ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Dortleitner, Gregor

Article

Stetige versus diskrete Renditen Überlegungen zur richtigen Verwendung beider Begriffe in Theorie und Praxis

Kredit und Kapital

Provided in Cooperation with:
Duncker & Humblot, Berlin

Suggested Citation: Dortleitner, Gregor (2002) : Stetige versus diskrete Renditen Überlegungen zur richtigen Verwendung beider Begriffe in Theorie und Praxis, Kredit und Kapital, ISSN 0023-4591, Duncker & Humblot, Berlin, Vol. 35, Iss. 2, pp. 216-241, https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/293459

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Kredit und Kapital, Heft 2 / 2002
Seiten 216 - 241

Stetige versus diskrete Renditen
Überlegungen zur richtigen Verwendung beider Begriffe in Theorie und Praxis

Von Gregor Dorfleitner, Augsburg

I. Einführung

Um den relativen Wertzuwachs oder -verlust einer in Geldeinheiten bewertbaren Position zu messen, greift man in Finanzwirtschaft und Kapitalmarkttheorie auf den Begriff der Rendite zurück, der allerdings auch mit mehreren anderen Bedeutungen beladen ist. Für die Messung der relativen Wertänderung kann man die Rendite auf zwei verschiedene Arten definieren, einmal diskret, also als den prozentualen Zuwachs von einem Zeitpunkt zum anderen, zum anderen als den natürlichen Logarithmus des Zuwachsverhältnisses. Die letztere Definition bezeichnet man auch als die stetige Rendite.

Nun scheint die Frage, wie man ein Zuwachsverhältnis berechnen soll, nicht gerade eine bedeutende Problemstellung zu sein. Dennoch handelt es sich um ein Thema von großer Tragweite, weil einerseits Renditen in vielen verschiedenen Bereichen der Kapitalmarkttheorie, der Finanzwirtschaft und der Finanzmathematik als Basisgrößen auftauchen, andererseits aber die statistischen und stochastischen Eigenschaften der Renditen ob der scheinbaren Trivialität des Themas oft nicht genügend beachtet werden. Aus letzterem Sachverhalt resultieren deshalb nicht selten inkonsistente Modelle oder wenig valide statistische Schlüsse. In der Tat kann es in gewissen Situationen von entscheidender Bedeutung sein, welchen Renditebegriff man benutzt. Es gibt allerdings auch Zusammenhänge, in denen nicht so genau auf den korrekten Einsatz geachtet werden muß, weil die Unterschiede nur sehr klein sind.

Diese Arbeit will die vorhandene Lücke zwischen den sehr einfachen Grundkonzepten der stetigen und der diskreten Rendite auf der einen Seite und den theoretischen und praktischen Anwendungen der beiden Begriffe auf der anderen Seite schließen. Bei näherer Betrachtung der Problematik etwa statistischer Sachverhalte stößt man auf sehr komplizierte und zum Teil unlösbare Probleme.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Die Arbeit begreift sich als ein einführendes Kompendium zum Thema, das allerdings über den Lehrbuchstandard zum Teil deutlich hinausgeht. Dazu werden nach dieser kurzen Einführung wesentliche Eigenschaften beider Renditebegriffe herausgearbeitet. Es folgt ein Abschnitt über statistische und stochastische Aspekte und ein weiterer über die Problemstellung der Annualisierung. Abschnitt V erläutert die Konsequenzen verschiedener Verteilungsannahmen, während Abschnitt VI die wichtigsten Zusammenhänge anhand eines praktischen Beispiels illustriert. Mit einer Übersicht über wichtige Anwendungsbereiche und einem Ausblick schließt die Arbeit.

II. Definition und wesentliche Eigenschaften der beiden Rendite-Begriffe

Seien s und t zwei Zeitpunkte mit der Eigenschaft $s < t$. Wir betrachten eine Position, die einen Wert oder Kurs besitzt, welcher sich zumindest prinzipiell über die Zeit hinweg ändert. Sei

- S_s: der Wert (oder Kurs) der Position zum Zeitpunkt s und
- S_t: der Wert (Kurs) zum Zeitpunkt t, der bereits um Dividenden, Aktiensplits etc. bereinigt ist.

Ob die Wertnotierungen stochastischer oder deterministischer Natur sind, ist zunächst nicht von Belang. In beiden Fällen lassen sich die beiden in dieser Arbeit untersuchten Renditebegriffe definieren. Man definiert die *diskrete Rendite* (für den Zeitraum von s bis t) als:

$$R_{st} := \frac{S_t - S_s}{S_s} = \frac{S_t}{S_s} - 1. \tag{1}$$

Die *stetige Rendite* (für den Zeitraum von s bis t) definiert man analog als:

$$r_{st} := \ln \frac{S_t}{S_s} = \ln S_t - \ln S_s. \tag{2}$$

Die beiden Definitionen sind ebenso einfach wie klar. Neben den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen „stetig“ und „diskret“, die ihrerseits mit verschiedenen weiteren Bedeutungen beladen sind, gibt es Synonyme, die in der Literatur Verwendung finden. Tabelle 1 listet gebräuchliche Bezeichnungen auf.

Manchmal wird anstelle des Begriffs Log-Rendite auch der der logarithmierten Rendite verwendet. Hierbei wird allerdings der nicht zutreffende

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Tabelle 1

Synonyme für das betrachtete Begriffspaar

stetige Rendite	diskrete Rendite
Log-Rendite	Rendite
Differenz der logarithmierten Preise	einfache Rendite
continuously compounded return	return

Eindruck erweckt, eine Rendite werde logarithmiert. Daß auch hinter der Differenz der logarithmierten Preise die stetige Rendite steckt, wird aus (2) klar. Allein die Erwähnung der logarithmierten Kurse oder Preise ist in aller Regel bereits ein Hinweis auf die Verwendung der stetigen Renditen. Auch wenn von der Differenzenbildung zunächst nicht die Rede ist, so erfolgt sie doch meist in einer späteren Phase der Ausführungen.

Abgesehen von den Bezeichnungen basieren beide Renditedefinitionen im wesentlichen auf dem Quotienten aus S_t und S_s. Sie sind damit eigentlich Funktionen von $\frac{S_t}{S_s}$. Aus Übersichtlichkeitsgründen verzichtet man in der Regel darauf, dies notationell zu berücksichtigen. Man kann jedoch aufgrund dieser Eigenschaft jeweils den einen Renditebegriff mit Hilfe des anderen darstellen. Es gilt:

$$R_{st} = e^{r_{st}} - 1 \quad \text{bzw.} \quad r_{st} = \ln(R_{st} + 1). \tag{3}$$

Aus diesem Zusammenhang zwischen den beiden Definitionen läßt sich auch eine wesentliche und oft als Argument bemühte Tatsache ableiten und präzisieren: die approximative Gleichheit. Für „kleine", d.h. nahe bei Null liegende, absolute Werte von r_{st} und R_{st} gilt die *approximative Gleichheit:*

$$r_{st} \approx R_{st}. \tag{4}$$

In vielen wissenschaftlichen Arbeiten wird wegen der Eigenschaft (4) oft implizit angenommen, daß sich stetige und diskrete Rendite nicht wesentlich unterscheiden. Dies gilt jedoch nicht generell, wie man anhand des Beweises, der den Sachverhalt gleichzeitig exakter faßt, leicht sieht. Hierzu betrachtet man die Taylorentwicklung von R_{st} als Funktion von r_{st}:[1]

[1] *Deutsch* (2001), S. 482, verfolgt dieselbe Idee, entwickelt jedoch die Taylorreihe der Umkehrfunktion.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$R_{st} = e^{r_{st}} - 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_{st}^i}{i!} - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_{st}^i}{i!} = r_{st} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{r_{st}^i}{i!}. \tag{5}$$

Aus der Gleichung (5) erkennt man, daß sich beide Renditebegriffe um Terme der Ordnung zwei und höher unterscheiden. Für Werte nahe Null fallen diese Terme kaum ins Gewicht. So entspricht beispielsweise ein Wert von $r_{st} = 0{,}01$ dem Wert der diskreten Rendite $R_{st} = 0{,}01005$. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts dient die Abbildung 1.

Aus Abbildung 1 kann man ersehen, daß die Abweichung um den Nullpunkt herum tatsächlich sehr klein ausfällt und bei weiter von Null entfernten Werten in beide Richtungen beliebig groß werden kann. Gleichzeitig illustriert Abbildung 1 den bekannten mathematischen Zusammenhang

$$r_{st} \leq R_{st}. \tag{6}$$

Nun entsteht die Frage, bis zu welchem Renditewert die Abweichung der beiden Begriffe voneinander noch vertretbar klein bleibt. Dazu ver-

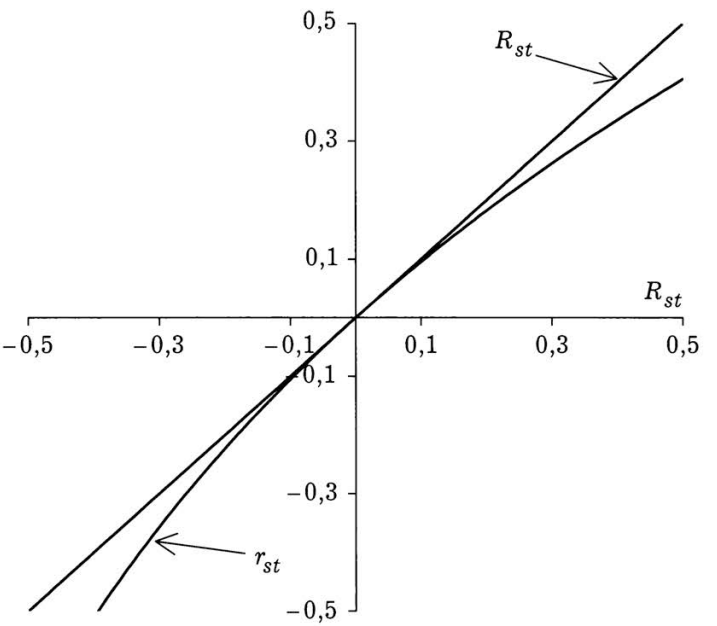

Abbildung 1: Stetige und diskrete Rendite im Intervall [−0,5; 0,5] *im Vergleich*

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

deutlicht Abbildung 2 die relative (also prozentuale) Abweichung. Diese wird als der Quotient $\frac{R_{st} - r_{st}}{R_{st}}$ bezogen auf die diskrete Rendite definiert.

Da die diskrete Rendite immer größer als die stetige ist, hat die Abweichung immer ein positives Vorzeichen. Daß in Abbildung 2 auch negative Werte auftreten, liegt nur am Nenner des Quotienten, der auch negativ werden kann. Außerhalb des in Abbildung 2 dargestellten Bereiches nimmt die Abweichung an der Stelle -1 den Wert minus unendlich an. Für wachsende Werte von R_{st} geht der Wert gegen 100 %. Ist man bereit, eine relative Abweichung von circa 5 % zu akzeptieren, so muß sich die diskrete Rendite im Bereich $[-0{,}10; 0{,}10]$ bewegen. Diskrete und stetige Rendite divergieren hier also nur um ca. 5 %. Es läßt sich zusammenfassend festhalten: Für Werte von r_{st} nahe 0 besteht kein wesentlicher Unterschied.

Kommen wir nun zu den entscheidenden Eigenschaften der beiden Renditebegriffe. Bei der stetigen Rendite handelt es sich hierbei um die *Additivität entlang der Zeitachse,* d. h. für alle $s \in [0, t]$ gilt:

$$r_{0t} = r_{0s} + r_{st}. \tag{7}$$

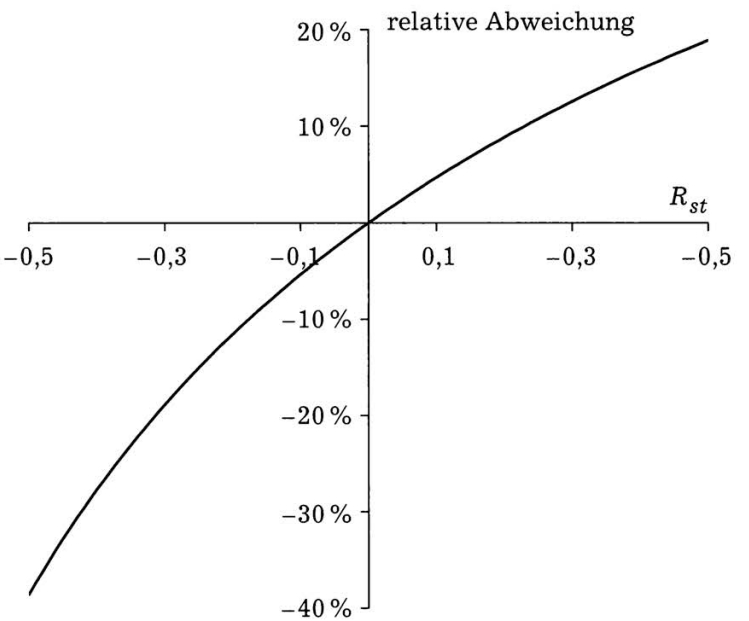

Abbildung 2: Relative Abweichung von stetiger und diskreter Rendite im Intervall $[-0{,}5; 0{,}5]$ *in bezug auf den Wert der diskreten Rendite*

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Dies beweist man ganz elementar mittels der Überlegung:

$$r_{0t} = \ln\frac{S_t}{S_0} = \ln\frac{S_s \cdot S_t}{S_0 \cdot S_s} = \ln\frac{S_s}{S_0} + \ln\frac{S_t}{S_s} = r_{0s} + r_{st}\,.$$

Offensichtlich gilt die Eigenschaft (7) nicht für die diskrete Rendite, was man sich anhand eines einfachen Zweiperioden-Modells überlegen kann, bei dem in der ersten Periode ein Zugewinn von 50 % und in der zweiten Periode ein Verlust von 50 % eintritt. Die diskrete Rendite für den Gesamtzeitraum beträgt dabei nicht 0 %, sondern −25 %.

Die entscheidende Eigenschaft der diskreten Rendite hingegen ist die *Additivität innerhalb von Portfolios*. Teilt man nämlich den Betrag S_0 mit den Gewichten $p \in [0,1]$ und $1-p$ auf zwei Wertpapiere mit den Kursen A_0 und B_0 auf, so gilt:

$$R_{0t} = pR^A_{0t} + (1-p)R^B_{0t}. \tag{8}$$

Auch diese Eigenschaft kann man leicht einsehen, denn es gilt

$$\begin{aligned} R_{0t} &= \frac{p\frac{S_0}{A_0}A_t + (1-p)\frac{S_0}{B_0}B_t}{S_0} - 1 \\ &= \frac{p\frac{S_0}{A_0}A_t + (1-p)\frac{S_0}{B_0}B_t - S_0}{S_0} = \frac{pS_0\left(\frac{A_t}{A_0} - 1\right) + (1-p)S_0\left(\frac{B_t}{B_0} - 1\right)}{S_0} \\ &= pR^A_{0t} + (1-p)R^B_{0t}\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich trifft die Eigenschaft (8) nicht für stetige Renditen zu. Gilt nämlich für $p = 0{,}5$ etwa $r^A_{0t} = -1$ und $r^B_{0t} = 1$, so resultiert hieraus nicht etwa $r_{0t} = 0$, sondern $r_{0t} = 0{,}4338$. Es läßt sich sogar zeigen, daß die Summe

$$pr^A_{0t} + (1-p)r^B_{0t}$$

immer kleiner oder gleich der stetigen Portfoliorendite

$$r^{pf}_{0t} = \ln\left(p\frac{A_t}{A_0} + (1-p)\frac{B_t}{B_0}\right)$$

ist. Dazu muß man nur die (nicht-zufälligen) Anteile p und $1-p$ als Wahrscheinlichkeiten auffassen, mit der eine (fiktive) Zufallsvariable X die Werte $\frac{A_t}{A_0}$ bzw. $\frac{B_t}{B_0}$ annimmt. Da der Logarithmus eine konkave Funktion darstellt, ergibt sich mit Jensens Ungleichung:

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$pr^A + (1-p)r^B = \mathrm{E}(\ln X) \leq \ln \mathrm{E}(X) = r^{pf}. \tag{9}$$

Dennoch kann man auch für Portfolios die stetige Rendite und für Mehrperioden-Modelle die diskrete Rendite verwenden. Dazu muß man lediglich finanzmathematisch korrekt vorgehen. Nur kann man die Aggregation nicht mehr über einfache Summation vornehmen. Dies hat außer für die Eleganz der Berechnung auch für statistische und stochastische Aspekte Konsequenzen.

III. Statistische und stochastische Aspekte

Alles bisher über stetige und diskrete Renditen Gesagte gilt unabhängig von stochastischen Annahmen. In vielen Modellen und Anwendungen jedoch wie etwa dem Capital Asset Pricing Model (CAPM) oder der Black-Scholes-Formel werden implizit oder explizit Annahmen bezüglich Verteilungen getroffen. Falls Modelle zudem mit realweltlichen Daten konfrontiert werden, spielen auch statistische Überlegungen eine Rolle. Derlei Aspekte sollen in diesem Abschnitt näher beleuchtet werden.

Unter den voneinander abhängenden Größen S_t, R_{0t} und r_{0t} kann nur für eine einzige eine Verteilungsannahme getroffen werden. Meist erfolgt dies für die stetige Rendite. Eine gängige Annahme ist die Normalverteilung. Die Kurse sind dann lognormalverteilt. Für die diskrete Rendite, deren Wertebereich im Negativen bei –1 endet, ist die Normalverteilungsannahme im strengen Sinn hingegen nicht anwendbar. Auf die Konsequenzen unterschiedlicher Verteilungsannahmen wird in Abschnitt V noch näher eingegangen.

Oftmals legt man sich bezüglich des Typs der Verteilung nicht exakt fest, sondern nimmt nur die Existenz der ersten beiden Momente und eine identische Verteilung bei allen unabhängigen Realisierungen der Rendite an. Diese Annahmen entsprechen, wie zahlreiche empirische Untersuchungen zeigen, nicht unbedingt der Realität.[2] Für die folgenden Ausführungen seien sie dennoch vorausgesetzt, zumal es sich dabei um einen gewissen Lehrbuchstandard handelt.

Liegen zu äquidistanten Zeitpunkten etwa im Tages-, Wochen- oder Monatsabstand Beobachtungen vor, so bildet man entsprechend die stetigen Renditen

$$r_t := r_{t-1,t}\,.$$

[2] Vgl. hierzu beispielsweise *Mittnik / Paolella* (2000).

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Dabei entspricht eine Zeiteinheit etwa Tagen, Wochen oder Monaten. Wir gehen nun von den aus einer lückenlosen Zeitreihe gebildeten Werten $r_1, \ldots, r_n$ und identischer Verteilung sowie Unabhängigkeit der r_t aus.

Die Parameter der stetigen Periodenrendite

$$\mu' := \mathrm{E}(r_1) \quad \text{und} \quad \sigma'^2 := \mathrm{Var}(r_1) \tag{10}$$

schätzt man mit den üblichen Schätzfunktionen für Erwartungswert und Varianz. Dabei folgt aus der Additivität entlang der Zeit:

$$\hat{\mu}' = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t = \frac{1}{n} r_{0n}. \tag{11}$$

Die Parameter der diskreten Rendite bezeichnen wir mit

$$\mu'_R := \mathrm{E}(R_1) \quad \text{und} \quad \sigma'^2_R := \mathrm{Var}(R_1). \tag{12}$$

Wegen (6) gilt die Ungleichung $\mu' \leq \mu'_R$. Das Gleichheitszeichen steht nur für degenerierte Zufallsvariablen mit der Varianz Null. Der Parameter μ'_R wird wie üblich durch

$$\hat{\mu}'_R = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t \tag{13}$$

geschätzt. Der sich daraus ergebende Schätzwert liegt aufgrund der Ungleichung (6) oberhalb des Schätzwerts für den Erwartungswert der stetigen Rendite. Würde man analog zum Vorgehen bei der stetigen Rendite die Schätzfunktion

$$\frac{1}{n} R_{0n}$$

verwenden, so wäre die Schätzung nicht erwartungstreu. Eine solche Vorgehensweise kann nicht empfohlen werden.

Berechnet man andererseits die effektive diskrete Perioden-Rendite $\overline{R}$ finanzmathematisch korrekt gemäß:

$$(1+\overline{R})^n = \prod_{t=1}^{n}(1+R_t), \tag{14}$$

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

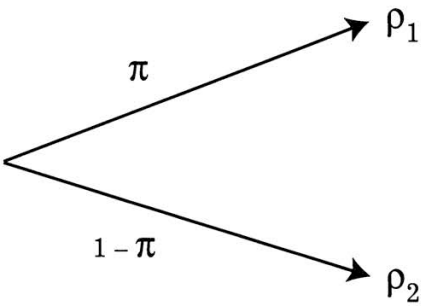

Abbildung 3: Stochastische Rendite mit dichotomer Verteilung

so erhält man

$$\overline{R} = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n}(1+R_t)} - 1 = \sqrt[n]{1+R_{0n}} - 1. \tag{15}$$

Aufgrund der allgemein bekannten Jensen-Ungleichung gilt nun aber bei Unabhängigkeit und Stationarität für den Erwartungswert

$$\mathrm{E}(\overline{R}) < \sqrt[n]{E\left(\prod_{t=1}^{n}(1+R_t)\right)} - 1 = \mathrm{E}(1+R_t) - 1 = \mathrm{E}(R_t). \tag{16}$$

Als Schätzer für den Erwartungswert sollte man also die an sich korrekte Größe $\overline{R}$ nicht benutzen.

Bezüglich der Varianz von stetiger und diskreter Rendite läßt sich keine Ungleichung in der einen oder der anderen Richtung nachweisen. Dazu betrachten wir ein Beispiel, welches auf einem einfachen Binomialmodell mit zwei verschiedenen möglichen Renditeausprägungen basiert. Abbildung 3 verdeutlicht die einfache stochastische Struktur der diskreten Rendite. Mit Wahrscheinlichkeit π tritt der Wert ρ_1, mit $1-\pi$ der Wert ρ_2 auf.

Der Erwartungswert einer solchen Zufallsvariable ergibt sich damit als

$$\pi\rho_1 + (1-\pi)\rho_2, \tag{17}$$

während die Varianz unter Zuhilfenahme des Verschiebungssatzes den Wert

$$\pi\rho_1^2 + (1-\pi)\rho_2^2 - \left(\pi\rho_1 + (1-\pi)\rho_2\right)^2 \tag{18}$$

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

annimmt. Um die entsprechenden Parameter-Werte für die stetige Rendite zu ermitteln, sind gemäß Formel (3) die Terme ρ_1 und ρ_2 durch $\ln(\rho_1 + 1)$ bzw. $\ln(\rho_2 + 1)$ zu ersetzen.

Zur Konstruktion des Beispiels betrachten wir zwei Szenarios A und B, deren Parameterkonstellationen durch Tabelle 2 gegeben sind.

Tabelle 2

Parameterspezifierung für das Beispiel zur Varianzveränderung

A		B	
Wahrscheinlichkeit	**diskrete Rendite**	**Wahrscheinlichkeit**	**diskrete Rendite**
0,90	$\rho_1 = 0{,}5$	0,50	$\rho_1 = 0{,}5$
0,10	$\rho_2 = -0{,}5$	0,50	$\rho_2 = 0{,}3$

Wie sich leicht errechnen läßt, beträgt in beiden Szenarios der Erwartungswert der diskreten Rendite 0,4. Die entsprechende Standardabweichung der diskreten Rendite beträgt 0,3 bei A und 0,1 bei B.

Betrachtet man nun die stetige Rendite, so dreht sich dies um: Der Rendite-Erwartungswert nimmt bei A den Wert 0,2956 bei B den Wert 0,3339 an. Wie erwartet liegen beide Werte unterhalb von 0,4 (allerdings unterschiedlich weit). Die Standardabweichungen betragen 0,3296 (A) bzw. 0,0716 (B). In Situation A liegt die Standardabweichung der stetigen Rendite (Volatilität) also *über*, in Situation B *unter* dem Wert, der sich bei diskretem Renditebegriff ergibt.

Mit dem eingeführten Instrumentarium läßt sich noch ein weiteres Beispiel konstruieren, welches die These belegt, daß sich beim Übergang von stetiger zu diskreter Renditebildung die μ-σ-Dominanz umdrehen kann.

Tabelle 3

Parameterspezifierung für das Beispiel zur μ-σ-Dominanz

A		B	
Wahrscheinlichkeit	**diskrete Rendite**	**Wahrscheinlichkeit**	**diskrete Rendite**
0,20	$\rho_1 = 0{,}99$	0,50	$\rho_1 = 0{,}59$
0,80	$\rho_2 = 0{,}00$	0,50	$\rho_2 = -0{,}19$

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

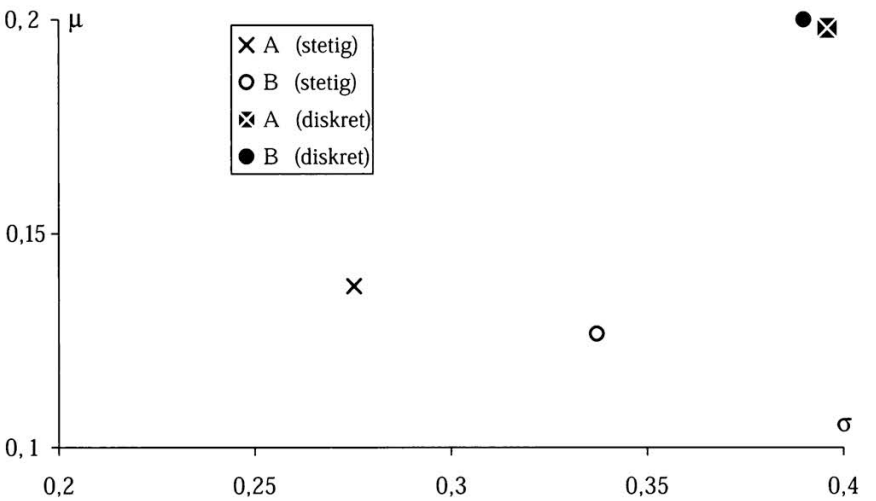

Abbildung 4: Dominanzumkehr bei Übergang von diskreter zu stetiger Rendite

Nach dem Kriterium der μ-σ-Dominanz ist eine Anlage-Alternative besser als die andere, wenn sie bei mindestens gleich großem Erwartungswert der Rendite eine geringere Standardabweichung besitzt oder bei höchstens gleich großer Standardabweichung einen größeren Erwartungswert.[3] In dem in Tabelle 3 umrissenen Beispiel ergibt sich nun der bemerkenswerte in Abbildung 4 illustrierte Sachverhalt: Die Anlage-Alternative B dominiert bei diskreter Rendite die Alternative A, betrachtet man aber A und B im Lichte der stetigen Rendite, so dominiert A die Alternative B.

Zwar ist die μ-σ-Dominanz zunächst nur für die diskrete Rendite definiert. In der Praxis werden diese Parameter aber oft durch die stetigen Parameter-Werte approximiert. Das angeführte Beispiel zeigt, daß man durch solches Vorgehen die Faktenlage eventuell völlig falsch einschätzt.

---

[3] Effizient im Sinne dieses Dominanzbegriffs sind solche Renditeverteilungen, die nicht durch andere dominiert werden. Siehe hierzu auch das Markowitzsche Portfolioselektionsmodell (etwa in *Steiner/Bruns* (2000), S. 6 ff.). Im Markowitz-Modell ist der diskrete Renditebegriff angebracht, da es sich um einen Endvermögensvergleich bei gegebenem Anfangsvermögen handelt. Die Varianz des Endvermögens verhält sich proportional zur Varianz der diskreten, nicht aber zur Varianz der stetigen Rendite.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

IV. Eine kurze Theorie der Annualisierung

Zur Interpretation der erwarteten Rendite und der Volatilität bezieht man sich üblicherweise auf den Zeitraum eines Jahres.[4] Die Renditewerte liegen aber in der Regel in einer höheren Frequenz vor, etwa auf täglicher oder wöchentlicher Basis. Deshalb ist eine Annualisierung notwendig, bei welcher man die Periodenrenditen zu einer Jahresrendite aggregiert. Von Interesse sind nun Erwartungswert, Varianz bzw. Standardabweichung der Jahresrendite. Wir bezeichnen diese wichtigen Größen mit μ und σ^2 (bzw. σ). Die Berechnung und das Schätzen dieser Größen ist bei stetigen Renditen wegen der Zeitadditivität naturgemäß leichter möglich.

Geht man nun von m (konsekutiven) Periodenrenditen $r_1, \ldots, r_m$ aus, die unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen darstellen, so ergibt sich, wenn ein Jahr aus m Perioden besteht[5], eine Jahresrendite durch die Addition

$$r_{0m} = \sum_{i=1}^{m} r_i. \tag{19}$$

Die Zufallsvariablen $r_1, \ldots, r_m$ sind hier nicht als Stichprobe anzusehen, sondern als theoretisches Modell zur Herleitung der Annualisierungs-Formeln. Damit gilt für den Erwartungswert und die Varianz der stetigen Jahresrendite:

$$\mu := \mathrm{E}(r_{0m}) = m\mathrm{E}(r_1) = m\mu' \tag{20}$$

und

$$\sigma^2 := \mathrm{Var}\,(r_{0m}) = m\mathrm{Var}\,(r_1) = m\sigma'^2. \tag{21}$$

Da man μ' und σ'^2 als die auf eine Periode bezogenen Werte mittels des Stichprobenmittels und der Stichprobenvarianz leicht schätzen kann, erhält man Schätzfunktionen für μ und σ^2 aus den mit m multiplizierten Schätzern $\hat{\mu}'$ und $\hat{\sigma}'^2$. Die Jahres-Standardabweichung σ nennen wir auch *Volatilität*.

Falls nun diskrete Renditen verwendet werden, so ergibt sich mit m aufeinanderfolgenden Periodenrenditen $R_1, \ldots, R_m$ eine Jahresrendite durch

---

4 Vgl. etwa *Steiner/Bruns* (2000), S. 52 ff.

5 Das Formelwerk kann auch für die Umrechnung anderer kleinerer Zeiträume (etwa Tage) auf größere (etwa Wochen, Halbjahreszeiträume etc.) benutzt werden, wenn man nur den Faktor m entsprechend wählt.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$R_{0m} = \prod_{i=1}^{m}(1+R_i) - 1. \tag{22}$$

Der Erwartungswert $\mu_R := \mathrm{E}(R_{0m})$ läßt sich wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit relativ leicht berechnen, nämlich als:

$$\mu_R = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{m}(1+R_i) - 1\right) = \prod_{i=1}^{m}\mathrm{E}(1+R_i) - 1 = (1+\mu'_R)^m - 1 = \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\mu'^{\,i}_R. \tag{23}$$

Man kann nun μ'_R durch $\hat{\mu}'_R$ erwartungstreu und konsistent schätzen. Setzt man dies in (23) ein, so resultiert ein konsistenter Schätzer für μ_R, der allerdings nicht erwartungstreu ist. Falls $\hat{\mu}'_R$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer ist, so gilt diese Eigenschaft auch für $(1+\hat{\mu}'_R)^m - 1$. Allerdings kann nicht generell empfohlen werden, einen annualisierten Schätzwert für μ_R auf diese Art und Weise zu gewinnen. Dazu betrachten wir folgendes Szenario: Die diskrete Halbjahres-Rendite ($m = 2$) sei $\chi^2(1)$-verteilt mit einem Shift von -1. Damit gilt $\mu'_R = 0$ und $\sigma'^2_R = 2$. Diese Werte sowie die zugrundeliegende Verteilung seien jedoch unbekannt. Der annualisierte Erwartungswert μ_R ist ebenfalls gleich Null. Die Schätzfunktion $(1+\hat{\mu}'_R)^2 - 1 = 2\hat{\mu}'_R + \hat{\mu}'^2_R$ besitzt den Erwartungswert

$$\mathrm{E}\left((1+\hat{\mu}'_R)^2 - 1\right) = \frac{2}{n},$$

wenn n den Stichprobenumfang wiedergibt. Schätzt man nun etwa mit dem für viele Anwendungen bereits als hoch geltenden Stichprobenumfang $n = 30$, so beträgt die Verzerrung des Schätzers immerhin noch $\frac{1}{15}$. Der Erwartungswert des Schätzers müßte Null betragen, liegt aber bei 6,7 %. Diese Verzerrung ist nicht zu vernachlässigen. Bei höheren Annualisierungspotenzen m wird dieses Phänomen zudem eher noch drastischer. Insgesamt ist also beim Anwenden der Asymptotik Vorsicht angebracht. Man sollte entweder auf wirklich große Stichprobenumfänge Wert legen oder zumindest mehr Informationen über die Verteilung besitzen.

Auch die Varianz $\sigma^2_R := \mathrm{Var}(R_{0m})$ läßt sich berechnen. Zur Herleitung benutzt man ebenfalls die Unabhängigkeit der R_i, welche es erlaubt, das Produktzeichen aus dem Erwartungswert herauszuziehen, und zusätzlich den Verschiebungssatz. Nach einigen Umformungen ergibt sich:

$$\sigma^2_R = \left((1+\mu'_R)^2 + \sigma'^2_R\right)^m - (1+\mu'_R)^{2m} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{2i}\binom{m}{i}\binom{2i}{j}\mu'^{\,j}_R\left(\sigma'^2_R\right)^{m-i}. \tag{24}$$

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Formel (24) ist in mancherlei Hinsicht bemerkenswert. Zunächst handelt es sich um ein Polynom in μ'_R und ${\sigma'_R}^2$ mit insgesamt m^2 Summanden. Die annualisierte Varianz hängt also auch von dem Erwartungswert der Perioden-Rendite ab. Aus statistischen Gründen empfiehlt es sich nicht zwingend, μ'_R und ${\sigma'_R}^2$ konsistent zu schätzen und diese Schätzung in den ersten Teil der Gleichung (24) einzusetzen, da durch die zahlreichen Potenzbildungen (analog zu dem beim Erwartungswert angeführten Gegenbeispiel) Schätzfehler entstehen, die sich auf unwägbare Art und Weise aufaddieren.

Um eine erwartungstreue Schätzfunktion zu erhalten, könnte man gemäß dem zweiten Teil der Gleichung (24) jedes Produkt $\mu'^{\,j}_R \cdot \left({\sigma'_R}^2\right)^{m-i}$ einzeln erwartungstreu schätzen, was allerdings nicht elementar möglich ist, und diese Schätzungen entsprechend aufaddieren. Annualisiert man allerdings auf Basis von Wochendaten ($m = 52$), so hat man bereits 2704 Summanden zu berücksichtigen. Bei Tagesdaten sind es sogar 62 500. Neben der möglicherweise komplexen Berechnung ist dies sicher keine varianzminimale Schätzung, so daß auch hier der statistische Fehler unklar bleibt.[6]

Im Zusammenhang mit Portfolio-Fragestellungen sind auch Kovarianzen zwischen verschiedenen Papieren bzw. zwischen den Renditen der Papiere von grundlegender Bedeutung. Auch hierfür kann man die stetige oder die diskrete Rendite zugrunde legen. Beide Renditebegriffe scheinen zunächst handhabbar. Denn hat man $r_1^A, \ldots, r_n^A$ für das Papier A und $r_1^B, \ldots, r_n^B$ für das Papier B gegeben, so kann man

$$\sigma'_{AB} := \mathrm{Cov}\left(r_i^A, r_i^B\right)$$

durch

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^A - \hat{\mu}'_A\right)\left(r_i^B - \hat{\mu}'_B\right)$$

schätzen. Analog geht man vor, wenn man diskrete Renditen zu beiden Papieren gegeben hat.

Ein Problem entsteht erst, wenn man die Kovarianz-Werte annualisieren will. Hierzu betrachten wir wie oben m hintereinander liegende theoretische Periodenrenditen $r_1^A, \ldots, r_m^A$ und $r_1^B, \ldots, r_m^B$. Die zweidimensio-

---

6 Um in diese Zusammenhänge etwas mehr Einsicht zu erhalten, wäre eine Monte-Carlo-Simulationsstudie mit verschiedenen zugrundeliegenden Verteilungen vonnöten.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

nalen Zufallsvariablen $(r_1^A, r_1^B), \ldots, (r_m^A, r_m^B)$ seien dabei unabhängig und identisch verteilt.

Für die stetigen Renditen gilt nun aufgrund der Bilinearität der Kovarianz

$$\sigma_{AB} = \mathrm{Cov}(r_{0m}^A, r_{0m}^B) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\mathrm{Cov}(r_i^A, r_i^B)}_{=\sigma'_{AB}} + 2 \sum_{i \neq j} \underbrace{\mathrm{Cov}\left(r_i^A, r_j^B\right)}_{=0} = m\sigma'_{AB}. \tag{25}$$

Bei diskreten Renditen hingegen kann die Kovarianz

$$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{m}(1+R_i^A), \prod_{i=1}^{m}(1+R_i^B)\right)$$

analog zu (24) auf komplexe Weise auf $\mathrm{Cov}(R_i^A, R_i^B)$ zurückgeführt werden. Eine verläßliche Schätzung auf Basis der theoretischen Berechnung ist jedoch in der Regel nicht mehr möglich.

Als Datenquelle für annualisierte Werte kann die Deutsche Börse AG dienen, welche täglich annualisierte Volatilitäten, Korrelationskoeffizienten und Beta-Faktoren für alle DAX-Aktien veröffentlicht. Die Werte werden aus annualisierten Schätzungen (mit Stichprobenumfang 30 Tage bzw. 250 Tage) von Varianzen und Kovarianzen der stetigen Rendite gewonnen.[7] Insofern müssen sie auch im Kontext der stetigen Rendite interpretiert werden. Die (unbekannten) annualisierten Werte der diskreten Rendite können davon stark abweichen.

V. Die Konsequenzen verschiedener Verteilungsannahmen

Wie in Abschnitt III bereits angedeutet, haben bestimmte Verteilungsannahmen, die in verschiedenen Modellen getroffen werden, große Auswirkungen auf Fragen des Schätzens und Annualisierens von Erwartungswert, Varianz und Kovarianz. Oft trifft man Verteilungsannahmen für die stetige Rendite r. Die Konsequenzen, die solche Annahmen für die diskrete Rendite R besitzen, werden indes nicht immer ausreichend beachtet.

Ein Hauptfall in der Lehrbuchliteratur sind *normalverteilte* stetige Renditen.[8] Unter dieser Annahme gilt für den Erwartungswert der diskreten Rendite:

---

[7] Vgl. *Deutsche Börse* (2000).

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

$$\mu_R = \mathrm{E}(R) = \mathrm{E}(e^r - 1) = \mathrm{E}(e^r) - 1 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} - 1. \tag{26}$$

Da auch annualisierte stetige Renditen normalverteilt sind, läßt sich Formel (26) sowohl auf der Ebene der einfachen Perioden als auch auf Jahresebene anwenden. Auch die Kovarianz zweier diskreter Renditen läßt sich auf die entsprechenden Parameter im stetigen Falle zurückführen. Es gilt:[9]

$$\mathrm{Cov}(R^A, R^B) = \mathrm{Cov}\left(e^{r^A}, e^{r^B}\right) = e^{\mu_A + \mu_B + \frac{1}{2}(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)}(e^{\sigma_{AB}} - 1). \tag{27}$$

Hierbei bezeichnen μ_A und μ_B die Erwartungswerte, σ_A^2 und σ_B^2 die Varianzen der stetigen Renditen der Papiere A und B. Mit σ_{AB} schließlich wird die Kovarianz auf Basis der stetigen Rendite bezeichnet.

Als Sonderfall der Formel (27) erhält man die Varianz der diskreten Rendite bei normalverteilter stetiger Rendite. Diese kann man auch zur Annualisierung nutzen. Setzt man in der für die Varianz vereinfachten Gleichung (27) nun μ gleich $m\mu'$ und σ^2 gleich $m\sigma'^2$, so hat man gegenüber der Formel (24) eine deutlich kompaktere Annualisierungsformel gefunden. Ersetzt man μ' und σ'^2 nun durch ihre Schätzwerte, so kann man immerhin noch eine konsistente Schätzung der diskreten Jahres-Varianz erreichen. Es ergibt sich der konsistente Schätzer

$$e^{m\left(2\hat{\mu}' + \hat{\sigma}'^2\right)}\left(e^{m\hat{\sigma}'^2} - 1\right) \tag{28}$$

für σ_R^2, der allerdings nicht erwartungstreu ist. Als Alternative zur Anwendung der Formel (24) scheint die beschriebene Vorgehensweise dennoch als ein gangbarer Weg. Im Grunde annualisiert man die geschätzten Parameter der stetigen Rendite korrekt und rechnet diese dann in die entsprechenden Werte der diskreten Rendite um. Solches Vorgehen kann aber aufgrund seiner mangelnden Erwartungstreue nur bei großen Stichprobenumfängen und außerdem nur bei geltender Normalverteilungsannahme verwendet werden. Generell zu empfehlen ist es nicht.

---

[8] Siehe z.B. *Hull* (2000), Abschnitte 10.3 bis 10.6. Man beachte, daß dort der Parameter μ der Driftrate des betrachteten stochastischen Prozesses entspricht und nicht mit dem Erwartungswert aus dieser Arbeit identisch ist. Der μ-Wert dieser Arbeit entspricht dem Wert $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ bei *Hull* (2000).

[9] Die angegebene Formel gilt generell für die Kovarianz lognormalverteilter Zufallsvariablen. Der Beweis erfolgt über das Ansetzen des entsprechenden Integrals unter Zuhilfenahme der Dichte der betrachteten zweidimensionalen Zufallsvariable. Siehe hierzu etwa *Poirier* (1995), S. 129 f.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Bei Normalverteilungsannahme berechnet sich die Korrelation $\rho(R^A, R^B)$ der diskreten Renditen unter Zuhilfenahme von Formel (27) als

$$\rho(R^A, R^B) = \frac{e^{\sigma_{AB}} - 1}{\sqrt{\left(e^{\sigma_A^2} - 1\right)\left(e^{\sigma_B^2} - 1\right)}}. \tag{29}$$

Für die Korrelation sind also dann die Erwartungswerte μ_A und μ_B nicht mehr von Belang.

Von der Normalverteilungsannahme kann allerdings nicht immer ausgegangen werden. Zahlreiche empirische Studien legen nahe, daß die stetigen Renditen bei Finanzmarktdaten schwerere Ränder als bei Normalverteilung besitzen.[10] Eine neuere Arbeit von Bamberg/Dorfleitner (2001) zeigt, daß dann meist der Erwartungswert (sowie Varianzen oder Kovarianzen) der diskreten Rendite gar nicht existiert. Eine Berechnung dieser Größen erübrigt sich dann ebenso wie die gesamte klassische Kapitalmarkttheorie. Leider bleiben dann nicht mehr viele mögliche Verteilungstypen mit etwas schwereren als normalverteilten Rändern übrig.

Oftmals werden auch bezüglich der diskreten Rendite Verteilungsannahmen getroffen, ohne daß geklärt wird, was dies für die stetigen Renditen bedeutet. Ein Beispiel hierfür wäre etwa die Normalverteilung der diskreten Rendite, die negative Kurse zuläßt und zur Nichtdefiniertheit der stetigen Rendite führt, falls das Kursverhätnis negativ ist.

Ein gangbarer Kompromiß ist die für die Abschnitte III und IV gewählte Voraussetzung der Existenz der ersten beiden Momente und das Unterlassen von weiteren Annahmen zur konkreten Verteilungsform. Damit kann man immerhin viele statistische Ergebnisse erzielen. Was sich darauf aufbauend jedoch noch an Entscheidungstheorie treiben läßt, beschränkt sich auf das μ-σ-Prinzip, das seinerseits wiederum gewisse Unzulänglichkeiten beinhaltet.[11]

VI. Ein praktisches Beispiel

Im folgenden betrachten wir im 21 Wochen umspannenden Zeitraum vom 17. Mai 2000 bis zum 14. Oktober 2000 jeweils am Mittwoch den Schlußkurs an der Frankfurter Wertpapierbörse der Aktien der Deut-

10 In der Literatur gibt es seit *Mandelbrot* (1963) unzählige Arbeiten, die auf die Verletzung der Normalverteilungsprämisse und insbesondere auf die schweren Ränder von Renditedaten hinweisen. Für einen kleinen Überblick sei exemplarisch verwiesen auf *Runde/Scheffner* (1998).

11 Vgl. *Bamberg/Coenenberg* (2000), S. 105 ff.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

schen Telekom und der T-online AG. Des weiteren liegt jeweils zu denselben Zeitpunkten die DAX-Notierung vor.

Aus diesen Daten lassen sich jeweils 20 Wochenrenditen berechnen. Tabelle 4 zeigt die Kurse jeweils am Mittwoch sowie daraus errechnet die diskreten und stetigen Wochenrenditen.

Auf Grundlage dieser Daten sollen nun einige der in den vorigen Abschnitten gemachten Überlegungen exemplifiziert werden. Wir betrachten dazu zunächst nur die DAX-Zeitreihe. Für die sich anschließenden Kovarianz-Überlegungen werden dann alle drei Zeitreihen berücksichtigt.

Wir berechnen zuerst die resultierende Gesamt-Rendite für den Zeitraum vom 17. Mai 2000 bis zum 14. Oktober 2000. Die stetige Rendite beträgt $r_{0,20} = -0{,}0553$, die diskrete $R_{0.20} = -0{,}0538$. Nun läßt sich auch der Erwartungswert der Wochenrenditen schätzen. Im stetigen Fall beträgt der Schätzwert gemäß (11):

$$\hat{\mu}' = \frac{1}{20} r_{0.20} = -0{,}0028\,.$$

Tabelle 4

Wochendaten für das praktische Beispiel

	T-online			Dt. Telekom			DAX		
Woche	**Kurs**	**R**	**r**	**Kurs**	**R**	**r**	**Kurs**	**R**	**r**
0	41,50			62,85			7211,51		
1	35,95	-0,1337	-0,1436	57,15	-0,0907	-0,0951	6834,88	-0,0522	-0,0536
2	39,25	0,0918	0,0878	67,00	0,1724	0,1590	7109,67	0,0402	0,0394
3	39,00	-0,0064	-0,0064	67,30	0,0045	0,0045	7292,98	0,0258	0,0255
4	39,20	0,0051	0,0051	67,55	0,0037	0,0037	7350,94	0,0079	0,0079
5	37,00	-0,0561	-0,0578	63,55	-0,0592	-0,0610	7100,09	-0,0341	-0,0347
6	34,28	-0,0735	-0,0764	63,50	-0,0008	-0,0008	7056,05	-0,0062	-0,0062
7	33,30	-0,0286	-0,0290	57,49	-0,0946	-0,0994	6961,73	-0,0134	-0,0135
8	32,00	-0,0390	-0,0398	57,65	0,0028	0,0028	7065,97	0,0150	0,0149
9	34,95	0,0922	0,0882	60,50	0,0494	0,0483	7366,57	0,0425	0,0417
10	32,40	-0,0730	-0,0758	50,80	-0,1603	-0,1747	7302,12	-0,0087	-0,0088
11	29,00	-0,1049	-0,1109	45,69	-0,1006	-0,1060	7112,45	-0,0260	-0,0263
12	29,05	0,0017	0,0017	46,65	0,0210	0,0208	7226,71	0,0161	0,0159
13	31,25	0,0757	0,0730	46,75	0,0021	0,0021	7315,27	0,0123	0,0122
14	28,40	-0,0912	-0,0956	42,50	-0,0909	-0,0953	7232,78	-0,0113	-0,0113
15	28,10	-0,0106	-0,0106	43,61	0,0261	0,0258	7185,56	-0,0065	-0,0066
16	32,20	0,1459	0,1362	46,75	0,0720	0,0695	7333,02	0,0205	0,0203
17	30,65	-0,0481	-0,0493	42,25	-0,0963	-0,1012	7006,26	-0,0446	-0,0456
18	25,45	-0,1697	-0,1859	39,60	-0,0627	-0,0648	6765,23	-0,0344	-0,0350
19	29,90	0,1749	0,1611	38,58	-0,0258	-0,0261	6814,06	0,0072	0,0072
20	24,45	-0,1823	-0,2012	39,90	0,0342	0,0336	6823,43	0,0014	0,0014

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Im diskreten Fall erhält man analog

$$\hat{\mu}'_R = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} R_i = -0{,}0024\,.$$

Würde man letzteren Schätzwert ebenfalls mittels der Gesamtrendite als $\frac{1}{20}R_{0,20} = -0{,}0027$ berechnen, so wäre dies eine verzerrende Approximation.

Die nach Formel (15) finanzmathematisch korrekte diskrete Wochenrendite hingegen wäre

$$\overline{R} = \sqrt[20]{1+R_{0,20}} - 1 = e^{\frac{1}{20}r_{0,20}} - 1 = -0{,}0028\,.$$

Mit diesem Wert unterschätzt man jedoch den wahren Schätzwert $\hat{\mu}'_R$ der erwarteten diskreten Wochenrendite. Der Fehler fällt allerdings wegen der Nähe des Wertes zur Null nur gering aus.

Der annualisierte Schätzwert der stetigen Rendite beträgt

$$\hat{\mu} = 52 \cdot \hat{\mu}' = -0{,}1438\,.$$

Diesen Wert kann man allerdings wohl kaum als den grundsätzlichen Trend des DAX ansehen. Er beschreibt allerdings korrekt die Tendenz, die sich aus der Stichprobe der betrachteten 20 Wochen ableiten läßt.

Im diskreten Fall kann die Annualisierung nur durch die (lediglich konsistente) Schätzung

$$\hat{\mu}_R = (1+\hat{\mu}'_R)^{52} - 1$$

durchgeführt werden. Es ergibt sich der Wert $-0{,}1187$, der deutlich von dem der stetigen Rendite abweicht.

Zur Berechnung der Volatilität benötigt man zunächst die (geschätzte) Varianz der Wochenrenditen. Dazu berechnet man

$$\widehat{\sigma}'^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}\left(r_i - \hat{\mu}'\right)^2 = 0{,}000710\,.$$

Die (jährliche) Volatilität der stetigen Rendite wird nun durch $\sqrt{52\widehat{\sigma}'^2}$ geschätzt. Durch die Wurzelbildung wird zwar auch hier die Erwartungstreue zerstört. Dies wird jedoch in der Regel in Kauf genommen, da es sich dabei immer noch um eine konsistente Schätzung handelt und die Verzerrung in der Regel gering bleibt. Im Beispiel ergibt sich der Wert

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

0,1921, welcher in etwa den langjährigen Erfahrungswerten beim DAX entspricht.

Im Falle der diskreten Renditen ergibt sich eine wöchentliche Varianz von 0,000702. Hier wollen wir auf eine Annualisierung verzichten, da es wie in Abschnitt IV ausgeführt bei der Schätzung zu erheblichen Ungenauigkeiten kommen würde. Setzt man allerdings zusätzlich eine Normalverteilung der stetigen Renditen voraus, so liefert (28) immerhin noch eine konsistente, aber nicht erwartungstreue Schätzung für die Varianz der diskreten Jahresrendite. Im Beispiel ergibt sich dabei der Wert 0,1710 für die Jahresvolatilität, also ein vom stetigen Fall abweichender Wert.

Bevor wir nun zur Kovarianzschätzung kommen, faßt die Tabelle 5 die geschätzten Parameterwerte der stetigen Renditeverteilungen der Aktien T-Online und Deutsche Telekom sowie des DAX zusammen. Bemerkenswert sind die stark negativen Werte für den annualisierten Erwartungswert bei der T-Online- und der Deutschen-Telekom-Aktie. Dies liegt an der ausgeprägten Abwärtstendenz im untersuchten Zeitraum und hat große Auswirkungen beim Annualisieren von Varianzen und Kovarianzen.

Nun berechnen wir verschiedene Werte für die Kovarianzen zwischen den Renditen. Tabelle 6 enthält die geschätzten Werte der Wochen-Kovarianzen zwischen je zwei der drei Papiere. Dabei sind die Werte für stetige und diskrete Rendite ausgewiesen.

Tabelle 5

Geschätzte Parameterwerte der stetigen Renditeverteilungen

	T-online		Dt. Telekom		DAX	
	wöchentlich	**annual.**	**wöchentlich**	**annual.**	**wöchentlich**	**annual.**
Erwartungswert	–0,026453	–1,375564	–0,022719	–1,181374	–0,002766	–0,143822
Varianz	0,009915	0,515602	0,005949	0,309349	0,000710	0,036903
Standardabweichung	0,099576	0,718054	0,077130	0,556192	0,026640	0,192102

Tabelle 6

Geschätzte Wochen-Kovarianzen

	geschätzte wöchentliche Kovarianz zwischen		
	T-onl./Dt. Telek.	Dt. Telek./DAX	T-onl./DAX
stetig	0,003987	0,001553	0,001768
diskret	0,003975	0,001543	0,001737

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Man erkennt hier kaum Abweichungen zwischen den stetigen und den diskreten Werten. Dies ändert sich drastisch in der Annualisierung. Bei den stetigen Werten geschieht diese einfach mittels Multiplikation mit 52. Die diskreten Werte werden exemplarisch unter Normalverteilungsannahme annualisiert, was methodisch als nicht ganz unproblematisch gelten muß. Auch wenn man sich also auf diese Werte nicht allzu sehr verlassen kann, so erhält man doch einen Eindruck, wie sehr sich annualisierte stetige und diskrete Werte unterscheiden können. Die Ergebnisse gibt die Tabelle 7 wieder.

Tabelle 7

Geschätzte annualisierte Kovarianzen

	geschätzte Kovarianz zwischen		
	T-onl./Dt. Telek.	Dt. Telek./DAX	T-onl./DAX
stetig	0,2073	0,0808	0,0919
diskret	0,0270	0,0266	0,0278

Hierbei fällt die große Diskrepanz zwischen den Werten bei stetigen und bei diskreten Renditen auf. Dies erklärt sich folgendermaßen: In der Formel (27), die man auch zum Annualisieren benutzt, gehen die annualisierten μ-Werte entscheidend mit ein. Ein stark negativer Wert für den annualisierten Erwartungswert, wie er sich in unserem Beispiel bei allen drei Zeitreihen ergibt (vgl. Tabelle 5), sorgt dafür, daß auf Jahressicht die Kurse gedrückt werden. Dies spiegelt sich in diskreten Jahresrenditen wider, die weit unterhalb der Null liegen. Im Bereich $(-\infty; 0]$ gibt es nun nicht so viel Spielraum für die Werteausprägungen der diskreten Rendite wie im stetigen Fall, da der Wertebereich der diskreten Rendite bei –100 % endet. Dieser rein mathematische Sachverhalt schlägt sich in verminderten Varianzen und Kovarianzen nieder.

Berechnet man auf Basis der hier geschätzten Werte auch Korrelationen oder Beta-Faktoren, so stellt man immer noch gewisse (teilweise enorme) Diskrepanzen zur stetigen Rendite fest, die Differenz fällt jedoch nicht mehr so groß aus wie bei den Kovarianzwerten. Festzuhalten bleibt, daß man bereits in diesem Beispiel die Unterschiede zwischen den Werten bei beiden Renditebegriffen kaum vernachlässigen kann, da sie zum Teil sogar ganze Größenordnungen betragen.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

VII. Wichtige Anwendungsbereiche und Ausblick

Die bisher gemachten obigen Ausführungen sind für viele Gebiete der finanzwirtschaftlichen Theorie und Praxis relevant. Im Prinzip läßt sich aufgrund der Eigenschaften der Renditebegriffe folgern, daß bei Modellen, die sich einer Portfolio-Sichtweise bedienen, die diskrete und bei solchen, die Zeitreihen betrachten, die stetige Rendite zum Einsatz kommen soll.

Im folgenden wird auf einige konkrete bedeutende Gebiete kurz eingegangen.

- Beim Capital Asset Pricing Model (CAPM) und der Arbitrage Pricing Theory (APT) handelt es sich um theoretische Erklärungsansätze, die die Entwicklung der (erwarteten) Renditen von Aktien in Zusammenhang mit den Renditen des Gesamtmarktes oder anderer ökonomischer Variablen bringen.[12] Da sich die theoretische Begründung aber auf Portfolio-orientierte Arbitrageüberlegungen stützt, verwenden beide Modelle die diskrete Rendite. Für die rein statistische Auswertung läßt sich aber ebenso leicht die stetige Rendite benutzen, die zudem eher als normalverteilt angenommen werden kann. Deshalb findet sich in empirischen Studien oft dieser Renditebegriff wieder. Die verwendeten Werte des Erwartungswertes und der Volatilität können zumindest bei Renditeausprägungen von betragsmäßig mehr als 10 % dabei allerdings nicht als valide gelten.
- Die Black-Scholes-Formel zur Berechnung von Optionspreisen erfordert aufgrund der Modellvoraussetzungen zwingend die Verwendung der stetigen Rendite. Auch (G)ARCH- und verwandte Modelle, die auf der Beschreibung der kumulierten Rendite als Zeitreihe beruhen, setzen diesen Renditebegriff voraus.[13] In beiden genannten Gebieten spielt denn auch der Volatilitätsbegriff eine zentrale Rolle. Bei (G)ARCH-Modellen geht es darum, die Autokorrelation der Renditen und über den Zeitablauf schwankende Volatilitäten zu modellieren. Insofern stellen sie einen interessanten Ausweg aus der hier vorgenommenen Beschränkung auf Unabhängigkeit und identische Verteilung der Renditen dar.
- Zur Berechnung des Value-at-Risk (VaR) im Risiko-Management benötigt man bei einem linearen Portfolio den Begriff der diskreten Rendite. Um jedoch zu Verteilungsaussagen zu kommen, wird gerne

12 Siehe *Uhlir/Steiner* (1994), S. 185 ff.

13 Für eine Einführung sei verwiesen auf *Gouriéroux* (1997).

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

hierfür Normalverteilung angenommen.[14] Dies führt zu den oben erwähnten Inkonsistenzen bei der stetigen Rendite. Bei verschoben lognormalverteilten diskreten Renditen hingegen kann man die Verteilung des Gesamtportfolios nicht mehr analytisch bestimmen. Eine Monte-Carlo-Simulation ist jedoch als Ausweg denkbar.

- Ein weiteres interessantes Gebiet im Zusammenhang mit der hier erörterten Problemstellung sind Ereignis-Studien.[15] Hierbei geht es im wesentlichen darum, festzustellen, welchen Einfluß bestimmte Ereignisse auf den Kurs von Aktien besitzen. In diesem Zusammenhang werden abnormale Renditen von bestimmten Ereignissen ermittelt. Zur Erzielung dieser Renditen müßte man ein entsprechendes Portfolio bilden. Da Ereignis-Studien also eine Portfolio-Idee zugrunde liegt, sollte man hier mit diskreten Renditen arbeiten.

- Auch das durch diverse Finanzinnovationen wie Index-Partizipationsscheine, Index-Fonds oder Futures auf neue Indizes immer wichtiger werdende Gebiet des Index-Trackings bedient sich einer Portfolio-Perspektive. Der Tracking-Error, der als die Abweichung des Nachbildungsportfolios von der Index-Rendite definiert wird, erfordert deshalb die Verwendung von diskreten Renditen.[16]

Insgesamt läßt sich festhalten, daß in Anwendungskontexten die diskrete Rendite häufiger als der geeignete Begriff erscheint. Dennoch sind die statistischen Eigenschaften der stetigen Rendite wesentlich attraktiver. Wenn die Portfolio- und Zeit-Orientierung zugleich anzutreffen sind, etwa bei einem Portfolio-Modell, in welchen die Renditen einzelner Wertpapiere über viele Perioden hinweg beobachtet werden, läßt sich immer noch eine Aggregation der diskreten Renditen auf finanzmathematisch korrekte Weise vornehmen. Jedoch gehen durch die dann erforderlichen nichtlinearen Verknüpfungen oft wichtige statistische Eigenschaften verloren. Folgende Erkenntnisse lassen sich zusammenfassend festhalten:

- Kann man ausnahmsweise dafür argumentieren, daß die Werte der Rendite sehr nahe bei Null liegen, so besteht zwischen beiden Renditedefinitionen (und den zugehörigen Wertparametern) nahezu kein Unterschied und man kann die Vorteile beider Begriffe nutzen.

---

14 Vgl. *J. P. Morgan/Reuters* (1996).

15 Eine Einführung in dieses Feld der Kapitalmarktforschung bietet *Röder* (1999).

16 Vgl. *Wagner* (1996).

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

- Meist muß man sich für die Verwendung *einer* der beiden Definitionen entscheiden. Dabei hat man oft aufgrund der Fragestellung oder gewünschter Modelleigenschaften keine Wahl und wählt deshalb die diskrete Rendite.
- Der Begriff der stetigen Rendite benötigt keine Normalverteilungsannahme. Unter der Annahme von Verteilungen mit schweren Rändern allerdings existieren weder Erwartungswerte noch (Ko-)Varianzen der diskreten Renditen.
- Der Erwartungswert einer stetigen Rendite liegt immer unterhalb des Erwartungswertes der zugehörigen diskreten Rendite. Für die Varianzen und Standardabweichungen gilt solch eine Ungleichung nicht. Die Werte stimmen auch hier im allgemeinen nicht überein. Jedoch nimmt in manchen Fällen die Varianz der stetigen, in manchen die der diskreten Rendite größere Werte an.
- Stochastische Anlagealternativen, die hinsichtlich der diskreten Rendite μ-σ-effizient sind, müssen diese Eigenschaft nicht notwendigerweise auch beim Übergang zur stetigen Rendite aufweisen.
- Annualisierte Werte für Volatilität und Kovarianz der diskreten Rendite lassen sich bei unterjährigen Daten zwar theoretisch berechnen, jedoch nicht immer statistisch sinnvoll schätzen. Unter Umständen werden für eine verläßliche Schätzung sehr große Stichprobenumfänge benötigt. Im Unterschied zu den stetigen Renditen hängt die annualisierte Volatilität bei diskreten Renditen auch entscheidend vom Erwartungswert der Rendite ab. Deshalb stellt man teilweise große Unterschiede zu den Werten der Volatilität für den stetigen Renditebegriff fest.

Da diese Fakten zum Teil wenig bekannt sind, kann man in der existierenden Literatur zwei Arten von Inkonsistenzen finden. Zum einen wird manchmal schlicht der dem Zweck nicht angemessene Renditebegriff verwendet. Zum anderen wird häufig unter Verwendung nur eines Begriffes (meist der diskreten Rendite) nicht ganz korrekt gerechnet sowie statistisch inkorrekt geschlossen.

Diese Arbeit deutet einige mögliche Auswege aus den skizzierten Problemfeldern an. In manchen Situationen aber scheint kein Königsweg zu existieren. An den dargestellten Problemen sollte weiter theoretisch und empirisch gearbeitet werden. Einige der heutzutage üblichen Vorgehensweisen werden jedoch eventuell neu zu überdenken sein.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Literatur

Bamberg, G.; *Coenenberg,* A.G. (2000): Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre (10. Auflage), Verlag Vahlen, München. – *Bamberg,* G.; *Dorfleitner,* G. (2001): Fat Tails and Traditional Capital Market Theory, Arbeitspapiere des Instituts für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie der Universität Augsburg, Heft 177. – *Deutsch,* H.-P. (2001): Derivate und interne Modelle: Modernes Risikomanagement (2. Auflage), Schäffer-Poeschel, Stuttgart. – *Deutsche Börse* (Hrsg.) (2000): Leitfaden zu den Indexkennzahlen der Deutschen Börse, Version 1.1, Deutsche Börse, Frankfurt. – *Gouriéroux,* C. (1997): ARCH Models and Financial Applications, Springer, New York et al. – *Hull,* J.C. (2000): Options, Futures, and Other Derivative Securities (4th Edition), Prentice Hall, London et al. – *J.P. Morgan/Reuters* (Hrsg.) (1996): Risk Metrics – Technical Document (4th Edition), J.P. Morgan, New York. – *Mandelbrot,* B. (1963): The Variations of Certain Speculative Prices, Journal of Business 36, 394–419. – *Mittnik,* S.; *Paolella,* M.S. (2000): Conditional Density and Value-at-Risk Prediction of Asian Currency Exchange Rates, Journal of Forecasting 19, 313–333. – *Poirier,* D.J. (1995): Intermediate Statistics and Econometrics: A Comparative Approach, MIT Press, Cambridge/London. – *Röder,* K. (1999): Kurswirkungen von Meldungen deutscher Aktiengesellschaften, Eul Verlag, Lohmar/Köln. – *Runde,* R.; *Scheffner,* A. (1998): On the existence of moments – With an application to German stock returns. Technical Report 25/1998, SFB 475, Universität Dortmund. – *Steiner,* M.; *Bruns,* C. (2000): Wertpapiermanagement (7. überarbeitete und erweiterte Auflage), Schäffer-Poeschel, Stuttgart. – *Uhlir,* H.; *Steiner,* P. (1994): Wertpapieranalyse (3. Auflage), Physica, Heidelberg. – *Wagner,* N. (1996): Approximative Nachbildung des Deutschen Akitenindexes (DAX), Finanzmarkt und Portfoliomanagement 10, 162–168.

Zusammenfassung

Stetige versus diskrete Renditen Überlegungen zur richtigen Verwendung beider Begriffe in Theorie und Praxis

Diese Arbeit untersucht Unterschiede zwischen den Begriffen der stetigen und der diskreten Rendite. Diese Unterschiede besitzen gerade im Hinblick auf stochastische und statistische Eigenschaften eine große Bedeutung für viele Felder der Kapitalmarkttheorie und der Finanzwirtschaft. Dabei wird auch explizit auf Fragen der Annualisierung und der Schätzung von Varianzen und Kovarianzen eingegangen. Anhand eines praktischen Beispiels werden Hinweise für den richtigen Umgang mit den beiden Größen gegeben. Die Arbeit enthält außerdem einige Beispiele zu intuitiv nicht sofort einsehbaren Sachverhalten, darunter eines, welches eine mögliche (μ, σ)-Dominanz-Umkehr beim Übergang von der diskreten zur stetigen Rendite beweist. (JEL G11, G12)

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/

Summary

Log Returns Versus Simple Returns
Delibrations on How to Use Both Terms Properly in Theory and in Practice

This article analyses the differences between log and simple returns. Such differences are of great importance in many fields of capital market theory and financial management as far as stochastic and statistical properties are concerned. The article also addresses the question of annualising and estimating the variances and co-variances. On the basis of a practical example, the proper handling of both terms is shown. In addition, the article contains a few examples concerning non-intuitive facts, including one that proves a possible (μ, σ) dominance inversion when changing from the simple to the log return notion.

Résumé

Rendements logarithmiques versus rendements simples
Réflexions sur l'utilisation correcte de ces deux notions dans la théorie et la pratique

Cet essaie examine les différences entre les notions des rendements logarithmiques et simples. Surtout en ce qui concerne les propriétés stochastiques et statistiques, ces différences portent une grande signification à beaucoup de domaines de la théorie des marchés des capitaux et de l'économie financière. En outre, l'auteur analyse explicitement des questions de l'annualisation et de l'estimation des variances et des covariances. En se basant sur un exemple pratique, il donne des indications pour utiliser correctement ces deux facteurs. En plus, l'essaie contient quelques exemples concernant des aspects qui ne sont pas intuitivement compréhensible immédiatement. Le reversement possible de la dominance (μ, σ) en transformant les rendements logarithmiques aux rendements simples est prouvé dans une de ces exemples.

DOI https://doi.org/10.3790/ccm.35.2.216 | Generated on 2023-01-16 13:18:43
OPEN ACCESS | Licensed under CC BY 4.0 | https://creativecommons.org/about/cclicenses/