Beiträge zum Mathematikunterricht

2003

Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 2003 in Dortmund

für die GDM herausgegeben von Hans-Wolfgang Henn

Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin

Renate MOTZER, Augsburg

Vom Allgemeinen zum Speziellen und zurück bzw. wann darf man einen Spezialfall untersuchen und kann daraus ein allgemeines Ergebnis ableiten

Im Allgemeinen darf man vom Speziellen nicht auf das Allgemeine schließen, aber in Spezialfällen kann das durchaus die richtige Strategie sein. Eine spannende Frage bei vielen Aufgaben ist, ob bzw. unter welchen Umständen man Ergebnisse verallgemeinern darf. Die Ausgangsaufgabe ist eine spezielle, an die man im Sinne der Variation z.B. die Frage anschließen kann, ob bzw. wie sich das Ergebnis ändert, wenn man ein Ausgangsdatum abändert. Vor voreiligen Verallgemeinerungen ist im Allgemeinen zu warnen.
Aber dann gibt es da Aufgaben, die so allgemein gestellt sind , dass sie anscheinend eine allgemeine Lösung besitzen. Im Schulbuch sind sie dann meist schon so gestellt, dass die Ausgangsdaten, die keinen Einfluss auf das Ergebnis haben, erst gar nicht erwähnt werden. Bestenfalls gibt es den Lösungstipp, von einem konkreten Datum auszugehen. Die folgenden Beispiele möchten ermuntern, entsprechende Schulbuchaufgaben nicht nur zu lösen, sondern den Zusammenhang zwischen Speziellem und Allgemeinem zu thematisieren.

Durch die Spezialisierung wird die Aufgabe konkreter und damit anschaulicher. Es sollte aber doch angesprochen werden, warum das in diesem konkreten Fall erzielte Ergebnis allgemein gültig ist. Das hängt freilich schon mit der Aufgabenstellung zusammen. Wenn etwas allgemein gelten soll, muss es auch im Spezialfall gelten. Wenn nun in einem Spezialfall ein bestimmtes Ergebnis erzielt wird, muss das auch im Allgemeinen so sein, sonst wäre ja die Aufgabe falsch gestellt, wenn es gar kein allgemein gültiges Ergebnis gäbe. Um es mit der klassischen Logik zu sagen, dem dictum de omni: Quidquid de omnibus valet, etiam valet de nonnullis et singulis. (Was für alle gilt, gilt auch für einige und einzelne unter ihnen).

1. Eine Prozentaufgabe

Die ersten Aufgaben stammen aus dem Bereich des Prozentrechnens (im Zusammenhang mit vermindertem und vermehrtem Grundwert):
Zunächst lösten die Schüler und Schülerinnen im Unterricht diese Aufgabe:

```
Äpfel sind um 25% billiger als Orangen. Um wie
viel Prozent sind Orangen teurer als Äpfel?
(Hinweis: Gehe davon aus, dass du für 1€ Orangen
kaufst!)
```

Als Hausaufgabe sollten sie dann folgendes Beispiel bearbeiten:

```
Der Preis von Fichtenholz ist um 20% niedriger als
der von Buchenholz. Um wie viel % ist dann
Buchenholz teurer als Fichtenholz?
```

Bei der Besprechung der Hausaufgabe wurden folgende 3 Lösungen genannt:

- 20% wurde 1€ zugeordnet. Damit liegt der volle Preis für das Buchenholz mit 100% bei 5€. Fichtenholz kostet somit 4€. Wenn man nun 4€ als 100% nimmt, dann ist 1€ davon 25%, also ist Buchholz um 25% teurer als Fichtenholz.
- Setzt man das Buchholz mit 100€ an, dann kostet die gleiche Menge Fichtenholz 80€. Also kostet Buchholz 20€ mehr als Fichtenholz mit 80 €. Das ist 25% mehr.
- Ein Schüler fragte: „Kann man das auch, ohne dass man einen Wert einsetzt, rechnen?“
  Er schlug vor: 80% wird zugeordnet 100%, 100% wird zugeordnet Fragezeichen. Per Dreisatz errechnete sich das Fragezeichen zu 125% , also 25% mehr.

Warum erhält man das gleiche Ergebnis, ob man nun für 5€ Buchenholz kauft oder für 100€ oder ob man überhaupt keine Menge vorgibt?
Zunächst ist anzumerken, dass die Aufgabe keine Holzmenge vorgibt, also suggeriert, die Antwort sei unabhängig von der Menge Holz, die hier gekauft wird. Wenn sie unabhängig ist, dann kann man sie wohl auch in dem Spezialfall bearbeiten, dass man gerade für 5€ oder für 100€ Buchenholz kauft. Was sich hier als Ergebnis ergibt, kann nicht anders sein als das Ergebnis im allgemeinen Fall. Warum also nicht mit einem dieser Werte rechnen? Gilt das aber immer, dass man das darf? Wann darf man sich das trauen, nur einen Spezialfall zu behandeln, wenn eine allgemeine Aufgabe gegeben ist?

Die in der Schule gelöste Aufgabe hatte als Zusatzinformation angegeben, man solle von Orangen zum Preis von 1€ ausgehen. Dieser „Trick“ wurde bei der Holzaufgabe nicht mehr vorgegeben. Die Schüler und Schülerinnen sollten sehen, hier liegt eine analoge Aufgabe vor. Sie dürfen wieder einen beliebigen Preis vorgeben. Aber warum dürfen sie das eigentlich? Wie kann man das einer Aufgabe ansehen, dass man das darf? Muss man es sogar so machen? Wie der dritten Lösung anzusehen ist, muss man die Aufgabe nicht so bearbeiten. Freilich bleibt diese Lösung relativ abstrakt. Sie ist für Schüler und Schülerinnen, die abstrakt genug denken können, immerhin möglich und zeigt, dass das Ergebnis wirklich unabhängig ist vom konkreten Preis der Holzes.

Wie können andere Schüler die Unabhängigkeit vom konkreten Preis erkennen (und sich dabei dieses Aspektes des Prozentbegriffes bewusst werden) ?
Zunächst könnte man die selbe Aufgabe mit verschiedenen konkreten Preisen durchrechnen. Wählt man den Ausgangspreis z.B. doppelt so groß, werden alle Preise, die in der Rechnung eine Rolle spielen, doppelt so groß. Die auftretenden Prozentzahlen bleiben die gleichen.
In höheren Klassen könnte man für den Buchenpreis auch x verwenden, hätte dann 0,2x als 20% davon und 0,8x als 80%. Die Frage wäre, wie viel 0,2x von 0,8x sind, und das wären 25% unabhängig von x. In der 6. Klasse, die diese Aufgabe zu bearbeiten hatte, war diese Lösung noch nicht möglich. Der Vergleich der Rechnungen mit verschiedenen Preisen kann diesen Zusammenhang, dass sich der eingesetzte Preis letztlich wieder herauskürzt, aber durchaus zeigen und damit erst legitimieren, warum man diese Aufgabe so allgemein stellen darf.
Gleichzeitig sollten die Schüler auch erkennen: wenn eine Aufgabe so allgemein gestellt ist, dann muss das Allgemeine ja auch im Spezialfall gelten, also kann es durchaus sinnvoll sein, sich einen Spezialfall auszuwählen (am besten einen mit einfachen Zahlen).

2. Eine Mittelwertaufgabe

Ein weiterer Beispiel, das ich erwähnen möchte, bezieht sich auf Mittelwerte.

Jemand kann auf dem Hinweg eine Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h zurücklegen, auf dem Rückweg kommt er nur mit durchschnittlich 60 km/h vorwärst.
Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht er insgesamt?

Naheliegend ist hier auf 90 km/h zu tippen, also auf das arithmetische Mittel der beiden Geschwindigkeiten. Doch diese Lösung trifft nicht zu. Sie würde zutreffen, wenn der Betreffende jeweils die gleiche Zeit mit den beiden Geschwindigkeiten unterwegs wäre. Ist er aber nicht. Er braucht für den Rückweg sogar doppelt so lange.

Wieder ist die Aufgabe allgemein gestellt. Die zurückgelegte Strecke scheint keine Rolle zu spielen, nur dass sie in beiden Richtungen die gleiche ist.
Also wieder die Fragen: Darf ich eine beliebige Strecke annehmen? Gibt es unabhängig von der Strecke wirklich eine eindeutige Lösung der Aufgabe?

Als einfaches Zahlenbeispiel bieten sich hier 120 km an. Also dauert der Hinweg 1 Stunde und der Rückweg 2 Stunden. Insgesamt hat die Person 3 Stunden gebraucht um 240 km zurückzulegen, d.h. die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt 80 km/h.

Es sei dazu gesagt, dass es sich hier um das harmonische Mittel zwischen 60 km/h und 120 km/h handelt, wobei das harmonische Mittel bekanntlich immer kleiner ist als das arithmetische.

Wieder gilt: ist die Strecke doppelt so lange, dauert der Hin- und der Rückweg doppelt so lange. Die insgesamt zurückgelegte Strecke ist ebenfalls doppelt so groß, also hat sich an der Durchschnittsgeschwindigkeit nichts geändert.

Dass es sich um das harmonische Mittel handelt, kann natürlich auch ganz allgemein gezeigt werden:

Hinweg: $t_1 = \frac{s}{v_1}$, Rückweg: $t_2 = \frac{s}{v_2}$, Gesamt: $t_1+t_2 = \frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2} = \frac{2s}{v_{ges}}$

Also kürzt sich s heraus (d.h. der Wert ist unabhängig von der Strecke) und v_{ges} ist das harmonische Mittel von v_1 und v_2.

3. **Fazit**

Die Lösungsstrategie, scheinbar fehlende Angaben durch (rechentechnisch geeignete) Werte zu ergänzen, kann bei manchen Aufgaben durchaus sinnvoll sein und die Aufgabe wesentlich anschaulicher gestalten. Außerdem ist sie so leichter zu rechnen. Schüler und Schülerinnen sollten zu dieser Strategie durchaus animiert werden. Allerdings sollte auch diskutiert werden, warum dieses Vorgehen zulässig ist bzw. wo es sich der angenommene Wert wieder herauskürzt. Diese Allgemeinheit kann schon dadurch plausibel gemacht werden, dass man beobachtet, wie sich eine Verdoppelung oder Verzehnfachung der Ausgangsmenge auf die Zwischenergebnisse auswirkt und wo dieser Effekt wieder aufgehoben wird. Der exakte Nachweis bzw. das Rechnen ohne einen angenommenen Wert kann als Differenzierung den interessierten Schülern und Schülerinnen angeboten werden.