Sitzung am 9. Mai 2003

Herr FRIEDRICH PUKELSHEIM trägt vor: *Vom Fuß über Druckregler zu Wählerstimmen: Mathematisch-statistische Ein- und Ausblicke.*

Eines der ältesten Beispiele zur statistischen Versuchsplanung findet sich in Jacob Köbels 1584 gedruckter *Geometrey*. Ziel ist die Anfertigung eines Messstabs, wie er zu Köbels Zeiten zur Landvermessung benutzt wurde. Köbel schreibt[1, fol. 4 r]:

Es sollen sechtzehen mann/klein unnd groß/wie die ungefehrlich nach einander auß der Kirchen gehen/ein jeder vor dem andern einen Schuch stellen/unnd damit ein Lenge/die da gerad sechtzehen derselben Schuch begreiffet/messen/Dieselbige Lenge ist/unnd sol seyn/ein gerecht gemein Meßrute/damit man das Feldt messen sol/Und geschicht in gestalt wie in nachfolgender Figur angezeigt wirt.

Schon hier werden zwei Prinzipien deutlich, die auch heute noch Eckpfeiler der statistischen Versuchsplanung sind. Das eine Prinzip ist das der *Wiederholung*: Nicht der Schuh nur eines Menschen dient zur Normierung, sondern die Schuhe von sechzehn. Das zweite Prinzip ist das, was wir heute mit *Randomisierung* bezeichnen: Aus dem Kirchenvolk werden die Versuchspersonen *wie von ungefähr* – gemeint ist: zufällig – ausgesucht.

Wie diese Prinzipien verwirklicht werden, wird von dem Verfahren bestimmt, mit dem die Daten ausgewertet werden sollen. Bei Köbel hat die Vorgabe von 16 Schuhen den Vorteil, dass die Einheit *Fuß* aus der gemessenen Gesamtlänge ganz einfach durch fortlaufende Halbierung erhalten werden kann.

Natürlich sind die Fragestellungen, die uns heutzutage umtreiben, andere und die statistischen Verfahren, die zu ihrer Beantwortung eingesetzt werden, auch. Die Methoden der statistischen Versuchsplanung sind dabei nicht nur in den diversen Naturwissenschaften von großem Nutzen, sie können auch zur Qualitätsverbesserung bei industriellen Fertigungsprozessen eingesetzt werden[1].

An einem Beispiel lässt sich das Zusammenwirken von statistischen Methoden und praktischen Problemen am besten erkennen. Das Beispiel betrifft Druckregler in Kraftfahrzeugen. Eine wichtige Kennzahl zur Erfassung der Qualität dieser Druckleger ist der *Berstdruck*. Damit bezeichnet man den Druck, bei dem die Geräte zerstört werden. Um diesen Berstdruck zu maximieren, wurde ein geplanter statistischer Versuch durchgeführt[2].

Den eingesetzten Versuchsplan bezeichnen wir mit $OA\ (36, 2^{11} \times 3^{12}, 2)$. Das bedeutet, dass der Versuchsplan eine *orthogonale Anordnung* für 36 Versuchsläufe ist, wobei 11 Produktionsfaktoren auf 2 Stufen und 12 Produktionsfaktoren auf 3 Stufen variiert werden können. Der letzte Eintrag 2 heißt *Strenge;* er besagt, dass alle möglichen Kombinationen je zweier Faktoren gleich häufig vorkommen. Die Konstruktion solcher Versuchsplananordnungen ist eine Aufgabe der diskreten Mathematik, der Einsatz für die optimale Versuchsplanung ein Problem der mathematischen Statistik.

Die Beobachtungsdaten aus den 36 Versuchsläufen stellen eine beachtliche Informationsquelle dar, um das Zusammenspiel der diversen Produktionsfaktoren zu untersuchen. Im Beispiel wurde im Endergebnis der Berstdruck von vorher sehr unbefriedigenden 16 Bar auf respektable 22 Bar gesteigert. Zudem wurde die Standardabweichung des Produktionsprozesses halbiert.

Die statistische Versuchsplanung führt ganz allgemein zu Aussagen von dem Typ, dass der eine Anteil der Messdaten unter einer Kombination der Versuchsbedingungen erhoben werden soll, ein zweiter Anteil unter einer zweiten Kombination, ein dritter Anteil unter einer dritten usw. Die Frage, wie groß die Anteile ausfallen und wo sie zu platzieren sind, ist ein mathematisches Optimierungsproblem. Allerdings liefert der Optimierungsansatz als Lösung Gewichte, die kontinuierliche Werte annehmen[5].

Wenn aber – wie im obigen Beispiel – tatsächlich nur 36 Versuchsläufe gemacht werden können, dann müssen zur praktischen Umsetzung die kontinuierlichen Lösungsgewichte diskretisiert werden. Im Beispiel bedeutet das, dass die diskreten Anteile ein ganzzahliges Vielfaches von $^1/_{36}$ sein müssen. Der Anteil $^5/_{36}$ würde den Experimentator anweisen, 5 von insgesamt 36 Versuchsläufen unter den berechneten Versuchsbedingungen durchzuführen.

Das Problem, kontinuierliche Gewichte umzuwandeln in diskrete Anteile, stellt sich auch bei einem gänzlich anders gearteten Anwendungsbereich: bei Wahlsystemen. Aus mathematischer Sicht handelt es sich auch hier um ein Rundungsproblem[3]. Zum Beispiel ergibt das Wahlergebnis einer Bundestagswahl für die Parteien Stimmengewichte, die angesichts der großen Zahl der Wähler *de facto* kontinuierlich sind. Daraus müssen die Mandatsanteile berechnet werden, wie viele der 598 Bundestagsmandate auf die einzelnen Parteien entfallen.

Zu prüfen ist dabei, ob die in den einschlägigen Wahlgesetzen vorgeschriebenen Verrechnungsverfahren den verfassungsgemäßen Gleichheitsvorstellungen genügen. Bei Bundestagswahlen ist ein immer wiederkehrender Streitpunkt der Anfall von Überhangmandaten. Diese sind eine Auswirkung des Zweistimmensystems, das im Bundeswahlgesetz festgeschrieben ist.

Mit dem Zweistimmensystem soll, so beabsichtigt es das Bundeswahlgesetz, eine Verbindung zwischen einer Personenwahl und einer Verhältniswahl hergestellt werden. Nach den momentanen gesetzlichen Vorschriften wird diese Verbindung aber im Rechenverfahren nicht vollzogen. Etwaige Defizite bleiben im Raume stehen; dies sind die genannten Überhangmandate.

Die Mathematik stellt durchaus Methoden bereit, die beide Zielvorgaben – Personenwahl und Verhältniswahl – schon im Rechenverfahren miteinander verbinden. Unter diesen Alternativen sticht die *direktmandatsbedingte Divisormethode mit Standardrundung* hervor, sowohl wegen ihrer Transparenz als auch auf Grund der Tatsache, dass sie mit dem vom Bundesverfassungsgericht geprägten Begriff der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen bestens harmoniert[6,7].

Literatur:

1. Abt, M./Pukelsheim, F.: Improving manufacturing quality through planned experiments: Statistical methodology. *Surveys on Mathematics for Industry 5* (1995) 27–33.
2. Abt, M./Mayer, R./Pukelsheim, F.: Improving manufacturing quality through planned experiments: Pressure governor case study. *Surveys on Mathematics for Industry 5* (1995) 35–47.

3. Happacher, M./Pukelsheim, F.: Rounding probabilities: Maximum probability and minimum complexity multipliers. *Journal of Statistical Planning and Inference 85* (2000) 145–158.
4. Köbel, J.: *Geometrey. Von künstlichem Feldmessen und absehen allerhandt Höhe, Fleche, Ebne, Weitte und Breyte.* Frankfurt am Main, 1584. [Neudruck Stadtvermessungsamt Mainz, 1994]
5. Pukelsheim, F.: *Optimal Design of Experiments.* New York, 1993.
6. Pukelsheim, F.: Mandatszuteilungen bei Verhältniswahlen: Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen. *Allgemeines Statistisches Archiv 84* (2000) 447–459.
7. Pukelsheim, F.: Das Kohärenzprinzip, angewandt auf den Deutschen Bundestag. *Spektrum der Wissenschaft,* März 2004, 96.