

# Symmetriebrechung bei Variationsproblemen

Diplomarbeit  
von  
Stefan Krömer

für den Studiengang  
Diplom-Mathematik

eingereicht beim  
Institut für Mathematik  
der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät  
an der Universität Augsburg  
im Juni 2002

Erstgutachter: Prof. Dr. H.-J. Kielhöfer  
Zweitgutachter: Prof. Dr. S. Maier-Paape

Erklärung:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Diplomarbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Hilfsmittel erstellt habe. Ich habe sie weder als Doktorarbeit noch als Magister- oder Diplomarbeit bei einer anderen Universität oder Hochschule eingereicht.

Augsburg, den 12. Juni 2002

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . .	3
<b>1 Störung einer Mannigfaltigkeit von kritischen Punkten – ein abstrakter Zugang</b>	<b>5</b>
1.1 Existenz kritischer Punkte des gestörten Problems . . . . .	5
1.1.1 Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Verzweigung gestörter kritischer Punkte . . . . .	7
1.1.2 Eine Art Lyapunov-Schmidt-Reduktion . . . . .	10
1.1.3 Beweis von Lemma 1.1.4 und Satz 1.1.6 . . . . .	15
1.2 Nichtdegenerierte kritische Punkte . . . . .	18
1.2.1 Ein Satz über die Verzweigung stetiger Kurven . . . . .	20
1.2.2 Beweis von Satz 1.2.3 . . . . .	23
<b>2 Eine Klasse von semilinearen translationsinvarianten elliptischen Gleichungen über <math>\mathbb{R}^N</math></b>	<b>36</b>
2.1 Der höherdimensionale Fall . . . . .	39
2.1.1 Wohldefiniertheit und Regularität . . . . .	39
2.1.2 Existenz der kritischen Mannigfaltigkeit . . . . .	43
2.1.3 Fredholmeigenschaften . . . . .	58
2.1.4 Nichtdegeneriertheit der kritischen Mannigfaltigkeit . . . . .	61
2.2 Der eindimensionale Fall . . . . .	77

2.2.1	Existenz der kritischen Mannigfaltigkeit . . . . .	77
2.2.2	Nichtdegeneriertheit der kritischen Mannigfaltigkeit . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Anwendungen der abstrakten Aussagen</b>	<b>82</b>
3.1	Verzweigung vom essentiellen Spektrum des Laplace über $\mathbb{R}^N$ . . . . .	82
3.1.1	Problemstellung . . . . .	82
3.1.2	Einbettung in den abstrakten Rahmen . . . . .	85
3.1.3	Resultate . . . . .	87
3.1.4	Beweis der Resultate . . . . .	91
3.2	Störung elliptischer Ganzraumprobleme mit Variationsstruktur . . . . .	105
3.2.1	Problemstellung . . . . .	105
3.2.2	Einbettung in den abstrakten Rahmen und Existenz gestörter Lösungen . . . . .	107
3.2.3	Beweis von Satz 3.2.2 . . . . .	108
3.2.4	Ein Beispiel . . . . .	113
<b>A</b>	<b>Hilfsmittel</b>	<b>118</b>
A.1	Gleichmäßiges Verhalten von Taylorresttermen in Parametern . . . . .	118
A.2	Stetigkeit von Nemitsky-Operatoren . . . . .	119
A.3	Elliptische $L^p$ -Regularitätstheorie . . . . .	120
A.4	Sturmscher Vergleichssatz . . . . .	121

# Einleitung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem Nachweis von Lösungen gestörter Gleichungen mit Variationsstruktur in einem Hilbertraum, sowie Anwendungen dieser abstrakten Situation. Gegeben ist typischerweise eine einparametrische Schar von Potentialen, wobei das Potential für einen ausgezeichneten Parameterwert (das „ungestörte“ Problem) eine ganze Mannigfaltigkeit von kritischen Punkten besitzt, die durch eine Symmetrie der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung entsteht. Diese Symmetrie wird durch Änderung des Parameters der Potentialschar gebrochen. Von besonderem Interesse sind hier nichtkompakte kritische Mannigfaltigkeiten. Wir suchen kritische Punkte des gestörten Potentials (also eines Potentials der Schar mit einem Parameterwert nahe an dem ausgezeichneten), in der Nähe der kritischen Mannigfaltigkeit des ungestörten Problems.

In Kapitel 1 wird diese Frage von einem abstrakten Standpunkt aus erörtert. In Abschnitt 1.1 werden dabei hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz kritischer Punkte des gestörten Potentials in der Nähe der ungestörten kritischen Mannigfaltigkeit gegeben. Dabei wird zunächst das (unendlichdimensionale) Problem mit Hilfe der Methode von Lyapunov-Schmidt auf eine endlichdimensionale Gleichung reduziert, für die Lösungen mit Variationsmethoden nachgewiesen werden. Abschnitt 1.2 behandelt eine hinreichende Bedingung für die Nichtdegeneriertheit der gestörten kritischen Punkte, außerdem kann ihr Morse-Index berechnet werden. Kapitel 3 stellt zwei Anwendungen der Aussagen von Kapitel 1 auf elliptische Probleme über  $\mathbb{R}^N$  vor. Die Symmetrie des ungestörten Problems ist dabei durch Translationsinvarianz gegeben; die Störung enthält einen ortsabhängigen Term, der die Translationsinvarianz bricht. Als Vorbereitung für Kapitel 3 wird in Kapitel 2 eine Klasse von semilinearen elliptischen Gleichungen über  $\mathbb{R}^N$  besprochen, die Variationsstruktur besitzen. Das zugehörige Potential wird in den Anwendungen die Rolle des ungestörten Funktionals übernehmen. Die in diesem Zusammenhang gesammelten Informationen sind jedoch durchaus auch von eigenständigem Interesse.

In Abschnitt 3.1 werden die abstrakten Aussagen angewendet, um Verzweigung von der trivialen Lösung einer Gleichung der Form

$$\Delta\psi - \lambda\psi + A_1 |\psi|^{p_1-1}\psi + h(x)g(\psi) = 0$$

über  $\mathbb{R}^N$  bei  $\lambda = 0$  nachzuweisen (hier ist  $g(0) = 0$ , so daß  $\psi = 0$  triviale Lösung ist). Das bei  $\psi = 0$  linearisierte Problem, eine Eigenwertgleichung des Laplace-Operators über  $\mathbb{R}^N$ , läßt eine direkte Anwendung der gängigen Methoden für Verzweigungsprobleme (etwa den Satz von Crandall und Rabinowitz über Verzweigung mit eindimensionalem Kern oder den Satz von Böhme, Marino und Rabinowitz über Verzweigung bei Problemen mit Variationsstruktur, etc.)

nicht zu, da dafür stets isolierte Eigenwerte endlicher algebraischer Vielfachheiten benötigt werden. So etwas hat  $\Delta$  über  $\mathbb{R}^N$  (etwa auf  $L^2(\mathbb{R}^N)$ ) aber nicht – das Spektrum besteht ausschließlich aus dem essentiellen Spektrum. Das hier behandelte spezielle Problem kann nun durch Reskalierung in ein geeignetes Störungsproblem umgewandelt werden, auf das der abstrakte Zugang aus Kapitel 1 anwendbar ist und das gewünschte Verzweigungsergebnis liefert. A. Ambrosetti und M. Badiale wiesen mit diesen Methoden in [7] Verzweigung bei einem Modellproblem für  $N = 1$  mit der speziellen Wahl  $g(\psi) = |\psi|^{p_1-1} \psi$  nach. In diesem Artikel wird insbesondere der hier in Kapitel 1 vorgestellte abstrakte Zugang entwickelt. Es war mir möglich, das Modellproblem auf Gleichungen vom oben angegebenen Typ zu verallgemeinern, für eine große Klasse von Funktionen  $g$ , insbesondere auch für höhere Dimension  $N \geq 2$ .

Abschnitt 3.2 stellt eine von A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero und I. Peral in [5] behandelte direkte Anwendung des abstrakten Zugangs vor, auf ein gestörte elliptische Gleichung im Ganzraum von der Form

$$-\Delta u + f(u) + \epsilon h(x)g(u) = 0,$$

mit geeigneten Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$ . Von Interesse ist dabei auch immer die Frage, welche der Punkte aus einer Mannigfaltigkeit von ungestörten Lösungen unter Störung „erhalten“ bleiben. Darüberhinaus wird in Unterabschnitt 3.2.4 anhand eines Beispiels die Anwendung der in Abschnitt 1.2 ausgeführten abstrakten Aussagen zur Verzweigung stetiger Kurven demonstriert.

Eine Übersicht über zusätzliche, hier nicht vorgestellte Anwendungen kann man in [4] finden. Ähnliche Problemstellungen wurden auch schon von C. A. Stuart in [19] und R. J. Magnus in [15] behandelt. Beide Zugänge beruhen grundsätzlich auf dem Satz über implizite Funktionen (im Fall von [19] indirekt über Anwendung des Satzes von der Verzweigung mit eindimensionalem Kern von Crandall und Rabinowitz; diese Arbeit ist deshalb auch auf Gleichungen über  $\mathbb{R}$  beschränkt, höherdimensionale Gebiete können so nicht behandelt werden). Im Gegensatz zu der in dieser Diplomarbeit besprochenen Methode von Ambrosetti und Badiale benötigen diese Techniken stärkere Differenzierbarkeits- und Nichtdegeneriertheitsvoraussetzungen. Dafür kommen sie im wesentlichen ohne Variationsstruktur aus.

An dieser Stelle möchte ich mich noch bei Herrn Prof. Kielhöfer für die engagierte Betreuung meiner Arbeit herzlich bedanken. Dank geht auch an Prof. Maier-Paape, Christoph Gugg und Niko Tsoukmanis, für fruchtbare Gespräche und so manchen nützlichen Literaturverweis.

# Kapitel 1

## Störung einer Mannigfaltigkeit von kritischen Punkten – ein abstrakter Zugang

### 1.1 Existenz kritischer Punkte des gestörten Problems

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, unter geeigneten Voraussetzungen die Existenz kritischer Punkte eines gestörten Potentials in der Nähe bekannter kritischer Punkte des ungestörten Potentials zu finden. Das ungestörte Potential besitzt dabei eine ganze Mannigfaltigkeit kritischer Punkte, die typischerweise durch Symmetrie des Problems erzeugt wird. Die Störung bricht diese Symmetrie. Die Frage ist nun, an welchen Punkten der kritischen Mannigfaltigkeit kritische Punkte des gestörten Funktionals verzweigen.

Der hier präsentierte Zugang stammt von A. Ambrosetti und M. Badiale und ist [7] entnommen.

Wir gehen von folgender Situation aus: Es sei  $E$  ein Hilbertraum. Gesucht sind kritische Punkte des gestörten Funktionals

$$\begin{aligned} F_\epsilon &: E \rightarrow \mathbb{R}, \\ F_\epsilon(u) &= F(u) + G(\epsilon, u) \end{aligned}$$

mit dem ungestörten Funktional  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  und einer Störung  $G : [0, \tilde{\epsilon}) \times E \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei ist  $\epsilon \in [0, \tilde{\epsilon}) \subset \mathbb{R}$  der Störparameter. Von dem ungestörten Funktional  $F$

verlangen wir folgende Eigenschaften:

$$F \text{ ist } C^2. \tag{F_0}$$

$$\begin{aligned} &\text{Es existiert eine } d\text{-dimensionale } C^2\text{-Untermannigfaltigkeit} \\ &Z \text{ von } E \text{ mit } \nabla F(z) = 0 \text{ f\u00fcr alle } z \in Z. \end{aligned} \tag{F_1}$$

$$D\nabla F(z) \in L(E, E) \text{ ist Fredholm-Operator mit Index } 0 \text{ f\u00fcr alle } z \in Z. \tag{F_2}$$

$$\begin{aligned} &\text{Der Tangentenraum } T_z Z \text{ von } Z \text{ bei } z \text{ erf\u00fcllt} \\ &T_z Z = \text{Kern}[D\nabla F(z)] \text{ f\u00fcr alle } z \in Z. \end{aligned} \tag{F_3}$$

Die St\u00f6rung  $G$  erf\u00fclle

$$\begin{aligned} &(\epsilon, u) \mapsto G(\epsilon, u) : [0, \tilde{\epsilon}] \times E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig, und} \\ &G(0, u) = 0 \text{ f\u00fcr alle } u \in E. \end{aligned} \tag{G_0}$$

$$G \text{ ist } C^2 \text{ bez\u00fcglich } u \in E. \tag{G_1}$$

$$\begin{aligned} &(\epsilon, u) \mapsto \nabla_u G(\epsilon, u) : [0, \tilde{\epsilon}] \times E \rightarrow E, \\ &(\epsilon, u) \mapsto D_u \nabla_u G(\epsilon, u) : [0, \tilde{\epsilon}] \times E \rightarrow L(E, E) \end{aligned} \tag{G_2}$$

sind stetig.

Nach  $(G_0)$  ist  $F = F_0$  das ungest\u00f6rte Funktional. Wegen  $(F_1)$  gehen wir davon aus, dass  $F$  eine ganze Mannigfaltigkeit  $Z$  von kritischen Punkten besitzt (in der Anwendung erzeugt durch eine Symmetrie von  $F$ ). Die Mannigfaltigkeit wird in diesem Kontext als **nichtdegeneriert** (f\u00fcr  $F$ ) bezeichnet, wenn die Bedingungen  $(F_2)$  und  $(F_3)$  erf\u00fcllt sind. Ist  $\theta \mapsto z_\theta$  eine lokale Karte von  $Z$  um  $z_0 \in Z$ , so gilt nach  $(F_1)$   $\nabla F(z_\theta) = 0$  f\u00fcr  $\theta \in \mathbb{R}^d$  nahe 0, und durch Differenzieren nach  $\theta$  erh\u00e4lt man  $T_{z_\theta} Z \subset \text{Kern}[D\nabla F(z_\theta)]$ .  $(F_3)$  fordert also eigentlich nur, dass f\u00fcr  $z \in Z$  der Kern von  $D\nabla F(z)$  in  $T_z Z$  enthalten ist. Zusammen erlauben  $(F_2)$  und  $(F_3)$ , dass lokal um ein fixiertes (aber beliebiges)  $z_0 \in Z$  der Satzes \u00fcber implizite Funktionen auf die Gleichung  $\nabla F(z_\theta + e) = 0$  angewendet werden kann (die Gleichung in den Variablen  $\theta \in \mathbb{R}^d$  und  $e \in T_{z_0} Z^\perp$  kann lokal um  $(0, 0) \in \mathbb{R}^d \times T_{z_0} Z^\perp$  nach  $e$  aufgel\u00f6st werden) Deswegen kann es in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $Z$  keine weiteren kritischen Punkte von  $F$  geben.

F\u00fcr die Suche nach Verzweigungspunkten ben\u00f6tigen wir noch pr\u00e4zisere Informationen \u00fcber das asymptotische Verhalten der St\u00f6rung  $G$  f\u00fcr  $\epsilon \rightarrow 0$ . Zus\u00e4tzlich zu



$(G_0-G_2)$  fordern wir deshalb, dass  $G$  folgendes erfüllt:

$$\begin{aligned} & \text{Es existiert ein } \alpha > 0 \text{ und eine stetige Funktion } \Gamma : Z \rightarrow \mathbb{R} \\ & \text{mit } \Gamma(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} G(\epsilon, z) \text{ gleichmäßig in } z \in Z_K \\ & \text{und } \nabla_u G(\epsilon, z) = o(\epsilon^{\alpha/2}) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0, \text{ gleichmäßig in } z \in Z_K \\ & \text{für alle kompakten Teilmengen } Z_K \text{ von } Z. \end{aligned} \tag{G_3}$$

Wir werden sehen, dass das Verhalten der Funktion  $\Gamma$  bestimmt, von welchen Punkten aus  $Z$  gestörte kritische Punkte verzweigen.

**Bemerkung 1.1.1.** *Ist  $G(\epsilon, u)$  von der einfacheren Form  $G(\epsilon, u) = \epsilon^\alpha \tilde{G}(u)$  (mit einem  $\alpha > 0$ ), so sind sämtliche Forderungen dieses Abschnitts an  $G$  erfüllt, solange  $\tilde{G} \in C^2$  ist; insbesondere ist dann  $\Gamma(z) = \tilde{G}(z)$ . Die diversen technischen Bedingungen an  $G$  ( $(G_0-G_3)$ ), sowie die Forderungen an  $G$  in Satz 1.1.6) stellen lediglich sicher, dass sich  $G(\epsilon, u)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  im Wesentlichen wie  $\epsilon^\alpha \tilde{G}(u)$  verhält.*

In dem obigen abstrakten Rahmen wollen wir nun nach kritischen Punkten von  $F_\epsilon$  nahe der bekannten kritischen Mannigfaltigkeit  $Z$  des ungestörten Potentials  $F = F_0$  suchen. Genauer gesagt wollen wir Punkte  $z^* \in Z$  finden, von denen kritische Punkte von  $F_\epsilon$  verzweigen, und zwar im folgendem Sinne:

**Definition 1.1.2 (Verzweigung).**  $z^* \in Z$  wird als **Verzweigungspunkt gestörter kritischer Punkte von  $F_\epsilon$**  bezeichnet, wenn es Folgen  $(\epsilon_n) \subset (0, \tilde{\epsilon})$ ,  $(u_n) \subset E$  ( $u_n \in Z$  ist erlaubt!) gibt mit  $\epsilon_n \rightarrow 0$ ,  $u_n \rightarrow z^*$  für  $n \rightarrow \infty$ , und  $\nabla F_{\epsilon_n} u_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Paare  $(\epsilon_n, u_n)$  werden **von  $z^*$  verzweigenden gestörte kritische Punkte** genannt.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wann Verzweigung im Sinne von Definition 1.1.2 in der gegebenen Situation stattfindet.

### 1.1.1 Hinreichende und notwendige Bedingungen für die Verzweigung gestörter kritischer Punkte

**Definition 1.1.3 (Hügel und Tal).** *Es sei  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reellwertige Funktion über einem topologischen Raum  $X$ , und  $O \subset X$  sei eine offene Teilmenge, deren Abschluss  $\bar{O}$  in  $X$  kompakt ist. Wir sagen, dass  $h$  einen Hügel bzw. ein Tal in  $O$  hat, wenn es ein  $x_0 \in O$  gibt mit*

$$h(x) < h(x_0) \quad \text{für alle } x \in \partial O$$

beziehungsweise

$$h(x) > h(x_0) \quad \text{für alle } x \in \partial O.$$

Als Konsequenz nimmt  $h|_{\bar{O}}$  sein globales Maximum bzw. Minimum in  $O$  an.

Besitzt die Funktion  $\Gamma$  einen Hügel oder ein Tal, so existieren für kleine Werte des Störparameters  $\epsilon$  gestörte kritische Punkte nahe der ungestörten kritischen Mannigfaltigkeit  $Z$ :

**Lemma 1.1.4 (Existenz gestörter kritischer Punkte nahe der ungestörten kritischen Mannigfaltigkeit).** *Das gestörte Potential  $F_\epsilon$  erfülle  $(F_0-F_3)$  und  $(G_0-G_3)$ . Des weiteren existiere eine lokale Karte  $\theta \mapsto z_\theta$ ,  $U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow Z$  von  $Z$ , so dass  $\Gamma$  in einer relativ offenen Teilmenge  $Z_1 \subset Z$ , deren Abschluss im Bild dieser Karte liegt, ein Tal (oder einen Hügel) besitzt. Dann existieren für alle  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  kritische Punkte  $u_\epsilon$  von  $F_\epsilon$ , mit  $\text{dist}(u_\epsilon; Z_1) \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  (die Distanz in  $E$ ), sofern  $\epsilon_0 > 0$  hinreichend klein ist.*

Der Beweis wird in Abschnitt 1.1.3 ausgeführt. Als direkte Konsequenz von Lemma 1.1.4 ergibt sich folgende für Anwendungen interessante verschärfte Aussage:

**Satz 1.1.5 (Hinreichende Bedingung für die Verzweigung gestörter kritischer Punkte, Satz 1.3 in [7]).** *Das gestörte Potential  $F_\epsilon$  erfülle  $(F_0-F_3)$  und  $(G_0-G_3)$ . Außerdem besitze die Funktion  $\Gamma$  einen Hügel oder ein Tal über einer offenen, relativ kompakten (bezüglich der Topologie von  $Z$ ) Teilmenge  $Z_1 \subset Z$ , deren Abschluss im Bild einer Karte von  $Z$  liegt. Dann existieren für alle  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  ( $\epsilon_0 > 0$  hinreichend klein) kritische Punkte  $u_\epsilon$  von  $F_\epsilon$ , mit*

$$\text{dist}(u_\epsilon; M) \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0,$$

wobei  $M$  die (kompakte) Menge der Punkte in  $Z_1$  ist, wo  $\Gamma$  maximal (im Falle des Hügels) bzw. minimal (im Falle des Tals) wird, also

$$M := \left\{ z \in Z_1 : \Gamma(z) = \max_{y \in Z_1} \Gamma(y) \right\} \quad (\text{bei einem Hügel von } \Gamma \text{ über } Z_1), \text{ bzw.}$$

$$M := \left\{ z \in Z_1 : \Gamma(z) = \min_{y \in Z_1} \Gamma(y) \right\} \quad (\text{bei einem Tal von } \Gamma \text{ über } Z_1).$$

*Insbesondere gilt: Hat  $\Gamma$  ein striktes lokales Maximum oder Minimum in einem Punkt  $z^* \in Z$ , so existieren für alle  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  kritische Punkte  $u_\epsilon$  von  $F_\epsilon$ , mit  $u_\epsilon \rightarrow z^*$  in  $E$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , sofern  $\epsilon_0 > 0$  hinreichend klein ist. Der Punkt  $z^*$  ist also Verzweigungspunkt gestörter kritischer Punkte von  $F_\epsilon$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $\Gamma$  einen Hügel über  $Z_1$  hat, der Fall des Tals ist völlig analog zu beweisen. Für hinreichend große  $n \in \mathbb{N}$ , etwa  $n \geq n_0$ , liegt die  $1/n$ -Umgebung von  $M$  in  $Z$ ,

$$Z_1(n) := \bigcup_{z \in M} B_{1/n}(z) \cap Z, \tag{1.1}$$

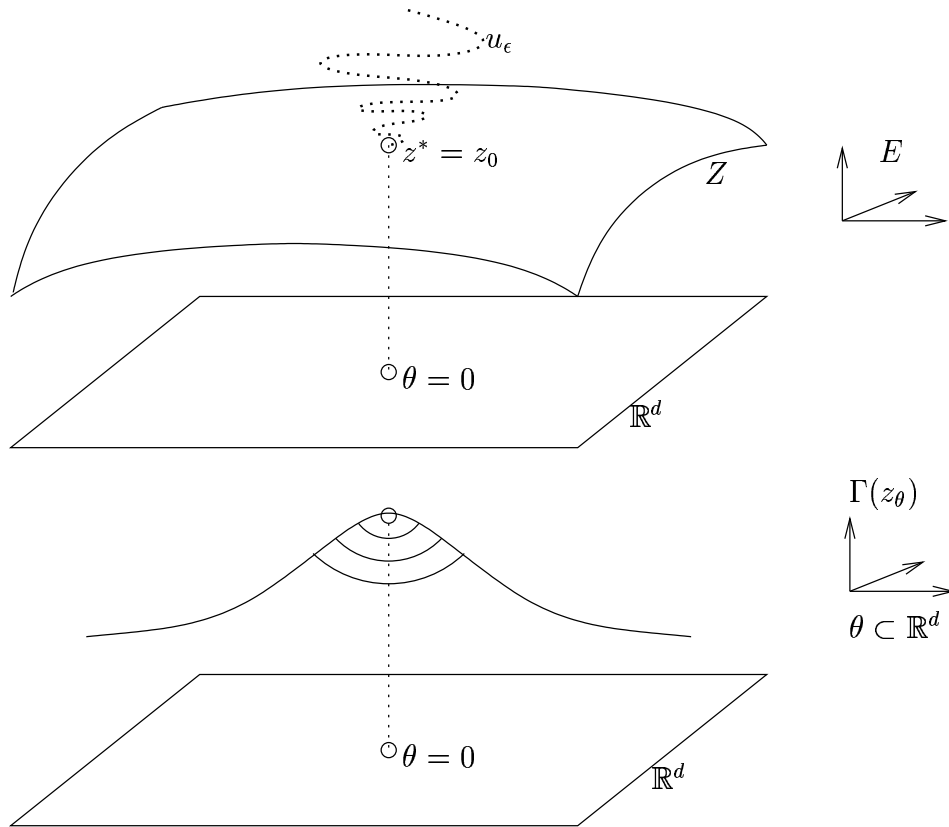


Abbildung 1.1: Verzweigung gestörter kritischer Punkte nach Satz 1.1.5

in  $Z_1$ , da  $Z_1$  offen (in  $Z$ ) und  $M$  kompakt ist. Wegen der Kompaktheit von  $\partial_Z Z_1(n)$  (des Randes von  $Z_1(n)$  bezüglich  $Z$ ) hat  $\Gamma$  auch einen Hügel in  $Z_1(n)$ , für alle  $n \geq n_0$ . Nach Lemma 1.1.4 existiert nun für jedes  $n \geq n_0$  ein  $\epsilon_0^{(n)} > 0$  und für  $0 < \epsilon < \epsilon_0^{(n)}$  kritische Punkte  $u_\epsilon^{(n)}$  von  $F_\epsilon$  mit  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}(u_\epsilon^{(n)}; Z_1(n)) = 0$ . Wir können O.B.d.A. annehmen, dass  $\epsilon_0^{(n)}$  so klein ist, dass

$$\text{dist}(u_\epsilon^{(n)}; Z_1(n)) < \frac{1}{n} \quad (1.2)$$

für alle  $\epsilon < \epsilon_0^{(n)}$ . Außerdem können wir die  $\epsilon_0^{(n)}$  so wählen, dass sie für  $n \rightarrow \infty$  monoton fallend gegen 0 konvergieren. Daher existiert für alle  $\epsilon \leq \epsilon_0^{n_0}$  genau ein  $m_\epsilon \geq n_0$  mit  $\epsilon \in (\epsilon_0^{(m_\epsilon+1)}, \epsilon_0^{(m_\epsilon)}]$ . Setze nun

$$\epsilon_0 := \epsilon_0^{(n_0)} \quad \text{und} \quad u_\epsilon := u_\epsilon^{(m_\epsilon)}$$

für  $\epsilon \leq \epsilon_0$ . Die  $u_\epsilon$  sind natürlich kritische Punkte von  $F_\epsilon$ , und

$$\begin{aligned} \text{dist}(u_\epsilon; M) &\leq \text{dist}(u_\epsilon^{(m_\epsilon)}; Z_1(m_\epsilon)) + \sup \{ \text{dist}(z; M) : z \in Z_1(m_\epsilon) \} \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} \frac{1}{m(\epsilon)} + \frac{1}{m(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \\ &\stackrel{(1.2)}{\leq} \end{aligned}$$

da  $m_\epsilon \rightarrow \infty$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . □

Die Funktion  $\Gamma$  liefert zudem eine notwendige Bedingung für die Existenz von Verzweigungspunkten:

**Satz 1.1.6 (Notwendige Bedingung für Verzweigung).** *Das gestörte Potential  $F_\epsilon$  erfülle  $(F_0-F_3)$  und  $(G_0-G_3)$ . Es sei  $z^* \in Z$  ein Verzweigungspunkt gestörter kritischer Punkte von  $F_\epsilon$ , und  $\theta \mapsto z_\theta$  sei eine lokale Karte von  $Z$  um  $z^* = z_0$ . Zusätzlich gelte  $\nabla G(\epsilon, z) = O(\epsilon^\alpha)$  lokal gleichmäßig in  $z \in Z$  (lies  $\nabla G = \nabla_u G$ ; hier und im folgenden wird der Index  $u$  bei Ableitungen von  $G$  nach  $u$  abkürzend weggelassen), und es existiere eine stetige Funktion  $\gamma : Z \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\gamma(z_\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} \nabla_\theta G(\epsilon, z_\theta)$  gleichmäßig für  $\theta$  nahe 0. (Zusammen mit  $(G_3)$  impliziert letzteres, dass  $\Gamma$  nahe  $z^*$  differenzierbar ist und  $\nabla_\theta \Gamma(z_\theta) = \gamma(z_\theta)$ ). Dann ist  $z^*$  kritischer Punkt von  $\Gamma$ , also  $\nabla_\theta \Gamma(z_\theta)|_{\theta=0} = 0$ .*

Für die Beweise von Lemma 1.1.4 und Satz 1.1.6 wollen wir im folgenden Unterabschnitt zunächst einige Hilfsaussagen bereitstellen.

### 1.1.2 Eine Art Lyapunov-Schmidt-Reduktion

Die Nichtdegeneriertheit der kritischen Mannigfaltigkeit  $Z$  des ungestörten Problems wird es uns erlauben, uns bei der Suche nach kritischen Punkten von  $F_\epsilon$  auf eine endlichdimensionale gestörte Mannigfaltigkeit zurückzuziehen - die Methode hierzu ist eine Lyapunov-Schmidt-Reduktion. Eine geeignete gestörte Mannigfaltigkeit kann man durch Lösung einer Hilfsgleichung erhalten; dies geschieht in Lemma 1.1.8. Zuvor benötigen wir jedoch erst eine Aussage zur Invertierbarkeit von  $D\nabla F(z)$ :

**Lemma 1.1.7.** *Es gelte  $(F_0-F_3)$ . Dann ist für alle  $z \in Z$   $D\nabla F(z)|_{T_z Z^\perp}$  stetig invertierbar, und die Invertierbarkeit ist lokal gleichmäßig in  $z$ , das heißt, es existiert zu jedem  $z_0 \in Z$  eine Umgebung  $U$  von  $z_0$  in  $Z$ , so dass für alle  $z \in U$  und  $w \in T_z Z^\perp$  gilt*

$$\|D\nabla F(z)w\| \geq C \|w\|,$$

wobei  $C > 0$  eine von  $z$  und  $w$  unabhängige Konstante ist.

*Beweis.* Nach  $(F_2)$  und  $(F_3)$  ist der symmetrische Operator  $D\nabla F(z)$  auf  $T_z Z^\perp$  bijektiv, und nach dem Satz von der offenen Abbildung auch stetig invertierbar, also existiert eine Konstante  $C > 0$  (etwa  $C = C(z) := \|D\nabla F(z)|_{T_z Z^\perp}^{-1}\|^{-1}$ ) mit

$$\|D\nabla F(z)w\| \geq C \|w\|.$$

$C$  ist dabei unabhängig von  $w \in T_{z_\theta} Z^\perp$ . Wir wollen zeigen, dass  $C$  auch unabhängig von  $z$  gewählt werden kann, für alle  $z$  aus einer geeigneten Umgebung von  $z_0 \in Z$ . Dazu sei  $\theta \mapsto z_\theta$  eine lokale Karte von  $Z$  um  $z_0$ . Es bezeichne  $P_\theta$  den orthogonalen Projektor auf  $T_{z_\theta} Z^\perp$  in  $E$ . Für  $\theta$  nahe genug bei 0 ist  $P_\theta T_{z_0} Z^\perp = T_{z_\theta} Z^\perp$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} I(\theta) &:= \left\| D\nabla F(z_\theta)|_{T_{z_\theta} Z^\perp}^{-1} \right\|^{-1} \\ &= \inf \{ \|D\nabla F(z_\theta)w\| : w \in T_{z_\theta} Z^\perp, \|w\| = 1 \} \\ &= \inf \left\{ \frac{\|D\nabla F(z_\theta)P_\theta w\|}{\|P_\theta w\|} : w \in T_{z_0} Z^\perp, \|w\| = 1 \right\}, \end{aligned}$$

und da  $\|P_\theta\| \leq 1$  und  $D\nabla F(z_\theta)P_\theta = D\nabla F(z_\theta)$  ist, folgt

$$\begin{aligned} I(\theta) &\geq \inf \{ \|D\nabla F(z_\theta)w\| : w \in T_{z_0} Z^\perp, \|w\| = 1 \} \\ &\geq \inf \{ \|P_0 D\nabla F(z_\theta)w\| : w \in T_{z_0} Z^\perp, \|w\| = 1 \}. \end{aligned}$$

Da  $D\nabla F(u)$  stetig in  $u$  ist, ist auch  $\theta \mapsto P_0 D\nabla F(z_\theta)$  stetig, und deshalb besitzt  $P_0 D\nabla F(z_\theta)|_{T_{z_0} Z^\perp}$  in der Nähe von  $\theta = 0$  eine in  $\theta$  stetige Inverse. Löse dazu die Gleichung

$$AP_0 D\nabla F(z_\theta)|_{T_{z_0} Z^\perp} = \text{Id} \in L(T_{z_0} Z^\perp, T_{z_0} Z^\perp)$$

(als Gleichung in  $A$  und  $\theta$ ) nach  $A \in L(T_{z_0} Z^\perp, T_{z_0} Z^\perp)$  lokal um  $A_0 = (D\nabla F(z_0)|_{T_{z_0} Z^\perp})^{-1}$  und  $\theta_0 = 0$  mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen auf. Auf diese Weise erhält man eine in  $\theta$  stetige Linksinverse von  $P_0 D\nabla F(z_\theta)|_{T_{z_0} Z^\perp}$ ; analog kann man auch eine in  $\theta$  stetige Rechtsinverse erhalten, die natürlich mit der Linksinversen übereinstimmen muss. Da nun

$$\inf \{ \|P_0 D\nabla F(z_\theta)w\| : w \in T_{z_0} Z^\perp, \|w\| = 1 \} = \left\| (P_0 D\nabla F(z_\theta)|_{T_{z_0} Z^\perp})^{-1} \right\|^{-1}$$

stetig in  $\theta$  ist, existiert eine Konstante  $C > 0$  (unabhängig von  $\theta$ ) mit  $I(\theta) \geq C$  für alle  $\theta$ , die nahe genug bei 0 liegen, was behauptet war.  $\square$

**Lemma 1.1.8.** *Es gelte  $(F_0-F_3)$ ,  $(G_0-G_2)$ . Sei  $z_0 \in Z$ ,  $\theta \mapsto z_\theta$  eine lokale Karte von  $Z$  um  $z_0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $V$  von 0 in  $\mathbb{R}^d$ , ein  $\epsilon_0 > 0$  und eine Funktion  $w : [0, \epsilon_0) \times V \rightarrow E$  mit  $w(\epsilon, \theta) \in T_{z_\theta} Z^\perp$ , so dass*

$$\nabla F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)) \in T_{z_\theta} Z \quad \text{für alle } \epsilon \in [0, \epsilon_0), \theta \in V. \quad (1.3)$$

Die Funktion  $w$  ist auf  $[0, \epsilon_0) \times V$  durch obige Eigenschaften eindeutig bestimmt. Darüberhinaus ist  $w$  stetig, und wenn  $\nabla F_\epsilon$   $k$ -mal stetig differenzierbar in  $u$  ist, so auch  $w$  in  $\theta$ . Insbesondere ist nach  $(F_0)$  und  $(G_1)$   $w$  in  $\theta$  mindestens einmal stetig differenzierbar.

*Beweis.* Es sei  $\{q_i(\theta) : i = 1, \dots, d\} \subset E$  eine Basis von  $T_{z_\theta}Z$ , mit in  $\theta$  stetig differenzierbaren  $q_i$  (da  $Z$   $C^2$ -Mannigfaltigkeit ist, existieren solche  $q_i$ ). Setze für  $\epsilon \in [0, \tilde{\epsilon})$ ,  $\theta$  aus dem Definitionsbereich der Karte  $z$  in  $\mathbb{R}^d$ ,  $w \in E$  und  $a \in \mathbb{R}^d$

$$H(\epsilon, \theta, w, a) := \begin{pmatrix} \nabla F_\epsilon(z_\theta + w) - \sum_{i=1}^d a_i q_i(\theta) \\ \langle w, q_1(\theta) \rangle \\ \vdots \\ \langle w, q_d(\theta) \rangle \end{pmatrix} \in E \times \mathbb{R}^d,$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt in  $E$  bezeichnet. Betrachte nun die Gleichung

$$H(\epsilon, \theta, w, a) = 0 \tag{1.4}$$

lokal um  $(\epsilon, \theta, w, a) = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times E \times \mathbb{R}^d$ . Offensichtlich gilt  $H(0, 0, 0, 0) = 0$ . Wir wollen die Gleichung (1.4) nun mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen nach  $(w, a)$  auflösen. Die so erhaltene Funktion  $w$  hat dann offensichtlich die in der Aussage des Lemmas geforderten Eigenschaften. Zu zeigen bleibt, dass  $D_{(w,a)}H(0, 0, 0, 0) \in L(E \times \mathbb{R}^d, E \times \mathbb{R}^d)$  bijektiv ist. Es gilt für  $h \in E$ ,  $b \in \mathbb{R}^d$

$$D_{(w,a)}H(0, 0, 0, 0)(h, b) = \begin{pmatrix} D\nabla F_0(z_0)h - \sum_{i=1}^d b_i q_i(0) \\ \langle h, q_1(0) \rangle \\ \vdots \\ \langle h, q_d(0) \rangle \end{pmatrix}.$$

Da  $D\nabla F_0(z_0)$  symmetrisch ist, ist nach  $(F_3)$   $\text{Bild } D\nabla F_0(z_0) \subset T_{z_0}Z^\perp$ . Mit  $(F_2)$  folgt sogar  $\text{Bild } D\nabla F_0(z_0) = T_{z_0}Z^\perp$ . Ist nun  $D_{(w,a)}H(0, 0, 0, 0)(h, b) = 0$ , so muss  $b = 0$  gelten, denn  $D\nabla F_0(z_0)h \perp \sum_{i=1}^d b_i q_i(0)$ , und die  $q_i(0)$  sind Basis von  $T_{z_0}Z$ . Des weiteren ist  $D\nabla F_0(z_0)h = 0$ . Zugleich ist  $h \in T_{z_0}Z^\perp$ , und damit folgt auch  $h = 0$ , womit  $D_{(w,a)}H(0, 0, 0, 0)$  injektiv ist. Zur Surjektivität: Es seien  $v \in E$ ,  $c \in \mathbb{R}^d$  beliebig gegeben. Es existieren  $v_1 \in T_{z_0}Z$ ,  $v_2 \in T_{z_0}Z^\perp$  mit  $v = v_1 + v_2$ . Wähle nun ein  $h_1 \in T_{z_0}Z$  und ein  $b \in \mathbb{R}^d$ , so dass  $\langle h_1, q_i(0) \rangle = c_i$  für  $i = 1, \dots, d$  und  $-\sum_{i=1}^d b_i q_i(0) = v_1$ . Da  $\text{Bild } D\nabla F_0(z_0) = T_{z_0}Z^\perp$  und  $\text{Kern } D\nabla F_0(z_0) = T_{z_0}Z$  existiert auch ein  $h_2 \in T_{z_0}Z^\perp$  mit  $D\nabla F_0(z_0)h_2 = v_2$ . Insgesamt erhält man so  $D_{(w,a)}H(0, 0, 0, 0)(h_1 + h_2, b) = (v, c)$ .

Natürlich kann man die Gleichung (1.4) ganz analog lokal um jedes  $(\epsilon, \theta, w, a) = (0, \theta_0, 0, 0)$  (nicht nur  $\theta_0 = 0$ ) auflösen, mit beliebigem  $\theta_0$  aus dem Definitionsbereich der Karte  $\theta \mapsto z_\theta$ . Man erhält eine Schar von impliziten Funktionen  $w_{\theta_0}$ , die

wegen der Eindeutigkeitsaussage des Satzes über implizite Funktionen paarweise überall dort, wo sich ihre Definitionsbereiche überschneiden, übereinstimmen müssen. Daher gilt  $w(0, \theta) = 0$  für alle  $\theta$  mit  $(0, \theta)$  aus dem Definitionsbereich von  $w$ , da offensichtlich  $w_\theta(0, \theta) = 0$  ist, und  $w = w_\theta$  auf dem gemeinsamen Teil der Definitionsbereiche beider Funktionen ist. (Bemerkung:  $w(\epsilon, \theta)$  kann sogar auf jedem kompakten Teilbereich  $K$  des Definitionsbereichs der Karte  $\theta \mapsto z_\theta$  durch Zusammensetzen endlich vieler (geeigneter)  $w_{\theta_0}$  erklärt werden, für alle  $|\epsilon| < \epsilon_0 = \epsilon_0(K)$ ).  $\square$

Aufgrund der Stetigkeit von  $w$  gilt  $w(\epsilon, \theta) \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Später werden wir aber noch präzisere Informationen über Konvergenzgeschwindigkeit benötigen. Diese liefert das folgende Lemma:

**Lemma 1.1.9.** *Es gelte  $(F_0-F_2)$  sowie  $(G_0-G_2)$ .  $\theta \mapsto z_\theta$  sei eine lokale Karte von  $Z$  um  $z_0$ , und es existiere ein Funktion  $\beta : [0, \tilde{\epsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\beta(\epsilon) > 0$  für  $\epsilon \neq 0$ ,  $\beta(\epsilon) \rightarrow 0 = \beta(0)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  und*

$$\nabla G(\epsilon, z) = O(\beta(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0, \text{ lokal gleichmäßig in } z \in Z.$$

Dabei ist  $w$  wieder die implizite Funktion aus Lemma 1.1.8. Dann gilt

$$w(\epsilon, \theta) = O(\beta(\epsilon)) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0, \text{ lokal gleichmäßig in } \theta.$$

*Beweis.* Es sei  $P_\theta$  die orthogonale Projektion auf  $T_{z_\theta} Z^\perp$ . Nach Definition von  $w$  gilt für  $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ ,  $\theta$  aus einer Umgebung der 0 im  $\mathbb{R}^d$

$$P_\theta \nabla F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)) = 0.$$

Taylorentwicklung nach  $w$  um  $w = 0$  liefert

$$P_\theta \nabla G(\epsilon, z_\theta) + D \nabla F(z_\theta) w(\epsilon, \theta) + P_\theta D \nabla G(\epsilon, z_\theta) w(\epsilon, \theta) + P_\theta R(\epsilon, z_\theta, w(\epsilon, \theta)) = 0$$

wobei der Restterm  $R(\epsilon, z_\theta, w) = o(w)$  erfüllt, gleichmäßig für beschränkte  $\epsilon, \theta$  (Zur Gleichmäßigkeit des Restterms siehe Lemma A.1.1; diese Gleichmäßigkeit der Taylorreste wird im Rest der Arbeit ohne weiteren Kommentar verwendet). Nach Lemma 1.1.7 existiert eine Konstante  $C > 0$  mit

$$\|D \nabla F(z_\theta) w\| \geq C \|w\|.$$

$C$  ist dabei unabhängig von  $\theta$  ( $\theta$  aus einer geeigneten Umgebung der 0 im  $\mathbb{R}^d$ ) und  $w \in T_{z_\theta} Z^\perp$ . Damit folgt dann

$$C \|w(\epsilon, \theta)\| \leq \|\nabla G(\epsilon, z_\theta)\| + \|D \nabla G(\epsilon, z_\theta)\| \|w(\epsilon, \theta)\| + \|R(\epsilon, z_\theta, w(\epsilon, \theta))\|. \quad (1.5)$$

Für hinreichend kleine  $\epsilon$  (beachte: da  $w$  stetig ist, gilt  $w(\epsilon, \theta) \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  gleichmäßig für beschränkte  $\theta$ , so dass  $w(\epsilon, \theta)$  für kleine  $\epsilon$  ebenfalls klein wird) haben wir mit  $(G_2)$

$$\|D\nabla G(\epsilon, z_\theta)\| \|w(\epsilon, \theta)\| + \|R(\epsilon, z_\theta, w(\epsilon, \theta))\| \leq \frac{C}{2} \|w(\epsilon, \theta)\|.$$

Dies in (1.5) eingesetzt liefert schließlich

$$\frac{C}{2} \|w(\epsilon, \theta)\| \leq \|\nabla G(\epsilon, z_\theta)\| \leq C_1 \beta(\epsilon),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Nach der Definition von  $w$  ist klar, dass  $z_\theta + w(\epsilon, \theta)$  ein kritischer Punkt von  $F_\epsilon$  ist, wenn nur

$$\langle \nabla F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)), \partial_i z_\theta \rangle = 0 \quad (1.6)$$

für alle  $i = 1, \dots, d$  gilt (man beachte, dass die partiellen Ableitungen der Karte  $\theta \mapsto z_\theta$ ,  $\{\partial_i z_\theta : i = 1, \dots, d\}$ , stets eine Basis von  $T_{z_\theta} Z$  bilden) – die Gleichung  $\nabla F_\epsilon(u) = 0$  wurde mit der Methode von Lyapunov-Schmidt auf ein endlichdimensionales Problem reduziert. Diese Gleichung ist vom variationellen Standpunkt gesehen jedoch ein wenig unhandlich, da nicht ohne weiteres klar ist, ob (1.6) ein Potential besitzt. Daher hätten wir stattdessen lieber ein (für kleine  $\epsilon$ ) äquivalentes Problem mit offensichtlicher Variationsstruktur. Im nächsten Lemma werden wir nun sehen, dass es genügt, statt Lösungen von (1.6) kritische Punkte des endlichdimensionalen Funktionals  $\theta \mapsto F_\epsilon(z_\theta, w(\epsilon, \theta))$  zu finden.

**Lemma 1.1.10.** *Es gelte  $(F_0-F_2)$  sowie  $(G_0-G_2)$ .  $\theta \mapsto z_\theta$ ,  $V \rightarrow Z$  sei eine lokale Karte von  $Z$  um  $z_0 \in Z$  mit dem offenen Definitionsbereich  $V \subset \mathbb{R}^d$  ( $0 \in V$ ), und  $w$  bezeichne wieder die implizite Funktion aus Lemma 1.1.8 (O.B.d.A. sei  $w$  für hinreichend kleine  $\epsilon$  auf ganz  $V$  erklärt). Es sei nun  $\epsilon$  beliebig (hinreichend klein), aber fest gewählt. Setze  $h(\theta) := F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta))$  für  $\theta \in V$ . Dann ist  $\varphi \in V$  ein kritischer Punkt von  $h$ , i.e.*

$$\nabla_\theta h(\varphi) = 0 \in \mathbb{R}^d$$

dann und nur dann, wenn  $z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)$  ein kritischer Punkt von  $F_\epsilon$  ist, also

$$\nabla F_\epsilon(z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)) = 0 \in E$$

**Bemerkung 1.1.11.** *Jeder Punkt  $u \in E$ , nahe genug bei  $Z$ , lässt sich darstellen als  $u = z + w$  mit einem  $z \in Z$  und einem  $w \in T_z Z^\perp$  (Ein Beweis hiervon wird im Beweis von Satz 1.1.6 ausgeführt). Insbesondere besitzen kritische Punkte  $u_c$  von  $F_\epsilon$ , die bei einem  $z^* \in Z$  verzweigen, eine solche Darstellung  $u_c = z_c + w_c$ . Nach Lemma 1.1.8 muss dann aber  $w_c = w(\epsilon, \theta)$  gelten, sofern  $z_c = z_\theta$  für eine lokale Karte  $\theta \mapsto z_\theta$  um  $z^*$  gilt. In der Äquivalenzaussage des Lemmas 1.1.10 stellt die implizit angenommene Existenz einer solchen Darstellung daher keine Restriktion dar.*



**Beweis von Lemma 1.1.10.** Schreibe abkürzend  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ .

( $\Leftarrow$ ) Es gelte  $\nabla F_\epsilon(z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)) = 0$ . Dann folgt sofort

$$\partial_i h(\varphi) = \langle \nabla F_\epsilon(z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)), \partial_i z_\varphi + \partial_i w(\epsilon, \varphi) \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

( $\Rightarrow$ ) Es gelte  $\nabla_\theta h(\varphi) = 0$ . Also gilt für  $i = 1, \dots, d$

$$0 = \partial_i h(\varphi) = \langle \nabla F_\epsilon(z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)), \partial_i z_\varphi \rangle + \langle \nabla F_\epsilon(z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)), \partial_i w(\epsilon, \varphi) \rangle. \quad (1.7)$$

Nach Lemma 1.1.8 existieren  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$  mit

$$\nabla F_\epsilon(z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)) = \sum_{j=1}^d a_j \partial_j z_\varphi,$$

zudem gilt  $\langle w(\epsilon, \theta), \partial_i z_\theta \rangle = 0$  für alle  $\theta \in V$ . Differentiation letzterer Gleichung liefert

$$0 = \partial_i \langle w(\epsilon, \theta), \partial_j z_\theta \rangle = \langle \partial_i w(\epsilon, \theta), \partial_j z_\theta \rangle + \langle w(\epsilon, \theta), \partial_i \partial_j z_\theta \rangle.$$

Beides in (1.7) eingesetzt ergibt nun

$$\sum_{j=1}^d a_j \langle \partial_j z_\varphi, \partial_i z_\varphi \rangle = \sum_{j=1}^d a_j \langle \partial_i \partial_j z_\varphi, w(\epsilon, \varphi) \rangle.$$

Definiert man Matrizen  $A, B(\epsilon)$  durch  $A_{ij} = \langle \partial_j z_\varphi, \partial_i z_\varphi \rangle$  und  $B(\epsilon)_{ij} = \langle \partial_i \partial_j z_\varphi, w(\epsilon, \varphi) \rangle$ , so kann man diese Gleichung in der Form

$$(A - B(\epsilon))a = 0$$

schreiben. Da  $\theta \mapsto z_\theta$  eine  $C^1$ -Karte der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $Z$  ist, ist die Matrix  $A$  regulär. Außerdem konvergiert  $w(\epsilon, \varphi)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen 0, und damit auch  $B(\epsilon) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Deswegen ist für hinreichend kleine  $\epsilon$  die gestörte Matrix  $A - B(\epsilon)$  ebenfalls invertierbar, und es folgt  $a = 0$  und damit auch  $\nabla F_\epsilon(z_\varphi + w(\epsilon, \varphi)) = 0$ .  $\square$

Nun haben wir alle Hilfsmittel bereitgestellt, um die Hauptaussagen dieses Abschnitts zu beweisen.

### 1.1.3 Beweis von Lemma 1.1.4 und Satz 1.1.6

*Beweis von Lemma 1.1.4.* Wir beweisen den Satz für den Fall, dass  $\Gamma$  ein Tal in  $Z_1$  hat, der Beweis für den Hügel geht analog. Nach Voraussetzung existiert also

ein  $z^* \in Z_1$  mit  $\Gamma(z^*) < \Gamma(z)$  für alle  $z \in \partial_Z Z_1$  (dem Rand von  $Z_1$  bezüglich dem metrischen Raum  $Z$ ).  $\hat{Z}_1 \subset \mathbb{R}^d$  bezeichne das Urbild von  $Z_1$  unter der Karte  $\theta \mapsto z_\theta$ . Es sei  $(\epsilon, \theta) \mapsto w(\epsilon, \theta)$  wieder die Lösung von  $\nabla F_\epsilon(z_\theta + w) \in T_{z_\theta} Z$  nahe  $z^* = z_0$  (o.B.d.A) nach Lemma 1.1.8. Da  $Z_1$  im Bild der Karte  $\theta \mapsto z_\theta$  relativ kompakt ist, ist auch  $\hat{Z}_1$  relativ kompakt im deren (offenem) Definitionsbereich, so dass  $w$  bei Bedarf für hinreichend kleine  $\epsilon$  auf ganz  $\hat{Z}_1$  fortgesetzt werden kann. Nach Lemma 1.1.10 genügt es, für kleine  $\epsilon$  kritische Punkte  $\theta_\epsilon \in \hat{Z}_1$  von

$$\theta \mapsto h_\epsilon(\theta) := F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta))$$

zu finden. Diese liefern dann kritische Punkte

$$u_\epsilon := z_{\theta_\epsilon} + w(\epsilon, \theta_\epsilon)$$

von  $F_\epsilon$ , die  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}(u_\epsilon; Z_1) = 0$  erfüllen, da ja  $z_{\theta_\epsilon} \in Z_1$  und  $w(\epsilon, \theta_\epsilon) \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nun zur Existenz dieser kritischen Punkte von  $h_\epsilon$ :

Mittels Taylorentwicklung nach  $w$  erhalten wir

$$\begin{aligned} h_\epsilon(\theta) &= F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)) \\ &= F_\epsilon(z_\theta) + DF_\epsilon(z_\theta)w(\epsilon, \theta) + D^2F_\epsilon(z_\theta)[w(\epsilon, \theta), w(\epsilon, \theta)] \\ &\quad + R(\epsilon, z_\theta, w(\epsilon, \theta)) \\ &= F(z_\theta) + G(\epsilon, z_\theta) + DG(\epsilon, z_\theta)w(\epsilon, \theta) + D^2F_\epsilon(z_\theta)[w(\epsilon, \theta), w(\epsilon, \theta)] \\ &\quad + R(\epsilon, z_\theta, w(\epsilon, \theta)), \end{aligned} \tag{1.8}$$

mit einem Restterm  $R(\epsilon, \theta, w(\epsilon, \theta)) = o(\|w(\epsilon, \theta)\|^2)$ , gleichmäßig für beschränkte  $\epsilon, \theta$ . Nach  $(G_3)$  gilt außerdem  $DG(\epsilon, z_\theta) = o(\epsilon^{\alpha/2})$ . Lemma 1.1.9 impliziert folglich  $w(\epsilon, \theta) = o(\epsilon^{\alpha/2})$ , so dass

$$\begin{aligned} DG(\epsilon, z_\theta)w(\epsilon, \theta) &= o(\epsilon^\alpha), \\ R(\epsilon, z_\theta, w(\epsilon, \theta)) &= o(\epsilon^\alpha), \\ D^2F_\epsilon(z_\theta)[w(\epsilon, \theta), w(\epsilon, \theta)] &= o(\epsilon^\alpha). \end{aligned}$$

(für  $\epsilon \rightarrow 0$ , jeweils gleichmäßig für beschränkte  $\theta$ ).  $(G_3)$  liefert auch noch

$$G(\epsilon, z_\theta) = \epsilon^\alpha \Gamma(z_\theta) + o(\epsilon^\alpha)$$

Zuletzt ist  $F$  konstant längs seiner kritischen Mannigfaltigkeit  $Z$ , also  $F(z_\theta) = F(z^*)$ . All das eingesetzt in (1.8) ergibt

$$h_\epsilon(\theta) = F(z^*) + \epsilon^\alpha \Gamma(z_\theta) + R_1(\epsilon, \theta) \tag{1.9}$$

mit einem Restterm  $R_1(\epsilon, \theta) = o(\epsilon^\alpha)$  gleichmäßig für beschränkte  $\theta$ . Da  $\Gamma$  ein Tal in  $Z_1$  hat, hat die Funktion  $\theta \mapsto \Gamma(z_\theta)$  ein Tal in  $\hat{Z}_1$ , und es existiert (wegen der Kompaktheit von  $\partial \hat{Z}_1 \subset \mathbb{R}^d$ ) eine Konstante  $\delta > 0$  mit

$$\Gamma(z_\theta) - \Gamma(z_0) \geq \delta > 0$$

für alle  $\theta \in \partial \hat{Z}_1$ . Ist nun  $\epsilon$  so klein, dass  $|R_1(\epsilon, \theta)| \leq \frac{1}{2}\epsilon^\alpha \delta$ , so folgt mit (1.9)

$$h_\epsilon(\theta) - h_\epsilon(0) \geq \frac{1}{2}\epsilon^\alpha \delta > 0$$

für alle  $\theta \in \partial \hat{Z}_1$ , so dass auch  $h_\epsilon$  ein Tal in  $\hat{Z}_1$  hat. Insbesondere nimmt  $h_\epsilon$  dann aber ein Minimum in einem Punkt  $\theta_\epsilon \in \hat{Z}_1$  an, womit  $\theta_\epsilon$  auch kritischer Punkt von  $h_\epsilon$  ist.  $\square$

*Beweis von Satz 1.1.6.* Es sei  $(\epsilon_n, u_n)$  eine bei  $z^*$  verzweigende Folge gestörter kritischer Punkte, also  $\epsilon_n \rightarrow 0$  (monoton),  $u_n \rightarrow z^*$  und  $\nabla F_{\epsilon_n}(u_n) = 0$ . Es bezeichne  $w(\epsilon, \theta)$  wieder die implizite Funktion aus Lemma 1.1.8. Wir wollen zunächst zeigen, dass die  $u_n$  (für  $n$  groß genug, also  $\epsilon_n$  hinreichend klein) eine Darstellung

$$u_n = z_{\varphi_n} + w(\epsilon_n, \varphi_n) \quad (1.10)$$

mit einem geeigneten  $\varphi_n$  besitzen ( $\varphi_n \rightarrow 0$ ).

Dazu ist nur zu zeigen, dass jedes  $u$  aus einer geeigneten Umgebung von  $z^* \in E$  als

$$u = z + w, \quad \text{mit einem } z \in Z \text{ und einem } w \in T_z Z^\perp \quad (1.11)$$

geschrieben werden kann. Für große  $n$  sind nämlich die  $u_n$  nahe genug bei  $z^*$  und die  $\epsilon_n$  klein, und Lemma 1.1.8 liefert dann die gewünschte Darstellung (1.10), da offensichtlich  $0 = \nabla F_{\epsilon_n}(u_n) \in T_z Z$  für beliebige  $z \in Z$  ( $z_\theta + w(\epsilon, z_\theta)$  löst ja  $\nabla F_\epsilon(z_\theta + w) \in T_{z_\theta} Z$ ,  $w \in T_{z_\theta} Z^\perp$  eindeutig in der Nähe von  $z^* = z_0$ ). Zum Nachweis von (1.11) gehen wir nun wie folgt vor: Betrachte die Gleichung

$$H_i(u, \theta) := \langle u - z_\theta, \partial_i z_\theta \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, d. \quad (1.12)$$

Sie kann (als Gleichung in  $u \in E$  und  $\theta \in \mathbb{R}^d$ ) nach dem Theorem über implizite Funktionen lokal um  $u = z_0$  und  $\theta = 0$  nach  $\theta$  aufgelöst werden, solange  $\|u - z_0\|$  und  $\|\theta\|_{\mathbb{R}^d}$  klein genug ist:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} H_i(z_0, 0) = \langle \partial_j z_0, \partial_i z_0 \rangle$$

ist als Matrix bezüglich der Indizes  $i$  und  $j$  regulär. Zu jedem  $u \in E$  nahe genug bei  $z^*$  gibt es daher ein  $\theta(u) \in \mathbb{R}^d$ , so dass (1.12) erfüllt ist - dann besitzt  $u$  automatisch die gewünschte Darstellung mit  $w := u - z_{\theta(u)} \in T_{z_{\theta(u)}} Z^\perp$ .

Seien nun die gestörten kritischen Punkte  $u_n = z_{\varphi_n} + w(\epsilon_n, \varphi_n)$  mit geeigneten  $\varphi_n \rightarrow 0$ . Nach Voraussetzung gilt insbesondere

$$0 = \langle \partial_i z_{\varphi_n}, \nabla F_{\epsilon_n}(u_n) \rangle = \langle \partial_i z_{\varphi_n}, \nabla F_{\epsilon_n}(z_{\varphi_n} + w(\epsilon_n, \varphi_n)) \rangle.$$

Taylorentwicklung nach  $w(\epsilon_n, \varphi_n)$  liefert für  $i = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} 0 = & \langle \partial_i z_{\varphi_n}, \nabla G(\epsilon_n, z_{\varphi_n}) + D\nabla F_0(z_{\varphi_n})w(\epsilon_n, \varphi_n) \rangle \\ & + \langle \partial_i z_{\varphi_n}, D\nabla G(\epsilon_n, \varphi_n)w(\epsilon_n, \varphi_n) + R(\epsilon_n, \varphi_n, w(\epsilon_n, \varphi_n)) \rangle \end{aligned} \quad (1.13)$$

mit einem Restterm  $R(\epsilon_n, \varphi_n, w(\epsilon_n, \varphi_n)) = o(w(\epsilon_n, \varphi_n))$ . Lemma 1.1.9 impliziert hier  $w(\epsilon_n, \varphi_n) = O(\epsilon_n^\alpha)$ , und nach  $(G_0)$  und  $(G_2)$  gilt  $D\nabla G(\epsilon_n, \varphi_n) \rightarrow 0$  für  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , so dass

$$\begin{aligned} D\nabla G(\epsilon_n, \varphi_n)w(\epsilon_n, \varphi_n) &= o(\epsilon_n^\alpha), \\ R(\epsilon_n, \varphi_n, w(\epsilon_n, \varphi_n)) &= o(\epsilon_n^\alpha). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\langle \partial_i z_{\varphi_n}, D\nabla F_0(z_{\varphi_n})w(\epsilon_n, \varphi_n) \rangle = 0$$

für  $i = 1, \dots, d$ . Zuletzt haben wir auch noch

$$\partial_i \Gamma(\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} DG(\epsilon, z_\theta) \partial_i z_\theta$$

gleichmäßig für  $\theta$  nahe 0, womit

$$\langle \nabla G(\epsilon_n, z_{\varphi_n}), \partial_i z_{\varphi_n} \rangle = \epsilon_n^\alpha \partial_i \Gamma(z_{\varphi_n}) + R_1(\varphi_n, \epsilon_n)$$

ist, mit einem Rest  $R_1(\varphi_n, \epsilon_n) = o(\epsilon_n^\alpha)$  gleichmäßig in  $\varphi_n$ . All das in (1.13) eingesetzt liefert

$$0 = \epsilon_n^\alpha \partial_i \Gamma(z_{\varphi_n}) + R_2(\varphi_n, \epsilon_n)$$

mit einem Rest  $R_2(\varphi_n, \epsilon_n) = o(\epsilon_n^\alpha)$  gleichmäßig in  $\varphi_n$  (nahe 0). Daraus folgt für  $i = 1, \dots, d$

$$\partial_i \Gamma(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_i \Gamma(z_{\varphi_n}) = 0$$

Also ist der Verzweigungspunkt  $z^* = z_0$  kritischer Punkt von  $\Gamma$ .  $\square$

## 1.2 Nichtdegenerierte kritische Punkte

Bisher haben wir hinreichende Bedingungen gefunden, unter denen kritische Punkte eines gestörten Potentials von der kritischen Mannigfaltigkeit des ungestörten Potentials verzweigen. In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, das bei erhöhter Regularität und unter gewissen Bedingungen an die Nichtdegeneriertheit des Verzweigungspunktes die gestörten kritischen Punkte ebenfalls nichtdegeneriert sind und eine stetige Kurve bilden, die lokal um den Verzweigungspunkt eindeutig ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist Verzweigung von Kontinua (insbesondere stetige Kurven) unter den Voraussetzungen von Satz 1.1.5 nicht selbstverständlich.

**Beispiel 1.2.1 (Nichtkontinuierliche Verzweigung).** *Wir betrachten das gestörte Potential*

$$F_\epsilon(x, y) := F(x, y) + \epsilon G(x, y), \quad (x, y) \in E := \mathbb{R}^2, \quad \epsilon \in \mathbb{R},$$

wobei

$$F(x, y) := -\frac{1}{2}y^2,$$

$$G(x, y) := (\sin(-x^{-4}) + 2) \exp(-x^{-2}) + xy + y.$$

$F$  und  $G$  sind  $C^\infty$  auf  $\mathbb{R}^2$ .  $F_\epsilon$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.1.4 mit der kritischen Mannigfaltigkeit  $Z := \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = 1$ , und  $\Gamma(z) = G(z)$  für  $z \in Z$ . Wir betrachten den Verzweigungspunkt  $z^* := (0, 0) \in Z$ ;  $\Gamma$  hat bei  $z^*$  ein striktes lokales Minimum (sogar global auf  $Z$ ). Nach Satz 1.1.4 verzweigt bei  $z^*$  eine Folge kritische Punkte von  $F_\epsilon$ . Wir wollen zeigen, dass bei  $z^*$  kein Kontinuum kritischer Punkte verzweigt, also dass die Zusammenhangskomponente von  $(0, z^*)$  in  $K$  lediglich aus dem einzelnen Punkt  $(0, z^*)$  besteht, wobei

$$K := \{(\epsilon, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \nabla F_\epsilon(x, y) = 0, \epsilon \neq 0\} \cup (0, z^*)$$

die Menge der gestörten kritischen Punkte zusammen mit dem Verzweigungspunkt  $(0, z^*)$  ist. (Ursache dafür, dass kein Kontinuum verzweigt, ist in diesem Beispiel, dass  $z^*$  kein isolierter kritischer Punkt von  $\Gamma$  ist).

*Beweis.* Kritische Punkte von  $F_\epsilon$  für  $\epsilon \neq 0$  erfüllen

$$0 = [4x^{-5} \cos(-x^{-4}) + 2x^{-3}(2 + \sin(-x^{-4}))] \exp(-x^{-2}) + y,$$

$$0 = -y + \epsilon(x + 1)$$

oder äquivalent

$$0 = \epsilon(x + 1) + 2x^{-3} \exp(-x^{-2}) [2x^{-2} \cos(-x^{-4}) + 2 + \sin(-x^{-4})], \quad (1.14)$$

$$y = \epsilon(x + 1). \quad (1.15)$$

Betrachte nun

$$h(x) := 2x^{-3} \exp(-x^{-2}) [2x^{-2} \cos(-x^{-4}) + 2 + \sin(-x^{-4})].$$

Es gilt  $h(0) = 0$ ; und da für kleine  $x$  der Kosinusterm in  $h$  dominiert, existieren monotone Nullfolgen  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ ,  $(d_n) \subset \mathbb{R}$  mit  $1 > a_n > 0$ ,  $1 > b_n > 0$ ,  $-1 < c_n < 0$ ,  $-1 < d_n < 0$  und  $h(a_n) > 0$ ,  $h(b_n) < 0$ ,  $h(c_n) > 0$ ,  $h(d_n) < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nun können für  $\epsilon > 0$  keine kritischen Punkte von  $F_\epsilon$  in

$$M^+ := \{(a_n, y) : y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(c_n, y) : y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

liegen, da für  $x = a_n$  bzw.  $x = c_n$  der Term  $\epsilon(x + 1)$  dasselbe Vorzeichen wie  $h(x)$  hat, und die Summe in Gleichung (1.14) daher nicht 0 geben kann. Analog liegen für  $\epsilon < 0$  keine kritischen Punkte von  $F_\epsilon$  in

$$M^- := \{(b_n, y) : y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(d_n, y) : y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Zusammenhangskomponente von  $(0, z^*)$  in  $K$  muss deshalb in  $\tilde{M} := \{(\epsilon, x, y) : \epsilon \in \mathbb{R}, x = 0, y \in \mathbb{R}\}$  liegen. Setzt man aber  $x = 0$  in (1.14), so folgt  $\epsilon = 0$  und mit (1.15)  $y = 0$ . Damit ist  $K \cap \tilde{M} = (0, z^*)$  die Zusammenhangskomponente von  $(0, z^*)$  in  $K$ .  $\square$

### 1.2.1 Ein Satz über die Verzweigung stetiger Kurven

Gegeben sei das gestörte Potential  $F_\epsilon$  über einem Hilbertraum  $E$

$$F_\epsilon(u) = F_0(u) + G(\epsilon, u), \quad u \in E.$$

Es bezeichne  $z^* \in Z$  einen Verzweigungspunkt von kritischen Punkten von  $F_\epsilon$ ,  $Z^r$  sei eine Umgebung von  $z^*$  in  $Z$ .  $U$  sei eine Umgebung der 0 in  $\mathbb{R}^d$ , und  $\theta \mapsto z_\theta$ ,  $U \rightarrow Z^r$  sei eine lokale Karte der  $d$ -dimensionalen  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $Z$  um  $z^* = z_0$  (o.B.d.A.). Abkürzend wird verwendet  $\partial_i z_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta_i} z_\theta$  und  $\partial_{ij} z_\theta = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} z_\theta$ . Zusätzlich zu den Voraussetzungen  $(F_0-F_3)$ ,  $(G_0-G_3)$  erfülle  $F_\epsilon$

$$F_0 \text{ ist } C^3. \tag{F'_0}$$

$G$  ist  $C^3$  bezüglich  $u$ ,

$$D^3 G(\epsilon, z_\theta) \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0, \text{ lokal gleichmäßig in } \theta \text{ und} \tag{G_4}$$

$$(\epsilon, u) \mapsto D^3 G(\epsilon, u) \text{ ist stetig.}$$

$\nabla G(\epsilon, z_\theta) = O(\epsilon^\alpha)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , lokal gleichmäßig in  $\theta$ ,

$D\nabla G(\epsilon, z_\theta) = o(\epsilon^{\alpha/2})$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , lokal gleichmäßig in  $\theta$ ,

und es existieren stetige Funktionen  $\gamma, \tilde{\gamma} : Z^r \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $\tag{G_5}$

$\epsilon^{-\alpha} \langle \nabla G(\epsilon, z_\theta), \partial_{ij} z_\theta \rangle \rightarrow \gamma_{ij}(z_\theta)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , lokal gleichmäßig in  $\theta$

$\epsilon^{-\alpha} \langle D\nabla G(\epsilon, z_\theta) \partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta \rangle \rightarrow \tilde{\gamma}_{ij}(z_\theta)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , lokal gleichmäßig in  $\theta$ .

Obiges wird im gesamten Abschnitt generell vorausgesetzt.  $(G_5)$  hat zusammen mit  $(G_3)$  zur Folge, dass  $\theta \mapsto \Gamma(z_\theta)$  zweimal stetig differenzierbar ist, mit

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Gamma(z_\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} [G(\epsilon, z_\theta)] = \gamma_{ij} z_\theta + \tilde{\gamma}_{ij}(z_\theta),$$

für  $i, j = 1, \dots, d$ . Man beachte, dass automatisch auch  $\theta \mapsto \epsilon^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta_i} G(\epsilon, z_\theta)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  eine stetige Grenzfunktion hat; dies folgt aus  $(G_3)$  und  $(G_5)$  mit einer Interpolationsungleichung.

**Bemerkung 1.2.2.** Ist  $G$  von der speziellen Form  $G(\epsilon, u) = \epsilon^\alpha \tilde{G}(u)$ , so ist  $(G_5)$  trivial, und  $(G_4)$  reduziert sich auf die Bedingung  $\tilde{G} \in C^3$ .

Die Hauptaussage lautet nun wie folgt:

**Satz 1.2.3 (Verzweigung einer stetigen Kurve).** Es gelte  $(F'_0)$ ,  $(F_1-F_3)$ , und  $(G_0-G_5)$ .  $z^* \in Z$  sei ein nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $\Gamma$ , d. h.  $D_\theta \Gamma(z_\theta)|_{\theta=0} = 0$  und die Hessematrix  $D_\theta \nabla_\theta \Gamma(z_\theta)|_{\theta=0}$  ist invertierbar mit

Morse-Index  $m_1$ . Ferner seien von  $z^*$  verzweigende kritische Punkte  $u_\epsilon = z_{\theta_\epsilon} + w(\epsilon, z_{\theta_\epsilon})$  von  $F_\epsilon$  gegeben, für  $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ . Hat  $z^*$  als kritischer Punkt von  $F_0|_{T_{z^*}Z^\perp}$  den Morse-Index  $m_0$ , so gilt:

$u_\epsilon$  ist nichtdegenerierter kritischer Punkt von  $F_\epsilon$  mit Morse-Index  $m_0 + m_1$ . Zudem sind die  $u_\epsilon$  als Lösungen von  $\nabla F_\epsilon(u) = 0$  für kleine  $\epsilon$  und  $u \in E$  nahe  $z^*$  eindeutig. Zusammen mit der Nichtdegeneriertheit der  $u_\epsilon$  impliziert dies, dass  $\epsilon \mapsto u_\epsilon$ ,  $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$  eine stetige Kurve in  $E$  ist.

Der Beweis wird in Unterabschnitt 1.2.2 ausgeführt. Wesentliche Ideen zum Beweis der Aussage des Satzes über den Morse-Index der gestörten kritischen Punkte finden sich in der Arbeit von A. Ambrosetti und M. Badiale [7], in Sektion 3. Der dort verwendete Zugang (insbesondere Lemma 3.1 in [7]) hat jedoch den Nachteil, das man für die gestörten kritischen Punkte  $u_\epsilon = z_\epsilon + w(\epsilon, z_\epsilon)$ , die bei einem  $z^* \in Z$  verzweigen, explizite Kenntnisse über deren Konvergenzgeschwindigkeit (für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen den Grenzwert  $z^*$ ) benötigt, insbesondere auch für  $z_\epsilon$ . Der Beweis von Lemma 3.1 in [7] ist in dieser Hinsicht nicht vollständig (siehe dazu auch Bemerkung 1.2.10), er funktioniert jedoch, wenn man

$$\|z_\epsilon - z^*\| = O(\epsilon^\alpha) \quad (1.16)$$

verwendet, was aber zunächst nicht klar ist. In einem persönlichen Brief ([6]) zeigten A. Ambrosetti und M. Badiale, dass (1.16) richtig ist, wenn eine Entwicklung der Form

$$G(\epsilon, z_\theta) = \epsilon^\alpha \Gamma(\theta) + \epsilon^{2\alpha} \Gamma_2(\theta) + O(\epsilon^{3\alpha}) \quad (1.17)$$

möglich ist, und wiesen eine solche Entwicklung für die Anwendung aus Satz 3.1.10 nach (im Spezialfall  $g(t) = |t|^{p-1} t$ ), unter der Zusatzvoraussetzung

$$x \mapsto xh(x), \quad x \mapsto x^2h(x) \in L^1(\mathbb{R}) \quad (1.18)$$

(ohne das ist (1.17) im allgemeinen auch falsch). Der hier in den Beweisen präsentierte Zugang (insbesondere die Lemmata 1.2.9 und 1.2.11 anstelle von Lemma 3.1 in [7]) hat den Vorzug, dass er *ohne* Voraussetzungen an die Konvergenzgeschwindigkeit von  $z_\epsilon$  auskommt, und dementsprechend wird in Satz 3.1.10 die Zusatzbedingung (1.18) auch nicht benötigt.

Die Aussage zur lokalen Eindeutigkeit der gestörten kritischen Punkte (für festes  $\epsilon$ ), die im zweiten Teil des Beweises von Satz 1.2.3 behandelt wird, findet sich nicht in [7]. Für die dortige Anwendung, Verzweigung vom essentiellen Spektrum (vergleiche Abschnitt 3.1), ist eine Eindeutigkeitsaussage dieser Art aber auch nicht verwendbar, da sie bei der dort verwendeten Umparametrisierung des Problems ohnehin verloren gehen würde. Die hier verwendete Beweistechnik ist wohl neu. Für andere Methoden zum Nachweis der Verzweigung stetiger Kurven in diesem Kontext siehe zum Beispiel den Artikel von R. J. Magnus [15], welcher mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen argumentiert.

**Bemerkung 1.2.4.**  $w(\epsilon, \theta) \in T_z Z^\perp$  bezeichnet wieder die Lösung der Hilfsgleichung  $\nabla F_\epsilon(z_\theta + w) \in T_{z_\theta} Z$  für kleine  $\epsilon$  und  $\theta$  nahe 0 (siehe Lemma 1.1.8), also  $z_\theta$  nahe  $z^* = z_0$ . Aufgrund der vorausgesetzten höheren Regularität von  $F_\epsilon$  ist  $w$  bezüglich  $\theta$  zweimal stetig differenzierbar.

**Bemerkung 1.2.5.** Dem Beweis von Satz 1.2.3 kann man entnehmen, dass die Endlichkeit von  $m_0$  für die Aussage zur Nichtdegeneriertheit und lokalen Eindeutigkeit der kritischen Punkte  $u_\epsilon$  ohne Bedeutung ist. Dafür genügt als Voraussetzung, dass es zwei Teilräume  $E^+$  und  $E^-$  von  $T_{z^*} Z^\perp$  gibt mit  $E^+ \oplus E^- = T_{z^*} Z^\perp$  und

$$\begin{aligned} D^2 F_0(z^*)[e^+, e^+] &\geq C^+ \|e^+\|^2 && \text{für } e^+ \in E^+, \\ D^2 F_0(z^*)[e^-, e^-] &\leq -C^- \|e^-\|^2 && \text{für } e^- \in E^-, \end{aligned}$$

mit von  $e^+, e^-$  unabhängigen positiven Konstanten  $C^+, C^-$ , wobei  $m_0 = \dim E^-$  nicht notwendig endlich ist. Zum Nachweis der oben genannten Voraussetzungen genügt es (zum Beispiel) zu zeigen, dass 0 in der Resolvente von  $D^2 F_0(z^*)|_{T_{z^*} Z^\perp}$  liegt.  $E^+$  und  $E^-$  sind in diesem Fall orthogonal und invariant für  $D\nabla F_0(z^*)$  wählbar.

Das folgende Lemma erläutert den hier verwendeten Begriff der Nichtdegeneriertheit.

**Lemma 1.2.6.** Existiert zu einem symmetrischen stetigen linearen Operator  $B : X \rightarrow X$  auf einem Hilbertraum  $X$  eine direkte Zerlegung von  $X$  in Teilräume  $X^+, X^-$ , und positive Konstanten  $C^+, C^-$  mit

$$\begin{aligned} \langle Bx^+, x^+ \rangle &\geq C^+ \|x^+\|^2 && \text{für } x^+ \in X^+, \\ \langle Bx^-, x^- \rangle &\leq -C^- \|x^-\|^2 && \text{für } x^- \in X^-, \end{aligned}$$

so ist  $B$  bijektiv und stetig invertierbar.

*Beweis.* Setze

$$0 < \delta := 1 - \sup \{ |\langle x^+, x^- \rangle| : x^- \in X^-, x^+ \in X^+, \|x^+\| = \|x^-\| = 1 \}. \quad (1.19)$$

( $\arccos(1 - \delta)$  ist der Winkel zwischen  $X^+$  und  $X^-$ ). Offensichtlich ist  $\delta \geq 0$ , zu zeigen ist, dass  $\delta \neq 0$ .

Angenommen  $\delta$  wäre 0. Dann gibt es Folgen  $(x_n^+) \subset X^+$ ,  $(x_n^-) \subset X^-$  mit  $\|x_n^+\| = \|x_n^-\| = 1$  und  $\langle x_n^+, x_n^- \rangle \rightarrow 1$ . Daraus folgt  $\|x_n^+ - x_n^-\|^2 = 2 - 2\langle x_n^+, x_n^- \rangle \rightarrow 0$ . Da  $B$  stetig und  $\|x_n^+ + x_n^-\| \leq 2$  ist, erhält man weiter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B(x_n^+ + x_n^-), x_n^+ - x_n^- \rangle = 0.$$



Im Widerspruch dazu gilt aber auch

$$\langle B(x_n^+ + x_n^-), x_n^+ - x_n^- \rangle = \langle Bx_n^+, x_n^+ \rangle - \langle Bx_n^-, x_n^- \rangle \geq C^+ + C^- > 0.$$

Wegen (1.19) gilt nun für  $x^+ \in X^+$ ,  $x^- \in X^-$

$$\begin{aligned} \|x^+ + x^-\|^2 &\geq \|x^+\|^2 + \|x^-\|^2 - 2|\langle x^+, x^- \rangle| \\ &\geq \|x^+\|^2 + \|x^-\|^2 - \frac{|\langle x^+, x^- \rangle|}{\|x^+\| \|x^-\|} (\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2) \\ &\geq \delta (\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2), \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\|x^+ - x^-\|^2 \leq 2 (\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2) \leq \frac{2}{\delta} \|x^+ + x^-\|^2.$$

Damit und mit der trivialen Ungleichung

$$\|x^+ + x^-\|^2 \leq 2 (\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2)$$

erhält man nun

$$\begin{aligned} \|B(x^+ + x^-)\| &= \sup_{y \in X, \|y\|=1} |\langle B(x^+ + x^-), y \rangle| \\ &\geq \frac{1}{\|x^+ - x^-\|} |\langle B(x^+ + x^-), x^+ - x^- \rangle| \\ &\geq \frac{1}{\|x^+ - x^-\|} |\langle B(x^+), x^+ \rangle - \langle B(x^-), x^- \rangle| \\ &\geq \frac{1}{\|x^+ - x^-\|} (C^+ \|x^+\|^2 + C^- \|x^-\|^2) \\ &\geq \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}} \min\{C^+, C^-\} \|x^+ + x^-\|. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass  $B$  injektiv und dass das Bild von  $B$  abgeschlossen ist. Außerdem ist  $B^{-1}$  stetig. Da  $B$  symmetrisch ist, ist  $B$  sogar surjektiv, nach dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich.  $\square$

## 1.2.2 Beweis von Satz 1.2.3

Zum Beweis von Satz 1.2.3 werden wir einige Lemmata benötigen, die im folgenden formuliert und bewiesen werden. Generell wird in diesem Abschnitt angenommen, dass die Voraussetzungen von Satz 1.2.3 erfüllt sind.

Als erstes definieren wir spezielle Karten von  $Z$  bei  $z^* = z_0$ , die im weiteren Verlauf des Beweises verwendet werden:

**Definition 1.2.7.** Setze für  $\theta \in U$ ,  $\varphi$  nahe  $\theta$

$$\tilde{z}_\varphi^{(\theta)} := z_{\varphi + ((\varphi - \theta)^T A^{(n)}(\theta)(\varphi - \theta))_{n=1, \dots, d}},$$

mit  $d$  symmetrischen Matrizen  $A^{(n)}(\theta) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Die  $A^{(n)}(\theta)$  seien dabei so gewählt, dass

$$\left\langle \partial_{ij}^2 \tilde{z}_\varphi^{(\theta)}, \partial_k \tilde{z}_\varphi^{(\theta)} \right\rangle = 0 \quad \text{für } i, j, k = 1, \dots, d. \quad (1.20)$$

Dabei (und auch im folgenden) ist abkürzend  $\partial_k \tilde{z}_\varphi^{(\theta)} = \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tilde{z}_\varphi^{(\theta)}|_{\varphi=\theta}$  und  $\partial_{ij}^2 \tilde{z}_\varphi^{(\theta)} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \tilde{z}_\varphi^{(\theta)}|_{\varphi=\theta}$ . Zu jedem  $\theta \in U$  ist  $\tilde{z}^{(\theta)}$  lokale Karte von  $Z$  um  $z_\theta$ .

**Bemerkung 1.2.8.** Die Matrizen  $A^{(n)}(\theta)$  sind wohldefiniert und stetig in  $\theta$ , denn Ausdifferenzieren der Bedingung (1.20) führt auf

$$2 \sum_{n=1}^d \langle \partial_n z_\theta, \partial_k z_\theta \rangle A_{ji}^{(n)} = - \langle \partial_{ij} z_\theta, \partial_k z_\theta \rangle \quad (1.21)$$

für  $i, j, k = 1, \dots, d$ . Da die Matrix  $(\langle \partial_n z_\theta, \partial_k z_\theta \rangle)_{k,n}$  für alle  $\theta \in U$  invertierbar ist, ist obige Gleichung in den  $A_{ij}(\theta)$  eindeutig lösbar. Da zudem sowohl die rechte Seite der Gleichung (1.21) als auch die inverse Matrix (nach dem Satz über implizite Funktionen) stetig in  $\theta$  sind, ist es auch die Lösung  $A(\theta)$ .

An dieser Stelle wollen wir noch einige Bezeichnungen erklären, die im weiteren verwendet werden: Aufgrund der Nichtdegeneriertheit von  $z^*$  als kritischen Punkt von  $\Gamma$  existieren Teilräume  $F^+$ ,  $F^-$  von  $\mathbb{R}^d$  mit  $F^+ \oplus F^- = \mathbb{R}^d$ , so dass die Hessematrix  $D_\theta \nabla_\theta \Gamma(z_\theta)|_{\theta=0}$  auf  $F^+$  positiv und auf  $F^-$  negativ definit ist ( $F^+$  und  $F^-$  können zueinander orthogonal und für  $D_\theta \nabla_\theta \Gamma(z^*)$  invariant gewählt werden; die Dimension von  $F^-$  ist hierbei  $m_1$ ). Also gilt

$$D_\theta^2 \Gamma(z_0)[v, v] \geq \tilde{C}^+ \|v\|^2 \quad \text{für } v \in F^+, \quad (1.22)$$

$$D_\theta^2 \Gamma(z_0)[w, w] \leq -\tilde{C}^- \|w\|^2 \quad \text{für } w \in F^-, \quad (1.23)$$

mit positiven Konstanten  $\tilde{C}^+$ ,  $\tilde{C}^-$  unabhängig von  $v$ ,  $w$ .

Die folgenden beiden Lemmata geben nun Aufschluss darüber, wie  $D_\theta^2 \Gamma(z_0)$  die spektralen Eigenschaften von  $D \nabla F_\epsilon(u_\epsilon)$  entlang  $T_{z_\epsilon} Z$  bestimmt.

**Lemma 1.2.9.** Es gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} D^2 F_\epsilon(\tilde{z}_\theta^{(\theta)} + w(\epsilon, \theta))[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}] = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Gamma(\tilde{z}_\varphi^{(\theta)}) \Big|_{\varphi=\theta}$$

für  $\epsilon \rightarrow 0$ , lokal gleichmäßig in  $\theta \in U$  ( $U$  wird möglicherweise kleiner).

**Bemerkung 1.2.10.** Die entsprechende Aussage in [7], Lemma 3.1, lautet

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} D^2 F_\epsilon(z_{\theta_\epsilon} + w(\epsilon, \theta_\epsilon))[\partial_i z_0, \partial_j z_0] = \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Gamma(z_\varphi) \Big|_{\varphi=\theta},$$

wobei o.B.D.A. angenommen wird, dass die Karte  $z = \tilde{z}^{(0)}$  ist.  $z_{\theta_\epsilon} + w(\epsilon, \theta_\epsilon) = u_\epsilon$  bezeichnet die bei  $z^*$  verzweigenden gestörten kritischen Punkte. Der wesentliche Unterschied zur Aussage von Lemma 1.2.9 oben besteht darin, dass auf der linken Seite die zweite Ableitung von  $F_\epsilon$  auf Tangentenvektoren  $\partial_i z_0$  bei (tangential zu  $Z$  bei  $z_0$ ) angewendet wird, anstatt auf Tangentenvektoren  $\partial_i z_{\theta_\epsilon}$  (tangential zu  $Z$  bei  $z_{\theta_\epsilon}$ ), was in gewisser Weise der Stelle entspricht, an der  $D^2 F_\epsilon$  ausgewertet wird. Dies hat aber zur Folge, dass man für den Beweis dann eine hinreichende Konvergenzgeschwindigkeit der  $\theta_\epsilon$  benötigt (nämlich  $\theta_\epsilon = O(\epsilon^\alpha)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ ), was sich als problematisch erweist. Im Beweis von Lemma 3.1 in [7] wurden die entsprechenden Terme in der Rechnung versehentlich weggelassen, wodurch dieses Problem zunächst nicht aufgefallen ist. Lemma 1.2.9 kommt ohne eine von  $\epsilon$  abhängige Schranke für  $\theta$  aus.

*Beweis von Lemma 1.2.9.* Schreibe im folgenden abkürzend  $w_\epsilon = w(\epsilon, \theta)$ . Durch Taylorentwicklung in  $w$  erhält man

$$\begin{aligned} D^2 F_\epsilon(\tilde{z}_\theta^{(\theta)} + w_\epsilon)[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}] &= \left\langle D^2 \nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)})[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}], w_\epsilon \right\rangle \\ &\quad + \left\langle D \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle D^2 \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)})[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}], w_\epsilon \right\rangle \\ &\quad + R(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, w_\epsilon), \end{aligned}$$

wobei der Restterm  $R(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, w_\epsilon) = o(w_\epsilon)$  für  $w_\epsilon \rightarrow 0$  erfüllt, gleichmäßig für beschränkte  $\epsilon, \theta$ .

Nach Lemma 1.1.9 und  $(G_5)$  ist  $w_\epsilon = O(\epsilon^\alpha)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , lokal gleichmäßig in  $\theta$ . Daher gilt

$$\epsilon^{-\alpha} R(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, w_\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0,$$

sowie nach  $(G_5)$

$$\epsilon^{-\alpha} \left\langle D \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_{ij}(z_\theta),$$

und nach  $(G_4)$

$$\left\langle D^2 \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)})[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}], \epsilon^{-\alpha} w_\epsilon \right\rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Man beachte dabei, dass  $\tilde{z}_\theta^{(\theta)} = z_\theta$  und  $\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)} = \partial_i z_\theta$  ist.

Zu bestimmen bleibt nun noch  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\langle D^2 \nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)})[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}], \epsilon^{-\alpha} w_\epsilon \right\rangle$ . Nach der Definition von  $w$  gilt

$$\nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)} + w_\epsilon) + \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)} + w_\epsilon) = \sum_{n=1}^d a_n(\epsilon, \theta) \partial_n \tilde{z}_\theta^{(\theta)}.$$

Durch Taylorentwicklung erhält man hieraus

$$D \nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)}) w_\epsilon + \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}) + D \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}) w_\epsilon + R(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, w_\epsilon) = \sum_{n=1}^d a_n \partial_n \tilde{z}_\theta^{(\theta)},$$

wobei der Restterm wieder  $o(\|w_\epsilon\|)$  gleichmäßig für beschränkte  $\theta, \epsilon$  ist. Multipliziert mit  $\epsilon^{-\alpha}$  und im Skalarprodukt mit  $\partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\langle D \nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \epsilon^{-\alpha} w_\epsilon \right\rangle + \epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}), \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle \\ & + \left\langle D \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \epsilon^{-\alpha} w_\epsilon \right\rangle + \left\langle \epsilon^{-\alpha} R(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, w_\epsilon), \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle \\ & = \sum_{n=1}^d \epsilon^{-\alpha} a_n \left\langle \partial_n \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

nach Konstruktion der Karten  $\tilde{z}^{(\theta)}$ . Da die letzten beiden Terme auf der linken Seite der Gleichung für  $\epsilon \rightarrow 0$  gegen 0 konvergieren, gleichmäßig in  $\theta \in U$ , folgt nun

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left\langle D \nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \epsilon^{-\alpha} w_\epsilon \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}), \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle.$$

Die Identität

$$D \nabla F_0(\tilde{z}_\varphi^{(\theta)}) \partial_i \tilde{z}_\varphi^{(\theta)} = 0$$

liefert durch Differentiation nach  $\varphi$  ausgewertet bei  $\theta$  außerdem

$$D \nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} = -D^2 \nabla F_0(\tilde{z}_\theta^{(\theta)})[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}].$$

Insgesamt erhält man daher

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} D^2 F_\epsilon(\tilde{z}_\theta^{(\theta)} + w(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}))[\partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)}] \\ & = \tilde{\gamma}_{ij}(z_\theta) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}), \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Gamma(\tilde{z}_\varphi^{(\theta)}) \Big|_{\varphi=\theta} & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \epsilon^{-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} G(\epsilon, \tilde{z}_\varphi^{(\theta)}) \Big|_{\varphi=\theta} \right] \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}), \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle \right] \\ & \quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \epsilon^{-\alpha} \left\langle D \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt nur noch, dass die hier auftretenden Limiten gleichmäßig in  $\theta \in U$  sind; dies rechtfertigt zugleich die zuvor vorgenommene Vertauschung des Grenzwertes mit der Differentiation. Offenbar konvergiert der zweite Summand

$$\epsilon^{-\alpha} \left\langle D\nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}) \partial_i \tilde{z}_\theta^{(\theta)}, \partial_j \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle = \epsilon^{-\alpha} \left\langle D\nabla G(\epsilon, z_\theta) \partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta \right\rangle \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{(G_5)} \tilde{\gamma}_{ij}(z_\theta)$$

gleichmäßig. Mit der Definition der  $\tilde{z}^{(\theta)}$  erhält man für den ersten Summanden

$$\begin{aligned} \epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, \tilde{z}_\theta^{(\theta)}), \partial_{ij} \tilde{z}_\theta^{(\theta)} \right\rangle &= \epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, z_\theta), \partial_{ij} z_\theta \right\rangle \\ &+ \epsilon^{-\alpha} \sum_{n=1}^d \left\langle \nabla G(\epsilon, z_\theta), 2A_{ij}^{(n)}(\theta) \partial_n z_\theta \right\rangle. \end{aligned}$$

Da  $\epsilon^{-\alpha} G(\epsilon, z_\theta)$  bzw.  $\partial_{ij} \epsilon^{-\alpha} G(\epsilon, z_\theta)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  gleichmäßig gegen  $\Gamma(z_\theta)$  (nach  $(G_3)$ ) bzw.  $\gamma_{ij}(z_\theta) + \tilde{\gamma}_{ij}(z_\theta)$  (nach  $(G_5)$ ) konvergieren, also gegen stetige Grenzfunktionen, erhält man mit einer Interpolationsungleichung auch die gleichmäßige Konvergenz von

$$\partial_n \epsilon^{-\alpha} G(\epsilon, z_\theta) = \epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, z_\theta), \partial_n z_\theta \right\rangle$$

gegen eine stetige Grenzfunktion. Mit der Stetigkeit von  $A$  in  $\theta$  (die für beschränkte  $\theta$  gleichmäßig ist) folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz von  $\epsilon^{-\alpha} \left\langle \nabla G(\epsilon, z_\theta), 2A_{ij}^{(n)}(\theta) \partial_n z_\theta \right\rangle$ .  $\square$

**Lemma 1.2.11.** *Es existieren eine Umgebung  $V \subset U$  von 0 in  $\mathbb{R}^d$  und ein  $\epsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\theta \in V$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ,  $v^+ \in F^+$ ,  $v^- \in F^-$  (zur Erinnerung:  $\mathbb{R}^d = F^+ \oplus F^-$ , vgl. auch (1.22) und (1.23)) gilt*

$$D^2 F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)) [\partial_{v^+} z_\theta, \partial_{v^+} z_\theta] \geq C \epsilon^\alpha \|\partial_{v^+} z_\theta\|^2, \quad (1.24)$$

$$D^2 F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)) [\partial_{v^-} z_\theta, \partial_{v^-} z_\theta] \leq -C \epsilon^\alpha \|\partial_{v^-} z_\theta\|^2, \quad (1.25)$$

mit einer von  $\theta$ ,  $\epsilon$ ,  $v^+$ ,  $v^-$  unabhängigen Konstanten  $C > 0$ . Dabei ist  $\partial_v z_\theta = \frac{d}{dt} z_{\theta+tv} \big|_{t=0}$  die Richtungsableitung von  $z$  in Richtung  $v$  an der Stelle  $\theta$ .

*Beweis.* Nach Lemma 1.2.9 und Definition 1.2.7 gilt gleichmäßig in  $\theta$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} D^2 F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)) [\partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta] = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Gamma(z_\theta) + \sum_{n=1}^d 2A_{ij}^{(n)}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta_n} \Gamma(z_\theta).$$

Daher gilt für  $v \in F^+$  und hinreichend kleine  $\epsilon$

$$D^2 F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta)) [\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta] \geq \frac{\epsilon^\alpha}{2} \left( D_\theta^2 \Gamma(z_\theta) [v, v] + \sum_{n=1}^d 2v^T A^{(n)}(\theta) v \frac{\partial}{\partial \theta_n} \Gamma(z_\theta) \right).$$

Da  $D_\theta^2\Gamma(z_\theta)$  stetig in  $\theta$  ist, folgt aus (1.22)

$$D_\theta^2\Gamma(z_\theta)[v, v] \geq \frac{\tilde{C}^+}{2} \|v\|^2 \quad \text{für } v \in F^+,$$

solange  $\theta$  nahe genug bei 0 ist. Zudem gilt  $\frac{\partial}{\partial \theta^n}\Gamma(z_\theta) \rightarrow 0$  für  $\theta \rightarrow 0$ , und  $A_{ij}^{(n)}(\theta)$  ist stetig in  $\theta$  und damit beschränkt für  $\theta$  nahe 0, weshalb für hinreichend kleine  $\theta$  folgt

$$D^2F_\epsilon(z_\theta + w(\epsilon, \theta))[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta] \geq \frac{\tilde{C}^+}{4} \epsilon^\alpha \|v\|_{\mathbb{R}^d}^2 \geq C_1 \epsilon^\alpha \|\partial_v z_\theta\|^2.$$

Dies beweist (1.24), (1.25) folgt analog unter Verwendung von (1.23).  $\square$

Um die lokale Eindeutigkeit der verzweigenden kritischen Punkte zu beweisen, benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

**Lemma 1.2.12.** *Es gilt*

$$\epsilon^{-\alpha} (D^2F_\epsilon(z_\theta)[\partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta)\partial_{ij} z_\theta) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \partial_{ij}\Gamma(z_\theta),$$

gleichmäßig in  $\theta \in U$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-\alpha} (D^2F_\epsilon(z_\theta)[\partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta)\partial_{ij} z_\theta) \\ &= \epsilon^{-\alpha} (D^2G(\epsilon, z_\theta)[\partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta] + DG(\epsilon, z_\theta)\partial_{ij} z_\theta) \\ & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\gamma}_{ij} + \gamma_{ij} = \partial_{ij}\Gamma(z_\theta), \end{aligned}$$

wobei der Grenzübergang gleichmäßig in  $\theta \in U$  ist.  $\square$

**Lemma 1.2.13.** *Zu jedem  $A > 0$  existieren eine Umgebung  $V \subset U$  von 0 im  $\mathbb{R}^d$  und ein  $\epsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\theta \in V$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ,  $v^+ \in F^+$ ,  $v^- \in F^-$  und für alle  $u \in E$  mit  $\|u\| \leq A\epsilon^\alpha$  gilt*

$$D^2F_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_{v^+} z_\theta, \partial_{v^+} z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta + u)\partial_{v^+}^2 z_\theta \geq C\epsilon^\alpha \|\partial_{v^+} z_\theta\|^2 \quad (1.26)$$

$$D^2F_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_{v^-} z_\theta, \partial_{v^-} z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta + u)\partial_{v^-}^2 z_\theta \leq -C\epsilon^\alpha \|\partial_{v^-} z_\theta\|^2, \quad (1.27)$$

mit einer von  $\theta$ ,  $\epsilon$ ,  $v^+$ ,  $v^-$  unabhängigen Konstanten  $C > 0$ . Dabei bezeichnet für  $v \in \mathbb{R}^d$   $\partial_v z_\theta = \frac{d}{dt} z_{\theta+tv}|_{t=0}$  die Richtungsableitung von  $z$  in Richtung  $v$  an der Stelle  $\theta$ , und  $\partial_v^2 z_\theta = \frac{d^2}{dt^2} z_{\theta+tv}|_{t=0}$

*Beweis.* Sei  $v \in F^+$ . Aus Stetigkeitsgründen ist auch  $D_\theta^2 \Gamma(z_\theta)$  auf  $F^+$  positiv definit, solange  $\theta$  nahe genug bei 0 ist. Mit Lemma 1.2.12 folgt nun für hinreichend kleine  $\epsilon$

$$D^2 F_\epsilon(z_\theta)[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta)[\partial_v^2 z_\theta] \geq C_1 \epsilon^\alpha \|v\|_{\mathbb{R}^d}^2 \geq C_2 \epsilon^\alpha \|\partial_v z_\theta\|^2, \quad (1.28)$$

mit positiven Konstanten  $C_1, C_2$ . Diese Ungleichung bleibt (unter Verkleinerung der Konstanten) auch bei Störung durch  $u$  erhalten: Taylorentwicklung nach  $u$  liefert zunächst

$$\begin{aligned} & D^2 F_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_v^2 z_\theta] \\ & \geq D^2 F_\epsilon(z_\theta)[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta)[\partial_v^2 z_\theta] \\ & \quad + D^3 F_0(z_\theta)[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta, u] + D^2 F_0(z_\theta)[\partial_v^2 z_\theta, u] \\ & \quad - |D^3 G(\epsilon, z_\theta)[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta, u]| - |D^2 G(\epsilon, z_\theta)[\partial_v^2 z_\theta, u]| \\ & \quad - |R_1(\epsilon, \theta, u)| \|\partial_v z_\theta\|^2 - |R_2(\epsilon, \theta, u)| \|\partial_v^2 z_\theta\|, \end{aligned}$$

wobei die Restterme  $R_1(\epsilon, \theta, u), R_2(\epsilon, \theta, u) = o(\|u\|)$  erfüllen, gleichmäßig in  $\epsilon$  und  $\theta$ . Nach  $(F_3)$  ist

$$0 = \partial_v (D^2 F_0(z_\theta)[\partial_v z_\theta, u]) = D^3 F_0(z_\theta)[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta, u] + D^2 F_0(z_\theta)[\partial_v^2 z_\theta, u].$$

Außerdem gilt

$$\|\partial_v^2 z_\theta\| = \|D_\theta^2 z_\theta[v, v]\| \leq C_3 \|v\|_{\mathbb{R}^d}^2 \leq C_4 \|\partial_v z_\theta\|^2.$$

Für die letzte Ungleichung wurde benutzt, dass die lineare Abbildung  $D_\theta z_\theta \in L(\mathbb{R}^d, T_{z_\theta} Z)$  invertierbar ist ( $\theta \mapsto z_\theta$  ist ja  $C^1$ -Karte). Daher gibt es eine Konstante  $c > 0$  mit

$$\|\partial_v z_\theta\| = \|D_\theta z_\theta[v]\| \geq c \|v\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Dabei kann  $c$  unabhängig von  $\theta$  (für beschränkte  $\theta$ ) gewählt werden (mit analoger Argumentation wie in Lemma 1.1.7). Darüberhinaus ist  $u = O(\epsilon^\alpha)$ , und nach  $(G_4)$  bzw.  $(G_5)$  gilt  $D^3 G(\epsilon, z_\theta) \rightarrow 0$  bzw.  $D^2 G(\epsilon, z_\theta) \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , gleichmäßig in  $\theta$ . Insgesamt folgt mit (1.28)

$$\begin{aligned} & D^2 F_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_v z_\theta, \partial_v z_\theta] + DF_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_v^2 z_\theta] \\ & \geq C_2 \epsilon^\alpha \|\partial_v z_\theta\|^2 - o(\epsilon^\alpha) \|\partial_v z_\theta\|^2 \geq C \epsilon^\alpha \|\partial_v z_\theta\|^2 \end{aligned}$$

für hinreichend kleine  $\epsilon$ , wobei  $C := C_2/2$ . Dies beweist (1.26), (1.27) folgt analog.  $\square$

Nun sind wir in der Lage, die Hauptaussage zu beweisen.

*Beweis von Satz 1.2.3.* Sei  $\tilde{E}$  das orthogonale Komplement von  $T_{z^*}Z$  in  $E$ . Nach Voraussetzung existiert eine Zerlegung  $\tilde{E} = E^+ \oplus E^-$  in abgeschlossene Teilräume  $E^+$  und  $E^-$ , so dass

$$\begin{aligned} D^2F_0(z^*)[v^+, v^+] &\geq C^+ \|v^+\|^2 && \text{für } v^+ \in E^+, \\ D^2F_0(z^*)[v^-, v^-] &\leq -C^- \|v^-\|^2 && \text{für } v^- \in E^-, \end{aligned}$$

mit positive Konstanten  $C^+$ ,  $C^-$ .  $m_0 = \dim E^-$  ist der Morse-Index von  $z^*$  als kritischem Punkt von  $F_0$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $(\epsilon, u) \mapsto D^2F_\epsilon(u)$  (zur Erinnerung:  $z_0 = z^*$ ) gilt auch noch

$$D^2F_\epsilon(z_\theta + u)[v^+, v^+] \geq \frac{C^+}{2} \|v^+\|^2 \quad \text{für } v^+ \in E^+, \quad (1.29)$$

$$D^2F_\epsilon(z_\theta + u)[v^-, v^-] \leq -\frac{C^-}{2} \|v^-\|^2 \quad \text{für } v^- \in E^-, \quad (1.30)$$

solange  $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ ,  $\theta \in U$  und  $u \in V$  mit kleinen Umgebungen  $V$  von 0 in  $E$ ,  $U$  von 0 in  $\mathbb{R}^d$  und hinreichend kleinem  $\epsilon_0 > 0$ . Der Beweis des Satzes erfolgt nun in zwei Teilen.

### Teil 1: Nichtdegeneriertheit der gestörten kritischen Punkte

Sei  $e^+ \in E^+$ ,  $v^+ \in F^+$ . Abkürzend wird im folgenden  $w_\epsilon := w(\epsilon, z_\theta)$  verwendet. Dann gilt nach (1.29) und (1.24)

$$\begin{aligned} &D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+ + \partial_{v^+}z_\theta, e^+ + \partial_{v^+}z_\theta] \\ &= D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+, e^+] + D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[\partial_{v^+}z_\theta, \partial_{v^+}z_\theta] \\ &\quad + 2D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+, \partial_{v^+}z_\theta] \\ &\geq \frac{C^+}{2} \|e^+\|^2 + C\epsilon^\alpha \|\partial_{v^+}z_\theta\|^2 + 2D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+, \partial_{v^+}z_\theta]. \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass  $D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+, \partial_{v^+}z_\theta] = o(\epsilon^{\alpha/2}) \|e^+\| \|\partial_{v^+}z_\theta\|$  erfüllt ist – dann dominieren nämlich die ersten beiden Summanden den gemischten Term für kleine  $\epsilon$ . Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} |D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+, \partial_{v^+}z_\theta]| &\leq |(D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon) - D^2F_\epsilon(z_\theta)) [e^+, \partial_{v^+}z_\theta]| \\ &\quad + |D^2F_\epsilon(z_\theta)[e^+, \partial_{v^+}z_\theta]|. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden erhält man durch Taylorentwicklung nach  $w_\epsilon$

$$\begin{aligned} &|(D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon) - D^2F_\epsilon(z_\theta)) [e^+, \partial_{v^+}z_\theta]| \\ &\leq |D^3F_\epsilon(z_\theta)[e^+, \partial_{v^+}z_\theta, w_\epsilon]| + \|R(\epsilon, \theta, w_\epsilon)\| \|e^+\| \|\partial_{v^+}z_\theta\|, \end{aligned}$$

wobei der Restterm  $R(\epsilon, \theta, w_\epsilon) = o(w_\epsilon)$  erfüllt, gleichmäßig für beschränkte  $\epsilon$ ,  $\theta$ . Da  $(G_5)$  nach Lemma 1.1.9  $w_\epsilon = O(\epsilon^\alpha)$  (gleichmäßig in  $\theta$ ) impliziert, liefert dies

$$|(D^2F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon) - D^2F_\epsilon(z_\theta)) [e^+, \partial_{v^+}z_\theta]| = O(\epsilon^\alpha) \|e^+\| \|\partial_{v^+}z_\theta\|.$$



Der zweite Summand erfüllt

$$|D^2 F_\epsilon(z_\theta)[e^+, \partial_{v^+} z_\theta]| = |D^2 G(\epsilon, z_\theta)[e^+, \partial_{v^+} z_\theta]| = o(\epsilon^{\alpha/2}) \|e^+\| \|\partial_{v^+} z_\theta\|$$

nach  $(F_3)$  und  $(G_5)$ . Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} D^2 F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+ + \partial_{v^+} z_\theta, e^+ + \partial_{v^+} z_\theta] & \\ & \geq \frac{C^+}{2} \|e^+\|^2 + C\epsilon^\alpha \|\partial_{v^+} z_\theta\|^2 - |o(\epsilon^{\alpha/2})| \|e^+\| \|\partial_{v^+} z_\theta\| \\ & \geq \frac{C^+}{2} \|e^+\|^2 + C\epsilon^\alpha \|\partial_{v^+} z_\theta\|^2 - \frac{|o(\epsilon^\alpha)|}{2\delta^2} \|\partial_{v^+} z_\theta\|^2 - \frac{\delta^2}{2} \|e^+\|^2 \end{aligned}$$

für beliebiges  $\delta > 0$ . Speziell für  $\frac{\delta^2}{2} = \frac{C^+}{4}$  und für hinreichend kleines  $\epsilon$  ergibt sich

$$D^2 F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+ + \partial_{v^+} z_\theta, e^+ + \partial_{v^+} z_\theta] \geq \frac{C^+}{4} \|e^+\|^2 + \frac{C}{2} \epsilon^\alpha \|\partial_{v^+} z_\theta\|^2$$

für  $\theta$  aus einer Umgebung von 0. Da trivialerweise stets

$$\|e^+ + \partial_{v^+} z_\theta\|^2 \leq 2 \left( \|e^+\|^2 + \|\partial_{v^+} z_\theta\|^2 \right)$$

gilt, folgt für  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ,  $\theta \in V$

$$D^2 F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^+ + \partial_{v^+} z_\theta, e^+ + \partial_{v^+} z_\theta] \geq C_1 \epsilon^\alpha \|e^+ + \partial_{v^+} z_\theta\|^2, \quad (1.31)$$

mit einer von  $\epsilon$ ,  $\theta$ ,  $e^+$  und  $v^+$  unabhängigen Konstanten  $C_1 > 0$  und einer Umgebung  $V$  von 0 im  $\mathbb{R}^d$ . Analog lässt sich unter Verwendung von (1.30) und (1.25) zeigen, dass für  $e^- \in E^-$ ,  $v^- \in F^-$  gilt

$$D^2 F_\epsilon(z_\theta + w_\epsilon)[e^- + \partial_{v^-} z_\theta, e^- + \partial_{v^-} z_\theta] \leq -C_2 \epsilon^\alpha \|e^- + \partial_{v^-} z_\theta\|^2 \quad (1.32)$$

für  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ,  $\theta \in V$  mit einer von  $\epsilon$ ,  $\theta$ ,  $e^-$  und  $v^-$  unabhängigen Konstanten  $C_2 > 0$  (eventuell  $\epsilon_0$ ,  $V$  verkleinern).

Damit sind die kritischen Punkte  $u_\epsilon = z_{\theta_\epsilon} + w(\epsilon, z_{\theta_\epsilon})$  von  $F_\epsilon$  für hinreichend kleine  $\epsilon$  (also  $\theta_\epsilon$  nahe genug an 0) nichtdegeneriert mit Morse-Index  $\dim(E^- \oplus D_\theta z_{\theta_\epsilon} F^-) = m_0 + m_1$ . Insbesondere ist nach Lemma 1.2.6  $D\nabla F_\epsilon(u_\epsilon)$  bijektiv (hier ist  $X^+ = E^+ + D_\theta z_{\theta_\epsilon} F^+$  und  $X^- = E^- + D_\theta z_{\theta_\epsilon} F^-$ ).

## Teil 2: Eindeutigkeit gestörter kritischer Punkte nahe des Verzweigungspunktes

Analog zu Teil 1 lässt sich unter Verwendung von Lemma 1.2.13 anstelle von Lemma 1.2.11 folgendes zeigen:

Zu jedem  $A > 0$  existieren eine Umgebung  $V \subset U$  von 0 (zur Erinnerung:  $z_0 = z^*$ )

und ein  $\epsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\theta \in V$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ ,  $v \in F^+$ ,  $w \in F^-$ ,  $e^+ \in E^+$ ,  $e^- \in E^-$  und für alle  $u \in E$  mit  $\|u\| \leq A\epsilon^\alpha$  gilt

$$D^2F_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_v z_\theta + e^+, \partial_v z_\theta + e^+] + DF_\epsilon(z_\theta + u)\partial_v^2 z_\theta \geq C_3\epsilon^\alpha \|\partial_v z_\theta + e^+\|^2 \quad (1.33)$$

$$D^2F_\epsilon(z_\theta + u)[\partial_w z_\theta + e^-, \partial_w z_\theta + e^-] + DF_\epsilon(z_\theta + u)\partial_w^2 z_\theta \leq -C_4\epsilon^\alpha \|\partial_w z_\theta + e^-\|^2, \quad (1.34)$$

mit von  $\theta$ ,  $\epsilon$ ,  $v$ ,  $w$  unabhängigen Konstanten  $C_3, C_4 > 0$ . Nach  $(G_5)$  und Lemma 1.1.9 kann  $A$  so groß gewählt werden, dass  $\|w_{\epsilon, z_\theta}\| < \sqrt{\delta} \frac{A}{6} \epsilon^\alpha$  für  $\theta \in V$  und  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  ( $V$ ,  $\epsilon_0$  gegebenenfalls verkleinern), wobei

$$0 < \delta := 1 - \sup \{ |\langle e^+, e^- \rangle| : e^- \in E^-, e^+ \in E^+, \|e^+\| = \|e^-\| = 1 \} \quad (1.35)$$

( $\delta$  kann nicht 0 werden, siehe dazu den Beweis von Lemma 1.2.6). Setze nun

$$M_\epsilon := \{z_\theta + u : \theta \in V, \|u\| < A\epsilon^\alpha\}.$$

(Dies ist die Menge der Argumente  $z_\theta + u$  von  $D^2F_\epsilon$  bzw.  $DF_\epsilon$ , für die (1.33) und (1.34) gelten). Wir wollen zeigen, dass  $F_\epsilon$  für  $\epsilon < \epsilon_0$  in einer geeigneten (von  $\epsilon$  unabhängigen) Umgebung  $W$  von  $z^*$  in  $E$  höchstens einen kritischen Punkt haben kann. Zunächst zur Wahl von  $W$ :

Nach Lemma 1.1.8 gibt es eine (von  $\epsilon$  unabhängige) Umgebung  $W_1$  von  $z^*$  in  $E$ , so dass für  $\epsilon < \epsilon_0$  die Lösungen von  $\nabla F_\epsilon(z_\theta + w) \in T_{z_\theta}Z$  mit  $w \in T_{z_\theta}Z^\perp$  und  $z_\theta + w \in W_1$  genau die  $z_\theta + w(\epsilon, z_\theta)$  für  $\theta \in V$  ( $V$ ,  $\epsilon_0$  eventuell verkleinern) sind. Setze nun

$$W_2 := W_1 \cap \bigcup_{\theta \in V} (z_\theta + T_{z_\theta}Z^\perp).$$

$W_2$  ist offene Umgebung von  $z^*$  in  $E$ , solange  $V$ ,  $W_1$  hinreichend klein sind. Betrachte dazu die Gleichung

$$\langle e - z_\theta, \partial_i z_\theta \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

Sie kann (als Gleichung in  $e \in E$  und  $\theta \in \mathbb{R}^d$ ) nach dem Theorem über implizite Funktionen lokal um  $\tilde{e} = z_{\tilde{\theta}} + f$  und  $\tilde{\theta}$  mit  $f \in T_{z_{\tilde{\theta}}}Z^\perp$  nach  $\theta$  aufgelöst werden, solange  $\|f\|$  klein genug ist. Deswegen gibt es zu jedem  $e$  aus einer kleinen Umgebung von  $\tilde{e} \in W_2$  ein  $\theta$  nahe  $\tilde{\theta}$  mit  $e - z_\theta \in T_{z_\theta}Z^\perp$ . Somit liegen alle  $e \in E$ , die nahe genug bei  $\tilde{e} \in W_2$  sind, auch in  $W_2$ .

Kritische Punkte  $u_\epsilon$  von  $F_\epsilon$  in  $W_2$  sind nach Lemma 1.1.8 von der Form  $u_\epsilon = z_\theta + w(\epsilon, z_\theta)$ , und aufgrund der Wahl von  $A$  gilt auch  $u_\epsilon \in M_\epsilon$ . Wähle nun die offenen Umgebung  $W$  von  $z^*$  als

$$W := W_2 \cap \bigcup_{\theta \in V} (z_\theta + T_{z^*}Z^\perp)$$

( $W$  ist offen nach analoger Argumentation wie für  $W_2$ ). Dabei sei (o.B.d.A)  $V$  so klein, dass für alle  $\theta \in V$  gilt

$$\frac{1}{2} > \sup \left\{ \frac{\langle z_{\eta_1} - z_{\eta_2}, \tilde{e} \rangle}{\|z_{\eta_1} - z_{\eta_2}\|} : \eta_1, \eta_2 \in V, \tilde{e} \in T_{z^*} Z^\perp \text{ und } \|\tilde{e}\| = 1 \right\}. \quad (1.36)$$

Eine solche Wahl von  $V$  ist möglich: Durch Taylorentwicklung um 0 erhält man

$$z_{\eta_2} - z_{\eta_1} = D_\theta z_{\eta_1} (\eta_2 - \eta_1) + R(\eta_1, \eta_2 - \eta_1),$$

mit einem Restterm  $R(\eta_1, \eta_2 - \eta_1) = o(\eta_2 - \eta_1)$ . Nun ist

$$\frac{|\langle z_{\eta_1} - z_{\eta_2}, \tilde{e} \rangle|}{\|z_{\eta_1} - z_{\eta_2}\|} \leq \left| \left\langle D_\theta z_{\eta_1} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\|\eta_2 - \eta_1\|}, \tilde{e} \right\rangle \right| + \frac{o(\eta_2 - \eta_1)}{\|z_{\eta_1} - z_{\eta_2}\|}.$$

Der zweite Summand konvergiert gegen 0 für  $\eta_2 \rightarrow \eta_1$ , der erste Summand konvergiert gegen 0 für  $\eta_1 \rightarrow 0$ , da  $\tilde{e} \perp T_{z_0} Z$ . Insbesondere kann das Supremum in (1.36) durch entsprechende Wahl der Umgebung  $V$  von 0 kleiner als 1/2 gemacht werden.

Nehmen wir nun an,  $F_\epsilon$  besäße zwei kritische Punkte in  $W$ , etwa  $u_1 = z_{\theta_1} + w(\epsilon, z_{\theta_1})$  und  $u_2 = z_{\theta_2} + w(\epsilon, z_{\theta_2})$ . Es existieren dann  $e_1 = e_1^+ + e_1^-$ ,  $e_2 = e_2^+ + e_2^-$  mit  $e_1^+, e_2^+ \in E^+$ ,  $e_1^-, e_2^- \in E^-$  sowie  $\mu_1 = \mu_1^+ + \mu_1^-$ ,  $\mu_2 = \mu_2^+ + \mu_2^-$  mit  $\mu_1^+, \mu_2^+ \in F^+$  und  $\mu_1^-, \mu_2^- \in F^-$  so dass  $u_1 = z_{\mu_1} + e_1$  und  $u_2 = z_{\mu_2} + e_2$  (Nach Definition von  $W$  besitzen  $u_1$  und  $u_2$  solche Darstellungen; beachte auch  $E^+ \oplus E^- = T_{z^*} Z^\perp$ ). Die so erhaltenen  $e_i^\pm$  erfüllen für  $i = 1, 2$

$$\|e_i^\pm\| < \frac{3}{\sqrt{\delta}} \|w(\epsilon, z_{\theta_i})\| < \frac{A}{2} \epsilon^\alpha, \quad (1.37)$$

denn wegen (1.36) gilt für  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \|e_i\|^2 - \langle e_i, w(\epsilon, z_{\theta_i}) \rangle &\leq |\langle e_i, e_i - w(\epsilon, z_{\theta_i}) \rangle| \\ &\leq |\langle e_i, z_{\theta_i} - z_{\mu_i} \rangle| < \frac{1}{2} \|e_i\| \|z_{\theta_i} - z_{\mu_i}\|, \end{aligned}$$

und weiter mit Cauchy-Schwartzscher Ungleichung und Dreiecksungleichung

$$\|e_i\|^2 < \frac{1}{2} \|e_i\| \|e_i - w(\epsilon, z_{\theta_i})\| + \|e_i\| \|w(\epsilon, z_{\theta_i})\| \leq \frac{1}{2} \|e_i\|^2 + \frac{3}{2} \|e_i\| \|w(\epsilon, z_{\theta_i})\|.$$

Zusammen mit der Definition (1.35) von  $\delta$  folgt

$$\delta \left( \|e_i^+\|^2 + \|e_i^-\|^2 \right) \leq \|e_i^+ + e_i^-\|^2 < 9 \|w(\epsilon, z_{\theta_i})\|^2$$

was (1.37) impliziert. Definiere nun folgende Wege in  $E$  ( $t \in [0, 1]$ ):

$$\begin{aligned} w_1(t) &:= e_1^- + te_2^+ + (1-t)e_1^+ + z_{(\mu_1^- + t\mu_2^+ + (1-t)\mu_1^+)}, \\ w_2(t) &:= e_2^+ + te_1^- + (1-t)e_2^- + z_{(\mu_2^+ + t\mu_1^- + (1-t)\mu_2^-)}, \\ w_3(t) &:= e_2^- + te_1^+ + (1-t)e_2^+ + z_{(\mu_2^- + t\mu_1^+ + (1-t)\mu_2^+)}, \\ w_4(t) &:= e_1^+ + te_2^- + (1-t)e_1^- + z_{(\mu_1^+ + t\mu_2^- + (1-t)\mu_1^-)}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaft (1.37) der  $e_{1,2}^\pm$  verlaufen all diese Wege in  $M_\epsilon$ , und

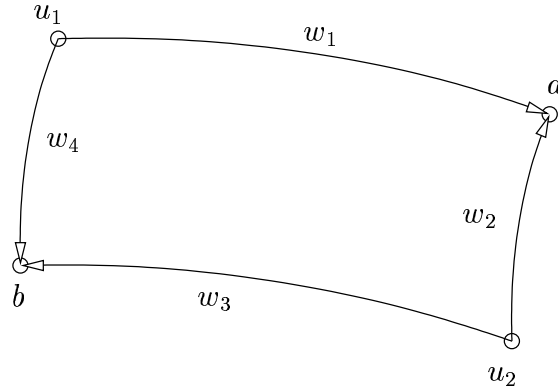


Abbildung 1.2: Verlauf der Wege  $w_1$ - $w_4$  in  $E$

es gilt  $w_1(0) = w_4(0) = u_1$ ,  $w_2(0) = w_3(0) = u_2$ ,  $a := w_1(1) = w_2(1)$  und  $b := w_3(1) = w_4(1)$ . Betrachte jetzt  $F_\epsilon$  längs dieser Wege. Es gilt

$$\frac{d^2}{dt^2} (F_\epsilon(w_1(t))) = D^2 F_\epsilon(w_1(t))[\dot{w}_1(t), \dot{w}_1(t)] + DF_\epsilon(w_1(t))\ddot{w}_1(t).$$

Für alle  $t \in [0, 1]$  ist  $w_1(t) \in M_\epsilon$  und

$$\dot{w}_1(t) = e_2^+ - e_1^+ + D_\theta z_{(\mu_1^- + t\mu_2^+ + (1-t)\mu_1^+)}(\mu_2^+ - \mu_1^+) \in E^+ + D_\theta z_{(\mu_1^- + t\mu_2^+ + (1-t)\mu_1^+)} F^+.$$

Außerdem ist

$$\ddot{w}_1(t) = D_\theta^2 z_{(\mu_1^- + t\mu_2^+ + (1-t)\mu_1^+)}[\mu_2^+ - \mu_1^+, \mu_2^+ - \mu_1^+] = \partial_{(\mu_2^+ - \mu_1^+)}^2 z_{(\mu_1^- + t\mu_2^+ + (1-t)\mu_1^+)}.$$

Also ist (1.33) anwendbar, und liefert für alle  $t \in [0, 1]$

$$\frac{d^2}{dt^2} [F_\epsilon(w_1(t))] \geq 0,$$

und solange  $w_1(0) \neq w_1(1)$  ist, gilt sogar

$$\frac{d^2}{dt^2} [F_\epsilon(w_1(t))] > 0.$$

Analog erhält man für die anderen Wege (unter Verwendung von (1.34) anstelle von (1.33) für  $w_2$  und  $w_4$ )

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} [F_\epsilon(w_2(t))] &< 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} [F_\epsilon(w_3(t))] &> 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} [F_\epsilon(w_4(t))] &< 0,\end{aligned}$$

solange sich bei dem jeweils zugehörigen Weg Anfangs- und Endpunkt unterscheiden. Da  $\nabla F_\epsilon(u_1) = \nabla F_\epsilon(u_2) = 0$  ist, gilt außerdem  $\left. \frac{d}{dt} F_\epsilon(w_i(t)) \right|_{t=0} = 0$  für  $i = 1, 2, 3, 4$ . Insgesamt folgt mit den Ungleichungen für  $w_1$  und  $w_2$

$$F_\epsilon(u_1) \leq F_\epsilon(a) \leq F_\epsilon(u_2), \quad (1.38)$$

wobei Gleichheit nur gelten kann, wenn  $u_1 = a$  bzw.  $a = u_2$ . Genauso folgt mit den Ungleichungen für  $w_3$  und  $w_4$

$$F_\epsilon(u_1) \geq F_\epsilon(b) \geq F_\epsilon(u_2), \quad (1.39)$$

und hier kann wieder nur dann Gleichheit vorliegen, wenn  $u_1 = b$  bzw.  $b = u_2$ . Zusammen sind (1.38) und (1.39) aber nur dann erfüllbar, wenn überall Gleichheit gilt, und damit muss  $u_1 = u_2$  sein.  $\square$

# Kapitel 2

## Eine Klasse von semilinearen translationsinvarianten elliptischen Gleichungen über $\mathbb{R}^N$

Dieses Kapitel dient dazu, Informationen über eine Klasse von elliptischen Gleichungen mit Variationsstruktur im Ganzraum zu sammeln. Der hier diskutierte Gleichungstyp wird im folgenden Kapitel die Rolle des ungestörten Problems spielen. Wir betrachten Funktionale von der Form

$$F(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \left[ -\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + g(u(x)) \right] dx, \quad (2.1)$$

für  $N \in \mathbb{N}$ ,  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , mit einer Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) := \int_0^t f(s) ds$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Prototyp für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist dabei die Funktion

$$f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f^*(t) := -t + t|t|^{p-1},$$

mit einem  $1 < p < 2^* - 1$ , wobei  $2^* := \frac{2N}{N-2}$  (falls  $N \leq 2$  lies  $2^* := \infty$ ). In diesem Fall ist

$$g^*(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{p+1} |t|^{p+1}.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für kritische Punkte von  $F$  ist die semilineare translationsinvariante Gleichung

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad (\text{auf } \mathbb{R}^N, \text{ in schwacher Form}) \quad (\text{EL})$$

(die Voraussetzungen an  $f$  im folgenden werden Differenzierbarkeit von  $F$  garantieren). Wir wollen später den abstrakten Zugang auf Störungen von  $F$  als

Funktional über  $E := H^1(\mathbb{R}^N)$  anwenden. Dabei ist  $H^1(\mathbb{R}^N)$  mit der Norm  $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$  versehen. Um dies vorzubereiten, wollen wir in diesem Abschnitt für  $F$  die Voraussetzungen  $(F_0-F_3)$  nachweisen (wobei sich  $f$  im wesentlichen wie die Prototypfunktion verhalten soll, genaueres dazu gleich).

Die Resultate dieses Kapitels sind eine Zusammenstellung bekannter Aussagen über den angegebenen Gleichungstyp. Die Hauptschwierigkeit liegen im höherdimensionalen Fall zum einen im Nachweis einer speziellen Lösung von (EL) und ihren Eigenschaften, wo wir der Arbeit von H. Berestycki, P. L. Lions, P. L. und L. A. Peletier [9] folgen werden. Dies wird in Unterabschnitt 2.1.2 ausgeführt. Zum anderen wollen wir der Bedingung  $(F_3)$  aus Kapitel 1 entsprechende Nichtdegeneriertheitseigenschaften dieser Lösung nachweisen, was in Unterabschnitt 2.1.4 erfolgt, wobei wir dafür den Arbeiten von Wei-Ming Ni und I. Takagi [17] sowie Man Nam Kwong und Liqun Zhang [14] folgen. Die restlichen in diesem Kapitel aufgeführten Aussagen sind sicherlich ebenfalls wohlbekannt, insbesondere der eindimensionale Fall. Die Beweise dazu werden der Vollständigkeit halber mit angegeben.

**Bemerkung 2.0.14 (Zur Bedeutung der Schranken des Exponenten  $p$ ).**  
*Es gilt die stetige Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  abhängig von der Gebietsdimension  $N$  genau dann, wenn*

$$\begin{aligned} 2 \leq q \leq \infty & \quad \text{falls } N = 1, \\ 2 \leq q < \infty & \quad \text{falls } N = 2, \\ 2 \leq q \leq 2^* & \quad \text{falls } N \geq 3. \end{aligned}$$

*Für die Funktion  $f$  betrachten wir den subkritischen Fall – die kritische obere Schranke für den Exponenten ( $p+1 = 2^*$  für  $N \geq 3$ ) schließen wir hier aus, auch wenn das Funktional in diesem Falle noch wohldefiniert wäre. Technischer Grund für die Ausnahmestellung des kritischen Exponenten ist, dass für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  die Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  sogar kompakt ist, falls  $1 \leq q < 2^*$ ; die Kompaktheit gilt nicht für  $q = 2^*$ . Der Fall  $p = 1$  (wofür die Einbettung für  $q = 2$  dienen würde) wird ausgeschlossen, da  $F$  (mit dem Prototypen  $f^*$ ) für  $p = 1$  keine nichttrivialen kritischen Punkte und damit auch keine kritische Mannigfaltigkeit besitzt. Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung ist in diesem Fall nämlich eine Eigenwertgleichung für den Laplace-Operator über  $\mathbb{R}^N$ .*

Wir betrachten hier eine Klasse von Funktionen  $f$  mit folgenden Eigenschaften:

$$f \in C^1(\mathbb{R}). \tag{f_0}$$

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f'(0) < 0 \text{ und es existiere ein } \theta > 0, \\ \text{so dass } f(u) < 0 \text{ f\"ur } 0 < u < \theta \text{ und } f(u) > 0 \text{ f\"ur } u > \theta. \\ \text{Au\sserdem sei } f'(\theta) > 0. \end{aligned} \tag{f_1}$$

$$\text{Es existiere ein } \phi > 0 \text{ mit } g(\phi) = \int_0^\phi f(s) ds = 0. \tag{f_2}$$

Im Falle  $N \geq 2$  gelte folgendes:

$$\begin{aligned} t \mapsto \frac{tf'(t)}{f(t)} \text{ sei in } (0, \theta) \text{ und } (\theta, \infty) \text{ monoton fallend und} \\ \frac{tf'(t)}{f(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda \text{ mit einem } \lambda > 1. \end{aligned} \tag{f_3}$$

$$\text{Au\sserdem sei } \frac{tf'(t)}{f(t)} \leq \lambda \text{ f\"ur } 0 < t < \theta.$$

$f$  erf\"ulle die Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq C_1 |t|^{p_1} + C_2 |t| \\ |f'(t)| &\leq C_3 |t|^{p_2-1} + C_4 \end{aligned} \tag{f_4}$$

mit Exponenten  $p_1, p_2 \in (1, 2^* - 1)$  und Konstanten

$C_1, C_2, C_3, C_4 \geq 0$  unabh\"angig von  $t \in \mathbb{R}$ .

Die (leider ziemlich restriktive) Bedingung (f<sub>3</sub>) kann dabei noch etwas abge-

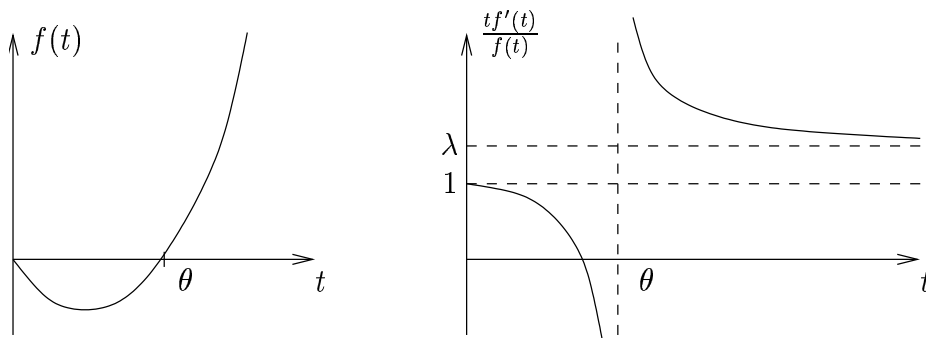


Abbildung 2.1: Typisches Verhalten von  $f$



schwächt werden; siehe dazu Bemerkung 2.1.21. Im eindimensionalen Fall  $N = 1$  kommen wir ganz ohne  $(f_3)$  aus. Man kann leicht nachprüfen, dass die Bedingungen  $(f_0-f_4)$  für den Prototypen  $f = f^*$  erfüllt sind. Die Fälle  $N = 1$  und  $N \geq 2$  werden wir im folgenden getrennt behandeln. Wir beginnen mit dem schwierigeren höherdimensionalen Fall,  $N \geq 2$ .

## 2.1 Der höherdimensionale Fall

Sei also  $N \geq 2$ .  $f$  erfülle  $(f_0-f_4)$ . Wesentliche Hilfsmittel zum Nachweis von  $(F_0-F_3)$  sind folgende Einbettungen (siehe z.B. [1]): Das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  erfülle eine Kegelbedingung (ist aber nicht notwendig beschränkt). Dann gilt für  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < \infty$

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \text{stetig, falls } p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} \text{ und } mp < N, \quad (2.2)$$

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \text{stetig, falls } p \leq q < \infty \text{ und } mp = N. \quad (2.3)$$

Ist das Gebiet  $\Omega$  zusätzlich beschränkt, so folgt sogar

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \text{kompakt, falls } 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp} \text{ und } mp < N, \quad (2.4)$$

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega) \quad \text{kompakt, falls } 1 \leq q < \infty \text{ und } mp \geq N. \quad (2.5)$$

Insbesondere haben wir

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{stetig, falls } 2 \leq q \begin{cases} < \infty & (N = 1, 2) \\ \leq 2^* & (N \geq 3) \end{cases} \quad (2.6)$$

und für eine beschränkte Kugel  $B \subset \mathbb{R}^N$

$$H^1(B) \hookrightarrow L^q(B) \quad \text{kompakt, falls } 1 \leq q < 2^* \quad (2.7)$$

Wir wollen nun als erstes zeigen, dass das Funktional  $F$  unter den Voraussetzungen  $(f_0-f_4)$  wohldefiniert ist, und  $(F_0)$  erfüllt, also zweimal stetig differenzierbar ist.

### 2.1.1 Wohldefiniertheit und Regularität

Wohldefiniertheit und Differenzierbarkeit von  $F$  sind relativ einfache Folgerungen aus der Einbettung (2.6), zusammen mit der Differenzierbarkeit  $(f_0)$  und den Wachstumsbedingungen  $(f_4)$  von  $f$ ; der Beweis wird hier der Vollständigkeit halber ausgeführt.

**Lemma 2.1.1 (Wohldefiniertheit und Regularität von  $F$ ).** *Es gelte  $(f_0)$  und  $(f_4)$ . Dann ist  $F(u) < \infty$  für alle  $u \in E = H^1(\mathbb{R}^N)$ , und  $F$  ist im Fréchet-Sinne zweimal stetig differenzierbar.*

*Beweis.* Wohldefiniertheit:

Aus  $(f_4)$  ergibt sich für  $g(t) = \int_0^t f(s) ds$

$$|g(t)| \leq \frac{C_1}{p_1 + 1} |t|^{p_1+1} + \frac{C_2}{2} |t|^2. \quad (2.8)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} F(u) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| -\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + g(u(x)) \right| dx \\ &\stackrel{(2.8)}{\leq} \frac{1}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{C_1}{p_1 + 1} |u|^{p_1+1} + \frac{C_2}{2} |u|^2 \right] dx \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} \left( \frac{1 + C_2}{2} \right) \|u\|^2 + C \|u\|^{p_1+1} < \infty. \end{aligned}$$

Stetigkeit von  $F$ :

Wegen (2.8) können wir  $g = g_1 + g_2$  in zwei stetige Summanden  $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zerlegen, die

$$|g_1(s)| \leq C_5 |s|^2 \quad \text{für } s \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

$$|g_2(s)| \leq C_6 |s|^{p_1+1} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

mit positiven Konstanten  $C_5, C_6$  erfüllen. Dann folgt

$$\begin{aligned} |F(u) - F(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g_1(u) - g_1(v)| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |g_2(u) - g_2(v)| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 \right| dx \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

denn nach (2.6) gilt auch  $v \rightarrow u$  in  $L^{p_1+1}(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ , und wegen der Wachstumsbedingung (2.9) bzw. (2.10) sind die Nemitsky-Operatoren  $g_1 : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  bzw.  $g_2 : L^{p_1+1}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  stetig (siehe dazu den entsprechenden Abschnitt A.2 im Anhang).

Differenzierbarkeit von  $F$ :

Für  $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$  erhält man mittels Taylorentwicklung des Integranden

$$F(u+v) - F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} [\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^N} + f(u)v] dx + R(u, v),$$

wobei

$$R(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 [f(u + tv) - f(u)]v dt dx.$$

Zu zeigen ist  $R(u, v) = o(\|v\|)$  für  $\|v\| \rightarrow 0$ . Dies ist klar für den ersten Summanden von  $R(u, v)$ , und für den zweiten Summanden gehen wir wie folgt vor: Genau wie vorher können wir  $f = f_1 + f_2$  in stetige Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zerlegen, die

$$|f_1(s)| \leq C_7 |s| \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

$$|f_2(s)| \leq C_8 |s|^{p_1} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

mit positiven Konstanten  $C_7, C_8$  genügen. Nun schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int [f(u + tv) - f(u)]v dx \right| \\ & \leq \int |f_1(u + tv) - f_1(u)| |v| dx + \int |f_2(u + tv) - f_2(u)| |v| dx \\ & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f_1(u + tv) - f_1(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ & \quad + \|f_2(u + tv) - f_2(u)\|_{L^{(p_1+1)/p_1}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^{p_1+1}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Wegen der Wachstumsbedingungen (2.11) und (2.12) sind die Nemitsky-Operatoren  $f_1 : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  und  $f_2 : L^{p_1+1}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{\frac{p_1+1}{p_1}}(\mathbb{R}^N)$  stetig, und daher folgt mit (2.6)

$$\frac{\left| \int [f(u + tv) - f(u)]v dx \right|}{\|v\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow 0 \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N),$$

gleichmäßig in  $t \in [0, 1]$ , so dass  $R(u, v) = o(\|v\|)$  für  $\|v\| \rightarrow 0$ . Zudem erhalten wir

$$DF(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} [\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^N} + f(u)v] dx.$$

Differenzierbarkeit von  $DF$ :

Wir gehen ähnlich vor wie zuvor. Für  $v, w \in H^1(\mathbb{R}^N)$  gilt

$$DF(u+v)w - DF(u)w = \int_{\mathbb{R}^N} [\langle \nabla v, \nabla w \rangle_{\mathbb{R}^N} + f'(u)vw] dx + R_2(u, v, w),$$

wobei

$$R_2(u, v, w) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} [f'(u + tv) - f'(u)]vw dx dt.$$

Zu zeigen ist  $R_2(u, v, w) = o(\|v\|)$  für  $\|v\| \rightarrow 0$ , gleichmäßig für  $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$  mit  $\|w\| = 1$ . Zerlege  $f'(s) = f'_1(s) + f'_2(s)$  in stetige Funktionen  $f'_1, f'_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die

$$|f'_1(s)| \leq C_9 \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f_1(s) = 0 \quad \text{für } |s| \geq 2, \quad (2.13)$$

$$|f'_2(s)| \leq C_{10} |s|^{p_2-1} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f_2(s) = 0 \quad \text{für } |s| \leq 1 \quad (2.14)$$

mit positiven Konstanten  $C_9, C_{10}$  genügen (möglich nach  $(f_4)$ ). Mit Hilfe obiger Zerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left| \int [f'(u + tv) - f'(u)] v w dx \right| \\ & \leq \int |f'_1(u + tv) - f'_1(u)| |v w| dx + \int |f'_2(u + tv) - f'_2(u)| |v w| dx \\ & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int |f'_1(u + tv) - f'_1(u)| |v w| dx \\ & \quad + \|f'_2(u + tv) - f'_2(u)\|_{L^{\frac{p_2+1}{p_2-1}}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)} \|w\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)} \\ & =: S_1(v, w) + S_2(v, w). \end{aligned}$$

Wegen der Wachstumsbedingung (2.14) ist der Nemitsky-Operator  $f'_2 : L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{(p_2+1)/(p_2-1)}$  stetig, und mit der stetigen Einbettung (2.6) folgt, dass

$$\frac{S_2(v, w)}{\|v\| \|w\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow 0 \text{ in } H^1,$$

gleichmäßig in  $w$  (und offensichtlich gleichmäßig in  $t \in [0, 1]$ ). Für  $S_1$  bleibt dies noch zu zeigen. Für beliebiges  $\epsilon > 0$  gilt hier

$$\begin{aligned} S_1(v, w) & \leq \int_{\{|v| \leq \epsilon\}} |f'_1(u + tv) - f'_1(u)| |v w| dx \\ & \quad + \int_{\{|v| > \epsilon\}} |f'_1(u + tv) - f'_1(u)| |v w| dx \\ & \leq \sup \{|f'_1(U + s) - f'_1(U)| : U \in \mathbb{R}, |s| \leq \epsilon\} \int_{\{|v| \leq \epsilon\}} |v w| dx \\ & \quad + 2C_9 \int_{\{|v| > \epsilon\}} 1 \cdot |v w| dx \\ & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sup \{|f'_1(U + s) - f'_1(U)| : U \in \mathbb{R}, |s| \leq \epsilon\} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ & \quad + 2C_9 \text{Vol}_N(\{|v| > \epsilon\})^{p_2-1} \|v\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)} \|w\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

$f'_1$  ist wegen seines kompakten Trägers auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig stetig, so dass

$$\sup \{|f'_1(U + s) - f'_1(U)| : U \in \mathbb{R}, |s| \leq \epsilon\} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0;$$

außerdem gilt  $\text{Vol}_N(\{|v| > \epsilon\}) \rightarrow 0$  für  $v \rightarrow 0$  in  $H^1(\mathbb{R}^N)$  (insbesondere in  $L^2(\mathbb{R}^N)$ ), für beliebige  $\epsilon > 0$ . Mit der stetigen Einbettung (2.6) folgt insgesamt

$$\frac{S_1(v, w)}{\|v\| \|w\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow 0 \text{ in } H^1,$$

gleichmäßig in  $w$  und  $t$ . □

Wir kommen nun zum Nachweis von  $(F_1)$ .

## 2.1.2 Existenz der kritischen Mannigfaltigkeit

Wir wollen jetzt die Existenz nichttrivialer kritischer Punkte für die Klasse (2.1) von Funktionalen nachweisen. Die Translationsinvarianz des Funktionals und der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung (in schwacher Form, also als Gleichung in  $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$  für  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ )

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad \text{für } u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (\text{EL})$$

sorgt dafür, dass ein bekannter nichttrivialer kritischer Punkt durch Translation bereits eine ganze Mannigfaltigkeit kritischer Punkte erzeugt.

**Bemerkung 2.1.2.** *Wir wollen hier (in Satz 2.1.5) eigentlich positive kritische Punkte von  $F$ , also schwache Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), u > 0$$

*finden; für eine positive Lösung  $u$  spielt aber nur das Verhalten von  $f$  auf  $[0, \infty)$  eine Rolle. Daher nehmen wir in diesem Unterabschnitt o.B.d.A. an, dass anstelle von  $(f_0)$  sogar*

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ ist ungerade} \quad (f'_0)$$

*gilt (gegebenenfalls müssen wir  $f$  einfach ungerade auf die negative Halbachse fortsetzen).*

Im folgenden wollen wir nun die Existenz einer positiven, radialsymmetrischen und längs des Radius streng monoton fallenden Lösung von (EL) nachweisen. Zunächst jedoch erst ein Lemma zur Erzeugung der Mannigfaltigkeit:

**Lemma 2.1.3 (Erzeugung einer Mannigfaltigkeit durch Translation).** *Es sei  $z_0 \in H^{k+1}(\mathbb{R}^N)$  (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ) positiv, radialsymmetrisch, und längs des Radius streng monoton fallend. Setze für  $\theta \in \mathbb{R}^N$*

$$z_\theta(x) := z_0(x + \theta), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.15)$$

Dann ist

$$Z := \{z_\theta : \theta \in \mathbb{R}^N\} \quad (2.16)$$

eine  $N$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $E = H^1(\mathbb{R}^N)$ , und die Funktion  $\theta \mapsto z_\theta$  ist eine globale Karte von  $Z$ .

*Beweis.* Wegen  $z_0 \in H^{k+1}\mathbb{R}^N$  ist  $z : \mathbb{R}^N \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $\theta \mapsto z_\theta$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Außerdem sind die partiellen Ableitungen  $\partial_i z_\theta := \frac{\partial}{\partial \theta_i} z_\theta$  ( $i = 1, \dots, N$ ) linear unabhängig, denn

$$\langle \partial_i z_\theta, \partial_j z_\theta \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_i z_0(x) \partial_j z_0(x) dx_i d(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_N) = 0,$$

da aufgrund der Radialsymmetrie von  $z_0$  die partielle Ableitung  $\partial_i z_0$  ungerade in  $x_i$  und  $\partial_j z_0$  gerade in  $x_i$  ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $z : \mathbb{R}^N \rightarrow Z$  ein Homöomorphismus ist. Betrachte dazu eine Folge  $(\theta(n))$  mit

$$\|z_{\theta(n)} - z_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.17)$$

(Als Grenzwert der  $z_{\theta(n)}$  wird o.B.d.A.  $z_0$  angenommen, das Argument für beliebige Grenzen  $z_\theta$  ist analog). Zu zeigen ist  $\theta(n) \rightarrow 0$ .

Wir beweisen das indirekt: Angenommen es existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $\|\theta(n_j)\|_{\mathbb{R}^d} \geq \epsilon$  für eine Teilfolge  $(\theta(n_j))$  von  $(\theta(n))$ . Wegen der strengen Monotonie von  $z_0$  längs des Radius gilt  $z_0(x) - z_0(y) \geq \mu > 0$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^N$  mit  $\|x\|_{\mathbb{R}^N} \leq \frac{1}{4}\epsilon$ ,  $\|y\|_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{3}{4}\epsilon$ . Nun folgt

$$\begin{aligned} \|z_0 - z_{\theta(n_j)}\| &\geq \|z_0 - z_{\theta(n_j)}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq \int_{\|x\|_{\mathbb{R}^N} \leq \frac{\epsilon}{4}} |z_0(x) - z_0(x + \theta(n_j))| dx \\ &\geq \int_{\|x + \theta(n_j)\|_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{3}{4}\epsilon} \int_{\|x\|_{\mathbb{R}^N} \leq \frac{\epsilon}{4}} \mu dx > 0, \end{aligned}$$

was (2.17) widerspricht.  $\square$

**Bemerkung 2.1.4.** Die Aussage von Lemma 2.1.3 gilt auch, wenn die Voraussetzungen der Symmetrie und Monotonie an  $z_0$  weggelassen werden, und  $z_0$  beide Vorzeichen annimmt (aber natürlich darf  $z_0$  nicht identisch 0 sein). Die Zusatzvoraussetzungen erleichtern den Beweis aber erheblich, und die Funktion  $z_0$ , auf die Lemma 2.1.3 hier letztendlich angewandt wird, nämlich die Lösung von (EL), deren Existenz wir im folgenden beweisen werden, besitzt diese Eigenschaften.

Kommen wir nun zur Existenz einer nichttrivialen Lösung von (EL) und ihren Eigenschaften. Der folgende Satz stammt von H. Berestycki, P.-L. Lions, P. L. und L. A. Peletier [9]. Diese Arbeit, der wir hier folgen werden, weist die Existenz einer geeigneten Lösung der für radialsymmetrische Funktionen zu (EL) gehörigen

gewöhnlichen Differentialgleichung über eine sog. „shooting method“ nach. Es sind jedoch auch andere Zugänge möglich, die mit Variationsmethoden (EL) direkt lösen, siehe dazu [8]. Interessanter Fakt ist, dass positive Lösungen von (EL) automatisch radialsymmetrisch sein müssen, was Gidas, Ni und Nirenberg in [12] gezeigt haben – in dem hier verwendeten Zugang werden wir diese Aussage jedoch nicht benötigen. An dieser Stelle sei auch noch die Dissertation von S. Maier-Paape [16] erwähnt, die eine ganze Reihe von Aussagen über das Verhalten von radialsymmetrischen Lösungen von (EL) enthält, auch für andere Typen von  $f$ .

**Satz 2.1.5 (Existenz und Eigenschaften eines nichttrivialen kritischen Punktes des ungestörten Potentials, Theorem I.1 in [9]).** *Es gelte  $(f_0-f_2)$ ,  $(f_4)$ . Dann existiert eine klassische Lösung  $z_0 \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap C^3(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$  von*

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad (\text{EL})$$

*mit den folgenden Eigenschaften:  $z_0$  ist positiv, radialsymmetrisch, und die Ableitung längs des Radius erfüllt  $\partial_r z_0(r) < 0$  für  $r > 0$ ; insbesondere fällt  $z_0$  streng monoton in der radialen Richtung. Die zweite Ableitung von  $z_0$  nach dem Radius bei  $r = 0$  ist  $\partial_r^2 z_0(0) = -f(z_0(0))/N < 0$ .  $z_0$  und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung fallen exponentiell ab für  $r \rightarrow \infty$ . Außerdem ist  $z_0 \in H^3(\mathbb{R}^N)$ .*

*Beweis.* Für eine radialsymmetrische Funktion  $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $u = u(r)$  lässt sich (EL) umformulieren in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) = 0. \quad (\text{EL}_{\text{rad}})$$

Wir suchen eine Lösung  $z_0 \in C^2[0, \infty) \cap C^3(0, \infty)$  von  $(\text{EL}_{\text{rad}})$  mit  $u'(0) = 0$  (dann ist  $x \mapsto z_0(\|x\|_{\mathbb{R}^N})$  von der Klasse  $C^2$  über  $\mathbb{R}^N$ ), die positiv und im Unendlichen mitsamt ihren Ableitungen exponentiell fallend ist sowie  $\partial_r z_0(r) < 0$  für  $r > 0$  erfüllt.

Wir betrachten dazu  $(\text{EL}_{\text{rad}})$  als Anfangwertproblem

$$\begin{aligned} u'' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) &= 0, \\ u(0) &= b \quad \text{und} \quad u'(0) = 0, \end{aligned} \quad (\text{AWP})$$

mit dem Parameter  $b > 0$ . Dieses Anfangwertproblem besitzt für jeden Parameterwert  $b > 0$  eine lokal um  $r = 0$  eindeutige Lösung  $r \mapsto u(b, r)$  in  $C^2[0, \delta) \cap C^3(0, \delta)$  (für ein  $\delta > 0$ ), und diese Lösungsfunktion ist für festes  $r$  in  $b$  stetig differenzierbar – siehe dazu Lemma 2.1.6. Des weiteren kann diese Lösung nach dem Satz von Picard-Lindelöf (anwendbar für  $r > 0$ ) auf  $[0, \infty)$  fortgesetzt werden (und die fortgesetzte Lösungsfunktion ist differenzierbar in  $b$  für alle  $r \geq 0$ ). Das maximale Existenzintervall ist unendlich, weil Lösungen von

(AWP) beschränkt bleiben ( $u$  und  $u'$  sind beschränkt). (AWP) besitzt nämlich eine Lyapunov-Funktion

$$E(u, u') := \frac{1}{2}u'^2 + g(u) \quad u, u' \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

wobei  $g(t) := \int_0^t f(s) ds$  Stammfunktion von  $f$  ist. Da nach  $(f'_0)$ ,  $(f_1)$  und  $(f_2)$

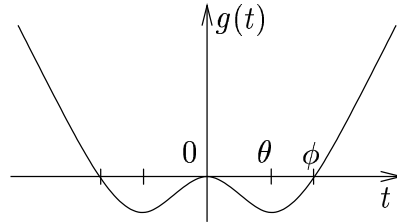


Abbildung 2.2: Typisches  $g$

$g$  nach unten beschränkt ist, ist auch  $E$  nach unten beschränkt. Längs Lösungen ist  $E$  zudem monoton fallend, es gilt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial r} E(u(r, b), u'(r, b)) \underset{(\text{EL}_{\text{rad}})}{=} -\frac{N-1}{r} u'(r, b)^2 \leq 0. \quad (2.19)$$

Daher bleibt die Lyapunov-Funktion  $E$  längs einer Lösung  $u(r, b)$  von (AWP) beschränkt. Da  $g$  nach unten beschränkt ist, impliziert das, dass  $u(r, b)$  und  $u'(r, b)$  selbst beschränkt bleiben, für alle  $r \geq 0$ . Als Lösung von  $(\text{EL}_{\text{rad}})$  ist  $u(\cdot, b)$  außerdem dreimal stetig differenzierbar für  $r > 0$  (denn  $f \in C^1$ ).

Wir betrachten nun folgende Familien von Lösungen von (AWP): Setze

$$P := \{b > \theta : \exists r_0 > 0 \text{ mit } u'(r_0, b) = 0 \text{ und } u(r, b) > 0 \forall r \in (0, r_0]\}, \quad (2.20)$$

$$N := \{b > \theta : \exists r_0 > 0 \text{ mit } u(r_0, b) = 0 \text{ und } u'(r, b) < 0 \forall r \in (0, r_0]\}, \quad (2.21)$$

$$G := (\theta, \infty) \setminus (N \cup P). \quad (2.22)$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass  $G$  nichtleer ist. Wir setzen dann  $z_0 := u(\cdot, b_0)$  mit  $b_0 := \inf G$  und weisen nach, dass  $z_0$  die gewünschten Eigenschaften besitzt (Diese Methode wird als „shooting“ bezeichnet). Der restliche Beweis gliedert sich nun in folgende Hilfsaussagen, die im Anschluss bewiesen werden:

1. (Lemma 2.1.8)  $P$  enthält das offene Intervall  $(\theta, \phi)$ .
2. (Lemma 2.1.9)  $N$  ist nichtleer.
3. (Lemma 2.1.10)  $P$  und  $N$  sind offen.



4. (Lemma 2.1.11) Für  $b \in G$  ist  $u(r, b) > 0$  sowie  $u'(r, b) < 0$  für alle  $r > 0$ . Außerdem gilt  $u(r, b) \rightarrow 0$ ,  $u'(r, b) \rightarrow 0$  und  $u''(r, b) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .
5. (Lemma 2.1.12) Für  $b \in G$  fallen  $u(r, b)$ ,  $u'(r, b)$  und  $u''(r, b)$  exponentiell für  $r \rightarrow \infty$ .
6. (Lemma 2.1.13) Für  $b \in G$  ist  $u(\cdot, b) \in H^3(\mathbb{R}^N)$  (als radialsymmetrische Funktion über  $\mathbb{R}^N$ ).

Da  $(\theta, \infty)$  zusammenhängend ist und  $P$  und  $N$  offensichtlich disjunkt sind, liefern die Aussagen 1-3, dass  $G$  nichtleer ist. Außerdem erhalten wir  $b_0 = \inf G \geq \phi > \theta$  sowie  $b_0 \in G$  (wegen 1 und 3 ist  $G$  abgeschlossen). Mit 4-6 folgt die Behauptung des Satzes (eigentlich wissen wir sogar, dass  $u(\cdot, b)$  für beliebiges  $b \in G$  die geforderten Eigenschaften besitzt, nicht nur die spezielle Wahl  $z_0 = u(\cdot, b_0)$ ).  $\square$

Die in Satz 2.1.5 gefundene Lösung  $z_0$  des ungestörten Problems (EL) erfüllt insbesondere die Voraussetzungen von Lemma 2.1.3, so dass  $F$  die kritische  $C^2$ -Mannigfaltigkeit

$$Z := \{z(\cdot + \theta) : \theta \in \mathbb{R}^N\} \subset H^1(\mathbb{R}^N) \quad (2.23)$$

besitzt.

Wir wollen jetzt die Hilfsaussagen beweisen, die im Beweis von Satz 2.1.5 verwendet wurden. Die Prämissen des Satzes werden im folgenden generell vorausgesetzt (außer im direkt im Anschluss folgenden Lemma 2.1.6, das von den Voraussetzungen an  $f$  lediglich die stetige Differenzierbarkeit ( $f_0$ ) benötigt), und die im Satz sowie in dessen Beweis eingeführten Bezeichnungen werden übernommen.

**Lemma 2.1.6 (Lokal eindeutige Lösbarkeit des singulären Anfangswertproblems (AWP); siehe etwa [18] S.157f).** *Ist die Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so besitzt (AWP) für jedes  $b \in \mathbb{R}$  eine (lokale) klassische Lösung  $u \in C^2[0, \delta)$ , und die Lösung ist in  $C^2(0, \delta) \cap C^1[0, \delta)$  eindeutig. Für die zweite Ableitung der Lösung bei  $r = 0$  gilt  $u''(0, b) = -f(b)/N$ . Des weiteren hängt die Lösung  $u(\cdot, b)$  differenzierbar von  $b$  ab, und ihre Ableitung nach  $b$  ist in  $r$  zweimal differenzierbar.  $u$  und alle genannten Ableitungen sind stetig in  $(r, b)$ .*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt mit einem Fixpunktargument. Die Gleichung

$$u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) + f(u(r)) = 0, \quad r > 0$$

ist äquivalent zu

$$(r^{N-1}u'(r))' = -f(u(r))r^{N-1},$$

oder als Integralgleichung

$$u'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} f(u(s)) ds. \quad (2.24)$$

Durch eine weitere Integration bezüglich  $r$  erhält man

$$\begin{aligned} u(r, b) &= u(0, b) - \int_0^r \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} f(u(s, b)) ds dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} u(0, b) - \int_0^r \int_s^r \left(\frac{s}{t}\right)^{N-1} f(u(s, b)) dt ds, \end{aligned}$$

und durch Ausführen der inneren Integration schließlich

$$u(r, b) = \begin{cases} b + \int_0^r \frac{1}{2-N} \left( \frac{1}{s^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right) s^{N-1} f(u(s, b)) ds & \text{falls } N > 2, \\ b - \int_0^r s \ln\left(\frac{r}{s}\right) f(u(s, b)) ds & \text{falls } N = 2. \end{cases} \quad (2.25)$$

Sei nun  $b_0 \in \mathbb{R}$  fest gewählt. Wir fassen (2.25) auf als Fixpunktgleichung  $u = Tu$  für  $u$  in

$$B := C_B(U) := \{u \in C(U) : \|u\|_\infty < \infty\},$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_\infty = \sup \{|u(r, b)| : (r, b) \in U\},$$

wobei  $U := [0, \delta) \times (b_0 + \beta, b_0 - \beta)$ . Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall  $N > 2$ , die Argumentation für  $N = 2$  ist analog.  $T$  bildet  $B$  in  $B$  ab; man beachte dazu:

$$\int_0^r \left| \frac{1}{s^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right| s^{N-1} ds \leq \int_0^r \frac{s^{N-1}}{r^{N-2}} ds + \int_0^r s ds = \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \right) r^2. \quad (2.26)$$

Die Schranken  $\delta$  und  $\beta$  können so klein gewählt werden, dass  $T$  eine Kontraktion auf einer kleinen Umgebung (etwa einem Ball mit Radius  $R$  um  $b_0$  in  $B$ ) der konstanten Abbildung  $b_0 \in B$  wird: Für  $u, v \in B$  gilt

$$\begin{aligned} \|T(u - v)\|_\infty &\leq \sup_{(r,b) \in U} \int_0^r \frac{1}{2-N} \left| \frac{1}{s^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right| s^{N-1} |f(u) - f(v)| ds \\ &\leq L_1 \int_0^\delta \frac{1}{2-N} \left| \frac{1}{s^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right| s^{N-1} ds \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$

wobei  $L_1 > 0$  eine lokale Lipschitzkonstante von  $f$  bei  $b_0$  ist. Die Kontraktionseigenschaft ist damit bewiesen, und  $T$  hat einen eindeutigen Fixpunkt in  $B_R(b_0) \subset B$ .

Lösungen  $u(r, b)$  der Fixpunktgleichung (2.25) erfüllen nun  $u(r, b) \rightarrow b$  für  $r \rightarrow 0$ , denn das Integral in (2.25) konvergiert gegen 0, was man mit Hilfe von (2.26) sehen kann. Die behauptete Regularität von  $u$  in  $r$  folgt aus (2.25): Differenzierbarkeit folgere man aus (2.25), und Differenzierbarkeit der Ableitung (insbesondere auch bei  $r = 0$ ) anschließend aus (2.24); dies liefert auch  $u''(0, b) = -f(b)/N$ . Mit Hilfe von (2.24) sieht man auch, dass  $u'(0, b) = 0$  gilt, so dass die Lösungen von (2.25) auch Lösungen von (AWP) sind.

Die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung vom Parameter  $b$  kann man mit dem selben Argument wie im nichtsingulären Fall folgern: Man sieht leicht, dass die Differenz  $\Delta_h u(r, b) := u(r, b+h) - u(r, b)$  für  $h$  aus einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 das lineare Anfangswertproblem (mit der speziellen Wahl  $c = h$ )

$$\begin{aligned} v'' + \frac{N-1}{r}v' + G(r, b, h)v \\ v'(0) = 0 \quad \text{und} \quad v(0) = c \end{aligned} \tag{2.27}$$

erfüllt, mit einer in allen drei Variablen stetigen Funktion

$$\begin{aligned} G(r, b, h) &:= \frac{f(u(r, b+h)) - f(u(r, b))}{u(r, b+h) - u(r, b)} \\ &= \int_0^1 f'(u(r, b) + t[u(r, b+h) - u(r, b)]) dt. \end{aligned}$$

Mit einem völlig analogen Beweis wie oben für (AWP) kann man zeigen, dass auch (2.27) eine eindeutige Lösung besitzt, die stetig in den Parametern  $b$ ,  $h$  und  $c$  ist. Insbesondere ist (2.27) auch für die Anfangsbedingung  $c = 1$  eindeutig (lokal) lösbar, und ist  $v(r, b, h, 1)$  diese Lösung, so ist wegen der Linearität des Problems die Lösung für  $c = h$  durch  $\Delta_h u(r, b) = hv(r, b, h, 1)$  gegeben. Damit existiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h u(r, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} v(r, b, h, 1),$$

so dass  $u(r, b)$  in  $b$  differenzierbar ist. Da der Limes gleichmäßig ist, solange  $r$  und  $b$  in einem Kompaktum liegen, ist  $\partial_b u(r, b)$  wie  $v(r, b, h, 1)$  stetig in  $(r, b)$ . Differenzierbarkeit von  $\partial_b u(r, b)$  in  $r$  und die Stetigkeit der Ableitungen erhält man, indem man (2.25) nach dem Anfangswert  $b$  differenziert – die Lösung  $\partial_b u(r, b)$  der resultierenden Integralgleichung besitzt dann offenbar die behauptete Regularität.  $\square$

**Lemma 2.1.7.** *Existiert für ein  $b \in \mathbb{R}$   $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, b) = B$ , so folgt  $\lim_{r \rightarrow \infty} u'(r, b) = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} u''(r, b) = 0$ , und  $f(B) = 0$ . Konvergiert  $u(r, b)$  zudem schließlich streng monoton gegen  $B \geq 0$ , so gilt  $B = 0$ .*

*Beweis.*  $E(r, b) := E(u(r, b), u'(r, b))$  ist monoton fallend in  $r$ , und nach unten beschränkt. Daher existiert der Limes  $E_0(b) := \lim_{r \rightarrow \infty} E(r, b) \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt

$$u'(r, b)^2 = E(r, b) - g(u(r, b)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} E_0 - g(B).$$

Da  $u(r, b)$  für  $r \rightarrow \infty$  konvergiert, muss der Limes  $E_0 - g(B) = 0$  sein. Weiter gilt nun

$$u''(r, b) = -\frac{N-1}{r}u'(r, b) - f(u(r, b)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -f(B),$$

und wie vorher impliziert die Konvergenz von  $u'(r, b)$ , dass  $f(B) = 0$  ist.

$u(r, b)$  konvergiere nun schließlich streng monoton gegen  $B \geq 0$ . Insbesondere gilt dann für alle hinreichend großen  $r$  entweder  $u(r, b) > B$  oder  $u(r, b) < B$ . Nach dem obigen Argument gilt  $B = 0$  oder  $B = \theta$ ; dies sind nach  $(f_1)$  nämlich die einzigen nichtnegative Nullstellen von  $f$ . Nehmen wir nun an, dass  $B = \theta$ . Setze

$$v(r) := \begin{cases} r^{\frac{N-1}{2}}(u(r, b) - \theta) & \text{falls } u(r, b) > \theta \text{ für grosse } r, \\ r^{\frac{N-1}{2}}(\theta - u(r, b)) & \text{falls } u(r, b) < \theta \text{ für grosse } r. \end{cases}$$

Offensichtlich ist  $v(r) \geq 0$  für große  $r$ . Mittels (EL<sub>rad</sub>) erhalten wir im ersten Fall

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{(N-1)(N-3)r^{\frac{N-1}{2}}}{4r^2}(u - \theta) + (N-1)\frac{r^{\frac{N-1}{2}}}{r}u' + r^{\frac{N-1}{2}}u'' \\ &= r^{\frac{N-1}{2}} \left[ \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}(u - \theta) - f(u) \right] \\ &= \left[ \frac{-f(u)}{u - \theta} + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} \right] v. \end{aligned}$$

Analoge Rechnung für den zweiten Fall liefert ebenfalls

$$v'' = \left[ \frac{-f(u)}{u - \theta} + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} \right] v. \quad (2.28)$$

Da  $f(\theta) = 0$  und  $u(r, b) \rightarrow \theta$  für  $r \rightarrow \infty$ , haben wir

$$\frac{-f(u)}{u - \theta} + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -f'(\theta) < 0,$$

so dass (2.28) für hinreichend große  $r$

$$v'' \leq -\frac{f'(\theta)}{2}v \leq 0 \quad (2.29)$$

liefert.  $v'$  ist deshalb schließlich monoton, und besitzt einen Grenzwert

$$W := \lim_{r \rightarrow \infty} v'(r) \geq -\infty.$$

Wäre  $W < 0$ , würde  $v(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\infty$  folgen, im Widerspruch zu  $v(r) \geq 0$  für große  $r$ . Ist andererseits  $W \geq 0$ , so gilt wegen (2.29)  $v'(r) \geq 0$  für große  $r$ , und damit ist  $v(r) \geq v(R) > 0$  für alle  $r \geq R$ , mit einem hinreichend großen  $R > 0$ . Mit (2.29) impliziert dies aber  $v''(r) \leq -\frac{f'(\theta)}{2}v(R) < 0$ , was zu Folge hätte, dass  $v'(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\infty$ , im Widerspruch zu  $W \geq 0$ .  $B = \theta$  kann also nicht gelten, und damit folgt  $B = 0$ .  $\square$

**Lemma 2.1.8.**  $(\theta, \phi) \subset P$ .

*Beweis.* Sei  $b \in (\theta, \phi)$ . Für  $E(r, b) := E(u(r, b), u'(r, b))$  gilt dann

$$g(u(r, b)) \leq E(r, b) \stackrel{(2.19)}{\leq} E(0, b) = g(b) < 0 \quad (2.30)$$

für alle  $r \geq 0$ . Bezeichnet nun  $s_1 := \inf \{s \in (0, \phi) : g(s) \leq g(b)\}$  und  $s_2 := \sup \{s \in (0, \phi) : g(s) \leq g(b)\}$ , so gilt  $0 < s_1 \leq s_2 < \phi$  (da  $g(0) = g(\phi) = 0 > g(b)$ ), und mit (2.30) folgt für alle  $r \geq 0$

$$u(r, b) \in [s_1, s_2] \subset (0, \phi).$$

Für kleine  $r > 0$  ist  $u'(r, b) < 0$ , denn  $u'(0, b) = 0$  und  $u''(0, b) = -f(b)/N < 0$ . Außerdem muss ein  $r_1 > 0$  existieren mit  $u'(r_1, b) = 0$ , denn sonst wäre  $u(\cdot, b)$  auf  $[0, \infty)$  strikt monoton fallend mit Grenzwert  $B := \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, b) \in [s_1, s_2]$  – nach Lemma 2.1.7 müsste dann aber widersprüchlich  $B = 0$  gelten. Also ist  $b \in P$ .  $\square$

**Lemma 2.1.9.** Für ein geeignetes  $R > 0$  existiert eine nichttriviale Lösung  $u \in C^2[0, R]$  von

$$\begin{aligned} u'' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) &= 0, \quad r \in [0, R] \\ u'(0) &= 0 \quad \text{und} \quad u(R) = 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

mit  $u(r) > 0$  für  $0 \leq r < R$  und  $u'(r) < 0$  für  $0 < r \leq R$ . Außerdem ist  $u(0) \geq \phi > \theta$ , so dass  $u(0) \in N$ .

*Beweis.* Ist  $u$  eine Lösung von (2.31) mit  $u(0) > 0$  (ist  $u(0) < 0$ , so gehe einfach zu  $\tilde{u} := -u$  über; da  $f$  ungerade ist, löst auch  $\tilde{u}$  (2.31)), so muss zunächst  $u(0) \geq \phi$  gelten, da sonst mit dem Energieargument aus Lemma 2.1.8  $u(r) \in (0, \phi)$  für alle  $r \geq 0$  folgen würde. Außerdem ist dann  $u''(0) = -f(b)/N < 0$ , so dass für kleine  $r > 0$   $u'(r) < 0$  ist. O.B.d.A. sei  $R$  die erste positive Nullstelle von  $u$ .  $u$  kann keinen kritischen Punkt  $r_1 \in (0, R)$  besitzen, denn sonst wäre  $u(r) > 0$  für alle  $r > 0$ : Ist  $r_1$  der erste positive kritische Punkt von  $u$ , so ist  $u''(r_1) = -f(u(r_1)) \geq 0$ , und daher  $u(r_1) \leq \theta$ . Dann gilt aber  $E(u(r_1), 0) = g(r_1) < 0$ , und wegen der monotonen Abnahme der Energie längs der Lösung  $u$  folgt wieder

$u(r) \in (0, \phi)$  für alle  $r \geq r_1$ , im Widerspruch zu  $u(R) = 0$ .  $u'(R)$  kann auch nicht verschwinden, da  $u$  dann identisch 0 wäre.

Die Existenz einer nichttrivialen Lösung von (2.31) für ein  $R > 0$  ist nun noch zu zeigen. Dazu betrachten wir das Variationsproblem

$$T(u) := \int_{B_R(0)} (\nabla u)^2 dx \rightarrow \min$$

unter der isoperimetrischen Nebenbedingung

$$V(u) := \int_{B_R(0)} g(u) dx = 1 \tag{2.32}$$

für  $u \in H_{0,r}^1(B_R(0)) := \{u \in H_0^1(B_R(0)) : u \text{ ist radialsymmetrisch}\}$

über dem  $N$ -dimensionalen Ball  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$  mit Radius  $R$ . Ein Minimierer von (2.32) erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\Delta u + \mu f(u) = 0 \quad (\text{schwach}), \tag{2.33}$$

mit einem Lagrange-Multiplikator  $\mu \in \mathbb{R}$ . Die Methode des Lagrange-Multiplikators ist hier anwendbar, da die erste Variation von  $V$  bei einem  $u \in H_{0,r}^1(B_R(0))$  mit  $V(u) = 1$  nicht 0 ist:

$$DV(u)h = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h dx = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^\infty(B_R(0))$$

kann nur dann gelten, wenn

$$f(u) = 0 \quad \text{und damit } u \in \{-\theta, 0, \theta\} \quad \text{fast überall in } B_R(0).$$

Dann wäre aber  $g(u) \leq 0$  fast überall, und damit auch  $V(u) \leq 0$ . Ist die radialsymmetrische Funktion  $u$  sogar klassisch ( $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ ), so ist (2.33) äquivalent zu

$$u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) + \mu f(u(r)) = 0, \quad r \in [0, R] \tag{2.34}$$

(wobei ' die Ableitung nach dem Radius  $r$  notiert), und  $u$  erfüllt die Randbedingungen

$$u'(0) = 0 \quad \text{und} \quad u(R) = 0. \tag{2.35}$$

Wir wollen nun folgendes zeigen:

1. (2.32) besitzt für geeignetes  $R > 0$  einen Minimierer.
2. Regularität: Der Minimierer ist klassisch.

3. Der Lagrange-Multiplikator erfüllt  $\mu > 0$ .

Die ersten beiden Aussagen liefern uns eine Lösung von (2.34) mit den Randwerten (2.35). Die dritte erlaubt es uns, durch eine Variablentransformation  $\mu = 1$  zu wählen, so dass wir eine Lösung von (2.31) erhalten. Wir setzen dazu  $\tilde{u}(r) := u(\mu^{-1/2}r)$ ;  $\tilde{u}$  erfüllt dann (2.31) mit  $\tilde{R} := \mu^{-1/2}R$  anstelle von  $R$ .

Nun zum Beweis von 1-3:

**zu 1:**

Für ausreichend große  $R$  gibt es  $v \in H_{0,r}^1(B_R(0))$  mit  $V(v) = 1$ ; die Nebenbedingung von (2.32) ist also erfüllbar. Betrachte dazu für  $Q \geq 0$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $w_Q$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} w_Q(r) &= \xi && \text{für } r \leq Q \\ w_Q(r) &\in [0, \xi] && \text{für } Q \leq r \leq Q + 1 \\ w_Q(r) &= 0 && \text{für } r \geq Q + 1 \end{aligned}$$

wobei  $\xi > 0$  so gewählt sei, dass  $g(\xi) > 0$ .  $w_Q$  erfüllt dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g(w_Q(\|x\|_{\mathbb{R}^N})) dx &= \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} g(w_Q(r)) d\omega r^{N-1} dr \\ &\geq \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1}) \frac{1}{N} (Q^N g(\xi) + [(Q+1)^N - Q^N] (\min g)) \xrightarrow[Q \rightarrow \infty]{} \infty \end{aligned}$$

(beachte  $(Q+1)^N - Q^N = O(Q^{N-1})$  für  $Q \rightarrow \infty$ ), so dass  $V(w_Q) > 0$  für ausreichend große  $Q$ . Setze nun für ein solches  $Q$ , und beliebiges  $\zeta > 0$   $v(r) := w_Q(r/\zeta)$ . Dieses  $v$  ist offensichtlich in  $H_{0,r}^1(B_R(0))$ , solange  $R > \zeta(Q+1)$ , und es gilt

$$V(v) \stackrel{\text{Trafo}}{=} \zeta \int_{\mathbb{R}^N} g(w_Q(\|x\|_{\mathbb{R}^N})) dx > 0,$$

so dass man durch geeignete Wahl von  $\zeta$   $V(v) = 1$  erhalten kann.

Sei nun  $R$  groß genug (im obigen Sinne), fest gewählt. Die im folgenden auftretenden Räume und Normen sind alle über dem Gebiet  $B_R(0)$  aufzufassen. Wähle eine Minimalfolge  $(u_n) \subset H_{0,r}^1$  von (2.32). Wegen der Minimalfolgeneigenschaft ist  $T(u_n) = \|\nabla u_n\|_{L^2}^2$  beschränkt, und nach der Poincaré-Ungleichung auch  $\|u_n\|_{H_0^1}$ . Daher besitzt  $(u_n)$  eine in  $H_{0,r}^1$  schwach konvergente Teilfolge; nenne diese wieder  $(u_n)$ . Der schwache Limes sei  $u^*$ . Da  $T$  offensichtlich strikt konvex in  $\nabla u$  ist, ist  $T$  schwach unterhalbstetig, so dass

$$T(u^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = \inf T. \quad (2.36)$$

Wir müssen noch zeigen, dass  $u^*$  auch die Nebenbedingung  $V(u^*) = 1$  erfüllt. Wegen der kompakten Einbettung  $H_{0,r}^1 \hookrightarrow L^{p_1+1}$  (das Gebiet  $B_R(0)$  ist beschränkt!)

können wir (durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge) annehmen, dass  $u_n$  in  $L^{p_1+1}$  konvergiert (natürlich auch gegen  $u^*$ ). Wegen der ersten Wachstumsbedingung in  $(f_4)$  ist der Nemitsky-Operator  $g : L^{p_1+1} \rightarrow L^1$  wieder stetig, und daher gilt

$$1 = V(u_n) = \int_{B_R(0)} g(u_n) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} g(u^*) dx = V(u^*) \quad (2.37)$$

Insgesamt ergeben (2.36) und (2.37), dass  $u^* \in H_{0,r}^1(B_R(0))$  (2.32) löst.

**zu 2:**

Zeige zunächst  $u^* \in W^{2,q}(B_R(0))$  für alle  $q \in [2, \infty)$ . Zum Beweis benützen wir die elliptische  $L^p$ -Regularitätstheorie (siehe A.3) in einem Bootstrap-Argument. Nach der Einbettung (2.6) ist  $u^* \in L^p$  (abkürzend wird das Gebiet  $B_R(0)$  hier und im folgenden weggelassen) für alle  $1 \leq p < 2^* = 2N/(N-2)$  (im Fall  $N = 2$  lies  $2^* = \infty$ ). Wegen der Wachstumsbedingung  $(f_4)$  an  $f$  ist  $f(u^*) \in L^{p/p_1}$ , und da  $p \in [p_1, 2^*)$  beliebig ist, gilt  $f(u^*) \in L^q$  für alle  $1 \leq q < q_1 := 2^*/p_1$ . Da  $u^* \in H_0^1$  Lösung von (2.33) ist, liefert die elliptische  $L^p$ -Regularitätsaussage aus Satz A.3.2 nun  $u^* \in W^{2,q}$ . Falls  $N = 2$ , also  $q_1 = \infty$  ist, sind wir fertig. Ansonsten fahren wir wie folgt fort:

Falls  $2q_1 \leq N$  ist, bekommen wir mit der Einbettung (2.4)  $u^* \in L^{\frac{Nq}{N-2q}}$  ( $1 \leq q < q_1$ ), und wieder mit  $(f_4)$   $f(u^*) \in L^{\frac{Nq}{Np_1-2qp_1}}$ . Da das für alle  $1 \leq q < q_1$  geht, ist  $f(u^*) \in L^{\tilde{q}}$  für alle  $1 \leq \tilde{q} < q_2 := \frac{Nq_1}{Np_1-2q_1p_1}$ . Mit der  $L^p$ -Regularität folgt  $u^* \in W^{2,q}$  für alle  $q \in [1, q_2)$ .

Sollte dagegen  $2q_1 > N$  sein, so erhalten wir mit der Einbettung (2.5)  $u^* \in L^q$  für alle  $1 \leq q < \infty$ ; und weiter  $f(u^*) \in L^q$  sowie  $u^* \in W^{2,q}$  für  $1 \leq q < \infty$ , womit wir fertig sind.

Dieses Argument lässt sich nun beliebig oft wiederholen (bei Bedarf; bricht das Verfahren ab, wenn z.B. wie oben im zweiten Fall  $2q_k > N$  ist, sind wir ohnehin fertig), und wir erhalten eine Folge  $(q_k)$ , so dass  $u^* \in W^{2,q}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq q < q_k$ . Dabei ist

$$q_{k+1} = q_k \frac{N}{Np_1 - 2q_k p_1}.$$

Zu zeigen ist noch, dass der hier auftretende Faktor

$$\frac{N}{Np_1 - 2q_k p_1} \geq \frac{N}{Np_1 - 2q_1 p_1} > 1 \quad (2.38)$$

ist, so dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \infty$ . Die zweite Ungleichung in (2.38) ist äquivalent zu  $p_1 < 2^* - 1$ :

$$N > Np_1 - 2q_1 p_1 = Np_1 - \frac{4N}{N-2} \Leftrightarrow p_1 < 1 + \frac{4}{N-2} = 2^* - 1.$$

Die erste Ungleichung in (2.38) folgt aus der zweiten mit Induktion, da der Faktor  $N/(Np_1 - 2q_k p_1)$  monoton wachsend in  $q_k$  ist.



Wir haben jetzt also  $u^* \in W^{2,q}(B_R(0))$  für alle  $1 \leq q < \infty$ . Für  $q > N$  ist  $W^{2,q}(B_R(0)) \hookrightarrow C^1(\overline{B_R(0)})$  stetig eingebettet, so dass  $u^* \in C^1(\overline{B_R(0)})$  folgt. Daher ist auch  $f(u^*)$  im klassischen Sinn stetig differenzierbar, insbesondere  $f(u^*) \in W^{1,q}(B_R(0))$  für beliebige  $q \geq 1$ . Die  $L^p$ -Regularitätsaussage liefert dann für die Lösung  $u^*$  von (2.33)  $u^* \in W^{3,q}(B_R(0))$  ( $q \geq 1$  beliebig), womit  $u^* \in C^2(\overline{B_R(0)})$  folgt. Also löst  $u^*$  (2.33) klassisch, und wegen  $u^* \in H_0^1(B_R(0))$  gilt  $u^*(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^N$  mit  $\|x\|_{\mathbb{R}^N} = 0$ .

**zu 3:**

Zu zeigen ist  $\mu > 0$ . Sei  $u^*(x_0) = \max\{|u^*(x)| : x \in B_R(0)\} \neq 0$ . Wir können  $u^*(x_0) \geq 0$  annehmen, da mit  $u^*$  auch  $-u^*$  Minimierer von (2.32) ist (die Nebenbedingung bleibt erhalten, da  $g$  gerade ist). Nun gilt mit dem Maximumsprinzip

$$0 \geq \Delta u^*(x_0) = -\mu f(u(x_0))$$

Wenn wir annehmen, dass  $\mu < 0$  ist, dann muss  $f(u^*(x_0)) \leq 0$  sein, und daher  $u^*(x_0) \in [0, \theta]$ . Nach Definition von  $x_0$  folgt aber  $|u(x)| \leq u^*(x_0) \leq \theta$  für alle  $x \in B_R(0)$ , und damit

$$V(u^*) = \int_{\mathbb{R}^N} g(u^*(x)) dx \leq 0,$$

im Widerspruch zur Nebenbedingung  $V(u^*) = 1$  von (2.32).  $\mu = 0$  kann auch nicht gelten, da sonst  $\Delta u^* = 0$  auf  $B_R(0)$  und damit  $u^* \equiv 0$  ist, was wiederum  $V(u^*) = 1$  widerspricht. Es bleibt nur  $\mu > 0$ .  $\square$

**Lemma 2.1.10.**  *$P$  und  $N$  sind offen.*

*Beweis.* 1)  $P$  ist offen

Sei  $b_1$  in  $P$ . Zu zeigen ist, dass bereits eine ganze Umgebung von  $b_1$  in  $P$  liegt. Wegen Lemma 2.1.8 können wir uns auf den Fall  $b_1 \geq \phi$  beschränken. Sei nun

$$R(b) := \inf\{r > 0 : u'(r, b) = 0\} > 0 \quad (b \in P)$$

der erste positive kritischen Punkt von  $u(\cdot, b)$ . Für  $b \in P$  gilt  $R(b) > 0$ , da  $u'(0, b) = 0$  und nach Lemma 2.1.6  $u''(0, b) = -f(b)/N \neq 0$ . Offenbar ist  $u(R(b_1), b_1) \neq \theta$ , denn sonst wäre  $u(r, b_1) \equiv \theta$  konstant. Daher ist

$$u''(R(b_1), b_1) = -f(u(R(b_1), b_1)) \neq 0$$

und nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es für alle  $b$  nahe  $b_1$  ein  $r = r(b)$  (das stetig von  $b$  abhängt) mit  $r(b_1) = R(b_1)$  und

$$u'(r(b), b) = 0.$$

Außerdem ist  $u(r, b) > 0$  für alle  $r \in [0, r(b)]$ , solange  $b$  nahe genug bei  $b_1$  ist, wegen der Stetigkeit von  $u$  (da  $b_1 \in P$  ist, ist  $u(r, b_1) > 0$  für alle  $r \in [0, b_1]$ ). Für

alle  $b > \theta$  ist  $u''(0, b) = -f(b)/N < 0$ , womit auch  $u'(r, b) < 0$  für kleine  $r$  gilt, und dieses Vorzeichen bleibt natürlich bis zum ersten positiven kritischen Punkt erhalten, der für  $b$  nahe genug an  $b_1$  existiert. Damit ist aber  $b \in P$ , für  $b$  nahe bei  $b_1$ .

2)  $N$  ist offen

Sei  $b_1 \in N$ . Für  $b \in N$  bezeichne

$$R(b) := \inf \{r > 0 : u(r, b) = 0\} > 0 \quad (b \in N)$$

die erste positive Nullstelle von  $u(\cdot, b)$ . Es gibt eine kompakte Umgebung  $[b_2, b_3] \subset (\phi, \infty)$  von  $b_1$  ( $b_2 < b_1 < b_3$ ) und ein  $r_1 > 0$ , so dass  $u''(r, b) \leq -\delta_1 < 0$  ist, für alle  $b \in [b_2, b_3]$  und  $0 \leq r \leq r_1$  (denn  $u''$  ist gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum  $[0, r_1] \times [b_2, b_3]$ , und  $u''(0, b_1) = -f(b_1)/N < 0$ ); und da  $u'(0, b) = 0$  ist, folgt insbesondere

$$u'(r, b) < 0 \quad \text{für } (r, b) \in (0, r_1] \times [b_2, b_3]. \quad (2.39)$$

Andererseits ist  $u'(r, b_1) \leq -\delta_2 < 0$  für  $r \in [r_1, R(b_1) + \epsilon]$  mit einer Konstante  $\delta_2 > 0$  und einem hinreichend kleinem  $\epsilon > 0$  (beachte:  $u'(R(b_1), b_1) \neq 0$ , denn sonst wäre  $u(r, b_1) \equiv 0$ , und für kleines  $\epsilon$  bleibt  $u'(R(b_1) + \epsilon, b_1) \neq 0$ ). Deswegen gilt sogar

$$u'(r, b) < 0 \quad \text{für } (r, b) \in (0, R(b_1) + \epsilon] \times [b_2, b_3] \quad (2.40)$$

(wegen gleichmäßiger Stetigkeit von  $u'$  auf Kompakta; eventuell das Intervall  $[b_2, b_3]$  verkleinern). Außerdem lässt sich die Gleichung  $u(r, b) = 0$  lokal um  $(R(b_1), b_1)$  mit dem Satz über implizite Funktionen nach  $r$  auflösen, und das bedeutet, dass für  $b$  nahe genug bei  $b_1$  jede Funktion  $u(\cdot, b)$  eine Nullstelle in  $[0, R(b_1) + \epsilon]$  hat. Zusammen mit (2.40) folgt  $b \in N$  für  $b$  nahe genug bei  $b_1$ .  $\square$

**Lemma 2.1.11.** *Für  $b \in G$  ist  $u(r, b) > 0$  sowie  $u'(r, b) < 0$  für alle  $r > 0$ . Außerdem gilt  $u(r, b) \rightarrow 0$ ,  $u'(r, b) \rightarrow 0$  und  $u''(r, b) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .*

*Beweis.* Da  $b \notin P$ , ist  $u'(r, b) \neq 0$ , solange  $r > 0$  und  $u(r, b) > 0$ ; da  $b \notin N$ , muss  $u(r, b) > 0$  für alle  $r > 0$  gelten. Nach Lemma 2.1.8 ist  $b \geq \phi > \theta$ , und damit  $u''(0, b) = -f(b)/N < 0$ . Wegen  $u'(0, b) = 0$  ist also  $u'(r, b) < 0$  für alle  $r > 0$ . Also ist  $u(\cdot, b)$  positiv und streng monoton fallend, und hat im Unendlichen einen Grenzwert  $B := \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, b) \geq 0$ . Lemma 2.1.7 liefert die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.1.12.** *Für  $b \in G$  fällt  $u(r, b_0)$  zusammen mit seinen Ableitungen nach  $r$  bis zur dritten Ordnung exponentiell für  $r \rightarrow \infty$ .*

*Beweis.* Schreibe abkürzend  $u(r) = u(r, b)$ . Wir wollen zunächst zeigen, dass der exponentielle Abfall von  $u$  den exponentiellen Abfall der Ableitungen impliziert. Nehmen wir also an,  $u$  fällt exponentiell:  $u(r) \leq C \exp(-\delta r)$  mit Konstanten  $C, \delta > 0$ . Da  $u$  streng monoton fällt, gilt

$$-u''(r) \leq -u''(r) - \frac{N-1}{r} u'(r) = f(u(r)) \leq 0$$

für hinreichend große  $r$  (also hinreichend kleines  $u(r)$ ), so dass  $u'(r) \geq u'(s)$  für  $r \geq s$ . Daraus erhalten wir

$$0 \geq u'(r) \geq \int_{r-1}^r u'(s) ds = u(r) - u(r-1) \geq -2C \exp(-\delta r),$$

den exponentiellen Abfall von  $u'$ . Der exponentielle Abfall von  $u''$  folgt dann sofort aus der Differentialgleichung (EL<sub>rad</sub>), und den exponentiellen Abfall von  $u'''$  erhält man durch Differentiation von (EL<sub>rad</sub>) nach  $r$ .

Nun ist noch der exponentielle Abfall von  $u$  selbst zu zeigen. Dazu setze

$$v(r) := r^{\frac{N-1}{2}} u(r) > 0.$$

Wie in Lemma 2.1.7 erhalten wir mittels (EL<sub>rad</sub>) die Differentialgleichung

$$v'' = \left[ \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} - \frac{f(u)}{u} \right] v,$$

und da  $f(u)/u \rightarrow f'(0)$  für  $r \rightarrow \infty$ , folgt für große  $r$

$$v''(r) \geq \epsilon^2 v(r), \quad \text{mit } \epsilon := \sqrt{-f'(0)/2}. \quad (2.41)$$

Betrachte nun

$$Q(r) := \exp(-\epsilon r)(v'(r) + \epsilon v(r)).$$

$Q$  ist schließlich monoton wachsend, denn

$$Q'(r) = \exp(-\epsilon r)(v''(r) - \epsilon^2 v(r)) \stackrel{(2.41)}{\geq} 0$$

für große  $r$ . Außerdem ist  $Q$  (für große  $r$ ) nach oben durch 0 beschränkt: Mit Lemma 2.1.11 erhalten wir

$$Q(r) = \exp(-\epsilon r) r^{\frac{N-1}{2}} \left( u'(r) + \frac{N-1}{2r} u(r) + \epsilon u(r) \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

und wegen der Monotonie von  $Q$  kann das nur erfüllt sein, wenn  $Q(r) \leq 0$  ist, für alle großen  $r$ . Daraus folgt aber

$$\frac{\partial}{\partial r} [\exp(\epsilon r)v] = \exp(2\epsilon r)Q(r) \leq 0,$$

und dies bedeutet  $v(r) = O(\exp(-\epsilon r))$  für  $r \rightarrow \infty$  (beachte  $v \geq 0$ ). Mit  $v$  fällt schließlich auch  $u$  exponentiell.  $\square$

**Lemma 2.1.13.** Für  $b \in G$  ist die Funktion

$$x \mapsto \tilde{u}(x) := u(\|x\|_{\mathbb{R}^N}, b), \quad \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

in  $H^3(\mathbb{R}^N)$ .

*Beweis.*  $\tilde{u}$  ist nach Lemma 2.1.6 für  $x \neq 0$  dreimal stetig differenzierbar, und wegen Lemma 2.1.12 ist dann

$$\tilde{u} \in H^3(\mathbb{R}^N \setminus U) \quad \text{für jede offene Umgebung } U \text{ von } 0 \in \mathbb{R}^N. \quad (2.42)$$

Andererseits erfüllt  $\tilde{u}$  (EL), also  $\Delta \tilde{u} = -f(\tilde{u})$ . Nun ist  $f(\tilde{u})$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}^N$ , so dass insbesondere  $f(\tilde{u}) \in H^1(B)$  für jedes beschränkte Gebiet  $B \subset \mathbb{R}^N$ . Mit der üblichen elliptischen Regularitätstheorie folgt  $u \in H_{\text{loc}}^3(\mathbb{R}^N)$ . Zusammen mit (2.42) erhalten wir  $u \in H^3(\mathbb{R}^N)$ .  $\square$

### 2.1.3 Fredholmeigenschaften

Als nächstes wollen wir uns mit  $(F_2)$  befassen. Zu zeigen ist, dass  $D\nabla F(z) : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  für alle  $z \in Z$  Fredholm-Operator mit Index 0 ist, mit der kritischen Mannigfaltigkeit

$$Z \stackrel{(2.23)}{=} \{z_0(\cdot + \theta) : \theta \in \mathbb{R}^N\}$$

von  $F$ , die aus den Translationen der Lösung  $z_0$  aus Satz 2.1.5) besteht. Wir wissen

$$D^2F(z)[\varphi, \eta] = - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \varphi \nabla \eta \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} f'(z) \varphi \eta \, dx$$

für  $\varphi, \eta \in H^1(\mathbb{R}^N)$ . Zum Nachweis der Fredholmeigenschaft schreiben wir dies um in

$$\begin{aligned} D^2F(z)[\varphi, \eta] &= - \int_{\mathbb{R}^N} [\langle \nabla \varphi, \nabla \eta \rangle_{\mathbb{R}^N} - f'(0) \varphi \eta] \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} [f'(z) - f'(0)] \varphi \eta \, dx \\ &\stackrel{\text{Riesz}}{=} - \langle S\varphi, \eta \rangle_{H^1} + \langle T(z)\varphi, \eta \rangle_{H^1} \end{aligned}$$

mit symmetrischen stetigen linearen Operatoren  $S, T(z) : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ , so dass also  $D\nabla F(z) = -S + T(z)$ .  $S$  ist offenbar bijektiv und stetig invertierbar auf  $H^1(\mathbb{R}^N)$  (sogar positiv definit). Wir wollen nun zeigen, dass  $T(z)$  kompakt ist. Dann folgt mit der Symmetrie von  $S$  und  $T(z)$  die in  $(F_3)$  geforderte Fredholmeigenschaft von  $D\nabla F(z)$ , denn

$$S^{-1}D\nabla F(z) = -I + S^{-1}T(z) = -I + K$$

mit dem symmetrischen kompakten Operator  $K := S^{-1}T(z)$ , so dass  $S^{-1}D\nabla F(z)$  und schließlich auch  $D\nabla F(z)$  Fredholm-Operator mit Index 0 ist. Die Kompaktheit von  $T(z)$  folgt dabei aus Lemma 2.1.15; man beachte, dass  $z_0$  (und damit alle  $z \in Z$ ) nach Satz 2.1.5 im Unendlichen klassisch abfällt. Außerdem ist der Morse-Index  $m_0$  von  $z$  als kritischem Punkt von  $-F|_{z+\text{Bild } D\nabla F(z)}$  definiert und endlich, sofern  $D\nabla F(z)|_{\text{Bild } D\nabla F(z)}$  stetig invertierbar ist (was wir in Unterabschnitt 2.1.4 sehen werden):

**Lemma 2.1.14.** *Zu jedem  $z \in Z$  existiert ein Unterraum  $E^+$  endlicher Kodimension  $m_0$  von  $H^1(\mathbb{R}^N)$  mit*

$$\langle -D\nabla F(z)\varphi^+ , \varphi^+ \rangle_{H^1} \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi^+ \in E^+,$$

*Als Konsequenz ist der Morse-Index von  $-D\nabla F(z)|_{T_z Z^\perp} : T_z Z^\perp \rightarrow T_z Z^\perp$ , also die maximal mögliche Dimension eines Unterraumes  $E^-$  von  $T_z Z^\perp$  mit*

$$\langle -D\nabla F(z)\varphi^- , \varphi^- \rangle_{H^1} < -C \|\varphi^-\|_{H^1}^2 \quad \text{für alle } \varphi^- \in E^-,$$

*(mit geeigneter Konstante  $C > 0$ ), höchstens  $m_0$ .*

*Beweis.* Ein Skalarprodukt ohne Index bezeichnet im folgenden stets das Skalarprodukt auf  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Offenbar ist

$$\begin{aligned} & \langle D\nabla F(z)\varphi , \eta \rangle \\ &= f'(0) \langle \varphi , \eta \rangle + \langle T(z)\varphi , \eta \rangle - (1 + f'(0)) \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \varphi , \nabla \eta \rangle_{\mathbb{R}^N} dx \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$= - \langle \varphi , \eta \rangle + \langle T(z)\varphi , \eta \rangle + (1 + f'(0)) \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \eta dx \quad (2.44)$$

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle  $f'(0) \leq -1$  und  $-1 < f'(0) < 0$ .

**1. Fall:**  $f'(0) \leq -1$

Definiere den stetigen lineare Operator  $R : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  durch

$$\langle R\varphi , \eta \rangle = (1 + f'(0)) \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \eta dx,$$

so dass nach (2.44)

$$D\nabla F(z) = -I + T(z) + R.$$

Da sich das Spektrum des symmetrischen kompakten Operators  $T(z)$  nur bei 0 häufen kann (insbesondere nicht bei 1), existiert eine orthogonale Zerlegung  $H^1(\mathbb{R}^N) = E^- \oplus E^+$  in abgeschlossene, für  $T(z)$  invariante Unterräume von  $H^1(\mathbb{R}^N)$  mit  $\dim E^- < \infty$  und

$$\langle (-I + T(z))\varphi^- , \varphi^- \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \varphi^- \in E^-, \quad (2.45)$$

$$\langle (-I + T(z))\varphi^+ , \varphi^+ \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \varphi^+ \in E^+, \quad (2.46)$$

mit einer Konstanten  $C^+ > 0$ . Da offensichtlich  $\langle R\varphi , \varphi \rangle \leq 0$  für alle  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  ist, gilt (2.46) auch noch für  $D\nabla F(z) = -I + T(z) + R$  anstelle von  $-I + T(z)$ , was behauptet war.

**2. Fall:**  $-1 < f'(0) < 0$

Setze dann

$$\langle R\varphi, \eta \rangle = -(1 + f'(0)) \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla\varphi, \nabla\eta \rangle_{\mathbb{R}^N} dx,$$

so dass nach (2.44)

$$D\nabla F(z) = f'(0) + T(z) + R.$$

Die restliche Argumentation ist völlig analog zum ersten Fall.  $\square$

Abschließend weisen wir die oben verwendete Kompaktheit von  $T(z)$  nach:

**Lemma 2.1.15 (Kompaktheit einer Klasse von Operatoren auf  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ).**  
 $T : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  sei ein stetiger linearer Operator von der Form

$$\langle T\varphi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\varphi(x)\eta(x) dx, \quad (2.47)$$

wobei die Funktion  $a \in L_{loc}^{(p_2+1)/(p_2-1)}(\mathbb{R}^N)$  (mit einem  $p_2 \in (1, 2^* - 1)$ )  $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0$  erfülle.

Dann ist  $T$  kompakt.

*Beweis.* Sei  $(\varphi_n)$  eine beschränkte Folge in  $H^1(\mathbb{R}^N)$  (etwa  $\|\varphi_n\| \leq C$ ). Zu zeigen ist, dass  $(T\varphi_n)$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Wesentliches Hilfsmittel zum Beweis wird die kompakte Einbettung für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{für } 2 \leq q < 2^*, \quad (2.48)$$

(insbesondere für  $q = 2$  und  $q = p_2 + 1$ ) sein. Wir konstruieren die gesuchte Teilfolge induktiv:

Erster Schritt:

Wähle ein  $R_1 \geq 0$ , so dass  $|a(x)| < 1$  für alle  $\|x\|_{\mathbb{R}^N} \geq R_1$ . Nach (2.48) existiert eine Teilfolge  $(\varphi_n^1)$  von  $(\varphi_n)$ , die Cauchy-Folge in  $L^{p_2+1}(B_{R_1}(0)) \cap L^2(B_{R_1}(0))$  ist. Damit existiert eine natürliche Zahl  $\tilde{n}_1$ , so dass  $\|\varphi_n^1 - \varphi_m^1\|_{L^{p_2+1}(B_{R_1}(0))} \leq 1$  und  $\|\varphi_n^1 - \varphi_m^1\|_{L^2(B_{R_1}(0))} \leq 1$  für alle  $n, m \geq \tilde{n}_1$ .  $T\varphi_{\tilde{n}_1}^1$  ist nun das erste Glied unserer gesuchten Teilfolge.

Allgemeiner Schritt ( $k \rightarrow k + 1$ ):

Wir haben für ein  $k \in \mathbb{N}$  Zahlen  $0 < R_1 < \dots < R_k$  mit  $|a(x)| < 1/i$  für alle  $\|x\|_{\mathbb{R}^N} \geq R_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), und auf  $L^{p_2+1}(B_{R_i}(0)) \cap L^2(B_{R_i}(0))$  konvergente Teilfolgen  $(\varphi_n^i)$  von  $(\varphi_n)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Für diese Teilfolgen sind Zahlen  $\tilde{n}_i$  so gewählt, dass  $\|\varphi_n^i - \varphi_m^i\|_{L^{p_2+1}(B_{R_i}(0))} \leq 1/i$  und  $\|\varphi_n^i - \varphi_m^i\|_{L^2(B_{R_i}(0))} \leq 1/i$  für alle  $n, m \geq \tilde{n}_i$ .  $(\varphi_n^{i+1})$  ist dabei jeweils Teilfolge von  $(\varphi_n^i)_{n \geq \tilde{n}_i}$ , für  $i = 1, \dots, k - 1$ . Wir wählen nun  $R_{k+1} > R_k$ , so dass

$$|a(x)| \leq \frac{1}{k+1} \quad \text{für alle } \|x\|_{\mathbb{R}^N} \geq R_{k+1} \quad (2.49)$$

und nach (2.48) eine Teilfolge  $(\varphi_n^{k+1})$  von  $(\varphi_n^k)_{n \geq \tilde{n}_k}$ , die Cauchy-Folge in  $L^{p_2+1}(B_{R_{k+1}}(0)) \cap L^2(B_{R_{k+1}}(0))$  ist. Also existiert ein  $\tilde{n}_{k+1} \in \mathbb{N}$  mit

$$\|\varphi_n^{k+1} - \varphi_m^{k+1}\|_{L^2(B_{R_{k+1}}(0))} \leq 1/k + 1 \quad \text{für alle } n, m \geq \tilde{n}_{k+1}. \quad (2.50)$$

$$\|\varphi_n^{k+1} - \varphi_m^{k+1}\|_{L^{p_2+1}(B_{R_{k+1}}(0))} \leq 1/k + 1 \quad \text{für alle } n, m \geq \tilde{n}_{k+1} \text{ und} \quad (2.51)$$

$T\varphi_{\tilde{n}_{k+1}}^{k+1}$  wird das  $(k+1)$ -te Glied unserer gesuchten Teilfolge.

Die so konstruierte Teilfolge  $(T\varphi_{\tilde{n}_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist nun Cauchy-Folge in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Für  $j \geq k$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle T\varphi_{\tilde{n}_k}^k - T\varphi_{\tilde{n}_j}^j, \eta \right\rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_k}(0)} |a(x)\eta(x)| \left| \varphi_{\tilde{n}_k}^k(x) - \varphi_{\tilde{n}_j}^j(x) \right| dx \\ & \quad + \int_{B_{R_k}(0) \setminus B_{R_1}(0)} |a(x)\eta(x)| \left| \varphi_{\tilde{n}_k}^k(x) - \varphi_{\tilde{n}_j}^j(x) \right| dx \\ & \quad + \int_{B_{R_1}(0)} |a(x)\eta(x)| \left| \varphi_{\tilde{n}_k}^k(x) - \varphi_{\tilde{n}_j}^j(x) \right| dx \\ & \stackrel{(2.49), \text{ Hölder}}{\leq} \frac{1}{k} \left\| \varphi_{\tilde{n}_k}^k - \varphi_{\tilde{n}_j}^j \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ & \quad + \left\| \varphi_{\tilde{n}_k}^k - \varphi_{\tilde{n}_j}^j \right\|_{L^2(B_{R_k}(0))} \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ & \quad + \|a\|_{L^{\frac{p_2+1}{p_2-1}}(B_{R_1}(0))} \left\| \varphi_{\tilde{n}_k}^k - \varphi_{\tilde{n}_j}^j \right\|_{L^{p_2+1}(B_{R_1}(0))} \|\eta\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)} \\ & \stackrel{(2.50), (2.51)}{\leq} \left( \frac{1}{k} 2C + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \tilde{C} \|a\|_{L^{\frac{p_2+1}{p_2-1}}(B_{R_1}(0))} \right) \|\eta\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstanten  $\tilde{C}$ , die so gewählt ist, dass wegen der stetigen Einbettung (2.6)  $\|\eta\|_{L^{p_2+1}(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C} \|\eta\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ .  $\square$

## 2.1.4 Nichtdegeneriertheit der kritischen Mannigfaltigkeit

In diesem Unterabschnitt wollen wir  $(F_3)$  nachweisen, also

$$T_z Z = \text{Kern } D\nabla F(z), \quad \text{für alle } z \in Z,$$

für die durch (2.23) gegebenen kritischen Mannigfaltigkeit  $Z$  von  $F$ . Zur Erinnerung:

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ -\frac{1}{2}(\nabla u)^2 + g(u) \right] dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

mit  $g(s) = \int_0^s f(t) dt$ , und für  $\varphi, \eta \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\langle D\nabla F(u)\varphi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [-\nabla\varphi\nabla\eta + f'(u)\varphi\eta] dx.$$

Bezeichnet  $\theta \mapsto z_\theta$  eine lokale Karte von  $Z$ , so ist  $\nabla F(z_\theta) = 0$  für alle  $\theta$  aus dem Definitionsbereich der Karte, und daher

$$0 = \frac{\partial}{\partial\theta_i} \nabla F(z_\theta) = D\nabla F(z_\theta)\partial_i z_\theta$$

für  $i = 1, \dots, N$ , so dass

$$\text{Span}[\partial_i z_\theta : i = 1, \dots, N] = T_{z_\theta} Z \subset \text{Kern } D\nabla F(z_\theta).$$

Daher ist eigentlich nur die Inklusion

$$\text{Kern } D\nabla F(z) \subset T_z Z, \quad \text{für alle } z \in Z \quad (2.52)$$

zu zeigen, oder anders ausgedrückt

$$\dim \text{Kern } D\nabla F(z) \leq N, \quad \text{für alle } z \in Z. \quad (2.53)$$

Insbesondere werden wir dazu die Bedingung  $(f_3)$  an  $f$  benötigen, die bisher keine Rolle gespielt hat.

**Satz 2.1.16 (Nichtdegeneriertheit der kritischen Mannigfaltigkeit; Lemma 4.2(i) in [17]).**  *$f$  erfülle  $(f_0-f_4)$ .  $z_0 \in H^3(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$  sei die positive radialsymmetrische Lösung von  $\nabla F(z_0) = 0$  aus Satz 2.1.5, und*

$$Z = \{z_\theta := z_0(\cdot + \theta) : \theta \in \mathbb{R}^N\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$$

*die aus  $z_0$  durch Translation erzeugte kritische Mannigfaltigkeit von  $F$ . Dann ist  $Z$  nichtdegeneriert für  $F$ , es gilt also (2.52).*

*Beweis.* Sei  $v \in \text{Kern } D\nabla F(z) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ , also

$$\langle D\nabla F(z)v, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [-\nabla v\nabla\eta + f'(z)v\eta] dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (2.54)$$

Offenbar ist  $v \in \text{Kern } D\nabla F(z_0)$  genau dann, wenn  $v(\cdot + \theta) \in \text{Kern } D\nabla F(z_0(\cdot + \theta))$  ( $\theta \in \mathbb{R}^N$ ), so dass wir ab jetzt ohne Einschränkung  $z = z_0$  verwenden können.

Als erstes wollen wir mit Hilfe der  $L^p$ -Regularitätstheorie erhöhte Glattheit von  $v$  nachweisen. Da  $z_0$  stetig und beschränkt ist, und  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig (nach  $(f_0)$ ), ist auch  $f'(z_0) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt. Mit der stetigen Einbettung (2.6) folgt außerdem  $v \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$ , für  $1 \leq q \leq q_1 := 2^*$  (falls  $N \geq 3$ ) bzw.  $1 \leq$



$q < \infty$  (falls  $N = 2$ ), und mit  $v$  gilt das auch für  $f'(z_0)v$ .  $L^p$ -Regularitätstheorie im Inneren (siehe Anhang A.3, Satz A.3.1) liefert für die (schwache) Lösung  $v$  von (2.54)  $v \in W_{\text{loc}}^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ . Nun folgt mittels der Einbettung (2.4)  $W_{\text{loc}}^{2,q}(\mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^N)$ , mit  $1 \leq \tilde{q} \leq (Nq)/(N-2q)$  (falls  $2q < N$ , sonst geht das für  $1 \leq \tilde{q} < \infty$  nach der Einbettung (2.5)). Da  $1 \leq q \leq q_1$  beliebig war, ist  $v \in L_{\text{loc}}^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^N)$ , mit  $1 \leq \tilde{q} \leq q_2 := (Nq_1)/(N-2q_1)$ , und mit der Regularitätsaussage von Satz A.3.1 folgt  $v \in W_{\text{loc}}^{2,\tilde{q}}(\mathbb{R}^N)$  ( $1 \leq \tilde{q} < q_2$ ). Dieses Argument kann (bei Bedarf) beliebig oft wiederholt werden, und da die rekursiv definierte Folge  $(q_k)$ , mit  $q_1 = 2^*$  und  $q_{k+1} = q_k N / (N - 2q_k)$  beliebig groß wird (beachte  $N/(N-2q_k) \geq N/(N-2 \cdot 2^*) > 1$ ), erhalten wir

$$v \in W_{\text{loc}}^{2,q}(\mathbb{R}^N), \quad \text{für alle } 1 \leq q < \infty.$$

Insbesondere folgt  $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$ .

Wir wollen jetzt  $v$  nach den Kugelflächenfunktionen, also den Eigenfunktionen  $e_k$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ) des Laplace-Beltrami-Operators  $\Delta_B$  auf der Einheitssphäre  $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ , entwickeln. Die Kugelflächenfunktionen  $e_k \in C^\infty(S^{N-1})$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem auf  $L^2(S^{N-1})$ , und die zugehörigen Eigenwerte  $\mu_k$  von  $\Delta_B$  erfüllen

$$0 = \mu_0 < \mu_1 = \dots = \mu_N = N - 1 < \mu_{N+1} \leq \mu_{N+2} \leq \dots \quad (2.55)$$

Der zum Eigenwert 0 gehörige Eigenvektor ist dabei konstant  $e_0 \equiv \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1})^{-1/2}$ . Zum Laplace-Beltrami-Operator, den Kugelflächenfunktionen und ihren Eigenschaften siehe zum Beispiel das Buch von H. Triebel [20], Kapitel VI 31 (S. 408ff.). Schreibt man  $x \in \mathbb{R}^N$  in Polarkoordinaten  $x = r\omega$ , mit dem Radius  $r = \|x\|_{\mathbb{R}^N}$  und dem Winkelanteil  $\omega = x/\|x\|_{\mathbb{R}^N} \in S^{N-1}$ , so lässt sich der Laplace-Operator darstellen durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Delta_B. \quad (2.56)$$

Für  $r \geq 0$  sind die Entwicklungskoeffizienten von  $v$  bezüglich der  $e_k$  gegeben durch

$$v_k(r) := \int_{S^{N-1}} v(r\omega) e_k(\omega) d\omega, \quad (2.57)$$

wobei  $d\omega$  das  $(N-1)$ -dimensionale Flächenelement der Sphäre  $S^{N-1}$  bezeichnet. Offenbar sind die  $v_k$  wie  $v$  stetig differenzierbar, also  $v_k \in C^1[0, \infty)$  (nicht ganz so klar ist die Differenzierbarkeit der  $v_k$  bei  $r = 0$ , dazu gleich). Außerdem ist

$$v'_k(r) := \frac{\partial}{\partial r} v_k(r) = \int_{S^{N-1}} \langle \nabla v(r\omega), \omega \rangle_{\mathbb{R}^N} e_k(\omega) d\omega. \quad (2.58)$$

Zur Differenzierbarkeit bei 0: Mit Hilfe von (2.58) (für  $r > 0$ ) und dem Lebesgueschen Satz von der majorisierte Konvergenz sieht man

$$\lim_{r \rightarrow 0} v'_k(r) = \int_{S^{N-1}} \langle \nabla v(0), \omega \rangle_{\mathbb{R}^N} e_k(\omega) d\omega,$$

insbesondere existiert der Limes. Dann muss aber nach dem Mittelwertsatz  $v_k$  bei 0 differenzierbar sein, und  $v'_k(0) = \lim_{r \rightarrow 0} v'_k(r)$ . Der Koeffizient zur 0-ten Eigenfunktion erfüllt die Anfangsbedingungen

$$v_0(0) = \int_{S^{N-1}} v(0) e_0 d\omega = v(0) \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1})^{1/2}, \quad (2.59)$$

$$v'_0(0) = \int_{S^{N-1}} \langle \nabla v(0), \omega \rangle_{\mathbb{R}^N} e_0 d\omega = 0 \quad (2.60)$$

(das werden wir in Lemma 2.1.20 brauchen), wobei die letzte Gleichung in (2.60) gilt, weil  $\langle \nabla v(0), \omega \rangle_{\mathbb{R}^N}$  auf gegenüberliegenden Punkten  $\{\omega, -\omega\}$  der Sphäre jeweils gleichen Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat. Da die  $e_k$  ein vollständiges Orthonormalsystem auf  $L^2(S^{N-1})$  bilden, gilt auch

$$v(r\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) e_k(\omega), \quad (2.61)$$

wobei die Konvergenz der Reihe in  $L^2(S^{N-1})$  punktweise für  $r \geq 0$  stattfindet. Wir wollen nun aus der Gleichung (2.54) für  $v$  Gleichungen für die Basiskoeffizienten  $v_k$  herleiten. Zunächst folgt aus (2.54) durch partielle Integration für beliebige Testfunktionen  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} v [\Delta \eta + f'(z_0) \eta] dx \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} v(r\omega) [\Delta \eta(r\omega) + f'(z_0(r)) \eta(r\omega)] d\omega r^{N-1} dr \\ &\stackrel{(2.61)}{=} \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S^{N-1}} v_k(r) e_k(\omega) [\Delta \eta(r\omega) + f'(z_0(r)) \eta(r\omega)] d\omega r^{N-1} dr, \end{aligned}$$

und mit (2.56) und partieller Integration bezüglich  $\omega$  folgt weiter

$$0 = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S^{N-1}} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu_k}{r^2} \right) \eta(r\omega) + f'(z_0(r)) \eta(r\omega) \right] v_k(r) e_k(\omega) d\omega r^{N-1} dr.$$

Wählt man nun speziell die Testfunktion  $\eta(r\omega) = \varphi(r) e_j(\omega)$ , mit einer beliebigen Funktion  $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$  und einem  $j \geq 0$ , so erhält man mit Hilfe der Orthonormalität der  $e_k$  schließlich

$$0 = \int_0^\infty \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu_k}{r^2} + f'(z_0(r)) \right) \varphi(r) \right] v_j(r) r^{N-1} dr. \quad (2.62)$$

Da dies für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$  gilt, ist  $v_j \in C^1[0, \infty)$  in  $(0, \infty)$  sogar zweimal stetig differenzierbar, so dass  $v_j$  die zu (2.62) gehörige Euler-Lagrange-Gleichung (in starker Form)

$$v_j'' + \frac{N-1}{r}v_j' + \left(-\frac{\mu_j}{r^2} + f'(z_0(r))\right)v_j = 0 \quad (2.63)$$

klassisch für  $r \in (0, \infty)$  erfüllt. Die Aussage des Satzes folgt nun aus den folgenden Tatsachen, die der Übersichtlichkeit halber im Anschluss separat bewiesen werden:

1. (Lemma 2.1.17)  $v_j \in H^1(0, \infty)$ , für alle  $j \geq 0$ .
2. (Lemma 2.1.18)  $v_j \equiv 0$ , für  $j \geq N+1$ .
3. (Lemma 2.1.19) Der Lösungsraum von (2.63) ist in  $C^2(0, \infty) \cap H^1(0, \infty)$  höchstens eindimensional, für  $j \geq 0$  (insbesondere für  $j = 1, \dots, N-1$ ).
4. (Lemma 2.1.20)  $v_0 \equiv 0$  (beachte für die Anwendung von Lemma 2.1.20 (2.60) und 1).

Nach 2 und 4 vereinfacht sich (2.61) zu

$$v(r\omega) = \sum_{k=1}^N v_k(r)e_k(\omega), \quad (2.64)$$

wobei die Koeffizienten  $v_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) dieser Darstellung nach 1, (2.63) und 3 aus einem höchstens eindimensionalen Raum stammen. Da  $v \in \text{Kern } D\nabla F(z_0)$  beliebig vorgegeben war, ist  $\text{Kern } D\nabla F(z_0)$  ein Unterraum von

$$V_0 := \left\{ r\omega \mapsto \sum_{k=1}^N v_k(r)e_k(\omega) : v_k \in C^2(0, \infty) \cap H^1(0, \infty) \text{ löse (2.63)} \right\}.$$

Der Raum  $V_0$ , und damit auch  $\text{Kern } D\nabla F(z_0)$ , ist höchstens  $N$ -dimensional, was zu zeigen war.  $\square$

Jetzt reichen wir die eben zitierten Hilfsaussagen nach. Die Voraussetzungen von Satz 2.1.16 gelten im folgenden generell, und die bisher im Satz und in dessen Beweis eingeführten Bezeichnungen werden übernommen.

**Lemma 2.1.17.** *Die Voraussetzungen von Satz 2.1.16 seien erfüllt. Dann ist  $v_k \in H^1(0, \infty)$ , für alle  $k \geq 0$ .*

*Beweis.* Die  $v_k$  sind gegeben durch (2.57), mit einem  $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ . Da  $v_k \in C^1[0, \infty)$ , wie bereits im Beweis von Satz 2.1.16 gezeigt wurde, ist hier nur  $v_k, v'_k \in L^2(0, \infty)$  zu zeigen. Sei dazu  $a > 0$  fest gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a^{N-1} \|v_k\|_{L^2(a, \infty)}^2 &\stackrel{(2.57)}{=} a^{N-1} \int_a^\infty \left[ \int_{S^{N-1}} v(r\omega) e_k(\omega) d\omega \right]^2 dr \\
&\leq \int_a^\infty \left[ \int_{S^{N-1}} v(r\omega) e_k(\omega) \cdot 1 d\omega \right]^2 r^{N-1} dr \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_a^\infty \int_{S^{N-1}} [v(r\omega) e_k(\omega)]^2 d\omega \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1}) r^{N-1} dr \\
&\leq (\max e_k^2) \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1}) \int_a^\infty \int_{S^{N-1}} v(r\omega)^2 d\omega r^{N-1} dr \\
&\leq (\max e_k^2) \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1}) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Analog kann man für  $v'_k$  vorgehen:

$$a^{N-1} \|v'_k\|_{L^2(a, \infty)}^2 \stackrel{(2.58)}{=} a^{N-1} \int_a^\infty \left[ \int_{S^{N-1}} \langle \nabla v(r\omega), \omega \rangle_{\mathbb{R}^N} e_k(\omega) d\omega \right]^2 dr$$

und mit der gleichen Rechnung wie oben (mit  $\langle \nabla v(r\omega), \omega \rangle_{\mathbb{R}^N}$  anstelle von  $v(r\omega)$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned}
a^{N-1} \|v'_k\|_{L^2(a, \infty)}^2 &\leq (\max e_k^2) \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1}) \int_a^\infty \int_{S^{N-1}} |\langle \nabla v(r\omega), \omega \rangle_{\mathbb{R}^N}| d\omega r^{N-1} dr \\
&\leq (\max e_k^2) \text{Vol}_{N-1}(S^{N-1}) \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Daher sind  $v_k, v'_k \in L^2(a, \infty)$ , und da  $v_k \in C^1[0, \infty)$  ist, sind  $v_k$  und  $v'_k$  außerdem auf  $[0, a]$  beschränkt, womit die Behauptung folgt.  $\square$

**Lemma 2.1.18.** *Die Voraussetzungen von Satz 2.1.16 seien erfüllt. Dann ist  $v_j \equiv 0$ , für  $j \geq N + 1$ .*

*Beweis.* Sei  $j \geq N + 1$  beliebig, fest gewählt. Wir beweisen die Behauptung indirekt. Angenommen  $v_j \not\equiv 0$ .

$v_j(r)$  kann für  $r \rightarrow 0$  nicht oszillieren, besitzt also für kleine  $r$  festes Vorzeichen, o.B.d.A. positiv (sonst verwende  $-v_j$ ):

$$v_j(r) > 0 \quad \text{für alle } r \in (0, \rho) \tag{2.65}$$

wenn  $\rho = \rho(j) > 0$  hinreichend klein ist. Sonst existiert nämlich eine Folge positiver Nullstellen  $(\tilde{r}_n)$  von  $v_j$  mit  $\tilde{r}_n \rightarrow 0$ , streng monoton fallend. Nun erfüllt  $v_j$  ja (2.63), also

$$v_j'' + \frac{N-1}{r} v_j' + \left( -\frac{\mu_j}{r^2} + f'(z_0(r)) \right) v_j = 0$$

für  $r \in (0, \infty)$ . Zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen  $\tilde{r}_{n+1}$  und  $\tilde{r}_n$  besitzt  $v_j$  ein Extremum  $s_n$  mit  $v_j(s_n) \neq 0$  (sonst ist  $v_j$  auf  $[\tilde{r}_{n+1}, \tilde{r}_n]$  identisch 0, und als Lösung von (2.63) verschwindet  $v_j$  dann für alle  $r > 0$ ). Ist  $s_n$  ein Minimum (und damit  $v_j(s_n) < 0$ ), so folgt widersprüchlich

$$0 \leq v_j''(s_n) \stackrel{(2.63)}{=} \left( \frac{\mu_j}{s_n^2} - f'(z_0(s_n)) \right) v_j(s_n) < 0 \quad \text{für kleines } s_n,$$

denn  $f'(z_0(s_n))$  ist beschränkt und  $\mu_j/s_n^2 \rightarrow \infty$  für  $s_n \rightarrow 0$  (beachte  $\mu_j > N-1 > 0$  für  $j \geq N+1$ ). Ein analoger Widerspruch mit umgekehrten Ungleichheitszeichen folgt, wenn  $s_n$  ein Maximum und damit  $v_j(s_n) > 0$  ist.

Ab sofort bezeichne  $\rho$  die erste positive Nullstelle von  $v_j$ , mit  $\rho := \infty$ , falls  $v_j(r)$  für alle  $r > 0$  positiv bleibt; (2.65) gilt mit diesem  $\rho$  natürlich weiterhin. Die Behauptung des Lemmas folgt jetzt aus folgender Rechnung:

$$0 \stackrel{(2.63)}{=} \int_0^\rho \left[ v_j'' + \frac{N-1}{r} v_j' + \left( -\frac{\mu_j}{r^2} + f'(z_0) \right) v_j \right] z_0' r^{N-1} dr,$$

und mit partieller Integration erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\rho \left( -\frac{\mu_j}{r^2} + f'(z_0) \right) v_j z_0' r^{N-1} dr \\ &\quad + \int_0^\rho v_j \left[ z_0''' + \frac{N-1}{r} z_0'' \right] r^{N-1} dr + R \end{aligned} \quad (2.66)$$

mit dem Randterm

$$\begin{aligned} R &= \left[ -v_j (z_0'' r^{N-1} + (N-1) z_0' r^{N-2}) + v_j' z_0' r^{N-1} + (N-1) v_j z_0' r^{N-2} \right]_0^\rho \\ &= \left[ -v_j(\rho) z_0''(\rho) + v_j'(\rho) z_0'(\rho) \right] \rho^{N-1} \geq 0 \end{aligned}$$

(beachte  $z_0'(0) = 0$ ). Zum Vorzeichen von  $R$ : Im Falle  $\rho = \infty$  ist  $R = 0$  zu lesen, da die Anteile für  $r = 0$  ohnehin wegfallen,  $v_j \in H^1(0, \infty)$  nach Lemma 2.1.17, und  $z_0' r^{N-1}$  sowie  $z_0'' r^{N-2}$  für  $r \rightarrow \infty$  exponentiell fallen (nach Satz 2.1.5). Ist  $\rho$  dagegen endlich, so ist  $R = v_j'(\rho) z_0'(\rho) \rho^{N-1} \geq 0$ , denn  $v_j(\rho) = 0$ ,  $z_0'(\rho) < 0$  nach Satz 2.1.5, und  $v_j'(\rho) \leq 0$  (nach (2.65) ist  $v_j(r) > 0$  für  $0 < r < \rho$ ). Da  $z_0$  (EL<sub>rad</sub>) löst, also  $z_0'' + \frac{N-1}{r} z_0' + f(z_0) = 0$ , folgt durch Differentiation

$$z_0''' + \frac{N-1}{r} z_0'' + f'(z_0) z_0' = \frac{N-1}{r^2} z_0'.$$

Dies in (2.66) eingesetzt liefert

$$(N-1-\mu_j) \int_0^\rho v_j(r) z_0'(r) r^{N-3} dr = -R \leq 0. \quad (2.67)$$

Da  $z_0'(r) < 0$  und  $v_j(r) > 0$  für alle  $r \in (0, \rho)$ , ist  $\int_0^\rho v_j(r) z_0'(r) r^{N-3} dr < 0$ , so dass aus (2.67)

$$(N-1-\mu_j) \geq 0$$

folgt. Nach (2.55) müsste dann aber  $j \leq N$  gelten.  $\square$

**Lemma 2.1.19.** *Es gelte  $(f_0)$ ,  $(f_1)$  und  $(f_4)$ . Dann hat für jedes  $\mu \in \mathbb{R}$  die Gleichung*

$$w'' + \frac{N-1}{r}w' - \left(\frac{\mu}{r^2} + f'(z_0(r))\right)w = 0 \quad (2.68)$$

für  $w \in C^2(0, \infty) \cap H^1(0, \infty)$  einen höchstens eindimensionalen Lösungsraum.

*Beweis.* Es seien  $w_1, w_2 \in C^2(0, \infty) \cap H^1(0, \infty)$  zwei Lösungen von (2.68). Wir wollen zeigen, dass sie linear abhängig sein müssen. Betrachten wir nun die Lösungen an einer festen Stelle  $a > 0$  (groß genug, dazu später), wo  $w_1(a) \neq 0$  und  $w_2(a) \neq 0$ . Es gibt beliebig große  $a$  mit dieser Eigenschaft, da die Nullstellenmengen von  $w_1$  und  $w_2$  diskret sein müssen (außer eine der beiden Funktionen ist trivial; dann sind sie aber linear abhängig und wir sind fertig). Besäße nämlich die Nullstellenmenge von  $w_1$  (oder  $w_2$ ) einen Häufungspunkt  $x_0$ , so würde dort  $w_1(x_0) = w_1'(x_0) = 0$  (oder entsprechendes für  $w_2$ ) gelten, so dass  $w_1 \equiv 0$  ist, als Lösung von (2.68). Wir können durch Skalierung von  $w_2$  mit dem Faktor  $w_1(a)/w_2(a) \neq 0$  immer erreichen, dass  $w_1(a) = w_2(a)$  (die lineare Unabhängigkeit bleibt dabei erhalten).  $w_1 - w_2$  ist dann eine Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} w'' + \frac{N-1}{r}w' - \left(\frac{\mu}{r^2} + f'(z_0(r))\right)w &= 0 \\ w \in H_0^1(a, \infty) \cap C^2[a, \infty). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Für hinreichend große  $a$  ist (2.69) aber nur trivial lösbar: Sei

$$B(\eta, \varphi) := \langle \eta', \varphi' \rangle_{L^2} + \left\langle -\frac{N-1}{r}\eta', \varphi \right\rangle_{L^2} + \left\langle \left[\frac{\mu}{r^2} - f'(z_0)\right]\eta, \varphi \right\rangle_{L^2}$$

( $\eta, \varphi \in H_0^1(a, \infty)$ ; der Integrationsbereich obiger  $L^2$ -Skalarprodukte ist  $(a, \infty)$ ) die zu (2.69) gehörige Bilinearform – jede Lösung  $w$  von (2.69) erfüllt  $B(w, \varphi) = 0$ , für alle  $\varphi \in H_0^1(a, \infty)$ . Da  $z_0(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ , folgt mit  $(f_1)$   $-f'(z_0(r)) \rightarrow -f'(0) > 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ). Daher können wir  $a$  so groß wählen, dass

$$\frac{1}{2} \left(\frac{N-1}{a}\right)^2 \leq \frac{-f'(0)}{2}, \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{r^2} - f'(z_0(r)) \geq -\frac{3}{4}f'(0) \quad \text{für } r \geq a. \quad (2.70)$$

$B$  ist dann auf  $H_0^1(a, \infty)$  positiv definit: Für  $\varphi \in H_0^1(a, \infty)$  gilt

$$\begin{aligned}
B(\varphi, \varphi) &\stackrel{(2.70)_2}{\geq} \|\varphi'\|_{L^2}^2 - \frac{N-1}{a} \|\varphi'\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} - \frac{3}{4} f'(0) \|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\geq \|\varphi'\|_{L^2}^2 - \frac{1}{-2f'(0)} \left( \frac{N-1}{a} \right)^2 \|\varphi'\|_{L^2}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} (-f'(0)) \|\varphi\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4} f'(0) \|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\stackrel{(2.70)_1}{\geq} \frac{1}{2} \|\varphi'\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4} f'(0) \|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\geq \min \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} f'(0) \right\} \|\varphi\|_{H^1(a, \infty)}^2.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt für die Lösung  $w_1 - w_2$  von (2.69)  $w_1 - w_2 = 0$  auf  $(a, \infty)$ , solange  $a$  so groß ist, dass (2.70) gilt. Da  $w_1$  und  $w_2$  nun auf einem offenen Teilintervall von  $(0, \infty)$  übereinstimmen, müssen sie als Lösungen von (2.68) schon auf ganz  $(0, \infty)$  identisch sein.  $\square$

Der Beweis der letzten Hilfsaussage ist aufwendiger als die drei vorherigen. Sie stammt von Man Nam Kwong und Liqun Zhang [14]; außerdem wurde diese Thematik auch noch von Chiun-Chuan Chen und Chang-Shou Lin in [10] bearbeitet. Beide Artikel konzentrieren sich zwar eigentlich auf die Eindeutigkeit der radialsymmetrischen positive Lösung von (EL), deren Existenz in Satz 2.1.5 nachgewiesen wurde. Unter anderem fällt dabei jedoch auch folgende Aussage ab:

**Lemma 2.1.20 (Lemma 9 in [14]).** *Die Voraussetzungen von Satz 2.1.16 seien erfüllt. Ist dann  $v_0 \in H^1(0, \infty) \cap C^2[0, \infty)$  Lösung von*

$$w'' + \frac{N-1}{r} w' + f'(z_0(r)) w = 0 \quad (2.71)$$

*mit der Anfangsbedingung  $v_0'(0) = 0$ , so ist  $v_0 \equiv 0$ .*

**Bemerkung 2.1.21 (Zur Voraussetzung  $(f_3)$ ).** *Lemma 2.1.20 ist die einzige Stelle, wo  $(f_3)$  wirklich eingeht. Man kann die geforderte Monotoniebedingung in  $(f_3)$  noch weiter abschwächen – hier wird darauf zugunsten eines kürzeren*

Beweises verzichtet. Genauer gesagt genügt eigentlich

$$\begin{aligned}
t \mapsto \frac{tf'(t)}{f(t)} & \text{ sei in } (\phi, \infty) \text{ monoton fallend und} \\
\frac{tf'(t)}{f(t)} & \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda \text{ mit einem } \lambda > 1. \\
\text{Ausserdem gelte } \frac{tf'(t)}{f(t)} & \leq \lambda \text{ f\"ur } 0 < t < \theta, \\
\text{und } \frac{tf'(t)}{f(t)} & \geq \frac{\phi f'(\phi)}{f(\phi)} \text{ f\"ur } \theta < t < \phi
\end{aligned} \tag{f'_3}$$

(zur Erinnerung:  $\phi$  ist die positive Nullstelle von  $g(t) := \int_0^t f(s) ds$  aus  $(f_2)$ ). Der hier im Anschluss gegebene Beweis von Lemma 2.1.20 funktioniert auch mit der Bedingung  $(f'_3)$  anstelle von  $(f_3)$ , wenn man weiß, dass bei der Nullstelle  $\tau > 0$  von  $w_0$  notwendigerweise  $z_0(\tau) \geq \phi$  gelten muss, damit  $\lim_{r \rightarrow \infty} w_0(r) = 0$  erfüllt sein kann. ( $w_0$  ist die Lösung von (2.73); sie hat genau eine positive Nullstelle nach (2.74)). Dies wird in Lemma 16 von [14] bewiesen. Weitere Alternativen zu  $(f_3)$  finden sich in [10].

*Beweis von Lemma 2.1.20.* Zunächst beobachten wir, dass jede Lösung von (2.71) schließlich monoton ist, genauer gesagt ist  $w'(r) \neq 0$  für alle ausreichend großen  $r$  (außer  $w \equiv 0$ ). Wähle dazu ein  $R \geq 0$  so groß, dass  $f'(z_0(r)) < 0$  für alle  $r > R$  (beachte  $\lim_{r \rightarrow \infty} z_0(r) = 0$  und  $f'(0) < 0$ ). Ist dann  $r_1 > R$  ein beliebiger kritischer Punkt von  $w$ , so gilt nach (2.71)

$$w''(r_1) = -f'(z_0(r_1))w(r_1), \tag{2.72}$$

$w''(r_1)$  hat also dasselbe Vorzeichen wie  $w(r_1)$ .  $w$  kann dann aber höchstens einen kritischen Punkt jenseits von  $R$  besitzen (außer  $w \equiv 0$ ). Sind nämlich  $r_3 > r_2 > R$  zwei direkt aufeinander folgende kritische Punkte von  $w$ , so ist entweder

$$w(r_2) > 0, \quad w''(r_2) > 0 \quad \text{und deshalb} \quad w(r_3) > 0, \quad w''(r_3) \leq 0,$$

oder

$$w(r_2) < 0, \quad w''(r_2) < 0 \quad \text{und deshalb} \quad w(r_3) < 0, \quad w''(r_3) \geq 0$$

(Ist  $w(r_2) = 0$ , so ist  $w \equiv 0$ ). In beiden Fällen hat  $w(r_3)$  entgegengesetztes Vorzeichen wie  $w''(r_3)$ , im Widerspruch zu (2.72). Da also  $v_0 \in H^1(0, \infty)$  schließlich monoton ist, muss  $\lim_{r \rightarrow \infty} v_0(r) = 0$  gelten.

Wir betrachten nun das Anfangwertproblem

$$\begin{aligned}
w'' + \frac{N-1}{r}w' + f'(z_0(r))w &= 0 \\
w(0) = 1 \quad \text{und} \quad w'(0) &= 0 \\
w \in C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty) &
\end{aligned} \tag{2.73}$$



Analog Lemma 2.1.6 besitzt es eine eindeutige Lösung, die in  $C^2[0, \infty)$  liegt (die lokale Lösung für  $r \geq 0$  nahe  $r = 0$  der linearen Gleichung kann mit den üblichen Methoden eindeutig auf  $[0, \infty)$  fortgesetzt werden). Ist  $v_0$  nicht identisch 0, so ist  $v_0(0) \neq 0$ , und  $w_0(r) := v_0(r)/v_0(0)$  ist eine im Unendlichen abfallende Lösung von (2.73). Zu zeigen ist jetzt, dass (2.73) keine solche Lösung besitzen kann, womit  $v_0 \equiv 0$  gelten muss.

Wir benutzen dazu folgende Hilfsaussage (Lemma 6 in [14]):

$$w_0 \text{ besitzt genau eine Nullstelle in } (0, \infty). \quad (2.74)$$

Wir wollen daraus jetzt unsere Behauptung folgern; der Beweis von (2.74) wird im Anschluss nachgeliefert.

Wir führen den Beweis indirekt: Angenommen es existiert eine Lösung  $w_0$  von (2.73) mit  $w_0(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

$\tau > 0$  bezeichne die Nullstelle von  $w_0$ . Es gelten die folgenden beiden Identitäten:

$$0 = [r^{N-1}(z_0'w_0 - z_0w_0')] + r^{N-1}w_0[f(z_0) - z_0f'(z_0)], \quad (2.75)$$

$$0 = [r^{N-1}((rz_0)'' - (rz_0)'w_0')] + r^{N-1}w_0[2f(z_0) - z_0f'(z_0)]. \quad (2.76)$$

Sie können durch Ausdifferenzieren mit Hilfe der Differentialgleichungen (2.73)<sub>1</sub> für  $w_0$  und (EL<sub>rad</sub>) für  $z_0$  (zur Erinnerung:  $z_0'' + (N-1)/r \cdot z_0' + f(z_0) = 0$ ) leicht nachgerechnet werden. Durch Integration von (2.75) und (2.76) erhält man für  $s \geq 0$

$$\int_0^s [f(z_0) - z_0f'(z_0)] w_0 r^{N-1} dr = s^{N-1} [z_0'(s)w_0(s) - z_0(s)w_0'(s)], \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \int_0^s [2f(z_0) - z_0f'(z_0)] w_0 r^{N-1} dr \\ = s^{N-1} [(2z_0'(s) + sz_0''(s))w_0(s) - (sz_0'(s) + z_0(s))w_0'(s)]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Da  $\lim_{r \rightarrow \infty} w_0(r) = 0$  ist, existiert eine Folge  $(s_n) \subset (0, \infty)$  mit  $s_n \rightarrow \infty$  und  $w_0'(s_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Zusammen mit dem exponentiellen Abfall von  $z_0(s)$ ,  $z_0'(s)$  und  $z_0''(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  liefern (2.77) und (2.78) dann

$$\int_0^{s_n} [f(z_0) - z_0f'(z_0)] w_0 r^{N-1} dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.79)$$

$$\int_0^{s_n} [2f(z_0) - z_0f'(z_0)] w_0 r^{N-1} dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.80)$$

Durch geeignete Linearkombination von (2.79) und (2.80) erhält man für beliebige  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{s_n} [\gamma f(z_0) - \delta z_0 f'(z_0)] w_0 r^{N-1} dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.81)$$

Setze nun

$$(\gamma, \delta) := \begin{cases} (1, 0) & \text{falls } z_0(\tau) = \theta, \\ (z_0(\tau)f'(z_0(\tau))/f(z_0(\tau)), 1) & \text{falls } z_0(\tau) > \theta, \\ (-z_0(\tau)f'(z_0(\tau))/f(z_0(\tau)), -1) & \text{falls } z_0(\tau) < \theta. \end{cases}$$

Aus  $(f_3)$  (bzw.  $(f_1)$  im Fall  $z_0(\tau) = \theta$ ) folgt dann

$$\gamma f(u) - \delta u f'(u) \begin{cases} \geq 0 & \text{für } u \in (z_0(\tau), \infty) \\ \leq 0 & \text{für } u \in (0, z_0(\tau)) \end{cases}. \quad (2.82)$$

(Zur möglichen Abschwächung von  $(f_3)$ : Benutzt man hier  $z_0(\tau) \geq \phi$  aus Bemerkung 2.1.21, so genügt für (2.82) auch die Bedingung  $(f'_3)$  anstelle von  $(f_3)$ ). Nach (2.74) und der Anfangsbedingung  $w_0(0) = 1$  ist  $w_0(r) > 0$  für alle  $r \in (0, \tau)$  und  $w_0(r) < 0$  für alle  $r \in (\tau, \infty)$  (beachte  $w'(\tau) \neq 0$ , denn sonst wäre  $w_0 \equiv 0$  als Lösung der Differentialgleichung (2.73)). Zusammen mit der Monotonie von  $z_0$  liefert (2.82) dann

$$[\gamma f(z_0(r)) - \delta z_0(r)f'(z_0(r))] w_0(r) \geq 0 \quad (2.83)$$

für alle  $r \in (0, \infty)$ . Gleichzeitig mit (2.81) und (2.74) kann das aber nur gelten, wenn

$$\gamma f(z_0) - \delta z_0 f'(z_0) \equiv 0, \quad (2.84)$$

was unmöglich ist: im Falle  $z_0(\tau) = \theta$  ist offensichtlich  $f(z_0) \neq 0$ , und ansonsten existiert  $r_1 > 0$  mit  $z_0(r_1) = \theta$  (wegen  $z_0(0) \geq \phi > \theta$  und  $\lim_{r \rightarrow \infty} z_0(r) = 0$  nach Satz 2.1.5), so dass  $0 = \gamma f(z_0(r_1)) \neq \delta z_0(r_1)f'(z_0(r_1))$  nach  $(f_1)$  ( $\delta = 1$  falls  $z_0(\tau) \neq \theta$ ).

Jetzt bleibt nur noch (2.74) zu zeigen, wir müssen also nachweisen, dass  $w_0$  genau eine Nullstelle auf  $(0, \infty)$  besitzt.

**(i)  $w_0$  hat mindestens eine positive Nullstelle (Lemma 1 in [14]).**

Setze

$$v(r) := r z'_0(r) + \frac{2}{\lambda - 1} z_0(r), \quad (2.85)$$

mit dem  $\lambda > 1$  aus  $(f_3)$ .  $z_0$  erfüllt  $(EL_{\text{rad}})$ , also

$$z''_0 + \frac{N-1}{r} z'_0 + f(z_0) = 0, \quad (2.86)$$

und diese Gleichung ein weiteres Mal differenziert liefert

$$z'''_0 + \frac{N-1}{r} z''_0 + \left( f'(z_0) - \frac{N-1}{r^2} \right) z'_0 = 0. \quad (2.87)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
v'' + \frac{N-1}{r}v' + f'(z_0)v & \\
= rz_0''' + \left(2 + \frac{2}{\lambda-1} + N-1\right) z_0'' & \\
+ \left[\frac{N-1}{r} \left(1 + \frac{2}{\lambda-1}\right) + rf'(z_0)\right] z_0' + f'(z_0)\frac{2}{\lambda-1}z_0 & \\
\stackrel{(2.87)}{=} \left(2 + \frac{2}{\lambda-1}\right) z_0'' + \frac{N-1}{r} \left(2 + \frac{2}{\lambda-1}\right) z_0' + f'(z_0)\frac{2}{\lambda-1}z_0 & \\
\stackrel{(2.86)}{=} \frac{2}{\lambda-1} [z_0f'(z_0) - \lambda f(z_0)] =: h(r) \stackrel{(f_3)}{\geq} 0. &
\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Lösungen  $v$  bzw.  $w_0$  der folgenden beiden Differentialgleichungen mittels des Sturmischen Satzes (Satz A.4.1 in Anhang A.4) miteinander vergleichen:

$$\begin{aligned}
v'' + \frac{N-1}{r}v' + b(r)v &= 0 \\
w_0'' + \frac{N-1}{r}w_0' + B(r)w_0 &= 0
\end{aligned}$$

mit

$$b(r) := f'(z_0) - \frac{h(r)}{v(r)} \leq B(r) := f'(z_0),$$

solange  $v(r) > 0$ . Die Stammfunktion  $(N-1)\ln(r)$  von  $(N-1)/r$  ist für positive  $r$  nahe 0 nach oben beschränkt. Bei  $r = 0$  gilt  $v(0) = \frac{2}{\lambda-1}z_0(0) > 0$ ,  $v'(0) = 0$ ,  $w_0(0) = 1$  und  $w_0'(0) = 0$ . Daher haben wir auch

$$0 = \frac{w_0'(0)}{w_0(0)} \leq \frac{v'(0)}{v(0)} = 0,$$

und Satz A.4.1 ist auf das Intervall von 0 bis zur ersten positiven Nullstelle von  $v$  anwendbar, sofern  $w_0$  nicht schon vorher eine Nullstelle hat (in dem Fall sind wir fertig). Es gilt also

$$\left|\frac{w_0(r)}{w_0(0)}\right| \leq \left|\frac{v(r)}{v(0)}\right|, \quad (2.88)$$

für  $r \in [0, s)$ , sofern  $v$  eine (erste) positive Nullstelle  $s$  besitzt.  $v$  besitzt dabei tatsächlich eine positive Nullstelle: Wäre  $v > 0$  für alle  $r \in [0, \infty)$ , so folgt aus (2.85)

$$\frac{z_0'(r)}{z_0(r)} > -\frac{2}{\lambda-1} \frac{1}{r}$$

und aufintegriert von einem  $r_0 > 0$  bis zu beliebigem  $r > r_0$

$$\log \frac{z_0(r)}{z_0(r_0)} > -\frac{2}{\lambda-1} \log \frac{r}{r_0} \quad \text{und} \quad \frac{z_0(r)}{z_0(r_0)} > \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{\lambda-1}},$$

was dem exponentiellen Abfall von  $z_0$  widerspricht. (2.88) liefert jetzt

$$\lim_{r \rightarrow s, r < s} w_0(r) = 0,$$

so dass  $w_0$  bei  $s$  ebenfalls eine Nullstelle hat.

**(ii)  $w_0$  hat höchstens eine positive Nullstelle (Lemma 6 in [14]).**

Wir beweisen das indirekt. Angenommen  $w_0$  besitzt mindestens zwei verschiedene positive Nullstellen. Wir werden jetzt wieder einige Bezeichnungen benötigen, die wir schon im Beweis von Satz 2.1.5 eingeführt haben. Wir listen sie hier noch einmal kurz auf:

Es sei  $u(r, b)$  (für  $r \in [0, \infty)$ ) die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP), also

$$\begin{aligned} u'' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) &= 0, \\ u(0) = b \quad \text{und} \quad u'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1.6 ist  $u(r, b)$  stetig nach  $b$  differenzierbar,  $\partial_b u(r, b)$  ist zweimal stetig nach  $r$  differenzierbar, und die Ableitungen von  $\partial_b u(r, b)$  nach  $r$  bis zur zweiten Ordnung sind wieder stetig in  $(r, b) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Wir unterscheiden wieder folgende drei Typen von Lösungen (bzw. Anfangswerten):

$$\begin{aligned} P &:= \{b > \theta : \exists r_0 > 0 \text{ mit } u'(r_0, b) = 0 \text{ und } u(r, b) > 0 \forall r \in (0, r_0]\}, \\ N &:= \{b > \theta : \exists r_0 > 0 \text{ mit } u(r_0, b) = 0 \text{ und } u'(r, b) < 0 \forall r \in (0, r_0]\}, \\ G &:= (\theta, \infty) \setminus (N \cup P). \end{aligned}$$

Wir haben damals  $z_0 = u(\cdot, b_0 := \inf G)$  gesetzt. Dabei wissen wir, dass

$$(\theta, b_0) \subset P, \tag{2.89}$$

denn  $P$  und  $N$  sind nichtleer, offen (nach Lemma 2.1.8, 2.1.9, und 2.1.10), und disjunkt. Da nach Lemma 2.1.8 sogar  $(\theta, \phi) \subset P$  ist, existiert zu jedem  $b_1 \in N$  ein  $b_2 \in G$  mit  $b_2 < b_1$  (denn sonst wäre  $(\theta, b_1) = (\theta, b_1) \cap (P \cup N)$  unzusammenhängend, was offensichtlich falsch ist); außerdem ist  $b_0 = \inf G \geq \phi > \theta$ .

Offenbar erfüllt  $\partial_b u(\cdot, b_0)$  genau wie  $w_0$  das Anfangswertproblem (2.73), und daher gilt

$$w_0 = \partial_b u(\cdot, b_0).$$

Nach der Widerspruchsannahme hat  $\partial_b u(\cdot, b_0)$  mindestens zwei verschiedene positive Nullstellen, etwa  $r_1$  und  $r_2$ . Das hat aber zur Folge, dass für  $b$  nahe  $b_0$   $u(\cdot, b)$  und  $u(\cdot, b_0)$  mindestens zwei gemeinsame Punkte (nahe  $r_1$  bzw.  $r_2$ ) haben: Wir betrachten den Fall  $b < b_0$  ( $b > b_0$  geht analog). Es ist  $\partial_r \partial_b u(r_1, b_0) \neq 0$ , denn sonst wäre  $\partial_b u(\cdot, b_0)$  als Lösung von (2.73)<sub>1</sub> mit  $\partial_r \partial_b u(r_1, b_0) = 0$ ,  $\partial_b u(r_1, b_0) = 0$  identisch 0, was mit der Anfangsbedingung (2.73)<sub>2</sub> bei  $r = 0$  nicht vereinbar ist. Daher gilt

$$\partial_b u(r_{1-}, b_0) < 0 \quad \text{und} \quad \partial_b u(r_{1+}, b_0) > 0,$$

für  $r_{1-} < r_1$  und  $r_{1+} > r_1$  (aber nahe genug), sofern  $\partial_r \partial_b u(r_1, b_0) > 0$  ist (bei entgegengesetztem Vorzeichen drehen sich beide Ungleichungen oben um, was aber an der weiteren Argumentation prinzipiell nichts ändern würde). Weiter folgt nun

$$u(r_{1-}, b_0) - u(r_{1-}, b) < 0 \quad \text{und} \quad u(r_{1+}, b_0) - u(r_{1+}, b) > 0,$$

sofern  $b$  nahe genug bei  $b_0$  ist (nahe genug in Abhängigkeit von  $r_{1-}$  bzw.  $r_{1+}$ ). Insbesondere muss es eine Nullstelle von  $u(\cdot, b_0) - u(\cdot, b)$  bei einem  $r \in (r_{1-}, r_{1+})$  geben, und genauso kann man natürlich auch für  $r_2$  anstelle von  $r_1$  argumentieren.

Bezeichnen wir nun für  $b < b_0$  die beiden kleinsten positiven Schnittpunkte von  $u(\cdot, b)$  und  $u(\cdot, b_0)$  mit  $\sigma_1(b)$  und  $\sigma_2(b)$  ( $0 < \sigma_1(b) < \sigma_2(b)$ ):

$$u(\sigma_1(b), b) = u(\sigma_1(b), b_0) \quad \text{und} \quad u(\sigma_2(b), b) = u(\sigma_2(b), b_0) \quad (2.90)$$

Zunächst sind  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auf einem kleinen Intervall  $(b_1, b_0)$  erklärt. Besitzt  $\sigma_1(b)$  aber einen Häufungspunkt  $y$  für  $b \rightarrow b_1$  ( $b > b_1$ ), so ist dieser wieder Schnittpunkt von  $u(\cdot, b_1)$  und  $u(\cdot, b_0)$ , und da  $u'(y, b_1) \neq u'(y, b_0)$  sein muss, liefert der Satz über implizite Funktionen eine stetige Kurve  $\tilde{\sigma}_1(b)$  von Schnittpunkten von  $u(\cdot, b)$  und  $u(\cdot, b_0)$  für alle  $b$ , die nahe genug bei  $b_1$  liegen. Außerdem ist  $\tilde{\sigma}_1(b) = \sigma_1(b)$  für  $b > b_1$ . Daher können wir  $\sigma_1$  für  $b > b_1$  durch  $\tilde{\sigma}_1$  stetig fortsetzen. Dies hat zur Folge, dass  $\sigma_1$  schließlich auf einem maximalen Existenzintervall  $(b_1^*, b_0)$  definiert ist, so dass  $\sigma_1$  dort (2.90)<sub>1</sub> erfüllt und  $\sigma_1(b) \rightarrow \infty$  für  $b \rightarrow b_1^*$  ( $b > b_1^*$ ) gilt (sofern  $b_1^* > -\infty$ , sonst gäbe es nämlich wieder einen Häufungspunkt von  $\sigma_1(b)$  für  $b \rightarrow b_1^*$ ; man beachte dass wegen  $u(0, b) = b$  stets  $\sigma_1(b) > 0$  gelten muss). Ganz analog kann man für  $\sigma_2$  argumentieren; es bezeichne  $(b_2^*, b_0)$  das maximale Existenzintervall von  $\sigma_2$ , so dass

$$\sigma_2(b) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad b \rightarrow b_2^* \quad (b > b_2^*). \quad (2.91)$$

Setze nun

$$b^* := \max \{b_1^*, b_2^*\}.$$

Bemerkenswert ist noch, dass für  $b \in (b^*, b_0)$  stets  $\sigma_1(b) \neq \sigma_2(b)$  gilt. Andernfalls wäre nämlich

$$b_3 := \inf \{b \in (b^*, b_0) : \sigma_1(b) \neq \sigma_2(b)\} \in (b^*, b_0),$$

und es gilt

$$u'(\sigma_1(b_3), b_3) = u'(\sigma_1(b_3), b_0) \quad \text{sowie} \quad u(\sigma_1(b_3), b_3) = u(\sigma_1(b_3), b_0),$$

was unmöglich ist, da sonst wieder  $u(\cdot, b_3) \equiv u(\cdot, b_0)$  folgen würde. Deswegen ist  $0 < \sigma_1(b) < \sigma_2(b)$  für alle  $b \in (b^*, b_0)$ , und  $b^* = b_2^*$ . Offensichtlich hat die strikt monoton fallende Funktion  $u(\cdot, b_0) = z_0$  nur einen einzigen Schnittpunkt mit der Konstanten  $u(\cdot, \theta) \equiv \theta$ , weshalb auch noch  $b^* \geq \theta$  ist.

Nach (2.89) und der Definition von  $P$  besitzt  $u(\cdot, b)$  für jedes  $b \in (\theta, b_0)$  ein positives Minimum, etwa bei  $R(b)$ , mit  $u(R(b), b) > 0$ . (Zur Erinnerung:  $u''(0, b) = -f(b)/N < 0$  für  $b \in (\theta, \infty)$ , so dass zumindest der erste positive kritische Punkt tatsächlich ein Minimum sein muss – degenerierte kritische Punkte sind ja nur bei konstanten Lösungen von  $(\text{AWP})_1$  möglich). Nach der Differentialgleichung  $(\text{AWP})_1$  ist außerdem  $0 < u''(R(b), b) = -f(u(R(b), b))$ , so dass  $0 < u(R(b), b) < \theta$ . Mit einem Energieargument (wie im Beweis von Lemma 2.1.8) sieht man leicht, dass

$$u(R(b), b) \leq u(r, b) \quad \text{für alle } r \geq R(b) \quad (2.92)$$

(das zu  $(\text{AWP})$  zugehörige Energiefunktional ist  $E(u, u') = 1/2(u')^2 + g(u)$ , vergleiche (2.18) im Beweis von Satz 2.1.5). Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

Fall 1:  $b^* > \theta$ . Insbesondere ist  $b^* \in P$  (beachte  $(\theta, b_0) \subset P$ ), und  $u(\cdot, b^*)$  hat ein erstes Minimum  $R(b^*)$ . Da dieses nichtdegeneriert ist, setzt der Satz über implizite Funktionen  $R(b^*)$  zu einer stetigen Kurve  $R(b)$  von nichtdegenerierten Minima von  $u(\cdot, b)$  fort, für  $b$  nahe genug bei  $b^*$ . Aus Stetigkeitsgründen gilt

$$u(r, b) \underset{(2.92)}{\geq} u(R(b), b) \geq \frac{1}{2}u(R(b^*), b^*) > 0,$$

für alle  $r \geq R(b)$  und  $b > b^*$  nahe genug bei  $b^*$ ;  $u(r, b)$  ist also für große  $r$  von 0 weg beschränkt, gleichmäßig in  $b$ . Im Widerspruch dazu folgt mit der Definition von  $\sigma_2$

$$u(\sigma_2(b), b) \underset{(2.90)}{=} u(\sigma_2(b), b_0) \underset{b \rightarrow b^*}{\xrightarrow{(2.91)}} 0, \quad (2.93)$$

denn  $u(r, b_0) = z_0(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  (sogar exponentiell).

Fall 2:  $b^* = \theta$ . Für  $b$  nahe  $\theta$  ist  $u(r, b)$  aus Energiegründen gleichmäßig in  $b$  von 0 weg beschränkt (siehe den Beweis von Lemma 2.1.8), was wieder (2.93) widerspricht.  $\square$

## 2.2 Der eindimensionale Fall

Sei jetzt  $N = 1$ ; wir betrachten das Funktional (2.1), also

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}} \left[ -\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + g(u(x)) \right] dx \quad (2.94)$$

über dem Hilbertraum  $E = H^1(\mathbb{R})$ , wobei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = \int_0^t f(s) ds$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  erfülle dabei  $(f_0-f_2, f_4)$ , wobei jetzt in  $(f_4)$   $2^* - 1 = \infty$  zu lesen ist. Eine Bedingung wie  $(f_3)$  werden wir diesmal nicht benötigen. Wieder wollen wir die Voraussetzungen  $(F_0-F_3)$  des abstrakten Satzes 1.1.4 (Existenz gestörter kritischer Punkte) für das ungestörte Funktional  $F$  nachweisen.

Zuerst sind wieder Wohldefiniertheit und Regularität des Funktionals  $F$  nachzuprüfen, also  $(F_0)$ . Dies ergibt sich durch das entsprechende Lemma 2.1.1 für den höherdimensionalen Fall, welches unverändert auch für  $N = 1$  gilt. Als nächstes wollen wir uns mit  $(F_1)$  beschäftigen.

### 2.2.1 Existenz der kritischen Mannigfaltigkeit

Wie wir bereits im höherdimensionalen Fall gesehen haben, genügt es, eine nicht-triviale Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung (EL) für  $N = 1$  (in schwacher Form), also

$$u'' + f(u) = 0 \quad \text{für } u \in H^1(\mathbb{R}) \text{ (schwach)}$$

zu finden, die aufgrund der Translationsinvarianz der Gleichung bereits eine ganze Mannigfaltigkeit von kritischen Punkten von  $F$  erzeugt. Wir wollen die Existenz einer positiven, geraden, auf  $[0, \infty)$  strikt monoton fallenden Lösung  $z_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$  von (EL) zeigen. Dazu nehmen wir in diesem Unterabschnitt genau wie im höherdimensionalen Fall o.B.d.A. an, dass  $f$  ungerade ist. Das Lemma 2.1.3 zur Erzeugung der Mannigfaltigkeit durch Translation ist anwendbar, und wir erhalten die eindimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit

$$Z := \{z_0(\cdot + \theta) : \theta \in \mathbb{R}\} \quad (2.95)$$

von kritischen Punkten  $z_0(\cdot + \theta)$  von  $F$ . Ist  $f = f^*$ , also  $f(t) = -t + |t|^{p-1} t$ , so ist eine explizite Darstellung von  $z_0$  bekannt:

$$z_0(x) = \left( \frac{p_1 + 1}{2} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} \left[ \cosh \left( \frac{p_1 - 1}{2} x \right) \right]^{-\frac{2}{p_1-1}}.$$

Im allgemeinen liefert der folgende Satz die Existenz von  $z_0$ :

**Satz 2.2.1 (Existenz und Eigenschaften eines nichttrivialen kritischen Punktes des ungestörten Potentials für  $N = 1$ ).** *Es gelte  $(f_0-f_2)$ ,  $(f_4)$ . Dann existiert eine klassische Lösung  $z_0 \in C^3(\mathbb{R})$  von*

$$u'' + f(u) = 0 \quad (\text{EL}_{N=1})$$

*mit den folgenden Eigenschaften:  $z_0$  ist positiv, gerade, und  $z_0'(r) < 0$  für  $r > 0$  (daher fällt  $z_0$  streng monoton auf  $(0, \infty)$ ). Die zweite Ableitung von  $z_0$  nach dem Radius bei  $x = 0$  ist  $z_0''(0) = -f(z_0(0)) < 0$ .  $z_0$  und alle seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung fallen im Unendlichen exponentiell ab. Insbesondere ist  $z_0 \in H^3(\mathbb{R}^N)$ .*

*Beweis.* Wir werden den Beweis wie im höherdimensionalen Fall in Satz 2.1.5 durch „shooting“ führen. Wir betrachten dazu wieder  $(\text{EL}_{N=1})$  als Anfangwertproblem

$$\begin{aligned} u'' + f(u) &= 0, \\ u(0) &= b \quad \text{und} \quad u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{AWP}_{N=1})$$

mit dem Parameter  $b > 0$ . Die Gleichung ist im eindimensionalen Fall nicht mehr singular bei 0, und darüberhinaus autonom und konservativ, was den Beweis diesmal deutlich erleichtern wird. Das Anfangwertproblem besitzt für jeden Parameterwert  $b \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung  $r \mapsto u(b, r)$  in  $C^3(\mathbb{R})$ , und die Lösungsfunktion ist für festes  $r$  in  $b$  stetig differenzierbar. Das maximale Existenzintervall ist wie im Beweis von Satz 2.1.5 unendlich, da Lösungen von  $(\text{AWP}_{N=1})$  aus Energiegründen beschränkt bleiben ( $u$  und  $u'$  sind beschränkt). Ein zugehöriges Energiefunktional ist etwa

$$E(u, u') := \frac{1}{2}u'^2 + g(u) \quad u, u' \in \mathbb{R} \quad (2.96)$$

wobei  $g(t) := \int_0^t f(s) ds$  Stammfunktion von  $f$  ist. Da nach  $(f_0-f_2)$   $g$  nach unten beschränkt ist, ist auch  $E$  nach unten beschränkt. Die Energie bleibt längs Lösungen erhalten, es gilt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial r} E(u(r, b), u'(r, b)) \underset{(\text{AWP}_{N=1})_1}{=} 0, \quad (2.97)$$

und insbesondere müssen wegen der Beschränktheit von  $g$  nach unten  $u(r, b)$  und  $u'(r, b)$  selbst beschränkt bleiben, für alle  $r \in \mathbb{R}$ . Offenbar ist jede Lösung von  $(\text{AWP}_{N=1})$  gerade; mit einer Lösung  $u$  ist nämlich auch  $\tilde{u}(r) = u(-r)$  Lösung von  $(\text{AWP}_{N=1})$  (zu den gleichen Anfangsbedingungen!). Wir betrachten wie im höherdimensionalen Fall nun folgende Familien von Lösungen von  $(\text{AWP}_{N=1})$  (bzw. Parameterwerten von  $b$ ): Setze

$$\begin{aligned} P &:= \{b > \theta : \exists r_0 > 0 \text{ mit } u'(r_0, b) = 0 \text{ und } u(r, b) > 0 \forall r \in (0, r_0]\}, \\ N &:= \{b > \theta : \exists r_0 > 0 \text{ mit } u(r_0, b) = 0 \text{ und } u'(r, b) < 0 \forall r \in (0, r_0]\}, \\ G &:= (\theta, \infty) \setminus (N \cup P). \end{aligned}$$



Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass  $G$  nichtleer ist. Wir setzen dann  $z_0 := u(\cdot, b_0)$  mit  $b_0 := \inf G$  und weisen nach, dass  $z_0$  die gewünschten Eigenschaften besitzt. Wir werden gleich sogar sehen, dass  $G = \{\phi\}$  einpunktig ist, wobei  $\phi$  die positive Nullstelle von  $g$  aus  $(f_2)$  ist.

Der restliche Beweis gliedert sich nun genau wie im Satz 2.1.5 für den höherdimensionalen Fall in die folgenden Hilfsaussagen:

1.  $(\theta, \phi) \subset P$ .
2.  $(\phi, \infty) \subset N$ .
3.  $P$  und  $N$  sind offen.
4. Für  $b \in G$  ist  $u(r, b) > 0$  sowie  $u'(r, b) < 0$  für alle  $r > 0$ . Außerdem gilt  $u(r, b) \rightarrow 0$ ,  $u'(r, b) \rightarrow 0$  und  $u''(r, b) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .
5. Für  $b \in G$  fällt  $u(r, b)$  zusammen mit seinen Ableitungen nach  $r$  bis zur dritten Ordnung exponentiell für  $r \rightarrow \infty$ .

Die Beweise der Lemmata 2.1.7, 2.1.8, 2.1.10, 2.1.11 und 2.1.12 funktionieren im eindimensionalen Fall völlig analog, und liefern 1, 3, 4 und 5. Den Beweis von 2 werden wir im Anschluss in Lemma 2.2.2 ausführen; aufgrund der angenehmen Eigenschaften der Gleichung  $(AWP_{N=1})_1$  wird es uns jedoch erheblich leichter fallen als der Nachweis von Lemma 2.1.9 für  $N \geq 2$ .

Die Aussagen 1-3 implizieren  $G = \{\phi\}$ . Mit 4 und 5 folgt die Behauptung des Satzes.  $\square$

Jetzt beweisen wir die noch ausstehende Hilfsaussage. Die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 2.2.1 werden übernommen.

**Lemma 2.2.2.** *Die Voraussetzungen von Satz 2.2.1 seien erfüllt. Dann besitzt die Lösung  $u(\cdot, b)$  von  $(AWP_{N=1})$  für alle  $b > \phi$  eine positive Nullstelle. Ist  $R(b) > 0$  die kleinste positive Nullstelle von  $u(\cdot, b)$ , so ist  $u'(r, b) < 0$  für  $r \in (0, R(b)]$ . Insbesondere ist  $(\phi, \infty) \subset N$ .*

*Beweis.* Die Aussage des Lemmas ist im wesentlichen eine Konsequenz der Energieerhaltung. Wegen  $b > \phi$  ist die zu  $u(\cdot, b)$  gehörige Energie

$$E(u(r, b), u'(r, b)) = E(u(0, b), u'(0, b)) = g(b) > 0.$$

Außerdem ist  $u'(r, b) < 0$  für  $b > \phi$ , solange  $r > 0$  nahe genug bei 0 ist, denn  $u''(0, b) = -f(b) < 0$ . Wähle nun ein (kleines)  $r_1 > 0$  mit  $u'(r, b) < 0$  und  $b > u(r, b) \geq \phi$  für alle  $r \in (0, r_1]$ . Setze nun

$$R := \sup \{S > 0 : u(r, b) > 0 \text{ für alle } 0 \leq r < S\} > r_1.$$

Zu zeigen ist  $R < \infty$ . Das erhalten wir wie folgt: Aufgrund von  $(f_1)$  ist  $g$  negativ auf  $(0, \phi)$  und strikt monoton wachsend auf  $(\theta, \infty)$ , so dass

$$u'(r, b)^2 \stackrel{(2.96)}{=} 2E(b, 0) - 2g(u(r, b)) \geq 2g(b) - 2g(u(r_1, b)) > 0, \quad (2.98)$$

solange  $r \in [r_1, R)$  und  $u(r, b) \leq u(r_1, b)$  ist. Nun ist aber  $u'(r_1, b) < 0$ , und nach (2.98) ist  $u'(r, b)$  von 0 wegbeschränkt, so dass  $u(\cdot, b)$  von  $u(r_1, b)$  aus zwangsläufig bis zu einer ersten Nullstelle  $R \in (r_1, \infty)$  strikt monoton fallen muss.  $\square$

Jetzt müssen wir nur noch  $(F_2)$  und  $(F_3)$  zeigen.  $(F_2)$  folgt dabei genau wie für  $N \geq 2$  mit Lemma 2.1.15 aus der kompakten Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  für  $1 \leq q < \infty$  und beschränkte Gebiete (mit hinreichend regulärem Rand)  $\Omega \subset \mathbb{R}$  und dem klassischen Abfall von  $z_0(r)$  (und damit  $f'(z_0(r))$ ) für  $r \rightarrow \infty$ . Als letztes der Nachweis von  $(F_3)$ :

## 2.2.2 Nichtdegeneriertheit der kritischen Mannigfaltigkeit

Wie wir schon im höherdimensionalen Fall in Unterabschnitt 2.1.4 gesehen haben, genügt es zu zeigen, dass

$$\text{Kern } D\nabla F(z_0) \subset T_{z_0}Z \subset H^1(\mathbb{R}), \quad (2.99)$$

wobei die kritische Mannigfaltigkeit  $Z$  von  $F$  nach (2.95) durch die Translationen von  $z_0$  (der positiven geraden Lösung von  $(\text{EL}_{N=1})$  aus Satz 2.2.1) gegeben ist, also

$$Z := \{z_0(\cdot + \theta) : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Nach der Definition von  $F$  ist  $w \in \text{Kern } D\nabla F(z_0)$  genau dann, wenn es

$$D^2F(z_0)[w, \varphi] = \int_{\mathbb{R}} [w'\varphi' + f'(z_0)w\varphi] dx \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\mathbb{R}),$$

also die linearisierte Euler-Lagrange-Gleichung

$$w'' + f'(z_0)w = 0 \quad (\text{schwach}) \quad (2.100)$$

erfüllt.  $w \in H^1(\mathbb{R})$  ist insbesondere stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ , und als (schwache) Lösung von (2.100) sogar zweimal stetig differenzierbar. Der folgende Satz sagt nun aus, dass der Lösungsraum von (2.100) in  $C^2(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$  eindimensional ist und von  $z'_0$  aufgespannt wird, womit (2.99) gezeigt ist.

**Satz 2.2.3 (Nichtdegeneriertheit der kritischen Mannigfaltigkeit für  $N = 1$ ).**  $f$  erfülle  $(f_0-f_2)$  und  $(f_4)$ .  $z_0 \in H^3(\mathbb{R}) \cap C^3(\mathbb{R})$  sei die positive gerade Lösung von  $\nabla F(z_0) = 0$  aus Satz 2.1.5. Dann ist jede Lösung  $w \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$  von

$$w'' + f'(z_0(x))w = 0 \quad (2.101)$$

ein Vielfaches von  $z'_0$ .

*Beweis.* Durch Differentiation der Differentialgleichung  $(EL_{N=1})$  für  $z_0$  erhält man sofort, dass  $z'_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$  (2.101) löst. Der Lösungsraum von (2.101), einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, ist zweidimensional in  $C^2(\mathbb{R})$ . Für ein beliebiges, fest gewähltes  $a > 0$  ist

$$y(x) := z'_0(x) \int_a^x z'_0(t)^{-2} dt \quad (2.102)$$

eine von  $z'_0$  linear unabhängige Lösung von (2.101) auf  $(0, \infty)$  (zumindest auf diesem Intervall ist  $y$  durch (2.102) sicherlich wohldefiniert; beachte, dass  $x = 0$  der einzige kritische Punkt von  $z_0$  ist):

$$y''(x) + f'(z_0(x))y(x) = [z_0'''(x) + f'(z_0(x))z'_0(x)] \int_a^x z'_0(t)^{-2} dt = 0;$$

außerdem ist  $y(a) = 0$ ,  $y'(a) = 1/z'_0(a) < 0$  und andererseits  $z'_0(a) < 0$ , so dass die Funktionen  $y$  und  $z'_0$  auch wirklich linear unabhängig sind.

Da  $\lim_{x \rightarrow \infty} z_0''(x) = 0$  ist, gibt es ein  $a > 0$  mit  $|z_0''(x)| \leq 1$  für alle  $x \in (a, \infty)$ . Verwendet man dieses  $a$  für die Definition von  $y$  in (2.102), so folgt

$$|y(x)| \geq |z'_0(x)| \left| \int_a^x \left( \frac{z_0''(t)}{z'_0(t)^2} \right) dt \right| = |z'_0(x)| \left| \frac{1}{z'_0(a)} - \frac{1}{z'_0(x)} \right| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1,$$

da  $\lim_{x \rightarrow \infty} z'_0(x) = 0$ . Daher ist  $\int_a^\infty y(x)^2 dx = \infty$ ; insbesondere ist  $y \notin H^1(\mathbb{R})$ . Eine Lösung  $w \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$  von (2.101), die auf  $(0, \infty)$  zunächst ja Linearkombination von  $z'_0$  und  $y$  sein kann, muss deswegen zwangsläufig ein Vielfaches von  $z'_0$  sein, zunächst auf  $(0, \infty)$  und als klassische Lösung von (2.101) dann natürlich auch auf ganz  $\mathbb{R}$ .  $\square$

# Kapitel 3

## Anwendungen der abstrakten Aussagen

### 3.1 Verzweigung vom essentiellen Spektrum des Laplace über $\mathbb{R}^N$

#### 3.1.1 Problemstellung

Wir betrachten die Gleichung

$$\Delta\psi - \lambda\psi + A_1 |\psi|^{p_1-1} \psi + h(x)g(\psi) = 0 \quad (\text{schwach}) \quad (\text{VP})$$

für  $\psi \in E := H^1(\mathbb{R}^N)$ , für  $N \geq 2$  ( $x$  bezeichnet hier die Variable im Gebiet  $\mathbb{R}^N$  der Differentialgleichung), in schwacher Form, also

$$\int_{\mathbb{R}^N} [-\langle \nabla\psi, \nabla\varphi \rangle_{\mathbb{R}^N} - \lambda\psi\varphi + (A_1 |\psi|^{p_1-1} \psi + h(x)g(\psi)) \varphi] dx = 0 \quad (\text{VP})$$

für alle  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) = H_0^1(\mathbb{R}^N)$ .

Mit Hilfe der Aussagen aus Kapitel 1 wollen wir nichttriviale Lösungen von (VP) nachweisen, die bei  $\lambda = 0$  von der trivialen Lösung  $\psi = 0$  verzweigen.

Das einfachste Beispiel für  $g$  ist  $g(t) := |t|^{p_1-1} t$ , welches von A. Ambrosetti und M. Badiale in [7] im eindimensionalen Fall ( $N = 1$ ) behandelt wurde (wobei die restlichen in der Gleichung auftauchenden Parameter und Funktionen die weiter unten angegebenen Bedingungen erfüllen). Die dortigen Resultate werden hier auf den höherdimensionalen Fall ( $N \geq 1$ ) und eine große Klasse von Funktionen  $g$  verallgemeinert, was so bisher wohl nicht in der Literatur zu finden ist. Im Wesentlichen werden dabei weiterhin die Methoden aus [7] angewandt.

Die in der Gleichung auftretenden Funktionen und Konstanten sollen folgendes erfüllen: Es sei  $A_1 > 0$  fest,  $\lambda \in \mathbb{R}$  der Verzweigungsparameter.  $g \in C^1(\mathbb{R})$  sei eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$g(t) = A_2 |t|^{p_2-1} t + r(t), \quad (\text{V}:g)$$

$$g'(t) = p_2 A_2 |t|^{p_2-1} + r'(t), \quad (\text{V}:g')$$

mit einer Konstanten  $A_2 \neq 0$ . Die Restterme  $r$  und  $r'$  sollen

$$\frac{|r(t)|}{|t|^{p_2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{und} \quad \frac{|r'(t)|}{|t|^{p_2-1}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad (\text{V}:r_1)$$

erfüllen. Für die oben aufgetretenen Exponenten gelte

$$p_1 < \frac{4}{N} + 1, \quad (3.1)$$

$$p_{1,2} \in \begin{cases} (1, 2^* - 1) & \text{falls } N \geq 3, \\ (1, \infty) & \text{falls } N = 1, 2, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$p_2 > \frac{p_1 + 1}{2} \quad \text{falls } N = 1, \quad (3.3)$$

wobei hier und im folgenden wieder die Abkürzung  $2^* := 2N/(N-2)$  (für  $N \geq 3$ ) verwendet wird. Im mehrdimensionalen Fall ( $N \geq 2$ ) benötigen wir auch noch die Wachstumsbedingungen

$$|r(t)| \leq C |t|^{p_2} + D |t|^{\tilde{p}} \quad \text{und} \quad |r'(t)| \leq C |t|^{p_2-1} + D |t|^{\tilde{p}-1}. \quad (\text{V}:r_2)$$

mit Konstanten  $C, D \geq 0$ . Für den Exponenten  $\tilde{p}$  gelte dabei

$$p_2 \leq \tilde{p} < \begin{cases} 2^* - 1 & \text{falls } N \geq 3, \\ \infty & \text{falls } N = 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Mittels Integration von (V:g) erhält man für die Stammfunktion

$$\tilde{g}(t) := \int_0^t g(s) ds \quad (3.5)$$

von  $g$ , die für das Potential der Gleichung benötigt wird, entsprechende Eigenschaften:

$$\tilde{g}(t) = \frac{A_2}{p_2 + 1} |t|^{p_2+1} + \tilde{r}(t), \quad (\text{V}:\tilde{g})$$

wobei

$$\tilde{r}(t) := \int_0^t r(s) ds,$$

so dass

$$\frac{|\tilde{r}(t)|}{|t|^{p_2+1}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \quad (\text{V:}\tilde{r}_1)$$

Für  $N \geq 2$  ergibt sich auch noch die Wachstumsbedingung

$$|\tilde{r}(t)| \leq C |t|^{p_2+1} + D |t|^{\tilde{p}+1}. \quad (\text{V:}\tilde{r}_2)$$

Schließlich fordern wir von der symmetriebrechenden Funktion  $h$

$$h \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N) \text{ für ein } q \begin{cases} \geq 1, & \text{falls } N = 1, \\ > 1, & \text{falls } N = 2, \\ \geq \frac{2^*}{2^* - (\tilde{p} + 1)}, & \text{falls } N \geq 3. \end{cases} \quad (\text{V:}h_1)$$

Obige Bedingungen stellen insbesondere die Endlichkeit des Integrals in (VP) sicher. Zusätzlich soll  $h$  auch noch entweder

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx \neq 0. \quad (\text{V:}h_2)$$

oder

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx = 0, \\ & \text{und es existiert ein Vektorfeld} \\ & \tilde{h} \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \text{ so dass} \quad (\text{V:}h_3) \\ & \text{div } \tilde{h} \text{ im schwachen Sinne existiert, } \text{div } \tilde{h} = h \text{ und} \\ & \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x) dx \neq 0 \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

erfüllen.

**Bemerkung 3.1.1.** In (V:g) kann  $g$  auch ein Verhalten wie  $|t|^{p_2}$  anstelle von  $|t|^{p_2-1} t$  nahe  $t = 0$  haben (mit entsprechendem Verhalten der Ableitung) – alle im folgenden verwendeten Argumente, abgesehen von denen aus Bemerkung 3.1.5, funktionieren in diesem Fall völlig analog.

Die Gleichung (VP) besitzt offensichtlich für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  die triviale Lösung  $\psi = 0$ . Wir wollen jetzt mit Hilfe des in Kapitel 1 bereitgestellten abstrakten, störungstheoretischen Zugangs Verzweigung nichttrivialer Lösungen bei  $\lambda = 0$  nachweisen, also die Existenz einer Folge  $(\lambda_n, \psi_n)$  von Lösungen von (VP), mit  $\lambda_n \rightarrow 0$  und  $\psi_n \rightarrow 0$  (aber  $\psi_n \neq 0$ ).

**Bemerkung 3.1.2.** Die Linearisierung von (VP) um  $\psi = 0$  ist

$$\Delta\psi - \lambda\psi = 0 \quad (\text{schwach}), \quad (3.6)$$

so dass Verzweigung von der trivialen Lösung  $(\psi, \lambda) = (0, \lambda)$  nur möglich ist, wenn  $\Delta - \lambda$  (als stetiger Operator von  $H^1(\mathbb{R}^N)$  nach  $H^{-1}(\mathbb{R}^N) := H^1(\mathbb{R}^N)'$ , also im schwachen Sinne) nicht bijektiv ist, sonst wäre nämlich der Satz über implizite Funktionen anwendbar. In diesem Rahmen ist aber  $\Delta - \lambda$  genau dann bijektiv, wenn  $\lambda > 0$  ist: Offenbar kann man äquivalent nachweisen, dass der durch

$$\langle B_\lambda\varphi, \eta \rangle_{H^1} \stackrel{\text{Riesz}}{:=} \int_{\mathbb{R}^N} (-\langle \nabla\varphi, \nabla\eta \rangle_{\mathbb{R}^N} - \lambda\varphi\eta) dx$$

(für alle  $\varphi, \eta \in H^1$ ) definierte lineare Operator  $B_\lambda \in L(H^1, H^1)$  genau dann bijektiv ist, wenn  $\lambda > 0$  gilt. Der definierenden Gleichung von  $B_\lambda$  kann man direkt entnehmen, dass  $B_\lambda$  symmetrisch und für  $\lambda > 0$  negativ definit ist. Insbesondere ist  $B_\lambda$  dann injektiv, und das Bild von  $B_\lambda$  ist abgeschlossen. Der Satz vom abgeschlossenen Wertebereich liefert sofort auch die Surjektivität. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $B_\lambda$  für  $\lambda \leq 0$  nicht bijektiv sein kann. Wir beobachten zunächst: Ist  $\Delta - \lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$  bijektiv, so auch  $\Delta - \lambda : H^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)^*$ . Bekanntlich ist das Spektrum von  $\Delta$  als abgeschlossenem Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^N)$  mit Definitionsbereich  $H^2(\mathbb{R}^N)$  das Intervall  $(-\infty, 0]$  und besteht ausschließlich aus dem essentiellen Spektrum (insbesondere ist das Punktspektrum leer; zum Begriff des essentiellen Spektrums und den Spektraleigenschaften des Laplace-Operators auf dem Ganzraum siehe zum Beispiel das Buch von Edmunds und Evans [11]). Daher ist  $\Delta - \lambda : H^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  genau für  $\lambda > 0$  bijektiv, und ist entsprechend  $\Delta - \lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$  höchstens für  $\lambda > 0$  bijektiv. In diesem Sinne wird hier Verzweigung vom Supremum des essentiellen Spektrums des Laplace-Operators (nämlich  $\lambda = 0$ ) nachgewiesen.

### 3.1.2 Einbettung in den abstrakten Rahmen

Durch eine Umparametrisierung lässt sich das Verzweigungsproblem (VP) in eine gestörte Gleichung übersetzen, auf die Satz 1.1.5 anwendbar sein wird. Setze dazu

\*Dies ist eine einfache Folgerung mit Hilfe elliptischer  $L^2$ -Regularitätstheorie im Inneren und einer a-priori-Ungleichung für den Laplace-Operator auf  $\mathbb{R}^N$  (also einem unbeschränkten Gebiet!):

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

für alle  $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ . Für elliptische Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten – insbesondere für den Laplace-Operator – lässt sich die a-priori-Ungleichung mit Hilfe der Fourier-Transformation relativ leicht nachrechnen. Ich konnte bisher jedoch leider keine Literatur finden, die einen Beweis enthält, dass solch eine a-priori-Ungleichung für beliebige elliptische Operatoren mit entsprechend regulären und beschränkten Koeffizienten gilt. In [3] wird vermerkt, dass dies richtig sei; ein Beweis wird dort aber nur für beschränkte Gebiete geführt.

mit dem Störungsparameter  $\epsilon > 0$

$$u(x) = \epsilon^{-\frac{2}{p_1-1}} \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad \text{und} \quad \lambda = \epsilon^2. \quad (3.7)$$

Man erhält eine (VP) entsprechende Gleichung für  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ :  $(\psi, \lambda)$  löst (VP) genau dann, wenn das zugehörige  $(u, \epsilon)$

$$\Delta u - u + A_1 |u|^{p_1-1} u + \epsilon^{-2-\frac{2}{p_1-1}} h(x/\epsilon) g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) = 0 \quad (\text{schwach}) \quad (\text{VSP})$$

erfüllt. Dieses Problem passt wie folgt in den abstrakten Rahmen: Setze  $E := H^1(\mathbb{R}^N)$  mit der Norm  $\|u\| := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$ . Das ungestörte Funktional ist für  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  gegeben durch

$$F(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \left[ -\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} u^2 + \frac{A_1}{p_1+1} |u|^{p_1+1} \right] dx \quad (3.8)$$

und die Störung ist

$$G(\epsilon, u) := \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) dx, \quad (3.9)$$

wobei

$$\tilde{g}(t) := \int_0^t g(s) ds$$

Stammfunktion von  $g$  ist. Außerdem setzen wir  $G(0, u) := 0$ . Die Funktionale  $F(u)$  bzw.  $G(\epsilon, u)$  sind wegen (3.2) bzw. den Wachstumsbedingungen (V: $\tilde{g}$ ) (zusammen mit (V: $\tilde{r}_1$ ) und (V: $\tilde{r}_2$ )) an  $\tilde{g}$  sowie (V: $h_1$ ) für  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  wohldefiniert. Dabei ist wie im Beweis der Stetigkeit von  $G$  in  $u$  in Lemma 3.1.11 zu argumentieren.  $F$  und  $G$  haben wir so definiert, dass (VSP) in der Form

$$[D_u F(u) + D_u G(\epsilon, u)] \varphi = 0 \quad (\text{für alle } \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N))$$

geschrieben werden kann (für die Differenzierbarkeit von  $G$  siehe Lemma 3.1.11). Lösungen von (VSP) (für  $\epsilon \neq 0$ ) sind also kritische Punkte des gestörten Potentials

$$F_\epsilon(u) := F(u) + G(\epsilon, u) \quad (3.10)$$

Diese liefern dann mittels

$$\psi_\epsilon(x) := \epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u_\epsilon(\epsilon x) \quad \text{und} \quad \lambda_\epsilon := \epsilon^2 \quad (3.11)$$

wieder Lösungen  $\psi_\epsilon$  von (VP) zum Parameterwert  $\lambda = \lambda_\epsilon$ . Das ungestörte Funktional  $F$  passt in die Klasse, die wir in Kapitel 2 behandelt haben. Insbesondere



existiert nach Satz 2.1.5 (für  $N \geq 2$ ) bzw. Satz 2.2.1 (für  $N = 1$ ) eine positive, radialsymmetrische, längs der radialen Richtung streng monoton fallende Lösung  $z_0 \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^3(\mathbb{R}^N)$  von  $\nabla F(z_0) = 0$ , die mitsamt ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung im Unendlichen exponentiell abfällt. Außerdem erzeugt  $z_0$  nach Lemma 2.1.3 durch Translation die  $C^2$ -Mannigfaltigkeit

$$Z = \{z_\theta := z_0(\cdot + \theta) : \theta \in \mathbb{R}^N\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$$

von kritischen Punkten von  $F$ . Wir werden nun mit Hilfe von Satz 1.1.5 nachweisen, dass aus  $Z$  kritische Punkte des gestörten Potentials  $F_\epsilon$  verzweigen. Diese erzeugen dann über (3.11) eine bei  $\lambda = 0$  von  $\psi = 0$  verzweigende Folge nichttrivialer Lösungen von (VP).

### 3.1.3 Resultate

Wir formulieren hier die wesentlichen Ergebnisse; die Beweise werden in Unterabschnitt 3.1.4 ausgeführt. Jedes der folgenden Ergebnisse verallgemeinert eine Aussage von A. Ambrosetti und M. Badiale [7], wo ausschließlich der Spezialfall  $N = 1$  und  $g(t) = |t|^{p_1-1}t$  behandelt wird. Über diesen Spezialfall hinaus sind Korollar 3.1.4 (verallgemeinert Theorem 1.5 in [7]) und Korollar 3.1.9 (verallgemeinert zusammen mit Satz 3.1.10 Theorem 1.7 in [7]) so wohl bisher nicht in der Literatur zu finden.

Ähnliche Fragestellungen wurden auch schon von C. A. Stuart [19] und R. J. Magnus [15] behandelt. Diese Zugänge haben mit [7] die hier in Abschnitt 3.1.2 vorgestellte Umparametrisierung des ursprünglichen Verzweigungsproblems zu einem Störungsproblem gemein. Beide weisen Verzweigung stetiger Kurven nach, wofür letztendlich nichtdegenerierte Nullstellen von  $D\Gamma$  gefunden werden müssen, weshalb generell höhere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (wie  $(F'_0)$ ,  $(G_4)$  und  $(G_5)$ ) benötigt werden; insbesondere muss  $p_1 \geq 2$  sein. Die Arbeit von Stuart ist auf den eindimensionalen Fall beschränkt, kommt aber dafür im Wesentlichen ohne Variationsstruktur aus. Es wird eine recht allgemeine Version von Satz 3.1.10 gezeigt, die zwar nur eine etwas kleinere Klasse von Funktionen  $g$  behandelt und  $h \in C^1(\mathbb{R})$  fordert (sowie anstelle von  $h \in L^1(\mathbb{R})$  marginal anderes Abklingverhalten von  $h$  im Unendlichen), dafür aber zusätzliche Störterme abhängig von  $u'$  in (VSP) zulässt (siehe S. 1165ff in [19]). Aussagen zum Morse-Index der verzweigenden kritischen Punkte, wie es die Anwendung von Satz 1.2.3 ermöglicht, werden in [19] nicht gemacht. Magnus behandelt auch den höherdimensionalen Fall, wobei er nur auf den Prototyp  $g(t) = |t|^{p_1-1}t$  eingeht, für  $p_1 \geq 2$ . Aussagen für den Fall  $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$  können mit den Methoden von [15] nicht gemacht werden; stattdessen wird dort für  $N = 3$  Verzweigung für eine symmetriebrechende Funktion  $h$  bewiesen, welche eine Majorante  $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$  besitzt

mit  $|h(x, y, z)| \leq \hat{h}(z)$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  (Abklingverhalten für  $|z| \rightarrow \infty$ ). Des weiteren werden Eigenschaften von  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(tx, ty, z)$  verlangt, welcher für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  existieren soll (abhängig von  $x, y, z$ ) und unter anderem nicht identisch 0 sein darf (insbesondere ist  $h \in L^1(\mathbb{R}^3)$  oder ähnliches Abklingen im Unendlichen ausgeschlossen, siehe S. 10ff in [15]).

Der folgende Satz ist eine wichtige Hilfsaussage, die sicherstellt, dass wir den abstrakten Zugang (speziell Satz 1.1.5) aus Kapitel 1 anwenden können.

**Satz 3.1.3.** *Gelten die in Unterabschnitt 3.1.1 formulierten Voraussetzungen  $(V:g)$ ,  $(V:g')$  und  $(V:h_1)$ , so erfüllt das durch (3.10) gegebene gestörte Potential  $F_\epsilon$  auf  $E := H^1(\mathbb{R}^N)$  die Bedingungen  $(F_0-F_3)$  und  $(G_0-G_3)$  aus Kapitel 1, mit*

$$\alpha := 2 \frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} - 2 + N > 0 \quad (3.12)$$

(für  $N = 1$  ist  $\alpha > 0$  wegen (3.3)) und der Funktion

$$\Gamma(z_\theta) := A_2 |z_\theta(0)|^{p_2+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx \quad (3.13)$$

Um Satz 1.1.5 anwenden zu können, benötigen wir einen Hügel (oder ein Tal) von  $\theta \mapsto \Gamma(z_\theta)$ . Dies wird mit Hilfe von  $(V:h_2)$  sichergestellt. Dann ist die Funktion  $\Gamma$  aus (3.13) nämlich nicht identisch 0, und nach Satz 2.1.5 hat  $z_0(\theta) = z_\theta(0)$  und damit auch  $\Gamma(z_\theta)$  ein striktes globales Maximum bei  $\theta_0 = 0$  (oder Minimum, abhängig vom Vorzeichen von  $A_2$  und  $\int h(x) dx$ ), und dies ist zugleich der einzige kritische Punkt. Satz 1.1.5 liefert nun für hinreichend kleine  $\epsilon > 0$  die Existenz einer Folge von kritischen Punkten  $u_\epsilon$  von  $F_\epsilon$  mit  $u_\epsilon \rightarrow z_0 =: z^*$  in  $H^1(\mathbb{R}^N)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Da  $z_0 \neq 0$  ist, sind die  $u_\epsilon$  für hinreichend kleine  $\epsilon$  insbesondere nichttrivial. Diese gestörten kritischen Punkte ergeben bei  $\lambda = 0$  verzweigende nichttriviale Lösungen von (VP):

**Korollar 3.1.4 (Verzweigung vom essentiellen Spektrum 1).** *Die Voraussetzungen von Satz 3.1.3 sowie  $(V:h_2)$  seien erfüllt. Dann verzweigen die Funktionen*

$$\psi_\epsilon(x) := \epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u_\epsilon(\epsilon x)$$

in  $H^1(\mathbb{R}^N)$  als nichttriviale Lösungen von (VP) mit dem jeweils zugehörigem Parameter  $\lambda_\epsilon := \epsilon^2$  bei  $\lambda = 0$  von der trivialen Lösung  $\psi = 0$ . Es gilt also  $\psi_\epsilon \neq 0$  für alle ausreichend kleinen  $\epsilon$  und  $\lambda_\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\psi_\epsilon \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Bemerkung 3.1.5.**  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  ist genau dann Lösung von (VSP) (für ein festes  $\epsilon > 0$ ), wenn  $v := -u$

$$\Delta v - v + A_1 |v|^{p_1-1} v + \epsilon^{-2-\frac{2}{p_1-1}} h(x/\epsilon) k(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} v) = 0 \quad (\text{schwach}) \quad (\text{VSP}') \quad (3.14)$$

erfüllt, wobei  $k(t) := -g(-t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ . (VSP') hat natürlich auch Variationsstruktur; mit Potential  $\hat{F}_\epsilon = F + \hat{G}(\epsilon, \cdot)$ , wobei  $\hat{G}$  aus  $G$  entsteht, indem  $\tilde{g}$  durch die Stammfunktion  $\tilde{k}(t) := \int_0^t k(s) ds$  ersetzt wird. Die zugehörige ungestörte kritische Mannigfaltigkeit ist unverändert durch  $Z$  gegeben. Da  $k$  ebenfalls (V:g) und (V:g') erfüllt, erhält man entsprechende Lösungen  $-\hat{u}_\epsilon$  von (VSP') (womit  $\hat{u}_\epsilon$  (VSP) löst), mit  $\text{dist}(\hat{u}_\epsilon; -Z) \rightarrow 0$  (Distanz in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ) für  $\epsilon \rightarrow 0$ , und damit gemäß (3.11) zusätzliche Lösungen von (VP), die bei  $\lambda = 0$  von der trivialen Lösung von (VP) verzweigen.

**Bemerkung 3.1.6.** Die Bedingung (3.1), also  $p_1 < 4/N + 1$ , wird für Satz 3.1.3 nicht benötigt – dafür genügen schon die restlichen Forderungen an die Exponenten  $p_1$  und  $p_2$  in (3.2) und (3.3). Ist allerdings  $p_1 \geq 4/N + 1$ , so konvergieren die zu den  $u_\epsilon$  gehörigen Lösungen  $\psi_\epsilon$  von (VP) nicht mehr in  $H^1(\mathbb{R}^N)$  gegen die triviale Lösung  $\psi = 0$  für  $\lambda_\epsilon = \epsilon^2 \rightarrow 0$ , so dass dann  $(\psi = 0, \lambda = 0)$  nicht notwendigerweise ein Verzweigungspunkt nichttrivialer Lösungen von (VP) ist. Man kann in diesem Fall aber immer noch zeigen, dass

$$\psi_\epsilon \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \text{ in } L^s(\mathbb{R}^N),$$

für jedes

$$s \in \begin{cases} \left( \max \left\{ 2, \frac{N(p_1 - 1)}{2} \right\}, \infty \right] & \text{falls } N = 1, \\ \left( \max \left\{ 2, \frac{N(p_1 - 1)}{2} \right\}, \infty \right) & \text{falls } N = 2, \\ \left( \max \left\{ 2, \frac{N(p_1 - 1)}{2} \right\}, 2^* \right] & \text{falls } N \geq 3. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Abschätzung  $s > N(p_1 - 1)/2$  folgt dies aus der Konvergenz

$$u_\epsilon \rightarrow z_0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \text{ in } L^s(\mathbb{R}^N),$$

welche wegen der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$  gilt.

Ist  $h$  im Mittel 0, also (V:h<sub>2</sub>) verletzt, so können wir mit Hilfe der Funktion  $\Gamma$  aus (3.13) kein Verzweigungsergebnis mehr bekommen – diese ist ja dann trivial. In diesem Fall setzen wir voraus, dass  $h$  zusätzlich zu (V:h<sub>1</sub>) noch (V:h<sub>3</sub>) erfüllt.

**Bemerkung 3.1.7.** Die Bedingung  $\int h(x) dx = 0$  in der ersten Zeile von (V:h<sub>3</sub>) ist eigentlich überflüssig; die restlichen Forderungen aus (V:h<sub>3</sub>) implizieren das nämlich:

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \text{div } \tilde{h}(x) dx = 0,$$

für  $\tilde{h} \in W^{\text{div},1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) := \{u \in L^1 : \text{div } u \in L^1 \text{ existiert}\}$ , nach dem Satz von Gauß.

Sind  $(V:h_1)$  und  $(V:h_3)$  gegeben, so kann man wie folgt zum Erfolg kommen:

**Satz 3.1.8.** *Gilt zusätzlich zu den in Unterabschnitt 3.1.1 formulierten Voraussetzungen  $(V:g)$ ,  $(V:g')$  und  $(V:h_1)$ , sowie  $(V:h_3)$ ,*

$$p_2 > \frac{p_1 + 1}{2} \quad (\text{auch für } N \geq 2!), \quad (3.14)$$

so erfüllt das durch (3.10) gegebene gestörte Potential  $F_\epsilon$  auf  $E := H^1(\mathbb{R}^N)$  die Bedingungen  $(F_0-F_3)$  und  $(G_0-G_3)$  aus Kapitel 1, mit

$$\alpha := 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} + N - 1 > 0 \quad (3.15)$$

und der Funktion

$$\Gamma(z_\theta) := -A_2 z_\theta(0)^{p_2} \partial_v z_\theta(0), \quad (3.16)$$

wobei  $\partial_v$  hier die Richtungsableitung in Richtung  $v := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x) dx$  ist, also

$$\partial_v z_\theta(0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} z_\theta(tv) \right|_{t=0} = \langle \nabla_\theta z_\theta(\theta), v \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

Wegen  $(V:h_3)$  ist die Funktion  $\Gamma$  aus (3.16) nichttrivial. Aufgrund der Eigenschaften von  $z_0$  (Radialsymmetrie und Monotonie) wissen wir auch, dass  $\theta \mapsto z_0(\theta)^{p_2} \partial_v z_0(\theta)$  (und damit  $\theta \mapsto \Gamma(z_\theta)$ ) einen Hügel und ein Tal hat (genauer im Beweis von Korollar 3.1.9). Wir erhalten daher zwei Folgen  $u_\epsilon^+$  und  $u_\epsilon^-$  von kritischen Punkten von  $F_\epsilon$ , die von  $Z$  verzweigen, und entsprechende Lösungen von (VP):

**Korollar 3.1.9 (Verzweigung vom essentiellen Spektrum 2).** *Die Voraussetzungen von Satz 3.1.8 seien erfüllt. Ist  $p_1 < 4/N + 1$ , so existieren für hinreichend kleine  $\epsilon > 0$  zwei verschiedene Folgen  $\psi_\epsilon^+, \psi_\epsilon^- \in H^1(\mathbb{R}^N)$  nichttrivialer Lösungen von (VP) mit dem jeweils zugehörigem Parameter  $\lambda_\epsilon := \epsilon^2$ , die in  $H^1(\mathbb{R}^N)$  von der trivialen Lösung  $\psi = 0$  verzweigen (im Sinne von  $\lambda_\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\psi_\epsilon \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ ).*

Gemäß Bemerkung 3.1.5 kann entsprechend auch noch die Existenz zweier zusätzlicher Lösungszweige von (VP) nachgewiesen werden. Im eindimensionalen Fall lässt sich mit Hilfe des abstrakten Satzes 1.2.3 über die Verzweigung stetiger Kurven sogar noch mehr sagen.

**Satz 3.1.10 (Verzweigung stetiger Kurven, vgl. auch [19]).** *Es sei  $N = 1$ . Ferner seien die Voraussetzungen Korollar 3.1.4 erfüllt, insbesondere  $(V:h_2)$ . Gilt auch noch*

$$p_1 \geq 2, \quad (3.17)$$

$$g \in C^2(\mathbb{R}), \quad (3.18)$$

sowie

$$g''(t) = O(|t|^{p_2-2}) \quad \text{für } t \rightarrow 0, \quad (3.19)$$

so verzweigt bei  $\lambda = 0$  (mindestens) eine stetige Kurve  $\epsilon \mapsto (\psi_\epsilon, \lambda_\epsilon)$ ,  $[0, \bar{\epsilon}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  nichttrivialer Lösungen von (VP) mit  $\psi_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ .

### 3.1.4 Beweis der Resultate

Wir beweisen zunächst Teile der Aussage von Satz 3.1.3 in separaten Lemmata.

**Lemma 3.1.11.** *Das durch (3.9) definierte Funktional  $G$  erfüllt  $(G_1)$ , also  $G(\epsilon, \cdot) \in C^2$ , für alle  $\epsilon \geq 0$ . Die Fréchet-Ableitungen von  $G$  nach  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  sind dabei*

$$D_u G(\epsilon, u)\varphi = \epsilon^{-2-\frac{2}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}^N} h(x/\epsilon) g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) \varphi \, dx, \quad (3.20)$$

$$D_u^2 G(\epsilon, u)[\varphi, \eta] = \epsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} h(x/\epsilon) g'(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) \varphi \eta \, dx, \quad (3.21)$$

für  $\varphi, \eta \in H^1(\mathbb{R}^N)$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist  $G(\epsilon, \cdot) \in C^2(H^1(\mathbb{R}^N))$  (zweimal stetig Fréchet-differenzierbar in  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ), für alle  $\epsilon \geq 0$ . Wir unterscheiden die Fälle  $N = 1$ ,  $N = 2$  und  $N \geq 3$ .

**1. Fall:**  $N = 1$

Die geforderte Regularität folgt mit gängiger Methode aus der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von  $\tilde{g}$  unter Verwendung der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_B^0(\mathbb{R})$ .

**2. Fall:**  $N \geq 3$

Die Regularität von  $G$  in  $u$  für  $\epsilon = 0$  ist trivial. Es bleibt die Regularität von  $G$  in  $u$  für  $\epsilon > 0$  zu zeigen.

Zur Stetigkeit von  $G$  in  $u$ : Wegen (V: $\tilde{g}$ ) und der Wachstumsbedingung (V: $\tilde{r}_2$ ) können wir

$$\tilde{g} = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2, \quad (3.22)$$

in zwei stetige Funktionen  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zerlegen, so dass für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{g}_1(t) \leq C |t|^{p_2+1} \quad \text{und} \quad \tilde{g}_2(t) \leq D |t|^{\tilde{p}+1}. \quad (3.23)$$

Mittels dieser Zerlegung folgt dann für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{2+\frac{4}{p_1-1}} |G(\epsilon, u) - G(\epsilon, v)| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |h(x/\epsilon)| \left| \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) - \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} v) \right| dx \\
&\stackrel{(3.22)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} |h(x/\epsilon)| \left| \tilde{g}_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) - \tilde{g}_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} v) \right| dx \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^N} |h(x/\epsilon)| \left| \tilde{g}_2(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) - \tilde{g}_2(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} v) \right| dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|h(\cdot/\epsilon)\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-(p_2+1)}}} \left\| \tilde{g}_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) - \tilde{g}_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} v) \right\|_{L^{\frac{2^*}{p_2+1}}} \\
&\quad \|h(\cdot/\epsilon)\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-(\tilde{p}+1)}}} \left\| \tilde{g}_2(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u) - \tilde{g}_2(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} v) \right\|_{L^{\frac{2^*}{\tilde{p}+1}}} \\
&\xrightarrow{v \rightarrow u} 0,
\end{aligned}$$

da die Nemitsky-Operatoren  $u \mapsto g_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u)$ ,  $L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2^*/(p_2+1)}(\mathbb{R}^N)$  und  $u \mapsto g_2(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u)$ ,  $L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2^*/(\tilde{p}+1)}(\mathbb{R}^N)$  wegen der Wachstumsbedingungen (3.23) stetig sind, und  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  stetig eingebettet ist (vergleiche (2.6)). Dabei sind die auftretenden Normen von  $h(\cdot/\epsilon)$  endlich, da

$$1 < \frac{2^*}{2^* - (p_2 + 1)} \leq \frac{2^*}{2^* - (\tilde{p} + 1)} \leq q,$$

und nach  $(V:h_1)$   $h \in L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^N)$  für alle  $\tilde{q} \in [1, q]$ .

Ähnliche Argumentation wie eben und im Beweis von Lemma 2.1.1 (der Regularität von  $F$ ) liefert auch die Existenz der Ableitungen  $D_u G(\epsilon, u)$  und  $D_u^2 G(\epsilon, u)$ , ihre Stetigkeit in  $u$  sowie (3.20) und (3.21).

### 3. Fall: $N = 2$

Der Beweis verläuft ähnlich dem für  $N \geq 3$ . Man wähle die Exponenten für die Hölderungleichung in der Rechnung für  $N \geq 3$  so, dass die entstehenden Normen von  $h(\cdot/\epsilon)$  nach  $(V:h_1)$  wieder endlich sind. Mit der im Falle  $N = 2$  für alle  $\tilde{q} \in [2, \infty)$  gültigen stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^2)$  (siehe (2.6)) wird dann wie zuvor argumentiert.  $\square$

**Lemma 3.1.12.** *Das durch (3.9) definierte Funktional  $G$  erfüllt  $(G_0)$  und  $(G_2)$ . Mit anderen Worten:  $G$ ,  $D_u G$  und  $D_u^2 G$  sind stetig in  $(\epsilon, u) \in [0, \infty) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ .*

*Beweis.* Wir unterscheiden wieder die Fälle  $N = 1$ ,  $N = 2$  und  $N \geq 3$ .

#### 1. Fall: $N = 1$

Wir beschränken uns auf den Nachweis der Stetigkeit von  $G$ ; die Stetigkeit von  $D_u G$  und  $D_u^2 G$  kann man dank der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  im

wesentlichen mit der selben Rechnung nachweisen.

Stetigkeit für  $\epsilon = 0$ : Für  $(\delta, v) \rightarrow (0, u)$  in  $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R})$  ( $\delta \neq 0$ ), und damit insbesondere  $v \rightarrow u$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$ , gilt

$$\begin{aligned}
& |G(\delta, v) - G(0, u)| \\
& \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\delta) \tilde{g}(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(x)) \right| dx \\
& = \delta^{-2+2\frac{p_2-1}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}} |h(x/\delta)| \frac{\left| \tilde{g}(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(x)) \right|}{\left( \delta^{\frac{2}{p_1-1}} |v(x)| \right)^{p_2+1}} |v(x)|^{p_2+1} dx \\
& \stackrel{\delta \leq 1}{\leq} \delta^{-1+2\frac{p_2-1}{p_1-1}} \|v\|_\infty^{p_2+1} \sup \left\{ \left| \frac{\tilde{g}(s)}{s^{p_2+1}} \right| : s \in [0, \|v\|_\infty] \right\} \int_{\mathbb{R}} |h(x/\delta)| \frac{dx}{\delta} \\
& \stackrel{\|v\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty}{\leq} \delta^{-1+2\frac{p_2-1}{p_1-1}} (2\|u\|_\infty)^{p_2+1} \sup \left\{ \left| \frac{\tilde{g}(s)}{s^{p_2+1}} \right| : s \in [0, 2\|u\|_\infty] \right\} \int_{\mathbb{R}} |h(y)| dy \\
& \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

da der Exponent von  $\delta$  in der vorletzten Zeile nach (3.3)  $-1+2(p_2-1)/(p_1-1) > 0$  erfüllt. Das in der Rechnung auftretende Supremum ist nach (V: $\tilde{g}$ ) endlich.

Stetigkeit für  $\epsilon > 0$ : Für  $(\delta, v) \rightarrow (\epsilon, u)$  in  $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R})$  gilt

$$\begin{aligned}
& |G(\delta, v) - G(\epsilon, u)| \\
& \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\delta) \tilde{g}(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(x)) - \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u(x)) \right| dx \\
& \leq \left\| \tilde{g}(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(\cdot)) \right\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \left| \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\delta) - \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) \right| dx \\
& \quad + \left\| \tilde{g}(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(\cdot)) - \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u(\cdot)) \right\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \left| \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) \right| dx \\
& \rightarrow 0 \quad \text{für } (\delta, v) \rightarrow (\epsilon, u),
\end{aligned}$$

wobei man

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\delta) - \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) \right| dx \xrightarrow{\delta \rightarrow \epsilon} 0$$

durch Approximation von  $h$  in  $L^1(\mathbb{R})$  mit  $C_0^\infty$ -Funktionen zeigen kann.

## 2. Fall: $N = 2$

Der Beweis für diesen Fall stimmt wie schon in Lemma 3.1.11 bis auf geringfügige Änderungen mit dem Beweis für  $N \geq 3$  überein. Wir lassen ihn hier weg.

## 3. Fall: $N \geq 3$

(i) Stetigkeit von  $(\epsilon, u) \mapsto G(\epsilon, u)$ .

Nach (V: $\tilde{g}$ ) und (V: $\tilde{r}_2$ ) existiert eine Zerlegung  $\tilde{g} = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$  von  $\tilde{g}$  in stetige Funktionen  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\tilde{g}_1(t) \leq C_1 |t|^{p_2+1} \quad \text{und} \quad \tilde{g}_2(t) \leq D_1 |t|^{\tilde{p}+1}, \quad (3.24)$$

mit Konstanten  $C_1, D_1 \geq 0$ .

Stetigkeit für  $\epsilon = 0$ : Für  $(\delta, v) \rightarrow (0, u)$  in  $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$  ( $\delta \neq 0$ ) gilt

$$\begin{aligned}
& |G(\delta, v) - G(0, u)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{-2 - \frac{4}{p_1 - 1}} h(x/\delta) [\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2] (\delta^{\frac{2}{p_1 - 1}} v(x)) dx \right| \\
&\stackrel{(3.24)}{\leq} \delta^{-2 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1}} C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(x/\delta)| |v(x)|^{p_2 + 1} dx \\
&\quad + \delta^{-2 + 2\frac{\tilde{p} - 1}{p_1 - 1}} D_1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(x/\delta)| |v(x)|^{\tilde{p} + 1} dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \delta^{-2 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1}} C_1 \|h(\cdot/\delta)\|_{L^{2^*/(2^* - p_2 - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{p_2 + 1} \\
&\quad + \delta^{-2 + 2\frac{\tilde{p} - 1}{p_1 - 1}} D_1 \|h(\cdot/\delta)\|_{L^{2^*/(2^* - \tilde{p} - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{\tilde{p} + 1} \\
&= \delta^{-2 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} + N\frac{2^* - p_2 - 1}{2^*}} C_1 \|h\|_{L^{2^*/(2^* - p_2 - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{p_2 + 1} \\
&\quad + \delta^{-2 + 2\frac{\tilde{p} - 1}{p_1 - 1} + N\frac{2^* - \tilde{p} - 1}{2^*}} D_1 \|h\|_{L^{2^*/(2^* - \tilde{p} - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{\tilde{p} + 1} \\
&\rightarrow 0 \quad \text{für } (\delta, v) \rightarrow (0, u),
\end{aligned}$$

da  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  ( $N \geq 3$ ) stetig eingebettet ist, und die die Exponenten von  $\delta$  in der vorletzten Zeile positiv sind:

$$-2 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} + N\frac{2^* - p_2 - 1}{2^*} > -2 + N\frac{2^* - 2}{2^*} = 2^* - 2 > 0,$$

da der linke Term der obigen Abschätzung in  $p_2$  strikt monoton wächst und  $p_2 > 1$  ist. Die strikte Monotonie folgt dabei aus

$$\frac{N - 2}{2} = \frac{N}{2^*} < \frac{2}{p_1 - 1},$$

was wegen

$$(N - 2)(p_1 - 1) \underset{p_1 < 2^* - 1}{<} (N - 2)(2^* - 2) = 4$$

richtig ist. Analog gilt auch

$$-2 + 2\frac{\tilde{p} - 1}{p_1 - 1} + N\frac{2^* - \tilde{p} - 1}{2^*} > 0.$$



Stetigkeit für  $\epsilon > 0$ : Für  $(\delta, v) \rightarrow (\epsilon, u)$  in  $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$  gilt

$$\begin{aligned}
& |G(\delta, v) - G(\epsilon, u)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\delta) g_1(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(x)) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) g_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u(x)) dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\delta) g_2(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(x)) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) g_2(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u(x)) dx \right| \\
&=: |G_1(\delta, v) - G_1(\epsilon, u)| + |G_2(\delta, v) - G_2(\epsilon, u)|,
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
& |G_1(\delta, v) - G_1(\epsilon, u)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\delta) - \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(x/\epsilon) \right| \left| g_1(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(x)) \right| dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} |h(x/\epsilon)| \left| g_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u(x)) - g_1(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(x)) \right| dx \\
&\stackrel{(3.24),}{\leq} C_1 \left\| \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(\cdot/\delta) - \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(\cdot/\epsilon) \right\|_{L^{2^*/(2^*-p_2-1)}} \delta^{\frac{2p_2+2}{p_1-1}} \|v\|_{L^{2^*}}^{p_2+1} \\
&\quad + \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} \|h(\cdot/\epsilon)\|_{L^{2^*/(2^*-p_2-1)}} \left\| g_1(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u(\cdot)) - g_1(\delta^{\frac{2}{p_1-1}} v(\cdot)) \right\|_{L^{\frac{2^*}{p_2+1}}} \\
&\rightarrow 0 \quad \text{für } (\delta, v) \rightarrow (\epsilon, u),
\end{aligned}$$

wegen der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ , der Stetigkeit des Nemitsky-Operators  $g_2 : L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{\frac{2^*}{p_2+1}}(\mathbb{R}^N)$  und

$$\left\| \delta^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(\cdot/\delta) - \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}} h(\cdot/\epsilon) \right\|_{L^{2^*/(2^*-p_2-1)}} \xrightarrow{\delta \rightarrow \epsilon} 0.$$

Letzteres kann man durch Approximation von  $h$  durch  $C_0^\infty$ -Funktionen in  $L^{2^*/(2^*-p_2-1)}(\mathbb{R}^N)$  nachweisen.

Eine analoge Rechnung liefert auch

$$|G_2(\delta, v) - G_2(\epsilon, u)| \xrightarrow{(\delta, v) \rightarrow (\epsilon, u)} 0,$$

womit die Stetigkeit von  $G$  gezeigt ist.

(ii) Stetigkeit von  $(\epsilon, u) \mapsto D_u G(\epsilon, u)$ .

Die Methode ist ähnlich wie zuvor. Nach (V:g) und (V:r<sub>2</sub>) existiert eine Zerlegung  $g = g_1 + g_2$  von  $g$  in stetige Funktionen  $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$g_1(t) \leq C_1 |t|^{p_2} \quad \text{und} \quad g_2(t) \leq D_1 |t|^{\tilde{p}}, \quad (3.25)$$

mit Konstanten  $C_1, D_1 \geq 0$ .

Stetigkeit für  $\epsilon = 0$ : Für  $(\delta, v) \rightarrow (0, u)$  in  $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$  und beliebige Testfunktionen  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  gilt

$$\begin{aligned}
& |[D_u G(\epsilon, v) - D_u G(0, u)] \varphi| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-2 - \frac{2}{p_1 - 1}} h(x/\epsilon) [g_1 + g_2] (\epsilon^{\frac{2}{p_1 - 1}} v(x)) \varphi(x) dx \right| \\
&\stackrel{(3.25)}{\leq} \epsilon^{-2 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1}} C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(x/\epsilon)| |v(x)|^{p_2} \varphi(x) dx \\
&\quad + \epsilon^{-2 + 2\frac{\tilde{p} - 1}{p_1 - 1}} D_1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(x/\epsilon)| |v(x)|^{\tilde{p}} \varphi(x) dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \epsilon^{-2 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1}} C_1 \|h(\cdot/\epsilon)\|_{L^{2^*/(2^* - p_2 - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{p_2} \|\varphi\|_{L^{2^*}} \\
&\quad + \epsilon^{-2 + 2\frac{\tilde{p} - 1}{p_1 - 1}} D_1 \|h(\cdot/\epsilon)\|_{L^{2^*/(2^* - \tilde{p} - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{\tilde{p}} \|\varphi\|_{L^{2^*}} \\
&= \epsilon^{-2 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} + N\frac{2^* - p_2 - 1}{2^*}} C_1 \|h\|_{L^{2^*/(2^* - p_2 - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{p_2 + 1} \|\varphi\|_{L^{2^*}} \\
&\quad + \epsilon^{-2 + 2\frac{\tilde{p} - 1}{p_1 - 1} + N\frac{2^* - \tilde{p} - 1}{2^*}} D_1 \|h\|_{L^{2^*/(2^* - \tilde{p} - 1)}} \|v\|_{L^{2^*}}^{\tilde{p} + 1} \|\varphi\|_{L^{2^*}} \\
&\rightarrow 0 \quad \text{für } (\epsilon, v) \rightarrow (0, u), \text{ gleichmäßig in } \varphi \text{ mit } \|\varphi\| = 1,
\end{aligned}$$

wegen (3.3) und der stetige Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ .

Stetigkeit für  $\epsilon > 0$ : Dies kann mit ähnlichen Argumenten gezeigt werden, wie wir auch schon zuvor bei der Stetigkeit von  $G$  für  $\epsilon > 0$  verwendet haben. Wir lassen den Beweis hier weg.

(iii) Stetigkeit von  $(\epsilon, v) \mapsto D_u^2 G(\epsilon, v)$ .

Dies folgt mit einer entsprechenden Zerlegung von  $g'$  und analoger Rechnung wie zuvor.  $\square$

**Lemma 3.1.13.** *Es sei  $\theta \mapsto z_\theta := z_0(\cdot + \theta)$ ,  $\mathbb{R}^N \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  die kanonische globale Karte von  $Z$ . Gelten die Voraussetzungen von Satz 3.1.3, so erfüllt das durch (3.9) gegebene Funktional  $G$  ( $G_3$ ), mit*

$$\alpha = 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} + N - 2 > 0$$

(im Fall  $N = 1$  ist  $\alpha > 0$  wegen (3.3)) und

$$\Gamma(z_\theta) = \frac{A_2}{p_2 + 1} z_\theta(0)^{p_2 + 1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx.$$

Genauer gesagt gilt sogar

$$G(\epsilon, z_\theta) = \epsilon^\alpha \Gamma(z_\theta) + o(\epsilon^\alpha), \tag{3.26}$$

$$\nabla_u G(\epsilon, z_\theta) = \begin{cases} O(\epsilon^\alpha) & \text{falls } N = 1 \\ O(\epsilon^{\alpha - \mu}) \text{ für beliebig kleines } \mu > 0 & \text{falls } N = 2 \\ O(\epsilon^{\alpha - \frac{N}{2^*}}) & \text{falls } N \geq 3 \end{cases} \tag{3.27}$$

für  $\epsilon \rightarrow 0$ , gleichmäßig in  $\theta \in \mathbb{R}^N$ . Im Fall  $N \geq 3$  ist  $N/2^* < \alpha/2$ . Der Gradient  $\nabla_u$  ist dabei im Sinne des  $H^1$  – Skalarprodukts zu verstehen, also

$$\langle \nabla_u G(\epsilon, u), \varphi \rangle = D_u G(\epsilon, u) \varphi$$

für alle  $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Bemerkung 3.1.14.** Im Beweis des Lemmas wird keinen Wert darauf gelegt, zu zeigen, dass die angegebenen Ordnungen in (3.27) scharf sind. Erwähnenswert (im Hinblick auf den abstrakten Zugang) ist hierbei nur, dass für  $N \geq 2$   $\nabla_u G(\epsilon, z_\theta) = O(\epsilon^\alpha)$  **nicht** gelten kann (sofern (V:h<sub>2</sub>) gilt), was zur Folge hat, dass (G<sub>5</sub>) nicht erfüllbar ist. Daher können hier die Aussagen von Abschnitt 1.2 über nichtdegenerierte gestörte kritische Punkte und die Verzweigung stetiger Kurven im Mehrdimensionalen leider prinzipiell nicht angewendet werden. Die Annahme  $\nabla_u G(\epsilon, z_\theta) = O(\epsilon^\alpha)$  kann man dabei für  $N \geq 2$  wie folgt zum Widerspruch führen: Für eine beliebige Testfunktion  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  erhält man mit einer ähnlichen Rechnung wie der am Anfang des Beweises von (3.26)

$$DG(\epsilon, z_\theta) \varphi = \epsilon^\alpha A_2 z_\theta(0)^{p_2} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx + R(\epsilon, \varphi), \quad (3.28)$$

mit einem von Restterm  $R$ , der

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|R(\epsilon, \varphi)|}{\epsilon^\alpha} = 0, \quad \text{punktweise für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

erfüllt. Wir betrachten nun speziell eine Folge von Testfunktionen  $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  mit  $\|\varphi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$  und  $\varphi_n(0) \rightarrow \infty$ ; für  $N \geq 2$  gibt es ja bekanntlich  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  mit  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0$ , so dass eine solche Folge  $(\varphi_n)$  tatsächlich existiert. Mit diesen Testfunktionen folgt aus (3.28)

$$\frac{\epsilon^{-\alpha}}{\|\varphi_n\|} |DG(\epsilon, z_\theta) \varphi_n| = \epsilon^{-\alpha} |DG(\epsilon, z_\theta) \varphi_n| \geq \frac{1}{2} \left| A_2 \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx \right| z_\theta(0)^{p_2} \varphi_n(0)$$

solange  $\epsilon \leq \epsilon_0 = \epsilon_0(n)$  ( $\epsilon_0(n)$  ist so zu wählen, dass der Restterm  $R(\epsilon, \varphi_n)$  klein genug ist, für alle  $\epsilon \leq \epsilon_0(n)$ ). Da  $\varphi_n(0)$  beliebig groß wird, widerspricht dies der Beschränktheit von  $\epsilon^{-\alpha} \nabla G(\epsilon, z_\theta)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ .

*Beweis von Lemma 3.1.13.* Wir zeigen zunächst (3.26). Betrachte dazu

$$\begin{aligned}
& \left| \epsilon^{-\alpha} G(\epsilon, z_\theta) - \Gamma(z_\theta) \right| \\
& \stackrel{\substack{\text{Trafo} \\ y=x/\epsilon}}{=} \left| \epsilon^{-\alpha} \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}+N} \int_{\mathbb{R}^N} h(y) \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) dy - \Gamma(z_\theta) \right| \\
& \stackrel{(\text{V}:\tilde{g})}{\leq} \left| \frac{A_2}{p_2+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(y) z_\theta(\epsilon y)^{p_2+1} dy - \Gamma(z_\theta) \right| \\
& \quad + \left| \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-\alpha} \epsilon^{-2-\frac{4}{p_1-1}+N} h(y) \tilde{r}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) dy \right| \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^N} |h(y)| |z_\theta(\epsilon y)^{p_2+1} - z_\theta(0)^{p_2+1}| dy \\
& \quad + \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(y) \frac{\tilde{r}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y))}{\left(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)\right)^{p_2+1}} z_\theta(\epsilon y)^{p_2+1} dy \right| \\
& =: I_1(\epsilon, \theta) + I_2(\epsilon, \theta).
\end{aligned}$$

Da  $\|z_\theta\|_\infty = \|z_0\|_\infty = z_0(0)$  gleichmässig beschränkt ist, folgt mit  $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$  und der Eigenschaft (V: $\tilde{r}_1$ ) des Restterm  $\tilde{r}$

$$I_2(\epsilon, \theta) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \quad \text{gleichmässig in } \theta \in \mathbb{R}^N.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $I_1$  dies ebenfalls erfüllt. Dazu betrachte für  $R > 0$

$$\begin{aligned}
I_1(\epsilon, \theta) &= \int_{|y|>R} |h(y)| |z_\theta(\epsilon y)^{p_2+1} - z_\theta(0)^{p_2+1}| dy \\
&\quad + \int_{|y|\leq R} |h(y)| |z_\theta(\epsilon y)^{p_2+1} - z_\theta(0)^{p_2+1}| dy \\
&\leq 2 \|z_0\|_\infty^{p_2+1} \int_{|y|>R} |h(y)| dy \\
&\quad + \sup_{|y|\leq R} |z_0(\epsilon y + \theta)^{p_2+1} - z_0(\theta)^{p_2+1}| \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\
&=: I_{1a}(R) + I_{1b}(R, \epsilon, \theta)
\end{aligned}$$

Ist nun  $\delta > 0$  beliebig (klein) vorgegeben, so existiert wegen der Integrierbarkeit von  $h$  ein  $R(\delta) > 0$ , so dass  $I_{1a}(R) < \delta/2$ , und da  $z_0$  auf  $\mathbb{R}^N$  gleichmässig stetig ist, gilt für jedes feste  $R > 0$

$$\sup_{|y|\leq R} |z_0(\epsilon y + \theta)^{p_2+1} - z_0(\theta)^{p_2+1}| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

gleichmässig in  $\theta \in \mathbb{R}^N$ , so dass für hinreichend kleines  $\epsilon$  auch  $I_{1b}(R(\delta), \epsilon, \theta) < \delta/2$  ist, gleichmässig in  $\theta \in \mathbb{R}^N$ .

Zu zeigen bleibt (3.27). Im folgenden sei  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  eine beliebige Testfunktion. Mit (V:g) und (V:r<sub>1</sub>) erhält man für beschränkte  $\epsilon$  zunächst

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{-\alpha} |D_u G(\epsilon, z_\theta) \varphi| \\
& \stackrel{(3.20)}{=} \epsilon^{-\alpha-2-\frac{2}{p_1-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x/\epsilon) g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(x)) \varphi(x) dx \right| \\
& \stackrel{y=x/\epsilon}{=} \epsilon^{-\alpha+N-2-\frac{2}{p_1-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(y) g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \varphi(\epsilon y) dy \right| \\
& \stackrel{(V:g)}{\leq} |A_2| \int_{\mathbb{R}^N} |h(y)| z_\theta(\epsilon y)^{p_2} |\varphi(\epsilon y)| dy \\
& \quad + \epsilon^{-\alpha+N-2-\frac{2}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}} |h(y)| \left| r(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \right| |\varphi(\epsilon y)| dy \\
& \leq |A_2| \int_{\mathbb{R}^N} |h(y)| z_\theta(\epsilon y)^{p_2} |\varphi(\epsilon y)| dy \\
& \quad + \int_{\mathbb{R}} |h(y)| \frac{\left| r(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \right|}{\left( \epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y) \right)^{p_2}} z_\theta(\epsilon y)^{p_2} |\varphi(\epsilon y)| dy.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\epsilon^{-\alpha} |D_u G(\epsilon, z_\theta) \varphi| \leq K \int_{\mathbb{R}^N} |h(y)| z_\theta(\epsilon y)^{p_2} |\varphi(\epsilon y)| dy \quad (3.29)$$

für alle  $\epsilon \leq 1$ , mit der Konstanten

$$K := |A_2| + \sup_{|s| \leq \|z_0\|_\infty} \left| \frac{r(s)}{s^{p_2}} \right|.$$

$K$  ist wegen (V:r<sub>1</sub>) endlich. Wir unterscheiden jetzt wieder die Fälle  $N = 1$ ,  $N = 2$  und  $N \geq 3$ .

**1. Fall:**  $N = 1$

Nach (3.29) gilt

$$\epsilon^{-\alpha} |D_u G(\epsilon, z_\theta) \varphi| \leq K \|\varphi\|_\infty \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \|z_0\|_\infty^{p_2}$$

Zusammen mit der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  folgt

$$\frac{\epsilon^{-\alpha}}{\|\varphi\|} |D_u G(\epsilon, z_\theta) \varphi| \leq K_1,$$

mit einer Konstanten  $K_1 \geq 0$ , gleichmäßig für  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  und  $\epsilon \in (0, 1]$ .

**2. Fall:**  $N = 2$

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt aus (3.29) für  $\epsilon \leq 1$  und  $\mu > 0$

$$\begin{aligned}\epsilon^{-\alpha+2\mu} |D_u G(\epsilon, z_\theta)\varphi| &\leq \epsilon^{2\mu} K \|\varphi(\epsilon \cdot)\|_{L^{1/\mu}} \|z_0\|_\infty^{p_2} \|h\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}} \\ &= K \|\varphi\|_{L^{1/\mu}} \|z_0\|_\infty^{p_2} \|h\|_{L^{\frac{1}{1-\mu}}}\end{aligned}$$

Wegen (V:h<sub>1</sub>) ist  $h \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^q(\mathbb{R}^2)$  mit einem  $q > 1$ , so dass  $h \in L^{1/(1-\mu)}(\mathbb{R}^2)$ , solange  $1/(1-\mu) \leq q$ , also  $\mu$  klein genug ist. Zusammen mit der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{1/\mu}(\mathbb{R}^2)$  (für beliebige  $0 < \mu \leq 1/2$ ) erhalten wir

$$\frac{\epsilon^{-\alpha+2\mu}}{\|\varphi\|} |D_u G(\epsilon, z_\theta)\varphi| \leq K_2,$$

mit einer Konstanten  $K_2 \geq 0$ , gleichmäßig für  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  und  $\epsilon \in (0, 1]$ .

### 3. Fall: $N \geq 3$

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt aus (3.29) für  $\epsilon \leq 1$

$$\begin{aligned}\epsilon^{-\alpha+\frac{N}{2^*}} |D_u G(\epsilon, z_\theta)\varphi| &\leq \epsilon^{\frac{N}{2^*}} K \|\varphi(\epsilon \cdot)\|_{L^{2^*}} \|z_0\|_\infty^{p_2} \|h\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}} \\ &= K \|\varphi\|_{L^{2^*}} \|z_0\|_\infty^{p_2} \|h\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}}\end{aligned}$$

Zusammen mit der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  erhalten wir

$$\frac{\epsilon^{-\alpha+\frac{N}{2^*}}}{\|\varphi\|} |D_u G(\epsilon, z_\theta)\varphi| \leq K_3,$$

mit einer Konstanten  $K_3 \geq 0$ , gleichmäßig für  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  und  $\epsilon \in (0, 1]$ . Damit  $(G_3)$  erfüllt ist, muss auch noch  $N/2^* < \alpha/2$  gelten, oder äquivalent

$$\frac{N-2}{2} < \frac{N-2}{2} + \frac{p_2-1}{p_1-1},$$

was wegen  $p_1 > 1$  und  $p_2 > 1$  stets der Fall ist.  $\square$

*Beweis von Satz 3.1.3.* Das ungestörte Funktional  $F$  aus (3.8) erfüllt die Voraussetzungen von Kapitel 2, und die dortigen Aussagen liefern  $(F_0-F_3)$ .  $(G_0-G_3)$  gelten nach Lemma 3.1.11, Lemma 3.1.12 und Lemma 3.1.13.  $\square$

*Beweis von Korollar 3.1.4.* Nach Satz 3.1.3 und (V:h<sub>2</sub>) ist die hinreichende Bedingung für die Verzweigung gestörter kritischer Punkte (bei  $z_0 \in Z$ ) aus Satz 1.1.5 für unser konkretes Funktional (3.10) gegeben. Damit erhalten wir für jedes (hinreichend kleine)  $\epsilon > 0$  einen kritischen Punkt  $u_\epsilon$  von  $F_\epsilon$ , mit  $u_\epsilon \rightarrow z_0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Diese liefern durch

$$\psi_\epsilon(x) := \epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u_\epsilon(\epsilon x) \quad \text{und} \quad \lambda_\epsilon := \epsilon^2$$

automatisch Lösungen  $\psi_\epsilon$  von (VP), zum jeweiligen Parameterwert  $\lambda_\epsilon$ . Da die  $u_\epsilon$  für kleine  $\epsilon$  in  $H^1$  nahe der nichttrivialen Funktion  $z_0$  liegen, sind sie selbst auch nichttrivial, und damit auch die zugehörigen  $\psi_\epsilon$ . Zu zeigen ist nur noch  $\psi_\epsilon \rightarrow 0$  in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Betrachte also

$$\|\psi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \epsilon^{\frac{4}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon(\epsilon x)^2 dx = \epsilon^{\frac{4}{p_1-1}-N} \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon(y)^2 dy$$

Der Exponent  $4/(p_1-1)-N$  von  $\epsilon$  im letzten Ausdruck ist positiv, da  $p_1 < 4/N+1$  ist, so dass mit  $\|u_\epsilon\|_{L^2}^2 \rightarrow \|z_0\|_{L^2}^2$

$$\|\psi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0$$

folgt. Genauso bekommen wir

$$\|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \epsilon^{\frac{4}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\epsilon(\epsilon x)|^2 dx = \epsilon^{\frac{4}{p_1-1}+2-N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 dy$$

wobei  $2 - N + 4/(p_1 - 1) > 2 > 0$  für  $p_1 < 4/N + 1$ , so dass auch

$$\|\nabla\psi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0.$$

□

Kommen wir nun zu dem Fall, wo (V:h<sub>2</sub>) nicht zutrifft, also  $\int h(x) dx = 0$  ist. Die Lemma 3.1.13 entsprechende Aussage in der Situation von Satz 3.1.8 lautet wie folgt:

**Lemma 3.1.15.** *Es sei  $\theta \mapsto z_\theta := z_0(\cdot + \theta)$ ,  $\mathbb{R}^N \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$  die kanonische globale Karte von  $Z$ . Gelten die Voraussetzungen von Satz 3.1.8, so erfüllt das durch (3.9) gegebene Funktional  $G$  ( $G_3$ ), mit*

$$\alpha := N - 1 + 2\frac{p_2 - 1}{p_1 - 1} > 0$$

und

$$\Gamma(z_\theta) := -A_2 z_\theta(0)^{p_2} \left\langle \nabla_\theta z_\theta(\theta), \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{h}(x) dx \right\rangle_{\mathbb{R}^N}.$$

Genauer gesagt gilt sogar

$$G(\epsilon, z_\theta) = \epsilon^\alpha \Gamma(z_\theta) + o(\epsilon^\alpha), \quad (3.30)$$

$$\nabla_u G(\epsilon, z_\theta) = O(\epsilon^{\alpha-N/2}) \quad (3.31)$$

für  $\epsilon \rightarrow 0$ , gleichmäßig in  $\theta \in \mathbb{R}^N$ .

*Beweis.* Als erstes zeigen wir (3.30). Der Beweis läuft ähnlich dem entsprechenden Beweisabschnitt von Lemma 3.1.13, wobei durch eine partielle Integration ein zusätzlicher Vorfaktor  $\epsilon$  entsteht:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{-\alpha} G(\epsilon, z_\theta) &= \epsilon^{-\alpha-2+\frac{4}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}^N} h(x/\epsilon) \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(x)) dx \\
&= \epsilon^{-\alpha+N-2+\frac{4}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}^N} h(y) \tilde{g}(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) dy \\
&= -\epsilon^{-\alpha+N-2+\frac{4}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \left\langle \tilde{h}(y), g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \epsilon^{\frac{2}{p_1-1}+1} \nabla z_\theta(\epsilon y) \right\rangle_{\mathbb{R}^N} dy \\
&= -\epsilon^{-\frac{2p_2}{p_1-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \left\langle \tilde{h}(y), g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \nabla z_\theta(\epsilon y) \right\rangle_{\mathbb{R}^N} dy.
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung folgt dabei mit dem Satz von Gauß. Der restliche Beweis von (3.30) verläuft völlig analog dem von (3.26) in Lemma 3.1.13, wobei (V:g) anstatt (V: $\tilde{g}$ ) zu verwenden ist.

Zu (3.31): Im folgenden sei  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  eine beliebige Testfunktion.

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{-\alpha} |D_u G(\epsilon, z_\theta) \varphi| \\
&\stackrel{y=x/\epsilon}{=} \epsilon^{-\alpha+N-2-\frac{2}{p_1-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(y) g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \varphi(\epsilon y) dy \right| \\
&\stackrel{\text{(V:h}_3\text{)}}{\stackrel{\text{Gauß}}{=}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-\alpha+N-1} \left\langle \tilde{h}(y), g'(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \nabla z_\theta(\epsilon y) \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \varphi(\epsilon y) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-\alpha+N-1-\frac{2}{p_1-1}} \left\langle \tilde{h}(y), g(\epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} z_\theta(\epsilon y)) \nabla \varphi(\epsilon y) \right\rangle_{\mathbb{R}^N} dy \right|
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\epsilon^{-\alpha} |D_u G(\epsilon, z_\theta) \varphi| &\leq K_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left| \tilde{h}(y) \right| |z_\theta(\epsilon y)^{p_2-1} \nabla z_\theta(\epsilon y)| |\varphi(\epsilon y)| dy \\
&\quad + K_2 \int_{\mathbb{R}^N} \left| \tilde{h}(y) \right| |z_\theta(\epsilon y)^{p_2}| |\nabla \varphi(\epsilon y)| dy
\end{aligned} \tag{3.32}$$

für alle  $\epsilon \leq 1$ , denn nach (V:g) und (V:g') gilt für beschränkte  $t$ , etwa  $|t| \leq \|z_0\|_\infty = \|z_\theta\|_\infty$

$$|g(t)| \leq K_1 |t^{p_2}| \quad \text{und} \quad |g'(t)| \leq K_2 |t^{p_2-1}|,$$

mit Konstanten  $K_1, K_2 \geq 0$ . Mit einer Hölderungleichung erhält man aus (3.32) schließlich

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{-\alpha} |D_u G(\epsilon, z_\theta) \varphi| \\
&\leq K_1 \|z_0^{p_2-1} |\nabla z_0|\|_\infty \|\tilde{h}\|_{L^2} \|\varphi(\epsilon \cdot)\|_{L^2} + K_2 \|z_0^{p_2}\|_\infty \|\tilde{h}\|_{L^2} \|\nabla \varphi(\epsilon \cdot)\|_{L^2} \\
&= \epsilon^{-N/2} K_1 \|z_0^{p_2-1} |\nabla z_0|\|_\infty \|\tilde{h}\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \epsilon^{-N/2} K_2 \|z_0^{p_2}\|_\infty \|\tilde{h}\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} \\
&\leq \epsilon^{-N/2} K_3 \|\varphi\|_{H^1},
\end{aligned}$$



mit einer von  $\epsilon$ ,  $\varphi$  und  $\theta$  unabhängigen Konstanten  $K_3$ , was behauptet war. Damit  $(G_3)$  erfüllt ist, muss auch noch  $N/2 < \alpha/2$  gelten, was äquivalent ist zur Voraussetzung (3.14) von Satz 3.1.8.  $\square$

*Beweis von Satz 3.1.8.* Wie zuvor erfüllt das ungestörte Funktional  $F$  aus (3.8) die Voraussetzungen von Kapitel 2, und damit  $(F_0-F_3)$ .  $(G_0-G_2)$  gelten wieder nach Lemma 3.1.11 und Lemma 3.1.12,  $(G_3)$  folgt aus Lemma 3.1.15.  $\square$

*Beweis von Korollar 3.1.9.* Um Satz 1.1.5 anwenden zu können, müssen wir zusätzlich zu den in Satz 3.1.8 nachgeprüften Voraussetzungen noch nachweisen, dass die durch (3.16) gegebene Funktion  $\theta \mapsto \Gamma(z_\theta)$  Hügel oder Täler (im Sinne von Definition 1.1.3) hat. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass der Richtungsvektor  $v = \int \tilde{h}(x) dx$  der erste Einheitsvektor ist, also  $v = e_1$  (ein Skalierungsfaktor ist offensichtlich ohne Bedeutung, und aufgrund der Radialsymmetrie von  $z_0$  auch Rotation des Koordinatensystems). Setze nun

$$\gamma(\theta) := z_0(\theta)^{p_2} \partial_1 z_0(\theta),$$

so dass  $\Gamma(z_\theta) = B\gamma(\theta)$ , mit einem konstanten Faktor  $B \neq 0$ .  $\gamma$  nimmt ein positives globales Maximum und ein negatives globales Minimum an, denn  $\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} \gamma(\theta) = 0$ ,  $\gamma(0) = 0$  und

$$\partial_1 \gamma(0) = z_0(0)^{p_2} \partial_{11} z_0(0) = z_0(0)^{p_2} \frac{z_0(0) - A_1 z_0(0)^{p_1}}{N} < 0$$

nach Satz 2.1.5 (für  $N \geq 2$ ) bzw. Satz 2.2.1 (für  $N = 1$ ). Seien nun

$$\begin{aligned} U_{\max} &:= \{ \theta \in \mathbb{R}^N : \gamma(\theta) = \max \gamma \}, \\ U_{\min} &:= \{ \theta \in \mathbb{R}^N : \gamma(\theta) = \min \gamma \} \end{aligned}$$

die Mengen der Punkte, auf denen  $\gamma$  seinen maximalen bzw. minimalen Wert annimmt. Da  $\gamma$  stetig ist und im Unendlichen gegen 0 konvergiert, sind die Mengen

$$\begin{aligned} V^+ &:= \left\{ \theta \in \mathbb{R}^N : \gamma(\theta) > \frac{1}{2} \max \gamma \right\}, \\ V^- &:= \left\{ \theta \in \mathbb{R}^N : \gamma(\theta) < \frac{1}{2} \min \gamma \right\} \end{aligned}$$

disjunkte, offene und beschränkte Obermengen von  $U_{\max}$  bzw.  $U_{\min}$ . Offensichtlich hat  $\gamma$  einen Hügel über  $V^+$  und ein Tal über  $V^-$ . Nach Satz 1.1.5 existieren nun für hinreichend kleine  $\epsilon$  kritischer Punkte  $u_\epsilon^+$  und  $u_\epsilon^-$  von  $F_\epsilon$  mit

$$\text{dist}(u_\epsilon^+; Z_{\max}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{und} \quad \text{dist}(u_\epsilon^-; Z_{\min}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0,$$

wobei

$$Z_{\max} := \{z_\theta : \theta \in U_{\max}\} \quad \text{und entsprechend} \quad Z_{\min} := \{z_\theta : \theta \in U_{\min}\}$$

Da  $U_{\max}$  und  $U_{\min}$  und damit auch  $Z_{\max}$  und  $Z_{\min}$  kompakt und disjunkt sind (in  $\mathbb{R}^N$  bzw.  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ), haben  $Z_{\max}$  und  $Z_{\min}$  endlichen Abstand voneinander, weshalb die  $u_\epsilon^+$  und  $u_\epsilon^-$  für kleine  $\epsilon$  verschieden sind. Da  $\text{dist}(0; Z) > 0$  ist, sind sie auch nichttrivial. Ganz analog zum Beweis von Korollar 3.1.4 liefern sie zwei verschiedene Folgen

$$\psi_\epsilon^+(x) := \epsilon^{\frac{2}{p-1}} u_\epsilon^+(\epsilon x) \quad \text{und} \quad \psi_\epsilon^-(x) := \epsilon^{\frac{2}{p-1}} u_\epsilon^-(\epsilon x)$$

nichttrivialer Lösungen von (VP) mit zugehörigem Parameter  $\lambda_\epsilon := \epsilon^2$ , die bei  $\lambda = 0$  von der trivialen Lösung verzweigen.  $\square$

*Beweis von Satz 3.1.10.* Die Behauptung folgt mit der Anwendung von Satz 1.2.3 auf das Funktional  $F_\epsilon$  aus (3.10). Man erhält dann eine stetige Kurve von kritischen Punkten  $\epsilon \mapsto u_\epsilon$  von kritischen Punkten von  $F_\epsilon$ , mit  $u_0 = z_0$ , der positive radialsymmetrische kritische Punkt von  $F$ . Genau wie im Beweis von Korollar 3.1.4 erhalten wir daraus Lösungen

$$\psi_\epsilon(x) := \epsilon^{\frac{2}{p_1-1}} u_\epsilon(\epsilon x) \quad \text{und} \quad \lambda_\epsilon := \epsilon^2$$

von (VP), die bei  $\lambda = 0$  von der trivialen Lösung verzweigen. Sie bilden offensichtlich wie die  $u_\epsilon$  eine stetige Kurve.

Es gilt nun die Voraussetzungen von Satz 1.2.3 nachzuprüfen.  $(F_0-F_3)$  und  $(G_0-G_3)$  gelten nach Satz 3.1.3. Das globale Extremum von

$$\theta \mapsto \Gamma(z_\theta) = \frac{A_2}{p_2 + 1} z_0(\theta)^{p_2+1} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx$$

ist dabei nichtdegeneriert; beachte  $z_0(0) > 0$ ,  $z_0'(0) = 0$  und  $z_0''(0) < 0$ . Aufgrund von (3.17) ist  $t \mapsto |t|^{p_1+1}$  dreimal stetig differenzierbar, womit wie gehabt  $F \in C^3$  folgt, so dass  $(F_0')$  gilt. Wegen (3.18) ist die Stammfunktion  $\tilde{g}$  von  $g$  dreimal stetig differenzierbar, womit wir auch  $G(\epsilon, \cdot) \in C^3$  (für alle  $\epsilon \geq 0$ ) erhalten. Mit der gleichen Methode wie in Lemma 3.1.12 folgt mit Hilfe von (3.19) auch die Stetigkeit von  $(\epsilon, u) \mapsto D_u^3 G(\epsilon, u)$ , womit wir auch  $(G_4)$  gezeigt haben. Zuletzt zu  $(G_5)$ : nach Lemma 3.1.13 haben wir schon  $\nabla G(\epsilon, z_\theta) = O(\epsilon^\alpha)$ , gleichmäßig in  $\theta \in \mathbb{R}$ , wobei wieder  $\alpha = 2(p_2 - 1)/(p_1 - 1) - 1$  ist. Mit dem gleichen Beweis kann man auch  $D\nabla G(\epsilon, z_\theta) = O(\epsilon^\alpha)$  zeigen. Genau wie im Beweis von (3.26) in Lemma 3.1.13 folgt schließlich auch noch

$$\begin{aligned} DG(\epsilon, z_\theta) z_\theta'' &= \epsilon^\alpha \gamma(\theta) + o(\epsilon^\alpha), \\ D^2 G(\epsilon, z_\theta) [z_\theta', z_\theta'] &= \epsilon^\alpha \tilde{\gamma}(\theta) + o(\epsilon^\alpha), \end{aligned}$$

für  $\epsilon \rightarrow 0$ , gleichmäßig in  $\theta \in \mathbb{R}$ . Dabei ist

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= A_2 z_0(\theta)^{p_2} z_0''(\theta) \int_{\mathbb{R}} h(x) dx, \\ \tilde{\gamma}(\theta) &= p_2 A_2 z_0(\theta)^{p_2-1} z_0'(\theta)^2 \int_{\mathbb{R}} h(x) dx.\end{aligned}$$

□

## 3.2 Störung elliptischer Ganzraumprobleme mit Variationsstruktur

### 3.2.1 Problemstellung

Wir wollen jetzt ein typischen Störungsproblem über dem Ganzraum behandeln. Es sei eine Gleichung vom folgenden Typ gegeben:

$$-\Delta u + f(u) + \epsilon h(x)g(u) = 0 \quad (\text{schwach}), \quad (\text{SP})$$

für  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ . Dabei ist  $x \in \mathbb{R}^N$  die Ortsvariable, und  $\epsilon \in \mathbb{R}$  ist ein Störparameter. Wir interessieren uns hier für Lösungen von (SP) für kleine Werte von  $\epsilon$ . Für  $\epsilon = 0$  ist die Gleichung translationsinvariant, ist dagegen  $\epsilon \neq 0$ , so bricht die Funktion  $h$  diese Symmetrie (außer  $h$  ist konstant).

Die Methode zum Nachweis von gestörten Lösungen von (SP) fußt auf dem in Kapitel 1 vorgestellten abstrakten Zugang. Der Fall  $f(u) = g(u) = |u|^{p-1}u$  (für  $N \geq 3$ ) wurde von A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero und I. Peral in [5] behandelt. Der Beweis für die oben angegebene Klasse von Problemen, der im folgenden ausgeführt wird, basiert auf denselben Methoden. Darüberhinaus wird ein in Unterabschnitt 3.2.4 ein konkretes Beispiel diskutiert, welches eine Anwendung von Satz 1.2.3 zulässt, womit gezeigt werden kann, dass die verzweigenden gestörten Lösungen von (SP) eine stetige Kurve bilden.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle die Voraussetzungen von Kapitel 2, also  $(f_0-f_4)$ . Ein konkretes Beispiel für  $f$  ist der Prototyp  $t \mapsto -t + |t|^{p_1-1}t$ , mit dem Exponenten  $p_1 \in (1, 2^* - 1)$ . (SP) hat Variationsstruktur, und ein zugehöriges Potential ist

$$F_\epsilon(u) := F(u) + \epsilon G(u) \quad (\text{für } u \in H^1(\mathbb{R}^N)), \quad (3.33)$$

mit

$$F(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \tilde{f}(u) dx, \quad (3.34)$$

$$G(u) := \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \tilde{g}(u) dx. \quad (3.35)$$

$\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  sind dabei Stammfunktionen von  $f$  bzw.  $g$ :

$$\tilde{f}(t) := \int_0^t f(s) ds \quad \text{und} \quad \tilde{g}(t) := \int_0^t g(s) ds.$$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  müssen geeignete Bedingungen erfüllen, die sicherstellen, dass das Funktional  $G$  aus (3.35) über  $H^1(\mathbb{R}^N)$  wohldefiniert und zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist;  $(f_0)$  und  $(f_4)$  garantieren dies für  $F$ . Wir fordern folgendes:

$$g \in C^1(\mathbb{R}). \tag{S:g_1}$$

Im Falle  $N \geq 2$  erfülle  $g$  die Wachstumsbedingungen

$$\begin{aligned} |g(t)| &\leq C_1 |t|^r + C_2, \\ |g'(t)| &\leq C_3 |t|^{r-1} + C_4, \end{aligned} \tag{S:g_2}$$

mit einem Exponenten  $r \in [1, 2^* - 1)$  (für  $N \geq 3$ , zur Erinnerung:  $2^* = 2N/(N - 2)$ ) bzw.  $r \in [1, \infty)$  (für  $N = 2$ ), und Konstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4 \geq 0$  unabhängig von  $t \in \mathbb{R}$ . Die symmetriebrechende Funktion  $h$  genüge

$$\begin{aligned} h &\in L^{q_1}(\mathbb{R}^N) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^N), \text{ mit zwei Exponenten} \\ (q_1, q_2) &\begin{cases} \in [1, \infty) \times [1, \infty) & \text{falls } N = 1, \\ \in (1, \infty) \times (1, \infty) & \text{falls } N = 2, \\ = \left( \frac{2^*}{2^* - 1}, \frac{2^*}{2^* - (r + 1)} \right) & \text{falls } N \geq 3. \end{cases} \end{aligned} \tag{S:h_1}$$

**Bemerkung 3.2.1.** *Unter diesen Voraussetzungen ist  $G$  wohldefiniert und  $C^2$ . Dies ist für  $N = 1$  mit der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_B^0(\mathbb{R})$  zu beweisen. Für  $N \geq 2$  verwendet man die Hölderungleichung und die Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$  (stetig für  $q \in [2, \infty)$ ) bzw.  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  (stetig für  $q \in [2, 2^*]$  und  $N \geq 3$ ) (siehe Lemma 3.2.4). Andere Kombinationen von Wachstumsbedingungen an  $g$  und Integrierbarkeitseigenschaften von  $h$  sind sicher auch möglich - geeignete Verschärfung von (S:g<sub>2</sub>) ermöglicht Abschwächung von (S:h<sub>1</sub>) und umgekehrt. Ist zum Beispiel  $C_2 = C_4 = 0$ , so kommt man (bei der Regularität von  $G$ ) ohne die Forderung  $h \in L^{q_1}$  aus; dann genügt  $h \in L^{q_2}$ . In den oben angegebenen Bedingungen wird Wert auf die Anwendbarkeit auf eine große Klasse von Funktionen  $g$  gelegt, auf Kosten von vergleichsweise starken Forderungen an  $h$ .*

### 3.2.2 Einbettung in den abstrakten Rahmen und Existenz gestörter Lösungen

Das Funktional  $F$  passt nach Voraussetzung in die in Kapitel 2 behandelte Klasse. Nach Satz 2.2.1 bzw. Satz 2.1.5 (für  $N = 1$  bzw.  $N \geq 2$ ) besitzt die ungestörte Gleichung

$$-\Delta u + f(u) = 0 \quad (\text{schwach}), \quad (3.36)$$

(dies ist die Euler-Lagrange-Gleichung zum ungestörten Potential  $F$ ) dann eine positive, radialsymmetrische Lösung  $z_0 \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^3(\mathbb{R}^N)$ , deren einziger kritischer Punkt der Ursprung ist, und die im Unendlichen exponentiell abfällt (mitsamt ihren Ableitungen). Des weiteren erzeugt  $z_0$  durch Translation eine  $N$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit

$$Z := \{z_\theta := z_0(\cdot + \theta) : \theta \in \mathbb{R}^N\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$$

von Lösungen von (3.36), also kritischen Punkten von  $F$ . Nach den Aussagen von Kapitel 2 erfüllt  $F$  (zusammen mit  $Z$ ) ( $F_0$ - $F_3$ ). Wir streben die Anwendung von Satz 1.1.5 an. Die Voraussetzungen ( $G_0$ - $G_3$ ) sind erfüllt, mit  $\alpha = 1$  und

$$\Gamma(z_\theta) := G(z_\theta). \quad (3.37)$$

Zu ( $G_0$ ) siehe dabei Lemma 3.2.4, der Rest ist offensichtlich. Außerdem ist Satz 1.1.6 anwendbar, so dass Verzweigung gestörter kritischer Punkte (von  $F_\epsilon$ ) aus  $Z$  nur bei kritischen Punkten von  $\theta \mapsto \Gamma(z_\theta)$  möglich ist. Wir wollen nun nachweisen, dass  $\Gamma$  einen Hügel (oder ein Tal) über einer offenen, beschränkten Teilmenge von  $Z$  hat. Satz 1.1.5 liefert dann die Existenz von Lösungen von (SP) in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , nahe  $Z$ .

**Satz 3.2.2 (Existenz von Lösungen von (SP) für kleine  $\epsilon$ ).**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle die Bedingungen ( $f_0$ - $f_4$ ) aus Kapitel 2. Außerdem gelte ( $S:g_1$ ), ( $S:g_2$ ) und ( $S:h_1$ ).  $h$  sei nicht konstant und  $g(z_0)$  nicht identisch 0. Dann besitzt die Gleichung (SP) für jedes  $\epsilon \in (-\epsilon_0, +\epsilon_0)$  (mit einem hinreichend kleinen  $\epsilon_0 > 0$ ) eine Lösung  $u_\epsilon$  in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , und diese Lösungen verzweigen von der Lösungsmannigfaltigkeit  $Z$  des ungestörten Problems (3.36), im Sinne von

$$\text{dist}(u_\epsilon; Z_1) \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \quad (3.38)$$

(Distanz in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ), mit einer geeigneten kompakten Teilmenge  $Z_1 \subset Z$ .

**Bemerkung 3.2.3.** Satz 3.2.2 ist genauso anwendbar, wenn man in (SP)  $f$  durch  $\hat{f} : t \mapsto -f(-t)$  und  $g$  durch  $\hat{g} : t \mapsto -g(-t)$  ersetzt, solange auch  $\hat{f}$  die Voraussetzungen von Kapitel 2 erfüllt (dies ist zum Beispiel offensichtlich für ungerades  $f$  der Fall). Die zugehörige Gleichung ist dann

$$\Delta v - f(-v) - \epsilon g(-v) = 0 \quad \text{schwach.} \quad (\text{SP}')$$

Die Funktion  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  ist Lösung von (SP') genau dann, wenn  $-u$  Lösung von (SP) ist. Man erhält daher zusätzlich gestörte Lösungen  $-\hat{u}_\epsilon$  von (SP), die gegen  $\hat{Z}$  konvergieren ( $\text{dist}(-\hat{u}_\epsilon; \hat{Z}) \rightarrow 0$ ), wobei  $\hat{z}_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$  die radialsymmetrische positive Lösung von (SP') für  $\epsilon = 0$  ist, und  $\hat{Z}$  die davon aufgespannte Lösungsmannigfaltigkeit. Ist speziell  $f$  ungerade, so ist  $\hat{z}_0 = -z_0$  und  $\hat{Z} = -Z$ .

Des weiteren existieren gestörte Lösungen nahe der trivialen Lösung  $u = 0$  des ungestörten Problems  $\Delta u + f(u) = 0$ , die mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen nachgewiesen werden können: betrachte dazu die Gleichung

$$\nabla F_\epsilon(u) = 0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

um ihre Lösung  $(\epsilon = 0, u = 0) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ . Wegen  $f'(0) < 0$  und

$$\langle D\nabla F_0(0)\varphi, \eta \rangle_{H^1} = \int [-\langle \nabla\varphi, \nabla\eta \rangle_{\mathbb{R}^N} + f'(0)\varphi\eta] dx$$

ist  $D\nabla F_0(0) \in L(H^1, H^1)$  offensichtlich negativ definit, also auch injektiv mit stetiger Umkehrabbildung. Insbesondere ist ihr Bild abgeschlossen, und die Surjektivität folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich, weil  $D\nabla F_0(0)$  symmetrisch ist.

Sind  $F$  und  $G$  dreimal stetig differenzierbar, so sind auch das abstrakte Resultat zur Verzweigung nichtdegenerierter kritischer Punkte (Satz 1.2.3) anwendbar, sofern man nichtdegenerierte kritische Punkte von  $\Gamma$  kennt. Dies setzt natürlich genauere Kenntnis der Eigenschaften von  $h$ ,  $g$  und  $z_0$  voraus. Siehe dazu das Beispiel in Unterabschnitt 3.2.4.

### 3.2.3 Beweis von Satz 3.2.2

**Lemma 3.2.4 (Wohldefiniertheit und Regularität von  $G$ ).** Sind  $(S:g_1)$ ,  $(S:g_2)$  und  $(S:h_1)$  erfüllt, so ist das durch (3.35) gegebene Funktional  $G$  auf  $H^1(\mathbb{R}^N)$  wohldefiniert und zweimal stetig Fréchet-differenzierbar.

*Beweis.* Wir beweisen hier nur exemplarisch die Stetigkeit von  $G$  und  $DG$ . Wohldefiniertheit folgt implizit, und der Beweise zur Stetigkeit von  $D^2G$  kann mit den gleichen Argumenten wie im Nachweis der Stetigkeit von  $DG$  geführt werden. Die Existenz der jeweiligen Ableitung folgt mit denselben Abschätzungen, wie sie auch im Beweis der Stetigkeit vorkamen. Wir unterscheiden wie immer die Fälle  $N = 1$ ,  $N = 2$  und  $N \geq 3$ .

**1. Fall:**  $N = 1$

Sei  $u \in H^1(\mathbb{R})$  gegeben, und eine Folge  $(v)$  mit  $v \rightarrow u$  in  $H^1(\mathbb{R})$ . Wegen der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_B^0(\mathbb{R})$  können wir annehmen, dass  $\|v\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$  ist.

Stetigkeit von  $G$ : Zu zeigen ist  $G(v) \rightarrow G(u)$ . Da  $g$  stetig ist, erfüllt die Stammfunktion  $\tilde{g}$

$$|\tilde{g}(t)| = \left| \int_0^t g(s) ds \right| \leq C_0 |t| \quad (3.39)$$

für alle beschränkten  $t$  (etwa  $|t| \leq 2\|u\|_\infty$ ), mit einer Konstanten  $C_0 \geq 0$ . Ist nun  $q_1 > 1$  ( $q_1$  ist der Exponent aus (S: $h_1$ )), so kann man wie folgt argumentieren:

$$\begin{aligned} |G(u) - G(v)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} h(x) [\tilde{g}(u(x)) - \tilde{g}(v(x))] dx \right| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|h\|_{L^{q_1}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\tilde{g}(u(x)) - \tilde{g}(v(x))|^{\tilde{q}_1} dx \right)^{\frac{1}{\tilde{q}_1}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{q}_1 := \frac{q_1}{q_1-1}$ . Wegen der Wachstumsbedingung (3.39) ist nämlich der Nemitsky-Operator  $g : L^{\tilde{q}_1}(\mathbb{R}) \rightarrow L^{\tilde{q}_1}(\mathbb{R})$  stetig, und nach (S: $h_1$ ) gilt  $\tilde{q}_1 \geq 2$ , so dass  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\tilde{q}_1}(\mathbb{R})$  stetig eingebettet ist.

Ist dagegen  $q_1 = 1$ , und damit  $h \in L^1(\mathbb{R})$ , so folgt die Stetigkeit (ohne Verwendung einer Hölderungleichung) direkt aus der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_B^0(\mathbb{R})$ .

Stetigkeit von  $DG$ : Zu zeigen ist  $DG(v) \rightarrow DG(u)$ . Ist  $q_1 = 1$  (der Exponent aus (S: $h_1$ )), so folgt die Stetigkeit von  $DG$  direkt aus der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_B^0(\mathbb{R})$  und der gleichmäßigen Stetigkeit von  $g$  auf beschränkten Gebieten.

Ist dagegen  $q_1 > 1$ , so kann man wie folgt argumentieren: Offenbar gilt

$$|g(t)| \leq C_0 \quad (3.40)$$

für alle beschränkten  $t$  (etwa  $|t| \leq 2\|u\|_\infty$ ), mit einer Konstanten  $C_0 \geq 0$ . Es sei jetzt eine Testfunktionen  $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$  mit  $\|\varphi\| = 1$  gegeben. Für beliebiges  $\delta > 0$  ist

$$\begin{aligned} &|(DG(u) - DG(v)) \varphi| \\ &\leq \int_{\{|u-v| \leq \delta\}} |h| |g(u) - g(v)| |\varphi| dx + 2C_0 \int_{\{|u-v| > \delta\}} |h| |\varphi| dx \\ &\stackrel{(3.40)}{\leq} \sup \{ |g(U) - g(V)| : |U|, |V| \leq 2\|u\|_\infty, |U - V| \leq \delta \} \|h\|_{L^{q_1}} \|\varphi\|_{L^{\tilde{q}_1}} \\ &\quad + C_0 \|h\|_{L^{q_2}} \text{Vol}(\{|u - v| > \delta\})^{\frac{r}{2r}} \|\varphi\|_{L^{2^*}}. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $g_1$  auf beschränkten Gebieten gilt

$$\sup \{ |g_1(U) - g_1(V)| : |U|, |V| \leq 2 \|u\|_\infty, |U - V| \leq \delta \} \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0,$$

so dass der erste Summand beliebig klein gewählt werden kann. Für jedes  $\delta > 0$  haben wir außerdem

$$\text{Vol}(\{|u - v| > \delta\}) \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}),$$

womit auch der zweite Summand klein wird. Insgesamt folgt

$$|(DG(u) - DG(v)) \varphi| \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N),$$

gleichmäßig in  $\varphi$ .

## 2. Fall: $N \geq 3$

Sei  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  gegeben, und eine Folge  $(v)$  mit  $v \rightarrow u$  in  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

Stetigkeit von  $G$ : Zu zeigen ist  $G(v) \rightarrow G(u)$ . Aus der Wachstumsbedingung (S: $g_2$ ) für  $g$  folgt für dessen Stammfunktion

$$|\tilde{g}(t)| = \left| \int_0^t g(s) ds \right| \leq C_1 |t|^{r+1} + C_2 |t|,$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Deshalb können wir  $\tilde{g}$  in zwei stetige Teilfunktionen  $\tilde{g} = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$  zerlegen, die

$$|\tilde{g}_1(t)| \leq C_1 |t|^{r+1} \quad \text{und} \quad |\tilde{g}_2(t)| \leq C_2 |t| \quad (3.41)$$

erfüllen. Weiter erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |G(u) - G(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |h(x)| |\tilde{g}_1(u(x)) - \tilde{g}_1(v(x))| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} |h(x)| |\tilde{g}_2(u(x)) - \tilde{g}_2(v(x))| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|h\|_{L^{q_2}} \|\tilde{g}_1(u) - \tilde{g}_1(v)\|_{L^{2^*/(r+1)}} + \|h\|_{L^{q_1}} \|\tilde{g}_2(u) - \tilde{g}_2(v)\|_{L^{2^*}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

Wegen den Wachstumsbedingungen (3.41) sind nämlich die Nemitsky-Operatoren  $\tilde{g}_1 : L^{2^*}(\mathbb{R}) \rightarrow L^{2^*/(r+1)}(\mathbb{R})$  und  $\tilde{g}_2 : L^{2^*}(\mathbb{R}) \rightarrow L^{2^*}(\mathbb{R})$  stetig, und  $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{2q_1}(\mathbb{R}) \cap L^{2^*}(\mathbb{R})$  ist stetig eingebettet.

Stetigkeit von  $DG$ : Zu zeigen ist  $DG(v) \rightarrow DG(u)$ . Wegen (S: $g_2$ ) können wir  $g$  in zwei stetige Summanden  $g_1, g_2$  zerlegen, mit

$$|g_1(s)| \leq A_1 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g_1(s) = 0 \text{ für } |s| \geq 2, \quad (3.42)$$

$$|g_2(s)| \leq A_2 |s|^r \text{ für alle } s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g_2(s) = 0 \text{ für } |s| \leq 1, \quad (3.43)$$



wobei  $A_1$  und  $A_2$  reelle Konstanten sind. Es sei jetzt eine Testfunktionen  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  mit  $\|\varphi\| = 1$  gegeben. Betrachte

$$\begin{aligned} & |(DG(u) - DG(v))\varphi| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} |h| |g_1(u) - g_1(v)| |\varphi| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |h| |g_2(u) - g_2(v)| |\varphi| dx \\ & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} |h| |g_1(u) - g_1(v)| |\varphi| dx + \|h\|_{L^{q_2}} \|g_2(u) - g_2(v)\|_{L^{2^*/r}} \|\varphi\|_{L^{2^*}} \\ & =: S_1(u, v)\varphi + S_2(u, v)\varphi. \end{aligned}$$

Aufgrund der Wachstumsbedingung in (3.43) ist der Nemitsky-Operator  $g_2 : L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2^*/r}(\mathbb{R}^N)$  stetig, und mit der stetigen Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  folgt

$$S_2(u, v)\varphi \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N),$$

gleichmäßig in  $\varphi$ . Zu zeigen bleibt dies für  $S_1$ . Für beliebiges  $\delta > 0$  gilt hier

$$\begin{aligned} & S_1(u, v)\varphi \\ & \leq \int_{\{|u-v| \leq \delta\}} |h| |g_1(u) - g_1(v)| |\varphi| dx + 2A_1 \int_{\{|u-v| > \delta\}} |h| \cdot 1 \cdot |\varphi| dx \\ & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sup \{|g_1(U) - g_1(V)| : U, V \in \mathbb{R}, |U - V| \leq \delta\} \|h\|_{L^{q_1}} \|\varphi\|_{L^{2^*}} \\ & \quad + 2A_1 \|h\|_{L^{q_2}} \text{Vol}(\{|u - v| > \delta\})^{\frac{r}{2^*}} \|\varphi\|_{L^{2^*}}. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $g_1$  gilt

$$\sup \{|g_1(U) - g_1(V)| : U, V \in \mathbb{R}, |U - V| \leq \delta\} \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0,$$

so dass der erste Summand beliebig klein gewählt werden kann. Für jedes  $\delta > 0$  haben wir außerdem

$$\text{Vol}(\{|u - v| > \delta\}) \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N),$$

womit auch der zweite Summand klein wird. Insgesamt folgt

$$S_1(u, v)[\varphi, \eta] \rightarrow 0 \quad \text{für } v \rightarrow u \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N),$$

gleichmäßig in  $\varphi$  und  $\eta$ .

### 3. Fall: $N = 2$

Dieser Fall geht fast genauso wie für  $N \geq 3$ ; statt  $2^*$  ist in den Hölderungleichungen ein geeignetes (hinreichend großes)  $\tilde{p} > 1$  zu verwenden.  $\square$

Die abstrakte Aussage zur Existenz gestörter kritischer Punkte, Satz 1.1.5, ist nun schon anwendbar, sofern man nachweisen kann, dass  $\Gamma(z_\theta) = G(z_\theta)$  eine Hügel oder ein Tal besitzt. Dies folgt aus den folgenden beiden Lemmata (vergleiche Lemma 3.2 aus [5]):

**Lemma 3.2.5.**  $\lim G(z_\theta) = 0$ , für  $|\theta| \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Sei  $\delta > 0$  beliebig. Da  $h \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$  ist, existiert  $R = R(\delta) > 0$ , so dass

$$\int_{|x|>R} |h(x)|^{q_1} dx < \delta. \quad (3.44)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & |G(z_\theta)| \\ & \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left\| |\tilde{g}(z_\theta)|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{q_1}{q_1-1}}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |h(x) \tilde{g}(z_\theta(x))|^{\frac{1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ & \stackrel{(3.44)}{\leq} \left\| |\tilde{g}(z_0)|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{q_1}{q_1-1}}} \left( \|\tilde{g}(z_0)\|_{\infty}^{\frac{q_1}{2}} \delta + \int_{|x| \leq R} |h(x)|^{q_1} |\tilde{g}(z_0(x+\theta))|^{\frac{q_1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ & \leq \left\| |\tilde{g}(z_0)|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{q_1}{q_1-1}}} \left( \|\tilde{g}(z_0)\|_{\infty}^{\frac{q_1}{2}} \delta + \sup_{|x| \leq R} |\tilde{g}(z_0(x+\theta))|^{\frac{q_1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ & \leq \left\| |\tilde{g}(z_0)|^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{\frac{q_1}{q_1-1}}} \left( \|\tilde{g}(z_0)\|_{\infty}^{\frac{q_1}{2}} + 1 \right)^{\frac{1}{q_1}} \delta^{\frac{1}{q_1}}, \end{aligned}$$

sofern  $|\theta|$  hinreichend groß ist; beachte  $\sup_{|x| \leq R} \tilde{g}(z_0(x+\theta)) \rightarrow 0$  für  $|\theta| \rightarrow \infty$  ( $\tilde{g}(z_0)$  fällt genau wie  $z_0$  im Unendlichen exponentiell ab).  $\square$

**Lemma 3.2.6.** Die Funktion  $\theta \mapsto G(z_\theta)$ ,  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht identisch 0, sofern  $h$  nicht konstant und  $g(z_0)$  nicht identisch 0 ist (und damit auch  $\tilde{g}(z_0) \not\equiv 0$ ).

*Beweis.* Der Beweis erfolgt mit Hilfe von Fourier-Transformation. Es bezeichne  $Fu : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$  die Fourier-Transformierte der Funktion  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ . Bekanntlich bildet  $F$  für  $1 < p < \infty$   $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$  bijektiv in  $L^{p'}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$  ab, wobei  $p'$  der zu  $p$  konjugiert Exponent ist:  $1/p + 1/p' = 1$ . Es gilt

$$G(z_\theta) = F^{-1}(Fh \cdot F\tilde{g}(z_0))(\theta),$$

da die Fourier-Transformierte der Faltung  $\theta \mapsto G(z_\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \tilde{g}(z_0(x+\theta))$  das Produkt der Fourier-Transformierten von  $h$  und  $\tilde{g}(z_0)$  ergibt. Wegen des exponentiellen Abfalls von  $z_0$  fällt auch  $\tilde{g}(z_0)$  im Unendlichen exponentiell, womit  $F\tilde{g}(z_0)$  eine analytische Funktion auf  $\mathbb{R}^N$  ist, deren Nullstellenmenge Maß 0 haben muss (jede analytische Funktion auf  $\mathbb{R}^N$  mit einer Nullstellenmenge positiven Maßes ist identisch 0, aber  $\tilde{g}(z_0) \not\equiv 0$ ). Wäre nun  $G(z_\theta)$  identisch 0, oder äquivalent  $Fh \cdot F\tilde{g}(z_0) \equiv 0$ , so folgt  $Fh = 0$  fast überall. Dies ist aber nur für  $h = 0$  (fast überall) möglich.  $\square$

*Beweis von Satz 3.2.2.* Wie wir zuvor gesehen haben, sind alle Voraussetzungen von Satz 1.1.5 erfüllt. Insbesondere besitzt wegen Lemma 3.2.5 und Lemma 3.2.6  $z \mapsto \Gamma(z)$ ,  $Z \rightarrow \mathbb{R}$  einen Hügel oder ein Tal. Die Aussage von Satz 1.1.5 liefert die Behauptung des Satzes.  $\square$

### 3.2.4 Ein Beispiel

Für allgemeines  $h$  und  $g$  sind die Informationen über  $\Gamma$  recht dürftig – über Lemma 3.2.5 und Lemma 3.2.6 hinaus lässt sich im allgemeinen wohl kaum mehr sagen. Wir wollen hier nun anhand eines Beispiels diskutieren, welche Art Aussagen die Anwendung des abstrakten Zugangs noch zulässt, wenn  $h$  und  $g$  und damit  $\Gamma$  geeignete Eigenschaften besitzen (wobei wir natürlich unser Wissen über die Eigenschaften von  $z_0$  einbringen). Es sollen jetzt nichtdegenerierte kritische Punkte von  $F_\epsilon$  nachgewiesen werden, wobei das Hauptproblem darin besteht, die Nichtdegeneriertheit bekannter kritischer Punkte der Faltung  $\theta \mapsto \Gamma(z_\theta)$  nachzuweisen. Sei jetzt  $N \leq 5^\dagger$  und  $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  von folgender spezieller Gestalt:

$$\begin{aligned} h \in C^1(\mathbb{R}^N) \text{ ist radialsymmetrisch } (h = h(r)), \text{ positiv, und} \\ \frac{\partial h}{\partial r}(r) < 0 \text{ für alle } r > 0. \end{aligned} \quad (\text{S:h}_2)$$

Natürlich soll  $h$  auch nach wie vor (S:h<sub>1</sub>) genügen; zusammen mit (S:h<sub>2</sub>) impliziert das insbesondere  $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Ein solches  $h$  bricht (für  $\epsilon \neq 0$ ) die Translationsinvarianz von (SP), nicht aber die Rotationssymmetrie.  $g$  erfülle zusätzlich zu (S:g<sub>1</sub>) und (S:g<sub>2</sub>) (wobei jetzt  $2 \leq r < 2^* - 1$  sei)

$$\begin{aligned} g \in C^2(\mathbb{R}), \quad g(t)t > 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \text{und im Falle } N \geq 2 \text{ existieren Konstanten } C_5, C_6 \geq 0 \text{ mit} \\ g''(t) \leq C_5 |t|^{r-2} + C_6. \end{aligned} \quad (\text{S:g}_3)$$

Obige Bedingungen sichern insbesondere, dass  $G$  dreimal stetig differenzierbar ist. Genauso garantiert

$$\begin{aligned} f \in C^2(\mathbb{R}), \\ \text{und im Falle } N \geq 2 \text{ existieren Konstanten } C_7, C_8 \geq 0 \text{ mit} \\ f''(t) \leq C_7 |t|^{r-2} + C_8 \end{aligned} \quad (\text{S:f})$$

---

<sup>†</sup>Diese Bedingung sorgt dafür, dass  $2^* = 2N/(N-2) > 3$  ist; ansonsten ist  $F, G \in C^3$  nämlich nicht gewährleistet: Existiert  $D^3G$ , so gilt für Testfunktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$D^3G(u)[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)g''(u)\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \, dx,$$

was im allgemeinen höchstens dann endlich sein kann, wenn die  $\varphi_i$  mindestens in  $L^3(\mathbb{R}^N)$  sind, wozu  $2^* \geq 3$  nötig ist (analoges gilt natürlich auch für  $F$ ). Mit den Argumenten aus Lemma 3.2.4 lässt sich  $G \in C^3$  nur nachweisen, wenn sogar  $2^* > 3$  ist.

zusammen mit  $(f_4)$  die dreimalige stetige Differenzierbarkeit von  $F$ . Im folgenden bezeichne

$$\tilde{\Gamma}(\theta) := \Gamma(z_\theta) = G(z_0(\cdot + \theta)), \quad \text{für } \theta \in \mathbb{R}^N.$$

Unter den obigen Voraussetzungen lässt sich nun folgendes nachweisen:

**Satz 3.2.7.** *Die Voraussetzungen von Satz 3.2.2 seien erfüllt. Zusätzlich gelte  $(S:h_2)$ ,  $(S:g_3)$  und  $(S:f)$ .  $\tilde{\Gamma}$  hat dann genau einen kritischen Punkt, nämlich das globale positive Maximum bei  $\theta = 0$ , und dieses ist nichtdegeneriert. Für alle  $|\epsilon| < \epsilon_0$  (mit einem hinreichend kleinen  $\epsilon_0 > 0$ ) besitzt (SP) Lösungen  $u_\epsilon^0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$  mit*

$$u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} z_0. \quad (3.45)$$

*Gleichzeitig ist  $z_0$  auch der einzige Verzweigungspunkt gestörter Lösungen von (SP) in  $Z$ . Außerdem sind die  $u_\epsilon$  lokal um  $\epsilon = 0$  nichtdegenerierte kritische Punkte von  $F_\epsilon$  (bzw. Lösungen von (SP)), und die Abbildung  $\epsilon \mapsto u_\epsilon$  ist eine stetig Kurve. Jede Lösung  $(\tilde{\epsilon}, \tilde{u})$  von (SP) in einer kleinen Umgebung von  $(\epsilon = 0, z_0)$  in  $\mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$  erfüllt entweder  $\tilde{\epsilon} = 0$  und  $\tilde{u} \in Z$  oder  $\tilde{u} = u_{\tilde{\epsilon}}$ .*

Ist  $f$  ungerade, erhält man gemäß Bemerkung 3.2.3 zusätzlich: (SP) besitzt gestörte Lösungen  $\hat{u}_\epsilon^0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$  mit

$$\hat{u}_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -z_0, \quad (3.46)$$

und  $-z_0$  ist der einzige Verzweigungspunkt gestörter Lösungen von (SP) in  $-Z$ . Die  $\hat{u}_\epsilon$  sind lokal um  $\epsilon = 0$  ebenfalls nichtdegenerierte kritische Punkte von  $F_\epsilon$  und bilden eine stetige Kurve. Für kleine  $\epsilon \neq 0$  besitzt  $F_\epsilon$  nahe  $-z_0$  keine weiteren kritischen Punkte.

**Bemerkung 3.2.8.** *Da  $h$  radialsymmetrisch ist, kann man (SP), also*

$$\nabla F_\epsilon(u) = 0, \quad (3.47)$$

*auch als Gleichung in*

$$H_r^1(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u \text{ ist radialsymmetrisch}\}$$

*(normiert wie  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ) auffassen, für  $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$ . Sind nämlich  $u$  und  $h$  radialsymmetrisch, so auch  $\nabla F_\epsilon(u)$  (Gradient in  $H^1$ , für den Gradienten in  $H_r^1$  wäre das trivial!): Es bezeichne  $O$  eine orthogonale lineare Abbildung im  $\mathbb{R}^N$ ,*

und  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  sei eine beliebige Testfunktion. Offenbar gilt nach dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla F_\epsilon(u) \circ O, \varphi \rangle_{H^1} \\
& \stackrel{\text{Trafo}}{=} \langle \nabla F_\epsilon(u), \varphi \circ O^{-1} \rangle_{H^1} \\
& = \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla u, O^{-1} \nabla \varphi(O^{-1}x) \rangle_{\mathbb{R}^N} + [f(u) + h(x)g(u)] \varphi(O^{-1}x)) \, dx \\
& \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{y=O^{-1}x} (\langle O \nabla u(Oy), \nabla \varphi(y) \rangle_{\mathbb{R}^N} + [f(u(Oy)) + h(Oy)g(u(Oy))] \varphi(y)) \, dy \\
& = \langle \nabla F_\epsilon(u), \varphi \rangle_{H^1},
\end{aligned}$$

womit die Radialsymmetrie von  $\nabla F_\epsilon(u)$  folgt. Insbesondere stimmen deshalb  $\nabla_{H^1} F_\epsilon(u)$  und  $\nabla_{H_r^1} F_\epsilon(u)$  überein.

In diesem Rahmen ist  $z_0$  für  $\epsilon = 0$  eine nichtdegenerierte Lösung von (3.47) (als Gleichung in  $H_r^1$  für  $u \in H_r^1$ ), die sich mit dem Satz über implizite Funktionen zu einer ganzen Kurve  $\epsilon \mapsto (\epsilon, u_\epsilon^{(r)})$  ( $|\epsilon| < \bar{\epsilon}$  hinreichend klein) von Lösungen von (SP) (zum jeweiligen Parameterwert  $\epsilon$ ) fortsetzen lässt, denn

$$D\nabla F_0(z_0) \in L(H_r^1(\mathbb{R}^N), H_r^1(\mathbb{R}^N)) \quad \text{ist bijektiv:}$$

Offenbar ist die lineare Abbildung  $D\nabla F_0(z_0) \in L(H_r^1, H_r^1)$  symmetrisch, und ihr Bild ist abgeschlossen. Für letzteres betrachte eine Cauchy-Folge  $(u_n)$  in Bild  $D\nabla F(z_0)|_{H_r^1(\mathbb{R}^N)}$ . Sie besitzt eine Urbildfolge  $(v_n) \subset H_r^1(\mathbb{R}^N)$ , die wegen der stetigen Invertierbarkeit von  $D\nabla F(z_0) \in L(T_{z_0}Z^\perp, T_{z_0}Z^\perp)$  (aus Lemma 1.1.7) ebenfalls eine Cauchy-Folge ist (beachte  $H_r^1(\mathbb{R}^N) \subset T_{z_0}Z^\perp \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ , was man wie die  $L^2$ -Orthogonalität von  $\partial_i z_0$  und  $\partial_j z_0$  für  $i \neq j$  im Beweis von Lemma 2.1.3 zeigen kann). Da  $H_r^1(\mathbb{R}^N)$  vollständig ist, besitzt die Folge  $(v_n)$  einen Grenzwert  $v_\infty \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = D\nabla F(z_0)v_\infty \in \text{Bild } D\nabla F(z_0)|_{H_r^1(\mathbb{R}^N)}$ . Nach dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich ist der lineare Operator  $D\nabla F_0(z_0) : H_r^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^N)$  damit schon bijektiv, wenn er nur injektiv ist. Die Injektivität folgt aber sofort aus Satz 2.1.16 (für  $N \geq 2$ ) bzw. Satz 2.2.3 (für  $N = 1$ ), da die partiellen Ableitungen der radialsymmetrischen Funktion  $z_0$ , die  $T_{z_0}Z = \text{Kern } D\nabla F_0(z_0)|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$  aufspannen, nicht radialsymmetrisch sind.

Diese Methode liefert freilich keine Eindeutigkeit der Lösungskurve in ganz  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ; es könnte zunächst ja nichtsymmetrische Lösungen geben, die von  $z_0$  verzweigen. Das ist nach der lokalen Eindeutigkeitsaussage von Satz 3.2.7 aber ausgeschlossen – die dort gefundenen Lösungen  $u_\epsilon$  müssen mit den radialsymmetrischen Lösungen  $u_\epsilon^{(r)}$  übereinstimmen (für kleine  $\epsilon$ ).

**Lemma 3.2.9.** *Unter den Bedingungen (S:h<sub>1</sub>), (S:h<sub>2</sub>) und (S:g<sub>1</sub>-S:g<sub>3</sub>) besitzt  $\Gamma$  die in Satz 3.2.7 behaupteten Eigenschaften:  $\bar{\Gamma}$  hat genau einen kritischen Punkt, nämlich das globale positive Maximum bei  $\theta = 0$ , welches nichtdegeneriert ist.*

*Beweis.* Wegen (S: $g_3$ ) ist die Stammfunktion  $\tilde{g}$  von  $g$  auf der positiven Halbachse streng monoton wachsend. Damit erbt  $\tilde{g}(z_0)$  die Monotonieeigenschaften von  $z_0$ . Wegen der Radialsymmetrie von  $h$  und  $z_0$  ist auch  $\tilde{\Gamma}$  radialsymmetrisch, also  $\tilde{\Gamma}(\theta) = \tilde{\Gamma}(r)$ , mit  $r = |\theta|$ . Sei nun  $i \in \{1, \dots, N\}$  beliebig, fest gewählt. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \tilde{\Gamma}(\theta) = - \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i h(x - \theta) \tilde{g}(z_0(x)) dx.$$

Nach (S: $h_2$ ) ist  $\partial_i h$  ungerade in Richtung des  $i$ -ten Einheitsvektors, und gerade in Richtung der anderen Einheitsvektoren, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_i h(x + te_i) &= -\partial_i h(x - te_i) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \perp e_i, \\ \partial_i h(x + te_j) &= \partial_i h(x - te_j) && \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \perp e_j, j \neq i. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\partial_i h(y_1, \dots, y_i, \dots, y_N) \begin{cases} < 0 & \text{falls } y_i > 0, \\ > 0 & \text{falls } y_i < 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

Da  $z_0$  und damit  $\tilde{g}(z_0)$  gerade in der  $i$ -ten Richtung ist (für  $i = 1, \dots, N$ ), folgt unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \tilde{\Gamma}(0) = - \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i h(x) \tilde{g}(z_0(x)) dx = 0,$$

für  $i = 1, \dots, N$ . Weitere kritische Punkte besitzt  $\tilde{\Gamma}$  nicht:

Sei  $T_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  die Spiegelung an der zum Einheitsvektor  $e_i$  orthogonalen Ebene. Ist die  $i$ -te Komponente von  $\theta$  negativ, so gilt wegen der Monotonie und Symmetrie von  $\tilde{g}(z_0)$

$$\tilde{g}(z_0(x + \theta)) > \tilde{g}(z_0(x + T_i \theta)), \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \text{ mit } x_i > 0. \quad (3.49)$$

Analog gilt bei positivem  $\theta_i$

$$\tilde{g}(z_0(x + \theta)) < \tilde{g}(z_0(x + T_i \theta)), \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \text{ mit } x_i > 0. \quad (3.50)$$

Es bezeichne jetzt  $\mathbb{R}_+^N := \{(x_1, \dots, x_N) : x_i > 0\}$  den Halbraum der Vektoren mit positiver  $i$ -ter Komponente im  $\mathbb{R}^N$ . Entsprechend setzen wir  $\mathbb{R}_-^N :=$

$\{(x_1, \dots, x_N) : x_i < 0\}$ . Ist nun  $\theta_i < 0$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_i} \tilde{\Gamma}(\theta) &= - \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_i h(x) \tilde{g}(z_0(x + \theta)) dx - \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial_i h(x) \tilde{g}(z_0(x + \theta)) dx \\
&\stackrel{(3.48)}{>} - \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_i h(x) \tilde{g}(z_0(x + T_i \theta)) dx - \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial_i h(x) \tilde{g}(z_0(x + \theta)) dx \\
&\stackrel{(3.49)}{=} - \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_i h(T_i y) \tilde{g}(z_0(T_i y + T_i \theta)) dy - \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial_i h(x) \tilde{g}(z_0(x + \theta)) dx \\
&= + \int_{\mathbb{R}_+^N} \partial_i h(y) \tilde{g}(z_0(y + \theta)) dy - \int_{\mathbb{R}_-^N} \partial_i h(x) \tilde{g}(z_0(x + \theta)) dx = 0,
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung gilt, weil  $\partial_i h$  ungerade und  $\tilde{g}(z_0)$  gerade in der  $i$ -ten Richtung ist. Analog liefert (3.50) im Falle  $\theta_i > 0$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \tilde{\Gamma}(\theta) < 0.$$

Damit ist klar, dass  $\tilde{\Gamma}$  bei  $\theta = 0$  ein globales Maximum annimmt, welches zugleich der einzige kritische Punkt von  $\tilde{\Gamma}$  ist.

Zu zeigen bleibt nur noch die Nichtdegeneriertheit. Betrachte dazu

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} \tilde{\Gamma}(0) = - \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i h(x) g(z_0(x)) \partial_i z_0 dx < 0,$$

da  $g(z_0(x)) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^N$ , und  $\partial_i h(x) \partial_i z_0(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^N$  mit  $x_i \neq 0$ . Wegen der Radialsymmetrie von  $\tilde{\Gamma}$  hat die Hessematrix  $D\nabla \tilde{\Gamma}(0)$  Diagonalform, mit  $N$  gleichen Einträgen  $\frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} \tilde{\Gamma}(0) < 0$  auf der Diagonalen, womit sie negativ definit und insbesondere invertierbar ist.  $\square$

*Beweis von Satz 3.2.7.* Die behaupteten Eigenschaften von  $\Gamma$  folgen aus Lemma 3.2.9. Die Existenz der gestörten Lösungen  $u_\epsilon^0$  von (SP) folgt dann aus Satz 1.1.5, denn  $\Gamma$  hat ein nichtdegeneriertes lokales Maximum bei  $z_0$ . Da nach (S:f) bzw. (S:g<sub>3</sub>)  $F$  bzw.  $G$  dreimal stetig differenzierbar sind (das ist mit analogen Argumenten wie in Lemma 2.1.1 bzw. Lemma 3.2.4 zu beweisen) und das Maximum von  $\Gamma$  nichtdegeneriert ist, ist Satz 1.2.3 anwendbar (die restlichen Voraussetzungen in  $(G_4)$  sowie  $(G_5)$  sind trivialerweise erfüllt). Nach Unterabschnitt 2.1.3 ist sogar bekannt, dass  $D\nabla F(z)$  endlichen Morse-Index hat (obwohl das für Anwendung von Satz 1.2.3 nicht unbedingt benötigt wird, vgl. Bemerkung 1.2.5). Also sind die  $u_\epsilon$  nichtdegeneriert mit endlichem Morse-Index, und bilden eine stetige Kurve, die die gestörten kritischen Punkte von  $F_\epsilon$  nahe  $z_0$  eindeutig parametrisiert. Nach Satz 1.1.6 sind außerdem höchstens die kritischen Punkte von  $\tilde{\Gamma}$  Verzweigungspunkte gestörter kritischer Punkte von  $F_\epsilon$ .  $\theta = 0$  ist hier der einzige kritische Punkt von  $\tilde{\Gamma}$ , so dass nach Satz 1.1.6 Verzweigung gestörter Lösungen aus  $Z$  wirklich nur bei  $z_0$  möglich ist.  $\square$

# Anhang A

## Hilfsmittel

Hier werden einige grundlegende Aussagen zusammengefasst, die im Verlauf der dieser Arbeit als technische Hilfsmittel benötigt werden.

### A.1 Gleichmäßiges Verhalten von Taylorresttermen in Parametern

**Lemma A.1.1.** *Es sei  $f : K \times U \rightarrow X$ ,  $(k, u) \mapsto f(k, u)$  eine bezüglich  $u$   $n$ -mal stetig Fréchet-differenzierbare Funktion ( $n \geq 1$ ), mit in  $(k, u) \in K \times U$  stetigen Ableitungen. Dabei ist  $K$  ein kompakter topologischer Raum,  $U$  eine offene Teilmenge eines Banachraums  $B$ , und  $X$  ein Banachraum. Ist nun  $u_0 \in U$ , so besitzt  $f$  für jedes  $j = 1, \dots, n$  und alle  $k \in K$ ,  $u + u_0 \in U$  die Taylorentwicklung  $j$ -ter Ordnung*

$$f(k, u_0 + u) = f(k, u_0) + D_u f(k, u_0)u + \dots + \frac{1}{j!} D_u^j f(k, u_0)[u, \dots, u] + R_j(k, u, u_0)$$

mit einem Restterm  $R_j(k, u, u_0)$ . Dieser Taylorrestterm erfüllt dabei

$$\lim_{\|u\|_B \rightarrow 0} \frac{\|R_j(k, u, u_0)\|_X}{\|u\|_B^j} = 0, \quad \text{gleichmässig in } k \in K.$$

*Beweis.* Die Aussage von Lemma A.1.1 ist nicht anderes als der Satz von Taylor, wobei aber Wert auf das gleichmäßige Verhalten des Restterms in dem Parameter  $k$  (aus dem Kompaktum  $K$ ) gelegt wird. Der Beweis ergibt sich aus der Integraldarstellung des Restterms:

$$R_j(k, u, u_0) = \frac{1}{j!} \int_0^1 j(1-t)^{j-1} (D_u^j f(k, u_0 + tu) - D_u^j f(k, u_0)) [u, \dots, u] dt$$



Wegen der Stetigkeit von  $D_u^j f$  auf  $K \times U$  und der Kompaktheit von  $K$  gilt

$$D_u^j f(k, u_0 + tu) \xrightarrow{\|u\|_B \rightarrow 0} D_u^j f(k, u_0) \quad \text{in } L^j(B, X), \text{ gleichm\"assig in } k \in K \quad (\text{A.1})$$

(und offensichtlich auch gleichm\"assig in  $t \in [0, 1]$ ).  $L^j(B, X)$  bezeichnet dabei die  $j$ -linearen stetigen Abbildungen von  $B^j$  nach  $X$ , und ist mit der \"ublichen Norm versehen. Jetzt folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|u\|_B^j} \|R_j(k, u, u_0)\|_X \\ &= \frac{1}{j!} \left\| \int_0^1 j(1-t)^{j-1} [D_u^j f(k, u_0 + tu) - D_u^j f(k, u_0)] \right. \\ & \quad \left. \left[ \frac{u}{\|u\|_B}, \dots, \frac{u}{\|u\|_B} \right] dt \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{j!} \int_0^1 j(1-t)^{j-1} \|D_u^j f(k, u_0 + tu) - D_u^j f(k, u_0)\|_{L^j(B, X)} dt \\ &\stackrel{(\text{A.1})}{\xrightarrow{\|u\|_B \rightarrow 0}} 0, \end{aligned}$$

gleichm\"assig in  $k \in K$ . □

## A.2 Stetigkeit von Nemitsky-Operatoren

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  induziert einen Operator auf reellwertigen Funktionen \u00fcber einer Menge  $\Omega$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  messbar, nicht notwendig beschr\"ankt) durch  $f(g)(x) := f(g(x))$  (f\u00fcr eine Funktion  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x \in \Omega$ ). Wir ben\u00f6tigen in dieser Arbeit an verschiedenen Stellen die folgende Aussage zur Stetigkeit dieses sogenannten Nemitsky-Operators als Abbildung zwischen  $L^p$ -R\"aumen:

**Lemma A.2.1 (Stetigkeit von Nemitsky-Operatoren).**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei messbar und fast \u00fcberall stetig. Dar\u00fcberhinaus erf\u00fclle es die Wachstumsbedingung

$$|f(u)| \leq C_1 + C_2 |u|^{p/q}$$

f\u00fcr Konstanten  $p, q \in [1, \infty)$  und  $C_1, C_2 \geq 0$ , wobei  $C_1 = 0$  gelte, falls  $\Omega$  unendliches Ma\u00df hat. Dann bildet der Nemitsky-Operator  $L^q(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$  ab und ist als Abbildung zwischen diesen R\"aumen stetig.

*Beweis.* Diese Aussage ist wohlbekannt. Einen Beweis zum Beispiel in dem Buch von Zeidler [21] (Proposition 26.6 auf S. 561ff.; die dortige Aussage ist noch allgemeiner als Lemma A.2.1). □

### A.3 Elliptische $L^p$ -Regularitätstheorie

Im Gegensatz zur  $L^2$ -Regularitätstheorie ist das Analogon im  $L^p$  für beliebige  $p > 1$  in Lehrbüchern kaum verbreitet. Natürlich sind diese Regularitätsaussagen für nichtlineare Gleichungen ausgesprochen nützlich. Im Original stammen sie von S. Agmon [2], wo sie ausgesprochen ausführlich dargestellt werden. Wir wollen an dieser Stelle die Regularitätsaussagen dieses Artikels für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung wiedergeben, wie wir sie in Kapitel 2 benötigen; Agmon behandelt in seiner Arbeit jedoch auch elliptische Gleichungen höherer Ordnung. Die wesentlichen Regularitätsaussagen lauten nun wie folgt:

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen, und  $A = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha$  ein gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung auf  $\Omega$  mit Koeffizientenfunktionen  $a_\alpha \in C^{|\alpha|+j}(\bar{\Omega})$  für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ .  $A^*$  bezeichne den zu  $A$  adjungierten Differentialoperator. Dann gilt:

**Satz A.3.1 (Regularität im Inneren; Theorem 7.1' in [2]).** *Es sei  $i \in \{0, \dots, j\}$  gegeben.  $u \in L^q_{loc}(\Omega)$  (mit einem  $q > 1$ ) erfülle  $Au = f$  im Distributionssinne mit einem  $f \in W^{i,p}(\Omega)$ , also*

$$\int_{\Omega} u A^* \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad (\text{A.2})$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Dann ist  $u \in W^{2+i,p}_{loc}(\Omega)$  und es gilt die a-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{W^{2+i,p}(\Omega'')} \leq c_1 \left( \|f\|_{W^{i,p}(\Omega')} + \|u\|_{L^p(\Omega')} \right).$$

Dabei sind  $\Omega', \Omega'' \subset \Omega$  offen mit  $\bar{\Omega}'' \subset \Omega'$ ,  $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ , und  $c_1 > 0$  ist eine von  $u$  und  $f$  unabhängige Konstante (die aber von den Koeffizienten von  $A$  sowie von  $\Omega, \Omega'$  und  $\Omega''$  abhängt).

**Satz A.3.2 (Regularität bis zum Rand; Theorem 8.2 in [2]).** *Es sei  $i \in \{0, \dots, j\}$  gegeben. Das Gebiet  $\Omega$  sei beschränkt und der Rand von  $\Omega$  sei von der Klasse  $C^{2+i}$  (also  $(N-1)$ -dimensionale  $C^{2+i}$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$ ). Die Funktion  $u \in L^q(\Omega)$  (mit einem  $q > 1$ ) erfülle  $Au = f$  im Distributionssinne mit einem  $f \in W^{i,p}(\Omega)$ , also*

$$\int_{\Omega} u A^* \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad (\text{A.3})$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Dann ist  $u \in W^{2+i,p}(\Omega)$  und es gilt die a-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{W^{2+i,p}(\Omega)} \leq c_2 \left( \|f\|_{W^{i,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right).$$

Dabei ist  $c_2 > 0$  eine von  $u$  und  $f$  unabhängige Konstante (die aber von den Koeffizienten von  $A$  sowie dem Gebiet  $\Omega$  abhängt).

**Bemerkung A.3.3.** Theorem 8.2 in [2] behandelt eigentlich nur den Fall  $i = 0$ ;  $i \geq 1$  ergibt sich jedoch aus  $i = 0$  mit Induktion, genau wie in [2] Theorem 7.1' aus Theorem 7.1 (dies entspricht dem Fall  $i = 0$  in Satz A.3.1) folgt. Außerdem werden dort als Testfunktionen in (A.3) die

$$\varphi \in C^\infty\left(\bar{\Omega}; \{D^\alpha\}_{|\alpha| \leq 1}\right) := \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : D^\alpha v = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ für } |\alpha| \leq 1\}$$

verwendet, anstatt  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Ist jedoch (A.3) für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  erfüllt, so folgt mit einem Dichtheitsargument, dass (A.3) auch für alle  $\varphi \in W_0^{2,q'}(\Omega)$  gilt, was  $C^\infty\left(\bar{\Omega}; \{D^\alpha\}_{|\alpha| \leq 1}\right)$  einschließt.  $q'$  bezeichnet dabei den zu  $\tilde{q} := \min\{q, p\}$  konjugierten Exponenten:  $1/q' + 1/\tilde{q} = 1$ .

## A.4 Sturmischer Vergleichssatz

Die Sturmschen Vergleichssätze für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind wohlbekannt. Man kann sie zum Beispiel in dem Buch von Ince [13] auf Seite 229 nachlesen, wobei die Differentialgleichungen dort in einer anderen Form angegeben sind, in die sich jedoch die Gleichungen (A.5), (A.5) unten umschreiben lassen. Wir benötigen in der Anwendung im Beweis von Lemma 2.1.20, dass die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichungen, insbesondere  $a$ , an der linken Grenze des betrachteten Intervall (unten also für  $r \rightarrow \mu$ ) divergieren dürfen (was vielleicht nicht so wohlbekannt ist). Daher wird hier der Satz mit Beweis angegeben; die grundsätzliche Beweisidee ist aber dieselbe wie für beschränkte Koeffizientenfunktionen.

**Satz A.4.1 (Sturm).** *Es seien  $a, b, B : (\mu, \nu] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen, mit  $B(x) \geq b(x)$  für alle  $x \in (\mu, \nu]$ .  $a$  besitze dabei eine (nahe  $\mu$ ) nach oben beschränkte Stammfunktion  $c$ :*

$$c(x) \leq H \quad \text{für alle } x \in (\mu, \nu] \quad (\text{A.4})$$

mit einer Konstante  $H \in \mathbb{R}$ . Erfüllen  $u, U \in C^2[\mu, \nu]$

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$U''(x) + a(x)U'(x) + B(x)U = 0, \quad (\text{A.6})$$

auf  $(\mu, \nu)$ , mit  $U(x), V(x) \neq 0$  für alle  $x \in [\mu, \nu]$ , und ist

$$\frac{U'(\mu)}{U(\mu)} \leq \frac{u'(\mu)}{u(\mu)}, \quad (\text{A.7})$$

so gilt

$$\frac{U'(x)}{U(x)} \leq \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{für alle } x \in [\mu, \nu]$$

Aufintegriert über  $x$  von  $\mu$  bis  $y$  liefert letzteres noch

$$\left| \frac{U(y)}{U(\mu)} \right| \leq \left| \frac{u(y)}{u(\mu)} \right| \quad \text{für alle } y \in [\mu, \nu]$$

*Beweis.* Mittels der Gleichungen (A.5) und (A.6) lässt sich für kleine  $\epsilon > 0$  und  $X \in (\mu + \epsilon, \nu)$  leicht folgende Identität nachrechnen:

$$\left[ u^2 e^c \left( \frac{u'}{u} - \frac{U'}{U} \right) \right]_{\mu+\epsilon}^X = \int_{\mu+\epsilon}^X (B-b) e^c u^2 dx + \int_{\mu+\epsilon}^X e^c \left( u' - \frac{uU'}{U} \right)^2 dx \geq 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & u(X)^2 e^{c(X)} \left( \frac{u'(X)}{u(X)} - \frac{U'(X)}{U(X)} \right) \\ & \geq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} u(\mu + \epsilon)^2 e^{c(\mu+\epsilon)} \left( \frac{u'(\mu + \epsilon)}{u(\mu + \epsilon)} - \frac{U'(\mu + \epsilon)}{U(\mu + \epsilon)} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt dabei aus folgendem Grund: Ist

$$\frac{u'(\mu + \epsilon)}{u(\mu + \epsilon)} - \frac{U'(\mu + \epsilon)}{U(\mu + \epsilon)} < 0 \quad \text{für alle hinreichend kleinen } \epsilon,$$

so gilt

$$\begin{aligned} & u(\mu + \epsilon)^2 e^{c(\mu+\epsilon)} \left( \frac{u'(\mu + \epsilon)}{u(\mu + \epsilon)} - \frac{U'(\mu + \epsilon)}{U(\mu + \epsilon)} \right) \\ & \stackrel{(A.4)}{\geq} u(\mu + \epsilon)^2 e^H \left( \frac{u'(\mu + \epsilon)}{u(\mu + \epsilon)} - \frac{U'(\mu + \epsilon)}{U(\mu + \epsilon)} \right) \\ & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u(\mu)^2 e^H \left( \frac{u'(\mu)}{u(\mu)} - \frac{U'(\mu)}{U(\mu)} \right) \stackrel{(A.7)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Ansonsten gibt es eine Folge  $(\epsilon_n)$  mit  $\epsilon_n \rightarrow 0$  und

$$\frac{u'(\mu + \epsilon_n)}{u(\mu + \epsilon_n)} - \frac{U'(\mu + \epsilon_n)}{U(\mu + \epsilon_n)} \geq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

In beiden Fällen folgt

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} u(\mu + \epsilon)^2 e^{c(\mu+\epsilon)} \left( \frac{u'(\mu + \epsilon)}{u(\mu + \epsilon)} - \frac{U'(\mu + \epsilon)}{U(\mu + \epsilon)} \right) \geq 0.$$

□

# Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics, a Series of Monographs and Textbooks. Vol. 65. New York - San Francisco - London: Academic Press, Inc. (1975).
- [2] S. Agmon, The  $L^p$  approach to the dirichlet problem. Ann. Scuola norm. sup. Pisa Sci. fis. Mat., III. Ser. **13**, 405-448 (1960).
- [3] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. Commun. Pure Appl. Math. **12**, 623-727 (1959).
- [4] A. Ambrosetti, Applications of critical point theory to variational problems on  $\mathbb{R}^n$ . Fiedler, B. (ed.) et al., International conference on differential equations. Proceedings of the conference, Equadiff '99, Berlin, Germany, August 1-7, 1999. Vol. 1. Singapore: World Scientific 469-484 (2000).
- [5] A. Ambrosetti, J. Garcia Azorero, I. Peral, Remarks on an class of semilinear elliptic equations on  $\mathbb{R}^n$ , via perturbation methods. Adv. Nonlinear Stud. **1**, No.1, 1-13 (2001).
- [6] A. Ambrosetti, M. Badiala, Persönlicher Brief (E-Mail) vom 6.Februar 2002
- [7] A. Ambrosetti, M. Badiale, Variational perturbative methods and bifurcation of bound states from the essential spectrum. Proc. R. Soc. Edinb. **128A**, No.6, 1131-1161 (1998).
- [8] H. Berestycki, P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I: Existence of a ground state. Arch. Ration. Mech. Anal. **82**, 313-345 (1983).
- [9] H. Berestycki, P. L. Lions, P. L. & L. A. Peletier, An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in  $\mathbb{R}^N$ . Indiana University Math. J. **30**, 141-157 (1981).
- [10] Chiun-Chuan Chen, Chang-Shou Lin, Uniqueness of the ground state solutions of  $\Delta u + f(u) = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Commun. Partial Differ. Equations **16**, No.8/9, 1549-1572 (1991).

- [11] D. E. Endmunds, W. D. Evans, Spectral Theory and Differential Operators. Paperback ed. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Clarendon Press (1990).
- [12] B. Gidas, Wei-Ming Ni, L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^n$ . Adv. Math., Suppl. Stud. **7A**, 369-402 (1981).
- [13] E. L. Ince, Ordinary Differential Equations. New York: Dover Publications (1956).
- [14] Man Nam Kwong, Liquan Zhang, Uniqueness of the positive solutions of  $\Delta u + f(u) = 0$  in an annulus. Differ. Integral Equ. **4**, No.3, 583-599 (1991).
- [15] R. J. Magnus, On perturbations of a translationally-invariant differential equation. Proc. Royal Soc. Edinburgh **110A**, 1-25 (1988).
- [16] S. Maier, Asymptotic behaviour of spherical symmetric solutions of semilinear elliptic equations. Augsburg: Univ. Augsburg, Math.-Naturwiss. Fak., Doctoral Thesis (1991).
- [17] Wei-Ming Ni, I. Takagi, Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. Duke Math. J. **70**, No.2, 247-281 (1993).
- [18] J. A. Smoller, A. G. Wasserman, Existence, uniqueness and nondegeneracy of positive solutions of semilinear elliptic equations. Commun. Math. Phys. **95**, 129-159 (1984).
- [19] C. A. Stuart, Bifurcation of homoclinic orbits and bifurcation from the essential spectrum. SIAM J. Math. Anal. **20**, No.5, 1145-1171 (1989).
- [20] H. Triebel, Höhere Analysis. 2. verb. Aufl. Lizenzausg., Thun, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch (1980).
- [21] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B: Nonlinear Monotone Operators. New York etc.: Springer-Verlag (1990).