Beiträge zum Mathematikunterricht

2003

Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 2003 in Dortmund

für die GDM herausgegeben von Hans-Wolfgang Henn

Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin

Christian GROSS, Augsburg

Beweisen lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen

Es ist ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, dass die Schülerinnen und Schüler ein Verständnis für mathematisches Argumentieren und Beweisen entwickeln. So wurde beispielsweise das argumentieren und beweisen Lernen im Jahr 2000 als einer von 10 Standards der National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) aufgeführt [7].

Dies ist jedoch mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. So rückte in Deutschland das mathematische Beweisen und Argumentieren vor allem durch die vieldiskutierten Ergebnisse in den empirischen Vergleichsstudien TIMSS und PISA in den Fokus. Die TIMS-Studie belegt, dass das durchschnittliche Leistungsniveau von Schülern der Jahrgangsstufen 7 und 8 an Gymnasien in Deutschland knapp unter dem Fähigkeitsniveau liegt, das ausreichend für ein sicheres Verständnis von mathematischen Konzepten und Verfahren ist [1]. Wie eine detailliertere Analyse der TIMSS II-Items zeigt, haben die deutschen Schülerinnen und Schüler vor allem bei solchen Aufgaben Schwierigkeiten, zu deren Lösung sie mehrere Teilschritte kombinieren müssen, während ihre Stärken bei einschrittigen Aufgaben und im Bereich des Faktenwissens liegen [3]. Die PISA-Studie bestätigte diese Resultate [5], auch hier hatten deutsche Schüler Probleme insbesondere bei Items, die argumentative Fähigkeiten erfordern.

In Anlehnung an die Stufen mathematischer Kompetenz, die Klieme bei der Bearbeitung von TIMMS-Items herausstellte [2], haben Reiss, Hellmich und Thomas auf Basis ihrer empirischen Untersuchung mit Schülerinnen und Schülern am Ende der Klasse 7 ein Kompetenzstufenmodell mit 3 Kompetenzstufen entwickelt [8]. Die erste Stufe umfasst dabei das Anwenden einfacher Regeln und Schlussfolgerungen (z.B. Berechnungsaufgaben), die zweite Stufe einschrittige Argumentationen und die dritte Kompetenzstufe schließlich die Verkettung mehrerer Argumente. Auch bei dieser Studie betätigte sich, dass deutsche Schülerinnen und Schüler mit ihrem Faktenwissen Aufgaben der ersten Stufe noch relativ gut bewältigen, bei Aufgaben der höheren Kompetenzstufen jedoch weitgehend scheitern. Insbesondere liegen ihre Schwierigkeiten in nicht verfügbaren Problemlöseheuristiken für Beweisaufgaben: mehrere Argumente können nicht eigenständig zu einer Beweiskette zusammengesetzt werden [8]. Auch international zeigten sich Defizite im deduktiven Schließen: statt deduktiver Folgerungen werden häufig empirische Begründungen verwendet [6].

Eine Ursache für all diese Probleme scheint darin zu liegen, dass Schüler ein inadäquates mentales Modell des Beweisführungsprozesses besitzen. Daher sollten die Problemlöseprozesse von Schülerinnen und Schülern mit denen mathematischer Experten verglichen werden [8]. Boero unterscheidet sechs Phasen des Beweisprozesses [4]:

(1) Entwicklung einer Hypothese;
(2) Formulierung dieser Hypothese nach den formalen Konventionen;
(3) Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen;
(4) Auswahl von Argumenten und Verknüpfung zu einer Kette von Deduktionsschlüssen;
(5) Organisation der Argumente zu einem Beweis, der mathematischen Publikationsstandards entspricht;
(6) Annäherung an einen formalen Beweis.

In den ersten beiden Phasen wird die Problemstellung exploriert, Gesetzmäßigkeiten werden identifiziert und untersucht sowie erste Plausibilitätsbetrachtungen zur Gültigkeit der Behauptung angestellt, u. a. auch mittels intuitiver und empirisch-induktiver Argumente. Am Ende dieser Phasen steht die endgültige Formulierung der Behauptung. Diese wird dann in der 3. Phase geprüft, induktive und deduktive Argumente interagieren hierbei. Am Ende steht dann eine grobe Beweisstrategie. In der 4. Phase wird diese Strategie durch eine Kette mathematischer Argumente abgesichert, ab jetzt sind nur noch deduktive Schlussfolgerungen zugelassen [4,9].

Insbesondere die am Anfang stehenden explorativen Schritte dieses Prozesses bleiben für manchen Mathematiklehrer und in Folge dessen auch für Schüler weitgehend intransparent. Dem Schüler wird nur das Endergebnis, eine eindeutige Kette von Schlussfolgerungen mit definiertem Anfangs- und Endzustand präsentiert. Er erhält keinen Einblick in das Problemlöseverhalten des Experten mit seinen explorativen Komponenten, Irrwegen und Sackgassen: „So gelangt der Schüler und oft schon der Lehrer zu einem idealisierten mentalen Modell der Beweisführung, das letztendlich die Entwicklung geeigneter Problemlöseheuristiken verhindert." [8]

Wie können im Unterricht bei den Schülern geeignetere Modelle des Problemlöseprozesses herausgebildet und die Entwicklung von Problemlöseheuristiken gefördert werden? Es ist empirisch gut belegt, dass das Lernen mithilfe ausgearbeiteter Lösungsbeispiele für algorithmische Inhalte in der Mathematik zu guten Ergebnissen führen kann. Nicht nur bevorzugen Schüler meistens Beispiele gegenüber abstrakten Erklärungen, der Erfolg von Lösungsbeispielen wird auch dadurch erklärt, dass bei ihnen mehr mentale Kapazitäten für den eigentlichen Lernprozess zur Verfügung stehen, die ansonsten durch Problemlöseaktivitäten gebunden werden [10,11]. Wichtige Voraussetzungen sind dabei, dass die Lernenden die Lösungsbeispiele nicht nur überfliegen, sondern laufend zu Selbsterklärungen angehalten werden, sowie ein integriertes Format der Lösungsbeispiele. Weitere Vorteile von Lösungsbeispielen gegenüber anderen Lernmethoden sind ihre einfache Integration in traditionelle Unterrichtsformen und der geringe technische und organisatorische Aufwand [11].

Für das mathematische Beweisen haben daher Reiss und Renkl als didaktisch sinnvolle Erweiterung das Konzept der heuristischen Lösungsbeispiele entwickelt, die nicht einen Lösungsalgorithmus in den Vordergrund stellen, sondern die Aufeinanderfolge geeigneter heuristischer Schritte [9]. Sie bestehen nicht aus den Schritten eines fertigen Beweises, sondern, orientiert an Boeros Modell, aus den Schritten eines heuristischen Problemlöseprozesses, die schließlich zu einem fertigen Beweis führen. Auch hier werden die Schüler zu Selbsterklärungen angehalten. So sollen sie den Problemkontext selbst explorieren, um die Behauptung vollständig zu verstehen, und sich die dargestellte Problemlöseheuristik klarmachen. Am Ende wird ihnen dann ein korrekter, detaillierter Beweis der Behauptung präsentiert. Für die Grafiken ist wieder soweit möglich ein integriertes Format zu wählen.

Auf dieser Grundlage wurden jetzt an der Universität Augsburg im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität in der Schule“ erste (deutschsprachige) heuristische Lösungsbeispiele entwickelt. Sie behandeln geometrische Probleme aus dem Bereich der Viereckslehre, beispielsweise:

- gegenüberliegende Seiten/Winkel eines Parallelogramms sind kongruent;
- verbindet man die Seitenmitten eines Rechtecks, so entsteht eine Raute;
- gegenüberliegende Winkel eines Sehnenvierecks ergänzen sich zu 180°.

In Form einer Rahmenhandlung werden die Probleme zunächst skizziert und eine vorläufige Behauptung formuliert (z. B.: „Verbindet man die Seitenmitten eines *beliebigen Vierecks*, so entsteht eine Raute“). Die Schüler werden anschließend aufgefordert, sie selbst zu explorieren. Das notwendige Grundwissen wird aufgefrischt (hier z. B. die Kongruenzsätze am Dreieck), und die Schüler sollen sich empirisch-induktiv selbst von der Gültigkeit der Behauptung überzeugen. Dabei stellt sich u. U. heraus, dass sie revidiert werden muss. Anschließend werden mögliche Argumente, die die Behauptung stützen können, in Form eines Lückentextes angegeben. Diese Liste ist bewusst redundant und enthält auch nicht verwendbare Tatsachen. Die Schüler werden aufgefordert, selbst weitere Argumente zu finden sowie aus den angegebenen verwendbare herauszufiltern. Mit Hilfe der Argumente sollen die Schüler dann selbst eine Beweisskizze versuchen. Danach wird ein detaillierter Beweis gegeben, wieder in Form eines Lückentextes. Abschließend wird noch einmal auf die Problemlöseheuristik zurückgeblickt.

Diese 3 Beispiele, abgestuft in Schwierigkeitsgrad und Selbsterklärungsanteil, werden derzeit in einer Pilotphase in bayerischen und nordrhein-westfälischen Schulen getestet. Dabei zeigt sich bereits, dass für die 3 Beispiele 5 Unterrichtsstunden (inkl. Hausaufgaben) angemessen sind. Die Hauptphase wird im kommenden Herbst erfolgen. Dann soll auch empirisch überprüft werden, ob heuristische Lösungsbeispiele im Vergleich mit konventionellen Unterrichtseinheiten zum Thema Beweisen in den 8. Klassen wirklich die Beweiskompetenzen der Schüler verbessern.

Literatur

[1] Baumert, J., Lehmann, R. u.a. (1997). *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske + Budrich.

[2] Baumert, J., Bos, W., Lehmann, R. (2000). *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Sekundarstufe II.* Opladen: Leske + Budrich.

[3] Blum, W. & Neubrand, M. (Hrsg.) (1998). TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen und Konsequenzen. Hannover: Schroedel.

[4] Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.*

[5] Deutsches PISA-Konsortium (2001). *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.* Opladen: Leske + Budrich.

[6] Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in School Mathematics.* Technical report on the nationwide survey. Institute of Education, University of London.

[7] National Council of Teachers of Mathematics (Ed.) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

[8] Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (51-64). 45. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik. Weinheim: Beltz

[9] Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: the idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34 (1);* 29-35.

[10] Renkl, A. & Schworm, S. (2002). Lernen, mit Lösungsbeispielen zu lehren. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule...* siehe oben (259-270).

[11] Renkl, A., Schworm, S., vom Hofe, R. (2001). Lernen mit Lösungsbeispielen. *mathematik lehren* 109, 14 – 18.