

Der durchschnittliche Rechenaufwand beim Simplexverfahren

Karl-Heinz Borgwardt

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Borgwardt, Karl-Heinz. 1985. "Der durchschnittliche Rechenaufwand beim Simplexverfahren." *Operations Research Proceedings* 13: 647–60.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-70457-4_153.

Nutzungsbedingungen / Terms of use:

licgercopyright



DER DURCHSCHNITTLICHE RECHENAUFWAND BEIM SIMPLEXVERFAHREN

Problemstellung

In den Jahren 1947/48 hat George B. Dantzig die Simplex-Methode entwickelt und der Fachwelt als Lösungsverfahren für lineare Optimierungsprobleme vorgestellt.

Maximiere $v^T x$

unter den Nebenbedingungen $a_1^T x \leq b^1, \dots, a_m^T x \leq b^m$
und $(x \geq 0 \text{ wahlweise})$

wobei $v, x, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Wir wählen diese Art von Darstellung, weil andere Typen von linearen Optimierungsaufgaben leicht auf die angegebene Form zu transformieren sind.

Alle diese Probleme haben gemeinsam, daß eine lineare Zielfunktion $v^T x$ auf einem Polyeder bzw. Zulässigkeitsbereich X (dessen Punkte alle Nebenbedingungen erfüllen) maximiert werden soll. Deshalb arbeitet die Simplexmethode in folgender Weise:

Phase I: Es wird eine Startecke x_0 von X bestimmt.

Man bricht ab, sobald sich dies als unmöglich erweist.

Phase II: Ausgehend von der Startecke x_0 wird eine Folge x_0, \dots, x_s von Ecken von X berechnet, so daß

- aufeinanderfolgende Ecken in X benachbart sind;
- der Zielfunktionswert bei jedem Eckenaustausch vergrößert wird.

Das Verfahren stoppt, sobald bei x_s

- auf allen zu x_s benachbarten Kanten der Zielfunktionswert nicht verbessert wird
- oder wenn es eine von x_s ausgehende Kante findet, auf der $v^T x$ unbeschränkt wächst.

Man nennt s die Schrittzahl von Phase II.

Phase I (die Eckensuche) wird ganz analog zu Phase II durchgeführt, hier ist nur eine leichte Modifikation der Problemstellung erforderlich. Man benutzt dabei, daß bei Problemen vom Typ

Maximiere $v^T x$

unter $a_1^T x \leq b^1, \dots, a_m^T x \leq b^m$ und $x \geq 0$

wobei $b^1, \dots, b^m > 0$

die Ecke $x_0 = 0$ bereits bekannt ist und als Startecke verwendet werden kann. Deshalb entfällt hier die Eckensuche völlig. Deshalb macht es Sinn, sich (zunächst) völlig auf die Phase II zu konzentrieren. Später werden wir dann zum Gesamtverfahren zurückkehren.

Die praktische Durchführung der Simplex-Methode erfolgt mit Hilfe eines Simplex-Tableaus, auf dessen Einzelheiten wir hier nicht näher eingehen wollen. Wichtig ist aber, daß es $m+1$ Zeilen und $n+1$ Spalten enthält. (m ist die Zahl der Restriktionen, n die Zahl der Variablen). In jedem Eckenaustauschschritt muß dieses Tableau neu berechnet werden. Dazu sind bei den gebräuchlichen Varianten höchstens (inklusive Ermittlung des Pivotelements)

$O(mn)$ Additionen/Subtraktionen

$O(mn)$ Multiplikationen/Divisionen

erforderlich. (Verfeinerte Berechnungsmethoden können hier noch Einsparungen bringen.)

Während also die Anzahl der elementaren Rechenschritte bei einem Pivotschritt leicht zu bestimmen ist, gibt es kaum Informationen über die Zahl der Pivotschritte s . Aber gerade diese Zahl ist entscheidend für den gesamten Rechenaufwand.

An Informationen über s ist man aus vielen Gründen interessiert:

- So wäre es vorteilhaft, von vornherein eine Schätzung für den Rechenaufwand (\approx Rechenzeit für einen Job) zu haben, um die Kosten veranschlagen zu können.
- Man hätte Anhaltspunkte für den Grad der Rundungsfehler, die sich im Laufe der Rechnung kumulieren.
- Es wäre möglich, Vorhersagen über die Lösbarkeit von linearen Optimierungsaufgaben zu machen, die heute noch nicht (wegen ihrer Größe) lösbar und testbar sind, aber im Zuge der Weiterentwicklung von Computern einmal in den Lösbarkeitsbereich kommen könnten.

Wir betrachten den Rechenaufwand in Abhängigkeit von der Problemgröße, die durch die beiden Parameter m und n bestimmt ist. Also ist $s = s(m, n)$.

Aber natürlich hängt s nicht nur von (m, n) ab. Bis jetzt haben wir nämlich bei der Beschreibung des Simplexverfahrens noch nicht festgelegt, wie wir die Nachfolgeecke wählen, wenn es mehrere (verbessernde) Möglichkeiten gibt.

Eine solche Regel wird eine Variante des Algorithmus definieren.

Beispiele für solche Regeln wären:

- Man wähle (zufällig) irgendeine verbessernde Kante.
- Man wähle die Kante, die pro Längeneinheit die größte Verbesserung bringt (steilste Kante).
- Man wähle die Kante, die absolut die größte Verbesserung im nächsten Schritt liefert.

Die Schrittzahlen, die aus solchen verschiedenen Varianten resultieren, können erheblich divergieren.

Also hängt s auch erheblich von der Variante ab.

Und natürlich spielen die Eingabedaten des Problems, nämlich die Vektoren a_1, \dots, a_m und b ebenfalls eine ganz entscheidende Rolle.

Schlechtester und mittlerer Fall

In der Komplexitätstheorie hat es sich bewährt, einen Algorithmus dann als schnell und effizient anzusehen, wenn er die ihm gestellten Probleme in polynomialer Zeit löst. Vereinfacht gesagt: Wenn die Anzahl der Rechenschritte durch ein Polynom in den Parametern der Problemgröße abgeschätzt werden kann.

Seit ihrer Einführung in die Praxis hat sich die Simplex-Methode sehr bewährt. Sie hat die allermeisten gestellten Probleme schnell und effizient gelöst.

Deshalb glaubten auch die Anwender, daß es sich hierbei um einen gutartigen Algorithmus handeln würde, und daß man sehr bald beweisen könnte, daß $\bar{s}(m, n)$ polynomial in m und n ist.

\bar{s} bezeichnet hier die schlimmstmögliche Schrittzahl, die bei Verwendung einer festen Variante bei (m, n) -Problemen auftreten kann.

Man hoffte, daß $\bar{s}(m, n)$ sogar durch $C \cdot \max(m, n)$ beschränkt sein könnte. Aber es dauerte Jahrzehnte, bis die Suche nach einer Schranke für \bar{s} zu einem - dazu noch negativen - Erfolg führte.

Klee und Minty [20] konnten 1971 beweisen, daß eine bestimmte Variante (zufällige Kantenauswahl) bei bestimmten Polyedern (beliebiger Dimension n) alle Ecken durchläuft. Dabei gelang es, für

jedes $n = 2, 3, 4, \dots$ ein $(2n, n)$ -Problem (also mit $m = 2n$ Restriktionen) zu konstruieren, so daß dabei jeweils

$$\bar{s}(m, n) = 2^{n-1} \quad \text{für } m = 2n .$$

Natürlich ist dann $\bar{s}(m, n)$ nicht mehr polynomial in m und n .

Mit etwas spitzfindigeren Methoden konnte dann sogar gezeigt werden, daß gilt

$$\alpha_n m^{\frac{n-1}{2}} < \bar{s}(m, n) < \beta_n m^{\frac{n}{2}}$$

mit $\alpha_n, \beta_n > 0$.

Ähnliche Resultate wurden für weitere Varianten gewonnen

(Klee, Minty	Dantzig's Regel)	1971	[20]
(Jeroslow	Größte Verbesserung)	1973	[18]
(Avis, Chvatal	Bland's Regel)	1976	[4]
(Goldfarb, Sit	Steilste Kante)	1979	[16]
(Goldfarb	Schatteneckenalgorithmus)	1983	[15]

so daß die Hoffnung auf eine polynomiale Variante (für den schlechtesten Fall) immer kleiner wurde.

Aber immer noch ist die schwache Hoffnung nicht ganz erloschen, daß es vielleicht doch noch eine polynomiale Variante geben könnte.

Aufgrund dieser negativen Ergebnisse wurden Anwender und Theoretiker ziemlich verunsichert, was die "Güte" des Simplexverfahrens anbetrifft.

- Hatte man vielleicht bisher (zufällig) nur harmlose Probleme angegangen?
- Waren die Dimensionen bei den gelösten Problemen zu klein gewesen, um die volle Wirkung der schlechten Fälle zu spüren zu bekommen?

Diese und ähnliche Fragen waren um 1973 aktuell. Um sie zu beantworten, mußte man sich mit der mittleren Schrittzahl theoretisch beschäftigen. Man suchte nun also Schranken für

$E(s(m,n))$, nicht mehr für $\bar{s}(m,n)$.

Zu dieser Zeit gab es eine Reihe von Arbeiten der stochastischen Geometrie, die sich mit zufällig erzeugten Polyedern befaßten.

Dabei wurden Eigenschaften dieser Polyeder, wie mittlere Eckenzahl, mittlere Anzahl von Oberflächen, mittleres Volumen usw. untersucht.

Zu nennen sind hier:

Renyi und Sulanke	[25], [26], [27]
Carnal	[12]
Efron	[14]
Raynaud	[24]
Kelly und Tolle	[19]
Schmidt	[28]

Thomas Liebling war es dann 1972 [21], der als erster den Zusammenhang zwischen diesen Ergebnissen und der mittleren Schrittzahl beim Simplexalgorithmus erkannte und beschrieb.

Aber noch fehlte es an einer sehr einfachen Charakterisierung der Ecken, die auf dem Simplexpfad liegen. Diese Charakterisierung mußte sehr einfach sein, damit die Auswertung von Erwartungswerten, die in Form vom komplizierten Integralwerten vorliegen, möglich wird.

Folgt man der chronologischen Entwicklung, dann kommt man hier zu meinen Beiträgen zu dieser Forschungsrichtung. Mit Hilfe einer geeigneten Variante, des sogenannten Schatteneckenalgorithmus, gelang diese einfache Darstellung.

Der Schatteneckenalgorithmus

Wir wollen nun die von mir untersuchte Variante betrachten. Wir konzentrieren uns auf Phase II und denken uns die Startecke x_o als gegeben. Und zwar soll x_o gerade die Optimalecke bezüglich einer Zielfunktion $u^T x$ sein.

(In diesem Sinne definiert u die Ecke x_o .)

Dann projizieren wir das Polyeder X auf die Ebene $\text{span}(u, v)$.

Bei dieser Projektion treten sogenannte Schattenecken auf. Eine Ecke \bar{x} von X heißt Schattenecke, wenn \bar{x} bei Projektion auf die Ebene $\text{span}(u, v)$ seine Eckeneigenschaft beibehält.

Die Ecken auf dem Rand sind Schattenecken, die inneren nicht. Aufgrund der Konstruktion von $\text{span}(u, v)$ zeigt sich aber nun gerade, daß x_o und x_s selbst Schattenecken sind. Und es existiert eine Schatteneckenfolge (Simplexpfad), die x_o mit x_s verbindet, so daß nur Schattenecken berührt werden.

Folglich ist S , die Zahl der Schattenecken, eine obere Schranke für die Schrittzahl s . Es gilt sogar

$$\frac{1}{4} E_{m,n}(S) = E_{m,n}(s).$$

Die Schatteneckeneigenschaft ist nun aber recht einfach charakterisierbar. Und hier erkennt man einen ganz wesentlichen Grund für die Effizienz des Verfahrens:

Nur ein kleiner Teil der Ecken eines Polyeders wird auf die Schattenkante projiziert (Effekt verstärkt sich bei zunehmender Dimension).

Hörern, die sich in der parametrischen Optimierung auskennen, dürfte dieser Algorithmus im übrigen bekannt sein.

Er bestimmt gerade die Ecken, die bzgl. $(u^T x, v^T x)$ effizient sind.

Das Stochastische Modell

Wir müssen nun präzisieren, was wir unter "durchschnittlicher Schrittzahl" eigentlich verstehen wollen.

Dazu denken wir uns die (m, n) -Probleme als statistische Masse irgendwie verteilt, die Größe s als eine Zufallsvariable und den Erwartungswert von s als Ergebnis einer Mittelung über alle auftretenden Werte von s gemäß der zugrundegelegten Verteilung. Also benötigen wir ein stochastisches Modell, das die reale Verteilung der (m, n) -Probleme gut beschreibt. Aber welches ist nun das beste Modell?

Ich will beginnen mit einem Modell, das in jüngster Zeit in Amerika sehr populär wurde und vielfach behandelt wurde (Umklapp- oder Flipping-Modell).

Erinnern wir uns noch einmal an unsere Restriktionen.

$a_1^T x \leq b^1$ Es wird nun unterstellt, daß die Ungleichungen unabhängig voneinander und jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ umgeklappt sind.

Das heißt also, daß jede Konstellation von m "Ungleichungsrichtungen" $(\leq, \leq, \geq, \geq, \leq, \geq, \geq, \dots)$ gleich wahrscheinlich ist.

Jede Wahl von a_1, \dots, a_m und von b erzeugt dann eine Klasse von 2^m (mit Vorzeichenbedingungen 2^{m+n}) gleichwahrscheinlichen Problemen.

Die zugehörigen Zulässigkeitsbereiche werden Zellen genannt.

Dieses Modell wurde 1981 von May und Smith vorgeschlagen.

Smale, Haimovich, Adler, Megiddo, Karp und Shamir, Todd haben dieses Modell aufgegriffen und Erwartungswerte für s unter diesem Modell berechnet.

(vgl. dazu [22], [30], [31], [17], [1], [2], [3], [23])

Anmerkung: Das von Smale in [29] analysierte Modell beruht auf schwächeren Voraussetzungen. Jedoch kann hiermit nur Polynomität in einem der Parameter m bzw. n gezeigt werden.

Die Varianten, die hierbei untersucht wurden, sind sehr verwandt mit dem Schatteneckenalgorithmus. Teilweise wird er als Subroutine benutzt.

Die obigen Autoren kommen zu erstaunlich günstigen Ergebnissen.

Satz (Haimovich) [17]

$$E_{m,n} (s | s > 0) \leq n \left(\frac{m-n+2}{m+1} \right) \leq n$$

im Sign-Invariance-Modell für die Phase II.

Satz Todd, unabhängig Adler/Megiddo/Karp/Shamir [31], [3], [2]

$$E_{m,n}(s_t) = O(\min(m^2, n^2))$$

für Probleme mit Vorzeichenbedingungen und für das Gesamtverfahren (inklusive Phase I und II).

Das Umklapp- oder Flipping-Modell besitzt allerdings einige Nachteile, die für die extrem niedrigen Resultate verantwortlich zu sein scheinen.

1) Von den 2^m erzeugten Zulässigkeitsbereichen sind sehr viele leer.

Für $m \rightarrow \infty$, n fest geht sogar der Quotient $\frac{\text{Anzahl nichtleere Probleme}}{\text{Anzahl erzeugte Probleme}}$ gegen 0 !

In diesen Problemen fällt kein Phase II-Aufwand an! Dies senkt die Schrittzahl erheblich.

2) Selbst die nichtleeren Zulässigkeitsbereiche weisen eine sehr niedrige Zahl von aktiven Restriktionen auf (2n im Mittel).

Ebenso ist die mittlere Zahl von Ecken pro Problem sehr klein.

($\rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, n fest im allgemeinen Fall)

($\rightarrow 2^n$ für $m \rightarrow \infty$, n fest, unter der Voraussetzung, daß $X \neq \emptyset$).

- 3) Falls $m - n < n$ ist, dann ist ein sehr großer Anteil der Probleme unbeschränkt.

Unbeschränktheit wird aber normalerweise sehr schnell erkannt.

Alle diese Einflüsse beschleunigen das Verfahren ganz erheblich. Es stellt sich deshalb die Frage, ob hier nicht sehr viele triviale Probleme die Wirkung der "echten" überkompensieren und die Schrittzahl verzerrn. Um diese Verzerrungen zu vermeiden, untersuchen wir eine Klasse von Problemen, die mit Sicherheit einen (bekannten) zulässigen Punkt haben, nämlich Probleme der Art

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } & v^T x \\ \text{unter } & a_1^T x \leq 1, \dots, a_m^T x \leq 1 \end{aligned}$$

Hier ist 0 immer zulässig.

(Eventuelle Variationen der immer als positiv vorausgesetzten rechten Seite verlagern wir auf die linke durch Normierung).

Wir nehmen nun als stochastisches Modell folgendes an:

a_1, \dots, a_m, v sind
- identisch
- unabhängig
- rotationssymmetrisch
über $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ verteilt.

Es erscheint plausibel, daß relativ zum gegebenen zulässigen Punkt der Zulässigkeitsbereich nach allen Richtungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit begrenzt ist.

Das Modell ist noch sehr offen, weil es nichts über die Länge der a_i vorschreibt.

In diesem Modell ist mit Wahrscheinlichkeit 1 die Nichtentartungsvoraussetzung erfüllt:

Je n aus $\{a_1, \dots, a_m, v\}$ sind linear unabhängig.

Je $n + 1$ aus $\{a_1, \dots, a_m\}$ sind in allgemeiner Lage.

Lösungsidee

Wie kann man nun unter diesem Modell eine mittlere Schrittzahl bestimmen? Konzentrieren wir uns darauf, wie viele Schattenecken es gibt.

Kandidaten für die Eckeneigenschaft sind alle Punkte, in denen Restriktionen aktiv sind, d. h. daß bei n Ungleichungen sogar das Gleichheitszeichen gilt. Dies sind also die Lösungen von Gleichungssystemen

$$\begin{array}{l} a_{i_1}^T x = 1 \\ \cdot \\ a_{i_n}^T x = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Hiervon gibt es bekanntlich} \\ (m) \text{ Schnittpunkte } x_{\Delta} \\ \cdot \\ (n \text{ aus } m \text{ ausgewählt}) \end{array}$$

Nur diese Schnittpunkte können Ecken sein.

Man benutzt folgende geometrische Sachverhalte:

- 1) x_{Δ} ist genau dann eine Ecke von X , wenn alle Punkte a_{n+1}, \dots, a_m diesseits der Hyperebene durch a_1, \dots, a_n liegen (diesseits bedeutet: im gleichen Halbraum wie der Ursprung)

- 2) Eine Ecke x_{Δ} ist sogar Schattenecke, wenn die Ebene $\text{span}(u, v)$ den Kegel, der von a_1, \dots, a_n aufgespannt wird, (außer im Nullpunkt) schneidet.

Die Wahrscheinlichkeit für das erste Ereignis hängt wegen der Rotationssymmetrie nur ab von der Höhe der Hyperebene. Die Wahrscheinlichkeit für das zweite Ereignis ist proportional zum Raumwinkel, der von den Seitenkegeln des Kegels aus a_1, \dots, a_n aufgespannt wird.

Man kommt schließlich zur Integraldarstellung

$$E_{m,n}(S) = \int_{\mathbb{R}^n}^m \dots \int_{\mathbb{R}^n}^m P(\text{alle } a_{n+1}, \dots, a_m \text{ liegen dies-} \\ \text{seits}). P(\text{span}(u, v) \text{ schneidet den Kegel} \\ \text{CC}(a_1, \dots, a_n) \text{ nichttrivial}) \\ dF(a_1) \dots dF(a_m) dF(v)$$

Die Auswertung dieses Integrals bereitet erhebliche Schwierigkeiten. Mit Anwendung von verschiedensten Integrationstricks kommt man aber doch zu sehr interessanten Ergebnissen.

Resultate

Zunächst erhielten wir asymptotische Resultate ($m \rightarrow \infty$, n fest) für fest vorgegebene, spezielle Verteilungen der a_i .

Satz (vgl. [5], [6])

Bei $m \rightarrow \infty$, n fest, verhält sich $E_{m,n}(S)$ bei

- 1) Gaußverteilung der a_i über \mathbb{R}^n wie

$$\sqrt{\ln m} \quad n^{\frac{3}{2}}$$

- 2) Gleichverteilung der a_i über der Einheitskugel von \mathbb{R}^n wie

$$\frac{1}{m^{\frac{n+1}{2}}} n^2$$

- 3) Gleichverteilung der a_i über der Oberfläche der Einheitskugel von \mathbb{R}^n wie

$$\frac{1}{m^{\frac{n-1}{2}}} n^2$$

- 3) weist also das schlechteste Verhalten auf.

Verallgemeinerungen für asymptotisches Verhalten

$m \rightarrow \infty$, n fest (vgl. [7], [8], [10])

1) $E_{m,n}(S) = 0 \left(m^{\frac{1}{n-1}} \right)$

- 2) Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einen festen Bereich beschränkt bleibt ($\|a_i\| \leq r$ für alle a_i); dann ist asymptotisch

$$E_{m,n}(S) \leq m^{\frac{1}{n-1}} n^2 \sqrt{2\pi}$$

- 3) Es gibt Verteilungen, bei denen asymptotisch $E_{m,n}(S) \leq C(n)$, also beschränkt durch einen Wert, der nicht von m abhängt, bleibt.

- 4) Bei Verteilungen auf beschränktem Bereich gilt aber immer

$$E_{m,n}(S) \rightarrow \infty \text{ für } m \rightarrow \infty \text{ und } n \text{ fest.}$$

- 5) Aber auch in diesem Fall gibt es Verteilungen mit beliebig langsamem Wachstum (aber gegen unendlich).

Schließlich erreichte ich 1981 das Ziel, auch für beliebige Paare (m, n) ohne Berücksichtigung der Asymptotik eine Abschätzung zu erzielen.

Satz (vgl. [9], [11])

$$E_{m,n}(s) \leq m^{\frac{1}{n-1}} n^3 \pi \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right)$$

für alle Paare (m, n) mit $m \geq n$

Dies war der Nachweis der Polynomialität in m und n .

Um auch für das gesamte Verfahren Polynomialität zu beweisen, entwickelte ich einen Phase I-Algorithmus, der die entsprechenden Probleme zuerst mit zwei, dann mit drei, mit vier und schließlich mit n Variablen löst (aufsteigende Dimension). Jedesmal wird dabei der Schatteneckenalgorithmus verwendet. Dabei erzielte ich das Resultat:

Satz (vgl. [11])

$$E_{m,n}(s_t) \leq m^{\frac{1}{n-1}} (n+1)^4 \frac{2}{5} \pi \left(1 + \frac{e\pi}{2}\right) \quad [s_t := \text{Gesamtschrittzahl}]$$

für alle Paare (m, n) mit $m \geq n$.

Der Phase I-Algorithmus ist recht umständlich und dient eigentlich nur dem theoretischen Nachweis der Komplexität. Es zeigt sich aber zweierlei:

- 1) Die Auswahl von wenigen durchlaufenen Ecken erzeugt (durch die Güte des Simplexverfahrens) eine (im Durchschnitt gesehen) sehr geringe Rechenzeit. Man vergleiche die Ausgangssituation $\binom{m}{n}$.

- 2) Die Schrittzahlen im Fall mit nur zulässigen Problemen liegen erheblich höher als im Umklapp-Modell.

Offene Fragen

- 1) Sind die Abschätzungen noch zu verbessern?
- 2) Kann man die Resultate übertragen auf andere Varianten?
- 3) Welches ist (im Durchschnitt) die beste Variante?
- 4) Kann man höhere Momente (Schiefe, Varianz) der Verteilung von s berechnen?
- 5) Gibt es eine polynomiale Variante für den schlechtesten Fall?

Es gibt also noch genug zu tun!

- [1] Adler, I., Karp, R. & Shamir, R. [1983a]: *A Family of Simplex Variants Solving an $m \times d$ Linear Program in Expected Number of Pivot Steps Depending on d Only*, University of California, Computer Science Division, Berkeley, December 1983.
- [2] Adler, I., Karp, R. & Shamir, R. [1983b]: *A Simplex Variant Solving an $m \times d$ Linear Program in $O(\min(m^2, d^2))$ Expected Number of Pivot Steps*, University of California, Computer Science Division, Berkeley, December 1983.
- [3] Adler, I. & Meggido, N. [1983]: *A Simplex Algorithm where the Average Number of Steps is Bounded Between two Quadratic Functions of the Smaller Dimension*, Department of Industrial Engineering and Operations Research, University of California, Berkeley, California, December 1983.
- [4] Avis, D. & Chvatal, V. [1978]: *Notes on Bland's Pivoting Rule*, Mathematical Programming Study 8 (1978), 24–34.
- [5] Borgwardt, K. H. [1977a]: *Untersuchungen zur Asymptotik der mittleren Schrittzahl von Simplexverfahren in der linearen Optimierung*, Dissertation Universität Kaiserslautern.
- [6] Borgwardt, K. H. [1977b]: *Untersuchungen zur Asymptotik der mittleren Schrittzahl von Simplexverfahren in der linearen Optimierung*, Operations Research Verfahren 28 (1977), 332–345.
- [7] Borgwardt, K. H. [1978]: *Zum Rechenaufwand von Simplexverfahren*, Operations Research Verfahren 31 (1978), 83–97.
- [8] Borgwardt, K. H. [1979]: *Die asymptotische Ordnung der mittleren Schrittzahl von Simplexverfahren*, Methods of Operations Research 37 (1979), 81–95.
- [9] Borgwardt, K. H. [1981]: *The Expected Number of Pivot Steps Required by a Certain Variant of the Simplex Method is Polynomial*, Methods of Operations Research 43 (1981), 35–41.
- [10] Borgwardt, K. H. [1982a]: *Some Distribution-Independent Results About the Asymptotic Order of the Average Number of Pivot Steps of the Simplex Method*, Mathematics of Operations Research 7 (1982), 441–462.
- [11] Borgwardt, K. H. [1982b]: *The Average Number of Pivot Steps Required by the Simplex-Method is Polynomial*, Zeitschrift für Operations Research 26 (1982), 157–177.
- [12] Carnal, H. [1970]: *Die konvexe Hülle von n rotationssymmetrisch verteilten Punkten*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsrechnung und verwandte Gebiete 15 (1970), 168–176.
- [13] Dantzig, G. [1966]: *Lineare Programmierung und Erweiterungen*, Springer Verlag, Berlin, 1966.

- [14] Efron, B. [1965]: *The Convex Hull of a Random Set of Points*, Biometrika 52 (3) and (4) (1965), 331–345.
- [15] Goldfarb, D. [1983]: *Worst Case Complexity of the Shadow Vertex Simplex Algorithm*, Columbia University, School of Engineering and Applied Science, May 1983.
- [16] Goldfarb, G. & Sit, W. J. [1979]: *Worst Case Behavior of the Steepest Edge Simplex Method*, Discrete Applied Mathematics 1 (1979), 277–285.
- [17] Haimovich, M. [1983]: *The Simplex Algorithm is Very Good! — On The Expected Number of Pivot Steps and Related Properties of Random Linear Programs*, 415 Uris Hall, Columbia University, New York, April 1983.
- [18] Jeroslow, R. G. [1973]: *The Simplex Algorithm with the Pivot-Rule of Maximizing Criterion Improvement*, Discrete Mathematics (1973), 367–377.
- [19] Kelly, D. G. & Tolle, J. W. [1979]: *Expected Number of Vertices of a Random Convex Polytope*, University of North Carolina at Chapel Hill, 1979.
- [20] Klee, V. & Minty, G. [1971]: *How Good is the Simplex-Algorithm?*, Inequalities III, O. Shisha (ed.), Academic Press, New York, 1971.
- [21] Liebling, T. [1972]: *On the Number of Iterations of the Simplex Method*, ETH Zürich, Institut für Operations Research, 1972.
- [22] May, J. H. & Smith, R. L. [1982]: *Random Polytopes: Their Definition, Generation and Aggregate Properties*, Mathematical Programming 24 (1982), 39–54.
- [23] Megiddo, N. [1983]: *Improved Asymptotic Analysis of the Average Number of Steps Performed by the Self-Dual Simplex Algorithm*, Dept. of Computer Science, Stanford University, September 1983.
- [24] Raynaud, H. [1970]: *Sur l'Enveloppe Convexe des Nuages de Points Aléatoires dans R^n* , Journal of Applied Probability 7 (1970), 35–48.
- [25] Renyi, A. & Sulanke, R. [1963]: *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten I*, Zeitschrift für Warsch. Verw. Gebiete 2 (1963), 75–84.
- [26] Renyi, A. & Sulanke, R. [1964]: *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten II*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 3 (1964), 138–147.
- [27] Renyi, A. & Sulanke, R. [1968]: *Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 9 (1968), 146–157.
- [28] Schmidt, W. M. [1968]: *Some Results in Probabilistic Geometry*, Zeitschrift für Warsch. Verw. Gebiete 9 (1968), 146–157.
- [29] Smale, S. [1982]: *The Problem of the Average Speed of the Simplex Method*, Proceedings of the 11th International Symposium on Mathematical Programming, Universität Bonn, August 1982, 530–539.

- [30] Smale, S. [1983]: *On the Average Speed of the Simplex Method*, Mathematical Programming 27 (1983), 241–262.
- [31] Todd, M. J. [1983]: *Polynomial Expected Behavior of a Pivoting Algorithm for Linear Complementarity and Linear Programming Problems*, Technical Report No. 595, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, November 1983.