



**Persi Diaconis und Jason Fulman: The mathematics of shuffling cards. (Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) 2023, 346 Seiten, ISBN: 978-1-4704-6303-8/pbk; 978-1-4704-7290-0/ebook)**

**Dominik Schmid**

Angenommen: 29. Juli 2024 / Online publiziert: 7. August 2024  
© The Author(s) 2024



„Wie oft muss man ein Kartenspiel mischen, bis es gut genug gemischt ist?“ Das Buch „Die Mathematik des Kartenmischens“ von Persi Diaconis und Jason Fulman hat sich als Ziel gesetzt diese Frage aus einer mathematischen Sichtweise zu beantworten und gleichzeitig einen Einblick in verschiedenste Themen der Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik und Gruppentheorie zu liefern. Das Buch kann hierbei als Lebenswerk zweier herausragender Mathematiker gesehen werden. Persi Diaconis war in den 1960er Jahren als Zauberkünstler aktiv, bevor er seinen Schulabschluss nachholte und sich der Mathematik verschrieb. Bis heute ist er Professor an der Stanford University, wobei er seine herausragenden Fähigkeiten

als Entertainer, der es versteht sein Publikum zu begeistern, stets behalten hat. Zusammen mit seinem Doktoranden Jason Fulman, seinerseits Professor an der University of Southern California und Experte für kombinatorische und algebraische Aspekte in der Theorie des Kartenmischens, haben die beiden Autoren es geschafft ihren Enthusiasmus für die Mathematik des Kartenmischens in einem gemeinsamen faszinierenden Werk festzuhalten.

„Die Mathematik des Kartenmischens“ ist dabei nicht als klassisches Lehrbuch mit einer „Definition – Satz – Beweis – Beispiel“-Struktur zu verstehen. Vielmehr liegt der Fokus auf der Motivation sich mit dem Gebiet mathematisch auseinanderzusetzen.

---

✉ Dominik Schmid

Institut für Angewandte Mathematik, Abt. Wahrscheinlichkeitstheorie, Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Deutschland  
E-Mail: d.schmid@uni-bonn.de

derzusetzen. Die Modellierung des Kartenmischens, die Hauptaussagen zu den beschriebenen Modellen, sowie deren Anwendung auf praktische Beispiele stehen im Vordergrund. Beweise oder Beweisskizzen werden nur an ausgewählten Stellen gegeben. Ein wiederkehrendes Modell ist hierbei der Riffle Shuffle, der sich anschaulich wie folgt beschreiben lässt: man nehme ein Kartendeck, teile es in zwei ungefähr gleich große Hälften und „riffle“ diese anschließend ineinander. Dessen mathematische Beschreibung durch den Gilbert-Shannon-Reeds Shuffle (GSR Modell) wird unter probabilistischen, kombinatorischen und algebraischen Gesichtspunkten in verschiedenen Kapiteln beleuchtet. Insbesondere wird das bekannte „Seven Shuffle Theorem“ ausführlich diskutiert, welches besagt, dass siebenmal Mischen mit dem Riffle shuffle ausreichend sind bis ein Kartenspiel mit 52 Karten gut genug gemischt ist.

Die inhaltliche Struktur des Buches variiert von modell- zu methodenbezogenen Kapiteln, ergänzt durch spannende Querbezüge zu verschiedenen Gebieten der Mathematik und Anwendungen in der Zauberei. Zentraler Bestandteil ist die mathematische Beschreibung des Kartenmischens anhand konkreter Modelle und Beispiele. Eine anschauliche Visualisierung der wichtigsten Mischtechniken sowie eine historische Einordnung werden in Kapitel 2 gegeben. Der Riffle shuffle (Kapitel 3) und dessen Varianten (Kapitel 7), der Move-To-Front Shuffle (Kapitel 8), der Overhand- Shuffle (Kapitel 13) und der Smooshing Shuffle (Kapitel 14) werden jeweils ausführlich in eigenen Kapiteln behandelt. Eine klassische Einführung zu verschiedenen Beschreibungen der Konvergenzgeschwindigkeit für Markovketten und der Kopplungstechnik findet man in Kapitel 3. Ein Zugang zur Spektraltheorie für Markovketten und Hopf-Algebren wird anschaulich in Kapitel 5 anhand des Spektrums des GSR Modells gegeben.

Besonders hervorzuheben ist Kapitel 4 zu Features von Kartenmisch-Algorithmen, vereinfacht gesagt die Untersuchung bestimmter Teilaspekte des Kartendecks wie beispielsweise nur die Farbe der Karten oder die zugrunde liegende Zyklenstruktur. Dies erlaubt insbesondere einen einfachen Zugang zu aktuellen Forschungsfragen im Bereich des Kartenmischens. Verbindungen zur algebraischen Topologie finden sich in Kapitel 10 sowie zur Theorie der symmetrischen Funktionen in Kapitel 12. Kapitel 6 zeigt eine überraschende Verbindung zwischen dem Riffle shuffle und dem „Rechnen mit Übertrag“ auf. Kapitel 17 gibt einen Ausblick auf Verbindungen zwischen Kartenmischen und Zahlentheorie, genauer gesagt des Riffle-Shuffles zu Werten von Vielfach-Zetafunktionen. Für eine breitere Leserschaft zugänglich sind vor allem Kapitel 7 mit Ausführungen zu „Perfektem Mischen“, bei dem vereinfacht ausgedrückt nur ein ordentliches Mischen imitiert wird, und Kapitel 16 mit Anwendungen aus der Zauberei und praxisorientierten Fragestellungen.

Zu Beginn eines Kapitel steht in der Regel die Frage im Vordergrund, welche Intention mit dem jeweiligen Thema verfolgt werden soll. So wird die Untersuchung von Features zu Beginn von Kapitel 4 beispielsweise wie folgt motiviert: *When we ask people, 'How many times should a deck of cards be mixed?', we sometimes get the answer, 'Doesn't it depend on what game you are playing?' They are right.* Aufgelockert werden die mathematischen Aussagen durch zahlreiche Anekdoten, sei es zur Rolle des Kartenmischens für Casinos, oder über mehrere Dutzend Mathematikstudierende, die die Methode des „Perfekten Mischens“ erlernen möch-

ten. Zahlreiche Simulationsergebnisse, beispielsweise zur Konvergenzgeschwindigkeit verschiedenster Features des GSR Modells, schlagen eine Brücke zwischen einer wahrscheinlichkeitstheoretischen und statistischen Betrachtungsweise und tragen sehr zur Veranschaulichung bei. Eindrucksvoll ist die Wahl der Zielgruppe, die sich nach Angabe der Autoren von mathematisch interessierten Zauberkünstlern bis hin zu Postdoktoranden der Mathematik mit fundierten Kenntnissen in Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik und Gruppentheorie erstreckt. Dies wird vor allem in Kapitel 16 mit konkreten Beispielen für Zaubertricks durch mathematische Prinzipien deutlich, die für ein breites Publikum zugänglich sind, und in dieser Form wohl in keiner anderen mathematischen Lektüre zu finden sein werden. Gleichzeitig werden beispielsweise in Kapitel 9 mit Irrfahrten auf Hyperplane Arrangements, oder in Kapitel 11 mit Type B Shuffles, Themen aktueller mathematischer Forschung behandelt, die selbst für erfahrene Mathematiker neue Einblicke liefern und mit einer Diskussion offener Probleme abgerundet werden. Leider gelingt dieser Spagat zwischen einer Vielfalt an Themen und unterschiedlichen Zielgruppen nicht immer. An einigen Stellen würde man sich als Leser eine Einordnung der präsentierten Methoden wünschen oder eine Bemerkung, worin die Schwierigkeiten im Beweis liegen. Beispielsweise werden in Kapitel 14 die einzelnen Schritte des Smooshing Shuffles ausführlich und anschaulich erklärt. Eine Einordnung, warum sich genau diese Modellierung aber zur Analyse mit mathematischen Methoden, insbesondere der Kopplungstechnik, eignet, wird jedoch nur kurz angerissen und der Leser stattdessen auf weiterführende Literatur verwiesen.

Aufgrund der hohen Anschaulichkeit der Themen ist „Die Mathematik des Kartenmischens“ ein idealer Kandidat für ein Seminar mit Fokus Stochastik für Studierende der Mathematik. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf persönliche Erfahrungen im Rahmen eines Bachelorseminars an der Universität Bonn im Sommersemester 2024, das für Studierende der Mathematik im zweiten Fachsemester angeboten wurde. Die Mehrheit der Kapitel erfordert nur elementare Vorkenntnisse und ist mit einem Grundverständnis an Analysis, linearer Algebra und (nichtmaßtheoretischer) Wahrscheinlichkeitstheorie zugänglich. Auch lassen sich die einzelnen Kapitel größtenteils unabhängig voneinander behandeln. Hierbei sind vor allem Kapitel 8 (Move-To-Front Shuffle), Kapitel 11 (Type B Shuffles), Kapitel 13 (Overhand Shuffles), Kapitel 14 (Smooshing), und Kapitel 15 (Fisher–Yates und Subgroup-Algorithmus) mit konkretem Modell und klaren Hauptaussagen hervorzuheben. Es ist jedoch zu beachten, dass sich der Charakter eines Kapitels schnell ändern kann und somit eine Literaturangabe möglichst präzise erfolgen sollte. Exemplarisch ist hierbei Kapitel 4 (Features) zu nennen. Ab der Mitte von Kapitel 4.6 wird die Vertrautheit des Lesers mit dem RSK-Algorithmus und Grundbegriffen der enumerativen Kombinatorik vorausgesetzt, während die vorangehenden Teile sich nur auf elementare Methoden beziehen. Eine weitere Empfehlung für Lehrende ist den Fokus auf bestimmte Teilaspekte, zum Beispiel die Konvergenzgeschwindigkeit von Kartenmischalgorithmen oder die zu Grunde liegenden algebraischen Strukturen der Modelle, zu legen. Ein solcher Fokus erleichtert es den Studierenden den Gesamtkontext der einzelnen Kapitel zu sehen, der aufgrund der Vielzahl an Modellen und Techniken leider etwas verloren geht. Gleichzeitig kann unterstützend mit weiterführender Literatur, je nach Zielgruppe mit einem klassischen Lehrbuch oder

der angegebenen Originalliteratur, gearbeitet werden, um so die an vielen Stellen nur recht rudimentär behandelten Beweise zu liefern. Als Zielgruppe bieten sich vor allem Bachelorstudierende im vierten bis sechsten Semester an, die idealerweise über Grundkenntnisse aus der Theorie der Markovketten verfügen.

Wer auf der Suche nach einer spannenden Einführung in die Welt der Mathematik des Kartenmischens ist, der wird mit dem Buch von Diaconis und Fulman fündig. Das Werk sollte dabei nicht als umfängliches Lehrbuch gesehen werden. Vielmehr motiviert es durch konkrete, anschauliche Modelle und Beispiele, sowie zahlreiche Querbezüge zu verschiedensten Bereichen der Mathematik, sich mit der facettenreichen Welt des Kartenmischens näher auseinanderzusetzen.

**Funding** Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

**Open Access** Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

**Hinweis des Verlags** Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.