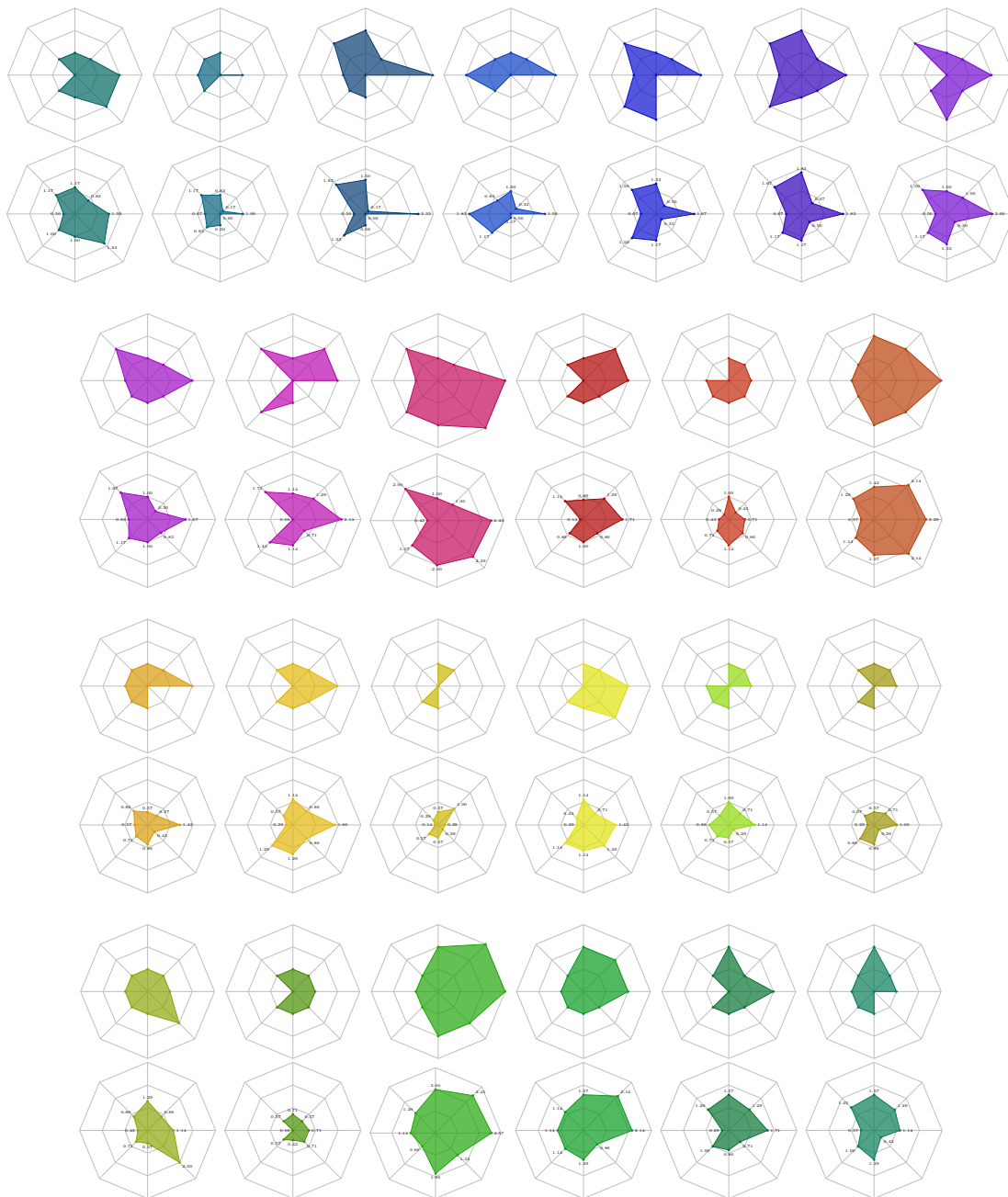


Abb. 8.2.: Vergleich der Ergebnisse zur Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband. Oben immer die Gesamtbewertung, unten die Mittelwerte der Einzelbewertungen.

9. Fazit

Das zentrale Ziel der vorliegenden Arbeit war ein explorativer Zugang zu den Arbeitsweisen von Studierenden des gymnasialen Lehramts. Es soll damit eine Grundlage für die Beschreibung und Diskussion von Kompetenzen geschaffen werden, die diese durch ihre fachliche und fachdidaktische Ausbildung an der Universität im Bezug auf ein Verständnis für grundlegende Wesenszüge der Mathematik als Wissenschaft erwerben. Die Grundmotivation für diese Zielstellung ist insbesondere aus der zweiten Stufe der doppelten Diskontinuität von KLEIN (1908) – also dem Übergang von der Hochschule zurück an die Schule – erwachsen. Es sind deshalb zwei übergeordnete Forschungsfragen gestellt worden: Eine zur stoffdidaktischen Analyse der Verbindung von schulischer und universitärer Algebra und eine zu den Arbeitsweisen, die bei Studierende des gymnasialen Lehramts im höheren Semester auftreten.

- (F1) Inwiefern eignet sich die universitäre Algebra zur Vernetzung von schulischem und universitärem Fachwissen?
- (F2) Wie bearbeiten Studierende des gymnasialen Lehramts offene Arbeitsaufträge zu mathematischen Problemen?

Erste Forschungsfrage (F1)

Eine Antwort auf die erste Forschungsfrage wurde mit einer Analyse der Einflussfaktoren auf die Relevanz algebraischer Themen der universitären Mathematik für Lehramtsstudierende gegeben. Dabei sind schulische und universitäre Einflussfaktoren unterschieden worden. Auf schulischer Seite sind der bayerische Fachlehrplan für Mathematik am Gymnasium (ISB, n. d. a) und die Fachdidaktik in Form eines typischen Lehrbuchs zur *Didaktik der Algebra* (WEIGAND et al., 2022) untersucht worden. Die universitären Einflüsse sind anhand des Anforderungsniveaus des ersten Staatsexamens (BAYERISCHE STAATSKANZLEI, n. d.) und gängiger Fachliteratur zur *Einführung in die Algebra* (BOSCH, 2008; KARPFFINGER & MEYBERG, 2017) betrachtet worden.

Als Schnittmenge dieser Einflussfaktoren konnten insgesamt vier mathematische Gegenstände identifiziert werden: *Zahlenbereiche als algebraische Strukturen*, *Symmetrien auf Nullstellen mittels Galoistheorie*, *Endliche (zyklische) Gruppen* und *Kegelschnitte in der analytischen Geometrie*. Als Voraussetzung für solche Themen zeigt sich ausgehend

9. Fazit

von der Schulmathematik die Notwendigkeit nach einer elementaren Motivation, die diesen Problemfeldern zugrunde liegen muss. Es zeigt sich aus fachdidaktischer Sicht vermehrt ein Ansatz, der Felder der Schulmathematik zu einer abstrakten Mathematik fortsetzen möchte. Lediglich im Themenfeld *Endliche (zyklische) Gruppen* ist eher die *top-down*-Sichtweise der Mathematik aus einem höheren Standpunkt abgebildet. Mit dem Ziel, Lehramtsstudierende in eine selbstentdeckende Lernform zu bringen, bietet sich erstere Variante eher an. Dies rührt zum einen daher, dass direkt an vorhandenes Wissen angeknüpft wird und zum anderen die Struktur des Mathematiklernens in dieser Form bereits aus der Schule bekannt sein dürfte. Es ergeben sich somit inhaltliche wie methodische Anknüpfungspunkte.

Es lassen sich demnach eindeutig Verknüpfungspunkte zwischen der schulischen und der universitären Algebra finden, womit sich einerseits das fachliche Niveau in der diesbezüglichen Lehramtsausbildung rechtfertigen lässt und andererseits die Möglichkeit nach einer sinnvollen Fortsetzung der Schulmathematik zu einer abstrakten Mathematik begründet wird. Umgekehrt zeigt die Analyse jedoch auch, dass es durchaus einige algebraische Themen in der fachlichen Lehramtsausbildung gibt, die kaum Verbindungen zu späteren Lehrinhalten in der Schule aufweisen. Man denke hier bspw. an *Gruppenwirkungen* und die *Sätze von SYLOW*. Sicherlich sind diese Gebiete zur Vertiefung eines Verständnisses über die Gruppentheorie bestens geeignet, aber zu schulischen Themen sind nur äußerst schwierig direkte – wenn nicht sogar indirekte – Brücken zu schlagen.

Zweite Forschungsfrage (F2)

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wurde eine umfangreiche qualitative Inhaltsanalyse nach KUCKARTZ durchgeführt und die Ergebnisse anschließend in einer Sekundäranalyse komplex diskutiert und mit unterschiedlichen Merkmalen in Beziehung gesetzt.

Die qualitative Inhaltsanalyse war dreigeteilt. In einer ersten inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse (siehe Abschnitt 6.2) wurden Dokumentationen von Bearbeitungen von offenen Arbeitsaufträgen durch Lehramtsstudierende untersucht. Diese sind in einem Seminar entstanden, in dem die in der ersten Forschungsfrage identifizierten algebraischen Problemfelder zur Verknüpfung von schulischer und universitärer Mathematik thematisiert wurden. Die Analyse erfolgt hinsichtlich verwendeter Arbeitsweisen. Es konnten insgesamt 30 Arbeitsweisen als Subkategorien beobachtet werden. Diese konnten in drei Hauptkategorien gruppiert werden: Planende bzw. strukturierende Schritte, Strategien der Durchführung und reflexive Schritte. Die entstandenen Haupt- und Subkategorien bilden dabei die gängigen theoretischen Modelle zu Problemlösestrategien sehr gut ab.

Es zeigte sich zudem eine gute Anwendbarkeit selbst bei umfangreichem und in der Darstellungsform stark unterschiedlichem Material.

Für eine evaluative Inhaltsanalyse (siehe Abschnitt 6.3) wurden die Subkategorien innerhalb der Hauptkategorien zu größeren Gruppen zusammengefasst. Für diese Gruppen wurden anschließend Ausprägungsgrade der Verwendung in den einzelnen Bearbeitungen codiert, wodurch nicht nur ein generelles Auftreten von Arbeitsweisen behandelt werden konnte, sondern zusätzlich das Ausmaß der Verwendung dieser Arbeitsweisen mit betrachtet wurde. Es äußerte sich ein größerer Teil (8 von 25) der untersuchten Student*innen dadurch, dass nahezu alle diese Arbeitsweisen nur sehr gering oder gar nicht verwendet wurden. Unter den restlichen Student*innen konnten generell Unterschiede hinsichtlich der Ausprägung von planenden und reflexiven Schritten herausgestellt werden. Diese Einteilung bildete die Grundlage für eine abschließende Typisierung der Student*innen.

Anhand der typenbildenden Inhaltsanalyse (siehe Abschnitt 6.2) konnten schließlich sechs Typen hinsichtlich Arbeitsweisen formuliert werden: Der passive Typ, der lösungsorientierte Typ, der reflexive Typ, der planende Typ, der hilfeschuchende Typ und der ganzheitliche Typ. Dabei wurden nur zwei Student*innen letztendlich dem Typ 6 (ganzheitlicher Typ) zugeordnet. Lediglich bei diesem Typ kann man von einer strukturierten und umfangreichen Bearbeitung der Problemstellung in dem Sinne reden, wie man ihn sich als Vorbild auch von Lehrkräften im Unterricht wünschen würde. Es drängt sich folgende Hypothese auf:

- (H1) Die fachliche und fachdidaktische Ausbildung von Studierende des gymnasialen Lehramts befähigt diese prinzipiell nicht zu einem ganzheitlichen Bearbeiten von mathematischen Problemen im Sinne des Problemlösens.

Zu einem in Teilen vergleichbaren Ergebnis kommt auch KIRSTEN (2021). Sie beobachtet, dass selbst „in vollständigen Beweisprozessen die Phase des Strukturierens oder des Validierens vereinzelt unberücksichtigt“ (KIRSTEN, 2021, S. 324) bleibt. Das nur vereinzelt Auftreten im Gegensatz zum in dieser Arbeit eher überwiegend beobachteten derartigen Vorgehen ist mit der Problemsituation zu erklären. In der Studie von KIRSTEN sind typische kurze Übungsaufgaben zur höheren Mathematik untersucht worden. In der vorliegenden Arbeit wurden hingegen breiter angelegte, offene Arbeitsaufträge thematisiert.

Die entstandenen Typen wurden abschließend in einer komplexen Analyse (siehe Abschnitt 7) genauer untersucht. Dazu wurden Merkmale betrachtet, die nicht direkt in die Typisierung eingegangen sind. Dazu zählen vor allem fachliche Merkmale, wie Fachnoten der Bearbeitungen und eine Beurteilung einer Arbeitsweise hinsichtlich einer Nützlichkeit, aber auch andere Merkmale wie bspw. die Fachsemesterzahl der Student*innen. Es

9. Fazit

wird im Folgenden auf daraus erzielte zentrale Erkenntnisse in Form von Hypothesen eingegangen.

Betrachtet man die resultierenden Fachnoten jeweils sortiert nach den sechs Typen, so zeigt sich, dass diejenigen Typen mit umfangreichen und vielfältigen Arbeitsweisen tendenziell bessere Noten aufweisen. Die Anzahlen der Fachnoten alleine haben aufgrund der niedrigen Anzahl an Student*innen innerhalb einiger Typen nur geringe Aussagekraft. In den Einzelfallbetrachtungen konnten aber durchaus entsprechende Verbindungen zwischen speziellen Arbeitsweisen und dem Zustandekommen von fachlich korrekten Ergebnissen aufgezeigt werden.

(H2) Gute fachlich Leistungen stehen mit der umfangreichen Verwendung von Arbeitsweisen – insbesondere solchen, zur Planung und Reflexion – in Verbindung.

Es bleibt dennoch unklar, in welche Richtung eine solche Korrelation auftritt. Ob nun umfangreiche Arbeitsweisen zu guten Fachnoten führen oder gute Fachnoten für eine hohe Fachkompetenz stehen, welche wiederum die Anwendung vielfältiger Arbeitsweisen begünstigt, kann nicht beurteilt werden.

Betrachtet man neben der Durchschnittsnote innerhalb der sechs Typen die Verteilung der Fachnoten, so erkennt man, dass die Typen sich maßgeblich durch eine Grenze hinsichtlich auftretender schlechterer Noten unterscheiden. Nahezu alle Typen¹ weisen Student*innen mit näherungsweise guten Noten in ähnlichen Bereichen (um 2,7) auf. Mit zunehmend weniger umfänglichen Arbeitsweisen treten innerhalb der Typen aber zusätzlich auch immer mehr Student*innen mit schwächeren Noten auf. Dies könnte dafür sprechen, dass die Verwendung von Arbeitsweisen nicht generell mit guten fachlichen Bearbeitungen in Verbindung steht, wohl aber mit der Möglichkeit für schlechtere fachliche Bearbeitungen.

(H3) Die umfangreiche Verwendung von Arbeitsweisen – insbesondere solche, zur Planung und Reflexion – kann schlechte fachliche Leistungen verhindern.

In den Einzelfallbetrachtungen fällt diese mögliche Unabhängigkeit zwischen guten fachlichen Leistungen und umfangreicher Verwendung von Arbeitsweisen ebenfalls auf. Insbesondere bei sehr guten Einzelbearbeitungen konnte die Beurteilung maßgeblich auf fachliches Vorwissen zurückgeführt werden. Ebenso zeigten wenige Student*innen in Typ 1 (passiver Typ) – also solche, die sich auf die Präsentation von Ergebnissen ohne

¹außer Typ 5 (hilfesuchender Typ)

Lösungsweg beschränken – eine erhöhte fachliche Kompetenz, die mit höherem Vor- und Fachwissen oder gar Talent zu erklären ist.

- (H4) Der limitierende Faktor für sehr gute fachliche Leistungen ist maßgeblich das Fachwissen und die Fachkompetenz und nicht die umfangreiche Verwendung von Arbeitsweisen – insbesondere nicht solche, zur Planung und Reflexion.

Dieses Phänomen zeigt sich bei STENZEL (2022) ähnlich. Hier wird ersichtlich, dass „[g]rundlegendes Begriffswissen meist notwendige Voraussetzung“ (STENZEL, 2022, S. 181) für die Möglichkeit zur Problembehandlung ist.

Die Teilnoten der Arbeitsaufträge zeigen weiterführend bei den jeweils letzten Arbeitsaufträgen eines Inhaltsbereichs deutlich schlechtere Ergebnisse. Diese Arbeitsaufträge stehen zwar jeweils für eine abstrakte Behandlung des entsprechenden Problemfeldes, sind aber dennoch im Sinne einer logischen Fortsetzung des mathematischen Gegenstandes formuliert. Während die ersten Arbeitsaufträge auf sehr anschaulichen Konzepten fundieren, ist hier der Übergang zur abstrakten Beschreibung gefordert. Diesen Sprung schaffen die Student*innen nur äußerst selten und selbst dann in nur begrenztem Umfang.

- (H5) Studierende des gymnasialen Lehramts können abstrakte mathematische Konzepte nur selten mit konkreten anschaulichen Anwendungsfeldern in Verbindung setzen.

Es entsteht der Eindruck, dass Lehramtsstudierende zwar möglicherweise über erhöhtes Fachwissen verfügen, dieses aber nur schwach vernetzt ist, wodurch Transferaufgaben auf abstraktem Niveau nahezu unmöglich zu bearbeiten sind. Möglicherweise wird diese Vernetzung von abstraktem Wissen mit anschaulichen Konzepten oder Anwendungsfällen aber auch in den gängigen Fachveranstaltungen zu wenig eingefordert. Auch die umfangreiche Stoffmenge, die weit über die in Forschungsfrage 1 identifizierten Themen hinausgeht, lässt gerade Lehramtsstudierenden nur wenig Freiraum, selbstständig ein vernetztes Wissen aufzubauen. Insbesondere zentrale Zielsetzungen und Motivationen der Mathematik können auf diesem Wege verloren gehen.

Die Typologie unterscheidet Studierende maßgeblich danach, ob diese planende und bzw. oder reflexive Schritte verwenden oder nicht verwenden. Bei der Verwendung von Strategien zur konkreten Problembewältigung können innerhalb der vier Merkmale *Allgemeinere mathematische Techniken*, *Beispielgebundenes Vorgehen*, *Externe Hilfsmittel heranziehen* und *Problemspezifische fachmathematische Techniken* nur hinsichtlich der externen Hilfsmittel tatsächliche Unterschiede erkannt werden. Es tritt die Charakterisierung von Typ 5 (hilfesuchender Typ) zutage, die in dieser Arbeitsweise einen

9. Fazit

deutlichen Ausschlag sieht. Die anderen Typen (2, 3, 4, 6) lassen sich in den anderen drei Merkmalen nicht an den Ausprägungen unterscheiden. Eine weitere Analyse hat zudem die Verläufe der Ausprägungen dieser Merkmale über die einzelnen Arbeitsaufträge hinzugezogen. Auch dort konnten keine merklichen Abweichungen identifiziert werden. Es stellte sich nun die Frage, inwiefern diese Merkmale möglicherweise in Verbindung zu den anderen Merkmalen stehen. Insbesondere ist eine solche Verbindung für die einen Typ definierenden Merkmale (planende und bzw. oder reflexive Schritte) von Interesse, da man daran eine Ausdifferenzierung der Typen voranbringen konnte. Für diese nächsten Interpretationen wurde in der komplexen Analyse ein Konzept der Nützlichkeit von verwendeten Arbeitsweisen miteinbezogen. Bis zu diesem Punkt waren Arbeitsweisen lediglich auf Verwendung untersucht worden. Nun stellt sich die Frage, ob diese bei einer Anwendung auch direkt zu fachlichen Ergebnissen geführt haben.

Unter den Student*innen von Typ 2 (lösungsorientierter Typ) zeigte sich insbesondere beispielgebundenes Vorgehen in einer gewinnbringenden Nutzung. Zusätzlich zeigt sich insgesamt über alle Typen hinweg, dass die fehlerhafte Nutzung anderer Arbeitsweisen zur konkreten Problemlösung die Nützlichkeit von beispielgebundenem Vorgehen negativ beeinflusst.

(H6) Studierende des gymnasialen Lehramts, die sich kaum um Planung und Reflexion bemühen, nutzen vor allem beispielgebundenes Vorgehen (nicht zwangsweise konstant) gewinnbringend.

Weiterführend ist zudem zu beobachten, dass Student*innen aus Typ 3 (reflexiver Typ) insbesondere problemspezifische fachmathematische Techniken gewinnbringend verwenden. In den Einzelfallbetrachtungen zeigte sich vor allem, dass diese reflexiven Schritte zu einer Kontrolle von konkreten lokalen Ansätzen, überwiegend in Form von problemspezifischen fachmathematischen Techniken, genutzt werden. Bei Typ 6 (ganzheitlicher Typ) sind derartige Verbindungen ebenfalls zu beobachten.

(H7) Studierende des gymnasialen Lehramts, die sich um reflexive Schritte bemühen, zeigen eine erhöhte Kompetenz bei der Verwendung problemspezifischer fachmathematischer Techniken. Insbesondere wenden diese Studierenden passende solche Arbeitsweisen öfter an und nicht passende solche Arbeitsweisen öfter nicht an.

Die komplexe Analyse suggeriert analog eine Verbindung zwischen planenden Schritten und der gewinnbringenden Nutzung von allgemeineren mathematischen Techniken. In der Einzelfallbetrachtung von Student*innen aus Typ 4 (planender Typ) und Typ 6

(ganzheitlicher Typ) konnten derartige Verbindungen aber nur schwach verifiziert werden. Dies kann auf die Natur von allgemeineren Techniken zurückzuführen sein. Eine lokale Verortung und zudem Verbindung mit einem Planungsschritt ist bei allgemeineren Techniken aufgrund der mehr globalen Anwendung möglicherweise erschwert. Dadurch ist insbesondere keine Aussage hinsichtlich der Richtung eines möglichen Zusammenhangs möglich.

- (H8) Die Verwendung von planenden Schritten steht mit einer gewinnbringenden Verwendung von allgemeineren mathematischen Techniken in Verbindung.

Zusammenfassend zeigt sich in der komplexen Analyse, dass bei den untersuchten Student*innen allgemeinere mathematische Techniken tendenziell gewinnbringender verwendet wurden als problemspezifische fachmathematische Techniken.

- (H9) Allgemeinere mathematische Techniken werden von Studierende des gymnasialen Lehramts gewinnbringender verwendet als problemspezifische fachmathematische Techniken.

Betrachtet man abschließend die fortgeschrittene Studiendauer zwischen den einzelnen Typen, so zeigt sich, dass insbesondere Typ 2 (lösungsorientierter Typ) Student*innen beinhaltet, die tendenziell niedrigere Fachsemester aufweisen. Die höheren Fachsemester teilen sich auf die anderen Typen auf. Eine mögliche Interpretation dieser Beobachtung ist die Tatsache, dass sich Lehramtsstudierende typische Arbeitsweisen in der Schule oder in den ersten Semestern aneignen und diese zu einem späteren Zeitpunkt im Studium abändern. Es erscheint so, als ob der Fokus zu Beginn auf lösungsorientierten Arbeitsweisen ohne planende und reflexive Schritte liegt. Dies kann auf die zahlreiche Bearbeitung von Übungsaufgaben in den Fachveranstaltungen zurückgeführt werden. Hier sind in den seltensten Fällen ganze Lösungsprozesse abgebildet. Als Ergebnis wird lediglich der letztendlich geglückte Versuch festgehalten. Sicherlich ist der gesamte Bearbeitungsprozess nicht durch eine gänzliche Abstinenz von metakognitiven Strategien gekennzeichnet, aber derartige Schritte werden womöglich nur unbewusst vollzogen. Der Wechsel der Arbeitsweise lässt sich bspw. damit erklären, dass es unter den Lehramtsstudierenden im fortgeschrittenen Studium solche gibt, die mit der universitären Mathematik letztendlich abschließen und keine Relevanz für ihren späteren Lehrberuf sehen. Es wird sich bei weiteren Bearbeitungen wenn, dann nur noch auf das Präsentieren von Ergebnissen beschränkt. Eine tatsächliche Bearbeitung ist nicht mehr möglich oder nicht mehr gewollt. Ein anderer Teil an Lehramtsstudierenden entdeckt ein gewisses Interesse an der universitären Mathematik und befasst sich daraufhin bewusster mit mathematischen Arbeitsweisen. Dies

9. Fazit

führt scheinbar auch zu einer vermehrten Nutzung von unterschiedlichen Arbeitsweisen und insbesondere eine in Teilen metakognitive Steuerung.

(H10) Zu Beginn des Studiums treten bei Studierende des gymnasialen Lehramts vermehrt lösungsorientierte Strategien auf – insbesondere keine planenden und keine reflexiven Schritte. Im späteren Studienverlauf ändert sich die Arbeitsweise entweder zu einer prinzipiellen Passivität oder zu einer Hinwendung zu planenden und reflexiven Schritten.

10. Ausblick

Als zentrales Ergebnis der vorliegenden Arbeit kann die erste Hypothese (H01) aus Kapitel 9 gesehen werden. Hier wird postuliert, dass die derzeitige Fachausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts keine ausreichende Problemlösekompetenz fördert. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die grundlegende Idee hin dramatisch zu bewerten, dass man Lehramtsstudierende zu Botschafter*innen für die Mathematik entwickeln möchte. Nun entsteht bei der Betrachtung der Dokumentationen von Bearbeitungen von offenen Arbeitsaufträgen bei Studierenden des gymnasialen Lehramts aber der Eindruck, dass diese kein fundamentales Verständnis für das strukturierte mathematische Arbeiten besitzen und vor allem auch nur selten auf eine formal vollständige Problemlösung hin arbeiten. Eine metakognitive Steuerung der eigenen Problemlöseprozesse ist nur selten erkennbar. Es nimmt aber gerade dieses Problemlösen eben auch in der Schulmathematik eine prominente Rolle ein. Inwiefern ein derartiges Verständnis für mathematische Prozesse an Schüler*innen weitergegeben werden kann, wenn dieses bei den zukünftigen Lehrkräften selbst nicht vorhanden ist, bleibt fraglich. Auch der höhere fachliche Grad der untersuchten Arbeitsaufträge ist nicht als Einschränkung zu verstehen. Die stoffdidaktische Analyse konnte eine eindeutige Relevanz der Inhalte für den Lehrberuf herausstellen und auch die Elementarität der Inhaltsbereiche deckt ein Anforderungsniveau für gymnasiale Lehrkräfte eindeutig ab. Insgesamt kann man den von BAUER und HEFENDEHL-HEBEKER (2019) beschriebenen Umstand wiedererkennen, dass Lehramtsstudierende in dem von den Autor*innen angesprochenen *Literacy*-Modell in der Regel nicht auf die höchste Stufe gelangen.

Der explorative Ansatz der Studie stellt einen anschaulichen Zugang zum Forschungsgegenstand der Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden dar. Es ergeben sich unterschiedliche Richtungen zur weiteren Forschung. Insbesondere die in Kapitel 9 abgeleiteten Hypothesen bieten sich für eine explizite Fortführung der Fragestellungen dieser Arbeit an.

Speziell die Korrelationsrichtungen der in den Hypothesen (H2), (H7) und (H8) beschriebenen möglichen Zusammenhänge konnten nicht geklärt werden. Hier bietet sich ein quantitativer Zugang an, der weiterführend auch die derzeit nicht vorhandene Repräsentativität und eine damit einhergehende Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse behandeln könnte. Aber auch qualitative Ansätze können bei den beschriebenen Verbin-

10. Ausblick

dungen konkreter Arbeitsweisen noch genauere Zusammenhänge und Wechselbeziehungen herausarbeiten.

Auch die Hypothese (H10) lässt weiterführende quantitative wie qualitative Ansätze zu. In Form einer Längsschnittstudie ließe sich bspw. untersuchen, ob es tatsächlich zu einem vergleichbaren Effekt bei der Entwicklung von vorrangig verwendeten Arbeitsweisen kommt. Ein qualitatives Setting könnte in diesen Fällen jene Momente genauer betrachten, in denen die Studierenden entsprechend ihre präferierte Arbeitsweise verändern. Erkenntnisse daraus ließen sich vor allem im Hinblick auf mögliche Interventionen zur gewinnbringenden Nutzung von mathematischen Arbeitsweisen bei Lehramtsstudierenden nutzen.

Zudem ist eine Fortführung des Seminarkonzepts denkbar. In der vorliegenden Studie wurde die beschriebene Veranstaltung lediglich zur Materialgenerierung genutzt. Insbesondere der Forschungsanspruch, Arbeitsweisen möglichst authentisch und unverfälscht aufnehmen zu wollen, hat zu der Entscheidung geführt, keinerlei Intervention hinsichtlich einer Schulung oder Vorbereitung der betrachteten Studierenden durchzuführen. Nach dem Forschungsvorhaben wurde im darauffolgenden Semester das Seminar erneut gehalten, aber methodisch und inhaltlich leicht angepasst. Der größte Unterschied bestand in einer konkreten Thematisierung von Arbeitsweisen und Problemlösestrategien im schulischen und universitären Kontext in den ersten zwei Semesterwochen. Erste anekdotische Erkenntnisse zeigen später bei den ähnlichen fachlichen Arbeitsaufträgen dann eine stärkere Kontrolle und bewusstere Nutzung von Arbeitsweisen. Die fachlichen Ergebnisse zeichnen sich tendenziell durch eine breitere Behandlung der Problemsituationen aus und es deutet sich auch eine höhere Vollständigkeit bei der Bearbeitung anschaulicher Arbeitsaufträge an. Die abstrakten Arbeitsaufträge werden allerdings weiterhin nicht wirklich erfasst. Als mögliche Forschungsfelder kann man hier die Art und Umsetzung von diversen Interventionsstrategien identifizieren. Vor allem die Wirkungsweisen solcher Maßnahmen im Bezug auf die konkrete Problembewältigung durch Studierende ist von Interesse. Prinzipiell eignet sich hier ein Forschungsdesign im Sinne des *Design-Based-Research*. Auch die Umsetzung des *Dialogischen Lernens* in der Lehramtsausbildung bzw. generell in der Hochschullehre stellt eine spannende Fortführung dar.

Die durchgeführte qualitative Inhaltsanalyse liefert neben der Typologie auch ein umfangreiches Kategoriensystem für Arbeitsweisen, welches insbesondere bei der Bearbeitung von universitären Problemen der Mathematik angewendet werden kann. Eine Verwendung ist auch bei der Untersuchung von Arbeitsweisen von Lehramtsstudierenden außerhalb der Algebra möglich. Hier könnte man sich die Frage stellen, ob selbstständige Bearbeitungen in bspw. der Analysis zu ähnlichen Typen führen bzw. ob das Kategoriensystem für Arbeitsweisen angepasst werden muss. Speziell die Arbeitsweisen von

Problemspezifischen fachmathematischen Techniken sind hier sicherlich nicht abschließend formuliert.

Weiterführend ist auch ein Vergleich von Lehramtsstudierenden mit anderen Studierenden aus mathematiknahen Fächern spannend. Man denke hier an möglicherweise unterschiedliche Arbeitsweisen zwischen Studierenden aus dem gymnasialen Lehramt und denjenigen eines Bachelors Mathematik. Etwaige Unterschiede können Rückschlüsse auf die Beschaffenheit der zweiten Diskontinuitätsstufe zulassen. Möglicherweise werden hieran nämlich gerade die verantwortlichen Effekte für eine wahrgenommene Differenz zwischen Schul- und Universitätsmathematik deutlich.

Abschließend lässt auch die stoffdidaktische Analyse der algebraischen Themen aus der Lehramtsausbildung weitere Fragen offen. Einerseits ist hier schon länger von Interesse, inwiefern die an den Universitäten erlernten fachlichen Inhalte gewinnbringend in den Mathematikunterricht eingebracht werden können. Die abstrakte didaktische Forschung bedarf hier sicherlich weiterhin einer praktischen Zuwendung. Andererseits kann eine stoffdidaktische Behandlung einer universitären Algebra hinsichtlich bspw. Grundvorstellungen auch die Hochschullehre selbst voranbringen.

Insgesamt zeigt sich, dass der Forschungsgegenstand der Arbeitsweisen und des Problemlösens bei Lehramtsstudierenden sowie die (algebraische) Lehramtsausbildung hoch relevant ist. Diese Dissertation bietet eine solide Grundlage, von der aus dieses Forschungsfeld praktisch angegangen werden kann. Zentraler Ausgangspunkt war dabei die Idee, die mathematische Lehramtsausbildung nicht isoliert in einzelnen Konzepten, sondern in einer ganzheitlichen Betrachtung von mathematischem Arbeiten anzugehen. Es bleibt zu hoffen, dass dieser Ansatz in näherer Zukunft zu einer signifikanten Auflösung der doppelten Diskontinuität beitragen kann und nicht erneut 100 Jahre ins Land gehen müssen.

A. Grundlegende Definitionen zu algebraischen Strukturen

Definition A.1. Seien M, N zwei Mengen und $R \subseteq M \times N$ eine Teilmenge des kartesischen Produkts von M und N . Man nennt das Tripel (R, M, N) eine (*zweistellige* oder *binäre*) *Relation* zwischen M und N . Sind die Mengen im Kontext klar, so wird auch oftmals R allein als die Relation bezeichnet. Für den Fall, dass $M = N$ gilt, spricht man bei (R, M, M) auch von einer *homogenen* Relation.

Definition A.2. Seien M eine Menge und (R, M, M) eine homogene Relation. Dann heißt:

- (R, M, M) *reflexiv* $:\Leftrightarrow \forall m \in M : (m, m) \in R$
- (R, M, M) *symmetrisch* $:\Leftrightarrow \forall m, n \in M : (m, n) \in R \Rightarrow (n, m) \in R$
- (R, M, M) *antisymmetrisch* $:\Leftrightarrow \forall m, n \in M : (m, n) \in R \wedge (n, m) \in R \Rightarrow m = n$
- (R, M, M) *transitiv* $:\Leftrightarrow \forall m, n, k \in M : (k, m) \in R \wedge (m, n) \in R \Rightarrow (k, n) \in R$
- (R, M, M) *total* $:\Leftrightarrow \forall m, n \in M : (m, n) \in R \vee (n, m) \in R$

Definition A.3. Seien M eine Menge und (R, M, M) eine homogene Relation. Dann heißt

- (R, M, M) *Ordnung* $:\Leftrightarrow (R, M, M)$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv
- (R, M, M) *Totalordnung* $:\Leftrightarrow (R, M, M)$ Ordnung und total
- (R, M, M) *Äquivalenzrelation* $:\Leftrightarrow (R, M, M)$ reflexiv, symmetrisch und transitiv.

A. Grundlegende Definitionen zu algebraischen Strukturen

Definition A.4. Sei M eine Menge und (R, M, M) eine Ordnung. Ein Element $m \in M$ heißt genau dann *kleinstes Element* in M , wenn für alle $n \in M$ gerade $(m, n) \in R$ gilt. Eine Ordnung heißt genau dann *Wohlordnung*, wenn jede Teilmenge $N \subseteq M$ von M ein kleinstes Element besitzt.

Definition A.5. Sei $H \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und

$$\circ : H \times H \rightarrow H, (g, h) \mapsto g \circ h$$

eine Abbildung. Dann heißt (H, \circ) eine *Halbgruppe*, wenn

$$(i) \quad \forall a, b, c \in H : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

gilt.

Definition A.6. Sei (M, \circ) eine Halbgruppe. Dann heißt (M, \circ) ein *Monoid*, wenn

$$(i) \quad \exists e \in H : \forall a \in M : a \circ e = e \circ a = a$$

gilt. Ein solches Element e nennt man dann *neutrales Element*.

Definition A.7. Sei (G, \circ) ein Monoid. Dann heißt (G, \circ) eine *Gruppe*, wenn

$$(i) \quad \forall a \in G : \exists b \in G : a \circ b = b \circ a = e$$

gilt. Ein solches Element b nennt man *inverses Elemente* von a und schreibt a^{-1} , bzw. für additive Verknüpfungen auch $-a$. Eine Gruppe (G, \circ) heißt *abelsche* oder *kommutative* Gruppe, wenn

$$(i) \quad \forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$$

gilt.

Definition A.8. Sei (G, \circ) eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Teilmenge von G . Dann heißt U eine *Untergruppe* von G , wenn (U, \circ) selbst eine Gruppe ist. Man schreibt dafür $U \leq G$.

Definition A.9. Sei R eine Menge und

$$+ : R \times R \rightarrow R, (r, s) \mapsto r + s$$

$$\cdot : R \times R \rightarrow R, (r, s) \mapsto r \cdot s$$

zwei Abbildungen. Dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein *Ring mit Eins*, wenn

- (i) $(R, +)$ ist abelsche Gruppe
- (ii) (R, \cdot) ist Monoid
- (iii) $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

gelten. Man nennt e_+ das *Nullelement* und e das *Einselement*.

Definition A.10. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $(A, +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$. Dann heißt A ein *Ideal* von R , wenn

- (i) $\forall a \in A, r \in R : ra \in A$ (*Linksideal*)
- (ii) $\forall a \in A, r \in R : ar \in A$ (*Rechtsideal*)

gelten.

Definition A.11. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein *Körper*, wenn

- (i) $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe

gilt. Ist $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ lediglich eine Gruppe, so nennt man K einen *Schiefkörper*.

Definition A.12. Seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nicht-leere Menge und

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v \oplus w$$

$$\otimes : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \otimes v$$

zwei Abbildungen. Dann heißt (V, \oplus, \otimes) ein *K -Vektorraum*, wenn

- (i) (V, \oplus) ist abelsche Gruppe
- (ii) $\forall \lambda \in K, v, w \in V : \lambda \otimes (v \oplus w) = (\lambda \otimes v) \oplus (\lambda \otimes w)$
- (iii) $\forall \lambda, \mu \in K, v \in V : (\lambda + \mu) \otimes v = (\lambda \otimes v) \oplus (\mu \otimes v)$
- (iv) $\forall \lambda, \mu \in K, v \in V : (\lambda \cdot \mu) \otimes v = \lambda \otimes (\mu \otimes v)$
- (v) $\forall v \in V : 1_K \otimes v = v$

A. Grundlegende Definitionen zu algebraischen Strukturen

gelten. Man nennt e_{\oplus} den *Nullvektor* und schreibt $e_{\oplus} = 0_V$.

Definition A.13. Seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, A ein K -Vektorraum und

$$\odot : A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \odot b$$

eine Abbildung. Dann heißt (A, \odot) eine *K -Algebra*, wenn

$$(i) \quad \forall a, b, c \in A : (a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c \text{ und } a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in K, a, b \in A : \lambda \otimes (a \odot b) = (\lambda \otimes a) \odot b = a \odot (\lambda \otimes b)$$

gelten. Eine K -Algebra (A, \odot) heißt *assoziative K -Algebra*, wenn

$$(i) \quad \forall a, b, c \in A : (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

gilt. Es ist in diesem Fall (A, \oplus, \odot) ein Ring. Ist (A, \odot) zusätzlich im Besitz eines Einselements und $(A \setminus \{0_A\}, \odot)$ eine Gruppe, so heißt (A, \otimes) eine *assoziative Divisionsalgebra mit Eins* über K . (A, \oplus, \odot) ist dann ein Schiefkörper.

Definition A.14. Sei (A, \odot) eine K -Algebra. Dann heißt A *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Menge an Elementen $a_1, \dots, a_n \in A$ gibt, sodass jedes Element $a \in A$ als polynomialer Ausdruck dieser Elemente darstellbar ist, d. h. es gibt $f \in K[a_1, \dots, a_n]$ mit $a = f(a_1, \dots, a_n)$.

B. Abbildungen und Tabellen

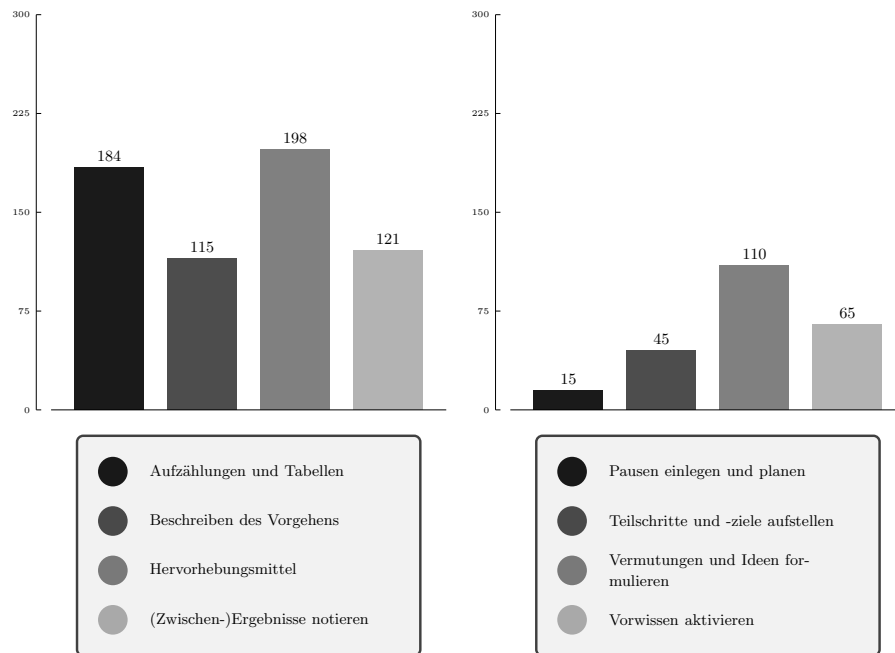


Abb. B.1.: Absolute Anzahlen codierter Segmente der ersten Hauptkategorie *Planung und Strukturierung* nach entsprechenden Subkategorien.

B. Abbildungen und Tabellen

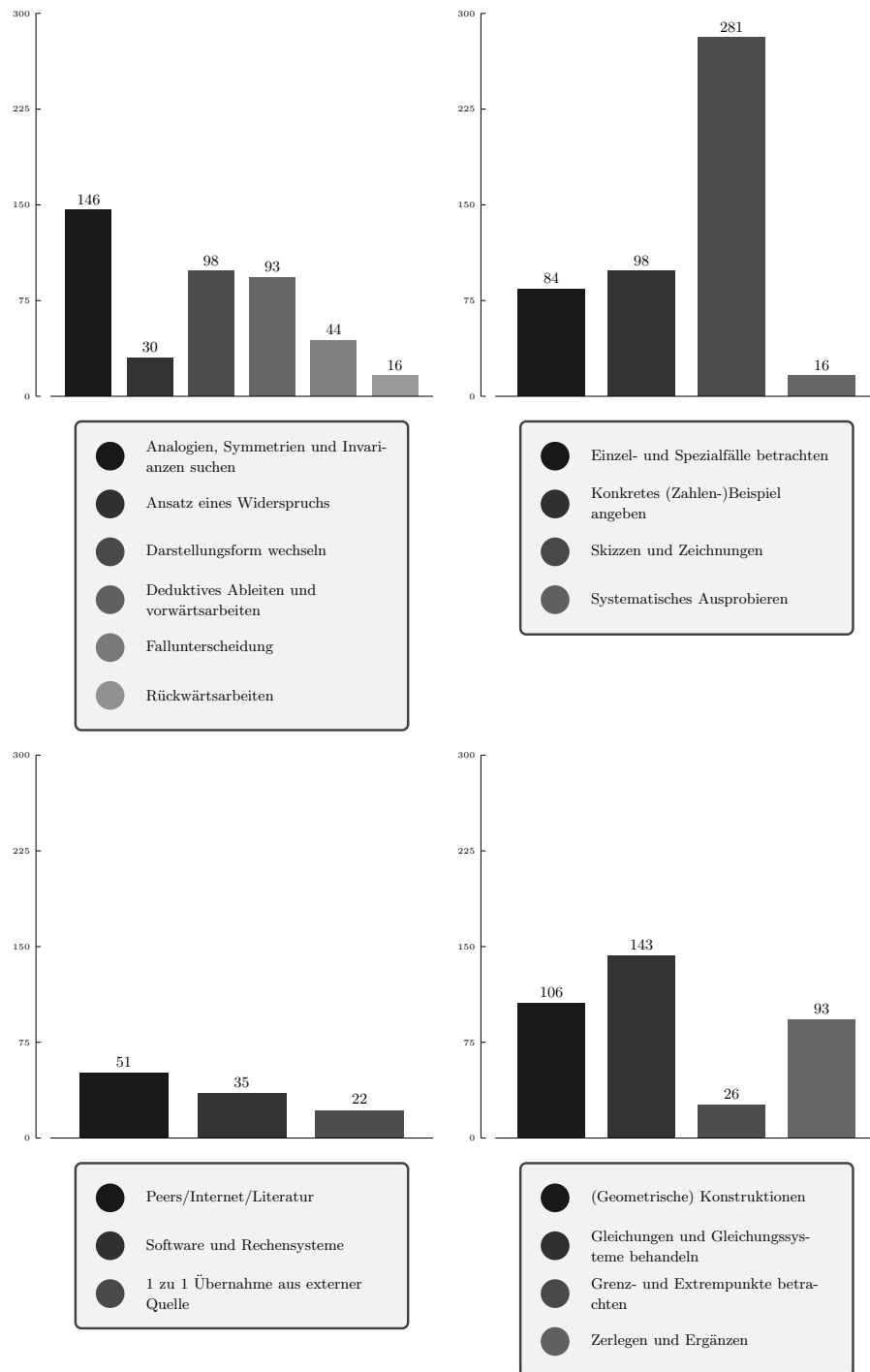


Abb. B.2.: Absolute Anzahlen codierter Segmente der zweiten Hauptkategorie *Strategien der Durchführung* nach entsprechenden Subkategorien.

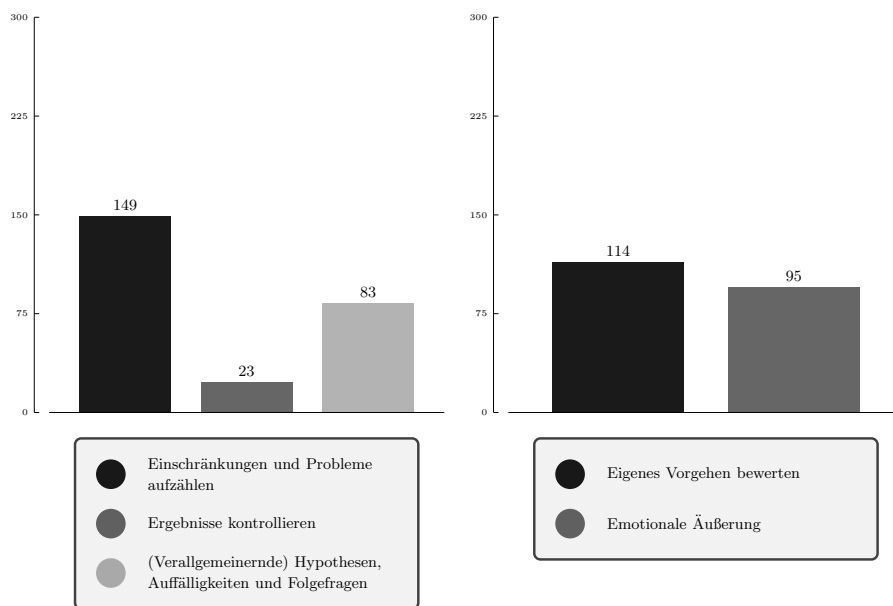


Abb. B.3.: Absolute Anzahlen codierter Segmente der dritten Hauptkategorie *Reflexion und Einordnung* nach entsprechenden Subkategorien.

B. Abbildungen und Tabellen

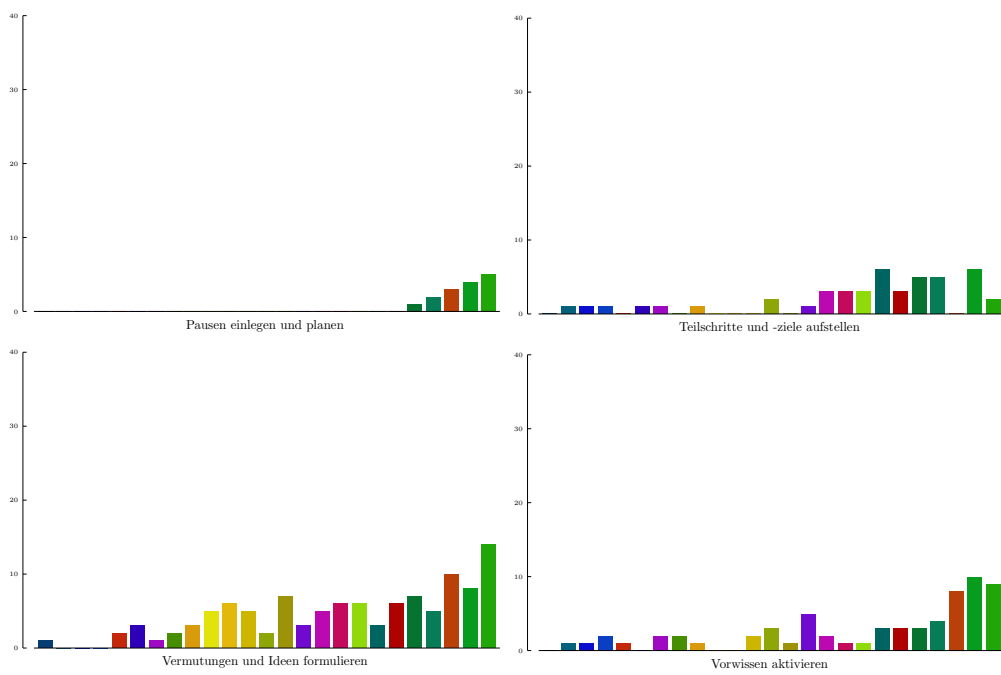
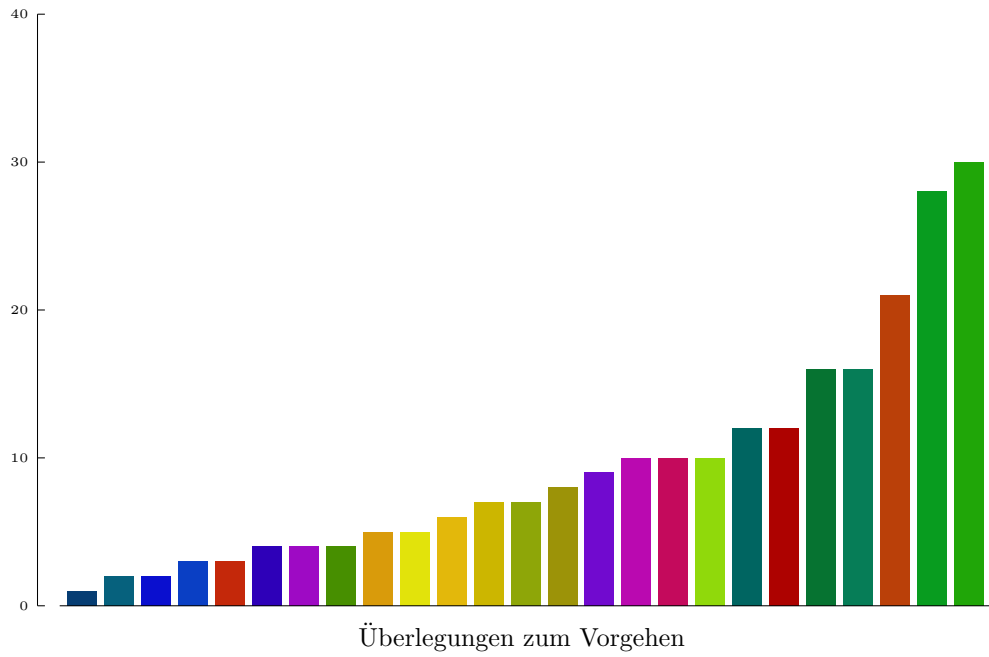
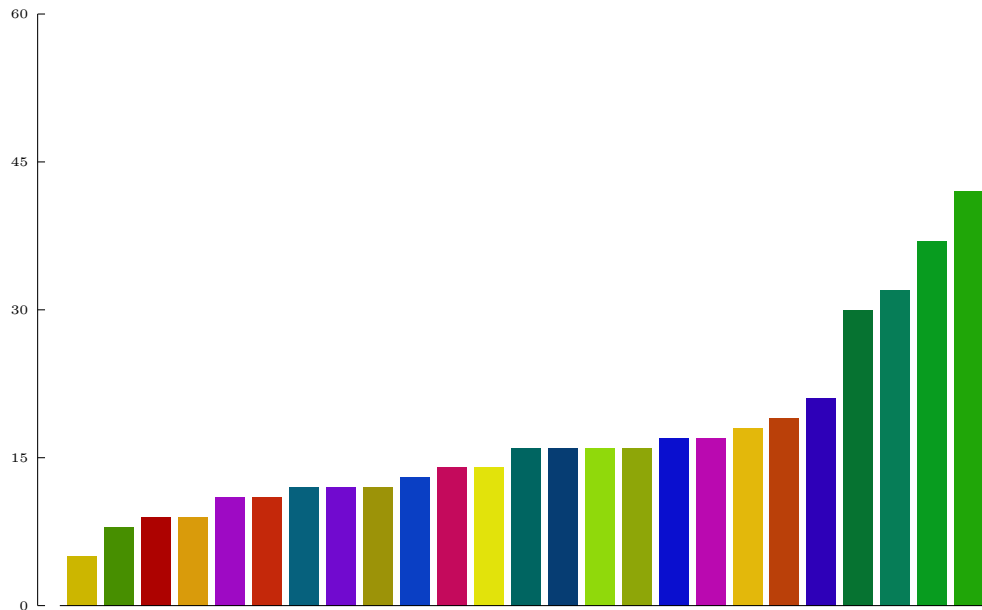


Abb. B.4.: Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Überlegungen zum Vorgehen* nach Proband.



Allgemeinere mathematische Techniken

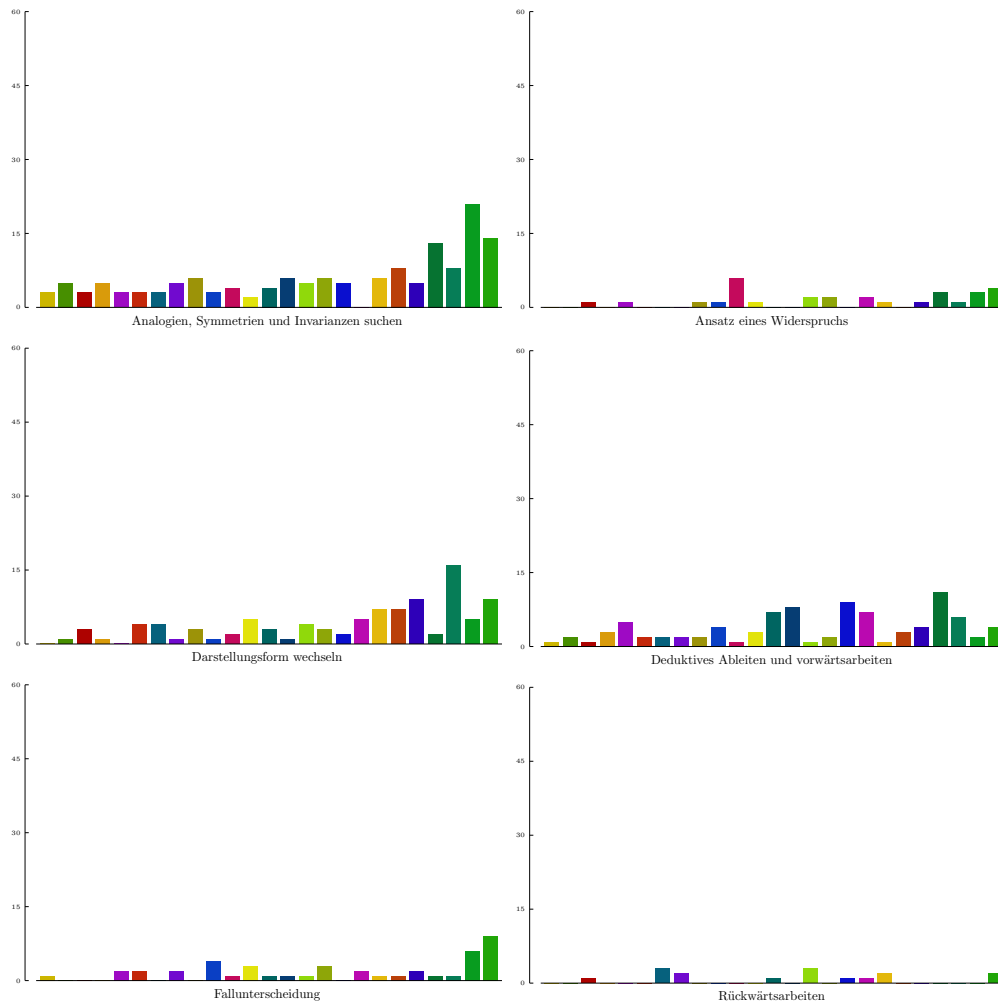


Abb. B.5.: Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Allgemeinere mathematische Techniken* nach Proband.

B. Abbildungen und Tabellen

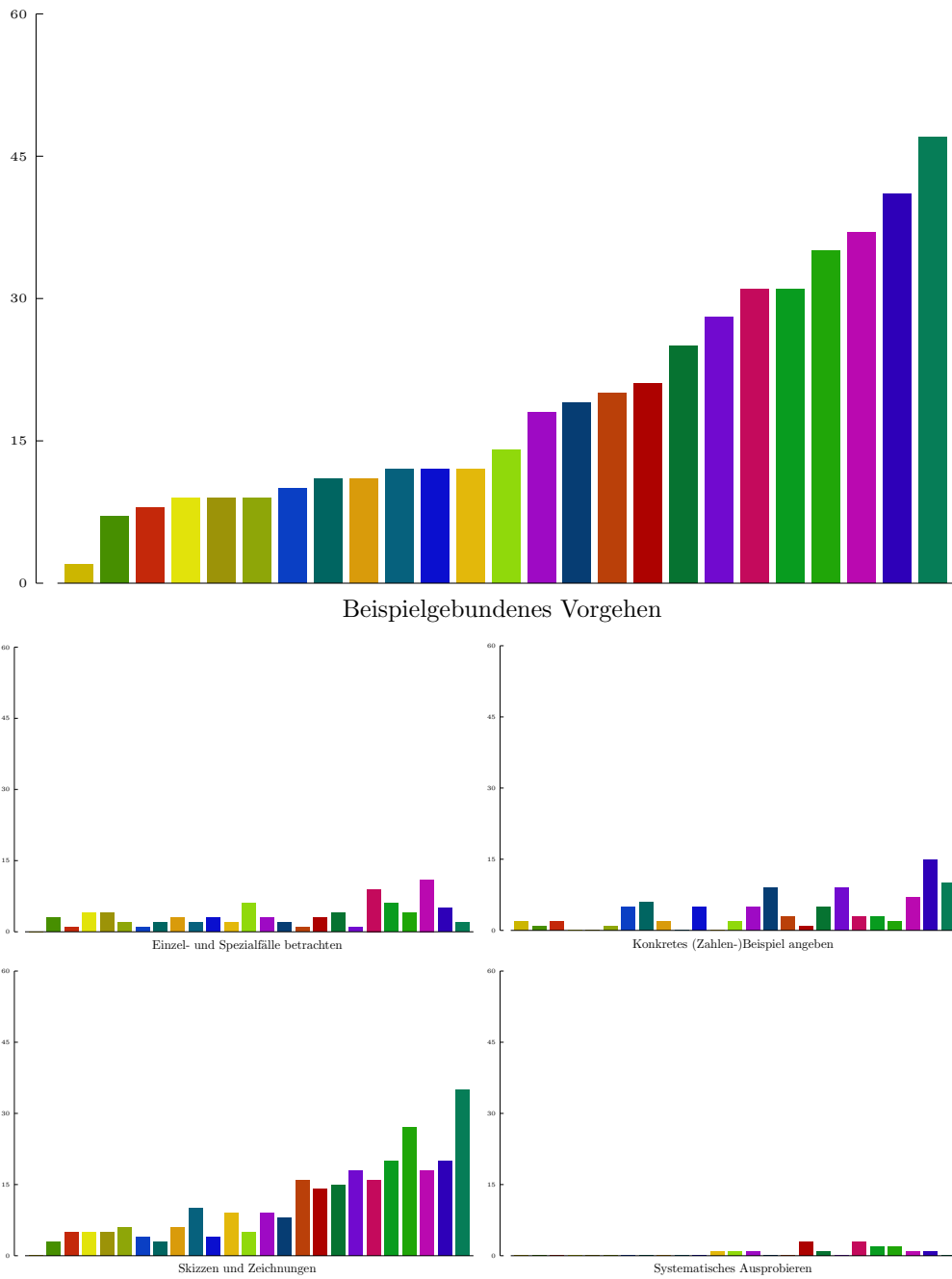


Abb. B.6.: Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Beispielgebundenes Vorgehen* nach Proband.

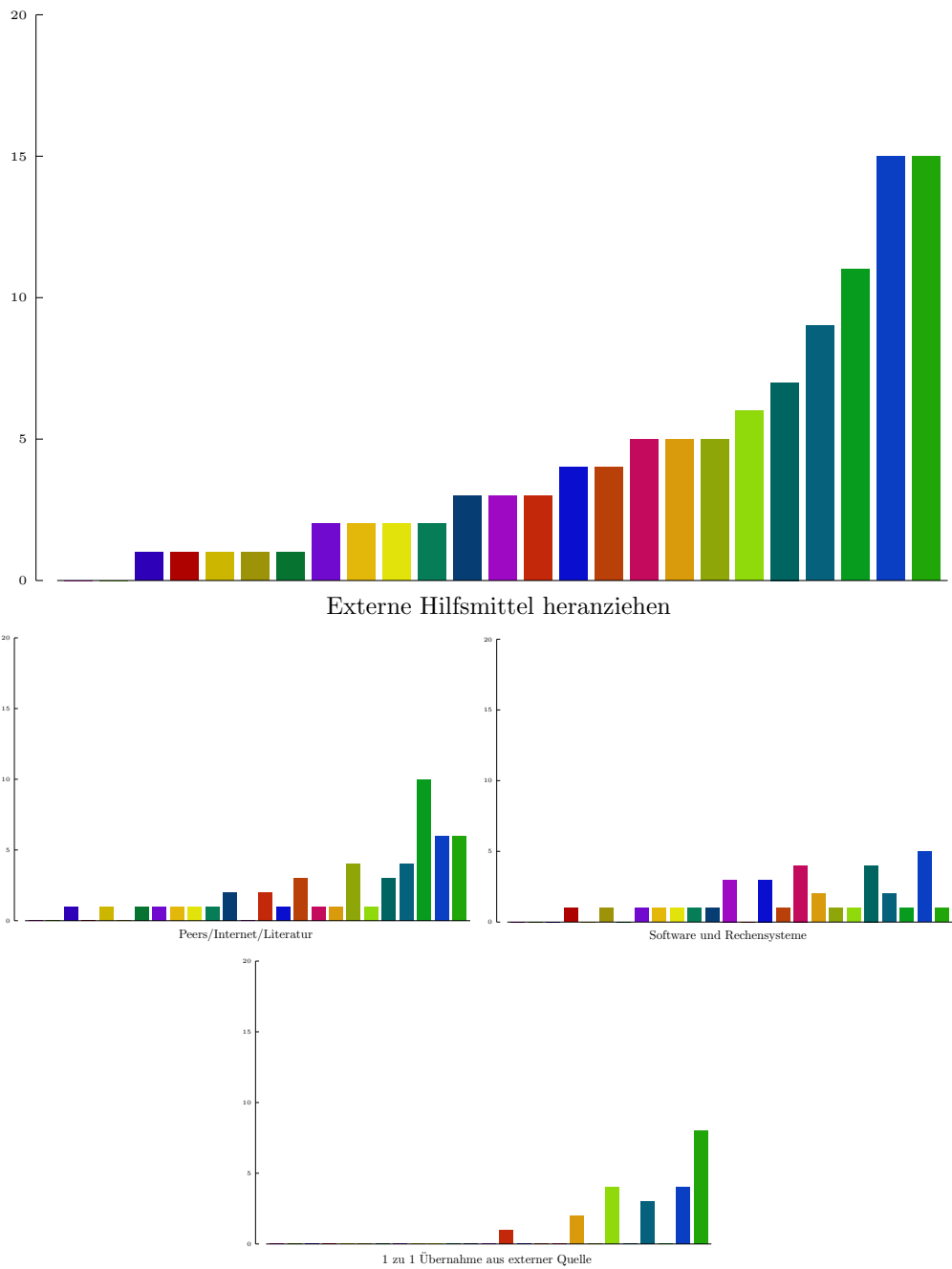


Abb. B.7.: Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Externe Hilfsmittel heranziehen* nach Proband.

B. Abbildungen und Tabellen

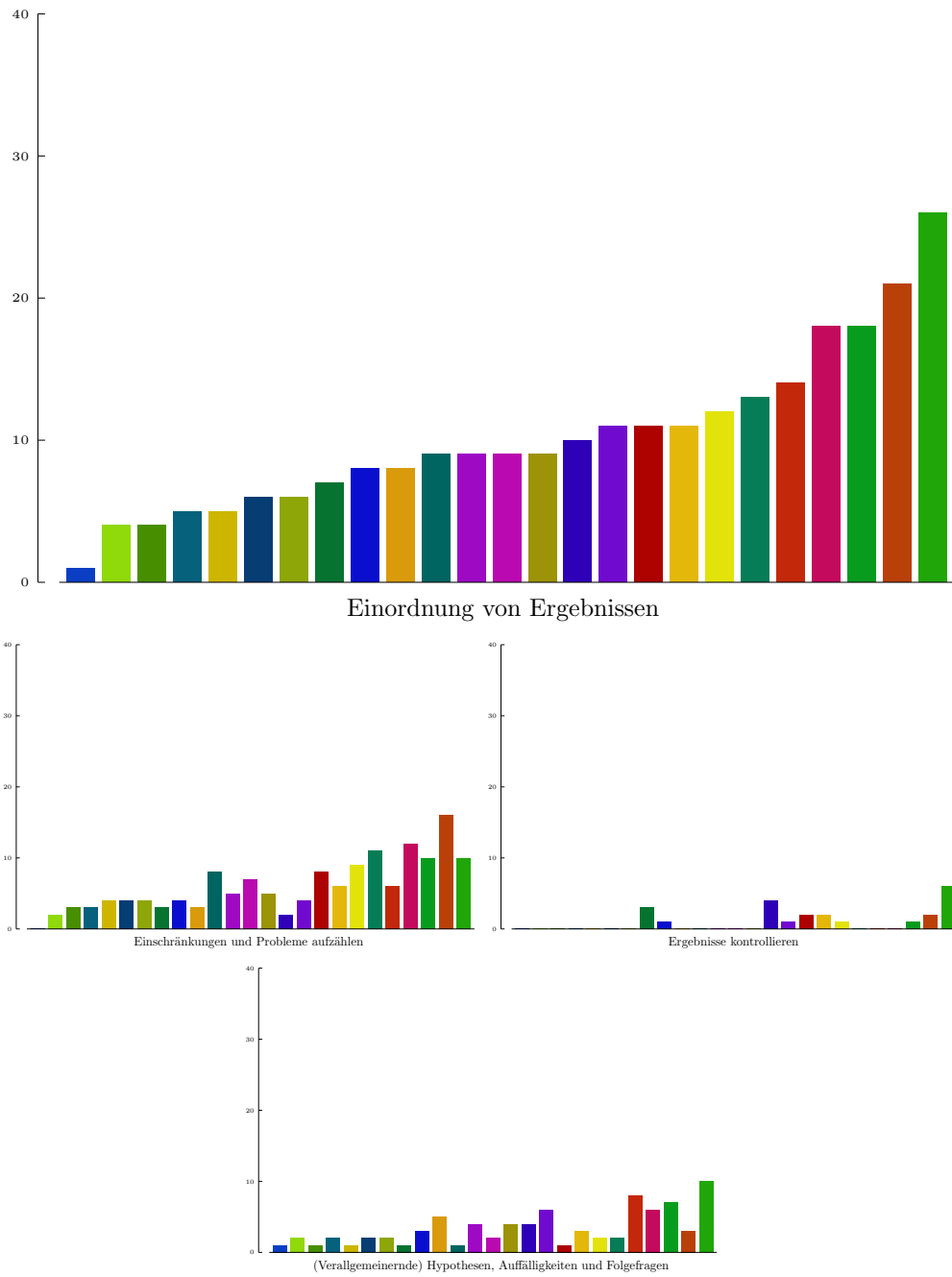
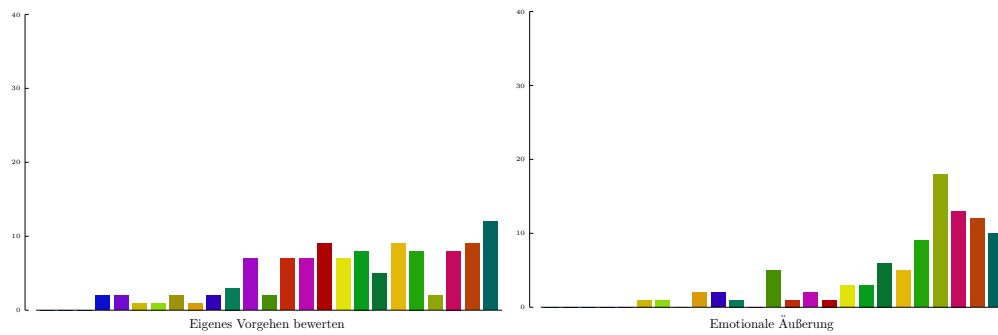
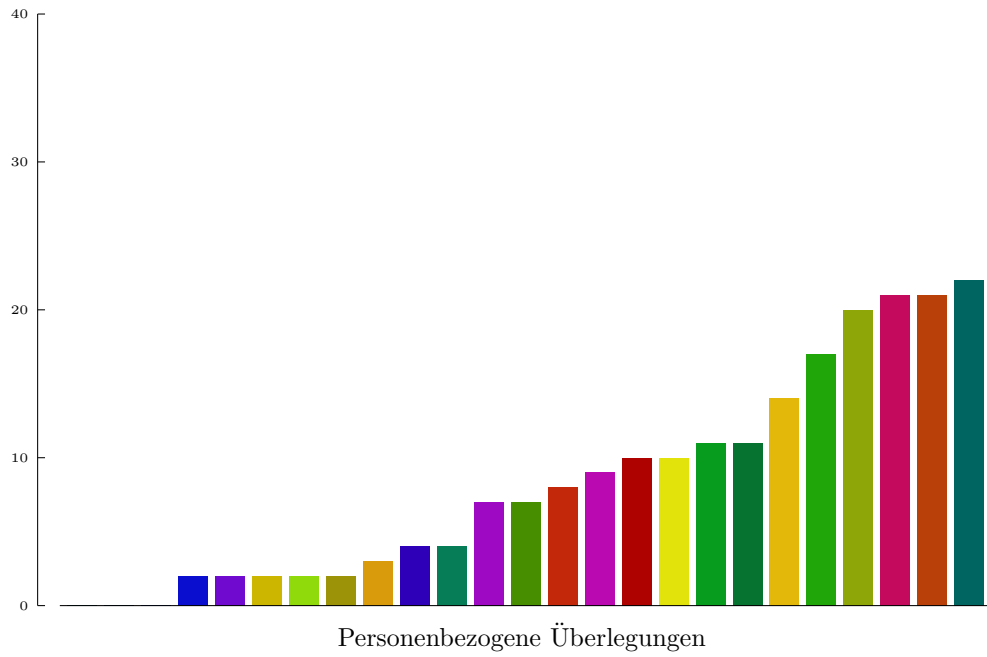


Abb. B.8.: Sortierte absolute Anzahlen codierter Segmente der Subkategorien der Subkategoriegruppe *Einordnung von Ergebnissen* nach Proband.



B. Abbildungen und Tabellen

- Äußere Form und Dokumentation
- Überlegungen zum Vorgehen
- Allgemeinere mathematische Techniken
- Beispielgebundenes Vorgehen
- Externe Hilfsmittel heranziehen
- Problemspezifische fachmathematische Techniken
- Einordnung von Ergebnissen
- Personenbezogene Überlegungen

Abb. B.10.: Legende der Farbgebung für die nachfolgenden Abbildungen.

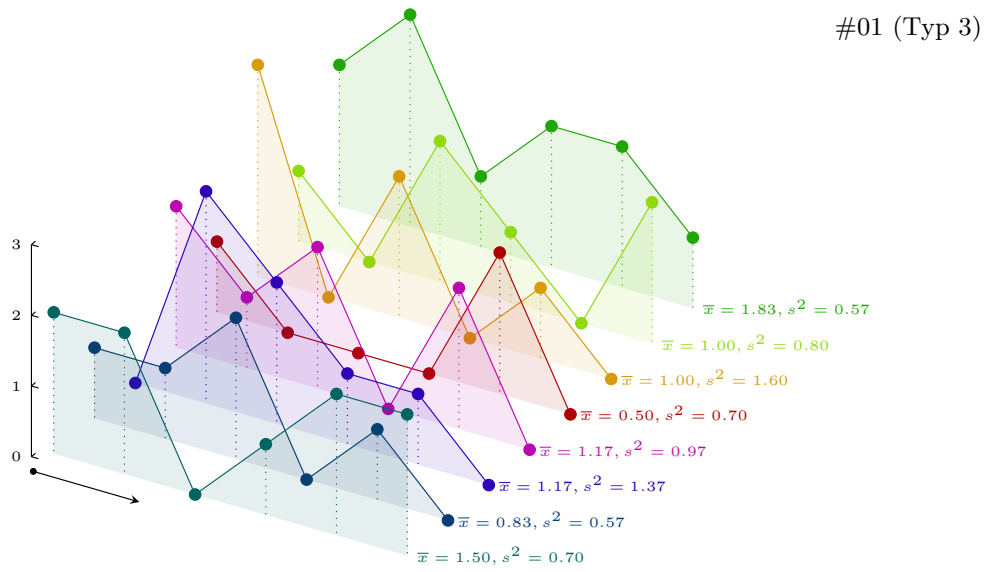


Abb. B.11.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #01. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#02 (Typ 1)

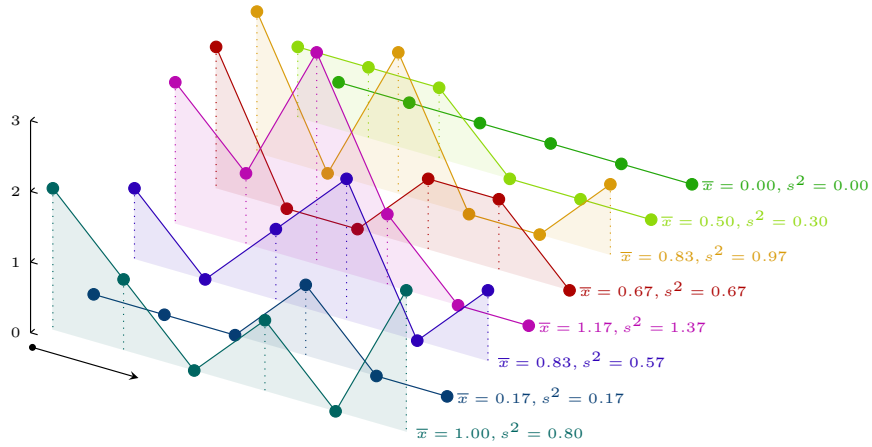


Abb. B.12.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #02. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#03 (Typ 2)

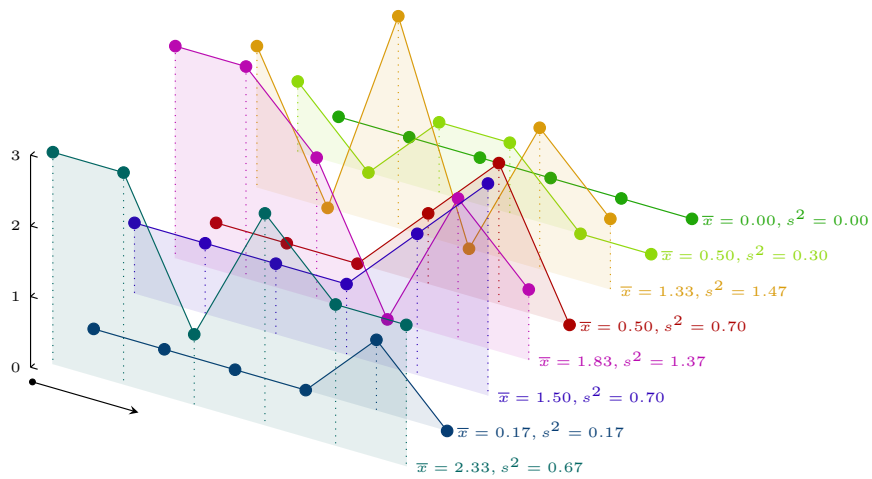


Abb. B.13.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #03. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#04 (Typ 5)

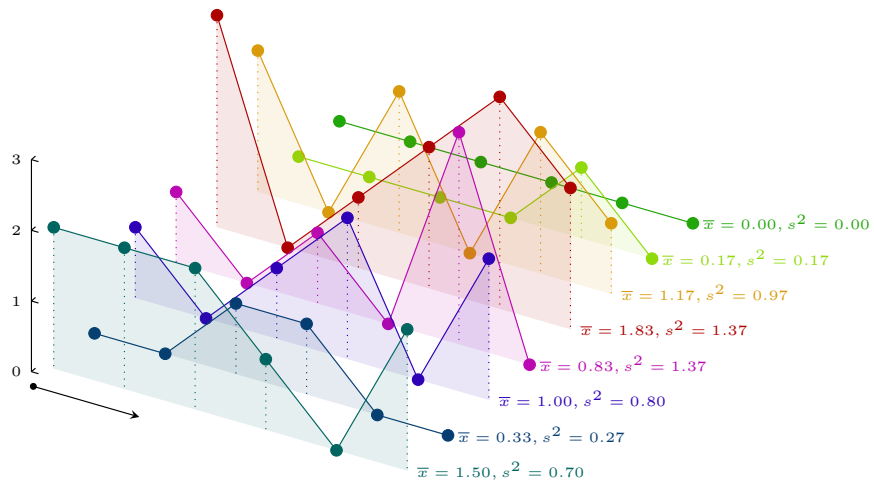


Abb. B.14.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #04. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#05 (Typ 2)

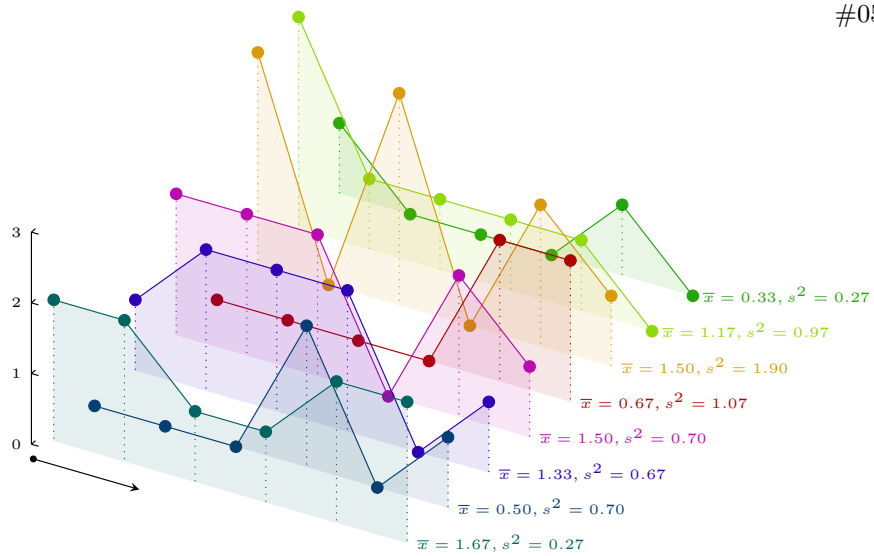


Abb. B.15.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #05. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#06 (Typ 2)

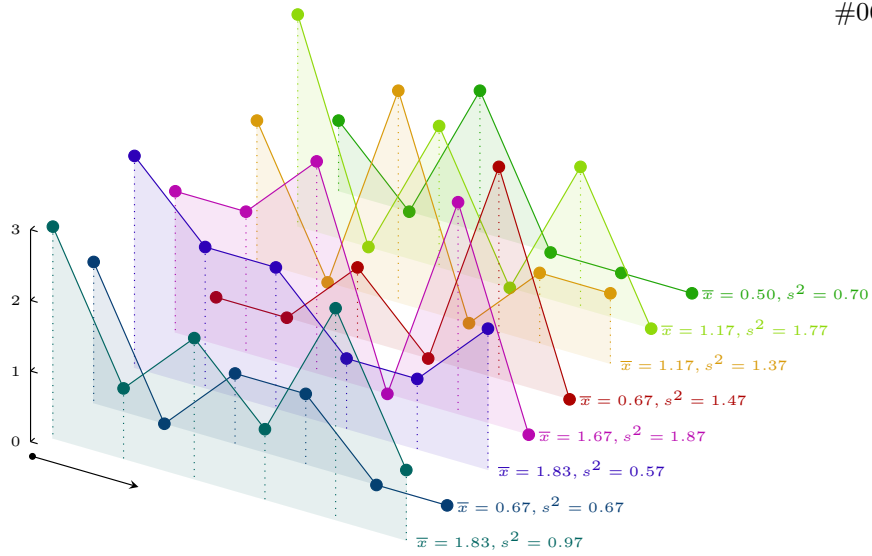


Abb. B.16.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #06. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#07 (Typ 2)

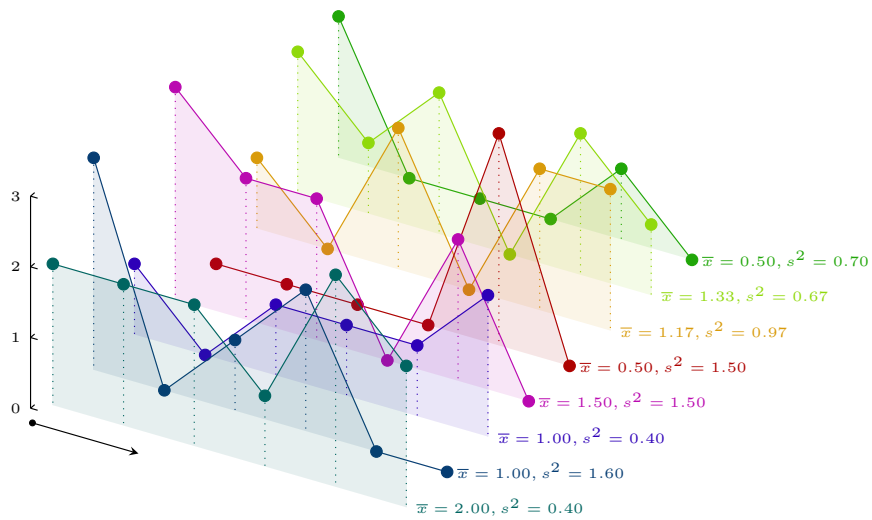


Abb. B.17.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #07. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#08 (Typ 2)

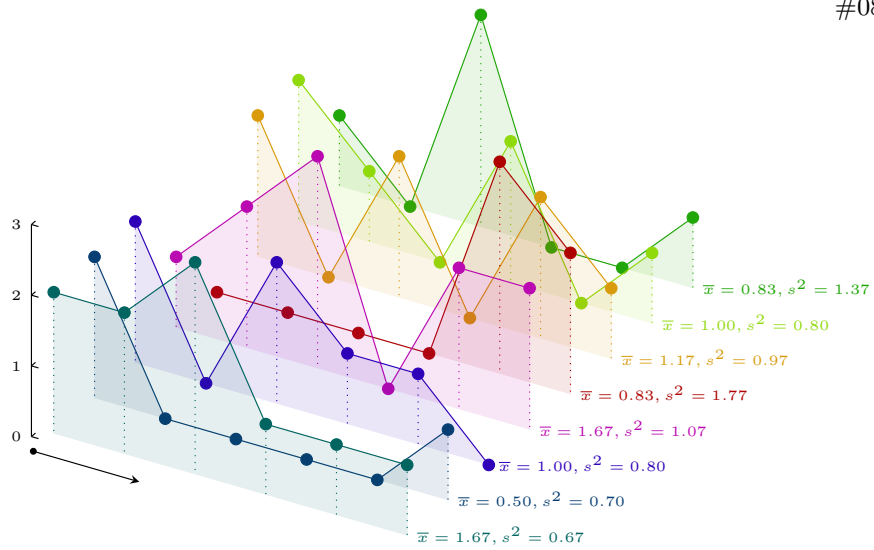


Abb. B.18.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #08. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#09 (Typ 4)

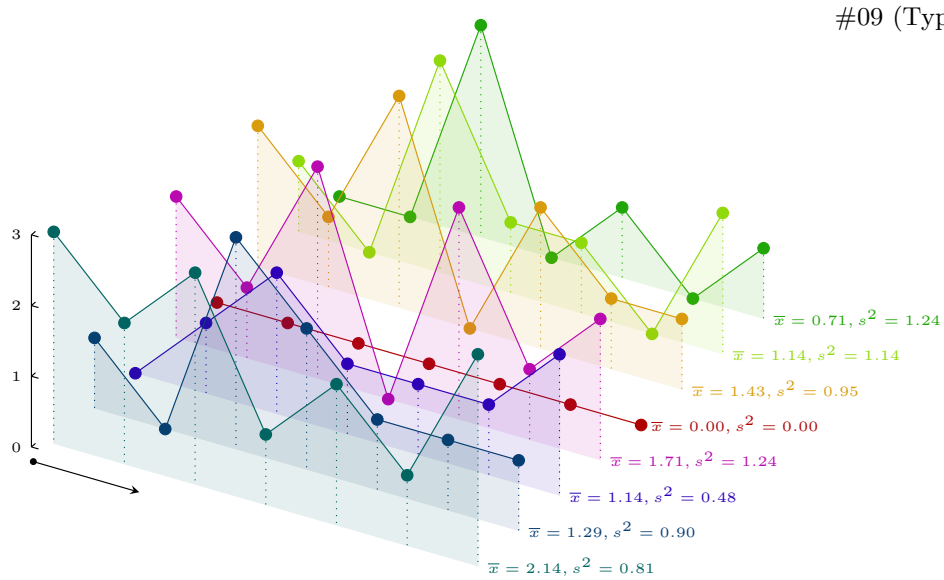


Abb. B.19.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #09. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

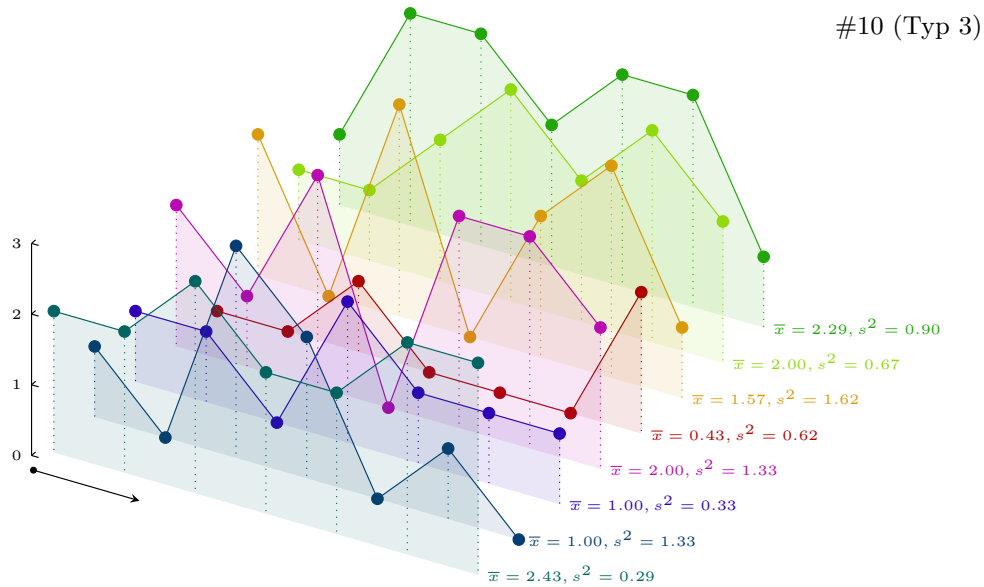


Abb. B.20.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #10. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

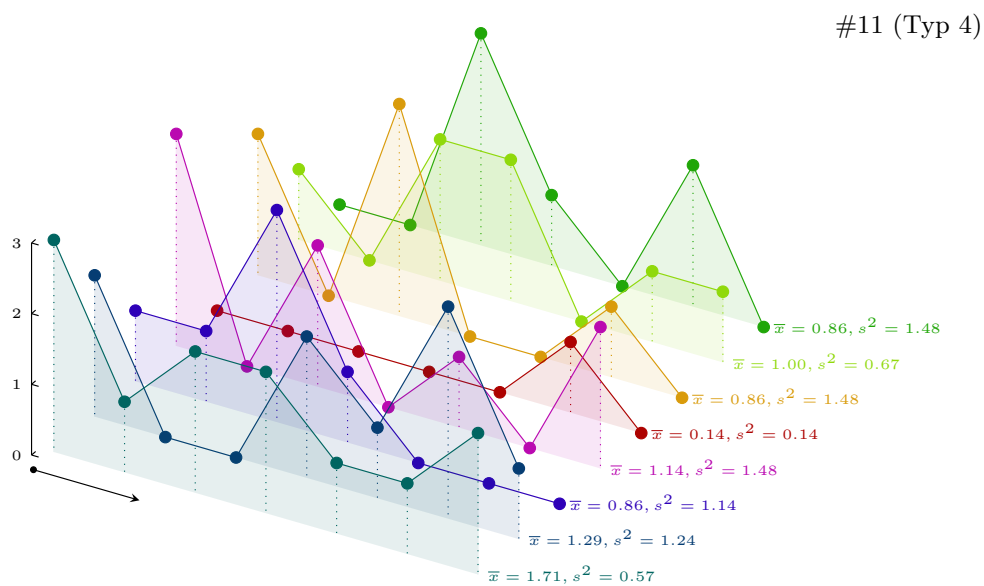


Abb. B.21.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #11. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#12 (Typ 1)

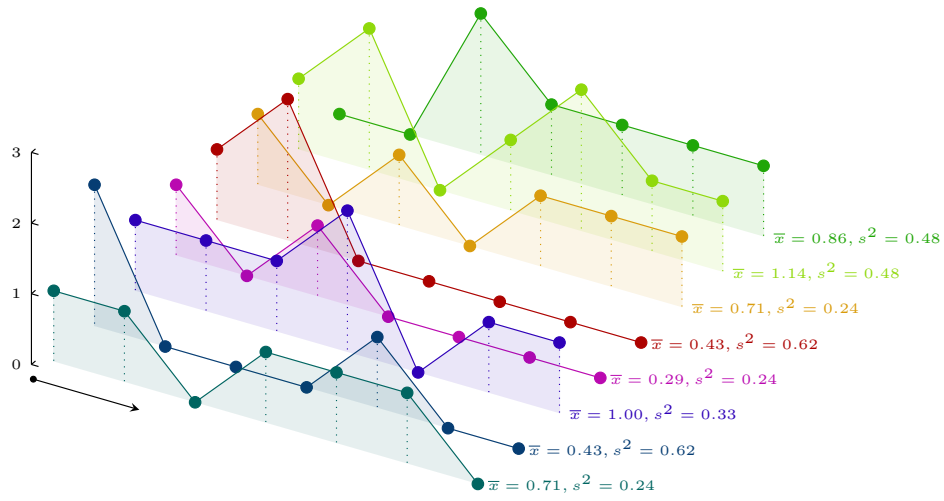


Abb. B.22.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #12. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#13 (Typ 6)

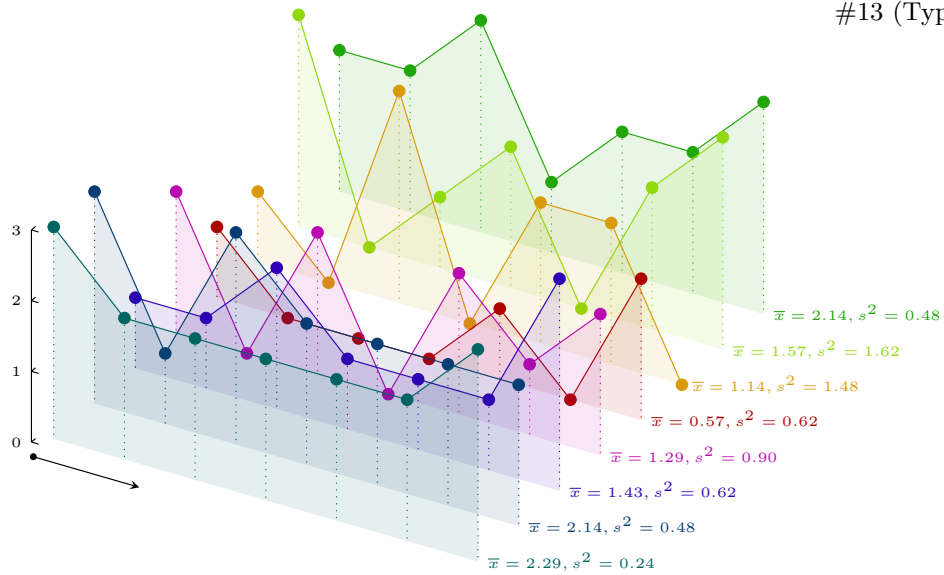


Abb. B.23.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #13. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#14 (Typ 1)

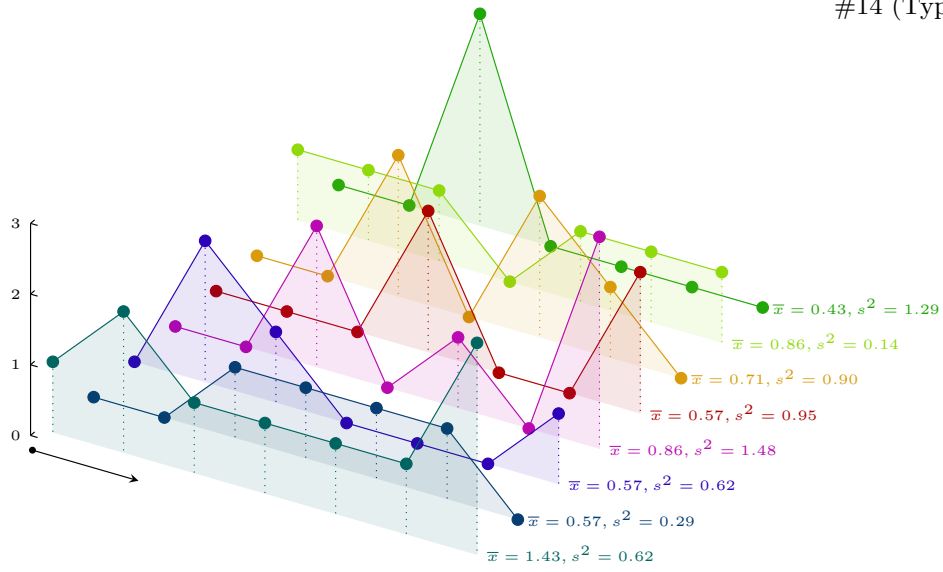


Abb. B.24.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #14. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#15 (Typ 2)

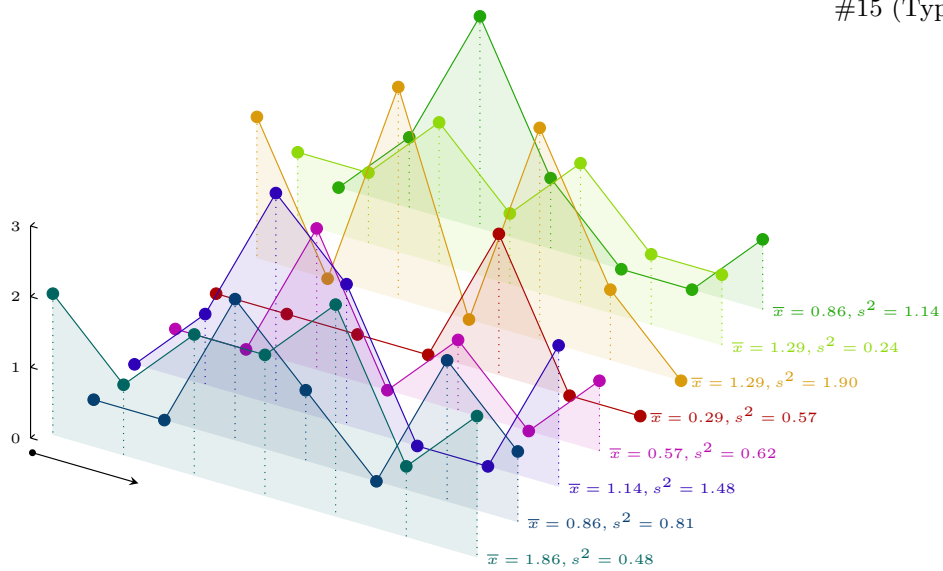


Abb. B.25.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #15. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#16 (Typ 1)

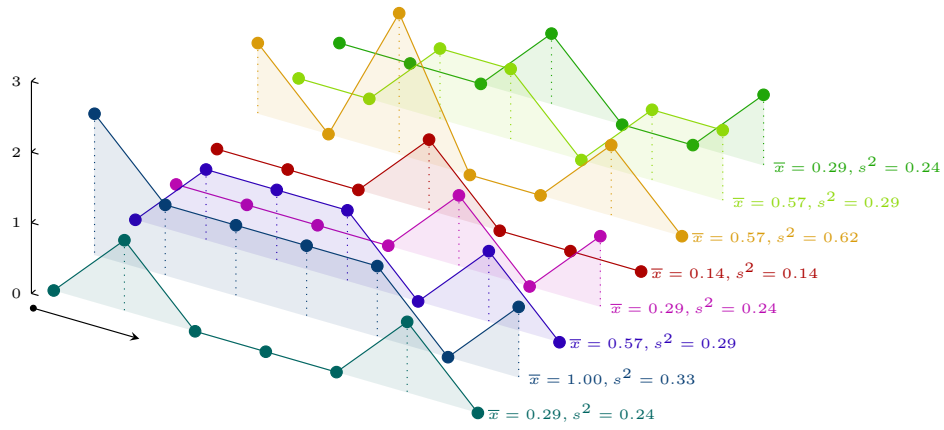


Abb. B.26.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #16. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#17 (Typ 3)

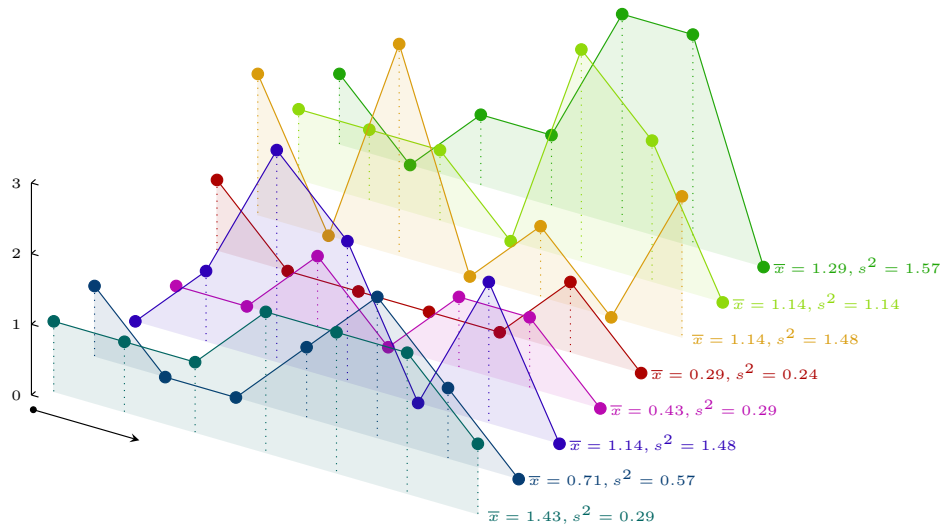


Abb. B.27.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #17. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#18 (Typ 1)

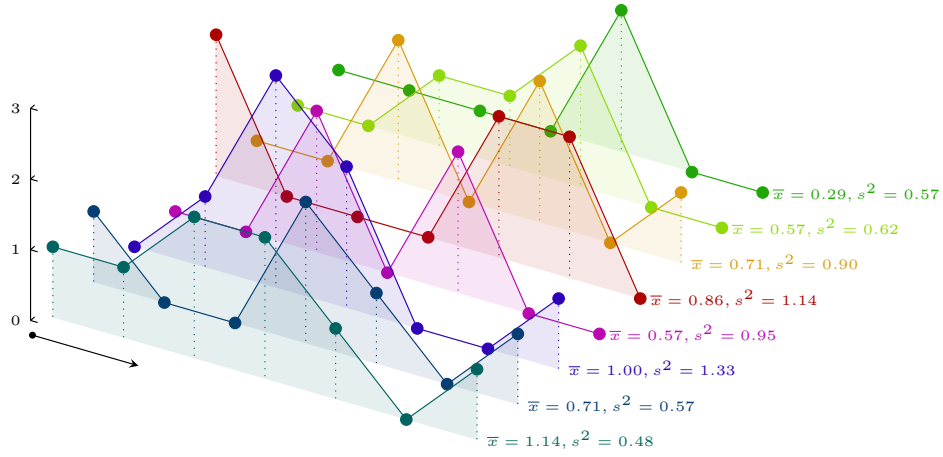


Abb. B.28.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #18. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#19 (Typ 1)

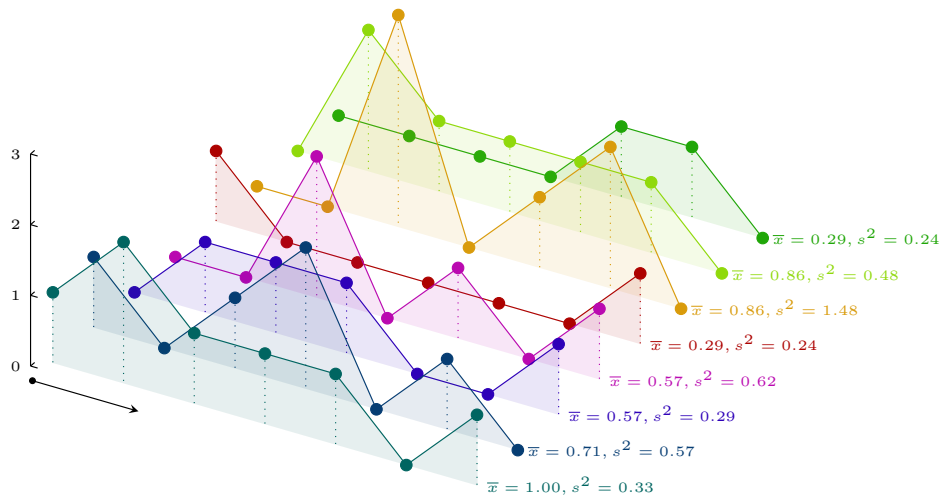


Abb. B.29.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #19. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

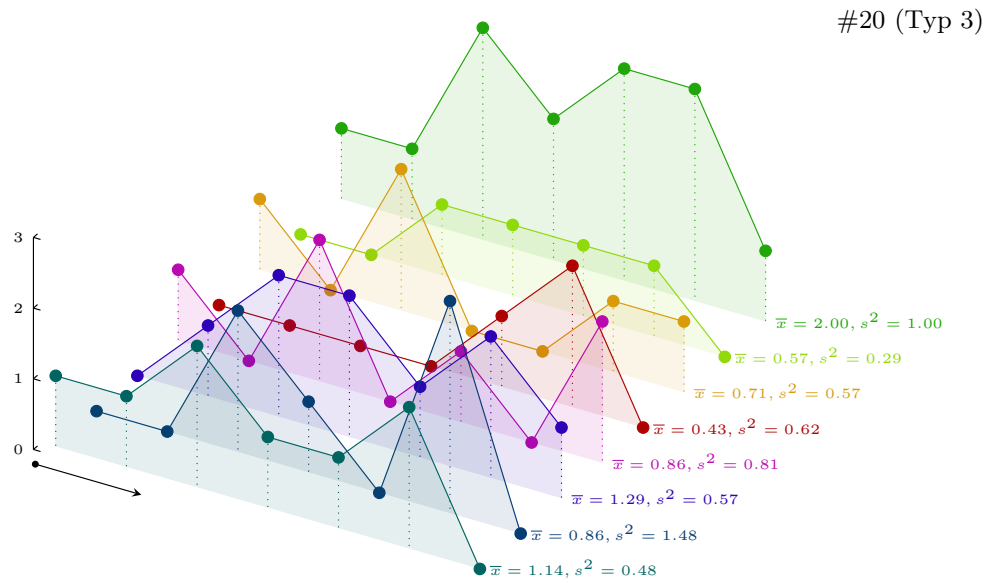


Abb. B.30.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #20. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

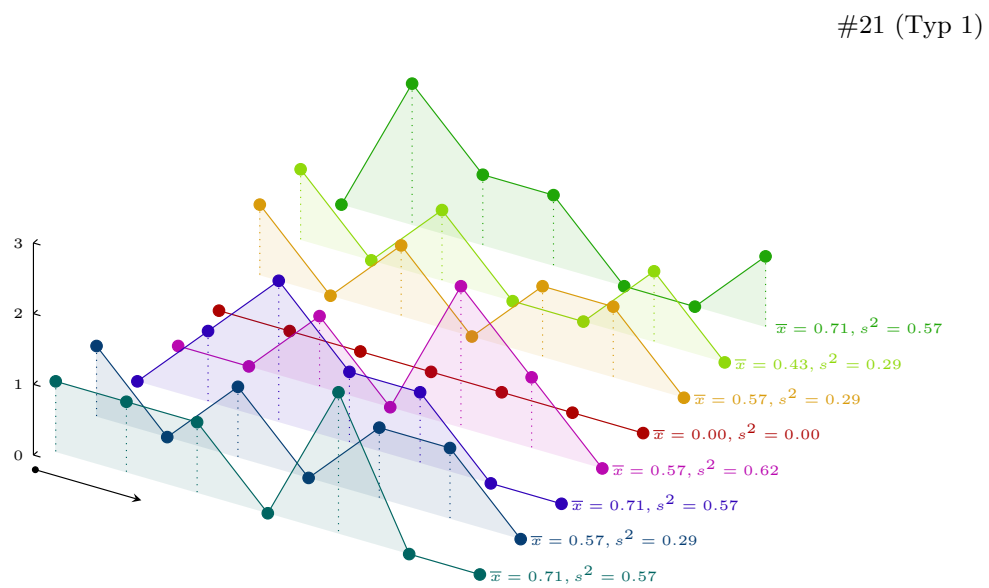


Abb. B.31.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #21. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#22 (Typ 6)

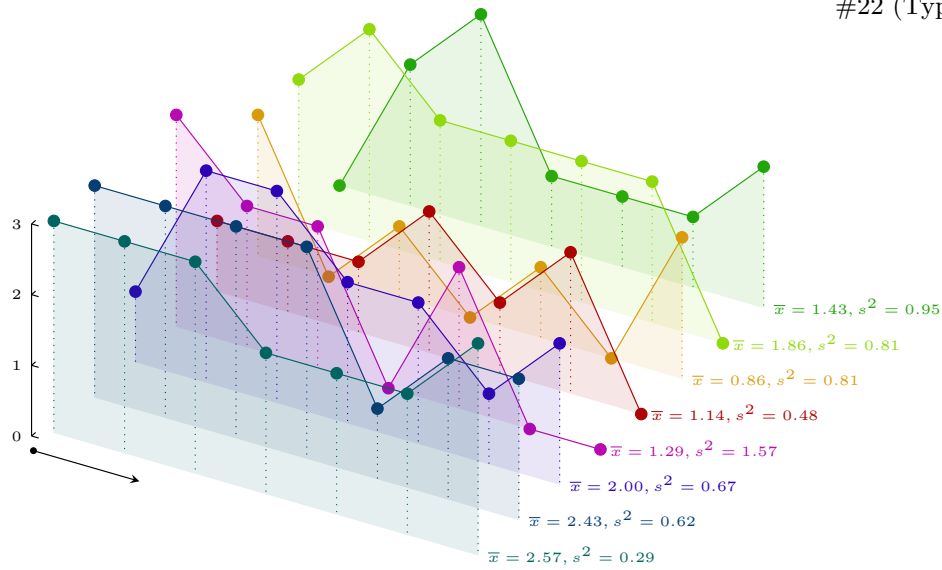


Abb. B.32.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #22. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#23 (Typ 4)

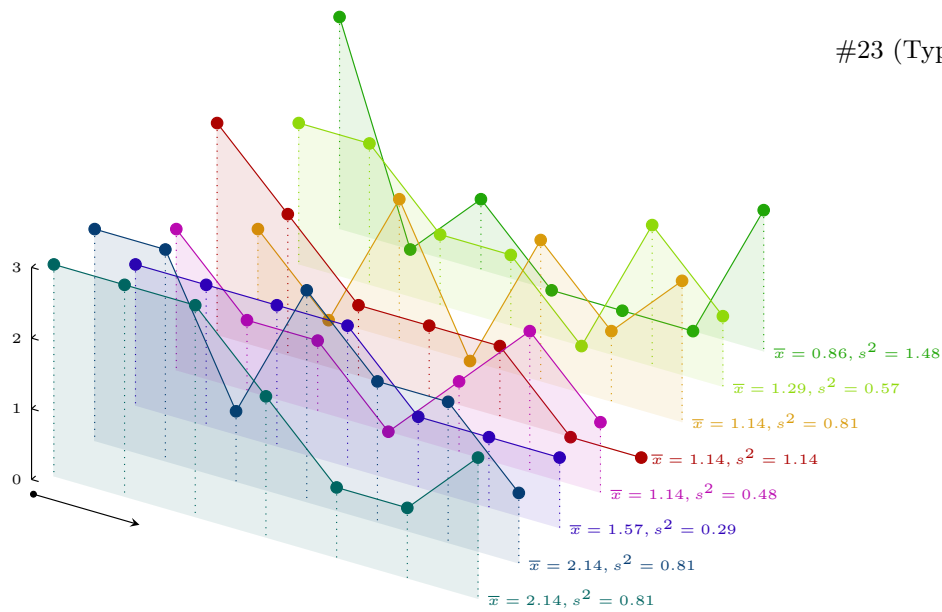


Abb. B.33.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #23. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#24 (Typ 2)

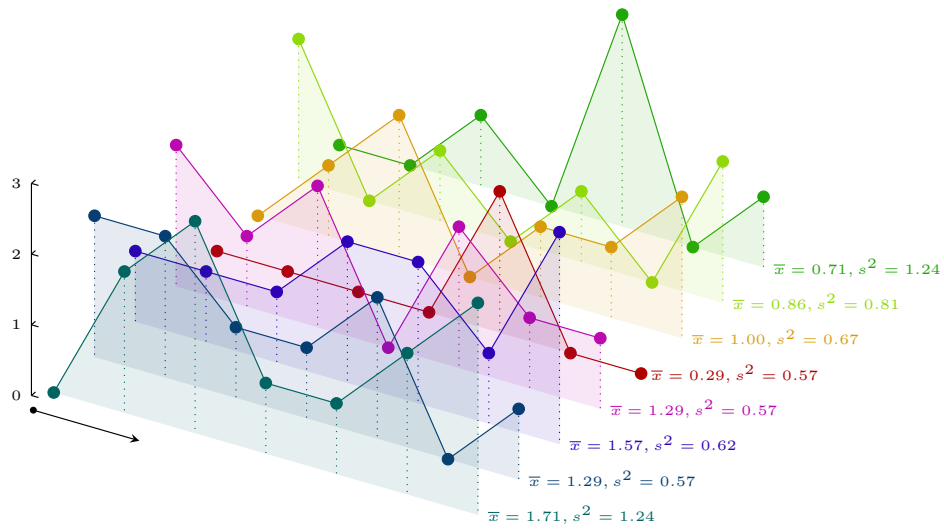


Abb. B.34.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #24. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

#25 (Typ 1)

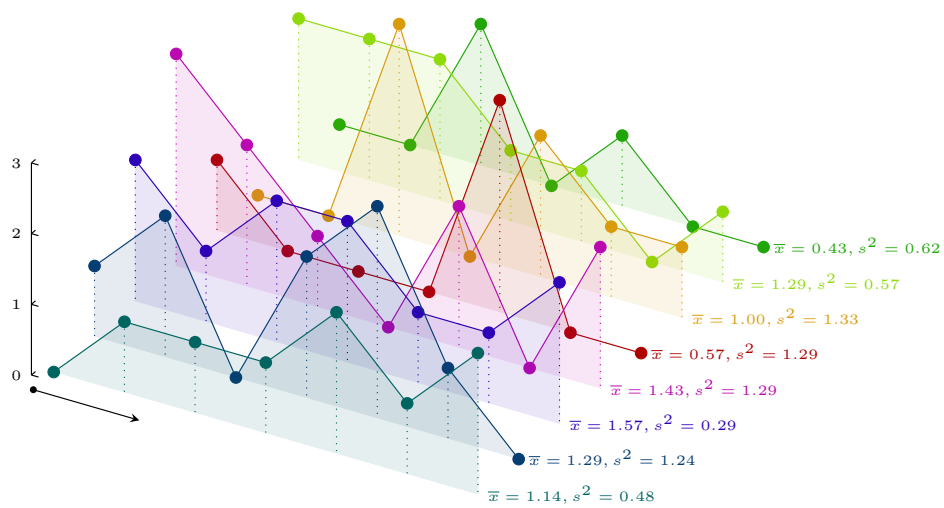


Abb. B.35.: Verlauf der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über den Verlauf des Semesters für Proband #25. Farbgebung gemäß Abbildung B.10.

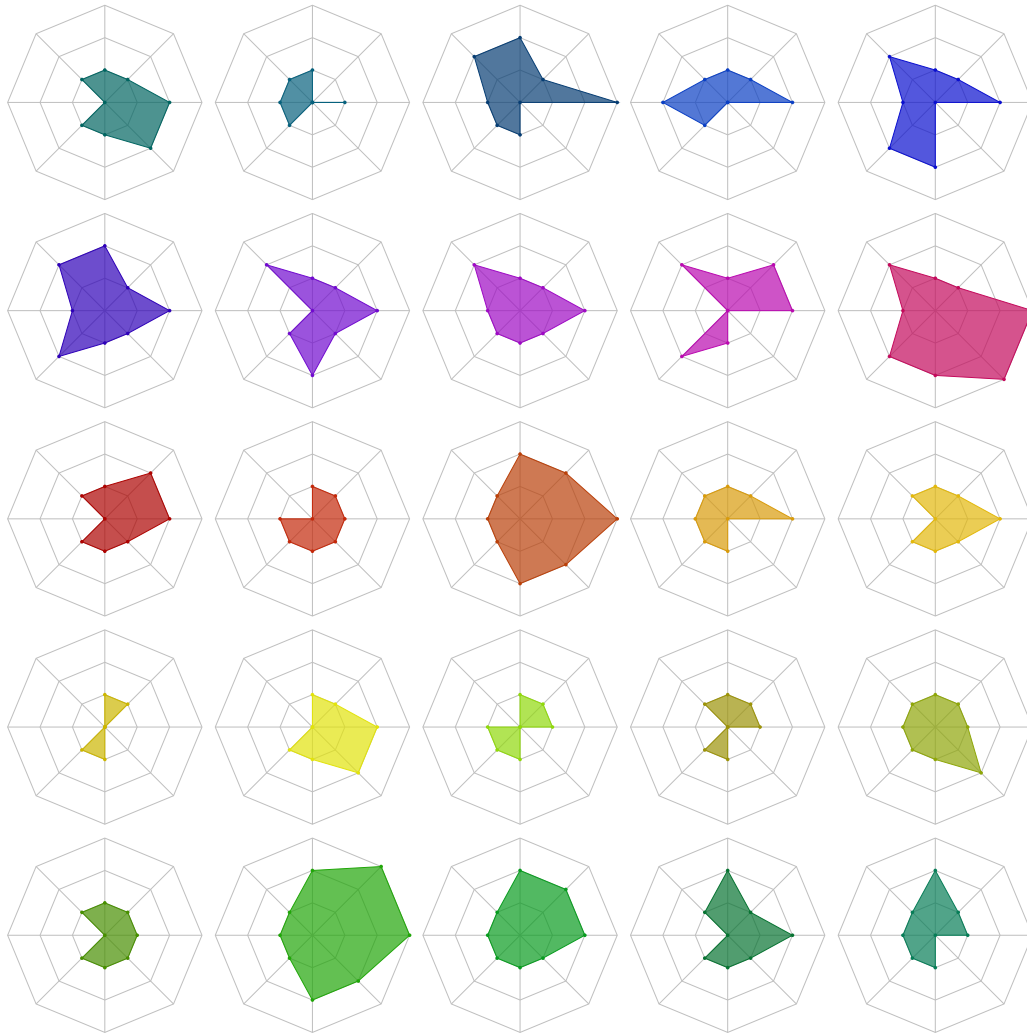


Abb. B.36.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband (Gesamtbewertung).

B. Abbildungen und Tabellen

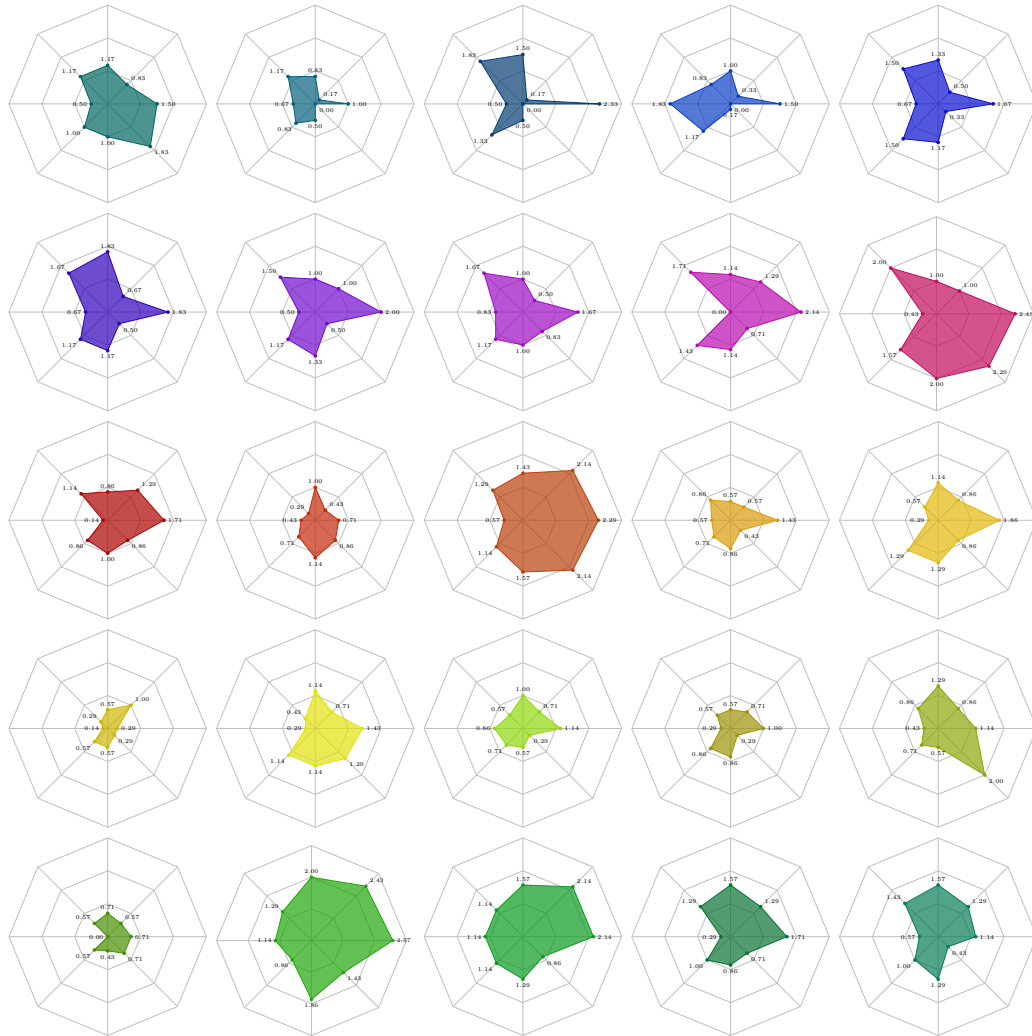


Abb. B.37.: Ausprägungen der evaluativen Inhaltsanalyse pro Proband (Mittelwerte der Einzelfallbewertungen).

	#01	#02	#03	#04	#05	#06	#07	#08	#09	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	#21	#22	#23	#24	#25	
AA1 Äußere Form und Dokumentation	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	3	1	3	1	2	0	1	1	1	1	1	3	3	0	0	
Überlegungen zum Vorgehen	1	0	0	0	0	2	3	2	1	1	2	2	3	0	0	2	1	1	1	0	1	3	3	2	1	
Allgemeinere mathematische Techniken	0	1	1	1	1	3	1	2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	
Beispielgebundenes Vorgehen	2	2	3	1	2	2	3	1	2	2	3	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2	2	3	
Externe Hilfsmittel heranziehen	1	2	0	3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	2	1	0	0	1	3	0	1		
Problemspezifische fachmathematische Techniken	3	2	2	2	3	2	1	2	2	2	2	1	1	0	2	1	2	0	0	1	1	2	1	0	0	
Einordnung von Ergebnissen	1	1	1	0	3	3	2	2	1	1	1	1	3	1	1	0	1	0	0	0	1	2	2	2	2	
Personenbezogene Überlegungen	2	0	0	0	1	1	2	1	0	1	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	3	0	0	
AA2 Äußere Form und Dokumentation	2	1	3	2	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	3	3	2	1	
Überlegungen zum Vorgehen	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	3	2	2	
Allgemeinere mathematische Techniken	3	0	1	0	2	2	0	0	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	3	2	1	1	
Beispielgebundenes Vorgehen	1	1	3	0	2	2	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	2	
Externe Hilfsmittel heranziehen	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	
Problemspezifische fachmathematische Techniken	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
Einordnung von Ergebnissen	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	1	1	0	1	0	2	0	0	3	2	0	2	
Personenbezogene Überlegungen	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	2	0	1	0	0	0	0	1	2	2	0	0	0	
AA3 Äußere Form und Dokumentation	0	0	1	2	1	2	2	3	3	3	2	0	2	1	2	0	1	2	1	2	1	3	3	3	1	
Überlegungen zum Vorgehen	2	0	0	1	0	1	1	0	3	3	0	0	3	1	2	1	0	0	1	2	1	3	1	1	0	
Allgemeinere mathematische Techniken	2	1	1	1	2	2	1	2	2	0	3	1	2	1	3	1	3	3	1	2	2	3	2	1	2	
Beispielgebundenes Vorgehen	2	3	2	1	2	3	2	3	3	3	2	1	2	2	2	0	1	2	2	2	1	2	1	2	1	
Externe Hilfsmittel heranziehen	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	
Problemspezifische fachmathematische Techniken	2	2	3	2	3	3	2	2	3	3	3	1	3	2	3	2	3	2	3	2	1	1	2	2	3	
Einordnung von Ergebnissen	2	1	1	0	1	2	2	0	3	2	2	0	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	
Personenbezogene Überlegungen	1	0	0	0	0	2	0	3	3	3	3	2	3	3	3	0	1	0	0	3	1	3	1	1	2	
AA4 Äußere Form und Dokumentation	1	1	3	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	1	2	0	2	2	1	1	0	2	2	1	1	
Überlegungen zum Vorgehen	0	1	0	1	2	1	2	0	2	2	2	0	2	1	1	1	2	2	1	0	3	3	1	2		
Allgemeinere mathematische Techniken	1	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	0	2	1	2	2	1	2	1	2	2	2	2	
Beispielgebundenes Vorgehen	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Externe Hilfsmittel heranziehen	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	2	1	0	0	
Problemspezifische fachmathematische Techniken	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Einordnung von Ergebnissen	1	0	1	0	1	0	0	2	1	3	2	1	2	0	1	1	0	1	1	1	0	2	1	0	1	
Personenbezogene Überlegungen	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	1	0	1	1	1	0	0	2	1	1	0	0	0	
AA5 Äußere Form und Dokumentation	2	0	2	0	2	3	3	1	2	2	1	1	2	1	3	0	2	1	1	1	2	2	1	1	2	
Überlegungen zum Vorgehen	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	2	1	0	1	2	1	0	0	1	1	2	2	3		
Allgemeinere mathematische Techniken	1	0	2	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	2	1	2	1	
Beispielgebundenes Vorgehen	2	0	2	3	2	3	2	2	3	3	1	0	2	1	1	1	2	1	1	2	2	2	1	2	2	
Externe Hilfsmittel heranziehen	2	1	2	3	2	3	3	3	0	0	0	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1	2	3	
Problemspezifische fachmathematische Techniken	1	0	2	2	2	1	2	2	2	2	0	1	2	2	3	0	1	2	1	0	1	1	2	1	2	
Einordnung von Ergebnissen	0	0	0	1	1	2	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	3	2	1	1	0	2	0	1	1	
Personenbezogene Überlegungen	2	0	0	0	1	0	1	0	1	3	0	1	2	0	0	0	3	2	1	3	0	1	0	3	1	
AA6 Äußere Form und Dokumentation	2	2	2	2	2	1	2	1	1	3	1	1	2	1	1	1	2	0	0	2	0	2	1	2	1	
Überlegungen zum Vorgehen	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	3	0	2	1	2	0	1	0	1	3	1	2	2	0	1	
Allgemeinere mathematische Techniken	0	1	3	2	1	2	2	0	1	1	0	1	1	0	0	1	2	0	0	2	0	1	1	1	1	
Beispielgebundenes Vorgehen	0	0	1	0	1	0	0	2	1	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	2	1	0	0	
Externe Hilfsmittel heranziehen	0	0	0	2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2	0	2	0	2	0	0	0	
Problemspezifische fachmathematische Techniken	0	1	1	1	1	1	2	1	1	3	1	1	2	1	1	1	0	0	2	1	1	0	1	1	1	
Einordnung von Ergebnissen	2	0	0	0	0	0	1	1	0	3	1	1	2	1	1	1	2	0	1	1	1	2	2	0	0	
Personenbezogene Überlegungen	1	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2	1	2	0	0	0	3	0	1	3	0	1	0	0	0	
AA7 Äußere Form und Dokumentation	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	2	0	3	3	2	0	1	1	1	0	0	3	2	3	2
Überlegungen zum Vorgehen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	0	1	0	2	0	1	1	0	1	0	0	0	2	1	1	0
Allgemeinere mathematische Techniken	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	1	0	1	3	1	2	0	0	1	1	1	0	2	1	3	2
Beispielgebundenes Vorgehen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	2	0	2	3	1	1	0	0	1	2	0	0	1	1	2
Externe Hilfsmittel heranziehen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2	0	0	2	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Problemspezifische fachmathematische Techniken	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2	1	0	1	0	2	2	1
Einordnung von Ergebnissen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	1	1	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	2	1
Personenbezogene Überlegungen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	0	1	3	0	1	1	0	0	0	1	1	2	2	1	0

Tab. B.38.: Ausprägungen der evaluativen Kategorien aller Arbeitsaufträge der einzelnen Probanden.

B. Abbildungen und Tabellen

	Typ: 1						2						3			4		5		6																												
	#01	#02	#03	#04	#05	#06	#07	#08	#09	#10	#11	#12	#13	#14	#15	#16	#17	#18	#19	#20	#21	#22	#23	#24	#25																							
Äußere Form und Dokumentation	1.50	1.00	2.33	1.50	1.67	1.83	2.00	1.67	2.14	2.43	1.71	0.71	2.29	1.43	1.86	0.29	1.43	1.14	1.00	1.14	0.71	2.57	2.14	1.71	1.14																							
Überlegungen zum Vorgehen	0.83	0.17	0.17	0.33	0.50	0.67	1.00	0.50	1.29	1.00	0.43	2.14	0.57	0.86	1.00	0.71	0.71	0.86	0.57	2.43	2.14	1.29	1.29	1.29	1.29																							
Allgemeinere mathematische Techniken	1.17	0.83	1.50	1.00	1.33	1.83	1.00	1.00	1.14	1.00	0.86	1.00	1.43	0.57	1.14	0.57	1.14	1.00	0.57	1.29	2.00	1.57	1.57	1.57	1.57																							
Beispielgebundenes Vorgehen	1.17	1.17	1.83	0.83	1.50	1.67	1.50	1.67	1.71	2.00	1.14	0.29	1.29	0.86	0.57	0.29	0.43	0.57	0.57	0.86	0.57	1.29	1.14	1.29	1.43																							
Externe Hilfsmittel heranziehen	0.50	0.67	0.50	1.83	0.67	0.67	0.50	0.83	0.00	0.43	0.14	0.43	0.57	0.57	0.29	0.14	0.29	0.86	0.29	0.43	0.00	1.14	1.14	0.29	0.57																							
Problemspezifische fachmathematische Techniken	1.00	0.83	1.33	1.17	1.50	1.17	1.17	1.43	1.57	0.86	0.71	1.14	1.29	0.57	1.14	0.71	0.86	0.71	0.57	0.86	1.14	1.00	1.00	1.00	1.00																							
Einarbeitung von Ergebnissen	1.00	0.50	0.50	0.17	1.17	1.17	1.33	1.00	1.14	2.00	1.00	1.14	1.57	0.86	1.29	0.57	1.14	0.57	0.86	0.57	0.43	1.86	1.29	0.86	1.29																							
Personenbezogene Überlegungen	1.83	0.00	0.00	0.00	0.33	0.50	0.50	0.83	0.71	2.29	0.86	0.86	2.14	0.43	0.86	0.29	1.29	0.29	0.29	2.00	0.71	1.43	0.86	0.71	0.43																							
Typ:	1																							2												3				4			5			6		
Äußere Form und Dokumentation	1.00	0.71	1.43	0.29	1.14	1.00	0.71	1.14	2.33	1.67	1.83	2.00	1.67	1.86	1.71	1.50	2.43	1.43	1.14	2.14	1.71	2.14	1.50	2.29	2.57																							
Überlegungen zum Vorgehen	0.17	0.43	0.57	1.00	0.71	0.71	0.57	1.29	0.17	0.50	0.67	1.00	0.50	0.86	1.29	0.83	1.00	0.71	0.86	1.29	1.29	2.14	0.33	2.14	2.43																							
Allgemeinere mathematische Techniken	0.83	1.00	0.57	0.57	1.00	0.57	0.71	1.57	1.50	1.33	1.83	1.00	1.00	1.14	1.57	1.17	1.00	1.14	1.29	1.14	0.86	1.57	1.00	1.43	2.00																							
Beispielgebundenes Vorgehen	1.17	0.29	0.86	0.29	0.57	0.57	0.57	1.43	1.83	1.50	1.67	1.50	1.67	0.57	1.29	1.17	2.00	0.43	0.86	1.71	1.14	1.14	0.83	1.29	1.29																							
Externe Hilfsmittel heranziehen	0.67	0.43	0.57	0.14	0.86	0.29	0.00	0.57	0.50	0.67	0.67	0.50	0.83	0.29	0.29	0.50	0.43	0.29	0.43	0.00	0.14	1.14	1.83	0.57	1.14																							
Problemspezifische fachmathematische Techniken	0.83	0.71	0.71	0.57	0.71	0.86	0.57	1.00	1.33	1.50	1.17	1.17	1.17	1.29	1.00	1.00	1.57	1.14	0.71	1.43	0.86	1.14	1.17	1.14	0.86																							
Einarbeitung von Ergebnissen	0.50	1.14	0.86	0.57	0.57	0.86	0.43	1.29	0.50	1.17	1.17	1.33	1.00	1.29	0.86	1.00	2.00	1.14	0.57	1.14	1.00	1.29	0.17	1.57	1.86																							
Personenbezogene Überlegungen	0.00	0.86	0.43	0.29	0.29	0.29	0.71	0.43	0.00	0.33	0.50	0.50	0.83	0.86	0.71	1.83	2.29	1.29	2.00	0.71	0.86	0.86	0.00	2.14	1.43																							

Tab. B.39.: Mittelwerte der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über alle Arbeitsaufträge der einzelnen Probanden.

Typ:	1						2						3						4						5						6																			
	#02	#12	#14	#16	#18	#19	#21	#25	#03	#05	#06	#07	#08	#15	#24	#01	#10	#17	#20	#09	#11	#23	#04	#13	#22	#02	#12	#14	#16	#18	#19	#21	#25	#03	#05	#06	#07	#08	#15	#24	#01	#10	#17	#20	#09	#11	#23	#04	#13	#22
Äußere Form und Dokumentation	0.80	0.24	0.62	0.24	0.48	0.33	0.37	0.48	0.67	0.27	0.97	0.40	0.67	0.48	1.24	0.70	0.29	0.29	0.48	0.81	0.57	0.81	0.70	0.24	0.29	0.17	0.62	0.29	0.33	0.57	0.29	1.24	0.17	0.70	0.67	1.60	0.70	0.81	0.57	0.57	1.33	0.57	1.48	0.90	1.24	0.81	0.27	0.48	0.62	
	0.57	0.33	0.62	0.29	1.33	0.29	0.57	0.29	0.70	0.67	0.57	0.40	0.80	1.48	0.62	1.37	0.33	0.33	1.48	0.57	0.48	1.14	0.29	0.80	0.62	0.67	1.37	0.24	1.48	0.24	0.95	0.62	1.29	1.37	0.70	1.87	1.50	1.07	0.62	0.57	0.97	1.33	0.29	0.81	1.24	1.48	0.48	1.37	0.90	1.57
	0.67	0.62	0.95	0.14	1.14	0.24	0.00	1.29	0.70	1.07	1.47	1.50	1.77	0.57	0.57	0.70	0.62	0.24	0.62	0.00	0.14	1.14	1.37	0.62	0.48	0.97	0.24	0.90	0.62	0.90	1.48	0.29	1.33	1.47	1.90	1.37	0.97	1.90	0.67	1.60	1.62	1.48	0.57	0.95	1.48	0.81	0.97	1.48	0.81	
Externe Hilfsmittel heranziehen	0.30	0.48	0.14	0.29	0.62	0.48	0.29	0.57	0.30	0.97	1.77	0.67	0.80	0.24	0.81	0.80	0.67	1.14	0.29	1.14	0.67	0.57	1.62	0.81	0.00	0.48	1.29	0.24	0.57	0.62	1.00	0.27	0.70	0.70	1.37	1.14	1.24	0.57	0.90	1.57	1.00	1.24	1.48	1.48	0.00	0.48	0.95			
	0.70	0.80	0.67	0.70	0.27	0.97	0.40	0.67	0.81	0.29	0.57	0.24	0.24	0.62	0.48	0.24	0.29	0.48	0.33	0.48	0.57	0.29	0.81	1.24	0.48	0.57	0.17	0.17	0.27	0.70	0.67	1.60	0.70	0.90	1.33	1.24	0.62	0.48	0.29	0.81	0.33	0.57	0.57	1.48	0.29	0.62	0.81	0.57	1.24	
Allgemeinere mathematische Techniken	1.37	0.57	0.70	0.80	0.67	0.57	0.40	0.80	0.48	0.33	1.14	0.33	0.62	0.62	1.48	0.29	1.48	1.33	0.29	0.57	0.57	0.67	0.29	0.62	0.29	0.37	0.57	0.70	0.80	0.67	0.57	0.40	0.80	0.48	0.33	1.14	0.33	0.62	0.62	1.48	0.29	1.48	1.33	0.29	0.57	0.57	0.67	0.29	0.62	0.29
	0.97	1.37	1.37	1.37	1.07	1.47	1.50	1.07	1.24	1.33	1.48	0.24	0.90	1.48	0.62	0.24	0.29	0.95	0.62	0.81	0.62	1.57	0.48	0.57	1.29	0.70	0.67	0.70	1.37	1.07	1.47	1.50	1.77	0.67	0.80	0.24	0.81	0.80	0.67	1.14	0.29	1.14	0.67	0.57	1.62	0.81	0.67	1.33		
Externe Hilfsmittel heranziehen	0.70	0.67	0.70	1.37	1.07	1.47	1.50	1.77	0.67	0.80	0.24	0.81	0.80	0.67	1.14	0.29	1.14	0.67	0.57	1.62	0.81	0.67	1.33	0.62	0.48	0.80	0.30	0.30	0.17	0.97	1.77	0.67	0.80	1.14	0.67	0.67	0.48	1.62	0.14	0.24	0.29	1.14	0.62	0.48	0.29	0.29	0.81	0.57	0.81	0.57
	0.57	0.00	0.00	0.00	0.27	0.70	0.70	1.37	1.24	0.90	1.48	0.48	1.29	1.14	0.24	1.57	0.57	0.24	1.00	0.57	0.95	1.48	1.24	0.62	1.24	0.37	0.00	0.00	0.00	0.27	0.70	0.70	1.37	1.24	0.90	1.48	0.48	1.29	1.14	0.24	1.57	0.57	0.24	1.00	0.57	0.95	1.48	1.24	0.62	

Tab. B.40.: Empirische Varianzen der Ausprägungen der evaluativen Kategorien über alle Arbeitsaufträge der einzelnen Probanden.

C. Codierleitfäden der unterschiedlichen qualitativen Inhaltsanalysen

C.1. Inhaltlich-strukturierende Inhaltsanalyse

Selektionskriterium Arbeitsweisen

Die Lerndokumentationen der Studierenden stellen deren gesamten Bearbeitungsprozess dar. Es werden zunächst nur diejenigen Textstellen zur Analyse herangezogen, die mit der tatsächlichen Bearbeitung der Aufgabenstellung zu tun haben. Bspw. werden festgehaltene organisatorische Fragen an den Dozenten ausgeschlossen. Der derart entstehende Resttext wird in Segmente unterteilt, die sich durch eine einheitliche Bearbeitungsweise auszeichnen. Oftmals kennzeichnen sich neu zu unterteilende Segmente durch einen Wechsel der Methodik, einen neuen Ansatz oder auch das Festhalten eines Zwischenergebnisses.

Anmerkungen zum Codierprozess

Die codierten Segmente müssen nicht disjunkt sein. Überlappungen und verschachtelte Segmente sind explizit erlaubt. Es werden allerdings nur für sich alleinstehend verständliche Segmente gebildet. Folglich ist die kleinste Einheit eines Segments ein verständlicher (Neben-)Satz. Die obere Grenze für Segmente wird durch die Arbeitsweise festgelegt, die an dieser Stelle codiert werden soll. Das Segmente soll dabei den kompletten Prozess abdecken, der ohne Methodenwechsel in/mit dieser Arbeitsweise beschrieben ist. Dies kann bspw. bei der Codierung der hypothetischen Arbeitsweise *Fallunterscheidung* zu codierten Segmenten von mehreren Zeilen bis zu mehreren Seiten führen. In diesen Fällen ist die Markierung mittels Anfangs- und Endpunkt oder mit mehreren einzelnen Codierpunkten erlaubt, wobei diese Punkte eindeutig zueinander zuzuordnen sind. (siehe Abb. 1) Die Codierung von Segmenten

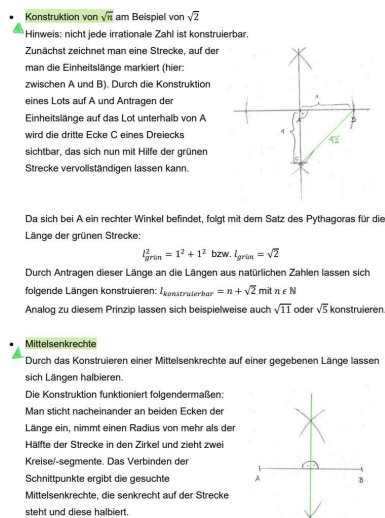
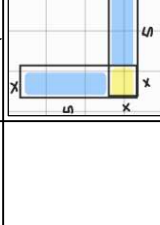




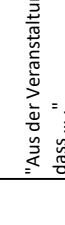



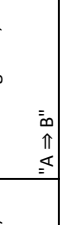
Abb. 1: Codierung einer Aufzählung mit einzelnen Codierungen, die symbolisch verknüpft sind (hier durch grüne Dreiecke)

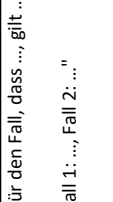
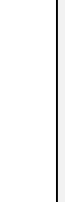

erfolgt mit Rechtecken. Dabei soll das kleinstmögliche Rechteck gezogen werden, das den zu codierenden Inhalt komplett umfasst. (siehe Abb. 2)

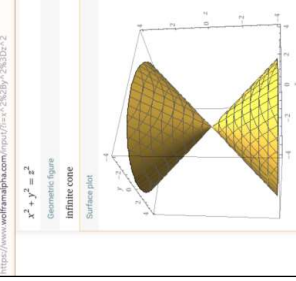
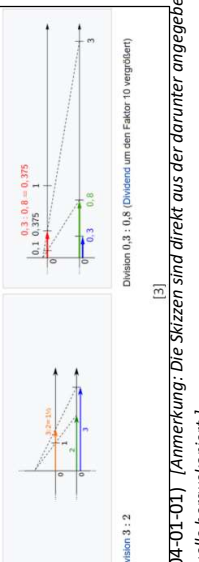
Ein weiteres Beispiel für das Konstruieren einer geometrischen Größe, das auch schon in der Gruppe besprochen wurde, waren Längen. Hierbei muss zu Beginn eine Strecke mit einer bestimmten Länge existieren oder erzeugt werden, diese repräsentiert quasi die Einheit. Vielfache dieser Einheitslänge lassen sich nun simpel konstruieren, indem man mit dem Zirkel an einem Ende der Strecke einsteicht und einen Kreis zieht, wobei das andere Ende des Zirkels am anderen Ende der Strecke beginnt. Nun muss die Strecke nur noch verlängert werden, sodass sie den Kreis (erneut) schneidet. Damit erhalten wir eine Strecke der doppelten Einheitslänge, zudem können mit dem eingestellten Zirkel nun eine beliebige Anzahl von Einheitslängen addiert werden.

Abb. 2: Codierung des grünen Abschnitts mittels des gelben Rechtecks

Kurz-ID	Bezeichnung der Kategorie	Charakteristika	Ankerbeispiele																														
100	Planung und Strukturierung	Definition Segmente, die Schritte zur Planung und Strukturierung der Bearbeitung beschreiben. Solche Schritte sind organisatorischer Natur und zielen nicht selbstständig auf die Lösung der Problemstellung ab.																															
110	Äußere Form und Dokumentation	Segmente, die sich der übersichtlichen und anschaulichen äußeren Darstellungsform der Dokumentation widmen.																															
111	Aufzählungen und Tabellen	Segmente, die durch Aufzählungen und Tabellen strukturiert sind	<ul style="list-style-type: none"> die Multiplikation zweier Zahlen die Division einer Zahl durch eine von Null verschiedene Zahl das Quadratwurzelziehen aus einer nichtnegativen Zahl das Quadrieren einer Zahl die dritte Potenz einer Zahl <p>(04-01-01)</p> <table border="1" data-bbox="430 604 622 873"> <tr> <td>e</td> <td>Signatur von A</td> <td>Kegelschnitt</td> </tr> <tr> <td>> 0</td> <td>(2,0)</td> <td>Ellipse</td> </tr> <tr> <td></td> <td>(1,1)</td> <td>Hyperbel</td> </tr> <tr> <td></td> <td>(0,2)</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$= 0$</td> <td>(2,0)</td> <td>Nullpunkt 0</td> </tr> <tr> <td></td> <td>(1,1)</td> <td>zwei schneidende Geraden</td> </tr> <tr> <td></td> <td>(0,2)</td> <td>Nullpunkt 0</td> </tr> <tr> <td>< 0</td> <td>(2,0)</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td></td> <td>(1,1)</td> <td>Hyperbel</td> </tr> <tr> <td></td> <td>(0,2)</td> <td>Ellipse</td> </tr> </table> <p>(04-02-02)</p>	e	Signatur von A	Kegelschnitt	> 0	(2,0)	Ellipse		(1,1)	Hyperbel		(0,2)	0	$= 0$	(2,0)	Nullpunkt 0		(1,1)	zwei schneidende Geraden		(0,2)	Nullpunkt 0	< 0	(2,0)	0		(1,1)	Hyperbel		(0,2)	Ellipse
e	Signatur von A	Kegelschnitt																															
> 0	(2,0)	Ellipse																															
	(1,1)	Hyperbel																															
	(0,2)	0																															
$= 0$	(2,0)	Nullpunkt 0																															
	(1,1)	zwei schneidende Geraden																															
	(0,2)	Nullpunkt 0																															
< 0	(2,0)	0																															
	(1,1)	Hyperbel																															
	(0,2)	Ellipse																															
112	Beschreiben des Vorgehens	Segmente, in denen das Vorgehen lediglich beschrieben wird.	<p>"Weiter geht es konkreter mit den Zahlenbereichen." (01-01-01)</p> <p>"Nun schauen wir, mit welchen Matrizen A' wir diese Normalformen erzeugen." (01-02-02)</p> <p>"Im Folgenden möchte ich nun die Grundrechenarten und weitere Eigenschaften der „Neuen Zahlen“ definieren. Bei Buchstaben mit Exponenten + handelt es sich um diese. Reine Buchstaben sind natürliche Zahlen." (03-01-03)</p>																														
113	Hervorhebungsmittel	Teile der Bearbeitung, die durch diverse Hervorhebungsmittel gekennzeichnet sind.	 <p>(07-01-02)</p> <p>genau die Diagonalen $\neq 0$ (also a, e, i, t_0) \rightarrow Ellipse, falls $a \neq e$ \rightarrow Kreis, falls $a = e$, Radius \sqrt{r}</p> <p>(06-02-02)</p>																														
114	(Zwischen-)Ergebnisse notieren	Segmente, in denen Ergebnisse festgehalten werden. Es sind hier keine kognitiven Ableitungen oder Interpretationen gemeint. Lediglich nicht-interpretative Antwortsätze werden codiert.	<p>"Für x gibt es also die zwei Lösungen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -13$" (04-01-02)</p> <p>"Es handelt sich also nicht um einen Körper, sondern einen Schiefkörper." (05-01-04)</p>																														
120	Überlegungen zum Vorgehen	Segmente, in denen das eigene Vorgehen geplant und vorbereitet wird.																															
121	Pausen einlegen und planen	Segmente, in denen Pausen geplant werden oder explizit das Einlegen einer Pause beschrieben ist.	<p>"Für heute mache ich erstmal Schluss und setze mich morgen nochmal dran."</p> <p><i>Erstmal ne Pause machen.</i></p> <p>(13-01-02)</p>																														

Teilschritte und -ziele aufstellen	Segmente, in denen kleinere Schritte hin zur Bearbeitung der gesamten Problemstellung ausdifferenziert werden.	"Für die Lösung sollte man sich zunächst ... anschauen, um danach ... machen zu können."	"Eigenschaften, die zu zeigen sind, um zu beweisen, dass es sich dabei um einen Körper handelt, sind Folgende: [...]" (05-01-04)		(18-01-04)
Vermutungen und Ideen formulieren	Segmente, in denen intuitive Gedanken hinsichtlich der Bearbeitung der Problemstellung thematisiert werden. In Abgrenzung zu Teilschritten oder -zielen, sind mit Vermutungen und Ideen derartige Überlegungen gemeint, die implizit oder explizit im Konjunktiv formuliert sind.	Generell meist Formulierungen im Konjunktiv, "Ich könnte mir vorstellen, dass ... gelten muss."	"Es sollten sich sieben verschiedene Schnittmöglichkeiten ergeben." (03-02-01)		(07-01-01)
Vorwissen aktivieren	Segmente, in denen bereits vorhandenes Wissen beschrieben wird, das möglicherweise für die Bearbeitung der Problemstellung relevant sein könnte.	"Ich weiß bereits, dass ... gilt.", "Aus der Veranstaltung ... ist mir bereits bekannt, dass ..."			(07-01-02)
Strategien der Durchführung	Segmente, in denen Schritte beschrieben sind, die der konkreten Bearbeitung einer Problemstellung dienen. Sie spiegeln also die formale Bearbeitung der Problemstellung wider und sind für sich genommen das fachliche Ergebnis der Bearbeitung.				
Allgemeinere mathematische Techniken	Segmente, die durch allgemeingültige Techniken aus der Mathematik geprägt sind. Darunter fallen insbesondere elementare Typen der Beweisführung und andere mathematische Techniken, die nicht klassisch an ein deutlich eingegrenztes Fachgebiet gebunden sind.				
Analogien, Symmetrien und Invarianzen suchen	Segmente, in denen durch Behandeln von Gemeinsamkeiten oder Unterschieden ein bekanntes Objekt oder eine bekannte Strategie/eigenschaft erneut angewandt werden kann.	"o.E. ...", "Analog gilt für ... gerade ..."	"Analog zu diesem Prinzip lassen sich beispielweise auch v11 oder v5 konstruieren." (03-01-01)		(07-01-01)
Ansatz eines Widerspruchs	Segmente, die einen Widerspruchsbeweis beschreiben oder andeuten.	"Angenommen ... gilt, dann führt das zu ..., was ein Widerspruch ist."	(08-02-01)		(10-01-04)
Darstellungsform wechseln	Segmente, in denen die Darstellungsform eines gegebenen Objekts gewechselt wird. Das kann bspw. die geometrische Interpretation einer algebraischen Gleichung sein. Aber auch die Verbalisierung mathematischer Ausdrücke zählt hier dazu.		"Der Flächeninhalt des Quadrats ist die geometrische Darstellung der angegebenen Gleichung. Bei dem kleinen Quadrat unten links handelt es sich um ein Quadrat mit dem Flächeninhalt x^2 " (05-01-02)		(06-01-01) (06-02-01)
Deduktives Ableiten und Vorwärtsarbeiten	Schritte, die implizit oder explizit als (mehrfache) Implikation formuliert sind.	"Weil ... folgt ...", "A \Rightarrow B"			(06-02-01)

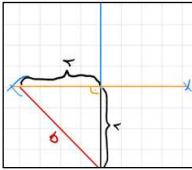
215	Fallunterscheidung	Segmente, in denen (auch unvollständige) Fallunterscheidungen an einem gegebenen problem angesetzt werden. Es wird hier aber nur codiert, solange ersichtlich ist, dass die Fallunterscheidung bewusst angestrebt wird. Dies stellt die Abgrenzung zu Einzel- und Spezialfällen sowie systematischen Ausprobieren dar.	"Für den Fall, dass ..., gilt ...", "Fall 1: ..., Fall 2: ..."	 <p>(08-01-01)</p>
216	Rückwärtsarbeiten	Segmente, die ein Vorgehen beschreiben, bei dem vom Ergebnis Rückschlüsse auf einen möglichen Lösungsweg gezogen werden.	"Weil ich weiß, dass ... herauskommen sollte, setze ich ... an."	<p>"Für z=0 ergibt sich nur ein Punkt, nämlich der Koordinatenursprung. Für z≠0 aber konstant ergeben sich Kreise als Schnittfiguren, nach der Form $x^2+y^2=c^2$" (04-02-01)</p> <p>Zunächst einmal lösen ich die Gleichung mithilfe der Mitternachtsformel:</p> $x^2+10x-33=0$ $x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+132}}{2}$ $\Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -13$ <p>Da $x_2 = -13$ hier aufgrund des positiven Flächeninhaltes weggelassen wird $x_1 = 3$ als Lösung angenommen. Dadurch lässt sich die Lösung des Quadrates bestimmen: $3^2+5^2=8$</p> <p>(07-01-02)</p>
Beispielgebundenes Vorgehen				
220	Einzel- und Spezialfälle betrachten	Segmente, die sich an Beispielen und konkreteren Einzel- oder Spezialfällen orientieren.	Tritt oft in Verbindung mit einer Fallunterscheidung auf.	<p>"Konstruktion von Wurzel n am Beispiel von Wurzel 2" (03-01-01)</p> <p>$3\sqrt{3-13} = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 3$ $= 33, 35 + 3 \cdot 3$ (06-01-02) [Anmerkung zum codierten Segmente: Die Bearbeitung beschränkt sich hier auf die Betrachtung ganzzahliger Zerlegungen, wodurch keine allgemeine Fallbetrachtung mehr stattfindet.]</p> <p>$a + b^+ = a - b = c$ Beispiel: $5 + (-2) = 5 - 2 = 3$ (03-01-03)</p> <p>z.B. $2 - 4 = 2 + (-4) = -2$ (07-01-01)</p>
222	Konkretes (Zahlen-)Beispiel angeben	Segmente, in denen zu einer allgemeineren Aussage ein konkretes Beispiel angegeben wird. Das kann bspw. Das Einsetzen eines konkreten Zahlenwertes in eine Gleichung mit einer Variablen sein. Erfolgt dieses Einsetzen nicht zur Veranschaulichung einer Aussage, sondern zur Kontrolle einer bereits getroffenen Aussage, so wird stattdessen mit Ergebnissen kontrollieren codiert.		 <p>(03-01-01)</p>
223	Skizzen und Zeichnungen	Segmente, in denen zeichnerische Skizzen von behandelten Objekten angestrebt werden. In den meisten Fällen handelt es sich um geometrische Skizzen, aber auch systematische Skizzen von nicht-geometrischen Objekten, wie bspw. Körper-Strukturen zählen hier dazu.		 <p>(05-01-01)</p>
224	Systematisches Ausprobieren	Segmente, in denen aus mehreren Einzel- oder Spezialfallbetrachtungen sukzessive eine immer weiterführende Bearbeitung entsteht. Typischerweise führen die einzelnen Ansätze jeweils zum nächsten Ansatz.		<p>→ hier Start mit anderen Werten in der Hoffung das schönere Evt rauskommen UND nicht das andere Gleichung mit x_1 damit die Rechnungen alle sauber werden...</p> <p>(10-02-02)</p> <p>Ich behaupte das im Folgenden jeweils aber nochmal etwas Neues:</p> <p>(22-01-03)</p>
Externe Hilfsmittel heranziehen				
230	Peers/Internet/Literatur	Segmente, in denen externe Hilfsmittel verwendet wurden. Als externes Hilfsmittel sind hier insbesondere andere Lernende oder Lehrende sowie Internetquellen und Literatur, aber auch rechnergestützte Hilfsmittel zu nennen.	Gemeinsame Bearbeitung in Gruppen, Internet- oder Literaturangaben	<p>Hierfür kurzer Blick ins Internet (02-01-01)</p> <p>"Ich musste sowohl bei Felix Moors als auch bei einer Kommilitonin um Hilfe bitten" (03-01-04)</p>
231	Externe Hilfsmittel heranziehen	Segmente, in denen die Zusammenarbeit mit anderen Lernenden oder der Zugriff auf Quellen aus Internet und Literatur beschrieben ist.		


<p>Software und Rechensysteme</p>	<p>Segmente, die mit der Hilfe von computergestützten Hilfsmitteln entstanden sind oder in denen das Arbeiten mit derartigen Hilfsmitteln beschrieben wird. Insbesondere sind so bspw. Screenshots aus Geogebra als externe Hilfsmittel und nicht als Skizzen oder Zeichnungen zu codieren.</p>	<p>Geogebra, wolframalpha, etc.</p>	 <p>(02-02-01)</p>
<p>1 zu 1 Übernahme aus externer Quelle</p>	<p>Segmente, die komplett aus einer externen Quelle übernommen oder (zweifelsfrei) abgeschrieben sind. Screenshots aus computergestützten Hilfsmitteln, die darin selbstständig erstellt wurden, werden nicht codiert. Lediglich das Übernehmen derartiger Screenshots aus externen Quellen wird codiert.</p>	<p>Screenshots aus Internet- oder Literaturquellen</p>	 <p>Division 3 : 2 [3] Division 0,3 : 0,8 (Dividens um den Faktor 10 vergrößern)</p>

Problemspezifische fachmathematische Techniken

Segmente, in denen speziellere Techniken aus bspw. kleinere Fachgebieten der Mathematik verwendet wurden. Diese Techniken zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass sie kein allgemeines Lösungsverfahren oder einen elementaren Beweistyp für beliebige mathematische Probleme darstellen, sondern problemspezifisch ausgewählt werden müssen.

(04-01-01) [Anmerkung: Die Skizzen sind direkt aus der darunter angegebenen Quelle herauskopiert.]

<p>(Geometrische) Konstruktionen</p>	<p>Segmente, in denen Konstruktionsschritte für ein mathematisches Objekt beschrieben sind. Im Falle von geometrischen Konstruktionen sind das bspw. entsprechende Konstruktionsschriften. Denkbar sind hier aber auch bspw. abstraktere Konstrukte wie die Konstruktion endlicher Körper als Quotientenringe von Polynomringen.</p>	<p>Geometrische Konstruktionsschriften, Konkret durchgeführte geometrische Konstruktionen</p>	<p>(01-01-01)</p>  <p>(22-01-01)</p>
<p>Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln</p>	<p>Segmente, in denen Gleichungen und Gleichungssysteme aufgestellt und behandelt sowie gelöst werden. Auch die implizite Form als Matrizen bzw. Matrizenrechnung wird codiert.</p>	<p>Äquivalenzumformungen von Gleichungen, Termumformungen, Lösungsverfahren quadratischer Gleichungen, Matrizenrechnung</p>	<p>(04-01-02)</p> $x^2 + 10x = x^2 + 10x + 25 - 25 = (x + 5)^2 - 25 = 39$ $\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 64$ $\Leftrightarrow x + 5 = \pm 8$ <p>(07-01-02)</p> $\Rightarrow \text{Mittelwertsatz: } x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 39}}{2 \cdot 1}$ $\Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -8$ <p>Für einen Punkt gilt in Normalform: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$</p> <p>Damit gilt: $(x_1 \ x_2 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$</p> <p>Zudem: $\det A = 0$</p> <p>(03-02-02)</p>

243	Grenz- und Extrempunkte betrachten	Segmente, in denen das Verhalten von mathematischen Objekten an Grenzpunkten untersucht wird.	<p>(09-02-03)</p> <p>Hypotenuse \rightarrow Annäherung zu $\sqrt{10}$</p> <p>Sieht so aus als wäre das Paar schneidende Geraden der Grenzfall zu den Hypotenusen bzw. die X-Geraden sind der Fall in dem sich die Geraden dann doch schneiden und nicht nur annähern</p> <p>(13-02-03)</p>
244	Zerlegen und Ergänzen	<p>Segmente, in denen das mathematische Prinzip der Zerlegungs- oder Ergänzungäquivalenz für geometrische Figuren ausgenutzt wird. Das Zerlegen eines mathematischen Problems in Teilprobleme wird nicht codiert (stattdessen <i>Teilschritte und -ziele aufstellen</i>). Auch Äquivalenzumformungen an Gleichungen werden nicht codiert (stattdessen <i>Gleichungen und Gleichungssysteme behandeln</i>). Es wird sich hier auf die geometrische Komponente von Zerlegungs- und Ergänzungäquivalenz beschränkt.</p>	<p>(22-01-03)</p>  <p>Hypotenuse: Bei der Hypotenuse müssen wir die zwei Geraden am Schnittpunkt trennen und auseinander legen.</p>
300	Reflexion und Einordnung	<p>Segmente, in denen bereits durchgeführte Schritte und deren Ergebnisse behandelt und bewertet werden. Es sind damit keine reinen Aufzählungen von Ergebnissen gemeint. Sie beinhalten stattdessen selbst eine kognitive Leistung durch bspw. Bewertung, Verortung oder Interpretation.</p>	
310	Einordnung von Ergebnissen	<p>Segmente, in denen rückblickend auf erzielte Ergebnisse und getroffene Aussagen eingegangen wird. Dabei sind insbesondere fachliche Einschränkungen, Kontrollen und weiterführende fachliche Fragen gemeint.</p>	
311	Einschränkungen und Probleme aufzählen	<p>Segmente, in denen die Gültigkeit einer vorher getroffenen Aussage eingeschränkt oder Probleme beim formalen Vorgehen beanstandet werden.</p>	<p>"Die Konstruktion einer dritten Wurzel ist nicht möglich." (03-01-01)</p> <p>(08-01-04)</p>
312	Ergebnisse kontrollieren	<p>Segmente, in denen getroffene Aussagen explizit kontrolliert werden. Typischerweise erfolgt dies durch Einsetzen konkreter Zahlen. Insbesondere muss aber bereits eine getroffene Aussage vorhanden sein (die möglicherweise danach verworfen werden kann). Ansonsten wird mit Konkretes (Zahlen-)Beispiel angeben oder Einzel- und Spezialfälle betrachten codiert.</p>	<p>"Kontrolle: ...",</p> <p>"Ich kontrolliere das Ergebnis durch ..."</p> <p>Problem: nicht mathematisch sein $(0,1,0,0) - (0,0,1,1) = (0,0,0,0)$ $\neq 0$</p> <p>liegt links auf K_{quad} ab. $x^2 + 2 = 2$, hier, $(-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2$ ✓</p> <p>$\sqrt{3^2} = 1(0,3) = 10 - 13 + 30$ <i>pass aber!</i></p> <p>Test: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \\ f \end{pmatrix}$ (11-01-04)</p>
313	(Verallgemeinernde) Hypothesen, Auffälligkeiten und Folgefragen	<p>Segmente, in denen über ein erzieltes Ergebnis hinaus gedacht wird. Dabei kann eine Verallgemeinerung des Ergebnisses angestrebt oder Folgefragen formuliert werden. Auch die Notation von besonderen fachlichen Auffälligkeiten in den Resultaten werden codiert.</p>	<p>"Es fällt auf, dass nur bei der Addition eine Unterscheidung vorgenommen werden muss. Bei den drei anderen Grundrechenarten ergibt sich für $a < b$ und $a > b$ die gleichen Rechenvorschriften." (02-01-03)</p> <p>"Auch das Multiplizieren mit negativen Zahlen ist hier möglich, was einen Vorteil im Vergleich zur Methode vom Anfang darstellt" (05-01-01)</p>

320	Personenbezogene Überlegungen	Segmente, in denen über das eigene Vorgehen und die eigene Befindlichkeit reflektiert wird. Hier sind insbesondere intuitive und nicht unbedingt fachlich begründete Gedanken miteinbezogen.		
321	Eigenes Vorgehen bewerten	Segmente, in denen das eigene Vorgehen hinsichtlich seiner Korrektheit bewertet wird. Auch der Bezug zu Themen wie Eleganz und Nützlichkeit des Vorgehens kann thematisiert werden.		"[...] da ich gefühlt an sehr vielen Stellen mir das [L]eben zu einfach mache und einige Begründungen viel zu unsauber wirken." (01-01-03)
322	Emotionale Äußerung	Segmente, in denen über die eigene Zufriedenheit mit dem Vorgehen und den Ergebnissen gesprochen wird. Auch die Thematisierung von bspw. Freude, Aufregung oder Frust bei der Bearbeitung wird codiert.	Äußerung zur Zufriedenheit, Beschreibung von Freude, Angst und anderen Emotionen	"Diese Methode fand ich affengeil, [...]" (01-01-01) "Spannend wird nun die Multiplikation." (01-01-03) "Hier habe ich länger gestockt und bin immer noch nicht zufrieden." (01-01-03)

C.2. Evaluative Inhaltsanalyse

Evaluative Analyse

Die Merkmalsdimensionen der evaluativen sind durch die Subkategorie-Gruppen der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse vorgegeben. Eine ausführliche Beschreibung entsteht durch die Definitionen der jeweils untergeordneten Subkategorien aus dem Codierleitfaden der inhaltlich-strukturierenden Inhaltsanalyse.

Die acht Merkmalsdimensionen der evaluativen Analyse sind:

- **Äußere Form und Dokumentation:** Schritte, die sich der übersichtlichen und anschaulichen äußeren Darstellungsform der Dokumentation widmen.
- **Überlegungen zum Vorgehen:** Schritte, in denen das eigene Vorgehen geplant und vorbereitet wird.
- **Allgemeinere mathematische Techniken:** Schritte, die durch allgemeingültige Techniken aus der Mathematik geprägt sind. Darunter fallen insbesondere elementare Typen der Beweisführung und andere mathematische Techniken, die nicht klassisch an ein deutlich eingegrenztes Fachgebiet gebunden sind.
- **Beispielgebundenes Vorgehen:** Schritte, die sich an Beispielen und konkreteren Einzel- oder Spezialfällen orientieren.
- **Externe Hilfsmittel heranziehen:** Schritte, in denen externe Hilfsmittel verwendet wurden. Als externes Hilfsmittel sind hier insbesondere andere Lernende oder Lehrende sowie Internetquellen und Literatur, aber auch rechnergestützte Hilfsmittel zu nennen.
- **Problemspezifische fachmathematische Techniken:** Segmente, in denen speziellere Techniken aus bspw. Kleinere Fachgebieten der Mathematik verwendet wurden. Diese Techniken zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass sie kein allgemeines Lösungsverfahren oder einen elementaren Beweistyp für beliebige mathematische Probleme darstellen, sondern problemspezifisch ausgewählt werden müssen.
- **Einordnung von Ergebnissen:** Segmente, in denen rückblickend auf erzielte Ergebnisse und getroffene Aussagen eingegangen wird. Dabei sind insbesondere fachliche Einschränkungen, Kontrollen und weiterführende fachliche Fragen gemeint.
- **Personenbezogene Überlegungen:** Segmente, in denen über das eigene Vorgehen und die eigene Befindlichkeit reflektiert wird. Hier sind insbesondere intuitive und nicht unbedingt fachlich begründete Gedanken miteinbezogen.

Die Ausprägungen werden jeweils wie folgt codiert:

- **Keine Ausprägung (0):** Bearbeitungen, in denen entsprechende Arbeitsweisen gar nicht auftreten.
- **Geringe Ausprägung (1):** Bearbeitungen, in denen entsprechende Arbeitsweisen nur selten vereinzelt und/oder willkürlich auftreten.
- **Mittlere Ausprägung (2):** Bearbeitungen, in denen entsprechende Arbeitsweisen zwar häufiger und womöglich regelmäßig, aber nicht flächendeckend auftreten.
- **Hohe Ausprägung (3):** Bearbeitungen, in denen entsprechende Arbeitsweisen flächendeckend und auch vielfältig auftreten.

Literatur

- ABLEITINGER, C., & HERRMANN, A. (2013). Das Projekt „Mathematik besser verstehen“. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- ABLEITINGER, C., KRAMER, J., & PREDIGER, S. (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum.
- ÁLVAREZ, J. A. M., ARNOLD, E. M., BURROUGHS, E. A., FULTON, E. W., & KERCHER, A. (2020). The design of tasks that address applications to teaching secondary mathematics for use in undergraduate mathematics courses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60.
- ARTIGUE, M. (2001). What Can We Learn from Educational Research at the University Level? In D. HOLTON (Hrsg.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. Kluwer.
- ARTZ, R. E. (2009). *Scalar algebras and quaternions: an approach based on the algebra and topology of finite-dimensional real linear spaces, Part 1*. <https://www.math.cmu.edu/~wn0g/noll/qu1.pdf>
- BAEZ, J. C. (2004). Review on: On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic and Symmetry by CONWAY, J. C. & SMITH, D. A. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 61(1).
- BARTLETT, F. C. (1958). *Thinking. An experimental and social study*. Basic Books.
- BARZEL, B., BÜCHTER, A., & LEUDERS, T. (2022). *Mathematik Methodik* (11. Aufl.). Cornelsen.
- BAUER, T. (2013a). *Analysis-Arbeitsbuch: Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen*. Springer Spektrum.
- BAUER, T. (2013b). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. ABLEITINGER, J. KRAMER & S. PREDIGER (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum.
- BAUER, T., & HEFENDEHL-HEBEKER, L. (2019). *Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-26682-0>

Literatur

- BAUSCH, I., BIEHLER, R., BRUDER, R., FISCHER, P. R., HOCHMUTH, R., KOEPF, W., SCHREIBER, S., & WASSONG, T. (2013). *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- BAUSCH, I., FISCHER, P. R., & OESTERHAUS, J. (2013). Facetten von Blended Learning Szenarien für das interaktive Lernmaterial VEMINT — Design und Evaluationsergebnisse an den Partneruniversitäten Kassel, Darmstadt und Paderborn. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- BAYERISCHE STAATSKANZLEI. (n. d.). Ordnung der Ersten Prüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen. https://www.gesetze-bayern.de/Content/Document/BayLPO_I
- BERGER, M., & SCHWENK, A. (2006). Zwischen Wunsch und Wirklichkeit: Was können unsere Studienanfänger? *Die neue Hochschule*, 2.
- BESSER, M., LEISS, D., & BLUM, W. (2015). Theoretische Konzeption und empirische Wirkung einer Lehrerfortbildung am Beispiel des mathematischen Problemlösens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36.
- BEUTELSPACHER, A., DANCKWERTS, R., NICKEL, G., SPIES, S., & WICKEL, G. (2011). *Mathematik neu denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Vieweg + Teubner.
- BIEHLER, R., BRUDER, R., REINHARD, H., KOEPF, W., BAUSCH, I., FISCHER, P. R., & WASSONG, T. (2013). VEMINT – Interaktives Lernmaterial für mathematische Vor- und Brückenkurse. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- BIEHLER, R., EICHLER, A., HOCHMUTH, R., RACH, S., & SCHAPER, N. (2021). *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik*. Springer Spektrum.
- BIKNER-AHSBAHS, A., & SCHÄFER, I. (2013). Ein Aufgabenkonzept für die Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik. In C. ABLEITINGER, J. KRAMER & S. PREDIGER (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum.
- BOMKE, C., & REITMAIER-KREBS, M. (2017). Begleitforschung zum Brückenkurs Mathematik 2016 und 2017. https://www.th-deg.de/Weiterbildung/DEGDLM1/Evaluationsbericht%20Br%C3%BCckenkurse%20Mathematik%202016_2017.pdf
- BORNKESSEL, P., & ASDONK, J. (2011). *Der Übergang Schule – Hochschule*. VS.
- BOSCH, S. (2008). *Lineare Algebra* (4. Aufl.). Springer.
- BOSCH, S. (2009). *Algebra* (7. Aufl.). Springer.

- BOURNE, L. E., EKSTRAND, B. R., & DOMINOWSKI, R. L. (1971). *The psychology of thinking*. Prentice-Hall.
- BREIDENBACH, D., DUBINSKY, E., HAWKS, J., & NICHOLS, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (3).
- BRUDER, R. (1988). *Grundfragen mathematikmethodischer Theoriebildung unter besonderer Berücksichtigung des Arbeitens mit Aufgaben*. Habilitationsschrift.
- BRUDER, R. (2000). Problemlösen im Mathematikunterricht – ein Lernangebot für alle? *Mathematische Unterrichtspraxis*, 1.
- BRUDER, R., & COLLET, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Cornelsen Scriptor.
- BRUNER, J. S., OLVER, R. R., & GREENFIELD, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Klett.
- BUCHMANN, A. (2009). *A Brief History of Quaternions and the Theory of Holomorphic Functions of Quaternionic Variables*. Schmid College of Science, Chapman University.
- BUSCHHÜTER, D., SPODEN, C., & BOROWSKI, A. (2016). Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten von Physikstudierenden zu Studienbeginn. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 22 (1).
- CAO, Y. (2024). *Students' Collaborative Problem Solving in Mathematics Classrooms*. Springer.
- CEDERBAUM, C., & HILKEN, L. (2022). *Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen: ein Hands-on-Seminar für Lehramtsstudierende* (V. ISAEV, A. EICHLER & F. LOOSE, Hrsg.). Springer Spektrum.
- CLARK, M., & LOVRIC, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology*, 40 (6).
- CONWAY, J. C., & SMITH, D. A. (2003). *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic and Symmetry*. AK Peters/CRC Press.
- DANCKWERTS, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“! In C. ABLEITINGER, J. KRAMER & S. PREDIGER (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum.
- de GUZMÁN, M., HODGSON, B. R., ROBERT, A., & VILLANI, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta Mathematica, Extra Volume ICM III*.
- DEPAEPE, F., VERSCHAFFEL, L., & KELCHTERMANS, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded

- mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.03.001>
- DI MARTINO, P., & GREGORIO, F. (2019). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. *International journal of science and mathematics education*, 17 (4).
- DI MARTINO, P., GREGORIO, F., & IANNONE, P. (2023). The transition from school to university in mathematics education research: new trends and ideas from a systematic literature review. *Educational studies in mathematics*, 113 (1).
- DIETER, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren*. Universität Duisburg-Essen.
- DIETER, M., & TÖRNER, G. (2012). Vier von fünf geben auf. Studienabbruch und Fachwechsel in der Mathematik. *Forschung & Lehre*, 10.
- DORIER, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic.
- DÖRNER, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (2. Aufl.). Kohlhammer.
- DUNCKER, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Julius Springer.
- EICHLER, A., & ISAEV, V. (2017). Disagreements between mathematics at university level and school mathematics in secondary teacher education. In R. GÖLLER, R. BIEHLER, R. HOCHMUTH & H.-G. RÜCK (Hrsg.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*. Universität Kassel.
- EICHLER, A., & ISAEV, V. (2022). Improving Prospective Teachers' Beliefs About a Double Discontinuity Between School Mathematics and University Mathematics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44.
- EICHLER, A., RATHGEB-SCHNIERER, E., & WEBER, T. (2022). *Mathematik erleben um zu lernen – das Erkundungskonzept für die Vorlesung Arithmetik und Geometrie im Lehramtsstudium für die Grundschule* (V. ISAEV, A. EICHLER & F. LOOSE, Hrsg.). Springer Spektrum.
- EVEN, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: practitioners' views. *ZDM Mathematics Education*, 43.
- FISCHER, A. (2013). Anregungen mathematischer Erkenntnisprozesse in Übungen. In C. ABLEITINGER, J. KRAMER & S. PREDIGER (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum.
- FLICK, U. (2019). *Qualitative Sozialforschung* (9. Aufl.). Rowohlt.
- FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe – Band 1*. Klett.
- FRISCHEMEIER, D., PANSE, A., & PECHER, T. (2015). Schwierigkeiten von Studienanfänger*innen bei der Bearbeitung mathematischer Übungsaufgaben. In A. HOPPENBROCK,

- R. BIEHLER, R. HOCHMUTH & H.-G. RÜCK (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Springer Spektrum.
- FUNKE, J. (1990). Probleme komplexer Problemlöseforschung. In R. FISCH, M. BOOS & K. LÜSCHER (Hrsg.), *Vom Umgang mit Komplexität in Organisationen: Konzepte – Fallbeispiele – Strategien*. Universitätsverlag Konstanz.
- FUNKE, J. (2003). *Problemlösendes Denken*. Kohlhammer. <https://doi.org/10.11588/diglit.18679>
- GALLIN, P. (2010). Mathematik als Geisteswissenschaft. In M. HELMERICH, K. LENGNICK, G. NICKEL & M. RATHGEB (Hrsg.), *Mathematik verstehen: Philosophische und didaktische Perspektiven* (S. 105–116). Vieweg+Teubner Verlag.
- GILDEHAUS, L., & LIEBENDÖRFER, M. (2021). „I don't need this“ – Understanding preservice teachers disaffection in mathematics. In M. INPRASITHA, N. CHANGSRI & N. BOONSENA (Hrsg.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.
- GLASER, B. G., & STRAUSS, A. L. (2010). *Grounded Theory: Strategien qualitativer Forschung*. Huber.
- GLÄSER-ZIKUDA, M., & MAYRING, P. (2008). *Die Praxis der Qualitativen Inhaltsanalyse* (2. Aufl.). Beltz Verlagsgruppe.
- GRIESER, D. (2014). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studieneingangsphase. In J. ROTH, T. BAUER, H. KOCH & S. PREDIGER (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik*. Springer Spektrum.
- GROEBEN, N., & RUSTEMEYER, R. (1995). Inhaltsanalyse. In E. KÖNIG & P. ZEDLER (Hrsg.), *Bilanz qualitativer Forschung, Bd. 2: Methoden, Eckard König*. Deutscher Studien Verlag.
- GRUBER, H., SCHEUMANN, M., & KRAUSS, S. (2015). Intelligenz und Vorwissen. In D. URHAHNE, M. DRESEL & F. FISCHER (Hrsg.), *Psychologie für den Lehrberuf*. Springer.
- GRUBER, H., & STAMOULI, E. (2015). Intelligenz und Vorwissen. In E. WILD & H. MÖLLER (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie*. Springer.
- GRUNENBERG, H. (2001). *Die Qualität qualitativer Forschung: Eine Metaanalyse erziehungs- und sozialwissenschaftlicher Forschungsarbeiten*. Philipps-Universität Marburg.
- GRÜNER, F. (2011). *Lernstrategien und Prüfungsangst bei Studierenden der Studiengänge Humanmedizin und Lehramt*. Universität Würzburg.
- GÜNER, P., & NUR ERBAY, H. (2021). Metacognitive Skills and Problem-Solving. *International Journal of Research in Education and Science*, 7 (3). <https://doi.org/10.46328/ijres.1594>

Literatur

- HAASE, D. (2013). Studieren im MINT-Kolleg Baden-Württemberg. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- HALVERSCHEID, S., KERSTEN, I., & SCHMIEDT-THIEME, B. (2022). *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung*. Springer Spektrum.
- HALVERSCHEID, S., PUSTELNIK, K., SCHNEIDER, S., & TAAKE, A. (2013). Ein diagnostischer Ansatz zur Ermittlung von Wissenslücken zu Beginn mathematischer Vorkurse. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- HAMANN, T., KREUZKAM, S., SCHMIDT-THIEME, B., & SANDER, J. (2013). „Was ist Mathematik?“ Einführung in mathematisches Arbeiten und Studienwahlüberprüfung für Lehramtsstudierende. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- HAMMERSLEY, M. (1992). *What's wrong with ethnography? Methodological explorations*. Routledge.
- HASDORF, W. (1976). Erscheinungsbild und Entwicklung der Beweglichkeit des Denkens bei älteren Vorshculkindern. In J. LOMPSCHER (Hrsg.), *MVerlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit*. Volk und Wissen.
- HEFENDEHL-HEBEKER, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. ABLEITINGER, J. KRAMER & S. PREDIGER (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum.
- HEINZE, A., DREHER, A., LINDMEIER, A., & NIEMAND, C. (2016). Akademisches versus schulbezogenes Fachwissen – ein differenzierteres Modell des fachspezifischen Professionswissens von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 19(2). <https://doi.org/10.1007/s11618-016-0674-6>
- HEROLD-BLASIUS, R. (2021). *Problemlösen mit Strategieschlüsseln: Eine explorative Studie zur Unterstützung von Problembearbeitungsprozessen bei Dritt- und Viertklässlern*. Springer Spektrum.
- HEUBLEIN, U., HUTZSCH, C., & SCHMELZER, R. (2022). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland. *DZHW Brief*, 5.
- HEUBLEIN, U., RICHTER, J., & SCHMELZER, R. (2020). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland. *DZHW Brief*, 3.

- HEUBLEIN, U., RICHTER, J., SCHMELZER, R., & SOMMER, D. (2014). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012. *Forum Hochschule*, 4.
- HIEN, M. (2021). *Algebra*. Springer Spektrum.
- HOCHMUTH, R., BIEHLER, R., LIEBENDÖRFER, M., & SCHAPER, N. (2023). *Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen*. Springer Spektrum.
- HOLZÄPFEL, L., LACHER, M., LEUDERS, T., & ROTT, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen*. Kallmeyer.
- HOTH, J., JESCHKE, C., DREHER, A., LINDMEIER, A., & HEINZE, A. (2020). Ist akademisches Fachwissen hinreichend für den Erwerb eines berufsspezifischen Fachwissens im Lehramtsstudium? Eine Untersuchung der Trickle-down-Annahme. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00152-0>
- HOYLES, C., NEWMAN, K., & NOSS, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (6).
- HUBERMANN, A. M., & MILES, M. B. (2002). *The Qualitative Researcher's Companion*. Sage.
- HUSSY, W. (1984). *Denkpsychologie*. Kohlhammer.
- HWĀRIZMĪ, M. I.-M. a. (1989). *al- Khwārazmī's Algebra* (F. ROSEN & A. SAYILI, Hrsg.). Pakistan Hijra Council.
- ISAEV, V. (2021). *Beliefs von Lehramtsstudierenden zur doppelten Diskontinuität*. <https://doi.org/10.17170/kobra-202207226504>
- ISAEV, V., & EICHLER, A. (2022). Der Fragebogen zur doppelten Diskontinuität. In S. HALVERSCHEID, I. KERSTEN & B. SCHMIDT-THIEME (Hrsg.), *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung: Analyse, Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen*. Springer Spektrum.
- ISAEV, V., EICHLER, A., & BAUER, T. (2022). Wirkung von Schnittstellenaufgaben auf die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur doppelten Diskontinuität. In V. ISAEV, A. EICHLER & F. LOOSE (Hrsg.), *Professionsorientierte Fachwissenschaft*. Springer Spektrum.
- ISAEV, V., EICHLER, A., & LOOSE, F. (2021). *Professionsorientierte Fachwissenschaft*. Springer Spektrum.
- ISB. (n.d. a). LehrplanPLUS: Fachlehrplan Gymnasium Mathematik. https://www.lehrplanplus.bayern.de/schulart/gymnasium/inhalt/fachlehrplaene?w_schulart=gymnasium&wt_1=schulart&w_fach=mathematik&wt_2=fach
- ISB. (n.d. b). LehrplanPLUS: Fachprofil Gymnasium Mathematik. <https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/gymnasium/mathematik>

Literatur

- KAJANDER, A., & LOVRIC, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36 (2–3).
- KARPFINGER, C., & MEYBERG, K. (2017). *Algebra: Gruppen – Ringe – Körper* (4. Aufl.). Springer Spektrum.
- KASCH, F., & PAREIGIS, B. (1991). *Grundbegriffe der Mathematik* (4. Aufl.). Reinhard Fischer.
- KIRSTEN, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten*. Springer Spektrum.
- KLEIN, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus 1: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Teubner.
- KLEIN, F. (1968). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus 1: Arithmetik, Algebra, Analysis* (Nachdruck der 4. Aufl.). Springer.
- KLIX, F. (1971). *Information und Verhalten: Kybernetische Aspekte der organismischen Informationsverarbeitung*. Hans Huber.
- KMK. (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>
- KÖHLER, W. (1921). *Intelligenzprüfungen an Menschenaffen* [Neudruck 1963]. Springer.
- KOLTER, J., LIEBENDÖRFER, M., & SCHUKAJLOW, S. (2015). Mathe — nein danke? Interesse, Beliefs und Lernstrategien im Mathematikstudium bei Grundschullehrerstudierenden mit Pflichtfach. In A. HOPPENBROCK, R. BIEHLER, R. HOCHMUTH & H.-G. RÜCK (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Springer Spektrum.
- KRACAUER, S. (1952). The Challenge of Qualitative Content Analysis. *Public Opinion Quarterly*, 16(4). <https://doi.org/10.1086/266427>
- KREH, M., NOLTING, D., & de WILJES, J.-H. (2021). Der Grundlagentest als Teil des Projekts HiStEMa — Eine Studienleistung als studienbegleitende Maßnahme zur Grundlagensicherung. In B. GIRNAT (Hrsg.), *Mathematik lernen mit digitalen Medien und forschungsbezogenen Lernumgebungen*. Springer Spektrum.
- KRICHEL, K. (2017). *Problemlösen, Heuristik und Geometrie: zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe, Band A. Heute und Morgen*. Bergische Universität Wuppertal.
- KUCKARTZ, U., & RÄDIKER, S. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse* (5. Aufl.). Beltz Juventa.

- KÜHNEL, W., & WALCHER, S. (2017). Die Lücke in Mathematik zwischen Schule und Hochschule Anspruch und Wirklichkeit von Bildungsreformen. *Mitteilungen der DMV, 25 (3)*.
- LEUDERS, T. (2016). *Erlebnis Algebra*. Springer Spektrum.
- LEUDERS, T. (2020). *Mathematik Didaktik* (9. Aufl.). Cornelsen.
- LIEBENDÖRFER, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Springer Spektrum.
- LIEBENDÖRFER, M., & OSTSEKER, L. (2013). Mathematik als Werkzeug: Sicht- und Arbeitsweisen von Studierenden am Anfang ihres Mathematikstudiums. In T. WASSONG, D. FRISCHEMEIER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH & P. BENDER (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics*. Springer Spektrum.
- LÜER, G., & SPADA, H. (1990). Denken und Problemlösen. In H. SPADA (Hrsg.), *Lehrbuch Allgemeine Psychologie*. Hans Huber.
- MAYRING, P. (1985). Qualitative Inhaltsanalyse. In G. JÜTTEMANN (Hrsg.), *Qualitative Forschung in der Psychologie: Grundfragen, Verfahrensweisen, Anwendungsfelder* (S. 187–211). Beltz.
- MAYRING, P. (2019). Qualitative Inhaltsanalyse – Abgrenzungen, Spielarten, Weiterentwicklungen. *Forum Qualitative Sozialforschung, 20(3)*. <https://doi.org/10.17169/FQS-20.3.3343>
- MAYRING, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse* (13. Aufl.). Beltz Verlagsgruppe.
- MAYRING, P., & FENZL, T. (2019). Qualitative Inhaltsanalyse. In N. BAUR & J. BLASIUS (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 633–648). Springer Fachmedien Wiesbaden.
- MILES, M. B. (2019). *Qualitative Data Analysis* (4. Aufl.). Sage.
- MILLER, G. A., GALANTER, E., & PRIBRAM, K. H. (1960). *Plans and the structure of behavior*. Holt, Rinehart & Winston.
- NEUGEBAUER, M., HEUBLEIN, U., & DANIEL, A. (2019). Studienabbruch in Deutschland: Ausmaß, Ursachen, Folgen, Präventionsmöglichkeiten. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 22*.
- NEWELL, A., & SIMON, H. A. (1972). *Human problem solving* (4. Aufl.). Prentice Hall.
- OLDENBURG, R., & SCHLOTTERER, A. (2022). *(Analysis-)Ausbildung im Lehramt: Fachliche und didaktische Aspekte* (V. ISAEV, A. EICHLER & F. LOOSE, Hrsg.). Springer Spektrum.
- ORTON, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. *Educational studies in mathematics, 14 (3)*.
- PADBERG, F., & WARTHA, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5.). Springer Spektrum.

- PARAVICINI, W. (2013). Fünftsemester als Mentoren für Erstsemester. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- PHONAPICHAT, P., WONGWANICH, S., & SUJIVA, S. (2014). An Analysis of Elementary School Students' Difficulties in Mathematical Problem Solving. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 116.
- PÓLYA, G. (1988). *Mathematik und plausible Schliessen Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik* (3. Aufl.). Birkhäuser.
- PÓLYA, G. (1995). *Schule de Denkens: Vom Lösen mathematischer Aufgaben* (4. Aufl.). Francke.
- PÓLYA, G. (2004). *How to Solve It* (2. Aufl.). Princeton Science Library.
- PREDIGER, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. ABLEITINGER, J. KRAMER & S. PREDIGER (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum.
- REICHERSDORFER, E., UFER, S., LINDMEIER, A., & REISS, K. (2013). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- REITMAIER-KREBS, M. (2016). Begleitforschung zum Brückenkurs Mathematik 2015. <https://www.th-deg.de/Weiterbildung/DEGDLM1/Evaluationsbericht%20Br%C3%BCckenkurs%20Mathematik%202015.pdf>
- RIEDL, L., ROST, D., & SCHORNER, E. (2013). Brückenkurs für Studierende des Lehramts and Grund-, Haupt- oder Realschulen der Ludwig-Maximilians-Universität München. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- ROEGNER, K., SEILER, R., & TIMMRECK, D. (2013). E-xploratives Lernen an der Schnittstelle Schule/Hochschule. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- ROSENTHAL, G. (2015). *Interpretative Sozialforschung* (5. Aufl.). Beltz Juventa.
- RÖSSLER, P. (2010). Inhaltsanalyse. *EEO Enzyklopädie Erziehungswissenschaft Online*, 1–25. <https://doi.org/10.3262/EEO07100149>
- ROTT, B. (2013a). *Mathematisches Problemlösen*. WTM.

- ROTT, B. (2013b). Process regulation in the problem-solving processes of fifth graders. *CEPS Journal*, 3 (4).
- RUF, U., KELLER, S., & WINTER, F. (2008). *Besser lernen im Dialog: Dialogisches Lernen in der Unterrichtspraxis*. Kallmeyer und Klett.
- SALDAÑA, J. (2021). *The Coding Manual für Qualitative Researchers* (4. Aufl.). Sage.
- SCHADL, C., RACHEL, A., & UFER, S. (2019). Stärkung des Berufsfeldbezugs im Lehramtsstudium Mathematik: Maßnahmen im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung der LMU München. *Mitteilungen der GDM*, 107.
- SCHNEIDER, W. (2015). *Analytische Geometrie*. Shaker.
- SCHOENFELD, A. H. (1992). *Mathematical problem solving* (3. Aufl.). Acad. Pr.
- SCHREIBER, A. (2014). Heuristik; Kunst des Problemlösens. <http://www.alfred-schreiber.de/g-mathematik/materialien/didmath-5.pdf>
- SCHREIER, M. (2014). Varianten qualitativer Inhaltsanalyse: Ein Wegweiser im Dickicht der Begrifflichkeiten. *Forum Qualitative Sozialforschung*, 15(1). <https://doi.org/10.17169/fqs-15.1.2043>
- SCHÜTZ, A. (1972). *Gesammelte Aufsätze*. Nijhoff.
- SCHWARZ, W. (2018). *Problemlösen in der Mathematik: Ein heuristischer Werkzeugkasten*. Springer Spektrum.
- SEALE, C. (1999). Quality in Qualitative Research. *Qualitative Inquiry*, 5(4).
- SIMON, H. A. (1955). A behavioral model of rational choice [reprinted in CPI 6(1) 2010]. *Quarterly Journal of Economics*, 69.
- SÖHLING, A.-C. (2017). *Problemlösen und Mathematiklernen: Zum Nutzen des Probierens und des Irrtums*. Springer Spektrum.
- SOSNOVSKY, S., DIETRICH, M., ANDRÈS, E., & GOGUADZE, G. (2013). Math-Bridge: Adaptive Plattform für mathematische Brückenkurse. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- SPIEGEL. (2009). „Wer rechnen kann, ist tüchtiger im Leben“ [Interview geführt von H. DAMBECK]. https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/mathe-stiftung-gegruendet-wer-rechnen-kann-ist-tuechtiger-im-leben-a-658978.html?sara_ref=re-xx-cp-sh
- STAMANN, C., JANSSEN, M., & SCHREIER, M. (2016). Qualitative Inhaltsanalyse — Versuch einer Begriffsbestimmung und Systematisierung. *Forum Qualitative Sozialforschung*, 17(3). <https://doi.org/10.17169/fqs-17.3.2581>
- STEINBAUER, R., SÜSS-STEPANCIK, E., & SCHICHL, H. (2013). Einführung in das mathematische Arbeiten – der Passage-Point an der Universität Wien. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF,

- S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- STENZEL, T. (2022). *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase: Untersuchung von Bearbeitungsprozessen typischer Übungsaufgaben und zyklische Entwicklung einer Fördermaßnahme im Rahmen vorlesungsbegleitender Übungen*. Springer Spektrum.
- STEWART, I. (1990). *Mathematik: Probleme – Themen – Fragen*. Birkhäuser.
- STILLER, D. (2017). *Problemlösen, Heuristik und Geometrie: zwei Konzepte für einen neuen Mathematikunterricht der Orientierungsstufe, Band B. Gestern und Übermorgen*. Bergische Universität Wuppertal.
- STILLER, D., KRICHEL, K., & SCHWARZ, W. (2021). *Heuristik im Mathematikunterricht*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-63752-4>
- STRAUSS, A. L., & CORBIN, J. (2010). *Grounded Theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Beltz.
- UHLENDORFF, H., & PRENGEL, A. (2013). Forschungsperspektiven quantitativer Methoden im Verhältnis zu qualitativen Methoden. In B. FRIEBERTSHÄUSER, A. LANGER & A. PRENGEL (Hrsg.), *Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft* (S. 137–149). Juventa.
- URHAHNE, D., DRESEL, M., & FISCHER, F. (2019). *Psychologie für den Lehrberuf*. Springer.
- WAGENER, D. (2001). *Psychologische Diagnostik mit komplexen Szenarios*. Pabst.
- WASSERMANN, N., WEBER, K., VILLANUEVA, M., & MEJIA-RAMOS, J. P. (2018). Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50.
- WEBER, B.-J., HEINZE, A., & LINDMEIER, A. (2024). Welchen Effekt haben Lehraufgaben auf die Wahrnehmung von Studierenden zur doppelten Diskontinuität? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 45.
- WEIGAND, H.-G., SCHÜLER-MEYER, A., & PINKERNELL, G. (2022). *Didaktik der Algebra. Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath* (4., vollst. überarb. Aufl.). Springer Spektrum.
- WEINERT, F. E. (2013). Concept of competence: A conceptual clarification (D. S. RYCHEN & L. H. SALGANIK, Hrsg.). *Defining and selecting key competencies*, 45–65.
- WEINHOLD, C. (2013). Wiederholungs- und Unterstützungskurse in Mathematik für Ingenieurwissenschaften an der TU Braunschweig. In I. BAUSCH, R. BIEHLER, R. BRUDER, P. R. FISCHER, R. HOCHMUTH, W. KOEPF, S. SCHREIBER & T. WASSONG (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Springer Spektrum.
- WERTHEIMER, M. (1920). *Über Schlussprozesse im produktiven Denken*. De Gruyter.
- WERTHEIMER, M. (1945). *Productive thinking*. Harper.

- WILD, K.-P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 23 (2).
- WINTER, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4(2). <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>
- WINTER, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* (3. Aufl.). Springer Spektrum.
- WOLCOTT, H. F. (1994). *Transforming Qualitative Data: Description, Analysis, and Interpretation*. Sage.
- ZAZKIS, D., WEBER, K., & MEJIA-RAMOS, J. P. (2015). Two proving strategies of highly successful mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39.
- ZAZKIS, R., & LEIKIN, R. (2010). Advanced Mathematical Knowledge in Teaching Practice: Perceptions of Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12 (4).