

Beiträge zu  
Verteilungseigenschaften und  
Asymptotik von stationären  
Poisson-Zylinderprozessen

Dissertation zur Erlangung des  
akademischen Grades Dr. rer. nat.

eingereicht an der Mathematisch-  
Naturwissenschaftlich-Technischen  
Fakultät der Universität Augsburg

von  
**Christian Bräu**

Augsburg, Juli 2015

Erstgutachter:	Prof. Dr. Lothar Heinrich
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Volker Schmidt
Drittgutachter:	Prof. Dr. Vitali Wachtel

Mündliche Prüfung: 21.12.2015

## Zusammenfassung

In dieser Dissertation werden Verteilungseigenschaften und asymptotische Eigenschaften von stationären Poisson-Zylinderprozessen untersucht.

Ein  $k$ -Zylinder im  $d$ -dimensionalen euklidischen Raum, wobei  $0 \leq k \leq d - 1$ , ist eine  $k$ -dimensionale Ebene, welche mittels einer kompakten Zylinderbasis aus dem orthogonalen Komplement dieser Ebene verdickt wird. Eine abzählbare Familie derartiger Zylinder, welche einen stationären Poisson-Prozess auf der Menge aller  $k$ -Zylinder bilden, heißt ein stationärer Poisson- $k$ -Zylinderprozess und die hiermit gebildete Vereinigungsmenge ein stationäres Poisson- $k$ -Zylindermodell.

Es wird zunächst gezeigt, dass stationäre Poisson- $k$ -Zylinderprozesse bzw. deren Vereinigungsmengen stets ergodisch sind. Anschließend beweisen wir eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Mischungseigenschaft. Wir bestimmen außerdem das Kapazitätsfunktional des Schnittes eines stationären Poisson- $k$ -Zylindermodells mit einem festen linearen Unterraum.

Ein Großteil der Arbeit beschäftigt sich mit dem Spezialfall  $k = d - 1$ . In diesem Fall sind die Zylinder „dicke“ Hyperebenen. Hier untersuchen wir Punktprozesse, welche durch die Schnittpunkte der Hyperebenen, aus denen die Ränder der Zylinder bestehen, erzeugt werden und zusätzlich einer abhängigen Verdünnung unterworfen werden. Insbesondere werden wir einen zentralen Grenzwertsatz hierfür beweisen und die dazugehörige asymptotische Varianz berechnen. Durch die Verdünnung können hierbei Methoden, welche für Schnittpunkte von Poisson-Hyperebenenprozessen verwendet wurden, nicht übertragen werden. Hieraus lässt sich dann ein zentraler Grenzwertsatz für die Euler-Poincaré-Charakteristik eines ebenen Poisson-Zylindermodells in einem wachsenden Beobachtungsfenster folgern. Schließlich untersuchen wir noch die Polytope, welche durch das Komplement eines  $(d - 1)$ -Zylindermodells induziert werden.

## Abstract

This thesis investigates distribution properties and asymptotic properties of stationary Poisson cylinder processes.

A  $k$ -cylinder in  $d$ -dimensional euclidean space, where  $0 \leq k \leq d-1$ , is a  $k$ -dimensional subspace, which is dilated by a compact cylinder base taken from the orthogonal complement of this subspace. A countable family of such cylinders, which forms a stationary Poisson point process on the space of all  $k$ -cylinders, is called a stationary Poisson cylinder process and the hereby formed union set a stationary Poisson cylinder model.

We will show, that stationary Poisson cylinder processes respectively their union sets are always ergodic. Afterwards we proof a necessary and sufficient condition for the mixing property. Furthermore we will determine the capacity functional of the section of a stationary Poisson cylinder model with a linear subspace.

The largest part of this work deals with the special case  $k = d - 1$ . In this case the cylinders are „thick“ hyperplanes. We will study point processes induced by the intersection points formed by the hyperplanes, which form the boundary of the cylinders. These point processes are additionally subjected to a depended thinning. In particular we will proof a central limit theorem for these point processes and calculate the accompanying asymptotic variance. Due to the depended thinning, methods used for the intersection points of Poisson hyperplane processes cannot be applied here. From this we deduce a central limit theorem for the Euler-Poincaré-characteristic of a planar cylinder model in a growing observation window. Finally we investigate the polytopes, which are induced by the complement of a  $(d - 1)$ -cylinder model.

# Danksagung

Eine wissenschaftliche Arbeit ist nie das Werk einer einzelnen Person, deshalb ist es jetzt an der Zeit, mich bei allen Menschen zu bedanken, die mir die Erstellung meiner Dissertation ermöglicht haben.

Meinem Doktorvater Herr Professor Lothar Heinrich, dessen Tür für konstruktive Gespräche stets offen stand, möchte ich mich ganz besonders danken. Sein unerschöpflichen Fundus an thematischen und wissenschaftlichen Hinweisen hat dieser Arbeit stets neue Impulse gegeben und sie erst ermöglicht. Bei meinen Kollegen am Institut für Mathematik der Universität Augsburg, insbesondere Katrin Grimm, Michael Nolde, Cédric Martin, Jan Natolski, Christoph Gietl und Fabian Reffel, möchte ich für die kameradschaftliche Atmosphäre und die Hilfe in verschiedensten Bereichen bedanken.

Schließlich möchte ich mich auch bei Freunden und Familie bedanken, die auf ihre Weise ebenfalls zu dieser Arbeit beigetragen haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Markierte Punktprozesse . . . . .	5
2.2	Zufällige abgeschlossene Mengen . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Stationäre Poisson-<math>k</math>-Zylinderprozesse und Zylindermodelle</b>	<b>13</b>
3.1	Allgemeine Definition und einige bekannte Eigenschaften . . . . .	13
3.2	Der Spezialfall $k = d - 1$ . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Ergodizität und Mischungseigenschaften stationärer Poisson-Zylindermodelle</b>	<b>19</b>
4.1	Ergodizität . . . . .	20
4.2	Mischungseigenschaften . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Lineare Schnitte durch stationäre Poisson-Zylindermodelle</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Ecken und Schnittpunkte induziert durch stationären Poisson-<math>(d - 1)</math>-Zylindermodelle</b>	<b>35</b>
6.1	Ecken und Schnittpunkte als Punktprozesse . . . . .	36
6.2	Intensität . . . . .	39
6.3	Größen zweiter Ordnung . . . . .	42
6.4	Asymptotische Kovarianz . . . . .	53
6.5	Ein zentraler Grenzwertsatz . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Ein Zentraler Grenzwertsatz für die Euler-Poincaré-Charakteristik eines stationären Poisson-Zylindermodells in der Ebene</b>	<b>95</b>
<b>8</b>	<b>Stationäre Poisson-<math>(d - 1)</math>-Zylinderprozesse als Mosaik mit dicken Rändern</b>	<b>101</b>
8.1	Zufällige Mosaik und deren Zellen . . . . .	101
8.2	Durch stationäre Poisson- $(d - 1)$ -Zylinderprozesse induzierte Zellen . . .	102
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>107</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>111</b>
	<b>Index</b>	<b>115</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>117</b>





# 1 Einleitung

Ein  $k$ -Zylinder in  $\mathbb{R}^d$ , mit  $0 \leq k \leq d - 1$ , im Sinne der Integralgeometrie ist eine Menge der Form  $K \oplus L$ , wobei  $L$  ein  $k$ -dimensionaler linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^d$ , der *Richtungsraum*, und  $K \subset L^\perp$  eine kompakte Menge, die *Basis*, ist. Ein  $k$ -Zylinderprozess ist dann kurz gesagt eine Familie abzählbar vieler  $k$ -Zylinder. Bilden diese einen Poisson-Prozess, so sprechen wir von einem Poisson- $k$ -Zylinderprozess. Durch die Vereinigung all dieser Zylinder erhalten wir eine zufällige Menge, welche wir als Poisson- $k$ -Zylindermodell bezeichnen. Sind die Basen konvex, handelt es sich im Fall  $d = 2$ ,  $k = 1$  um zufällige Streifen und im Fall  $d = 3$ ,  $k = 1$  um zufällige Röhren. Simulationen der jeweiligen Vereinigungsmengen sind in Abbildung 1.1 dargestellt.

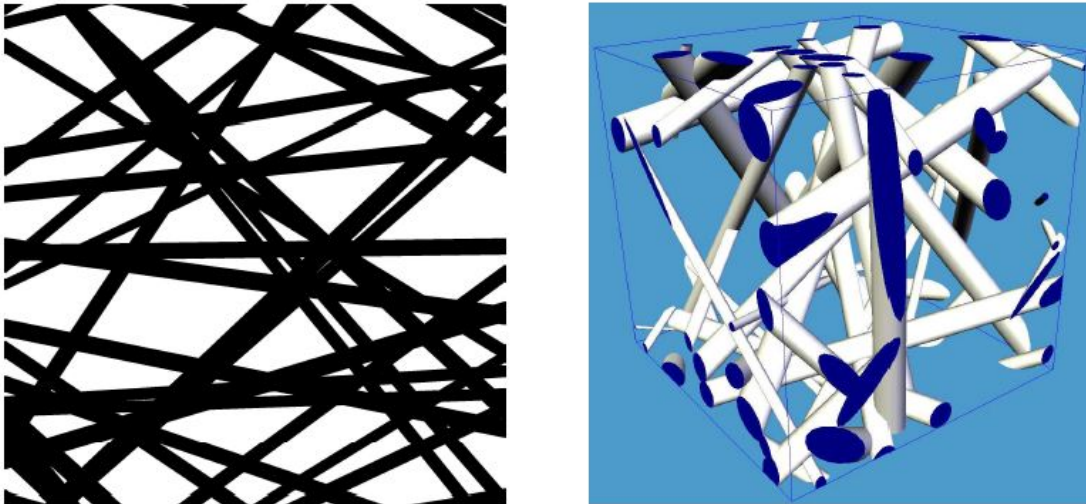


Abbildung 1.1: Simulation eines Poisson-1-Zylindermodells in  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  entnommen aus Heinrich und Spiess (2013)

Poisson-Zylinderprozesse eignen sich zur Modellierung bestimmter Materialien, welche beispielsweise aus langen Röhren mit sehr geringer Krümmung aufgebaut sind. Ein Beispiel hierfür, welches von Spiess und Spodarev (2011) untersucht wird, sind Materialien wie sie in sogenannten gas diffusion layers in Polymerelektrolytbrennstoffzellen Verwendung finden. Abbildung 1.2 zeigt mikroskopische Aufnahmen eines solchen Materials. Schladitz u. a. (2006) verwenden Poisson-Zylinderprozesse mit festen Kreisen als Basen zur Modellierung von Vliesstoffen aus Polyethylenterephthalat, welche für die Innenverkleidung von Autodächern verwendet werden.

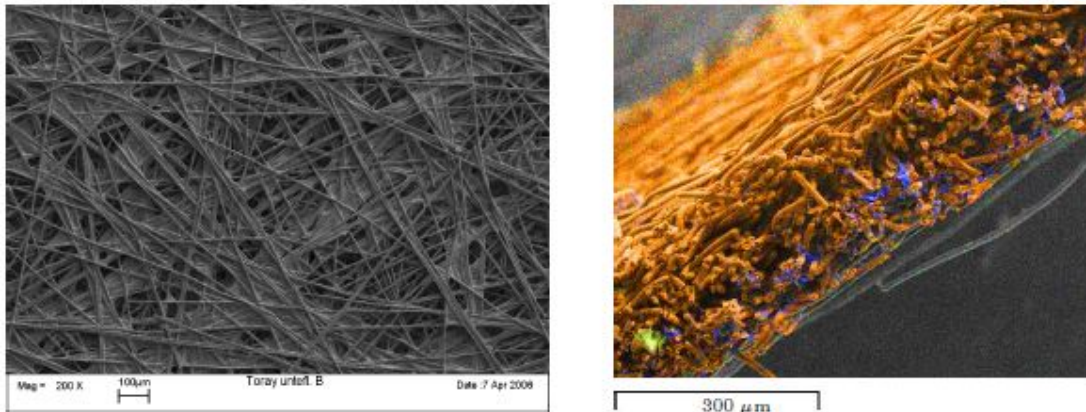


Abbildung 1.2: Mikroskopische Aufnahme eines gas diffusion layers (Draufsicht links, Seitenansicht rechts) (Centre for Solar Energy and Hydrogen Research, Ulm, entnommen aus Spiess (2012))

Aus theoretischer Sicht sind Poisson-Zylinderprozesse bzw. Zylindermodelle interessant, weil sich zum einen viele grundlegende Kenngrößen wie beispielsweise Kapazitätsfunktional, Volumenanteil oder Kontaktverteilungen ähnlich berechnen und schätzen lassen wie bei den verwandten und gut untersuchten Booleschen Modellen. Andererseits durch die unbeschränkten Zylinder starke weitreichende Abhängigkeiten erzeugt werden, welche eine kompliziertere Asymptotik zur Folge haben.

Prozesse dieser Art bzw. die durch sie gebildeten Vereinigungsmengen wurden im Fall  $k = d - 1$  vermutlich erstmals von Miles (1972) als Verallgemeinerung von Poisson-Hyperebenenprozessen und für andere Werte von  $k$  von Miles (1974) eingeführt, allerdings auch wieder als Verallgemeinerung von Poisson-Ebenenprozessen und weniger als eigenständiges Modell. Genauere Untersuchungen finden sich dann in Matheron (1975) und Davy (1978), sowie etwas später in Schneider (1987) und Weil (1987).

In der jüngeren Vergangenheit haben Poisson-Zylinderprozesse wieder größere Aufmerksamkeit erfahren. So wurden von Spiess und Spodarev (2011) einige wichtige Charakteristiken wie Volumenanteil, Kovarianzfunktion und Kontaktverteilungsfunktionen bestimmt. Aufbauend auf Heinrich und Spiess (2009) finden sich in Spiess (2012) und Heinrich und Spiess (2013) schließlich zentrale Grenzwertsätze für Volumen und Oberfläche in wachsenden Beobachtungsfenstern. Spiess (2012) beschäftigt sich unter anderem auch mit der Schätzung bestimmter Kenngrößen und Verteilungen, beispielsweise der Richtungsverteilung von Poisson-Zylinderprozessen. In Bräu und Heinrich (2015) werden außerdem Überdeckungsverteilungen in Zusammenhang mit multivariaten Poisson-Verteilungen bestimmt.

Diese Arbeit soll zunächst einige noch offene grundlegende Fragen im allgemeinen Fall klären. Der Großteil der Untersuchungen wird aber den Spezialfall  $k = d - 1$  betreffen. Die Zylinder sind in diesem Fall „dicke“ Hyperebenen. Insbesondere wollen wir in diesem

---

Fall einen speziellen induzierten Punktprozess untersuchen.

Wir beginnen dazu in Kapitel 2 mit einer kurzen Einführung in die Theorie markierter Punktprozesse und zufälliger abgeschlossener Mengen. Ziel ist es, die nötige grundlegende Notation sowie die später benötigten Hilfsmittel bereitzustellen.

In Kapitel 3 werden stationäre Poisson- $k$ -Zylinderprozesse bzw. Zylindermodelle definiert. Insbesondere wird eine an den Spezialfall  $k = d - 1$  angepasste Beschreibung in Abschnitt 3.2 eingeführt.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit Ergodizität und Mischungseigenschaften stationärer Poisson- $k$ -Zylindermodellen. Dabei wird sich ergeben, dass diese stets ergodisch, aber im allgemeinen nicht mischend sind. Allerdings ergibt sich eine relativ einfache notwendige und hinreichende Bedingung für die Mischungseigenschaft.

In Kapitel 5 betrachten wir den Schnitt eines stationären Poisson- $k$ -Zylindermodells mit einem linearen Unterraum. Dieses Problem ist gelegentlich in der Praxis interessant. Wir denken hier beispielsweise an mikroskopische Aufnahmen von Querschnitten eines Materials. Wir zeigen, dass lineare Schnitte von stationären Poisson- $k$ -Zylindermodellen mit einem festen linearen Unterraum die Vereinigung von Poisson-Zylindermodellen in diesem Unterraum sind. Das Kapazitätsfunktional kann dabei exakt angegeben werden, auch wenn die Formel im allgemeinen kompliziert ist.

Den größten Teil der Arbeit nimmt schließlich Kapitel 6 ein. Hier untersuchen wir den Punktprozess der tatsächlich sichtbaren Ecken in einem stationären Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodell (siehe Abbildung 6.1 weiter unten) und fassen diese als verschobene Schnittpunkte von Hyperebenen auf, welche noch einer abhängigen Verdünnung unterworfen werden. Wir bestimmen dann zunächst die Intensität und Größen zweiter Ordnung dieses Punktprozesses. Aufbauend hierauf berechnen wir eine asymptotische Kovarianz und beweisen schließlich einen zentralen Grenzwertsatz, welcher das Hauptresultat dieser Arbeit darstellt. Durch die abhängige Verdünnung und die weitreichenden Abhängigkeiten erweist sich beides als aufwendig.

Dieses Ergebnis wird in Kapitel 7 genutzt um einen zentralen Grenzwertsatz für die Euler-Poincaré-Charakteristik eines ebenen stationären Poisson-1-Zylindermodells in einem wachsenden Beobachtungsfenster zu zeigen.

In Kapitel 8 beschäftigen wir uns schließlich noch mit dem Komplement eines stationären Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodells, kurz gesagt die weißen Flächen in Abbildung 1.1, und fassen dieses als Mosaik mit „dicken Rändern“ auf. In diesem Zusammenhang untersuchen wir die typische Zelle sowie die Nullpunktzelle und erhalten das überraschende Ergebnis, dass diese nicht von der Dicke der Zylinder abhängen.

Abgesehen von den einführenden Kapiteln findet sich am Ende jeden Kapitels außerdem noch ein Abschnitt mit Kommentaren und offenen Fragen.



## 2 Grundlagen

### 2.1 Markierte Punktprozesse

Punktprozesse und markierte Punktprozesse dienen sowohl zur Konstruktion als auch zur Untersuchung zufälliger abgeschlossener Mengen und sind damit ein unverzichtbares Hilfsmittel in der stochastischen Geometrie. Die folgende kurze Einführung lehnt sich an die Darstellung von Heinrich (2013), Schneider und Weil (2000) sowie König und V. Schmidt (1992) an, wo sich auch weiterführende Literatur für ein tiefer gehendes Studium findet.

Wir führen markierte Punktprozesse nun als zufällige Zählmaße ein. Sei  $\mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  die Menge der lokal endlichen Zählmaße auf  $[\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})]$ , wobei  $\mathbb{R}^d$  der  $d$ -dimensionale euklidische Raum und  $\mathbb{M}$  ein polnischer Raum (ein separabler und vollständig metrisierbarer topologischer Raum), der sogenannte *Markenraum*, ist. Mit  $\mathcal{B}(\cdot)$  bezeichnen wir die durch die zugehörige Topologie erzeugte Borel- $\sigma$ -Algebra. Unter *lokal endlich* verstehen wir hierbei  $\psi(B \times \mathbb{M}) < \infty$  für alle beschränkten Mengen  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , wenn  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$ . Mit  $\mathfrak{N}_{\mathbb{M}} := \sigma(\{\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}} : \psi(B \times L) = k : k \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ beschränkt}, L \in \mathcal{B}(\mathbb{M})\})$  wird  $[\mathcal{N}_{\mathbb{M}}, \mathfrak{N}_{\mathbb{M}}]$  zu einem messbaren Raum. Hier bezeichnet  $\sigma(\cdot)$  die erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

Wegen der lokalen Endlichkeit gibt es zu jedem Zählmaß  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  immer eine Folge  $(x_i(\psi), m_i(\psi))_{i \geq 1}$ , so dass

$$\psi = \sum_{i \geq 1} \delta_{(x_i(\psi), m_i(\psi))}, \quad (2.1)$$

wobei  $\delta_x$  das Dirac-Maß bezeichnet. Die Abhängigkeit der Folge von  $\psi$  werden wir dabei später weglassen. Diese Indizierung ist nicht eindeutig und die Atome können dabei mit verschiedenen, aber endlichen, Vielfachheiten auftreten. Sind die  $(x_i(\psi), m_i(\psi))$ ,  $i \geq 1$ , aber paarweise verschieden, also alle Vielfachheiten 1, so nennen wir  $\psi$  *einfach*. Formal ist dies genau dann der Fall, wenn  $\psi(\{x\} \times \mathbb{M}) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt.

Für ein Zählmaß  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  heißt

$$s(\psi) = \{(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} : \psi(\{(x, m)\}) > 0\}$$

der *Träger* von  $\psi$ . Ist  $\psi = \sum_{i \geq 1} \delta_{(x_i(\psi), m_i(\psi))}$  einfach, so können wir  $\psi$  mit seinem Träger identifizieren, d.h. es ist  $s(\psi) = \{(x_i(\psi), m_i(\psi)) : i \geq 1\}$ .

Ist nun ein hypothetischer Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}]$  gegeben, so definieren wir einen markierten Punktprozess als Zufallselement mit Werten in  $\mathcal{N}_{\mathbb{M}}$ . Die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraumes und einer solchen Abbildung kann ausgehend von einer Familie endlich dimensionaler Verteilungen ähnlich wie bei stochastischen Prozessen sichergestellt werden.

**Definition 2.1** Eine  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_{\mathbb{M}})$ -messbare Abbildung

$$\Psi_{\mathbb{M}} : [\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}] \rightarrow [\mathcal{N}_{\mathbb{M}}, \mathfrak{N}_{\mathbb{M}}]$$

heißt ein (zufälliger) markierter Punktprozess auf  $\mathbb{R}^d$  mit Markenraum  $\mathbb{M}$ . Das Bildmaß  $P_{\Psi_{\mathbb{M}}} = \mathbb{P} \circ \Psi_{\mathbb{M}}^{-1}$  heißt die Verteilung von  $\Psi_{\mathbb{M}}$ .

Wir betrachten später auch unmarkierte Punktprozesse. Diese werden analog eingeführt als zufällige lokal endliche Zählmaße auf  $[\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)]$ . Aus jedem markierten Punktprozess erhält man durch  $\Psi(\cdot) = \Psi_{\mathbb{M}}(\cdot \times \mathbb{M})$  einen unmarkierten Punktprozess. Alle unten aufgeführten Aussagen gelten analog auch für unmarkierte Punktprozesse.

Wir führen noch drei wichtige grundlegende Eigenschaften von Punktprozessen ein. Hierfür definieren wir für  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $L \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$  sowie  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $O \in \text{SO}_d := \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} : A^{-1} = A^T, \det A = 1\}$  einen Translations- und einen Rotationsoperator durch

$$(T_x \psi)(B \times L) := \psi((B + x) \times L)$$

$$(R_O \psi)(B \times L) := \psi(OB \times L).$$

Ferner bezeichnet  $\stackrel{d}{=}$  die Verteilungsgleichheit.

**Definition 2.2** Ein markierter Punktprozess  $\Psi_{\mathbb{M}}$  heißt

1. einfach, wenn  $\mathbb{P}(\Psi_{\mathbb{M}}(\{x\} \times \mathbb{M}) \leq 1) = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , also wenn  $\Psi_{\mathbb{M}}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 einfach ist.
2. stationär oder homogen, wenn  $T_x \Psi_{\mathbb{M}} \stackrel{d}{=} \Psi_{\mathbb{M}}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,
3. isotrop, wenn  $R_O \Psi_{\mathbb{M}} \stackrel{d}{=} \Psi_{\mathbb{M}}$  für alle  $O \in \text{SO}_d$ .

Wegen (2.1) gibt es zu jedem markiertem Punktprozess  $\Psi_{\mathbb{M}}$  eine Folge von Zufallsvektoren  $(X_i, M_i)_{i \geq 1}$  in  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  mit  $\Psi_{\mathbb{M}} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)}$ . Zufällige Punktprozesse können also auch als eine Folge von Zufallsvektoren interpretiert werden oder geometrisch als ein zufälliges Punktmuster im Raum  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ . Umgekehrt wird durch jede abzählbare zufällige Menge  $\Xi = \{(X_1, M_1), (X_2, M_2), \dots\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  mit  $\#(A \cap \Xi) < \infty$  für alle kompakten  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$  mittels  $\Psi_{\mathbb{M}} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)}$  ein markierter Punktprozess definiert. Wir bezeichnen deshalb auch geeignete abzählbare zufällige Mengen als Punktprozesse.

Die Verteilung eines einfachen markierten Punktprozesses lässt sich auch mittels der Leerwahrscheinlichkeiten festlegen.

**Satz 2.1** Sei  $\Psi_{\mathbb{M}}$  ein einfacher markierter Punktprozess. Dann wird die Verteilung  $P_{\Psi_{\mathbb{M}}}$  eindeutig festgelegt durch die Leerwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(\Psi_{\mathbb{M}}(A) = 0) = P_{\Psi_{\mathbb{M}}}(\{\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}} : \psi(A) = 0\})$$

für alle kompakten  $A \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ .

Wichtige zahlenmäßige Charakteristiken von markierten Punktprozessen sind das Intensitätsmaß und höhere Momentenmaße. Sie können als eine Art Erwartungswert bzw. als Momente aufgefasst werden.

**Definition 2.3** Sei  $\Psi_{\mathbb{M}} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)} \sim P_{\Psi_{\mathbb{M}}}$  ein markierter Punktprozess. Dann heißt die für  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$  definierte Abbildung

$$\Lambda_{\Psi_{\mathbb{M}}}(A) := \mathbb{E} \Psi_{\mathbb{M}}(A) = \mathbb{E} \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)}(A) \quad (2.2)$$

das Intensitätsmaß von  $\Psi_{\mathbb{M}}$ . Wenn  $\Psi_{\mathbb{M}}$  einfach ist, können wir auch

$$\Lambda_{\Psi_{\mathbb{M}}}(A) = \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \sum_{(x, m) \in s(\psi)} \mathbb{1}_A((x, m)) P_{\Psi_{\mathbb{M}}}(\mathrm{d}\psi)$$

schreiben.

Wir werden ab hier die generelle Voraussetzung

$$\Lambda_{\Psi_{\mathbb{M}}}(B \times \mathbb{M}) < \infty \quad \text{für alle beschränkten } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

treffen, d.h. das Intensitätsmaß eines Punktprozesses sei stets lokal-endlich. Durch algebraische Induktion ergibt sich aus der Definition des Intensitätsmaßes die *Campbell-Mecke-Formel*

$$\mathbb{E} \sum_{i \geq 1} f(X_i, M_i) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} f(x, m) \Lambda_{\Psi_{\mathbb{M}}}(\mathrm{d}(x, m)), \quad (2.3)$$

wobei  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-negativ und messbar oder integrierbar bzgl.  $\Lambda_{\Psi_{\mathbb{M}}}$  ist.

Ist der markierte Punktprozess stationär, so lässt sich das Intensitätsmaß zerlegen. Dazu sei ab hier  $\nu_d$  das *Lebesgue-Maß* auf  $\mathbb{R}^d$ . Allgemeiner werden wir später mit  $\nu_E$  das Lebesgue-Maß auf einem festen linearen oder affinen Unterraum  $E$  bezeichnen.

**Satz 2.2** Für einen stationären markierten Punktprozess  $\Psi_{\mathbb{M}}$  gilt

$$\Lambda_{\Psi_{\mathbb{M}}}(B \times L) = \lambda \nu_d(B) Q(L) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), L \in \mathcal{B}(\mathbb{M}) \quad (2.4)$$

mit  $\lambda = \mathbb{E} \Psi_{\mathbb{M}}([0, 1]^d \times \mathbb{M})$  und einem eindeutig bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  auf  $\mathbb{M}$ .

Wir nennen  $\lambda$  die *Intensität* und  $Q$  die *Markenverteilung* von  $\Psi_{\mathbb{M}}$ . Ein Zufallselement  $M_0$  mit Verteilung  $Q$  heißt eine *typische Marke*.

Durch Produktbildung definiert man höhere Momentenmaße ähnlich wie (2.2). Für uns wichtiger sind jedoch die faktoriellen Momentenmaße.

**Definition 2.4** Sei  $\Psi_{\mathbb{M}}$  einfach und  $B_1 \times L_1, \dots, B_k \times L_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$ . Dann heißt

$$\alpha_{\Psi_{\mathbb{M}}}^{(k)} \left( \times_{i=1}^k (B_i \times L_i) \right) := \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \sum_{(x_1, m_1), \dots, (x_k, m_k) \in s(\psi)}^{\neq} \prod_{j=1}^k \mathbb{1}_{B_j \times L_j}(x_j, m_j) P_{\Psi_{\mathbb{M}}}(\mathrm{d}\psi)$$

das  $k$ -te faktorielle Momentenmaß von  $\Psi_{\mathbb{M}}$ . Hierbei bedeutet  $\sum^{\neq}$ , dass über paarweise verschiedene Elemente summiert wird.

Das wichtigste Beispiel für einen markierten Punktprozess ist der markierte Poisson-Punktprozess. Er wird uns auch später zur Konstruktion von Poisson-Zylinderprozessen dienen.

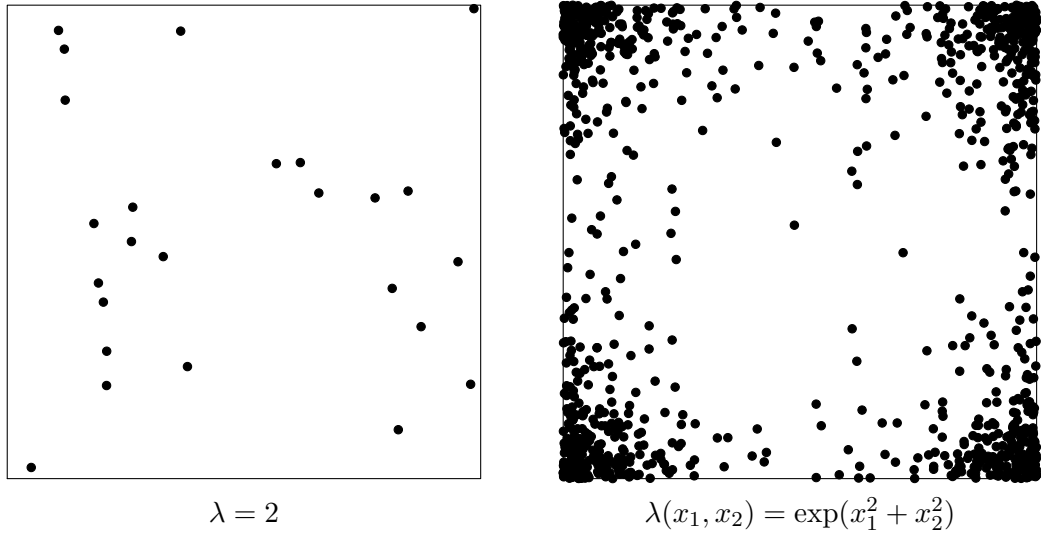


Abbildung 2.1: Realisierung eines stationären und eines nicht stationären Poisson-Prozesses

**Definition 2.5** Es sei  $\Lambda_{\mathbb{M}} : [\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})] \rightarrow [0, \infty]$  ein diffuses, lokal-endliches Maß. Dann heißt ein markierter Punktprozess  $\Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}}$  ein markierter Poisson-Punktprozess oder kurz ein Poisson-Prozess, falls:

1. Die Zufallsgröße  $\Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}}(B \times L)$  ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert  $\Lambda_{\mathbb{M}}(B \times L)$  für alle beschränkten  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $L \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$ .
2. Die Zufallsgrößen  $\Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}}(B_1 \times L_1), \dots, \Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}}(B_k \times L_k)$  sind vollständig unabhängig, falls  $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$  sowie  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  paarweise disjunkt und beschränkt sind.



Abbildung 2.1 zeigt die Realisierung eines stationären und eines nicht-stationären unmarkierten Poisson-Punktprozesses. Das Intensitätsmaß für den nicht-stationären Fall ist gegeben durch die Lebesgue-Dichte  $\lambda(x_1, x_2) = \exp\{x_1^2 + x_2^2\}$ .

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass ein markierter Poisson-Prozess genau dann stationär bzw. isotrop ist, wenn dies für das Intensitätsmaß gilt. Insbesondere ist ein Poisson-Prozess genau dann stationär, wenn das Intensitätsmaß die Form (2.4), wie in Satz 2.2 hat. Ein stationärer Poisson-Prozess (genauer seine Verteilung) ist also durch eine Intensität  $\lambda > 0$  und eine Markenverteilung  $Q$  eindeutig bestimmt. Da das Intensitätsmaß als diffus vorausgesetzt wird, ist ein Poisson-Prozess in unserem Sinne stets einfach.

Es zeigt sich ferner, dass ein stationärer, markierter Poisson-Punktprozess  $\Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}}$  automatisch *unabhängig markiert* ist, d.h. ist  $\Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, M_i)}$ , so ist die Folge  $(M_i)_{i \geq 1}$  unabhängig, identisch verteilt gemäß der Markenverteilung  $Q$  und ebenfalls unabhängig von der Folge  $(X_i)_{i \geq 1}$ . Im allgemeinen Fall müssen stationäre markierte Punktprozesse aber nicht unabhängig markiert sein. Einen unabhängig markierten Punktprozess erhält man also, indem man sich einen unmarkierten Punktprozess und eine Markenverteilung  $Q$  vorgibt und dann jeden Punkt mit einer unabhängigen, gemäß  $Q$  verteilten Marke versieht.

**Satz 2.3** *Sei  $\Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}}$  ein markierter Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß  $\Lambda_{\mathbb{M}}$ . Dann gilt:*

1. *Für jede messbare Funktion  $v : \mathbb{R}^d \times \mathbb{M} \rightarrow [0, 1]$ , so dass  $1 - v(\cdot, m)$  für alle  $m \in \mathbb{M}$  einen beschränkten Träger hat, gilt*

$$\int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \prod_{(x,m) \in s(\psi)} v(x, m) P_{\Pi_{\Lambda_{\mathbb{M}}}}(d\psi) = \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} (v(x, m) - 1) \Lambda_{\mathbb{M}}(d(x, m)) \right\}. \quad (2.5)$$

2. *Der dazugehörige unmarkierte Punktprozess ist ein Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß  $\Lambda_{\mathbb{M}}(\cdot \times \mathbb{M})$ .*

Das Funktional, welches durch die linke Seite von (2.5) für  $v$  definiert wird, heißt *erzeugendes Funktional*. Es kann auch für beliebige Punktprozesse definiert werden und legt deren Verteilung eindeutig fest.

Für die faktoriellen Momentenmaße eines Poisson-Prozesses gilt ferner eine Charakterisierung.

**Satz 2.4** *Ein einfacher markierter Punktprozess  $\Psi_{\mathbb{M}}$  mit Intensitätsmaß  $\Lambda_{\mathbb{M}}$  ist ein markierter Poisson-Prozess genau dann, wenn  $\alpha_{\Psi_{\mathbb{M}}}^{(k)} = \underbrace{\Lambda_{\mathbb{M}} \otimes \cdots \otimes \Lambda_{\mathbb{M}}}_{k\text{-mal}}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.*

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Mittelwerten, welches wir später häufig verwenden, findet sich in der folgenden Formel.

**Satz 2.5 (Mecke-Slivnyak-Formel)** *Es sei  $P_{\lambda,Q}$  die Verteilung eines stationären markierten Poisson-Prozesses mit Intensität  $\lambda > 0$  und Markenverteilung  $Q$ . Ferner sei  $f : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})^k \times \mathcal{N}_{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-negative messbare oder integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \sum_{(x_1, m_1), \dots, (x_k, m_k) \in s(\psi)}^{\neq} f(x_1, m_1, \dots, x_k, m_k, \psi - \delta_{(x_1, m_1)} - \dots - \delta_{(x_k, m_k)}) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &= \lambda^k \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})^k} \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} f(x_1, m_1, \dots, x_k, m_k, \psi) P_{\lambda, Q}(d\psi) dx_k Q(dm_k) \dots dx_1 Q(dm_1). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Abschließend bemerken wir, dass in vielen der obigen Überlegungen der euklidische Raum  $\mathbb{R}^d$  auch durch einen lokal kompakten Hausdorff-Raum ersetzt werden kann. Auf diese Weise können beispielsweise (markierte) Punktprozesse und insbesondere auch Poisson-Punktprozesse auf dem System der nicht leeren abgeschlossenen Mengen erklärt werden. Ist ein solcher Punktprozess auf dem System der nicht leeren kompakten Teilmengen konzentriert, so bezeichnen wir diesen nach Schneider und Weil (2000, Kapitel 4.2) auch als *Partikelprozess*. Stationäre Partikelprozesse lassen sich nach Schneider und Weil (2000, S.136, Satz 4.3.1) auch als markierte Punktprozesse darstellen. Sei  $\mathcal{K}_d$  das System der kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$ , versehen mit der Hausdorff-Metrik, und  $\mathcal{K}'_d := \mathcal{K}_d \setminus \emptyset$ . Unter einer *Zentrumsfunktion* verstehen wir dann eine messbare Abbildung  $c : \mathcal{K}'_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , welche  $c(t + K) = t + c(K)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^d$  und  $K \in \mathcal{K}'_d$  erfüllt. Häufig verwendete Zentrumsfunktionen sind beispielsweise der Umkugelmittelpunkt oder das lexikographische Minimum oder Maximum. Ist dann  $\Psi = \sum_{i \geq 1} \delta_{\Xi_i}$  ein stationärer Partikelprozess, so wird durch

$$\Psi_c := \sum_{i \geq 1} \delta_{(c(\Xi_i), \Xi_i - c(\Xi_i))}$$

ein stationärer markierter Punktprozess mit Markenraum  $\mathcal{K}'_d$  definiert. Die durch die Zerlegung (2.4) gewonnene Intensität hängt dabei nicht von der Zentrumsfunktion  $c$  ab und stimmt mit der Intensität von  $\Psi$  überein. Die Markenverteilung hängt allerdings von  $c$  ab. Diese Abhängigkeit ist aber nur additiv, d.h. ist  $c'$  eine weitere Zentrumsfunktion, so ist die Markenverteilung von  $\Psi_{c'}$  das Bild der Markenverteilung von  $\Psi_c$  unter der Abbildung  $K \mapsto K - c'(K)$ . Wir bezeichnen deshalb die Markenverteilung in diesem Fall auch als Formverteilung.

## 2.2 Zufällige abgeschlossene Mengen

Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an Schneider und Weil (2000) und Molchanov (2013).

Wir bezeichnen von nun an mit  $\mathcal{F}_d$  und  $\mathcal{K}_d$  die Mengensysteme der abgeschlossenen bzw. der kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ . Ferner sei  $\mathcal{C}_d$  das Mengensystem der konvexen Körper (d.h. der kompakten und konvexen Mengen) des  $\mathbb{R}^d$ .

Eine zufällige abgeschlossene Menge in  $\mathbb{R}^d$  ist ein Zufallselement auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}]$  mit Werten in  $\mathcal{F}_d$ . Das Mengensystem  $\mathcal{F}_d$  wird dabei versehen mit der durch die sogenannten „hitting sets“  $\mathcal{F}_K := \{F \in \mathcal{F}_d : F \cap K \neq \emptyset\}$ ,  $K \in \mathcal{K}_d$ , erzeugten  $\sigma$ -Algebra, welche wir mit  $\sigma_f$  bezeichnen. Es ist also  $\sigma_f = \sigma(\mathcal{F}_K : K \in \mathcal{K}_d)$ .

**Definition 2.6** *Eine zufällige abgeschlossene Menge (ZAM) ist eine  $(\mathfrak{A}, \sigma_f)$ -messbare Abbildung*

$$\Xi : [\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}] \rightarrow [\mathcal{F}_d, \sigma_f].$$

Das Bildmaß  $P_\Xi = \mathbb{P} \circ \Xi^{-1}$  heißt die Verteilung von  $\Xi$ .

Eine zufällige abgeschlossene Menge heißt stationär bzw. isotrop, wenn ihre Verteilung translations- bzw. rotationsinvariant ist, d.h. wenn  $T_x \Xi \stackrel{d}{=} \Xi$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  bzw.  $R_O \Xi \stackrel{d}{=} \Xi$  für alle  $O \in \text{SO}_d$ , wobei  $T_x B = \{x + y : y \in B\}$  und  $R_O B = \{R_O(y) : y \in B\}$ .

Das Analogon zur Verteilungsfunktion einer gewöhnlichen Zufallsgröße ist das Kapazitätsfunktional.

**Definition 2.7** *Sei  $\Xi$  eine zufällige abgeschlossene Menge. Dann heißt die für  $K \in \mathcal{K}_d$  definierte Abbildung*

$$T_\Xi(K) = \mathbb{P}(\Xi \cap K \neq \emptyset)$$

das Kapazitätsfunktional von  $\Xi$ .

$T_\Xi$  ist eine alternierende Choquet-Kapazität von unendlicher Ordnung und legt die Verteilung  $P_\Xi$  eindeutig fest. Es kann umgekehrt gezeigt werden, dass zu jeder alternierenden Choquet-Kapazität von unendlicher Ordnung  $T$  ein Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}]$  und eine ZAM  $\Xi$  existiert mit  $T = T_\Xi$ .

Ein Beispiel einer zufällig abgeschlossenen Menge haben wir bereits kennengelernt, nämlich den Träger eines einfachen unmarkierten Punktprozesses. Allgemeiner bildet die Vereinigungsmenge eines Punktprozesses auf dem System der abgeschlossenen Mengen eine ZAM. Wir definieren noch zwei einfache numerische Kenngrößen für stationäre ZAM.

**Definition 2.8** *Sei  $\Xi$  eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 < \nu_d(B) < \infty$ . Dann heißt die von der Wahl von  $B$  unabhängige Zahl*

$$p = \frac{\mathbb{E} \nu_d(\Xi \cap B)}{\nu_d(B)}$$

der Volumenanteil oder Volumendichte und

$$C(x) = \frac{\mathbb{E}\nu_d(\Xi \cap (\Xi - x) \cap B)}{\nu_d(B)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

die Kovarianz von  $\Xi$ .

Mit Hilfe des Satzes von Fubini lässt sich zeigen, dass

$$p = \mathbb{P}(x \in \Xi) = \mathbb{P}(0 \in \Xi) = T_{\Xi}(\{0\})$$

und

$$C(x) = \mathbb{P}(0 \in \Xi, x \in \Xi) = T_{\Xi}(\{0, x\})$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ .

# 3 Stationäre Poisson- $k$ -Zylinderprozesse und Zylindermodelle

## 3.1 Allgemeine Definition und einige bekannte Eigenschaften

Ein  $k$ -Zylinder im  $\mathbb{R}^d$  mit  $0 \leq k \leq d - 1$  ist eine Menge der Form  $K \oplus L$ , wobei  $L$  ein  $k$ -dimensionaler linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^d$  und  $K \subset L^\perp$  eine kompakte Menge ist. Ein Poisson- $k$ -Zylinderprozess kann also zunächst durch Vorgabe eines Intensitätsmaßes als ein Poisson-Prozess konzentriert auf der Menge aller  $k$ -Zylinder definiert werden. Im nächsten Schritt wird im Falle der Stationarität das Intensitätsmaß zerlegt in ein Maß auf der Menge der  $k$ -dimensionalen linearen Unterräume und in ein Maß auf den kompakten Teilmengen von  $L^\perp$  bei gegebenem  $L$ . Dieser Ansatz findet sich beispielsweise in Davy (1978, S.78-79), Miles (1974, S.214-215), Matheron (1975, S.147-148) und Spiess (2012). Wir gehen nun in gewisser Weise den umgekehrten Weg (siehe Heinrich und Spiess (2009) und Heinrich und Spiess (2013)) und definieren zunächst einen markierten Punktprozess, welcher alle Bestandteile zur Konstruktion der Zylinder enthält. Siehe insbesondere auch Spiess (2012) für die Äquivalenz dieser beiden Herangehensweisen. Die Schwierigkeit besteht nun im wesentlichen darin eine passende Darstellung für die Richtung eines Zylinders zu finden.

Es sei  $\mathcal{L}_k^d$  die Menge der  $k$ -dimensionalen linearen Unterräume und  $\mathcal{E}_k^d$  die Menge der  $k$ -dimensionalen affinen Unterräume des  $\mathbb{R}^d$  sowie  $O_d$  die orthogonale und  $SO_d$  die spezielle orthogonale Gruppe von  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . Für festes  $k \in \{0, \dots, d - 1\}$  definieren wir die linearen Unterräume  $E_k = \text{span}\{e_{d-k+1}, \dots, e_d\} \in \mathcal{L}_k^d$  und  $E_k^\perp = \text{span}\{e_1, \dots, e_{d-k}\} \in \mathcal{L}_{d-k}^d$ , wobei  $e_1, \dots, e_d$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^d$  bezeichnet. Bekanntlich gibt es zu jedem festen Unterraum  $L \in \mathcal{L}_k^d$  eine Äquivalenzklasse  $\mathbb{O}_L \subseteq SO_d/S(O_{d-k} \times O_k)$  von orthogonalen Matrizen, so dass  $OE_k = L$  für alle  $O \in \mathbb{O}_L$  gilt, wobei  $S(O_{d-k} \times O_k)$  die Menge der Blockmatrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A \in \mathbb{R}^{(d-k) \times (d-k)}, B \in \mathbb{R}^{k \times k}, A \in O_{d-k}, B \in O_k, \det A = \det B \right\}$$

ist. Wir wählen nun in jeder Äquivalenzklasse  $\mathbb{O}_L$  einen Repräsentanten  $O_L \in \mathbb{O}_L$  zum Beispiel als das lexikographisch kleinste Element der kompakten Menge  $\mathbb{O}_L$  und bezeichnen das so definierte Vertretersystem mit  $SO_{d,k}$ , d.h. es ist

$$SO_{d,k} = \{O_L : O_L = \text{lex min } \mathbb{O}_L, L \in \mathcal{L}_k^d\}.$$

Auf diese Weise können wir also einen linearen Unterraum  $L \in \mathcal{L}_k^d$  mit genau einer Matrix  $O_L \in \text{SO}_{d,k}$  identifizieren. Da  $\mathcal{L}_k^d$  und damit auch  $\text{SO}_{d,k}$  als Untermannigfaltigkeit die Dimension  $k(d-k)$  hat, muss es außerdem eine Parametrisierung mit  $k(d-k)$  Parametern geben. In den Fällen  $d=2, k=1$  und  $d=3, k=1$  sind für  $\theta \in [0, \pi)$  und  $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi/2]$  passende Parametrisierungen durch

$$O_L(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ und } O_L(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für  $d=3, k=2$  muss die erste Spalte von  $O_L(\theta_1, \theta_2)$  mit  $-1$  multipliziert und mit der dritten vertauscht werden. Im allgemeinen Fall scheint eine solche Parametrisierung jedoch unbekannt zu sein. Im Falle  $k=d-1$  kann die Festlegung der Richtung auch einfacher mit Hilfe eines Normalenvektors erfolgen; wir betrachten diesen Fall im nächsten Abschnitt.

Zur Konstruktion eines  $k$ -Zylinders sei nun ein eine Matrix  $\theta \in \text{SO}_{d,k}$ , eine Menge  $K \in \mathcal{K}'_{d-k}$  sowie ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^{d-k}$  gegeben. Dann wird durch

$$Z(x, \theta, K) := \theta((K+x) \times \mathbb{R}^k) = \theta((K'+x') \oplus E_k) \quad (3.1)$$

mit  $K'+x' = \{(x+y, 0)^T : y \in K\} \subset E_k^\perp$  ein Zylinder in  $\mathbb{R}^d$  definiert. Man betrachte dazu Abbildung 3.1. Hierbei bezeichnet  $\oplus$  die Minkowski-Addition, welche für  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  durch  $A \oplus B = \{x+y : x \in A, y \in B\}$  definiert ist.  $\theta E_k$  bezeichnen wir auch als *Richtungsraum* und  $K+x$  als *Basis* des Zylinders.

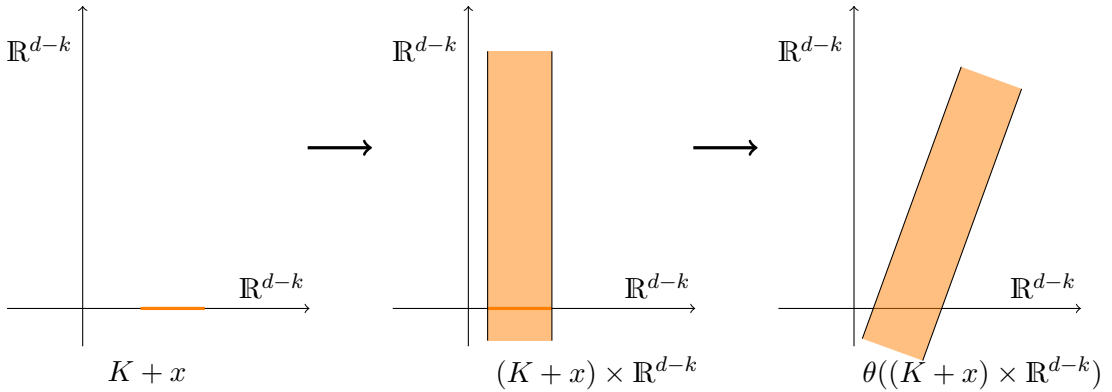


Abbildung 3.1: Konstruktion eines  $k$ -Zylinders

**Definition 3.1** Es sei  $\Pi_{\lambda, Q}^{d, k} \sim P_{\lambda, Q}$  ein stationärer markierter Poisson-Prozess auf  $\mathbb{R}^{d-k}$  mit Markenraum  $\mathbb{M}_{d, k} := \text{SO}_{d, k} \times \mathcal{K}'_{d-k}$ , Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$  und Markenverteilung  $Q$ . Die typische Marke bezeichnen wir mit  $(\Theta_0, \Xi_0) \sim Q$  und für diese gelte  $\mathbb{E}\nu_{d-k}(\Xi_0 \oplus K) < \infty$  für alle  $K \in \mathcal{K}'_{d-k}$ . Dann heißt der auf der Menge der  $k$ -Zylinder konzentrierte Punktprozess

$$\Psi_{\lambda, Q}^{d, k} := \sum_{(X, \Theta, \Xi) \in s(\Pi_{\lambda, Q}^{d, k})} \delta_{Z(X, \Theta, \Xi)}$$

ein stationärer Poisson- $k$ -Zylinderprozess.

Die Randverteilung  $Q_0(\cdot) = Q(\cdot \times \mathcal{K}'_{d-k})$  bezeichnen wir als *Richtungsverteilung*. Die Forderung  $\mathbb{E}\nu_d(\Xi_0 \oplus K) < \infty$  für alle  $K \in \mathcal{K}'_{d-k}$  zieht nach sich, dass die Vereinigungsmenge

$$\Xi_{\lambda, Q}^{d, k} := \bigcup_{(X, \Theta, \Xi) \in s(\Pi_{\lambda, Q}^{d, k})} Z(X, \Theta, \Xi)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 abgeschlossen und damit eine zufällige abgeschlossene Menge im Sinne von Abschnitt 2.2 ist. Wir bezeichnen diese auch als *stationäres Poisson- $k$ -Zylindermodell*.

Der Wahrscheinlichkeitsraum  $[\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}]$  auf dem  $\Psi_{\lambda, Q}^{d, k}$  bzw.  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  definiert sind, kann ferner nach Heinrich und Spiess (2013, S. 315) so gewählt werden, dass die Indikatorfunktion  $\mathbb{R}^d \times \Omega \ni (x, \omega) \mapsto \mathbf{1}(x \in \Xi_{\lambda, Q}^{d, k}(\omega))$  messbar bezüglich  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{A}$  ist. Dies hat zur Folge, dass wir Messbarkeit in allen späteren Rechnungen voraussetzen können und dies nicht mehr extra erwähnen. Insbesondere wird die Anwendung des wichtigen Satzes von Fubini und weiterer Integralsätze ermöglicht.

Der Zylinderprozess  $\Psi_{\lambda, Q}^{d, k}$  bzw. das Zylindermodell  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  enthalten zwei Grundmodelle der stochastischen Geometrie als Spezialfall. Für  $k = 0$  und  $\Theta_0 = \text{id}_0$  ist  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, 0} = \bigcup_{i \geq 1} (X_i + \Xi_i)$ , d.h. wir erhalten das sogenannte *Boolesche Modell*. Für  $\Xi_0 = \{0\}$  sind die Zylinder  $k$ -dimensionale affine Unterräume und wir erhalten einen *stationären Poisson- $k$ -Ebenenprozess*.

Die in Abschnitt 2.2 definierten Kenngrößen für ZAMs lassen sich für stationäre Poisson- $k$ -Zylindermodelle vergleichsweise übersichtlich ausdrücken (Heinrich und Spiess (2009), Spiess und Spodarev (2011) oder Spiess (2012)).

Ab hier sei  $\pi_{d-k} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  die Projektion auf die ersten  $d - k$  Komponenten. Allgemeiner bezeichnen wir mit  $\pi_L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  die orthogonale Projektion auf einen linearen Unterraum  $L$ .

**Satz 3.1** Die zufällige abgeschlossene Menge  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  ist stationär und es gilt

$$T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(K) = 1 - \exp\{-\lambda \mathbb{E}\nu_{d-k}(\Xi_0 \oplus \pi_{d-k}(-\Theta_0^T K))\} \quad \text{für alle } K \in \mathcal{K}_d. \quad (3.2)$$

Weiter gilt

$$p = 1 - \exp\{-\lambda \mathbb{E}\nu_{d-k}(\Xi_0)\}$$

und

$$C(x) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \nu_{d-k} \left( \Xi_0 \cap (\Xi_0 - \pi_{d-k}(\Theta_0^T x)) \right) \right\}. \quad (3.3)$$

Die im Exponenten der Kovarianz auftretende Funktion

$$\gamma_B : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty), x \mapsto \nu_m(B \cap (B + x)),$$

wobei  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ , bezeichnet man als *Mengenkovarianz* von  $B$ . Sie wird später noch häufiger auftreten. Siehe Matheron (1975, S. 85 f.) für einige wichtige Eigenschaften dieser Funktion.

In Matheron (1975, S. 148-149) findet sich darüber hinaus noch eine Charakterisierung von stationären Poisson- $k$ -Zylinderprozessen. Und zwar sind die Vereinigungen von unabhängigen stationären Poisson- $k$ -Zylindermodellen mit konvexer Basis genau die semi-markovschen, unbegrenzt teilbaren ZAM. Dabei heißt eine ZAM  $\Xi$  semi-markovsch, wenn  $(1 - T_{\Xi}(K \cup K' \cup C))(1 - T_{\Xi}(C)) = (1 - T_{\Xi}(K \cup C))(1 - T_{\Xi}(K' \cup C))$  für alle  $K, K' \in \mathcal{K}_d, C \in \mathcal{C}_d$  und unbegrenzt teilbar, wenn es zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  unabhängig, identisch verteilte ZAMs  $\Xi_m$  gibt, so dass  $\Xi$  dieselbe Verteilung wie  $\Xi_1 \cup \dots \cup \Xi_m$  hat.

### 3.2 Der Spezialfall $k = d - 1$

Der Richtungsraum eines  $(d - 1)$ -Zylinders ist ein  $(d - 1)$ -dimensionaler linearer Unterraum, also eine Hyperebene in  $\mathbb{R}^d$ . Die Richtung lässt sich in diesem Fall deutlich einfacher mit einem normierten Normalenvektor, anstatt einer Drehmatrix darstellen. Ferner wollen wir bei dieser Beschreibung nur Zylinder mit zusätzlich konvexer Basis, also abgeschlossenen Intervallen betrachten. Wegen der Stationarität genügt es dann sogar nur symmetrische Intervalle der Form  $[-r, r]$  zu betrachten. Ein  $(d - 1)$ -Zylinder hat also die Form

$$Z(x, u, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : -r \leq \langle u, y \rangle - x \leq r\} \quad (3.4)$$

mit  $x \in \mathbb{R}, r \geq 0$  und  $u \in S^{d-1} := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| = 1\}$ , siehe auch Abbildung 3.3. Offenbar ist  $Z(x, u, r) = H(x, u) \oplus B_r^d$ , wenn  $H(x, u) := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, u \rangle = x\}$

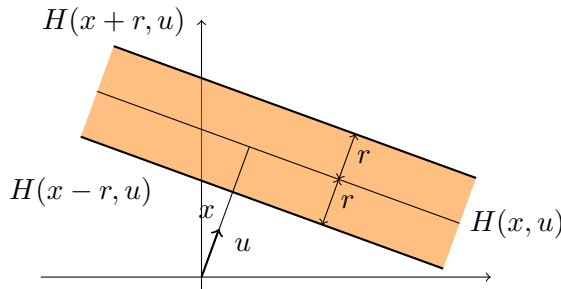


Abbildung 3.2: Konstruktion eines  $(d - 1)$ -Zylinders



eine Hyperebene mit Normalenvektor  $u$  und Abstand  $x$  zum Nullpunkt sowie  $B_r^d$  eine  $d$ -dimensionale Kugel mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $0$  ist.  $Z(x, u, r)$  ist demnach eine symmetrisch um  $r$  verdickte Hyperebene.

Ausgangspunkt ist also ein stationärer markierter Poisson-Punktprozess  $\Pi_{\lambda, Q} \sim P_{\lambda, Q}$  auf  $\mathbb{R}^1$  mit Markenraum  $\mathbf{M} := S^{d-1} \times [0, \infty)$ , Intensität  $\lambda > 0$  und Markenverteilung  $Q$ . Dabei wollen wir voraussetzen, dass  $Q(\cdot, B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}([0, \infty))$  gerade ist. Hiermit können wir nun wie im letzten Abschnitt den stationären Poisson- $(d-1)$ -Zylinderprozess

$$\Psi_{\lambda, Q} = \sum_{(X, U, R) \in s(\Pi_{\lambda, Q})} \delta_{Z(X, U, R)}$$

und die zufällige abgeschlossene Menge

$$\Xi_{\lambda, Q} = \bigcup_{(X, U, R) \in s(\Pi_{\lambda, Q})} Z(X, U, R) \tag{3.5}$$

definieren. Wir verzichten also in diesem Spezialfall auf die Angabe der Dimensionen.

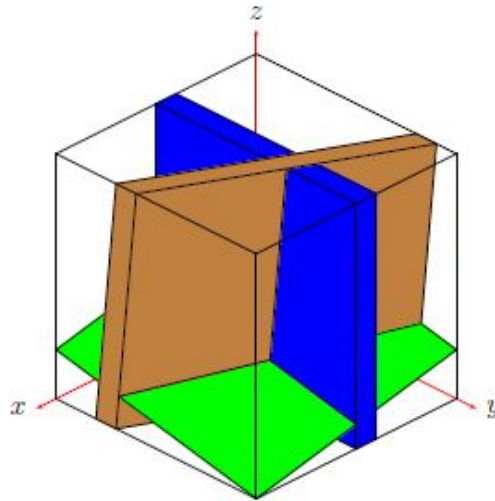


Abbildung 3.3: Beispielhafte Darstellung eines stationären Poisson-2-Zylinderprozesses in  $\mathbb{R}^3$ . (Spiess (2012))

Die Voraussetzung, dass  $\Xi_{\lambda, Q}$  tatsächlich eine zufällige abgeschlossene Menge ist, reduziert sich nun auf  $\mathbb{E}R_0 < \infty$ , was wir auch stets voraussetzen, und es folgt unter anderem

$$p = 1 - e^{-2\lambda \mathbb{E}R_0}. \tag{3.6}$$

Auch in diesem Fall bezeichnen wir die Randverteilung  $Q_0(\cdot) = Q(\cdot \times [0, \infty))$  als *Richtungsverteilung*. Wir werden stets voraussetzen, dass diese *nicht degeneriert*, d.h.

nicht auf einer Großsphäre konzentriert ist, also formal

$$Q_0(L \cap S^{d-1}) < 1 \quad \text{für alle } L \in \mathcal{L}_{d-1}^d.$$

Wir interessieren uns später auch für das Komplement von  $\Xi_{\lambda, Q}$ , genauer für die abgeschlossenen Hüllen der Zusammenhangskomponenten  $Z_i$ ,  $i \geq 1$ , von  $\Xi_{\lambda, Q}^c$ . Diese sind offenbar der Schnitt von Halbräumen. Es handelt sich also um abgeschlossene Polyeder, welche im allgemeinen aber nicht beschränkt sein müssen. Dies ist aber der Fall, wenn die Richtungsverteilung nicht degeneriert ist. Man überlegt sich dies ähnlich wie für stationäre Poisson-Hyperebenenprozesse in Schneider und Weil (2000, S. 272 f.) . In diesem Fall wird durch diese Polytope ein stationärer Partikelprozess

$$Z = \sum_{i \geq 1} \delta_{Z_i}$$

definiert. Wegen der Stationarität sind die  $Z_i$ ,  $i \geq 1$ , außerdem mit Wahrscheinlichkeit 1 regulär abgeschlossen, d.h. es gilt  $Z_i = \text{cl}(\text{int } Z_i)$  für alle  $i \geq 1$ . Hierbei bezeichnet  $\text{int}(A)$  den innere Kern einer Menge und  $\text{cl}(A)$  den topologischen Abschluss.

# 4 Ergodizität und Mischungseigenschaften stationärer Poisson-Zylindermodelle

Ergodizität und Mischungseigenschaften spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von zufälligen abgeschlossenen Mengen und Punktprozessen, insbesondere für deren Statistik. So lässt sich mit Hilfe der Ergodizität beispielsweise die starke Konsistenz vieler Schätzer folgern, wenn bei einer Beobachtung das Beobachtungsfenster unbegrenzt wächst.

Anschaulich bedeutet mischend, dass zwei Ereignisse  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  unabhängig werden, wenn man sie „weit“ voneinander verschiebt. Für Ergodizität wird stattdessen im Sinne des Cesàro-Grenzwerts gemittelt. Dazu ist es wichtig, über welche Mengen gemittelt wird.

**Definition 4.1** Eine Mengenfolge  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $W_n \in \mathcal{C}_d$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  heißt *gleichmäßig wachsend*, wenn

1.  $W_n \subseteq W_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{r \geq 0 : B(x, r) \subseteq W_n \text{ für ein } x \in W_n\} = \infty$ , wobei  $B(x, r)$  eine Kugel mit Mittelpunkt  $x \in \mathbb{R}^d$  und Radius  $r > 0$  ist.

Die zweite Eigenschaft lässt sich so deuten, dass  $W_n$  in alle Richtungen gleichermaßen wächst.

**Definition 4.2** Eine stationäre zufällige abgeschlossene Menge  $\Xi$  heißt *mischend*, wenn

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} P_{\Xi}(T_x \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = P_{\Xi}(\mathcal{A}_1)P_{\Xi}(\mathcal{A}_2),$$

*schwach mischend*, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} |P_{\Xi}(T_x \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) - P_{\Xi}(\mathcal{A}_1)P_{\Xi}(\mathcal{A}_2)| dx = 0$$

*und ergodisch*, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} P_{\Xi}(T_x \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) dx = P_{\Xi}(\mathcal{A}_1)P_{\Xi}(\mathcal{A}_2)$$

für jeweils alle  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \sigma_f$  gilt.

Offensichtlich ist eine mischende ZAM auch schwach mischend und eine schwach mischende ZAM auch ergodisch. Die obigen Begriffe lassen sich analog für Punktprozesse definieren. Dazu ersetzt man die Verteilung der ZAM durch die Verteilung des Punktprozesses und  $\sigma_f$  durch  $\mathfrak{N}$ .

Neben den oben definierten gibt es noch eine Reihe stärkerer Mischungseigenschaften wie beispielsweise Brillinger- oder  $\beta$ -mischend, siehe Heinrich (2013). Auf diese wollen wir hier aber nicht näher eingehen.

Die Frage nach Mischungseigenschaften einer zufälligen abgeschlossenen Menge  $\Xi$  hängt eng zusammen mit der Beschaffenheit der dazugehörigen Schwanz- $\sigma$ -Algebra

$$\sigma_f^\infty(\Xi) := \bigcap_{n \geq 0} \sigma(\{\Xi \cap \text{cl}((B_n^d)^c) \cap K = \emptyset\} : K \in \mathcal{K}_d).$$

Ist nun  $\sigma_f^\infty(\Xi)$  trivial, d.h. gilt  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$  für alle  $A \in \sigma_f^\infty(\Xi)$ , so ist  $\Xi$  mischend (Daley und Vere-Jones (1998, S. 343)).

Ist die Schwanz- $\sigma$ -Algebra trivial, so sagt man nach Lanford und Ruelle (1969) auch, dass  $\Xi$  Abhängigkeiten mit kurzer Reichweite (short-range correlations) hat. Umgekehrt hat  $\Xi$  weitreichende Abhängigkeiten (longe-range correlations), wenn die Schwanz- $\sigma$ -Algebra nicht trivial ist. Sie auch Daley und Vere-Jones (1998, S.353).

Im Falle eines stationären Poisson- $k$ -Zylindermodells mit  $1 \leq k \leq d-1$  sind aber die Ereignisse

$$A_\varepsilon = \{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k} \cap B_\varepsilon^d = \emptyset\}$$

für alle  $\varepsilon > 0$  nicht trivial, denn  $\mathbb{P}(A_\varepsilon) = 1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(B_\varepsilon^d) = \exp\{-\lambda \mathbb{E} \nu_{d-k}(\Xi_0 \oplus B_\varepsilon^{d-k})\} \in (0, 1)$ . Andererseits liegen diese Mengen nach Heinrich und Spiess (2013, S. 317) in  $\sigma_f^\infty(\Xi_{\lambda, Q}^{d, k})$ . Ein stationäres Poisson- $k$ -Zylindermodell  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  hat also weitreichende Abhängigkeiten und wir können zunächst keine Aussage über Ergodizität oder Mischungseigenschaften treffen.

Es genügt in den folgenden zwei Abschnitten nur stationäre Poisson- $k$ -Zylindermodelle mit  $1 \leq k \leq d-1$  zu betrachten. Boolesche Modelle, also Poisson-0-Zylindermodelle, sind nach Schneider und Weil (2000) nämlich stets mischend, also auch ergodisch.

## 4.1 Ergodizität

Wir zeigen nun, dass stationäre Poisson- $k$ -Zylindermodelle stets schwach mischend sind.

**Satz 4.1** *Stationäre Poisson- $k$ -Zylindermodelle sind für alle  $1 \leq k \leq d-1$  schwach mischend und damit insbesondere ergodisch.*

**Beweis.** Nach Heinrich (1992) lässt sich die Bedingung für schwach mischend äquivalent mit Hilfe des Kapazitätsfunktional durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} \left| 1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_1 \cup T_x C_2) - (1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_1))(1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_2)) \right| dx = 0$$

ausdrücken, wobei  $C_1, C_2 \in \mathcal{K}_d$  beliebig sind und  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig wachsend ist. Mit Hilfe der Formel für das Kapazitätsfunktional (3.2) und der Stationarität von  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  rechnet man zunächst leicht nach, dass

$$1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_1 \cup T_x C_2) = (1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_1))(1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_2)) \times \exp\left\{\lambda \mathbb{E} \nu_{d-k}((\Xi_0 \oplus \pi_{d-k}(-\Theta_0^T C_1)) \cap (\Xi_0 \oplus \pi_{d-k}(-\Theta_0^T T_x C_2)))\right\} \quad (4.1)$$

gilt. Für eine übersichtlichere Schreibweise verwenden wir für  $i = 1, 2$  und für alle  $(\theta, K) \in \mathbb{M}_{d, k}$  die Abkürzungen

$$\tilde{\Xi}_i = \tilde{\Xi}_i(C_i, \Xi_0, \Theta_0) := \Xi_0 \oplus \pi_{d-k}(-\Theta_0^T C_i)$$

und

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}_i(C_i, K, \theta) := K \oplus \pi_{d-k}(-\theta^T C_i).$$

Wir müssen also noch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} \left| 1 - \exp\left\{\lambda \mathbb{E} \nu_{d-k}(\tilde{\Xi}_1 \cap (\tilde{\Xi}_2 - \pi_{d-k}(\Theta_0^T x)))\right\} \right| dx = 0$$

zeigen. Hierfür verwenden wir zunächst die Abschätzungen  $e^y - 1 \leq ye^y$ , für  $y \geq 0$ , und  $\mathbb{E} \nu_{d-k}(\tilde{\Xi}_1 \cap (\tilde{\Xi}_2 - \pi_{d-k}(-\Theta_0^T x))) \leq \mathbb{E} \nu_{d-k}(\tilde{\Xi}_1) < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Setzen wir zur Abkürzung noch  $c = \lambda \exp\{\lambda \mathbb{E} \nu_{d-k}(\tilde{\Xi}_1)\}$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} \left| 1 - \exp\left\{\lambda \mathbb{E} \nu_{d-k}(\tilde{\Xi}_1 \cap (\tilde{\Xi}_2 - \pi_{d-k}(\Theta_0^T x)))\right\} \right| dx \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} \mathbb{E} \nu_{d-k}(\tilde{\Xi}_1 \cap (\tilde{\Xi}_2 - \pi_{d-k}(\Theta_0^T x))) dx \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\nu_d(W_n)} \int_{\mathbb{M}_{d, k}} \int_{W_n} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T x))) dx Q(d(\theta, K)) \\ & \leq c \int_{\mathbb{M}_{d, k}} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T x))) dx \right) Q(d(\theta, K)), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt das Lemma von Fatou angewandt wurde. Dieses wird gerechtfertigt durch die Abschätzung

$$\frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{W_n} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T x))) dx \leq \nu_{d-k}(\tilde{K}_1) = \nu_{d-k}(K \oplus \pi_{d-k}(-\theta^T C_1))$$

für alle  $(\theta, K) \in \mathbb{M}_{d, k}$  und damit haben wir eine bezüglich  $Q$  integrierbare Majorante

gefunden.

Wir betrachten nun den Grenzwert im Inneren für feste  $(\theta, K) \in \mathbb{M}_{d,k}$ . Man beachte dabei, dass der Träger der Funktion  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \nu_d(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T x)))$  ein Zylinder, also nicht kompakt ist. Wir müssen deshalb das Integral zerlegen. Dazu bezeichnen wir mit  $\nu_L$  das Lebesgue-Maß auf einem linearem Unterraum  $L$ . Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\theta^T W_n} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(x))) dx \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{E_k^\perp} \int_{E_k} \mathbf{1}_{\theta^T W_n}(y+z) \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(y+z))) \nu_{E_k}(dz) \nu_{E_k^\perp}(dy) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{E_k^\perp} \nu_{E_k}((\theta^T W_n - y) \cap E_k) \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(y))) \nu_{E_k^\perp}(dy). \end{aligned}$$

Anschaulich ist klar, dass der Quotient  $\nu_{E_k}((\theta^T W_n - y) \cap E_k) / \nu_d(\theta^T W_n)$  gegen Null konvergiert. Denn mit  $W_n$  ist auch  $\theta^T W_n$  eine gleichmäßig wachsende Folge und der Schnitt von  $\theta^T W_n$  mit einer Ebene wächst grob gesagt in weniger Richtungen und damit langsamer als  $\nu_d(\theta^T W_n)$ . Formal verwenden wir ein Resultat von McMullen (1982), welches besagt, dass für einen beliebigen konvexen Körper  $C$  und Ebenen  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  mit  $\dim(F_j) = d_j$ , so dass  $d_1 + \dots + d_m = d$ , die Ungleichung

$$\nu_d(C) \geq \frac{d_1! \cdots d_m!}{d!} \nu_{F_1}(C \cap F_1) \cdots \nu_{F_m}(C \cap F_m).$$

gilt. Dies liefert also

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{E_k}((\theta^T W_n - y) \cap E_k)}{\nu_d(\theta^T W_n)} &\leq \frac{\binom{d}{k}}{\nu_{E_k^\perp}((\theta^T W_n - y) \cap E_k^\perp)} \\ &= \frac{\binom{d}{k}}{\nu_{E_k^\perp}(\theta^T W_n \cap E_k^\perp)} \end{aligned}$$

für alle  $y \in E_k^\perp$  und  $\theta \in \text{SO}_{d,k}$ . Weil  $\theta^T W_n$  gleichmäßig wächst gilt aber sicher

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_{E_k^\perp}(\theta^T W_n \cap E_k^\perp)} = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_{E_k^\perp} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(y))) \nu_{E_k^\perp}(dy) &= \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - y)) \nu_{d-k}(dy) \\ &= \nu_{d-k}(\tilde{K}_1) \nu_{d-k}(\tilde{K}_2) < \infty \end{aligned}$$

und deshalb erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_d(W_n)} \int_{\theta^T W_n} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(x))) \, dx \leq \\ & \leq \binom{d}{k} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1) \nu_{d-k}(\tilde{K}_2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_{E_k^\perp}(\theta^T W_n \cap E_k^\perp)} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Insbesondere sind also auch stationäre Poisson- $k$ -Ebenenprozesse schwach mischend.

## 4.2 Mischungseigenschaften

Wir wollen im Folgenden untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die zufällige abgeschlossene Menge  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  mischend ist. Bereits stationäre Poisson- $(d-1)$ -Ebenenprozesse sind nach Schneider und Weil (2000, S. 291 f.) nicht immer mischend. Genauer hängt dies von der Richtungsverteilung ab. Dieses Verhalten überträgt sich auch auf stationäre Poisson- $k$ -Zylinderprozesse bzw. Poisson- $k$ -Zylindermodelle.

**Satz 4.2** *Ein stationäres Poisson- $k$ -Zylindermodell  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  mit  $1 \leq k \leq d-1$  ist mischend genau dann, wenn die Richtungsverteilung  $Q_0(\cdot) = Q(\cdot \times \mathcal{K}'_{d-k})$  die Bedingung*

$$Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d, k} : u \in \theta E_k\}) = 0 \quad \text{für alle } u \in S^{d-1} \quad (4.2)$$

erfüllt.

**Beweis.** Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 4.1. Wie auch dort verwenden wir ein Ergebnis von Heinrich (1992) und drücken die Mischungseigenschaft mit Hilfe des Kapazitätsfunktional aus. Zu zeigen ist demnach

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_1 \cup T_x C_2)) = (1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_1))(1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}}(C_2))$$

für beliebige  $C_1, C_2 \in \mathcal{K}_d$ . Mit Hilfe von (4.1) sieht man, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\begin{aligned} & \forall C_1, C_2 \in \mathcal{K}_d, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d \text{ mit } \|x_n\| \rightarrow \infty : \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{M}_{d, k}} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T x_n))) Q(d(\theta, K)) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

gilt. Die Bedingung (4.2) ist wiederum äquivalent zu

$$Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d, k} : \pi_{d-k}(\theta^T u) = 0\}) = 0 \quad \text{für alle } u \in S^{d-1}. \quad (4.4)$$

Sei zunächst (4.4) erfüllt und  $C_1, C_2 \in \mathcal{K}_d$  sowie eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  vorgegeben. Dabei können wir ohne Einschränkung  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  annehmen.

Dann ist nach Voraussetzung  $Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d,k} : \pi_{d-k}(\theta^T \frac{x_n}{\|x_n\|}) = 0\}) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit auch

$$Q_0\left(\left\{\theta \in \text{SO}_{d,k} : \pi_{d-k}\left(\theta^T \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0. \quad (4.5)$$

Weiter ist der Träger der Abbildung  $x \mapsto \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - x))$  gerade  $\tilde{K}_2 \oplus (-\tilde{K}_1)$  also kompakt und dies liefert zusammen mit (4.5) den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T x_n))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T \frac{x_n}{\|x_n\|})\|x_n\|)) = 0$$

für  $Q_0$ -fast alle  $\theta \in \text{SO}_{d,k}$ . Ferner ist  $\nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - \pi_{d-k}(\theta^T x_n))) \leq \nu_{d-k}(\tilde{K}_1)$  was eine integrierbare Majorante ist. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert also (4.3).

Zum Beweis der anderen Richtung sei (4.4) nicht erfüllt, d.h. es gibt ein  $u_0 \in S^{d-1}$ , so dass  $Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d,k} : \pi_{d-k}(\theta^T u_0) = 0\}) = \varepsilon > 0$ . Wir wählen nun  $C_1 = C_2 = B_1^d$  und  $x_n = nu_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{M}_{d,k}} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - n\pi_{d-k}(\theta^T u_0))) Q(d(\theta, K)) \\ & \geq \int_{\{\theta: \pi_{d-k}(\theta^T u_0)=0\} \times \mathcal{K}'_{d-k}} \nu_{d-k}(\tilde{K}_1 \cap (\tilde{K}_2 - n\pi_{d-k}(\theta^T u_0))) Q(d(\theta, K)) \\ & = \int_{\{\theta: \pi_{d-k}(\theta^T u_0)=0\} \times \mathcal{K}'_{d-k}} \nu_{d-k}(K \oplus B_1^{d-k}) Q(d(\theta, K)) \\ & \geq \varepsilon \nu_{d-k}(B_1^{d-k}) > 0 \end{aligned}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , womit (4.3) nicht erfüllt und die Äquivalenz von (4.3) und (4.4) gezeigt ist.  $\square$

**Bemerkung 4.1** Weil  $\Xi_{\lambda, Q}^{d,k}$  eine unbegrenzt teilbare ZAM ist, folgt nach Daley und Vere-Jones (1998) aus der Mischungseigenschaft auch, dass  $\Xi_{\lambda, Q}^{d,k}$  mischend von jeder Ordnung  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  ist. Dabei heißt eine ZAM  $\Xi$  mischend von  $m$ -ter Ordnung, wenn

$$P_{\Xi}(\mathcal{A}_0 \cap T_{x_n^{(1)}} \mathcal{A}_1 \cap \dots \cap T_{x_n^{(m)}} \mathcal{A}_m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_{\Xi}(\mathcal{A}_0) P_{\Xi}(\mathcal{A}_1) \dots P_{\Xi}(\mathcal{A}_m)$$

für beliebige Folgen in  $\mathbb{R}^d$  mit  $\|x_n^{(1)}\|, \dots, \|x_n^{(m)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  und  $\|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , für alle  $i \neq j$ , und  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \in \sigma_f$ .

Ob ein Poisson- $k$ -Zylindermodell mischend ist, hängt also nur von der Richtungsverteilung ab. Wir wollen uns noch überlegen, wie sich die Bedingung (4.2) bzgl. der gewöhnlichen Einteilung von Verteilungsfunktionen in diskrete und stetige einordnet.



**Korollar 4.3** *Ist  $1 \leq k \leq d - 1$  und hat die Richtungsverteilung  $Q_0$  einen diskreten Anteil, so ist  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  nicht mischend.*

**Beweis.** Es sei also  $Q_0(\{\vartheta_0\}) > 0$  für ein  $\vartheta_0 \in \text{SO}_{d, k}$ . Dann gilt für für alle  $u \in \vartheta_0 E_k$ ,  $Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d, k} : u \in \theta E_k\}) \geq Q_0(\{\vartheta_0\}) > 0$ .  $\square$

Nun ist zunächst zu erklären, was eine absolut stetige Richtungsverteilung ist. Aus der Integralgeometrie ist bekannt (Schneider und Weil (1992, S.28, Satz 1.3.3.)), dass es auf  $\text{SO}_d$  genau ein rotationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_d$  gibt. Die Einschränkung von  $\mu_d$  auf  $\text{SO}_{d, k}$  bezeichnen wir mit  $\mu_{d, k}$ . Eine Verteilung  $P$  auf  $\text{SO}_{d, k}$  wollen wir absolut stetig nennen, wenn  $P$  absolut stetig bezüglich  $\mu_{d, k}$  ist.

Ferner heißen zwei lineare Unterräume  $L, L' \subseteq \mathbb{R}^d$  in *spezieller Lage*, wenn

$$\text{span}(L \cup L') \neq \mathbb{R}^d \text{ und } \dim(L \cap L') > 0.$$

$L$  und  $L'$  heißen in *allgemeiner Lage*, wenn sie nicht in spezieller Lage sind.

**Korollar 4.4** *Das Zylindermodell  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  ist für  $1 \leq k \leq d - 1$  genau dann mischend, wenn*

$$Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d, k} : \theta E_k \text{ und } L \text{ sind in spezieller Lage}\}) = 0 \quad \text{für alle } L \in \mathcal{L}_1^d.$$

*Insbesondere ist  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  mischend, falls  $Q_0$  absolut stetig bzgl. dem invarianten Maß  $\mu_{d, k}$  ist.*

**Beweis.** Man überlegt sich schnell, dass

$$u \in \theta E_k \iff \text{span}(u) \text{ und } \theta E_k \text{ sind in spezieller Lage}$$

für alle  $u \in S^{d-1}$  und  $\theta \in \text{SO}_{d, k}$  gilt. Außerdem ist nach Schneider und Weil (1992, S.23, Satz 1.2.5) die Menge  $\{\theta \in \text{SO}_d : \theta E_k \text{ und } L \text{ sind in spezieller Lage}\}$  eine  $\mu_d$ -Nullmenge.  $\square$

Die Stetigkeit der Richtungsverteilung (im Sinne, dass  $Q_0(\{\theta\}) = 0$ , für alle  $\theta \in \text{SO}_{d, k}$ ) ist also notwendig, aber im allgemeinen nicht hinreichend dafür, dass  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  mischend ist.

**Beispiel 4.1** Für die in Abschnitt 3.2 eingeführte alternative Beschreibung des Spezialfalles  $k = d - 1$  wird die Bedingung (4.2) zu

$$Q_0(\{v \in S^{d-1} : \langle u, v \rangle = 0\}) = 0 \quad \text{für alle } u \in S^{d-1} \tag{4.6}$$

was äquivalent zu

$$Q_0(S^{d-1} \cap L) = 0 \quad \text{für alle } L \in \mathcal{L}_{d-1}^d$$

ist. In Worten bedeutet dies, dass  $Q_0$  auf jeder Großsphäre verschwindet, was gerade die Bedingung dafür ist, dass ein Poisson-Hyperbenenprozess mischend ist (Schneider

und Weil (2000, S. 289, Satz 5.4.3)). Eine auf einer Großsphäre konzentrierte stetige Verteilung ist also stetig, erzeugt aber keinen mischenden Zylinderprozess. Im Fall  $d = 2$  ist die Bedingung offenbar äquivalent zur Stetigkeit der Richtungsverteilung, denn hier sind die Großsphären schlicht zwei gegenüberliegende Punkte.

## Kommentare und offene Fragen

Die obigen Ergebnisse gelten analog für stationäre Poisson- $k$ -Zylinderprozesse. Die Verteilung von  $\Psi_{\lambda,Q}^{d,k}$  wird nach Schneider und Weil (2000) nämlich bereits durch das Funktional  $K \mapsto \mathbb{P}(\Psi_{\lambda,Q}^{d,k}(\mathcal{F}_K) = 0)$  für alle  $K \in \mathcal{K}_d$  festgelegt. Andererseits ist aber  $\mathbb{P}(\Psi_{\lambda,Q}^{d,k}(\mathcal{F}_K) = 0) = \mathbb{P}(\Xi_{\lambda,Q}^{d,k} \cap K = \emptyset) = 1 - T_{\Xi_{\lambda,Q}^{d,k}}(K)$ . Auch die entsprechenden Bedingungen für ergodisch, schwach mischend und mischend lassen sich mit Hilfe dieses Funktionals ausdrücken, so dass der Nachweis genau wie oben funktioniert.

Dass ein diskreter Anteil der Richtungsverteilung die Mischungseigenschaft verhindert, wird bereits von Heinrich und Spiess (2013) vermutet. Dies konnte also nachgewiesen werden und eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Mischungseigenschaft gefunden werden. Insgesamt sind Ergodizität und einfache Mischungseigenschaften stationärer Poisson- $k$ -Zylindermodelle nun erschöpfend geklärt.

Natürlich kann man noch die Frage nach stärkeren Mischungseigenschaften stellen. Aufgrund der weitreichenden Abhängigkeiten, erzeugt durch die unbegrenzt langen Zylinder, besteht hier allerdings wenig Hoffnung auf einen Nachweis stärkerer Mischungseigenschaften.

## 5 Lineare Schnitte durch stationäre Poisson-Zylindermodelle

Wir untersuchen in diesem Kapitel den Schnitt von  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  mit einem festen  $\ell$ -dimensionalen Unterraum  $S \in \mathcal{L}_\ell^d$ , wobei  $1 \leq \ell \leq d - 1$ . Hierfür verwenden wir die in den  $\mathbb{R}^d$  eingebettete Beschreibung der Zylinder (siehe (3.1)) und verallgemeinern das Verfahren, welches von Schneider und Weil (2000) im Falle eines Ebenenprozesses verwendet wird. Den Spezialfall  $k = 0$  müssen wir in diesem Kapitel nicht betrachten, denn wie bereits bemerkt wurde, ist  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, 0}$  ein Boolesches-Modell und lineare Schnitte hiervon sind nach Schneider und Weil (2000, S. 143 f.) wieder Boolesche Modelle. In diesem Kapitel sei also stets  $1 \leq k \leq d - 1$ .

Wir wollen dann zeigen, dass der Schnitt eines stationären Poisson- $k$ -Zylindermodells die Vereinigung von stationären Poisson- $j$ -Zylindermodellen in  $S$  ist. Dieses Ergebnis ist zum Teil bereits bekannt. Davy (1978, S. 91 ff.) betrachtet dicke Schnitte und damit insbesondere lineare Schnitte durch stationäre Poisson- $k$ -Zylinderprozesse, allerdings nur für den Fall, dass die Richtungsverteilung rotationsinvariant und die Zylinderbasen konvex sind. Matheron (1975, S. 153 f.) betrachtet auch nicht isotrope Richtungsverteilungen, gibt aber keine expliziten Formeln für das Kapazitätsfunktional an. Insbesondere die Konvexität vereinfacht die Beweise, da in diesem Fall die Steiner Formel auf das Volumen im Exponenten des Kapazitätsfunktionals angewandt werden kann und dies die Verwendung weiterer integralgeometrischer Formeln erlaubt.

Wir müssen zunächst noch erklären, was wir unter einem stationären Poisson- $j$ -Zylindermodellen in  $S$  verstehen, wobei  $0 \leq j \leq \ell - 1$ , und setzen dazu für einen affinen Unterraum  $\mathcal{K}(E) = \{K \in \mathcal{K}_d : K \subseteq E\}$  und  $\mathcal{K}'(E) = \mathcal{K}(E) \setminus \emptyset$ . Ferner sei ab hier  $S_j$  ein beliebiger aber fester  $j$ -dimensionaler Unterraum von  $S$  und  $S^j$  sein orthogonales Komplement in  $S$ . Es gilt also  $S = S_j \oplus S^j$ , aber  $S^j \neq S_j^\perp$ .

**Definition 5.1** *Es sei  $0 \leq j \leq \ell - 1$  und  $\mathbb{M}_{d, j}(S) := \{\theta \in \text{SO}_{d, j} : \theta S_j \subset S\} \times \mathcal{K}'(S^j)$ . Unter einem stationären Poisson- $j$ -Zylindermodell in  $S$  verstehen wir dann eine zufällige abgeschlossene Menge in  $S$  mit Kapazitätsfunktional*

$$T(C) = 1 - \exp \left\{ -\lambda^S \int_{\mathbb{M}_{d, j}(S)} \nu_{S^j}(K \oplus \pi_{S^j}(-\theta^T C)) Q^S(d(\theta, K)) \right\},$$

für alle  $C \in \mathcal{K}(S)$ , wobei  $\lambda^S \in (0, \infty)$  und  $Q^S$  eine Verteilung auf  $\mathbb{M}_{d, j}(S)$  ist, so dass das obige Integral stets endlich ist.

Der Fall  $1 \leq \ell \leq k$  ist nun offenbar problematisch, denn hier könnte es passieren, dass  $S$  vollständig in einem Zylinder von  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k}$  enthalten ist, so dass wir kein Zylindermodell in  $S$  mehr erhalten. Um dies zu verhindern, setzen wir  $Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d, k} : S \subseteq \theta E_k\}) = 0$  voraus.

Der Schnitt eines  $k$ -Zylinders  $\theta(x' + K' \oplus E_k)$ ,  $1 \leq k \leq d - 1$ , mit  $S$  ist ein  $j$ -Zylinder, wobei  $j \in \{\max(0, \ell + k - d), \dots, \min(k, \ell)\}$ , mit Richtungsraum  $S \cap \theta E_k$ . Es macht deshalb Sinn, den Markenraum disjunkt in  $\mathbb{M}_{d, k} = \bigcup_{j=\max(0, \ell+k-d)}^{\min(k, \ell)} \mathbb{M}_{d, k}^{(j)}$  mit  $\mathbb{M}_{d, k}^{(j)} = \{\theta \in \text{SO}_{d, k} : \dim(S \cap \theta E_k) = j\} \times \mathcal{K}'_{d-k}$  zu zerlegen.

Sei jetzt  $\theta \in \text{SO}_{d, k}$  fest und  $j = \dim(S \cap \theta E_k) < \ell$ . Es gibt dann eine Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_j$  von  $S \cap \theta E_k$ , welche wir einerseits durch die Vektoren  $v_1, \dots, v_{k-j}$  zu einer Orthonormalbasis von  $\theta E_k$  und andererseits durch die Vektoren  $w_1, \dots, w_{\ell-j}$  zu einer Orthonormalbasis von  $S$  erweitern. Weiter sei  $u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j}$  eine Orthonormalbasis von  $S^\perp \cap \theta E_k^\perp$ , welche wir durch die Vektoren  $w'_1, \dots, w'_{\ell-j}$  zu einer Orthonormalbasis von  $\theta E_k^\perp$  ergänzen. Man beachte, dass  $\dim(S^\perp \cap \theta E_k^\perp) = d - k - \ell + j$ . Setzen wir zur Abkürzung noch  $T = \text{span}\{w_1, \dots, w_{\ell-j}\}$  und  $W = \text{span}\{w'_1, \dots, w'_{\ell-j}\}$ , so erhalten wir die Zerlegungen

$$\begin{aligned} S &= (S \cap \theta E_k) \oplus T \\ \theta E_k^\perp &= (S^\perp \cap \theta E_k^\perp) \oplus W. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nach Konstruktion ist also  $u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_{k-j}, w_1, \dots, w_{\ell-j}, u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j}$  eine Basis und  $u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_{k-j}, w'_1, \dots, w'_{\ell-j}, u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^d$ . Für die Determinante der orthogonalen Projektion auf  $W$  eingeschränkt auf  $T$ ,  $\pi_W|_T$ , folgt hieraus

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det((u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_{k-j}, w_1, \dots, w_{\ell-j}, u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j})) \\ &= \det((u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_{k-j}, w_1, \dots, w_{\ell-j}, u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j})) \\ &\quad \times \det((u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_{k-j}, w'_1, \dots, w'_{\ell-j}, u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j})) \\ &= \det((u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_{k-j}, w_1, \dots, w_{\ell-j}, u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j})^T \times \\ &\quad \times (u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_{k-j}, w'_1, \dots, w'_{\ell-j}, u'_1, \dots, u'_{d-k-\ell+j})) \\ &= \det((\langle w_n, w'_m \rangle)_{n, m=1}^{\ell-j}) \\ &= \det \pi_W|_T. \end{aligned}$$

Insbesondere ist damit  $\pi_W|_T$  ein Isomorphismus und den Betrag der Funktionaldeterminante wollen wir mit  $[S, \theta E_k^\perp]$  bezeichnen. Man beachte auch, dass  $T, W$  und damit  $\pi_W|_T$  von  $S$  sowie  $\theta \in \text{SO}_{d, k}$  abhängen. Wir stellen schließlich noch fest, dass  $S \cap \theta E_k$  ein  $j$ -dimensionaler Unterraum in  $S$  ist. Es gibt deshalb eine eindeutig bestimmte von  $\theta$  und  $S$  abhängige Drehung  $\theta_T = \theta_T(\theta) \in \{\theta \in \text{SO}_{d, j} : \theta S_j \subset S\}$ , so dass  $\theta_T S_j = S \cap \theta E_k$ . Insbesondere gilt damit auch  $\theta_T S^j = T$ .

Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun den folgenden Satz beweisen.

**Satz 5.1** *Es sei  $\Xi_{\lambda,Q}^{d,k}$  ein stationäres Poisson- $k$ -Zylindermodell und  $S \in \mathcal{L}_\ell^d$ , wobei  $1 \leq k, \ell \leq d-1$ . Ferner gelte  $Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d,k} : S \subseteq \theta E_k\}) = 0$ . Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen*

$$\mathbb{P}\left(\left(\Xi_{\lambda,Q}^{d,k} \cap S\right) \cap C = \emptyset\right) = \prod_{j=\max(0,\ell+k-d)}^{\min(\ell-1,k)} (1 - T_j^S(C))$$

mit

$$T_j^S(C) = 1 - \exp \left\{ -\lambda_j^S \int_{\mathbb{M}_{d,j}(S)} \nu_{S^j}(K \oplus \pi_{S^j}(-\theta^T C)) Q_j^S(d(\theta, K)) \right\}$$

für alle  $C \in \mathcal{K}(S)$ . Dabei ist  $\lambda_j^S = \lambda \widehat{Q}_j^S(\mathbb{M}_{d,j}(S))$ , wobei

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_j^S(\mathcal{A}) &= \int_{\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}} \int_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}\left(\theta_T, S^j \cap \theta_T^T([(y + \theta K') \cap W] \oplus W^\perp)\right) [S, \theta E_k^\perp] \\ &\quad \nu_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp}(dy) Q(d(\theta, K)), \end{aligned}$$

und  $Q_j^S(\mathcal{A}) = \widehat{Q}_j^S(\mathcal{A}) / \widehat{Q}_j^S(\mathbb{M}_{d,j}(S))$ , falls  $\widehat{Q}_j^S(\mathbb{M}_{d,j}(S)) \neq 0$  und  $\widehat{Q}_j^S = 0$  sonst.

### Bemerkung 5.1

1. Man beachte, dass  $(y + \theta K') \cap W = \emptyset$ , wenn  $y \notin \pi_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp}(\theta K')$ . Der Träger von  $y \mapsto S^j \cap \theta_T^T([(y + \theta K') \cap W] \oplus W^\perp)$  ist damit für alle  $(\theta, K) \in \mathbb{M}_{d,k}$  kompakt und das Integral bzgl.  $y$  in der Definition von  $\widehat{Q}_j^S$  stets endlich. Deshalb ist auch das Maß  $\widehat{Q}_j^S$  stets endlich.
2. Der Fall  $\widehat{Q}_j^S(\mathbb{M}_{d,j}(S)) = 0$  tritt beispielsweise ein, wenn  $d = 3$ ,  $k = \ell = 1$  und  $\Xi_0 = \{0\}$  ist. Dann ist  $\Xi_{\lambda,Q}^{3,1}$  die Vereinigungsmenge eines stationären Poisson-Geradenprozesses in  $\mathbb{R}^3$  und  $S$  eine feste Gerade. Der Schnitt  $\Xi_{\lambda,Q}^{3,1} \cap S$  ist dann  $\mathbb{P}$ -fast sicher leer, also  $\mathbb{P}\left(\left(\Xi_{\lambda,Q}^{3,1} \cap S\right) \cap C = \emptyset\right) = 1$ . Andererseits ist  $\max(0, \ell+k-d) = \min(\ell-1, k) = 0$  und in der Definition von  $\widehat{Q}_0^S$  ist  $S^j \cap \theta_T^T([(y + \theta K') \cap W] \oplus W^\perp) = S \cap \theta_T^T([y \cap W] \oplus W^\perp) \neq \emptyset \iff y = 0$ , wenn  $y \in S^\perp \cap \theta E_1^\perp$ . Wegen  $\dim(S^\perp \cap \theta E_1^\perp) = 1$  ist also das Integral hierüber 0 und damit  $\widehat{Q}_0^S(\mathbb{M}_{3,0}(S)) = 0$ .

**Beweis (Satz 5.1).** Im folgenden sei stets  $C \in \mathcal{K}'(S)$ . Weiter sei, wie oben,  $\mathbb{M}_{d,k}^{(j)} = \{\theta \in \text{SO}_{d,k} : \dim(S \cap \theta E_k) = j\} \times \mathcal{K}'_{d-k}$ . Nach Voraussetzung gilt dann  $Q(\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}) = 0$  für alle  $j \geq \ell$ . Mit Hilfe der bekannten Formel für das Kapazitätsfunktional (3.2) von  $\Xi_{\lambda,Q}^{d,k}$  folgt

$$\begin{aligned}
 & -\log \mathbb{P}\left(\left(\Xi_{\lambda,Q}^{d,k} \cap S\right) \cap C = \emptyset\right) \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{M}_{d,k}} \nu_{d-k}(K \oplus \pi_{d-k}(-\theta^T C)) Q(d(\theta, K)) \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{M}_{d,k}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \mathbb{1}(\theta((K+z) \times \mathbb{R}^k) \cap C \neq \emptyset) dz Q(d(\theta, K)) \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{M}_{d,k}} \int_{\mathbb{R}^{d-k}} \mathbb{1}(\theta(K' + z' \oplus E_k) \cap C \neq \emptyset) dz Q(d(\theta, K)) \\
 &= \lambda \int_{\mathbb{M}_{d,k}} \int_{\theta E_k^\perp} \mathbb{1}\left((z + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) \neq \emptyset\right) \nu_{\theta E_k^\perp}(dz) Q(d(\theta, K)) \\
 &= \lambda \sum_{j=\max(0, \ell+k-d)}^{\min(\ell-1, k)} \int_{\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}} \int_{\theta E_k^\perp} \mathbb{1}\left((z + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) \neq \emptyset\right) \nu_{\theta E_k^\perp}(dz) Q(d(\theta, K)).
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das innere Integral über  $\theta E_k^\perp$  für feste  $(\theta, K) \in \mathbb{M}_{d,k}^{(j)}$ . Sei dazu zunächst  $\max(0, \ell + k - d) = \ell + k - d$  und  $j = \ell + k - d$ . Dann ist  $S^\perp \cap \theta E_k^\perp = \{0\}$  und  $\pi_{\theta E_k^\perp}|_T$  ein Isomorphismus. Der Transformationssatz und die obigen Überlegungen liefert deshalb

$$\begin{aligned}
 & \int_{\theta E_k^\perp} \mathbb{1}\left((z + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) \neq \emptyset\right) \nu_{\theta E_k^\perp}(dz) \\
 &= [S, \theta E_k^\perp] \int_T \mathbb{1}\left((\pi_{\theta E_k^\perp}|_T(z) + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) \neq \emptyset\right) \nu_T(dz) \\
 &= [S, \theta E_k^\perp] \int_T \mathbb{1}\left(\pi_{\theta E_k^\perp}|_T(z) \in \theta K' \oplus \pi_{\theta E_k^\perp}(-C)\right) \nu_T(dz) \\
 &= [S, \theta E_k^\perp] \int_T \mathbb{1}\left(z \in \pi_{\theta E_k^\perp}|_T^{-1}(\theta K') \oplus \pi_T(-C)\right) \nu_T(dz).
 \end{aligned}$$

In allen anderen Fälle gehen wir im Prinzip ähnlich vor, allerdings muss vorher der lineare Unterraum  $\theta E_k^\perp$  zerlegt werden. Mit Hilfe der Zerlegung (5.1) und wegen  $C \subset S$  folgt zunächst  $\pi_{\theta E_k^\perp}(C) = \pi_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp}(C) \oplus \pi_W(C) = \pi_W(C)$ . Schreiben wir weiter einen

Punkt  $z \in \theta E_k^\perp$  als  $z = x + y$ , wobei  $x \in W$  und  $y \in S^\perp \cap \theta E_k^\perp$ , so gilt

$$\begin{aligned} (z + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) &= (z + \theta K') \cap W \cap \pi_W(C) \\ &= (x + [(y + \theta K') \cap W]) \cap \pi_W(C). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir also für das innere Integral

$$\begin{aligned} &\int_{\theta E_k^\perp} \mathbf{1}\left((z + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) \neq \emptyset\right) \nu_{\theta E_k^\perp}(dz) \\ &= \int_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp} \int_W \mathbf{1}\left((x + [(y + \theta K') \cap W]) \cap \pi_W(C) \neq \emptyset\right) \nu_W(dx) \nu_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp}(dy) \\ &= \int_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp} \int_W \mathbf{1}\left(x \in [(y + \theta K') \cap W] \oplus \pi_W(-C)\right) \nu_W(dx) \nu_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp}(dy) \end{aligned}$$

für alle  $(\theta, K) \in \mathbb{M}_{d,k}^{(j)}$ . Nach den obigen Überlegungen ist die orthogonale Projektion  $\pi_W|_T : T \rightarrow W$  ein Isomorphismus mit Funktionaldeterminante  $[S, \theta E_k^\perp]$ . Ferner gilt  $\pi_W|_S = \pi_W|_T \circ \pi_T|_S$ . Für  $x = y + z \in S$  mit  $y \in S \cap \theta E_k$  und  $z \in T$  gelten nämlich, wegen  $y \in \theta E_k$  und  $W \subseteq \theta E_k^\perp$ , die Gleichungen  $\pi_W|_S(x) = \pi_W(y) + \pi_W(z) = \pi_W(z) = \pi_W|_T(\pi_T|_S(x))$ . Hiermit folgt

$$\begin{aligned} &\int_W \mathbf{1}\left(x \in [(y + \theta K') \cap W] \oplus \pi_W(-C)\right) \nu_W(dx) \\ &= [S, \theta E_k^\perp] \int_T \mathbf{1}\left(\pi_W|_T(x) \in [(y + \theta K') \cap W] \oplus \pi_W(-C)\right) \nu_T(dx) \\ &= [S, \theta E_k^\perp] \int_T \mathbf{1}\left(x \in \pi_W|_T^{-1}([(y + \theta K') \cap W] \oplus \pi_T(-C))\right) \nu_T(dx). \end{aligned}$$

Schließlich überlegt man sich schnell, dass die Gleichung  $\pi_W|_T^{-1}([(y + \theta K') \cap W] \oplus \pi_T(-C)) = T \cap ([ (y + \theta E_k') \cap W] \oplus W^\perp)$  richtig ist. Führen wir noch eine Transformation mit Hilfe von  $\theta_T$  durch, so erhalten wir insgesamt also

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}} \int_{\theta E_k^\perp} \mathbf{1}\left((z + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) \neq \emptyset\right) \nu_{\theta E_k^\perp}(dz) Q(d(\theta, K)) \\ &= \int_{\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}} \int_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp} \int_T \mathbf{1}\left(x \in \left(T \cap ([ (y + \theta K') \cap W] \oplus W^\perp)\right) \oplus \pi_T(-C)\right) [S, \theta E_k^\perp] \\ &\quad \nu_T(dx) \nu_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp}(dy) Q(d(\theta, K)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}} \int_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp} \nu_{S^j} \left( \left( S^j \cap \theta_T^T \left( [(y + \theta K') \cap W] \oplus W^\perp \right) \right) \oplus \pi_{S^j}(-\theta_T^T C) \right) [S, \theta E_k^\perp] \\
 &\quad \nu_{S^\perp \cap \theta E_k^\perp}(\mathrm{d}y) Q(\mathrm{d}(\theta, K))
 \end{aligned}$$

für alle  $j \in \{\max(0, \ell + k - d), \dots, \min(\ell - 1, k)\}$ . Die Behauptung ergibt sich nun mit Hilfe eines Transformationssatzes für Bildmaße. Da  $S^\perp \cap \theta E_k^\perp$  ein  $(d + j - k - \ell)$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{R}^d$  ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Drehungen  $\theta_W \in \mathrm{SO}_{d, d-k-\ell+j}$ , so dass  $S^\perp \cap \theta E_k^\perp = \theta_W E_{d-k-\ell+j}$ . Dies liefert

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}} \int_{\theta E_k^T} \mathbf{1} \left( (z + \theta K') \cap \pi_{\theta E_k^\perp}(C) \neq \emptyset \right) \nu_{\theta E_k^\perp}(\mathrm{d}z) Q(\mathrm{d}(\theta, K)) \\
 &= \int_{\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}} \int_{E_{d-k-\ell+j}} \nu_{S^j} \left( \left( S^j \cap \theta_T^T \left( [(\theta_W y + \theta K') \cap W] \oplus W^\perp \right) \right) \oplus \pi_{S^j}(-\theta_T^T C) \right) [S, \theta E_k^\perp] \\
 &\quad \nu_{E_{d-k-\ell+j}}(\mathrm{d}x) Q(\mathrm{d}(\theta, K)).
 \end{aligned}$$

Ist schließlich  $Q'$  ein Maß auf  $\mathbb{M}_{d,k}^{(j)}$  mit Dichte  $[S, \theta E_k^\perp]$ , so ist  $\widehat{Q}_j^S$  gerade das Bildmaß von  $Q' \otimes \nu_{E_{d-k-\ell+j}}$  unter der Abbildung

$$\begin{aligned}
 g : \mathbb{M}_{d,k}^{(j)} \times E_{d-k-\ell+j} &\rightarrow \mathbb{M}_{d,j}(S) \\
 (\theta, K, x) &\mapsto \left( \theta_T, S^j \cap \theta_T^T \left( [(\theta_W y + \theta K') \cap W] \oplus W^\perp \right) \right).
 \end{aligned}$$

Integration bezüglich eines Bildmaßes liefert dann die Behauptung.  $\square$

Der Schnitt eines Zylindermodells mit einem linearen Unterraum  $S$  ist also die Vereinigung von unabhängigen Zylindermodellen in  $S$ . In vielen Fällen vereinfacht sich dies aber, denn für  $j > \max(\ell - d + k, 0)$  ist

$$\{\theta \in \mathrm{SO}_{d,k} : \dim(S \cap \theta E_k) = j\} \subseteq \{\theta \in \mathrm{SO}_d : S \text{ und } \theta E_k \text{ sind in spezieller Lage}\}.$$

**Korollar 5.2** *Es gelte  $Q_0(\{\theta \in \mathrm{SO}_{d,k} : S \text{ und } \theta E_k \text{ sind in spezieller Lage}\}) = 0$ . Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 5.1 und  $j_0 = \max(\ell - d + k, 0)$ :*

$$\mathbb{P} \left( (\Xi_{\lambda, Q}^{d,k} \cap S) \cap C = \emptyset \right) = \exp \left\{ -\lambda_{j_0}^S \int_{\mathbb{M}_{d,j_0}(S)} \nu_{S^{j_0}}(K \oplus \pi_{S^{j_0}}(-\theta^T C)) Q_{j_0}^S(\mathrm{d}(\theta, K)) \right\}.$$

Ist also  $\ell - d + k \leq 0$ , so ist der Schnitt von  $\Xi_{\lambda, Q}^{d,k}$  mit einem linearen Unterraum  $S$  ein Boolesches Modell in  $S$ . Die Voraussetzung an die Richtungsverteilung ist insbesondere dann erfüllt, wenn diese absolut stetig ist wie in Abschnitt 4.2.



Die obigen Formeln für  $\lambda_j^S$  und  $\widehat{Q}_j^S$  sind sehr kompliziert und wenig intuitiv. Für einige Fälle lassen sie sich aber vereinfachen.

**Beispiel 5.1** Wir betrachten den Spezialfall  $k = d - 1$  und es gelte  $Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d,d-1} : S \text{ und } \theta E_{d-1} \text{ sind in spezieller Lage}\}) = 0$ . In diesem Fall ist  $\max(\ell - d + k, 0) = \ell - 1$  und für  $Q_0$ -fast alle  $\theta \in \text{SO}_{d,d-1}$  gilt  $\dim(S \cap \theta E_{d-1}) = \ell - 1$  sowie  $\dim(S^\perp \cap \theta E_{d-1}^\perp) = 0$ . Damit folgt

$$\widehat{Q}_{\ell-1}^S(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{M}_{d,d-1}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\theta_T, S^{\ell-1} \cap \theta_T^T(\theta K' \oplus \theta E_{d-1})) [S, \theta E_{d-1}^\perp] Q(d(\theta, K)).$$

Andererseits ist  $S^{\ell-1} \cap \theta_T^T(\theta K' \oplus \theta E_{d-1}^\perp) = S^{\ell-1} \cap \theta_T^T Z(0, \theta, K)$  und damit

$$\begin{aligned} \lambda_{\ell-1}^S &= \lambda \int_{\text{SO}_{d,d-1}} [S, \theta E_{d-1}^\perp] Q_0(d\theta) \\ Q_{\ell-1}^S(\mathcal{A}) &= \frac{\int_{\mathbb{M}_{d,d-1}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\theta_T, S^{\ell-1} \cap \theta_T^T Z(0, \theta, K)) [S, \theta E_{d-1}^\perp] Q(d(\theta, K))}{\int_{\text{SO}_{d,d-1}} [S, \theta E_{d-1}^\perp] Q_0(d\theta)}. \end{aligned}$$

Im Fall  $\ell = 1$  lässt sich dies noch weiter vereinfachen. Ist nämlich  $S = \text{span}\{v\}$ , so ist

$$\mathbb{P}\left(\left(\Xi_{\lambda,Q}^{d,k} \cap S\right) \cap C = \emptyset\right) = \exp\left\{-\lambda_0^S \int_{\mathcal{K}'(S)} \nu_S(K \oplus \pi_S(-C)) Q_0^S(dK)\right\}$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_0^S &= \lambda \int_{\text{SO}_{d,d-1}} |\langle v, \theta e_1 \rangle| Q_0(d\theta) \\ Q_0^S(\mathcal{A}) &= \frac{\int_{\mathbb{M}_{d,d-1}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(S \cap Z(0, \theta, K)) |\langle v, \theta e_1 \rangle| Q(d(\theta, K))}{\int_{\text{SO}_{d,d-1}} |\langle v, \theta e_1 \rangle| Q_0(d\theta)}. \end{aligned}$$

**Beispiel 5.2** Es sei  $k = 1$  sowie  $\ell = d - 1$  und für die Richtungsverteilung gelte wieder  $Q_0(\{\theta \in \text{SO}_{d,1} : S \text{ und } \theta E_k \text{ sind in spezieller Lage}\}) = 0$ . Dann ist  $\dim(S \cap \theta E_1) = \dim(S^\perp \cap \theta E_1^\perp) = 0$  für  $Q_0$ -fast alle  $\theta \in \text{SO}_{d,1}$ . Dieser Fall ist in gewisser Weise dual zu  $k = d - 1$  und  $\ell = 1$ , welcher im vorherigen Beispiel behandelt wurde und wir erhalten analog

$$\mathbb{P}\left(\left(\Xi_{\lambda,Q}^{d,1} \cap S\right) \cap C = \emptyset\right) = \exp\left\{-\lambda_0^S \int_{\mathcal{K}'(S)} \nu_S(K \oplus \pi_S(-C)) Q_0^S(dK)\right\}$$

mit

$$\lambda_0^S = \lambda \int_{SO_{d,1}} [S, \theta E_1^\perp] Q_0(d\theta)$$

$$Q_0^S(\mathcal{A}) = \frac{\int_{\mathbb{M}_{d,1}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(S \cap Z(0, \theta, K)) [S, \theta E_1^\perp] Q(d(\theta, K))}{\int_{SO_{d,1}} [S, \theta E_1^\perp] Q_0(d\theta)}.$$

## Kommentare und offene Fragen

Die Beschaffenheit linearer Schnitte durch stationäre Poisson- $k$ -Zylindermodelle konnte vollständig geklärt werden, auch wenn die Formel für das Kapazitätsfunktional recht kompliziert ausfällt.

Auch diese Ergebnisse gelten wieder analog für den Schnitt eines stationären Poisson- $k$ -Zylinderprozesses mit  $S$ , definiert durch

$$\Psi_{\lambda, Q}^{d,k}(S) := \sum_{(X, \Theta, \Xi) \in s(\Pi_{\lambda, Q})} \delta_{Z(X, \Theta, \Xi) \cap S}.$$

D.h.  $\Psi_{\lambda, Q}^{d,k}(S)$  ist die Summe von unabhängigen stationären Poisson-Zylinderprozessen in  $S$ . Deren Intensitätsmaße sind dann gerade durch  $\Lambda_j^S(\mathcal{F}_C) = \log(1 - T_j^S(C))$  für alle  $C \in \mathcal{K}(S)$  festgelegt.

## 6 Ecken und Schnittpunkte induziert durch stationären Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodelle

Wir betrachten in diesem Kapitel nur stationäre Poisson- $(d - 1)$ -Zylinderprozesse bzw. Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodelle und verwenden dazu die in Abschnitt 3.2 eingeführte Beschreibung. Es ist also stets  $\Pi_{\lambda, Q}$  ein stationärer markierter Poisson-Prozess auf  $\mathbb{R}$  mit Markenraum  $\mathbb{M} = S^{d-1} \times [0, \infty)$  wie in Abschnitt 3.2 und  $\Xi_{\lambda, Q}$  das hiermit gebildete Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodell. Wir bemerken, dass in diesem Modell vorausgesetzt wurde, dass die Richtungsverteilung nicht degeneriert und  $\mathbb{E}R_0 < \infty$  ist.

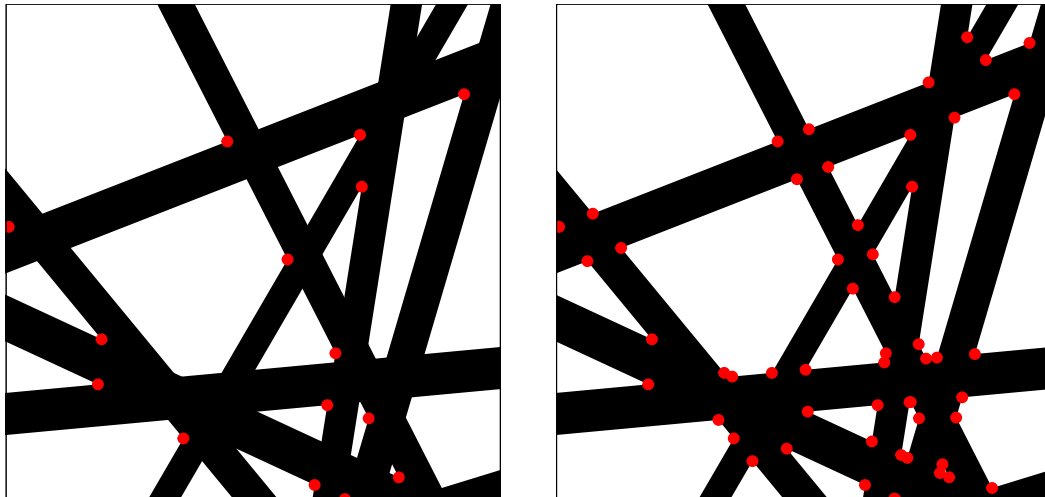


Abbildung 6.1: Simulation der lexikographisch größten (links) und aller Ecken (rechts)

Der Abschluss der Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_{\lambda, Q}^c$  besteht dann, wie bereits in der Einführung erwähnt, aus Polytopen  $Z_i, i \geq 1$ . Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, dass die Anzahl der Ecken dieser Polytope oder zum Beispiel die lexikographisch größten hiervon (Abbildung 6.1 zeigt eine Realisierung), welche in einem wachsenden konvexen Körper  $\varrho W$  liegen, asymptotisch normalverteilt ist, wenn  $\varrho$  gegen Unendlich strebt. Wir werden diese Punkte hierfür nicht als Ecken der Polytope, sondern als verschobene Schnittpunkte von Hyperebenen auffassen.

Die mathematischen Ausdrücke in diesem Kapitel sind häufig sehr lang und stellen eine gewisse Herausforderung für die Notation dar. Damit in den Rechnungen die wesentlichen Schritte erkennbar bleiben, müssen deswegen an verschiedenen Stellen einige Abkürzungen eingeführt werden. Insbesondere werden wir die folgende Kurzschreibweise verwenden.

- Ist  $(a_1, \dots, a_k)$  ein Tupel von Elementen einer Menge, so schreiben wir  $\mathbf{a}_{1, \dots, k} = (a_1, \dots, a_k)$  oder auch einfach  $\mathbf{a}$ . Für  $J = (i_1, \dots, i_k)$  ist analog  $\mathbf{a}_J = (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ .
- Ist  $\mu$  ein Maß über einem messbaren Raum  $[\Omega, \mathfrak{A}]$ , so bezeichnen wir mit  $\mu^{(k)}$  das  $k$ -fache Produktmaß von  $\mu$ . Für Integrale schreiben wir dann kurz  $\int_{\Omega^k} f(\mathbf{x}) \mu^{(k)}(d\mathbf{x})$ .

## 6.1 Ecken und Schnittpunkte als Punktprozesse

Die mittleren Hyperebenen eines jeden  $(d-1)$ -Zylinders (vgl. Abbildung 3.2) bilden einen stationären Poisson-Hyperebenenprozess. Die Schnittpunkte, welche durch den Schnitt von jeweils  $d$  Hyperebenen entstehen, bilden dann insgesamt einen Punktprozess. Allgemeiner kann man auch die  $(d-k)$ -Ebenenprozesse betrachten, welche durch den Schnitt von jeweils  $k$  Hyperebenen entstehen. Diese Form von Schnittprozessen wurde bereits von Matheron (1975) untersucht, siehe auch Schneider und Weil (2000). In der jüngeren Vergangenheit wurden von Heinrich, H. Schmidt und V. Schmidt (2006) zentrale Grenzwertsätze für diese Art von Schnittprozessen gefunden. Siehe auch Heinrich, H. Schmidt und V. Schmidt (2007) für Grenzwertsätze für Punktprozesse auf den Seitenflächen von Poisson-Hyperebenenprozessen.

Es seien nun  $(x_1, u_1), \dots, (x_d, u_d) \in \mathbb{R} \times S^{d-1}$  gegeben. Dann ist der Schnitt der hiermit gebildeten Hyperebenen  $\bigcap_{i=1}^d H(x_i, u_i)$  die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nämlich  $\{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, u_i \rangle = x_i, i = 1, \dots, d\} = \{y \in \mathbb{R}^d : y^T (u_1, \dots, u_d) = x^T\}$ , wobei  $(u_1, \dots, u_d)$  die Matrix mit Spalten  $u_1, \dots, u_d$  ist. Sind  $u_1, \dots, u_d$  linear unabhängig, so ist diese Matrix invertierbar und die Lösungsmenge ist einelementig. Wir identifizieren dann die Lösungsmenge mit diesem Punkt, d.h wir schreiben

$$\bigcap_{i=1}^d H(x_i, u_i) = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_d^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

für den Schnittpunkt. Im Fall  $d = 2$  können wir die obige inverse Matrix ausrechnen. Sind die Einheitsvektoren durch zwei Winkel  $\phi_1, \phi_2 \in [-\pi, \pi)$  gegeben, also  $u_i = u(\phi_i) = (\cos \phi_i, \sin \phi_i)^T$ ,  $i = 1, 2$ , so ist

$$H(x_1, u_1(\phi_1)) \cap H(x_2, u_2(\phi_2)) = \frac{1}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} (x_1 \sin \phi_2 - x_2 \sin \phi_1, x_2 \cos \phi_1 - x_1 \cos \phi_2)^T.$$

Diese Gleichung kann man natürlich auch über elementare geometrische Überlegungen erhalten.

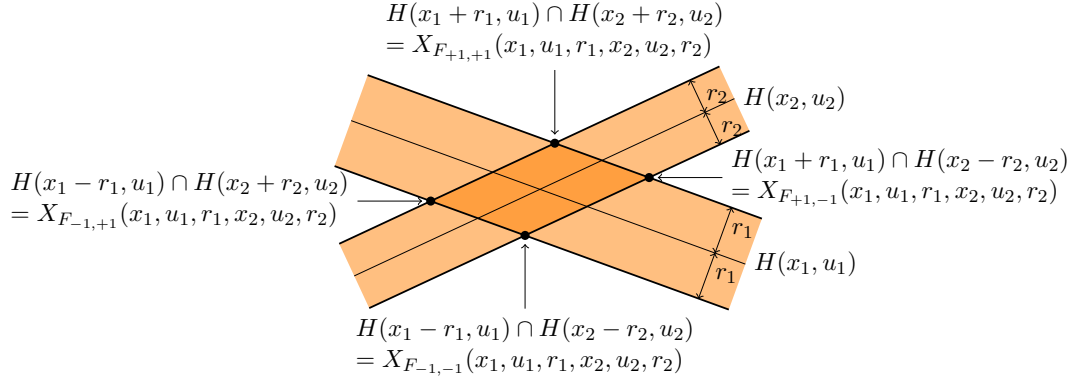


Abbildung 6.2: Schnittpunkte erzeugt durch zwei Zylinder in der Ebene

Schneiden wir nun anstatt der Hyperebenen  $d$  Zylinder  $Z(x_1, u_1, r_1), \dots, Z(x_d, u_d, r_d)$ , wobei  $u_1, \dots, u_d$  linear unabhängig seien, so ergibt sich ein Parallelotop mit  $2^d$  Ecken. Diese Ecken sind offenbar nichts anderes als die Schnittpunkte der Hyperebenen, welche die Zylinder beranden, d.h. die Ecken sind von der Form  $\bigcap_{i=1}^d H(x_i \pm r_i, u_i)$ , vgl. Abbildung 6.2. Wir können diese Schnittpunkte auch erhalten, indem wir den Schnittpunkt der mittleren Hyperebenen verschieben. Etwas allgemeiner wollen wir auch beliebige von  $(u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d) \in S^{d-1} \times [0, \infty)$  abhängige Verschiebungen zulassen.

Für  $d$  markierte Punkte  $(x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$  und eine messbare Funktion  $F : \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definieren deshalb den um  $F$  verschobenen Schnittpunkt durch

$$X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)) := \begin{cases} \bigcap_{i=1}^d H(x_i, u_i) + F((u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d)) & , \text{ falls } u_1, \dots, u_d \text{ linear unabhängig} \\ \infty & , \text{ falls } u_1, \dots, u_d \text{ linear abhängig} \end{cases}$$

Setzen wir  $\hat{F}_i = \langle u_i, F \rangle$ , für alle  $i = 1, \dots, d$ , so können wir für den verschobenen Schnittpunkt äquivalent auch  $\bigcap_{i=1}^d H(x_i + \hat{F}_i((u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d)), u_i)$  schreiben. Die Abbildung  $F$  dient im Wesentlichen als Platzhalter für die nachfolgenden zwei Abbildungen. Durch die Wahl  $F = F_{a_1, \dots, a_d}$ , wobei

$$F_{a_1, \dots, a_d}((u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d)) := \begin{cases} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_d^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 r_1 \\ \vdots \\ a_d r_d \end{pmatrix} & , \text{ falls } u_1, \dots, u_d \text{ linear unabhängig} \\ \infty & , \text{ falls } u_1, \dots, u_d \text{ linear abhängig} \end{cases} \quad (6.2)$$

für  $a_1, \dots, a_d \in \{\pm 1\}$  erhalten wir eine Ecke des Schnittparallelotops und durch die

Wahl  $F = F_{\text{lex min}}$  mit

$$F_{\text{lex min}}((u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d)) := \begin{cases} \text{lex min}_{a_1, \dots, a_d \in \{\pm 1\}} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_d^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 r_1 \\ \vdots \\ a_d r_d \end{pmatrix}, & \text{falls } u_1, \dots, u_d \text{ linear unabhängig} \\ \infty & \text{falls } u_1, \dots, u_d \text{ linear abhängig} \end{cases} \quad (6.3)$$

erhalten wir die lexikographisch kleinste Ecke des Schnittparallelotops. Siehe dazu auch Abbildung 6.2 Man beachte, dass durch (6.3) eine symmetrische Funktion definiert wird, durch (6.2) allerdings nicht. Damit die Ecken der Paralleleptope bzw. die Schnittpunkte der Hyperebenen auch als sichtbare Ecken des Zylindermodells interpretiert werden können, dürfen wir nur diejenigen zählen, welche nicht von einem anderen (d.h. nicht am Schnitt beteiligten) Zylinder überdeckt werden. Wir definieren deshalb für alle  $z \in \mathbb{R}^d$  sowie  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  die Abbildung

$$G : \mathbb{R}^d \times \mathcal{N}_{\mathbb{M}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad G(z, \psi) := \prod_{(y, v, t) \in s(\psi)} (1 - \mathbb{1}_{Z(y, v, t)}(z))$$

und erhalten so den *Punktprozess der verschobenen, sichtbaren Schnittpunkte* durch

$$N_F(A) := \sum_{(X_1, U_1, R_1), \dots, (X_d, U_d, R_d) \in s(\Pi_{\lambda, Q})}^{\neq} \mathbb{1}_A(X_F((X_1, U_1, R_1), \dots, (X_d, U_d, R_d))) \\ \times G\left(X_F((X_1, U_1, R_1), \dots, (X_d, U_d, R_d)), \Pi_{\lambda, Q} - \sum_{i=1}^d \delta_{(X_i, U_i, R_i)}\right).$$

Die Funktion  $G$  beschreibt also eine abhängige Verdünnung des Schnittprozesses.

Es seien nun  $Z_i$ ,  $i \geq 1$ , die abgeschlossenen Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_{\lambda, Q}$  wie oben. Der Punktprozess gebildet aus allen Ecken der  $Z_i$ ,  $i \geq 1$ , ist also gerade der Punktprozess aller sichtbaren Schnittpunkte erzeugt durch die berandenden Hyperebenen, d.h.

$$M_{\text{Ecken}} = \frac{1}{d!} \sum_{a_1, \dots, a_d \in \{\pm 1\}} N_{F_{a_1, \dots, a_d}} \quad (6.4)$$

mit  $F_{a_1, \dots, a_d}$  wie in (6.2). Der Faktor  $\frac{1}{d!}$  führt dabei dazu, dass der Punktprozesse einfach ist. Weiter überlegt man sich, dass die lexikographisch größte Ecke eines Polytops  $Z_i$  stets die nicht überdeckte lexikographisch kleinste Ecke eines Schnittparallelotops ist. Umgekehrt ist auch jede nicht überdeckte lexikographisch kleinste Ecke eines Schnittparallelotops die lexikographisch größte Ecke genau eines Polytops  $Z_i$ , also

$$M_{\text{max}} := \sum_{i \geq 1} \delta_{\text{lex max}(Z_i)} = \frac{1}{d!} N_{F_{\text{lex min}}}. \quad (6.5)$$

Auch hier wird  $N_{F_{\text{lex min}}}$  durch den Faktor  $\frac{1}{d!}$  wieder einfach. Die folgenden Eigenschaften

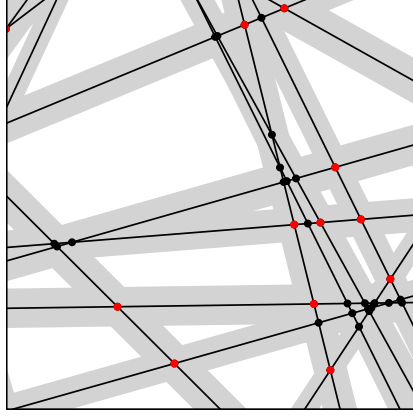


Abbildung 6.3: Simulation von  $N_F$  mit  $F \equiv 0$  (rote Punkte)

des Punktprozesses  $N_F$  macht man sich schnell klar.

#### Bemerkung 6.1

1. Der Punktprozess  $N_F$  ist stationär.
2. Die weitreichenden Abhängigkeiten von  $\Xi_{\lambda, Q}$  übertragen sich auf  $N_F$ .
3. Der Punktprozess  $N_F$  ist im allgemeinen nicht einfach. Ist nämlich  $F$  in zumindest zwei Argumenten symmetrisch, so zählt man Punkte mehrmals. Ist  $F$  vollständig symmetrisch, so ist  $\frac{1}{d!}N_F$  einfach.
4. Ist  $F \equiv 0$  und  $R_0 > \varepsilon > 0$  mit Wahrscheinlichkeit 1, so ist  $\frac{1}{d!}N_F$  ein Hard-Core-Prozess.

Die Punkte 2. und 4. machen diesen Punktprozess also auch für sich genommen interessant, da diese Eigenschaften in der Regel nicht zusammen auftreten.

## 6.2 Intensität

Wir bezeichnen ab hier mit  $\nabla_k(u_1, \dots, u_k)$ ,  $1 \leq k \leq d$ , das  $k$ -dimensionale Volumen des durch die  $k$  Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_k \in S^{d-1}$  aufgespannten Parallelotops, also

$$\nabla_k(u_1, \dots, u_k) := \sqrt{|\det((u_1, \dots, u_k)^T(u_1, \dots, u_k))|} = \sqrt{|\det((\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j=1}^k)|}.$$

**Satz 6.1** *Der stationäre Punktprozess  $N_F$  hat die Intensität*

$$\gamma_d = \lambda^d (1 - p) \int_{(S^{d-1})^d} \nabla_d(u_1, \dots, u_d) Q_0(du_1) \cdots Q_0(du_d), \quad (6.6)$$

wobei  $p = 1 - e^{-2\lambda \mathbb{E}R_0}$  der Volumenanteil von  $\Xi_{\lambda, Q}$  ist, siehe (3.6).

**Beispiel 6.1** Sei  $d = 2$  und  $U_0 = (\cos \Phi_0, \sin \Phi_0)^T$ , wobei  $\Phi_0$  eine Zufallsgröße auf  $[-\pi, \pi)$  mit symmetrischer Verteilung  $Q'_0$  ist. Dann ist

$$\gamma_2 = \lambda^2 e^{-2\lambda ER_0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(\alpha - \beta)| Q'_0(d\alpha) Q'_0(d\beta).$$

**Beweis (Satz 6.1).** Mit Hilfe der Mecke-Slivnyak-Formel (2.6) folgt zunächst für jede beschränkte Borel-Menge  $A$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_F(A) &= \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \sum_{(x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d) \in s(\psi)}^{\neq} \mathbb{1}_A(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d))) \\ &\quad \times G\left(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)), \psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(x_i, u_i, r_i)}\right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &= \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d))) \\ &\quad \times \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} G(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)), \psi) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &\quad dx Q(d(u_1, r_1)) \cdots Q(d(u_d, r_d)). \end{aligned}$$

Das innere Integral bzgl.  $\psi$  ist nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(X_F \notin \Xi_{\lambda, Q}) = 1 - p$ . Alternativ ergibt sich mit Hilfe des erzeugenden Funktionals ebenfalls

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} G(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)), \psi) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &= \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \prod_{(y, v, t) \in s(\psi)} \left(1 - \mathbb{1}_{Z(y, v, t)}(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)))\right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &= \exp \left\{ -\lambda \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{Z(y, v, t)}(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d))) dy Q(d(v, t)) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-t, t]}(y) dy Q(d(v, t)) \right\} \\ &= \exp \{-2\lambda ER_0\} = 1 - p \end{aligned}$$

für beliebige  $(x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ . Wir betrachten nun das Integral über  $\mathbb{R}^d$  für feste  $(u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d) \in \mathbb{M}$ . Seien zunächst die Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_d$



linear unabhängig. Dann wird durch die affin lineare Abbildung

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_d^T \end{pmatrix}^{-1} (x + F(u_1, r_1, \dots, u_d, r_d))$$

ein Diffeomorphismus definiert. Der Betrag der Determinante ist  $|\det(u_1, \dots, u_d)|^{-1} = (\nabla_d(u_1, \dots, u_d))^{-1}$  und nach (6.1) gilt  $X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)) = g(x)$ . Der Transformationssatz liefert also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d))) dx &= \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) dx \\ &= \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \nu_d(A). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Sind dagegen die Vektoren  $u_1, \dots, u_d$  nicht linear unabhängig, so ist nach Definition sowohl  $\mathbb{1}_A(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d))) = 0$ , als auch  $\nabla_d(u_1, \dots, u_d) = 0$ , so dass die Gleichung (6.7) auch in diesem Fall richtig ist. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_F(A) &= \lambda^d (1-p) \int \int_{\mathbb{M}^d \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d))) \\ &\quad dx Q(d(u_1, r_1)) \cdots Q(d(u_d, r_d)) \\ &= \nu_d(A) \lambda^d (1-p) \int_{(S^{d-1})^d} \nabla_d(u_1, \dots, u_d) Q_0(du_1) \cdots Q_0(du_d) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.  $\square$

Die Intensität  $\gamma_d$  ist bis auf den Faktor  $d!(1-p)$  gleich der Intensität des unverdünnten Punktprozesses der Schnittpunkte. Dabei ist diese gerade das Volumen des sogenannten assoziierten Zonoids  $Z_{\lambda, Q_0}$ , welches durch die Stützfunktion  $h_{Z_{\lambda, Q_0}}(v) = \lambda \int_{S^{d-1}} \langle u, v \rangle Q_0(du)$  definiert wird, siehe dazu Schneider und Weil (2000, S. 165 f.) oder Gruber (1983, S. 296-318). Es gilt dann gerade

$$\nu_d(Z_{\lambda, Q_0}) = \frac{1}{d!} \lambda^d \int_{(S^{d-1})^d} \nabla_d(u_1, \dots, u_d) Q_0(du_1) \cdots Q_0(du_d)$$

und damit ist  $\gamma_d = d!(1-p)\nu_d(Z_{\lambda, Q_0})$ . Ist die Richtungsverteilung  $Q_0$  das eindeutig bestimmte rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $S^{d-1}$  (z.B. Schneider und Weil (1992)), so ist das assoziierte Zonoid eine Kugel und nach Schneider und Weil (2000, S.168, 4.5.5 Satz) gilt

$$\gamma_d = \lambda^d (1-p) \frac{(d-1)! \kappa_{d-1}^d}{(d\kappa_d)^{d-1}}, \quad (6.8)$$

wobei

$$\kappa_k := \nu_k(B_1^k) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2 + 1)}$$

das  $k$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^k$  bezeichnet. Man beachte auch, dass  $\gamma_d$  als Funktion von  $\lambda$  ein Maximum annimmt, nämlich für  $\lambda = \frac{d}{2ER_0}$ . Anschaulich ist dies klar, denn mit größerem  $\lambda$  entstehen zwar mehr Schnittpunkte, aber auch mehr Zylinder, was zu einer höheren Verdünnung führt.

### 6.3 Größen zweiter Ordnung

Die Berechnung Größen zweiter Ordnung gestaltet sich deutlich schwieriger. Da die Ausdrücke stellenweise sehr lang sind, greifen wir ab hier auf die eingangs erwähnte Kurzschreibweise zurück. Es ist also zum Beispiel  $X_F((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)) = X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$ . Ferner schreiben wir kurz  $[\mathbf{u}_{1,\dots,k}] = [u_1, \dots, u_k] := \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ , für  $u_1, \dots, u_k \in S^{d-1}$ .

Wir müssen nun zunächst ein Produkt zweier Summen über ungleiche Elemente wieder als Summe über ungleiche Elemente schreiben. Dazu verwenden wir die folgende Zerlegung.

Zur einfacheren Darstellung sei  $\psi$  ein einfaches, lokal-endliches Zählmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $0 \leq q \leq d$  paarweise verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_q \in s(\psi)$  vorgegeben. Zur Abkürzung setzen wir für eine natürliche Zahl  $k \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq j \leq k$ :

- $[k] = \{1, \dots, k\}$ ,
- $[k]_j^< = \{(n_1, \dots, n_j) \in \mathbb{N}^j : 1 \leq n_1 < \dots < n_j \leq k\}$ ,
- $[k]_j^\neq = \{(m_1, \dots, m_j) \in \mathbb{N}^j : m_i \neq m_\ell, 1 \leq m_i \leq k, i \neq \ell, 1 \leq i, \ell \leq j\}$ .

Ist nun eine Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  mit beschränktem Träger gegeben, so wollen wir die Summe  $\sum_{y_1, \dots, y_d \in s(\psi)}^\neq f(y_1, \dots, y_d)$  nur als Summe über paarweise verschiedene Elemente aus  $s(\psi) \setminus \{x_1, \dots, x_q\}$  schreiben. Dazu muss man in gewisser Weise über alle Summanden, welche  $x_i$  enthalten, einzeln summieren.

**Beispiel 6.2** Ist  $q = 1$ , so ist

$$\begin{aligned} \sum_{y_1, \dots, y_d \in s(\psi)}^\neq f(y_1, \dots, y_d) &= \sum_{i=1}^d \sum_{y_1, \dots, y_{d-1} \in s(\psi) \setminus \{x\}}^\neq f(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_i, \dots, y_{d-1}) \\ &+ \sum_{y_1, \dots, y_d \in s(\psi) \setminus \{x\}}^\neq f(y_1, \dots, y_d). \end{aligned}$$

Für  $d = 2$  und  $q = 2$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{y_1, y_2 \in s(\psi)}^{\neq} f(y_1, \dots, y_d) &= \sum_{y_1, y_2 \in s(\psi) \setminus \{x_1, x_2\}}^{\neq} f(y_1, y_2) \\
 &+ \sum_{y_1 \in s(\psi) \setminus \{x_1, x_2\}} f(y_1, x_1) + \sum_{y_1 \in s(\psi) \setminus \{x_1, x_2\}} f(y_1, x_2) \\
 &+ \sum_{y_1 \in s(\psi) \setminus \{x_1, x_2\}} f(x_1, y_1) + \sum_{y_1 \in s(\psi) \setminus \{x_1, x_2\}} f(x_2, y_1) \\
 &+ f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1).
 \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall muss man nun für jedes  $j \in \{1, \dots, q\}$ , jeweils  $j$  verschiedene  $x_{m_1}, \dots, x_{m_j}$  auswählen und auf verschiedene Plätze  $n_1, \dots, n_j$  verteilen. Anschließend wird über alle diese Möglichkeiten summiert. Mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen findet man

$$\begin{aligned}
 \sum_{y_1, \dots, y_d \in s(\psi)}^{\neq} f(y_1, \dots, y_d) &= \sum_{j=1}^q \sum_{I \in [d]_j^{\leq}} \sum_{J \in [q]_j^{\neq}} \sum_{y_1, \dots, y_{d-j} \in s(\psi) \setminus \{x_1, \dots, x_q\}}^{\neq} f \circ g_{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 &+ \sum_{y_1, \dots, y_d \in s(\psi) \setminus \{x_1, \dots, x_q\}}^{\neq} f(y_1, \dots, y_d),
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

wobei  $g_{I,J} : \mathbb{R}^{q(d-j)} \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $g_{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ein  $d$ -dimensionaler Vektor mit folgenden Komponenten ist: Ist  $I = (n_1, \dots, n_j)$  und  $J = (m_1, \dots, m_j)$ , so habe für  $\ell \in \{1, \dots, j\}$  die  $n_\ell$ -te Komponente den Wert  $x_{m_\ell}$ . Die verbleibenden Komponenten füllen wir der Reihe nach mit den  $y_1, \dots, y_{d-j}$  auf. Formal können wir dies durch

$$\begin{aligned}
 g_{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= g_{I,J}(x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_{d-j}) = \\
 &= (y_1, \dots, y_{n_1-1}, x_{m_1}, y_{n_1}, \dots, y_{n_2-2}, x_{m_2}, y_{n_2-1}, \dots, y_{n_j-j}, x_{m_j}, y_{n_j-j+1}, \dots, y_{d-j})
 \end{aligned}$$

ausdrücken. Ist also beispielsweise  $d = 5$ ,  $j = 2$ ,  $I = (2, 4)$  und  $J = (2, 1)$ , so ist  $g_{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (y_1, x_2, y_2, x_1, y_3)$ . Diese Abbildung ist außerdem linear und damit stetig. Für zwei Funktion  $f_1, f_2$  mit jeweils beschränktem Träger folgt aus (6.9) die Gleichung

$$\begin{aligned}
 &\left( \sum_{x_1, \dots, x_d \in s(\psi)}^{\neq} f_1(x_1, \dots, x_d) \right) \cdot \left( \sum_{y_1, \dots, y_d \in s(\psi)}^{\neq} f_2(y_1, \dots, y_d) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^{\leq}} \sum_{J \in [d]_j^{\neq}} \sum_{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{d-j} \in s(\psi)}^{\neq} f_1(x_1, \dots, x_d) f_2 \circ g_{I,J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
 &+ \sum_{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d \in s(\psi)}^{\neq} f_1(x_1, \dots, x_d) f_2(y_1, \dots, y_d).
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Für symmetrische Funktionen stimmt diese Formel mit der von Heinrich und Muche (2008) überein. Diese Formel gilt auch analog für lokal-endliche Zählmaße auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{M}$ .

**Satz 6.2** *Es seien  $F_1, F_2 : \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  zwei messbare, nicht notwendig symmetrische Abbildungen und  $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  beschränkt. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[N_{F_1}(A)N_{F_2}(B)] = \alpha_0^{(2)}(A \times B) + \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} \alpha_{j,I,J}^{(2)}(A \times B) \quad (6.11)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{j,I,J}^{(2)}(A \times B) &= \lambda^{2d-j}(1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d-j} [\mathbf{u}_J]^\perp} \int \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_{d-j})) \\ &\quad \times \nu_d(A \cap (B - z - m_{j,I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})))) \\ &\quad \times \exp \{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, z + m_{j,I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \rangle) \} \\ &\quad \times \left( \prod_{i \in [d] \setminus J} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z + F_2 \circ g_{I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))) \right) \\ &\quad \times \left( \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \right) \\ &\quad \nu_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(dz) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \end{aligned} \quad (6.12)$$

für  $0 \leq j \leq d-1$  und  $\alpha_0^{(2)} = \alpha_{0, \emptyset, \emptyset}^{(2)}$ , wobei  $[\mathbf{u}_\emptyset]^\perp = \mathbb{R}^d$  und  $g_{\emptyset, \emptyset}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) = (\mathbf{v}, \mathbf{t})$ . Dabei ist

$$m_{j,I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) = F_2 \circ g_{I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}). \quad (6.13)$$

**Beispiel 6.3** Sei  $d = 2$  und  $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ . Dann hängen die  $\alpha_{j,I,J}^{(2)}$  nicht von  $I, J$  ab. Schreiben wir außerdem wieder  $U_0 = (\cos \Phi_0, \sin \Phi_0)^T$  wie in Beispiel 6.1, so folgt

$$\mathbb{E}[N_{F_1}(A)N_{F_2}(B)] = \alpha_0^{(2)}(A \times B) + 4\alpha_1^{(2)}(A \times B) + 2\alpha_2^{(2)}(A \times B),$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(2)}(A \times B) &= \lambda^4(1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(\theta_2 - \theta_1)| \nu_2(A \cap (B - z)) \\ &\quad \times \exp \{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(z_1 \cos \Phi_0 + z_2 \sin \Phi_0) \} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^2 \mathbb{1}_{[-r_i, r_i]}(z_1 \cos \phi_i + z_2 \sin \phi_i) \mathbb{1}_{[-t_i, t_i]}(z_1 \cos \theta_i + z_2 \sin \theta_i) \\ &\quad \nu_2(dz) Q'(d(\phi_1, r_1)) Q'(d(\phi_2, r_2)) Q'(d(\theta_1, t_1)) Q'(d(\theta_2, t_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^{(2)}(A \times B) &= \lambda^3 (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\sin(\theta - \phi_1) \sin(\theta - \phi_2)| \\
 &\quad \times \nu_2(A \cap (B - s(-\sin \theta, \cos \theta)^T)) \\
 &\quad \times \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(s \sin(\Phi_0 - \theta)) \right\} \\
 &\quad \times \mathbb{1}_{[-r_2, r_2]}(s \sin(\theta - \phi_1)) \mathbb{1}_{[-r_1, r_1]}(s \sin(\theta - \phi_2)) \\
 &\quad ds Q'_0(d\theta) Q'(d(\phi_1, r_1)) Q'(d(\phi_2, r_2)), \\
 \alpha_2^{(2)}(A \times B) &= \gamma_2 \nu_2(A \cap B).
 \end{aligned}$$

**Beweis (Satz 6.2).** Indem wir zuerst die Zerlegung (6.10) und dann Mecke-Slivnyak-Formel anwenden erhalten wir

$$\mathbb{E}[N_{F_1}(A) N_{F_2}(B)] = \alpha_0^{(2)}(A \times B) + \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^{\neq}} \alpha_{j,I,J}^{(2)}(A \times B)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,I,J}^{(2)}(A \times B) &= \\
 &= \lambda^{2d-j} \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{\mathbb{R}^{2d-j}} \mathbb{1}_A(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \mathbb{1}_B(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \\
 &\quad \times \left( \prod_{i \in [d] \setminus J} \mathbb{1}_{Z(x_i, u_i, r_i)^c}(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \right) \\
 &\quad \times \left( \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(y_i, v_i, t_i)^c}(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right) \\
 &\quad \times \left( \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \prod_{(z,w,s) \in s(\psi)} \mathbb{1}_{Z(z,w,s)^c}(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \right. \\
 &\quad \left. \times \mathbb{1}_{Z(z,w,s)^c}(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) P_{\lambda,Q}(d\psi) \right) d\mathbf{x} d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t}))
 \end{aligned}$$

und  $\alpha_0^{(2)} = \alpha_{0,\emptyset,\emptyset}$ . Wir bemerken, dass das innere Integral bzgl.  $\psi$  gerade die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(X_{F_1} \notin \Xi_{\lambda,Q}, X_{F_2} \notin \Xi_{\lambda,Q})$  ist, welche mit der Kovarianz (3.3) ausgedrückt werden kann. Alternativ kann auch wieder das erzeugende Funktional (2.5) verwendet werden. Es ergibt sich in jedem Fall

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \prod_{(z,w,s) \in s(\psi)} \mathbb{1}_{Z(z,w,s)^c}(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \mathbb{1}_{Z(z,w,s)^c}(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) P_{\lambda,Q}(d\psi) \\
 &= \exp \left\{ -4\lambda \mathbb{E} R_0 + \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]} \left( (U_0, X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) - X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Wenden wir im Fall  $j = d$  anschließend wieder die Transformation aus dem vorherigen Beweis an, so folgt

$$\begin{aligned}
 \alpha_{d,I,J}^{(2)}(A \times B) &= \\
 &= \lambda^d (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_d(\mathbf{u}) \mathbb{1}_A(x + F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \mathbb{1}_B(x + F_2(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 &\quad \times \exp\left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, F_2(\mathbf{u}, \mathbf{r}) - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle) \right\} dx Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 &= \lambda^d (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^d} \nabla_d(\mathbf{u}) \nu_d(A \cap (B + F_2(\mathbf{u}, \mathbf{r}) - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}))) \\
 &\quad \times \exp\left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, F_2(\mathbf{u}, \mathbf{r}) - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle) \right\} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})).
 \end{aligned}$$

Für  $0 \leq j \leq d-1$  betrachten wir zunächst wieder das innere Integral über  $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{d-j}$  und hier den Fall, dass jeweils die Vektoren  $u_1, \dots, u_d$  und  $u_{m_1}, \dots, u_{m_j}, v_1, \dots, v_{d-j}$  linear unabhängig sind, wenn  $J = (m_1, \dots, m_j)$ . Der lineare Unterraum  $[\mathbf{u}_J]^\perp = [u_{m_1}, \dots, u_{m_j}]^\perp \subseteq \mathbb{R}^d$  hat dann die Dimension  $d-j$  und eine Orthonormalbasis  $w_1, \dots, w_{d-j}$ . Es folgt, dass die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{d-j} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^T & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_d^T & 0 & \dots & 0 \\ v_1^T & \langle v_1, w_1 \rangle & \dots & \langle v_1, w_{d-j} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{d-j}^T & \langle v_{d-j}, w_1 \rangle & \dots & \langle v_{d-j}, w_{d-j} \rangle \end{pmatrix}}_{=: M(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_{d-j})} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \\ z'_1 \\ \vdots \\ z'_{d-j} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

definierte lineare Abbildung ein Diffeomorphismus ist mit

$$\begin{aligned}
 &|\det M(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_{d-j})| = \\
 &= \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \left| \det \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \dots & \langle v_1, w_{d-j} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_{d-j}, w_1 \rangle & \dots & \langle v_{d-j}, w_{d-j} \rangle \end{pmatrix} \right| \\
 &= \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_{d-j})).
 \end{aligned}$$

Diese Transformation hat die Eigenschaften

- $X_{F_1}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) = (z_1, \dots, z_d)^T + F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ ,
- $X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) = (z_1, \dots, z_d)^T + \sum_{\ell=1}^{d-j} z'_\ell w_\ell + F_2 \circ g_{I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))$ ,

- $\mathbb{1}_{Z(y_i, v_i, t_i)^c}(\cdot) = \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(\cdot - (z_1, \dots, z_d)^T - \sum_{\ell=1}^{d-j} z'_\ell w_\ell)$  für  $i \in \{1, \dots, d-j\}$ ,
- $\mathbb{1}_{Z(x_i, u_i, r_i)^c}(\cdot) = \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(\cdot - (z_1, \dots, z_d)^T)$  für  $i \in [d] \setminus J$ .

Die Integration bzgl.  $z' = (z'_1, \dots, z'_{d-j})$  können wir dann als Integration über  $[\mathbf{u}_J]$  lesen, d.h.  $\int_{\mathbb{R}^{d-j}} f(\sum_{\ell=1}^{d-j} z'_\ell w_\ell) dz'_1 \dots dz'_{d-j} = \int_{[\mathbf{u}_J]} f(z) \nu_{[\mathbf{u}_J]}(dz')$ . Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^{2d-j}} \mathbb{1}_A(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \mathbb{1}_B(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \\
 & \times \left( \prod_{i \in [d] \setminus J} \mathbb{1}_{Z(x_i, u_i, r_i)^c}(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \right) \left( \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(y_i, v_i, t_i)^c}(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right) \\
 & \times \left( \int_{\mathcal{N}_M} \prod_{(z, w, s) \in s(\psi)} \mathbb{1}_{Z(z, w, s)^c}(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \right. \\
 & \quad \left. \times \mathbb{1}_{Z(z, w, s)^c}(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) P_{\lambda, Q}(d\psi) \right) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
 & = (1-p)^2 \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_{d-j})) \\
 & \times \int_{[\mathbf{u}_J]^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(z + F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \mathbb{1}_B(z' + z + F_2 \circ g_{I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))) \\
 & \times \left( \prod_{i \in [d] \setminus J} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z' + F_2 \circ g_{I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))) \right) \left( \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z' - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \right) \\
 & \times \exp \{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, z' + F_2 \circ g_{I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle) \} dz \nu_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(dz').
 \end{aligned}$$

Sind nun  $u_1, \dots, u_d$  oder  $u_{m_1}, \dots, u_{m_j}, v_1, \dots, v_{d-j}$  linear abhängig, so ist nach Definition des verschobenen Schnittpunktes auf jeden Fall das Produkt  $\mathbb{1}_A(X_{F_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \mathbb{1}_B(X_{F_2} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) = 0$ . Andererseits ist im Falle, dass  $u_1, \dots, u_d$  linear abhängig sind,  $\nabla_d(u_1, \dots, u_d) = 0$ . Sind hingegen  $u_{m_1}, \dots, u_{m_j}, v_1, \dots, v_{d-j}$  linear abhängig, so unterscheiden wir nochmal zwei Fälle. Falls  $v_1, \dots, v_{d-j}$  linear abhängig sind, so gilt dies auch für  $\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_{d-j})$ . Gibt es zumindest einen Vektor  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, d-j\}$ , so dass  $u_{m_1}, \dots, u_{m_j}, v_i$  linear abhängig sind, so ist  $\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_i) = 0$ . In beiden Fällen ist also  $\nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_{d-j})) = 0$ . Insgesamt erhält man so die Formel (6.12).  $\square$

Für den Spezialfall  $F \equiv 0$  bestimmen wir noch die sogenannte *Paarkorrelationsfunktion*. Diese wird in Stoyan, W. S. Kendall und J. Mecke (1995, Abschnitt 4.5) oder Weil (2007, Abschnitt 2.3) für einen stationären unmarkierten Punktprozess  $\Psi$  mit Intensität  $\lambda' > 0$  wie folgt definiert. Zunächst erhält durch eine Desintegration das reduzierte 2.

Momentenmaß  $\alpha_{\text{red}}^{(2)}$ , d.h. das eindeutig bestimmte Maß mit

$$\alpha_{\Psi}^{(2)}(A \times B) = \lambda' \int_A \alpha_{\text{red}}^{(2)}(B - x) dx.$$

Ist  $\Psi$  zusätzlich isotrop, so definiert man die *Paarkorrelationsfunktion* für alle  $\varrho > 0$  durch

$$g(\varrho) = \frac{1}{\lambda'} \frac{1}{d\kappa_d} \varrho^{-d+1} \frac{d}{d\varrho} \alpha_{\text{red}}^{(2)}(B_{\varrho}^d).$$

Der Wert der Paarkorrelationsfunktion  $g(\varrho)$  kann gedeutet werden als die Häufigkeit dafür, Punktepaare mit Abstand  $\varrho$  zu finden.

**Satz 6.3** *Für die Markenverteilung gelte, dass  $Q(\cdot \times B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  rotationsinvariant ist. Dann ist  $\frac{1}{d!}N_0$  zusätzlich einfach sowie isotrop und hat die Paarkorrelationsfunktion*

$$g(\varrho) = \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \left(\frac{\kappa_{d-j}}{\kappa_d}\right)^2 \left(\frac{d\kappa_d}{\kappa_{d-1}}\right)^j \frac{1}{(\lambda\varrho)^j} G_j^2(\varrho),$$

wobei

$$\begin{aligned} G_j(\varrho) &= \frac{1}{(d-j)!} \frac{(d\kappa_d)^{d-j}}{\kappa_{d-j}\kappa_{d-1}^{d-j}} \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\mathbb{E}\gamma_{[-R_0,R_0]}(\varrho\langle U_0, e_1 \rangle)\right\} \\ &\times \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \prod_{i=1}^{d-j} \mathbf{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(\varrho e_1) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})). \end{aligned}$$

**Beweis.** Aus Satz 6.2 ergibt sich zunächst unter Ausnutzung der Symmetrie und wegen  $\alpha_{\text{red}}^{(2)}(A) = \frac{1}{d!} \mathbb{E}N_0^2(A) - \frac{1}{d!} \mathbb{E}N_0(A)$  für das 2. reduzierte Momentenmaß von  $\frac{1}{d!}N_0$  die Zerlegung

$$\alpha_{\text{red}}^{(2)}(A) = \frac{1}{\gamma_d} \sum_{j=0}^{d-1} \frac{1}{j!(d-j)!^2} \alpha_{j,\text{red}}^{(2)}(A)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\text{red}}^{(2)}(A) &= \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \\ &\times \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{A \cap [\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, d]^\perp} \nabla_d(\mathbf{u}_1, \dots, d) \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, d]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, d]^\perp}(v_{d-j})) \\ &\times \exp\left\{\lambda\mathbb{E}\gamma_{[-R_0,R_0]}(\langle U_0, z \rangle)\right\} \prod_{i=1}^{d-j} \mathbf{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z) \mathbf{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z) \\ &\nu_{[\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, d]^\perp}(dz) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})). \end{aligned}$$



Diese Formel gilt noch für alle beschränkten Borel-Mengen  $A$  und für beliebige Richtungsverteilung. Von hier an sei aber  $A = B_\rho^d$  und  $Q(\cdot \times B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  rotationsinvariant. Insbesondere ist damit auch  $Q_0$  rotationsinvariant.

In diesem Fall sind  $d$ -Einheitsvektoren  $Q_0$ -fast sicher linear unabhängig und es gilt

$$\begin{aligned} & \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, \mathbf{u}_d]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, \mathbf{u}_d]^\perp}(v_{d-j})) \\ &= \frac{\nabla_d(v_1, \dots, v_{d-j}, u_{d-j+1}, \dots, u_d)}{\nabla_j(u_{d-j+1}, \dots, u_d)}. \end{aligned}$$

Sei  $w_1, \dots, w_{d-j}$  eine Orthonormalbasis des Unterraums  $[\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, \mathbf{u}_d]^\perp \subset \mathbb{R}^d$ , welche wir zu einer Orthonormalbasis  $w_1, \dots, w_{d-j}, w'_1, \dots, w'_j$  des  $\mathbb{R}^d$  erweitern und  $O_{d-j} = O_{d-j}(\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, \mathbf{u}_d) := (w_1, \dots, w_{d-j}, w'_1, \dots, w'_j)$  die hiermit gebildete orthogonale Matrix. Wir führen nun als erstes die Transformationen  $u_i = O_{d-j}u'_i$ ,  $v_i = O_{d-j}v'_i$  für  $i \in \{1, \dots, d-j\}$  und  $z = O_{d-j}z'$  aus, allerdings ohne die Bezeichnungen zu ändern. Dann ist  $O_{d-j}^T([\mathbf{u}_{d-j+1}, \dots, \mathbf{u}_d]^\perp) = E_j^\perp$  und wegen der Rotationsinvarianz folgt

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\text{red}}^{(2)}(B_\rho^d) &= \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{B_\rho^d \cap E_j^\perp} \nabla_d(O_{d-j}u_1, \dots, O_{d-j}u_{d-j}, u_{d-j+1}, \dots, u_d) \\ &\quad \times \frac{\nabla_d(O_{d-j}v_1, \dots, O_{d-j}v_{d-j}, u_{d-j+1}, \dots, u_d)}{\nabla_j(u_{d-j+1}, \dots, u_d)} \\ &\quad \times \exp\{\lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, z \rangle)\} \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z) \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z) \\ &\quad \nu_{E_j^\perp}(dz) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})). \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir

$$\begin{aligned} & \nabla_d(O_{d-j}u_1, \dots, O_{d-j}u_{d-j}, u_{d-j+1}, \dots, u_d) \\ &= \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \nabla_j(u_{d-j+1}, \dots, u_d). \end{aligned}$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} & \nabla_d(O_{d-j}u_1, \dots, O_{d-j}u_{d-j}, u_{d-j+1}, \dots, u_d) \\ &= \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, O_{d-j}^T u_{d-j+1}, \dots, O_{d-j}^T u_d) \\ &= \det \left( \begin{array}{cccccc} \langle u_1, e_1 \rangle & \dots & \langle u_{d-j}, e_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_1, e_{d-j} \rangle & \dots & \langle u_{d-j}, e_{d-j} \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \langle u_1, e_{d-j+1} \rangle & \dots & \langle u_{d-j}, e_{d-j+1} \rangle & \langle u_{d-j+1}, w'_1 \rangle & \dots & \langle u_d, w'_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_1, e_d \rangle & \dots & \langle u_{d-j}, e_d \rangle & \langle u_{d-j+1}, w'_j \rangle & \dots & \langle u_d, w'_j \rangle \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \det \begin{pmatrix} \langle u_1, e_1 \rangle & \dots & \langle u_{d-j}, e_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_1, e_{d-j} \rangle & \dots & \langle u_{d-j}, e_{d-j} \rangle \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \langle u_{d-j+1}, w'_1 \rangle & \dots & \langle u_d, w'_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_{d-j+1}, w'_j \rangle & \dots & \langle u_d, w'_j \rangle \end{pmatrix} \right| \\
 &= \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \nabla_j(u_{d-j+1}, \dots, u_d).
 \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\begin{aligned}
 &\nabla_d(O_{d-j}v_1, \dots, O_{d-j}v_{d-j}, u_{d-j+1}, \dots, u_d) \\
 &= \nabla_d(v_1, \dots, v_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \nabla_j(u_{d-j+1}, \dots, u_d)
 \end{aligned}$$

und beides zusammen liefert

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,\text{red}}^{(2)}(B_\varrho^d) &= \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{B_\varrho^d \cap E_j^\perp} \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \\
 &\quad \times \nabla_d(v_1, \dots, v_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \nabla_j(u_{d-j+1}, \dots, u_d) \\
 &\quad \times \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, z \rangle) \right\} \prod_{i=1}^{d-j} \mathbf{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z) \mathbf{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z) \\
 &\quad \nu_{E_j^\perp}(dz) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})).
 \end{aligned}$$

Das Integral bzgl.  $u_{d-j+1}, \dots, u_d$  kann jetzt ausgeführt werden. Nach Schneider und Weil (2000, S.168, Satz 4.5.5) ist

$$\int_{(S^{d-1})^j} \nabla_j(u_{d-j+1}, \dots, u_d) Q_0(u_{d-j+1}) \cdots Q_0(u_d) = j! \binom{d}{j} \frac{\kappa_d \kappa_{d-1}^j}{\kappa_{d-j} (d\kappa_d)^j},$$

denn das linke Integral ist bis auf einen Faktor gerade das  $j$ -te innere Volumen des assoziierten Zonoids, welches im Falle, dass  $Q_0$  das eindeutig bestimmte rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $S^{d-1}$  ist, eine Kugel ist. Es ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,\text{red}}^{(2)}(B_\varrho^d) &= j! \binom{d}{j} \frac{\kappa_d \kappa_{d-1}^j}{\kappa_{d-j} (d\kappa_d)^j} \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{B_\varrho^d \cap E_j^\perp} \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \nabla_d(v_1, \dots, v_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \\
 &\quad \times \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, z \rangle) \right\} \prod_{i=1}^{d-j} \mathbf{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z) \mathbf{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z) \\
 &\quad \nu_{E_j^\perp}(dz) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})).
 \end{aligned}$$

Das Integral über  $B_\varrho^d \cap E_j^\perp$  schreiben wir mittels Polarkoordinaten und verwenden den Satz von Fubini. Man beachte dabei, dass wegen der Rotationsinvarianz von  $U_0$  der Erwartungswert  $\mathbb{E}\gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, z \rangle)$  nur vom Betrag von  $z$  abhängt:

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\text{red}}^{(2)}(B_\varrho^d) &= j! \binom{d}{j} \frac{\kappa_d \kappa_{d-1}^j}{\kappa_{d-j} (d\kappa_d)^j} \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \\ &\quad \times \int_0^\varrho \int_{S^{d-1} \cap E_j^\perp} t^{d-j-1} \exp \{ \lambda \mathbb{E}\gamma_{[-R_0, R_0]}(t \langle U_0, e_1 \rangle) \} \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(tv) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \right)^2 dv dt. \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir uns überlegen, dass der Integrand nicht von der Richtung  $v$  abhängt. Sei dazu  $O_v$  eine Drehung, so dass  $O_v e_1 = v$  und  $O_v E_j^\perp = E_j^\perp$ . Dies ist möglich, weil  $v$  und  $e_1$  in  $E_j^\perp$  liegen. Insbesondere ist damit auch  $O_v e_i = e_i$  für alle  $i \in \{d-j+1, \dots, d\}$ . Hiermit werden für alle  $i \in \{1, \dots, d-j\}$  die Transformationen  $u'_i = O_v u_i$  durchgeführt. Wir erhalten so schließlich

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\text{red}}^{(2)}(B_\varrho^d) &= j! \binom{d}{j} \frac{\kappa_d \kappa_{d-1}^j}{\kappa_{d-j} (d\kappa_d)^j} (d-j) \kappa_{d-j} \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \\ &\quad \times \int_0^\varrho t^{d-j-1} \exp \{ \lambda \mathbb{E}\gamma_{[-R_0, R_0]}(t \langle U_0, e_1 \rangle) \} \\ &\quad \times \left( \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-j}, e_{d-j+1}, \dots, e_d) \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(te_1) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Ableiten und Zusammenfassen liefert dann die Behauptung.  $\square$

### Bemerkung 6.2

1. Für  $R_0 = 0$  folgt  $G_j(\varrho) = 1$  für alle  $j = 1, \dots, d-j$  und wir erhalten die Paarkorrelationsfunktion für den nicht verdünnten Schnittpunktprozess, wie man sie auch in Heinrich, H. Schmidt und V. Schmidt (2006, S. 936) und Heinrich und Mücke (2008, S. 366) findet.
2. Es gilt  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} G_j(\varrho) = 1$  für alle  $j = 0, \dots, d-1$ .
3. Mit ähnlichen Rechnungen wie im nächsten Abschnitt kann  $G_0^2(\varrho) - 1 \in \mathcal{O}(\varrho^{-1})$  gezeigt werden und dies hat zur Folge, dass  $\varrho \mapsto g(\varrho) - 1$  langsam und zwar mit Ordnung  $\mathcal{O}(\varrho^{-1})$  gegen 0 konvergiert. Dies drückt noch einmal die weitreichenden Abhängigkeiten aus. Insbesondere ist  $\varrho \mapsto (g(\varrho) - 1)\varrho^{d-1}$  nicht integrierbar über

$(0, \infty)$ . Dies zieht wiederum nach sich, dass das reduzierte 2. Kumulantenmaß keine endliche Totalvariation besitzt.

**Beispiel 6.4** Sei  $d = 2$  sowie  $U_0$  und  $R_0$  unabhängig. Die Integrale über  $u_1, u_2$  bzw. der Erwartungswert bzgl.  $U_0$  in der Exponentialfunktion können dann bestimmt werden. Eine längere, aber elementare Rechnung ergibt

- $\int_{\mathbb{M}} \nabla_2(u_1, e_2) \mathbb{1}_{Z(0, u_1, r_1)^c}(\varrho e_1) Q(d(u_1, r_1)) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varrho} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2} P_{R_0}(dr),$
- $\int_{\mathbb{M}^2} \nabla_2(u_1, u_2) \prod_{i=1}^2 \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(\varrho e_1) Q^{(2)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r}))$   
 $= 2 \int_0^{\varrho} \int_0^{r_1} \arccos\left(\frac{r_1}{\varrho}\right) - \frac{r_2}{\varrho} \sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{\varrho}\right)^2} P_{R_0}(dr_2) P_{R_0}(dr_1),$
- $\mathbb{E}\gamma_{[-R_0, R_0]}(\varrho \langle U_0, e_1 \rangle) = -\frac{2}{\pi} \varrho + 2\mathbb{E}R_0 + \frac{2}{\pi} \varrho \int_0^{\varrho/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{\varrho}\right)^2} P_{R_0}(dr)$   
 $- \frac{4}{\pi} \int_0^{\varrho/2} r \arccos\left(\frac{2r}{\varrho}\right) P_{R_0}(dr).$

Abbildung 6.4 zeigt die Paarkorrelationsfunktion für diesen Fall für verschiedene Verteilungen von  $R_0$ . Gut zu erkennen ist hier die Hard-Core Eigenschaft, wenn  $R_0$  beschränkt ist, sowie das langsame Abklingen für  $\varrho \rightarrow \infty$ .

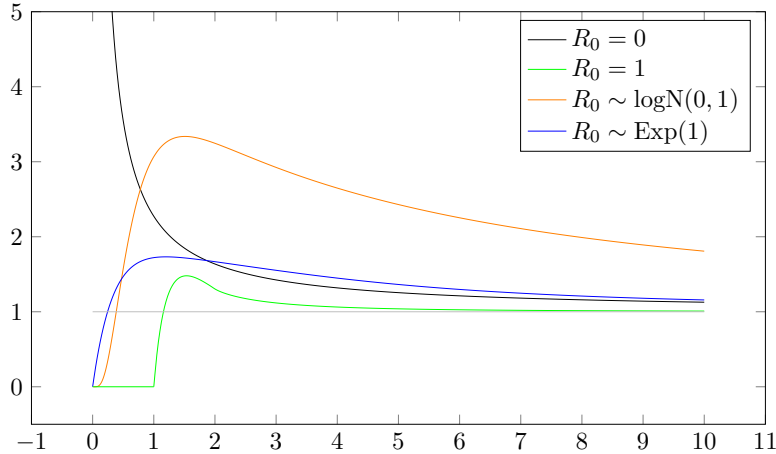


Abbildung 6.4: Paarkorrelationsfunktionen für  $N_0$

## 6.4 Asymptotische Kovarianz

Als Vorbereitung für einen zentralen Grenzwertsatz berechnen wir in diesem Abschnitt zunächst eine asymptotische Kovarianz

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \left( \mathbb{E} [N_{F_1}(\varrho W) N_{F_2}(\varrho W)] - \mathbb{E} N_{F_1}(\varrho W) \mathbb{E} N_{F_2}(\varrho W) \right), \quad (6.15)$$

wobei  $F_1, F_2 : \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  zwei messbare Abbildungen seien. Hierbei sei  $W \in \mathcal{C}_d$  ein Beobachtungsfenster mit nicht leerem Inneren. Aufgrund der Form der Gleichung in Satz 6.2 bietet es sich an die Grenzwerte der einzelnen  $\alpha_{j,I,J}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W)$  zu betrachten. Hierfür setzen wir im ganzen Abschnitt  $\mathbb{E} R_0^2 < \infty$  voraus und schreiben zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \alpha_{j,I,J}(\varrho W \times \varrho W) &= \\ &= \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{[\mathbf{u}, \mathbf{j}]^\perp} \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}, \mathbf{j}]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}, \mathbf{j}]^\perp}(v_{d-j})) \\ &\quad \times \gamma_{\varrho W}(z + m_{j,I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))) f_{j,I,J}(z; (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\ &\quad \nu_{[\mathbf{u}, \mathbf{j}]^\perp}(dz) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \end{aligned} \quad (6.16)$$

mit  $m_{j,I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))$  wie in Satz 6.2 und

$$\begin{aligned} f_{j,I,J}(z; (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) &= \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, z + m_{j,I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \rangle) \right\} \\ &\quad \times \left( \prod_{i \in [d] \setminus J} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z + F_2 \circ g_{I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))) \right) \\ &\quad \times \left( \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z - F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \right) \end{aligned}$$

für alle  $j = 0, \dots, d-1$ ,  $I \in [d]_j^<$  und  $J \in [d]_j^\neq$ . Man sieht schnell, dass die Integrale bezüglich  $(\mathbf{u}, \mathbf{r})$  und  $(\mathbf{v}, \mathbf{t})$  für das asymptotische Verhalten keine Rolle spielen. Wir werden deshalb diese Argumente im Folgenden häufig weglassen. Man beachte, dass die Indikatorfunktionen in  $f_{j,I,J}$  stets mit 1 abgeschätzt werden können und im Exponenten  $\gamma_{[-r,r]} \leq \nu_1([-r, r]) = 2r$  für alle  $r \geq 0$  gilt. Wir haben also immer die Abschätzung

$$0 \leq f_{j,I,J}(z; (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \leq \exp\{2\lambda \mathbb{E} R_0\}. \quad (6.17)$$

Ferner sind  $\nabla_d(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) \leq 1$  und  $\nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}, \mathbf{j}]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}, \mathbf{j}]^\perp}(v_{d-j})) \leq 1$  für alle  $u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_{d-j} \in S^{d-1}$ , denn es handelt sich um die Volumen von Parallelotopen deren Seitenlängen höchstens 1 sind. Um die folgenden Grenzwerte kompakt schreiben zu können, führen wir noch die drei Abkürzungen

- $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (0, \infty)$ ,  $(x, y) \mapsto \exp\{\lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, x \rangle) \mathbb{1}(\langle U_0, y \rangle = 0)\}$

- $\bar{\gamma}_W : S^{d-1} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $v \mapsto \int_{[v]^\perp} \gamma_W(x) \nu_{[v]^\perp}(dx)$
- $\bar{\nabla}_{d,d-1} : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\bar{\nabla}_{d,d-1}(v) = \int_{(S^{d-1})^{d-1}} \nabla_d(u_1, \dots, u_{d-1}, v) Q_0(u_1) \cdots Q_0(u_{d-1})$

ein.

**Lemma 6.4**

1. Für alle  $j \in \{2, \dots, d\}$  und  $I \in [d]_j^<$ ,  $J \in [d]_j^\neq$  ist

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \alpha_{j,I,J}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) = 0.$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \alpha_{1,(\ell),(k)}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) = \\ & = \lambda^{2d-1} (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d-1}} \int_{[u_k]^\perp} \nabla_d(u_1, \dots, u_d) \nabla_d(u_k, v_1, \dots, v_{d-1}) \\ & \quad \times \gamma_W(x) f(\pi_{[u_k]}(m_{1,(\ell),(k)}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))), x) \\ & \quad \nu_{[u_k]^\perp}(dx) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-1)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \end{aligned}$$

für alle  $(\ell) = I \in [d]_1^<$ ,  $(k) = J \in [d]_1^\neq$ .

3. Erfüllt die Richtungsverteilung die Bedingung (4.6), d.h. für alle  $u \in S^{d-1}$  gilt  $Q_0(\{v \in S^{d-1} : \langle u, v \rangle = 0\}) = 0$ , so ist

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \alpha_{1,I,J}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) = \lambda^{2d-1} (1-p)^2 \mathbb{E} \left[ \bar{\nabla}_{d,d-1}^2(U_0) \bar{\gamma}_W(U_0) \right]$$

für alle  $I \in [d]_1^<$ ,  $J \in [d]_1^\neq$ .

**Beweis.** Wir betrachten das innere Integral über  $[\mathbf{u}_J]^\perp$  in  $\alpha_{j,I,J}(\varrho W \times \varrho W)$  für feste  $(u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d) \in \mathbb{M}$  und  $(v_1, t_1), \dots, (v_{d-j}, t_{d-j}) \in \mathbb{M}$ . Dazu können wir, wie im Beweis von Satz 6.2, ohne Einschränkung annehmen, dass  $u_1, \dots, u_d$  und  $\mathbf{u}_J, v_1, \dots, v_{d-j}$  jeweils linear unabhängig sind, denn andernfalls ist bereits das Produkt  $\nabla_d(u_1, \dots, u_d) \times \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_{d-j})) = 0$ .

Für  $j = d$  ist die Aussage klar, denn es gilt  $\varrho^{-(2d-1)} \alpha_{d,I,J}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) \leq \text{const} \times \varrho^{-(2d-1)} \nu_d(\varrho W) \in \mathcal{O}(\varrho^{-(d-1)})$ .

Sei also  $j \in \{2, \dots, d-1\}$  und  $I \in [d]_j^<$ ,  $J \in [d]_j^\neq$ . Wir schreiben ab hier kurz  $m_{j,I,J} = m_{j,I,J}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))$ . Mit Hilfe der Transformation  $x = \frac{z}{\varrho}$  und der Gleichung

$\gamma_{\varrho W}(x) = \varrho^d \gamma_W(x/\varrho)$  ergibt sich zuerst für das innere Integral in (6.16)

$$\begin{aligned} & \int_{[\mathbf{u}_J]^\perp} \gamma_{\varrho W}(z + m_{j,I,J}) f_{j,I,J}(z; (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \nu_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(dz) \\ &= \varrho^{2d-j} \int_{[\mathbf{u}_J]^\perp} \gamma_W(x + \frac{1}{\varrho} m_{j,I,J}) f_{j,I,J}(\varrho x; (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \nu_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(dx) \\ &= \varrho^{2d-j} \int_{[\mathbf{u}_J]^\perp} \gamma_W(x + \frac{1}{\varrho} \pi_{[\mathbf{u}_J]}(m_{j,I,J})) \\ & \quad \times f_{j,I,J}(\varrho x - \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(m_{j,I,J}); (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \nu_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(dx). \end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt außerdem, ohne Wechsel der Bezeichnungen, mittels  $x' = x + \frac{1}{\varrho} \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(m_{1,I,J})$  transformiert. Ist weiter  $B_{r(W)}^d$  eine Kugel mit  $W \subseteq B_{r(W)}^d$ , so gilt für die Mengenkovarianz  $\gamma_W \leq \gamma_{B_{r(W)}^d}$ . Da die Mengenkovarianz einer Kugel nur von der Norm abhängt, ist deshalb  $\gamma_W(x + \frac{1}{\varrho} \pi_{[\mathbf{u}_J]}(m_{j,I,J})) \leq \gamma_{B_{r(W)}^d}(x)$  für alle  $x \in [\mathbf{u}_J]^\perp$  und letztere ist eine über  $\mathbb{R}^d$  integrierbare Funktion. Es folgt

$$\begin{aligned} \varrho^{-(2d-1)} \alpha_{j,I,J}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) &\leq \varrho^{-(j-1)} \lambda^{2d-j} (1-p)^2 \exp\{2\lambda \mathbb{E} R_0\} \\ & \quad \times \int_{\mathbb{M}^{2d-j} [\mathbf{u}_J]^\perp} \int \nabla_d(\mathbf{u}_1, \dots, d) \nabla_{d-j}(\pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(v_{d-j})) \\ & \quad \times \gamma_{B_{r(W)}^d}(x) \nu_{[\mathbf{u}_J]^\perp}(dx) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\ &= \varrho^{-(j-1)} \cdot \text{const} \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Für  $j = 1$  sei  $[d]_1^{\neq} \ni J = (k)$  und  $[d]_1^{\leq} \ni I = (\ell)$  mit  $k, \ell \in \{1, \dots, d\}$ . Führen wir die Rechnung wie eben durch und verwendet noch  $\nabla_{d-1}(\pi_{[u_k]^\perp}(v_1), \dots, \pi_{[u_k]^\perp}(v_{d-1})) = \nabla_d(u_k, \mathbf{v}_{1, \dots, d-1})$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \varrho^{-(2d-1)} \alpha_{1,(\ell),(k)}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) = \\ &= \lambda^{2d-1} (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d-1} [u_k]^\perp} \int \nabla_d(\mathbf{u}_1, \dots, d) \nabla_d(u_k, \mathbf{v}_{1, \dots, d-1}) \gamma_W(x + \frac{1}{\varrho} \pi_{[u_k]}(m_{1,(\ell),(k)})) \\ & \quad \times f_{1,(\ell),(k)}(\varrho x - \pi_{[u_k]^\perp}(m_{1,(\ell),(k)}); (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\ & \quad \nu_{[u_k]^\perp}(dx) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d-1)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})). \end{aligned}$$

Da ferner für alle  $x \in [u_k]^\perp$  sowie  $(u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d), (v_1, t_1), \dots, (v_{d-1}, t_{d-1}) \in \mathbb{M}$  die

Ungleichung

$$\begin{aligned} & \gamma_W \left( x + \frac{1}{\varrho} \pi_{[u_k]}(m_{1,(\ell),(k)}) \right) f_{1,(\ell),(k)}(\varrho x - \pi_{[u_k]^\perp}(m_{1,(\ell),(k)}); (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\ & \leq \gamma_{B_{r(W)}^d}(x) \exp\{2\lambda \mathbb{E}R_0\} \end{aligned}$$

gilt, kann der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden. Es bleibt dann der Grenzwert des Integranden für feste  $x \in [u_k]^\perp$  sowie  $(u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d) \in \mathbb{M}$  und  $(v_1, t_1), \dots, (v_{d-1}, t_{d-1}) \in \mathbb{M}$  zu bestimmen.

Da die Mengenkovarianzfunktion nach Matheron (1975, S. 85) stetig ist, gilt auf jeden Fall

$$\gamma_W \left( x + \frac{1}{\varrho} \pi_{[u_k]}(m_{1,(\ell),(k)}) \right) \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \gamma_W(x)$$

für alle  $x \in [u_k]^\perp$ . Es bleibt noch der Grenzwert von  $f_{1,(\ell),(k)}(\varrho x - \pi_{[u_k]^\perp}(m_{1,(\ell),(k)}))$  zu bestimmen. Weil  $u_1, \dots, u_d$  linear unabhängig sind, muss aber  $[u_k]^\perp \setminus [u_i]^\perp \neq \emptyset$  für  $i \neq k$  sein und es folgt  $\langle u_i, x \rangle \neq 0$  für  $\nu_{[u_k]^\perp}$ -fast alle  $x \in [u_k]^\perp$ . Es folgt deshalb

$$\begin{aligned} & \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(\varrho x - \pi_{[u_k]^\perp}(m_{1,(\ell),(k)}) + F_2) \\ & = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[-r_i, r_i]^c}(\varrho \langle u_i, x \rangle - \langle u_i, \pi_{[u_k]^\perp}(m_{1,(\ell),(k)}) + F_2 \rangle) = 1 \end{aligned}$$

für  $i \neq k$  und  $\nu_{[u_k]^\perp}$ -fast alle  $x \in [u_k]^\perp$ . Ganz analog zeigt man

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(\varrho x - \pi_{[u_k]^\perp}(m_{1,(\ell),(k)}) - F_1) = 1$$

für  $i = 1, \dots, d-1$  und  $\nu_{[u_k]^\perp}$ -fast alle  $x \in [u_k]^\perp$ . Für die Exponentialfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \exp\left\{ \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x - \pi_{[u_k]^\perp}(m_{1,(\ell),(k)}) + m_{1,(\ell),(k)} \rangle) \right\} \\ & = \exp\left\{ \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \pi_{[u_k]}(m_{1,(\ell),(k)}) \rangle) \mathbb{1}(\langle U_0, x \rangle = 0) \right\} \\ & = f(\pi_{[u_k]}(m_{1,(\ell),(k)}), x). \end{aligned}$$

Dies zeigt insgesamt die 2. Behauptung. Erfüllt die Richtungsverteilung die Mischungsbedingung (4.6), so ist  $\langle U_0, x \rangle \neq 0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher und damit  $f \equiv 1$ , womit wir

$$\begin{aligned} & \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \alpha_{1,(\ell),(k)}^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) \\ & = \lambda^{2d-1} (1-p)^2 \int_{(S^{d-1})^{2d-1}} \int_{[u_d]^\perp} \gamma_W(x) \nabla_d(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) \nabla_d(\mathbf{u}_d, \dots, \mathbf{u}_{2d-1}) \nu_{[u_d]^\perp}(dx) Q_0^{(2d-1)}(d\mathbf{u}) \\ & = \lambda^{2d-1} (1-p)^2 \int_{S^{d-1}} \int_{[v]^\perp} \gamma_W(x) \overline{\nabla}_{d,d-1}^2(v) \nu_{[v]^\perp}(dx) Q_0(dv) \end{aligned}$$



und damit die 3. Behauptung erhalten.  $\square$

Die verbleibenden Terme sind komplizierter. Aus den obigen Überlegungen sieht man sofort, dass  $\alpha_0$  mit  $\varrho^{2d}$  wächst, ebenso wie das Produkt der Erwartungswerte. Durch die Differenzbildung muss also noch eine Reduktion stattfinden.

**Lemma 6.5** *Es sei  $\mathbb{E}R_0^2 < \infty$ .*

1. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \left( \alpha_0^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) - \mathbb{E}N_{F_1}(\varrho W)\mathbb{E}N_{F_2}(\varrho W) \right) = \\
 & = (\lambda^d \mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0))^2 \sigma_V^2(W) \\
 & - \lambda^{2d}(1-p)^2 \mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0) \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{[u_i]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \nabla_d(\mathbf{u}) \gamma_W(y) f(su_i, y) \\
 & \quad \times \mathbb{1}_{[-r_i, r_i]}(s + \langle u_i, F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle) ds \nu_{[u_i]^\perp}(dy) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 & - \lambda^{2d}(1-p)^2 \mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0) \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{[v_i]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \nabla_d(\mathbf{v}) \gamma_W(y) f(sv_i, y) \\
 & \quad \times \mathbb{1}_{[-t_i, t_i]}(s - \langle v_i, F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \rangle) ds \nu_{[v_i]^\perp}(dy) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & + \lambda^{2d}(1-p)^2 \sum_{i,j=1}^d \int_{\mathbb{M}^{2d}} \int_{[u_i]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(u_i = v_j) \nabla_d(\mathbf{u}) \nabla_d(\mathbf{v}) \gamma_W(y) f(su_i, y) \\
 & \quad \times \mathbb{1}_{[-r_i, r_i]}(s + \langle u_i, F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle) \mathbb{1}_{[-t_i, t_i]}(s - \langle v_i, F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \rangle) \\
 & \quad ds \nu_{[u_i]^\perp}(dy) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})),
 \end{aligned}$$

wobei die asymptotische Varianz  $\sigma_V^2(W) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \text{Var}(\nu_d(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W))$  nach Spiess (2012, S.37, Theorem 4.2) und Heinrich und Spiess (2013, S. 317, Theorem 2) stets existiert.

2. *Erfüllt die Richtungsverteilung die Mischungsbedingung (4.6), d.h. für alle  $u \in S^{d-1}$  ist  $Q_0(\{v \in S^{d-1} : \langle u, v \rangle = 0\}) = 0$ , so gilt*

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(2d-1)} \left( \alpha_0^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) - \mathbb{E}N_{F_1}(\varrho W)\mathbb{E}N_{F_2}(\varrho W) \right) = \\
 & = (\lambda^d(1-p) \mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0))^2 4\lambda \mathbb{E}[R_0^2 \bar{\gamma}_W(U_0)] \\
 & - (\lambda^d(1-p))^2 4d \mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0) \mathbb{E}[R_0 \bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0) \bar{\gamma}_W(U_0)].
 \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir schreiben  $\alpha_0^{(2)}(\varrho W \times \varrho W)$  wie im vorherigen Beweis um und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) &= \lambda^{2d}(1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_d(\mathbf{u}) \nabla_d(\mathbf{v}) \gamma_{\varrho W}(z + m_{0,\emptyset,\emptyset}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}))) \\ &\quad \times f_{0,\emptyset,\emptyset}(z; (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \, dz \, Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\ &= \lambda^{2d}(1-p)^2 \varrho^{2d} \int_{\mathbb{M}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_d(\mathbf{u}) \nabla_d(\mathbf{v}) \gamma_W(x) \\ &\quad \times f_{0,\emptyset,\emptyset}(\varrho x - m_{0,\emptyset,\emptyset}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})); (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\ &\quad dx \, Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})). \end{aligned}$$

Für das Produkt der Erwartungswerte gilt ferner

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_{F_1}(\varrho W) \mathbb{E}N_{F_2}(\varrho W) &= \\ &= \lambda^{2d}(1-p)^2 \varrho^{2d} \int_{\mathbb{M}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_d(\mathbf{u}) \nabla_d(\mathbf{v}) \gamma_W(x) \, dx \, Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})), \end{aligned}$$

wobei hier verwendet wurde, dass für beliebige Borelmenge  $\int_{\mathbb{R}^d} \gamma_B(x) dx = \nu_d(B)^2$  gilt. Zusammen erhalten wir also

$$\begin{aligned} \varrho^{-(2d-1)} \left( \alpha_0^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) - \mathbb{E}N_{F_1}(\varrho W) \mathbb{E}N_{F_2}(\varrho W) \right) &= \\ &= \lambda^{2d}(1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d}} \nabla_d(\mathbf{u}) \nabla_d(\mathbf{v}) \\ &\quad \times \left( \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \left[ f_{0,\emptyset,\emptyset}(\varrho x - m_{0,\emptyset,\emptyset}((\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})); (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) - 1 \right] dx \right) \\ &\quad Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck innerhalb der großen runden Klammern für feste  $(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in \mathbb{M}^d$  und  $(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \in \mathbb{M}^d$ . Dabei können wir annehmen, dass die Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_d$  und  $v_1, \dots, v_d$  jeweils linear unabhängig sind, den anderenfalls ist entweder  $\nabla_d(\mathbf{u}) = \nabla_d(u_1, \dots, u_d) = 0$  oder  $\nabla_d(\mathbf{v}) = \nabla_d(v_1, \dots, v_d) = 0$ . Insbesondere ist also  $u_i \neq u_j$  und  $v_i \neq v_j$  für alle  $i \neq j$ . Für das Produkt der Indikatorfunktionen in  $f_{0,\emptyset,\emptyset}$  gilt für beliebige  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$  weiter

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)^c}(z_1) \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)^c}(z_2) \\ &= \mathbb{1}_{(\cup_{i=1}^d Z(0, u_i, r_i))^c}(z_1) \mathbb{1}_{(\cup_{i=1}^d Z(0, v_i, t_i))^c}(z_2) \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^d Z(0, u_i, r_i)}(z_1) - \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^d Z(0, v_i, t_i)}(z_2) + \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^d Z(0, u_i, r_i)}(z_1) \mathbb{1}_{\cup_{i=1}^d Z(0, v_i, t_i)}(z_2). \end{aligned}$$

Verwenden wir noch  $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} - \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$  so erhalten wir die Zerlegung

$$\begin{aligned} & \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \left[ f_{0,\emptyset,\emptyset}(\varrho x - m_{0,\emptyset,\emptyset}(\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t}); (\mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{v}, \mathbf{t})) - 1 \right] dx \\ &= I_\varrho^{(0)} - I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) + I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) + R_\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_\varrho^{(0)} &= \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \left[ \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} - 1 \right] dx, \\ I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) &= \sum_{i=1}^d \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)}(\varrho x + F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \mathbb{1}_{Z(0, v_i, t_i)}(\varrho x - F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t})) dx, \\ I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) &= \sum_{i,j=1}^d \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \\ &\quad \times \mathbb{1}_{Z(0, u_i, r_i)}(\varrho x + F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \mathbb{1}_{Z(0, v_j, t_j)}(\varrho x - F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t})) dx, \\ R_\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) &= \sum_{k=2}^d (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \\ &\quad \times \mathbb{1}_{Z(0, u_{i_1}, r_{i_1}) \cap \dots \cap Z(0, u_{i_k}, r_{i_k})}(\varrho x + F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) dx \\ &\quad + \sum_{k=2}^d (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \\ &\quad \times \mathbb{1}_{Z(0, v_{i_1}, t_{i_1}) \cap \dots \cap Z(0, v_{i_k}, t_{i_k})}(\varrho x - F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t})) dx \\ &\quad - \sum_{k,\ell=2}^d (-1)^{k+\ell} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq d}} \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \\ &\quad \times \mathbb{1}_{Z(0, u_{i_1}, r_{i_1}) \cap \dots \cap Z(0, u_{i_k}, r_{i_k})}(\varrho x + F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{Z(0, v_{j_1}, t_{j_1}) \cap \dots \cap Z(0, v_{j_\ell}, t_{j_\ell})}(\varrho x - F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t})) dx. \end{aligned}$$

Der Term  $I_0(\varrho)$  ist nach Gleichung (6) aus Heinrich und Spiess (2013, S. 316) bis auf

einen Faktor gerade die Varianz des Volumens von  $\Xi_{\lambda,Q} \cap \varrho W$ , d.h.

$$(1-p)^2 I_\varrho^{(0)} = \frac{1}{\varrho^{2d-1}} \text{Var}(\nu_d(\Xi_{\lambda,Q} \cap \varrho W)).$$

Nach Spiess (2012, S.37, Theorem 4.2) und Heinrich und Spiess (2013, S. 317, Theorem 2) existiert der Grenzwert der rechten Seite immer. In den anderen Ausdrücken  $I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$ ,  $I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  und  $R_\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  treten stets Integrale der Bauart

$$\varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \prod_{i=1}^m \mathbb{1}_{Z(0, w_i, s_i)}(\varrho x + a_i) dx$$

auf, wobei  $m \geq 1$  und  $(w_i, s_i) \in \mathbb{M}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Mit Hilfe des Satzes von Fubini und anschließender Substitution können wir diese umschreiben und schließlich den Grenzwert bilden:

$$\begin{aligned} & \varrho \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_W(x) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho x \rangle) \right\} \prod_{i=1}^m \mathbb{1}_{Z(0, w_i, s_i)}(\varrho x + a_i) dx \\ &= \varrho \int_{[w_1]^\perp} \int_{[w_1]} \gamma_W(y+z) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, y+z \rangle) \right\} \\ & \quad \times \prod_{i=1}^m \mathbb{1}_{Z(0, w_i, s_i)}(\varrho(y+z) + a_i) \nu_{[w_1]}(dz) \nu_{[w_1]^\perp}(dy) \\ &= \int_{[w_1]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \gamma_W(y + \frac{t}{\varrho} w_1) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, \varrho y + t w_1 \rangle) \right\} \\ & \quad \times \mathbb{1}_{[-s_1, s_1]}(t) \prod_{i=2}^m \mathbb{1}_{[-s_i, s_i]}(\langle w_i, \varrho y + t w_1 + a_i \rangle) dt \nu_{[w_1]^\perp}(dy) \\ & \xrightarrow{\varrho \rightarrow \infty} \int_{[w_1]^\perp} \int_{-s_1}^{s_1} \gamma_W(y) \exp \left\{ \lambda \mathbb{E} \gamma_{[-R_0, R_0]}(\langle U_0, t w_1 \rangle) \mathbb{1}(\langle U_0, y \rangle = 0) \right\} \\ & \quad \times \prod_{i=2}^m \mathbb{1}_{[-s_i, s_i]}(\langle w_i, t w_1 + a_i \rangle) \mathbb{1}(\langle w_i, y \rangle = 0) dt \nu_{[w_1]^\perp}(dy) \\ &= \int_{[w_1]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \gamma_W(y) f(t w_1, y) \prod_{i=1}^m \mathbb{1}_{[-s_i, s_i]}(\langle w_i, t w_1 + a_i \rangle) \mathbb{1}(w_1 = w_i) dt \nu_{[w_1]^\perp}(dy). \end{aligned}$$

Der Grenzwert wird dabei mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz gerechtfertigt. Man beachte hierfür, dass sich der Integrand mit  $\gamma_{B_r^d(W)}(y) \mathbb{1}_{[-s_1, s_1]}(t) \exp\{2\lambda \mathbb{E} R_0\}$  abschätzen lässt. Im letzten Schritt wurde außerdem  $\langle w_i, y \rangle = 0 \iff y \in [w_1]^\perp \cap [w_i]^\perp$  für

$y \in [w_1]^\perp$  verwendet. Das Integral ist also nur dann nicht 0, wenn  $[w_1]^\perp \cap [w_i]^\perp = [w_1]^\perp$ , also wenn  $w_1 = w_i$ . Damit folgt aber sofort

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} R_\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) = 0,$$

denn die  $u_1, \dots, u_d$  und  $v_1, \dots, v_d$  sind jeweils paarweise verschieden vorausgesetzt. Für die Grenzwerte von  $I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  und  $I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) &= \sum_{i=1}^d \int_{[u_i]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \gamma_W(y) \mathbb{1}_{[-r_i, r_i]}(s + \langle u_i, F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle) f(su_i, y) \, ds \, \nu_{[u_i]^\perp}(dy) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_{[v_i]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \gamma_W(y) \mathbb{1}_{[-t_i, t_i]}(s - \langle v_i, F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \rangle) f(sv_i, y) \, ds \, \nu_{[v_i]^\perp}(dy) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) &= \sum_{i,j=1}^d \mathbb{1}(u_i = v_j) \int_{[u_i]^\perp} \int_{\mathbb{R}} \gamma_W(y) \mathbb{1}_{[-r_i, r_i]}(s + \langle u_i, F_1(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle) \\ &\quad \times \mathbb{1}_{[-t_i, t_i]}(s - \langle v_i, F_2(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \rangle) f(su_i, y) \, ds \, \nu_{[u_i]^\perp}(dy). \end{aligned}$$

Schließlich ist noch zu beachten, dass  $I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$ ,  $I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  und  $R_\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  auch selbst bezüglich  $(\mathbf{u}, \mathbf{r})$  und  $(\mathbf{v}, \mathbf{t})$  integriert werden und die oben verwendeten Majoranten auch integrierbar bezüglich  $(\mathbf{u}, \mathbf{r})$  und  $(\mathbf{v}, \mathbf{t})$  sind. Es gilt also

$$\begin{aligned} &\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{\varrho^{2d-1}} \left( \alpha_0^{(2)}(\varrho W \times \varrho W) - \mathbb{E}N_{F_1}(\varrho W) \mathbb{E}N_{F_2}(\varrho W) \right) \\ &= \lambda^{2d} (1-p)^2 \int_{\mathbb{M}^{2d}} \nabla_d(\mathbf{u}) \nabla_d(\mathbf{v}) \\ &\quad \times \left( \lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(0)} - \lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) + \lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\varrho \rightarrow \infty} R_\varrho(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) \right) Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \end{aligned}$$

und dies liefert zusammen mit den obigen Grenzwerten die erste Behauptung.

Die Richtungsverteilung erfülle nun  $Q_0(\{v \in S^{d-1} : \langle u, v \rangle = 0\}) = 0$  für alle  $u \in S^{d-1}$ . Dann ist diese nach Korollar 4.3 auch stetig und mit Spiess (2012, S.37, Theorem 4.2) und Heinrich und Spiess (2013, S. 317, Theorem 2) erhalten wir

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(0)} = 4\lambda \int_{\mathbb{M} [u]^\perp} \int_{\mathbb{R}} r^2 \gamma_W(x) \nu_{[u]^\perp}(dx) Q(d(u, r)).$$

Für  $I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$  folgt

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(1)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) = 2 \sum_{i=1}^d r_i \int_{[u_i]^\perp} \gamma_W(x) \nu_{[u_i]^\perp}(dx) + 2 \sum_{i=1}^d t_i \int_{[v_i]^\perp} \gamma_W(x) \nu_{[v_i]^\perp}(dx),$$

während  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} I_\varrho^{(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) = 0$  ist, denn es gilt  $\mathbf{1}(u_i = v_j) = 0$   $Q_0$ -fast sicher für alle  $i, j = 1, \dots, d$ ,  $i \neq j$ . Insgesamt ergibt sich so der 2. Teil.  $\square$

Aus den obigen Lemmas und Satz 6.12 ergibt sich nun zusammenfassend der folgende Satz für die asymptotische Kovarianz (6.15). Eine vollständige Formel geben wir, aufgrund der Länge, aber nur im Fall an, dass die Richtungsverteilung die Mischungsbedingung erfüllt.

**Satz 6.6** *Unter der Voraussetzung  $\mathbb{E}R_0^2 < \infty$  existiert die asymptotische Kovarianz*

$$\sigma_{F_1, F_2}^2(W) := \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(N_{F_1}(\varrho W), N_{F_2}(\varrho W))}{\varrho^{2d-1}}.$$

*Erfüllt die Richtungsverteilung die Mischungsbedingung (4.6), d.h. für alle  $u \in S^{d-1}$  ist  $Q_0(\{v \in S^{d-1} : \langle u, v \rangle = 0\}) = 0$ , so gilt*

$$\sigma_{F_1, F_2}^2(W) = \lambda^{2d-1} ((1-p) \mathbb{E} \bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0))^2 \mathbb{E} \left[ \bar{\gamma}_W(U_0) \left( d \frac{\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)}{\mathbb{E} \bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)} - 2\lambda R_0 \right)^2 \right]. \quad (6.18)$$

*In diesem Fall ist  $\sigma_{F_1, F_2}^2(W) = 0$  genau dann, wenn  $\mathbb{P}\left(d \frac{\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)}{\mathbb{E} \bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)} = 2\lambda R_0\right) = 1$ .*

Die asymptotische Kovarianz hängt also auch von der Form und nicht nur vom Volumen von  $W$  ab, was ein Ausdruck der weitreichenden Abhängigkeiten ist. Man beachte, dass  $\sigma_{F_1, F_2}^2(W)$  nicht von  $F_1, F_2$  abhängt, wenn die Richtungsverteilung (4.6) erfüllt.

Da wir im nächsten Abschnitt die „typische Breite“  $R_0$  abschneiden müssen, bemerken wir noch, dass sich die asymptotische Kovarianz hierdurch nicht ändert.

**Bemerkung 6.3** *Ersetzen wir  $(U_0, R_0)$  durch  $(U_0, R_0^{(\varrho)}) := (U_0, R_0 \mathbf{1}(R_0 \leq \varepsilon \sqrt{\varrho}))$ , wobei  $\varepsilon > 0$ , und bezeichnet den hiermit gewonnenen Punktprozess der verschobenen, sichtbaren Schnittpunkte mit  $N_F^{(\varrho)}$ , so ändert sich die asymptotische Kovarianz nicht, d.h. es gilt*

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(N_{F_1}^{(\varrho)}(\varrho W), N_{F_2}^{(\varrho)}(\varrho W))}{\varrho^{2d-1}} = \sigma_{F_1, F_2}^2(W)$$

mit  $\sigma_{F_1, F_2}^2(W)$  wie in Satz 6.6, sofern für  $k = 1, 2$  die Abbildung

$$(r_1, \dots, r_d) \mapsto F_k((u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d))$$

für linear unabhängige  $u_1, \dots, u_d \in S^{d-1}$  stetig ist.

Als Beispiel betrachten wir noch zwei Spezialfälle.

**Beispiel 6.5** Ist  $W = B_1^d$ , so hängt das Integral  $\int_{[u]^\perp} \gamma_{B_1^d}(x) \nu_{[u]^\perp}(dx)$  und damit  $\bar{\gamma}_W(u)$  nicht von der Richtung  $u \in S^{d-1}$  ab und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{[u]^\perp} \gamma_{B_1^d}(x) \nu_{[u]^\perp}(dx) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \gamma_{B_1^d}(0, x) dx = \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\gamma_{B_1^d}(x)}{\|x\|} dx \\ &= 2^d \frac{\kappa_{d-1}\kappa_{2d-1}}{d\kappa_d} = 2^{2d-1} \frac{(d-1)!^2}{(2d-1)!} \kappa_{d-1}^2. \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit findet man beispielsweise in Schneider und Weil (1992, Seite 177). Falls also die Richtungsverteilung zusätzlich die Bedingung (4.6) erfüllt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_{F_1, F_2}^2(B_1^d) &= (2\lambda)^{2d-1} \frac{(d-1)!^2}{(2d-1)!} \kappa_{d-1}^2 ((1-p)\mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0))^2 \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[ \left( d \frac{\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)}{\mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)} - 2\lambda R_0 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

**Beispiel 6.6** Ist  $Q_0$  rotationsinvariant, so ist  $\bar{\nabla}_{d,d-1}$  konstant und

$$\bar{\nabla}_{d,d-1}(u) = \mathbb{E}\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0) = \int_{(S^{d-1})^d} \nabla_d(u_1, \dots, u_d) Q_0(u_1) \cdots Q_0(u_d) = \frac{(d-1)! \kappa_{d-1}^d}{(d\kappa_d)^{d-1}}$$

nach Gleichung (6.8). Nach Spiess (2012, S. 61) gilt ferner

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} \int_{[u_d]^\perp} \gamma_W(x) \nu_{[u_d]^\perp}(dx) Q_0(du) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\gamma_W(x)}{\|x\|} dx \\ &= \frac{(d-1)\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} \int_W \int_W \frac{1}{\|x-y\|} dx dy \\ &=: I_d(W). \end{aligned}$$

Das Integral  $I_d(W)$  ist bis auf einen Faktor das sogenannte  $d$ -te Sehnenpotenzintegral  $S_d(W)$  von  $W$ . Genauer gilt  $I_d(W) = \frac{2\kappa_{d-1}}{d\kappa_d} S_d(W)$  (Schneider und Weil (1992, S. 177)). Sind zusätzlich  $U_0$  und  $R_0$  unabhängig, so ergibt sich insgesamt

$$\sigma_{F_1, F_2}^2(W) = \lambda^{2d-1} (1-p)^2 \frac{d!^2 \kappa_{d-1}^{2d}}{(d\kappa_d)^{2d-2}} I_d(W) \mathbb{E} \left[ \left( 1 - \frac{2\lambda R_0}{d} \right)^2 \right].$$

## 6.5 Ein zentraler Grenzwertsatz

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die zentrierte und normierte Anzahl der sichtbaren, verschobenen Schnittpunkte  $\varrho^{-(d-1/2)}(N_F(\varrho W) - \mathbb{E}N_F(\varrho W))$  für  $\varrho \rightarrow \infty$  asymptotisch normalverteilt ist. Man beachte hierbei die vergleichsweise hohe Normierung, welche wieder ein Ausdruck der weitreichenden Abhängigkeiten ist. Im Falle von Schnittpunkten, welche durch einen Hyperebenenprozess erzeugt werden, d.h.  $R_0 \equiv 0$ ,  $F \equiv 0$ , und  $W = B_1^d$  wurde diese Aussage von Heinrich, H. Schmidt und V. Schmidt (2006) bewiesen und es liegt natürlich zunächst nahe diesen Beweis zu übertragen. Die Idee dabei ist die Folgende.

Sei  $\widehat{\Psi}_{\lambda, Q_0}$  ein stationärer markierter Poisson-Punktprozess auf  $\mathbb{R}$  mit Intensität  $\lambda > 0$  und Markenraum  $S^{d-1}$  sowie  $M_\varrho$  die Anzahl aller hiermit gebildeten Hyperebenen, welche die Kugel  $B_\varrho^d$  schneiden. Aus einer grundlegenden Eigenschaft von Poisson-Punktprozessen (Schneider und Weil (2000, S. 76 f., Satz 3.2.3)) folgt dann die Verteilungsgleichheit

$$\begin{aligned} & \sum_{(X_1, U_1), \dots, (X_d, U_d) \in s(\Psi_{\lambda, Q_0})}^{\neq} \mathbb{1}_{B_\varrho^d}(H(X_1, U_1) \cap \dots \cap H(X_d, U_d)) \\ & \stackrel{d}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_d \leq M_\varrho}^{\neq} \mathbb{1}_{B_\varrho^d}(H(\hat{X}_{i_1}, \hat{U}_{i_1}) \cap \dots \cap H(\hat{X}_{i_d}, \hat{U}_{i_d})), \end{aligned}$$

wobei die Folge  $(\hat{X}_1, \hat{U}_1), (\hat{X}_2, \hat{U}_2), \dots$  unabhängig und identisch verteilt sowie unabhängig von  $M_\varrho$  ist. Die Komponenten sind ebenfalls unabhängig und  $\hat{X}_1$  ist gleichverteilt auf  $[-\varrho, \varrho]$  sowie  $\hat{U}_1$  verteilt gemäß  $Q_0$ . Bedingt auf  $M_\varrho = n$  ist die rechte Seite dann eine U-Statistik und mit Hoeffding's Zerlegung kann ein zentraler Grenzwertsatz bewiesen werden.

Im Falle von  $N_0$  kann man zunächst ebenso vorgehen und

$$\begin{aligned} N_0(B_\varrho^d) & \stackrel{d}{=} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_d \leq M_\varrho}^{\neq} \mathbb{1}_{B_\varrho^d}(X_0(\hat{X}_{i_1}, \hat{U}_{i_1}, \hat{R}_{i_1}, \dots, \hat{X}_{i_d}, \hat{U}_{i_d}, \hat{R}_{i_d})) \\ & \times \prod_{1 \leq k \leq M_\varrho, k \neq i_1, \dots, i_d} \left(1 - \mathbb{1}_{Z(\hat{X}_k, \hat{U}_k, \hat{R}_k)}(X_0(\hat{X}_{i_1}, \hat{U}_{i_1}, \hat{R}_{i_1}, \dots, \hat{X}_{i_d}, \hat{U}_{i_d}, \hat{R}_{i_d}))\right) \end{aligned}$$

schreiben, wobei  $M_\varrho$  nun die Anzahl der Zylinder ist, welche  $B_\varrho^d$  schneiden und die Folge  $(\hat{X}_1, \hat{U}_1, \hat{R}_1), (\hat{X}_2, \hat{U}_2, \hat{R}_2), \dots$  unabhängig und identisch verteilt ist. Die rechte Seite kann nun aber nicht mehr als U-Statistik aufgefasst werden, da im Produkt über alle  $k \neq i_1, \dots, i_d$  multipliziert wird. Ferner sind die Komponenten nicht mehr unabhängig. Auch die hohe Potenz  $\lambda^{2d+1}$  in der asymptotischen Kovarianz weist bereits darauf hin, dass im allgemeinen Fall U-Statistiken nicht angebracht sind. Der entscheidende Schritt von Hoeffding's Zerlegung ist nämlich gerade, dass Terme, welche eine höhere Potenz als  $\lambda^{2d-1}$  erzeugen, in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergieren. Es scheint also eine neue Beweismethode angebracht zu sein.



Um später auch einen Grenzwertsatz für alle sichtbaren Ecken  $M_{\text{Ecken}}$  ableiten zu können, formulieren wir den angekündigten Grenzwertsatz für  $N_F$  gleich in einer mehrdimensionalen Version. Dabei schreiben wir  $\xrightarrow{d}$  für die schwache Konvergenz der Verteilungsfunktionen und  $\xrightarrow{\mathbb{P}}$  für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Ferner bezeichne  $\mathcal{N}_m(\mu, \Sigma)$  die  $m$ -dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor  $\mu$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$ , bzw. diene als Platzhalter für einen Zufallsvektor mit eben dieser Verteilung. Im Fall  $m = 1$  schreiben wir kurz  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

**Satz 6.7** *Es sei  $\mathbb{E}R_0^2 < \infty$ . Ferner seien  $F_1, \dots, F_m : \mathbb{M}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  messbare Abbildungen derart, dass für alle  $k = 1, \dots, m$  die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.*

1. *Die Abbildung  $(r_1, \dots, r_d) \mapsto F_k((u_1, r_1), \dots, (u_d, r_d))$  ist stetig für linear unabhängige  $u_1, \dots, u_d \in S^{d-1}$ .*
2.  *$X_{F_k}((x_1, r_1, u_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)) \in \bigcap_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i)$  für alle markierten Punkte  $(x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$  mit linear unabhängigen  $u_1, \dots, u_d \in S^{d-1}$ .*

Dann gilt

$$\varrho^{-(d-1/2)} \left( N_{F_1}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_1}(\varrho W), \dots, N_{F_m}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_m}(\varrho W) \right)^T \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}_m(\mu, \Sigma(W)),$$

mit  $\Sigma(W) = (\sigma_{F_i, F_j}^2(W))_{i,j=1}^m$  und  $\sigma_{F_i, F_j}^2(W)$ ,  $i, j = 1, \dots, m$  wie in Satz 6.6.

Bevor wir diesen Satz beweisen kommen wir noch zurück zum ursprünglichen Problem einen zentralen Grenzwertsatz für alle und die lexikographisch größten Ecken der durch die abgeschlossenen Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_{\lambda, Q}^c$  gebildeten Polytope zu finden (siehe Abschnitt 6.1). Diese folgen aber sofort aus Satz 6.7 und dem Continuous Mapping Theorem (siehe Klenke (2008, S.257, Satz 13.25)). Man beachte auch, dass  $F_{\text{lex min}}$  und  $F_{a_1, \dots, a_d}$  die zusätzlichen Voraussetzungen von Satz 6.7 erfüllen.

**Korollar 6.8** *Unter der Voraussetzung  $\mathbb{E}R_0^2 < \infty$  gilt*

1.

$$\varrho^{-(d-1/2)} (M_{\text{Ecken}}(\varrho W) - \mathbb{E}M_{\text{Ecken}}(\varrho W)) \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{Ecken}}^2(W))$$

$$\text{mit } \sigma_{\text{Ecken}}^2(W) = \frac{1}{d!^2} \sum_{a_1, \dots, a_{2d} \in \{\pm 1\}} \sigma_{F_{a_1, \dots, a_d}, F_{a_{d+1}, \dots, a_{2d}}}^2(W),$$

2.

$$\varrho^{-(d-1/2)} (M_{\text{max}}(\varrho W) - \mathbb{E}M_{\text{max}}(\varrho W)) \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{max}}^2(W))$$

$$\text{mit } \sigma_{\text{max}}^2(W) = \frac{1}{d!^2} \sigma_{F_{\text{lex min}}, F_{\text{lex min}}}^2(W).$$

*Erfüllt die Richtungsverteilung die Mischungsbedingung (4.6), so gilt für die asymptotischen Varianzen  $\sigma_{\text{Ecken}}^2(W) = 2^{2d} \sigma^2(W)$  und  $\sigma_{\text{max}}^2(W) = \sigma^2(W)$ , wobei*

$$\sigma^2(W) = \lambda^{2d-1} \left( \frac{1}{d!} (1-p) \mathbb{E} \bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0) \right)^2 \mathbb{E} \left[ \bar{\gamma}_W(U_0) \left( d \frac{\bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)}{\mathbb{E} \bar{\nabla}_{d,d-1}(U_0)} - 2\lambda R_0 \right)^2 \right].$$

**Beweis (Satz 6.7).** Wir betrachten eine beliebige Linearkombination

$$X_\varrho = \sum_{k=1}^m a_k \varrho^{-(d-1/2)} (N_{F_k}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_k}(\varrho W))$$

mit  $a = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ . Für den Erwartungswert und die Varianz gilt dann offenbar  $\mathbb{E}X_\varrho = 0$  und  $\text{Var}X_\varrho = \varrho^{-(2d-1)} \sum_{k,\ell=1}^m a_k \text{Cov}(N_{F_k}(\varrho W), N_{F_\ell}(\varrho W)) a_\ell$ . Es ist also insbesondere  $\sigma^2 := \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \text{Var}X_\varrho = a^T \Sigma(W) a$  mit  $\Sigma(W) = (\sigma_{F_i, F_j}^2(W))_{i,j=1}^m$ . Nach der Methode von Cramér und Wold (z.B. Klenke (2008, S. 324, Satz 15.55)) ist die Behauptung dann äquivalent zu  $X_\varrho \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Ist nun  $\sigma^2 = 0$ , so folgt aus der Tschebyschow-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X_\varrho| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}X_\varrho$$

für alle  $\varepsilon > 0$ . Da die rechte Seite gegen  $\sigma^2 = 0$  konvergiert, folgt also  $X_\varrho \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ .

Für den Fall  $\sigma^2 > 0$  verwenden wir Lemma 2 von Bolthausen (1982, S. 1048), was sich wie folgt formulieren lässt:

Ist  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von  $\mathbb{R}$ -wertigen Zufallsgrößen mit charakteristischen Funktionen  $\varphi_n(t) = \mathbb{E}e^{itY_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(a) \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}Y_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi'_n(t) + t\varphi_n(t)] = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$ .

In unserem Fall betrachten wir  $X_\varrho/\sigma$  und setzen  $\varphi_\varrho(t) = \mathbb{E}e^{itX_\varrho}$ . Dann ist durch

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_\varrho^2 = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \text{Var}X_\varrho = \sigma^2 < \infty$$

die Bedingung (a) gesichert. Die Bedingung (b) können wir umschreiben zu

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} [\varphi'_\varrho(t) + \sigma^2 t \varphi_\varrho(t)] = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (6.19)$$

Der Nachweis dieses Grenzwertes ist aufwendig und wird auf den nachfolgenden Seiten erbracht. Insgesamt zeigt sich, dass es Konstanten  $b, c \in [0, \infty)$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} |\varphi'_\varrho(t) + \sigma^2 t \varphi_\varrho(t)| &\leq t^2 \sum_{k,\ell=1}^m |a_k a_\ell| \left| \varrho^{-(2d-1)} \text{Cov}(N_{F_k}(\varrho W), N_{F_\ell}(\varrho W)) - \sigma_{F_k, F_\ell}^2(W) \right| \\ &\quad + \varrho^{-1/2} t^2 (b \mathbb{E}R_0^3 + c) \end{aligned} \quad (6.20)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \geq 1$ . Die Konstanten  $b$  und  $c$  hängen dabei neben  $\lambda$  und  $a$  nur isoton von  $\mathbb{E}R_0$  und  $\mathbb{E}R_0^2$  ab. Im Fall  $\mathbb{E}R_0^3 < \infty$  folgt damit also zu Behauptung.

Ohne die Voraussetzung  $\mathbb{E}R_0^3 < \infty$  verwenden wir einen Abschneidetechnik. Dazu ersetzen wir  $(U_0, R_0)$  durch  $(U_0, R_0^{(\varrho)}) := (U_0, R_0 \mathbf{1}(R_0 \leq \varepsilon\sqrt{\varrho}))$  mit  $\varrho, \varepsilon > 0$  und bezeichnen den hiermit gewonnen Punktprozess der verschobenen, sichtbaren Schnittpunkte mit  $N_F^{(\varrho)}$ . Analog wie oben definieren wir dann

$$\tilde{X}_\varrho = \sum_{k=1}^m a_k \varrho^{-(d-1/2)} (N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W)).$$

Die dazugehörige charakteristische Funktion bezeichnen wir mit  $\tilde{\varphi}_\varrho$ . Wir zeigen als erstes, dass sich die asymptotische Verteilung hierdurch nicht ändert.

**Hilfsaussage** Für alle  $k = 1, \dots, m$  gilt

1.  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left| \mathbb{P}(N_{F_k}(\varrho W) \leq y) - \mathbb{P}(N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W) \leq y) \right| = 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ ,
2.  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho^{-(d-1/2)} \left| \mathbb{E}N_{F_k}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W) \right| = 0$ .

Zum Nachweis der 1. Aussage sei  $\Pi_{\lambda, Q} = \sum_{i \geq 1} \delta_{(X_i, U_i, R_i)}$ . Dann ist zunächst

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{P}(N_{F_k}(\varrho W) \leq y) - \mathbb{P}(N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W) \leq y) \right| \\ &= \left| \mathbb{P}\left(N_{F_k}(\varrho W) \leq y, \left(\bigcap_{i \geq 1} \{R_i \leq \varepsilon\sqrt{\varrho}\}\right) \cup \bigcup_{i \geq 1} \{R_i > \varepsilon\sqrt{\varrho}\}\right) - \mathbb{P}(N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W) \leq y) \right| \\ &= \mathbb{P}\left(N_{F_k}(\varrho W) \leq y, \bigcup_{i \geq 1} \{R_i > \varepsilon\sqrt{\varrho}\}\right). \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung  $X_{F_k}((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_d, u_d, r_d)) \in \bigcap_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i)$  genügt es nun in  $N_{F_k}$  nur diejenigen markierten Punkte mit  $Z(X_i, U_i, R_i) \cap \varrho W \neq \emptyset$ ,  $i \geq 1$ , zu berücksichtigen. Bezeichnen wir diese Indexmenge mit  $I_\varrho$ , also  $I_\varrho = \{i \geq 1 : Z(X_i, U_i, R_i) \cap \varrho W \neq \emptyset\}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N_{F_k}(\varrho W) \leq y, \bigcup_{i \geq 1} \{R_i > \varepsilon\sqrt{\varrho}\}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I_\varrho} \{R_i > \varepsilon\sqrt{\varrho}\}\right) \\ &\leq \mathbb{E} \sum_{i \in I_\varrho} \mathbf{1}(R_i > \varepsilon\sqrt{\varrho}) \\ &= \mathbb{E} \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z(X_i, U_i, R_i) \cap \varrho W \neq \emptyset) \mathbf{1}(R_i > \varepsilon\sqrt{\varrho}). \end{aligned}$$

Den Erwartungswert können wir mit der Campbell-Mecke-Formel (2.3) berechnen und dann weiter abschätzen. Ist dazu  $B_{r(W)}^d$  eine Kugel mit  $W \subseteq B_{r(W)}^d$ , so folgt insgesamt

$$\mathbb{E} \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z(X_i, U_i, R_i) \cap \varrho W \neq \emptyset) \mathbf{1}(R_i > \varepsilon\sqrt{\varrho})$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}(Z(x, u, r) \cap \varrho W \neq \emptyset) \mathbf{1}(r > \varepsilon\sqrt{\varrho}) \, dx \, Q(d(u, r)) \\
 &\leq \lambda \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}(Z(x, u, r) \cap \varrho B_r^d(W) \neq \emptyset) \mathbf{1}(r > \varepsilon\sqrt{\varrho}) \, dx \, Q(d(u, r)) \\
 &\leq \lambda \int_{\mathbb{M}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\varrho r(W)-r, \varrho r(W)+r]}(x) \mathbf{1}(r > \varepsilon\sqrt{\varrho}) \, dx \, Q(d(u, r)) \\
 &= 2\lambda \mathbb{E}[R_0 \mathbf{1}(R_0 > \varepsilon\sqrt{\varrho})] + 2\lambda r(W) \varrho \mathbb{E}[\mathbf{1}(R_0 > \varepsilon\sqrt{\varrho})] \\
 &\leq 2\lambda \mathbb{E}[R_0 \mathbf{1}(R_0 > \varepsilon\sqrt{\varrho})] + 2\lambda r(W) \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}[R_0 \mathbf{1}(R_0 > \varepsilon\sqrt{\varrho})]
 \end{aligned}$$

und dies beweist den ersten Teil der Hilfsaussage, denn  $R_0$  ist integrierbar.

Der zweite Teil folgt leicht aus der Formel für die Intensität (6.6) und der elementaren Ungleichung  $|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|$  für alle  $x, y \geq 0$ . Es ist dann

$$\begin{aligned}
 &\left| \mathbb{E}N_{F_k}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W) \right| \\
 &\leq \lambda^d \nu_d(\varrho W) \left| \exp\{-2\lambda \mathbb{E}R_0\} - \exp\{-2\lambda \mathbb{E}R_0 \mathbf{1}(R_0 \leq \varepsilon\sqrt{\varrho})\} \right| \\
 &\leq 2\lambda^{d+1} \nu_d(W) \varrho^d \mathbb{E}R_0 \mathbf{1}(R_0 > \varepsilon\sqrt{\varrho}) \\
 &\leq 2\lambda^{d+1} \nu_d(W) \frac{1}{\varepsilon} \varrho^{d-1/2} \mathbb{E}R_0^2 \mathbf{1}(R_0 > \varepsilon\sqrt{\varrho})
 \end{aligned}$$

und hiermit folgt aus der Existenz von  $\mathbb{E}R_0^2$  die 2. Behauptung.

Aus der Hilfsaussage können wir nun insgesamt

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left| \mathbb{P}\left(\varrho^{-(d-1/2)}(N_{F_k}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_k}(\varrho W)) \leq y\right) \right. \\
 &\quad \left. - \mathbb{P}\left(\varrho^{-(d-1/2)}(N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W) - \mathbb{E}N_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W)) \leq y\right) \right| = 0
 \end{aligned}$$

für alle  $y \in \mathbb{R}$  folgern und dies zieht

$$|X_\varrho - \tilde{X}_\varrho| \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

nach sich. Nach dem Satz von Slutsky (z.B. Klenke (2008, S. 255)) genügt es deshalb  $\tilde{X}_\varrho \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  zu zeigen. Da die Ungleichung (6.20) aber für beliebige  $R_0$  richtig ist, gilt sie auch für  $R_0 \mathbf{1}(R_0 \leq \varepsilon\sqrt{\varrho})$ . Das bedeutet aber

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\varphi}'_\varrho(t) + \sigma^2 t \tilde{\varphi}_\varrho(t)| &\leq t^2 \sum_{k, \ell=1}^m |a_k a_\ell| \left| \varrho^{-(2d-1)} \text{Cov}(\tilde{N}_{F_k}^{(\varrho)}(\varrho W), \tilde{N}_{F_\ell}^{(\varrho)}(\varrho W)) - \sigma_{F_k, F_\ell}^2(W) \right| \\
 &\quad + \varepsilon t^2 b \mathbb{E}R_0^2 + \varrho^{-1/2} t^2 c
 \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \geq 1$ . Wie am Ende von Abschnitt 6.4 bemerkt ändert sich die

asymptotische Kovarianz durch das Abschneiden nicht und deshalb konvergiert der erste Summand gegen 0. Ferner beachte man, dass  $\varepsilon > 0$  immer als Nullfolge  $\varepsilon(\varrho) \rightarrow 0$  gewählt werden kann, so dass  $\varepsilon(\varrho)\sqrt{\varrho} \rightarrow \infty$  gilt. Dies zeigt schließlich  $|\tilde{\varphi}'_\varrho(t) + \sigma^2 t \tilde{\varphi}(t)| \rightarrow 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Der erste Schritt zum Beweis von (6.20) ist eine Zerlegung von  $N_{F_k}(\varrho W)$  im Exponenten von  $\varphi'_\varrho$ . Dabei treten Erwartungswerte der Form  $\mathbb{E}[G(z, \Pi_{\lambda, Q})f(\Pi_{\lambda, Q})]$  auf. Diese könnte man zunächst so belassen und später schlicht mit  $|\mathbb{E}[G(z, \Pi_{\lambda, Q})f(\Pi_{\lambda, Q})]| \leq \mathbb{E}|f(\Pi_{\lambda, Q})|$  abschätzen. Dies erweist sich allerdings als zu grob. Günstiger wäre, wenn der Erwartungswert faktorisieren würde, also  $G(z, \Pi_{\lambda, Q})$  und  $f(\Pi_{\lambda, Q})$  unabhängig wären, was im allgemeinen natürlich nicht der Fall ist. Das nächste Lemma besagt aber, dass wir diese Faktorisierung erreichen können, wenn wir den Punktprozess einschränken. Hierfür definieren wir zunächst für ein Zählmaß  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  das auf  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$  eingeschränkte Zählmaß  $\psi \llcorner A$  durch

$$(\psi \llcorner A)(B) := \psi(A \cap B)$$

für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$ .  $\mathbb{M}$  kann hierbei ein beliebiger Markenraum sein. Ein Poisson-Punktprozess hat in diesem Zusammenhang die zwei folgenden Eigenschaften.

**Bemerkung 6.4** *Ist  $\Psi_{\mathbb{M}}$  ein markierter Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß  $\Lambda_{\mathbb{M}}$  so gilt:*

1. *Der eingeschränkte Punktprozess  $\Psi_{\mathbb{M}} \llcorner A$  ist wieder ein markierter Poisson-Punktprozess und hat das Intensitätsmaß  $\Lambda_{\mathbb{M}}(\cdot \cap A)$ .*
2. *Sind  $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , so sind die Punktprozesse  $\Psi_{\mathbb{M}} \llcorner A_1$  und  $\Psi_{\mathbb{M}} \llcorner A_2$  unabhängig.*

Die erste Aussage ist klar. Die zweite findet sich beispielsweise in Schneider und Weil (2000, S. 75, Satz 3.2.3), allerdings nur für Mengen mit  $\Lambda_{\mathbb{M}}(A_1) < \infty$  und  $\Lambda_{\mathbb{M}}(A_2) < \infty$ . Dass die Aussage auch für beliebige messbare, disjunkte Mengen gilt sehen wir, indem wir die Mengen zerlegen. Ist ohne Einschränkung  $\Lambda_{\mathbb{M}}(A_1) = \infty$  und  $\Lambda_{\mathbb{M}}(A_2) < \infty$ , so gibt es wegen der lokalen Endlichkeit von  $\Lambda_{\mathbb{M}}$  paarweise disjunkte Mengen  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\Lambda_{\mathbb{M}}(C_n) < \infty$ , so dass  $A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ . Nach Schneider und Weil (2000, Satz 3.2.3) sind dann die Punktprozesse  $\Psi_{\mathbb{M}} \llcorner A_2, \Psi_{\mathbb{M}} \llcorner C_1, \Psi_{\mathbb{M}} \llcorner C_2, \dots$  unabhängig und damit auch  $\Psi_{\mathbb{M}} \llcorner A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\mathbb{M}} \llcorner C_n$  und  $\Psi_{\mathbb{M}} \llcorner A_2$ .

Ab hier betrachten wir wieder nur den Markenraum  $\mathbb{M} = S^{d-1} \times [0, \infty)$ .

**Lemma 6.9** *Sei  $z \in \mathbb{R}^d$  beliebig und  $\Psi_{\mathbb{M}}$  ein (nicht notwendig stationärer) markierter Poisson-Punktprozess auf  $\mathbb{R}$  mit Markenraum  $\mathbb{M} = S^{d-1} \times [0, \infty)$  und Intensitätsmaß  $\Lambda_{\mathbb{M}}$ . Dann gilt für jede messbare Funktion  $f : \mathcal{N}_{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\mathbb{E}|f(\Psi_{\mathbb{M}})| < \infty$  die Gleichung*

$$\mathbb{E}[G(z, \Psi_{\mathbb{M}})f(\Psi_{\mathbb{M}})] = e^{-\Lambda_{\mathbb{M}}(D_z)} \mathbb{E}f(\Psi_{\mathbb{M}} \llcorner D_z^c), \quad (6.21)$$

wobei  $D_z = \{(y, v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M} : z \in Z(y, v, t)\}$ .

**Beweis.** Für alle  $z \in \mathbb{R}^d$  und einfachen Zählmaße  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbf{M}}$  ist

$$\begin{aligned}
 G(z, \psi) = 1 &\iff \prod_{(y,v,t) \in s(\psi)} (1 - \mathbf{1}_{Z(y,v,t)}(z)) = 1 \\
 &\iff \forall (y, v, t) \in s(\psi) : z \notin Z(y, v, t) \\
 &\iff \forall (y, v, t) \in s(\psi) : (y, v, t) \notin D_z \\
 &\iff s(\psi) \cap D_z = \emptyset \\
 &\iff \psi \perp D_z \equiv 0,
 \end{aligned}$$

also

$$G(z, \psi) = \mathbf{1}(\psi \perp D_z \equiv 0).$$

Weiter ist  $\mathbf{1}(\psi \perp D_z \equiv 0) = 1 \iff \psi = \psi \perp D_z^c$  und damit folgt

$$\mathbb{E}[G(z, \Psi_{\mathbf{M}})f(\Psi_{\mathbf{M}})] = \mathbb{E}[\mathbf{1}(\Psi_{\mathbf{M}} \perp D_z \equiv 0)f(\Psi_{\mathbf{M}} \perp D_z^c)].$$

Offenbar sind  $D_z$  und  $D_z^c$  disjunkt und da  $\Psi_{\mathbf{M}}$  ein Poisson-Punktprozess ist, sind die auf  $D_z$  und  $D_z^c$  eingeschränkten Punktprozesse  $\Psi_{\mathbf{M}} \perp D_z$  und  $\Psi_{\mathbf{M}} \perp D_z^c$  nach Bemerkung 6.4 unabhängig. Die Aussage (6.21) ergibt sich dann wegen  $\mathbb{E}[\mathbf{1}(\Psi_{\mathbf{M}} \perp D_z \equiv 0)] = \mathbb{P}(\Psi_{\mathbf{M}}(D_z) = 0) = e^{-\Lambda(D_z)}$ .  $\square$

Wir kommen nun zurück zum Beweis von (6.20). Für die Ableitung  $\varphi'_\varrho$  gilt zunächst

$$\begin{aligned}
 \varphi'_\varrho(t) &= i \mathbb{E} X_\varrho \exp\{itX_\varrho\} \\
 &= i\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{E} \left[ N_{F_k}(\varrho W) \exp \left\{ it\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell (N_{F_\ell}(\varrho W) - \mathbb{E} N_{F_\ell}(\varrho W)) \right\} \right] \\
 &\quad - i\varphi_\varrho(t) \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{E} N_{F_k}(\varrho W) \\
 &= i\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{E} \left[ \sum_{(X_1, U_1, R_1), \dots, (X_d, U_d, R_d) \in s(\Pi_{\lambda, Q})}^{\neq} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{R})) \right. \\
 &\quad \times G \left( X_{F_k}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{R}), \Pi_{\lambda, Q} - \sum_{i=1}^d \delta_{(X_i, U_i, R_i)} \right) \\
 &\quad \times \exp \left\{ it\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell (N_{F_\ell}(\varrho W) - \mathbb{E} N_{F_\ell}(\varrho W)) \right\} \left. \right] \\
 &\quad - i\varphi_\varrho(t) \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{E} N_{F_k}(\varrho W).
 \end{aligned}$$

Um die Mecke-Slivnyak-Formel anwenden zu können, benutzen wir im Exponenten die

Zerlegung (6.9) für  $N_{F_k}(\varrho W)$ . Hierfür führen wir noch für  $j \in \{1, \dots, q\}$ ,  $I \in [q]_j^<$ ,  $J \in [d]_j^\neq$  und  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  die Abbildungen

$$\begin{aligned}
 & H_{F;A}^{j,I,J} : (\mathbb{R} \times M)^q \times \mathcal{N}_{\mathbb{M}} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & H_{F;A}^{j,I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) \\
 & := \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_{d-j}, v_{d-j}, t_{d-j}) \in s(\psi)}^\neq \mathbb{1}_A(X_F \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \\
 & \quad \times G\left(X_F \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})), \psi - \sum_{i=1}^{d-j} \delta_{(y_i, v_i, t_i)} + \sum_{i \in [q] \setminus J} \delta_{(x_i, u_i, r_i)}\right) \\
 & = \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_{d-j}, v_{d-j}, t_{d-j}) \in s(\psi)}^\neq \mathbb{1}_{A \cap \bigcap_{i \in [q] \setminus J} Z(x_i, u_i, r_i)^c}(X_F \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))) \\
 & \quad \times G\left(X_F \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})), \psi - \sum_{i=1}^{d-j} \delta_{(y_i, v_i, t_i)}\right).
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & H_{F;A} : (\mathbb{R} \times M)^q \times \mathcal{N}_{\mathbb{M}} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & H_{F;A}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) := \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi)}^\neq \mathbb{1}_{A \cap \bigcap_{i=1}^q Z(x_i, u_i, r_i)^c}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \quad \times G\left(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)}\right)
 \end{aligned}$$

ein. Setzen wir noch

$$N_{F;A}(\psi) := \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi)}^\neq \mathbb{1}_A(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) G\left(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)}\right)$$

und

$$R_{F;A}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) := \sum_{j=1}^q \sum_{I \in [q]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} H_{F;A}^{j,I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi),$$

so erhalten wir insgesamt die Zerlegung

$$N_{F;A}(\psi) = R_{F;A}\left((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi - \sum_{i=1}^q \delta_{(x_i, u_i, r_i)}\right) + H_{F;A}\left((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi - \sum_{i=1}^q \delta_{(x_i, u_i, r_i)}\right), \tag{6.22}$$

für jedes einfache Zählmaß  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  und paarweise verschiedene markierte Punkte  $(x_1, u_1, r_1), \dots, (x_q, u_q, r_q) \in s(\psi)$ . Wir bemerken außerdem, dass der Zusammenhang  $H_{F;A}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) = N_{F;A \cap \bigcap_{i=1}^q Z(x_i, u_i, t_i)^c}(\psi)$  gilt. Wir wenden (6.22) nun auf den Exponenten in der Ableitung  $\varphi'_\varrho(t)$  an und verwenden dann die Mecke-Slivnyak-Formel. Anschließend kann (6.21) angewendet werden. Hierbei ist  $\Psi_{\mathbb{M}} = \Pi_{\lambda, Q}$ ,  $z = X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$  und damit  $\exp\{-\Lambda_{\lambda, Q}(D_{X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})})\} = \exp\{-2\lambda \mathbb{E}R_0\} = 1 - p$ . Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
 \varphi'_\varrho(t) &= \\
 &= i\varrho^{-(d-1/2)} \lambda^d \sum_{k=1}^m a_k \\
 &\times \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} G(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) \\
 &\times \exp\left\{ it\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) + H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) - \mathbb{E}N_{F_\ell}(\varrho W) \right) \right\} \\
 &P_{\lambda, Q}(d\psi) \, d\mathbf{x} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) - i\varphi_\varrho(t) \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{E}N_{F_k}(\varrho W) \\
 &= i\varrho^{-(d-1/2)} \lambda^d (1-p) \sum_{k=1}^m a_k \\
 &\times \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \exp\left\{ it\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right\} \\
 &\times \exp\left\{ it\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) - \mathbb{E}N_{F_\ell}(\varrho W) \right) \right\} \\
 &P_{\lambda, Q}(d\psi) \, d\mathbf{x} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) - \sum_{k=1}^m a_k \frac{i\mathbb{E}N_{F_k}(\varrho W)}{\varrho^{d-1/2}} \varphi_\varrho(t).
 \end{aligned}$$

Definieren wir noch

$$\begin{aligned}
 h_{t, \varrho} &: (\mathbb{R} \times \mathbb{M})^d \times \mathcal{N}_{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{C}, \\
 ((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) &\mapsto \exp\left\{ it\varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) - \mathbb{E}N_{F_\ell}(\varrho W) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

zur Abkürzung der komplexen Exponentialfunktion, so ergibt sich insgesamt die Zerlegung

$$\varphi'_\varrho(t) + \sigma^2 t \varphi_\varrho(t) = i \sum_{k=1}^m a_k S_\varrho^{1,k}(t) + i \sum_{k=1}^m a_k S_\varrho^{2,k}(t) - t \sum_{k, \ell=1}^m a_k a_\ell S_\varrho^{3,k,\ell}(t) \quad (6.23)$$



mit

$$\begin{aligned}
 S_\varrho^{1,k}(t) &= \varrho^{-(d-1/2)} \lambda^d (1-p) \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left[ \exp \left\{ it \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - 1 - it \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right] \\
 &\quad \times h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})), \\
 S_\varrho^{2,k}(t) &= \varrho^{-(d-1/2)} \lambda^d (1-p) \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left[ 1 + it \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right) \right] \\
 &\quad \times h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 &\quad - i \varrho^{-(d-1/2)} \varphi_\varrho(t) \mathbb{E} N_{F_k}(\varrho W), \\
 S_\varrho^{3,k,\ell}(t) &= \varrho^{-(2d-1)} \lambda^d (1-p) \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left[ R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right. \\
 &\quad \left. + H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) - N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) \right] \\
 &\quad \times h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}^c}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\
 &\quad - \sigma_{F_k, F_\ell}^2(W) \varphi_\varrho(t).
 \end{aligned}$$

Zum Beweis der Ungleichung (6.20) muss also gezeigt werden, dass die 3 obigen Größen die Ordnung  $\mathcal{O}(\varrho^{-1/2})$  haben. Dazu muss im Prinzip die Abbildung  $h_{t, \varrho}$  durch die charakteristische Funktion  $\varphi_\varrho(t)$  ersetzt werden. Der dabei gemachte Fehler darf natürlich nicht zu groß werden. Hierfür muss das asymptotische Verhalten der Erwartungswerte und gemischten Momenten von  $R_{F; B_\varrho^d}$  und  $N_F(\varrho W) - H_{F; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \Pi_{\lambda, Q})$  untersucht werden. Anschaulich kann man sich dies überlegen, indem man sich klar macht, dass eine  $k$ -fache Summe die Ordnung  $\mathcal{O}(\varrho^k)$  liefert. Damit sollte  $R_{F; \varrho W}$  ungefähr von der Ordnung  $\varrho^{d-1}$  sein.  $N_F(\varrho W)$  und  $H_{F; \varrho W}$  liefern jeweils die Ordnung  $\varrho^d$  und durch die Bildung der Differenz sollte es noch zu einer Reduktion kommen. Die formalen Abschät-

zungen erfolgen in den nächsten beiden Lemmas. Dabei machen wir wiederholt von den folgenden Feststellungen Gebrauch:

1. Wegen  $W \in \mathcal{C}_d$  gibt es eine Kugel  $B_{r(W)}^d$  mit  $r(W) \geq 1$ , so dass  $W \subseteq B_{r(W)}^d$ .
2. Ist  $X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \in \varrho W$ , so ist auch  $X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \in B_{\varrho r(W)}^d$  und für alle  $i = 1, \dots, d$  folgt  $x_i + \hat{F}_i(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in [-\varrho r(W), \varrho r(W)]$ , wobei  $\hat{F}_i(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \langle u_i, F(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rangle$  wie am Anfang des Kapitels.  
Insbesondere gilt  $\mathbf{1}_{\varrho W}(X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \leq \prod_{i \in I} \mathbf{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(x_i + \hat{F}_i(\mathbf{u}, \mathbf{r}))$  für beliebige  $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ .
3.  $\nu_d(\varrho W \cap Z(x, u, r)) \leq \nu_d(B_{\varrho r(W)} \cap Z(0, u, r)) \leq 2^d r(\varrho r(W))^{d-1}$ .

Wir betrachten als ersten den Erwartungswert der Differenz  $H_{F; \varrho W} - N_F(\varrho W)$ . Allerdings in einer leicht allgemeineren Fassung, wie sie auch später auftritt.

**Lemma 6.10** *Seien  $(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{M})^q$  mit  $0 \leq q \leq d$  und  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{M})^d$  jeweils paarweise verschieden sowie  $x', y' \in \mathbb{R}^d$ . Dann gilt für alle  $\varrho \geq 1$  die Abschätzung*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| H_{F; \varrho W} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D_{x'}^c + \sum_{i=1}^q \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \llcorner D_{y'}^c \right) - N_F(\varrho W) \right| \\ & \leq c_q(\mathbf{r}, \mathbf{t}) (\varrho r(W))^{d-1} \end{aligned}$$

mit

$$c_q(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^q j! \binom{q}{j} \binom{d}{j} (2\lambda)^{d-j} + (2\lambda)^d \left( 2\lambda \mathbb{E} R_0^2 + 2d \mathbb{E} R_0 + \sum_{i=1}^d r_i + \sum_{i=1}^q t_i \right).$$

**Beweis.** Wir setzen zur Abkürzung  $B = \bigcap_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i)^c$  und  $D = D_{x'} \cup D_{y'}$ . Sind weiter ohne Einschränkung  $(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_{q'}, v_{q'}, t_{q'}) \in D_{y'}^c$ ,  $0 \leq q' \leq q$ , so folgt mit Hilfe von (6.22) die Zerlegung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| H_{F; \varrho W} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D_{x'}^c + \sum_{i=1}^q \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \llcorner D_{y'}^c \right) - N_F(\varrho W) \right| \\ & = \mathbb{E} \left| H_{F; \varrho W} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c + \sum_{i=1}^{q'} \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) - N_F(\varrho W) \right| \\ & = \mathbb{E} \left| N_{F; \varrho W \cap B} \left( \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c + \sum_{i=1}^{q'} \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) - N_F(\varrho W) \right| \\ & = \mathbb{E} \left| R_{F; \varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c) + H_{F; \varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c) - N_F(\varrho W) \right| \\ & \leq I_\varrho^{(1)} + I_\varrho^{(2)} + I_\varrho^{(3)} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_\varrho^{(1)} &= \mathbb{E} \left| R_{F;\varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c) \right|, \\ I_\varrho^{(2)} &= \mathbb{E} \left| H_{F;\varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q}) - N_F(\varrho W) \right|, \\ I_\varrho^{(3)} &= \mathbb{E} \left| H_{F;\varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c) - H_{F;\varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q}) \right|. \end{aligned}$$

Nach obiger Überlegung folgt aus  $X_F \circ g_{I, J}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), (\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s})) \in \varrho W$  immer auch, dass  $y_k + \hat{F}_k \circ g_{I, J}((\mathbf{v}, \mathbf{t}), (\mathbf{w}, \mathbf{s})) \in [-\varrho r(W), \varrho r(W)]$  für alle  $k = 1, \dots, d-j$  und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} H_{F;\varrho W \cap B}^{j, I, J}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c) \\ & \leq \lambda^{d-j} \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \int_{\mathbb{R}^{d-j}} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_F \circ g_{I, J}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), (\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}))) \, d\mathbf{z} \, Q^{(d-j)}(d(\mathbf{w}, \mathbf{s})) \\ & \leq \lambda^{d-j} \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \int_{\mathbb{R}^{d-j}} \prod_{k=1}^{d-j} \mathbb{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(z_k + \hat{F}_k \circ g_{I, J}((\mathbf{v}, \mathbf{t}), (\mathbf{w}, \mathbf{s}))) \, d\mathbf{z} \, Q^{(d-j)}(d(\mathbf{w}, \mathbf{s})) \\ & \leq \varrho^{d-1} (2\lambda r(W))^{d-j}, \end{aligned}$$

für alle  $1 \leq j \leq q'$ ,  $I \in [d]_j^<$ ,  $J \in [q']_j^\neq$ . Für  $I_\varrho^{(1)}$  ergibt sich also insgesamt

$$\begin{aligned} I_\varrho^{(1)} &= \sum_{j=1}^{q'} \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [q']_j^\neq} \mathbb{E} H_{F;\varrho W \cap B}^{j, I, J}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D^c) \\ &\leq \sum_{j=1}^{q'} \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [q']_j^\neq} \varrho^{d-1} (2\lambda r(W))^{d-j} \\ &\leq (\varrho r(W))^{d-1} \sum_{j=1}^q \binom{d}{j} \binom{q}{j} j! (2\lambda)^{d-j}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} I_\varrho^{(2)} &= \mathbb{E} \left| N_F \left( \varrho W \cap B \cap \bigcap_{i=1}^{q'} Z(y_i, v_i, t_i)^c \right) - N_F(\varrho W) \right| \\ &= \mathbb{E} N_F(\varrho W) - \mathbb{E} N_F \left( \varrho W \cap \left( \bigcup_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i) \cup \bigcup_{i=1}^{q'} Z(y_i, v_i, t_i) \right)^c \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^d \mathbb{E} N_F(\varrho W \cap Z(x_i, u_i, r_i)) + \sum_{i=1}^{q'} \mathbb{E} N_F(\varrho W \cap Z(y_i, v_i, t_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{i=1}^d \gamma_d \nu_d(\varrho W \cap Z(x_i, u_i, r_i)) + \sum_{i=1}^{q'} \gamma_d \nu_d(\varrho W \cap Z(y_i, v_i, t_i)) \\
 &\leq (\varrho r(W))^{d-1} (2\lambda)^d \left( \sum_{i=1}^d r_i + \sum_{i=1}^{q'} t_i \right) \\
 &\leq (\varrho r(W))^{d-1} (2\lambda)^d \left( \sum_{i=1}^d r_i + \sum_{i=1}^q t_i \right).
 \end{aligned}$$

Die Differenz in  $I_\varrho^{(3)}$  muss zunächst noch weiter zerlegt werden. Für alle einfachen Zählmaße  $\psi \in \mathcal{N}_M$  und für alle  $(z_1, w_1, s_1), \dots, (z_d, w_d, s_d) \in s(\psi) \cap D^c$  gilt

$$\begin{aligned}
 &G\left(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(z_i, w_i, s_i)}\right) = \\
 &= G\left(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \left(\psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(z_i, w_i, s_i)}\right) \llcorner D\right) G\left(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \left(\psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(z_i, w_i, s_i)}\right) \llcorner D^c\right) \\
 &= G\left(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \psi \llcorner D\right) G\left(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \psi \llcorner D^c - \sum_{i=1}^d \delta_{(z_i, w_i, s_i)}\right)
 \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
 &H_{F; \varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi \llcorner D^c) - H_{F; \varrho W \cap B}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi) \\
 &= \sum_{(z_1, w_1, s_1), \dots, (z_d, w_d, s_d) \in s(\psi) \cap D^c}^{\neq} \mathbb{1}_{\varrho W \cap B \cap \bigcap_{i=1}^{q'} Z(y_i, v_i, t_i)^c} (X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s})) \\
 &\quad \times G\left(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \psi \llcorner D^c - \sum_{i=1}^d \delta_{(z_i, w_i, s_i)}\right) \left(1 - G(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \psi \llcorner D)\right) \\
 &- \sum_{(z_1, w_1, s_1), \dots, (z_d, w_d, s_d) \in s(\psi)}^{\neq} \mathbb{1}_{\varrho W \cap B \cap \bigcap_{i=1}^{q'} Z(y_i, v_i, t_i)^c} (X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s})) \\
 &\quad \times G\left(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}), \psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(z_i, w_i, s_i)}\right) \left(1 - \prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{D^c}(z_i, w_i, s_i)\right). \tag{6.24}
 \end{aligned}$$

Wir bilden dann den Betrag und wenden zusätzlich die auch später noch nützlichen Abschätzungen

- $\mathbb{1}_{\varrho W \cap B \cap \bigcap_{i=1}^{q'} Z(y_i, v_i, t_i)^c} \leq \mathbb{1}_{\varrho W}$
- $1 - \prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{D^c}(z_i, w_i, s_i) \leq \sum_{i=1}^d \mathbb{1}_D(z_i, w_i, s_i)$

$$\bullet \quad 1 - G(X_F, \psi \llcorner D) \leq \sum_{(y,v,t) \in s(\psi) \cap D} \mathbb{1}_{Z(y,v,t)}(X_F)$$

an. Anschließend verwenden wir wieder die Mecke-Slivnyak-Formel und die Transformation wie in der Berechnung des Intensitätsmaßes; die Funktionaldeterminante wird dabei mit 1 abgeschätzt. Hiermit folgt

$$\begin{aligned} I_\varrho^{(3)} &\leq \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \sum_{\substack{(z_1, w_1, s_1), \dots, (z_d, w_d, s_d) \in s(\psi) \cap D^c \\ (y, v, t) \in s(\psi) \cap D}}^{\neq} \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(y, v, t)}(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s})) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &\quad + \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \sum_{(z_1, w_1, s_1), \dots, (z_d, w_d, s_d) \in s(\psi)}^{\neq} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_F(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s})) \left( \sum_{i=1}^d \mathbb{1}_D(z_i, w_i, s_i) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &\leq \lambda^{d+1} \int_D \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(y, v, t)}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} Q^{(d)}(d(\mathbf{w}, \mathbf{s})) dy Q(d(v, t)) \\ &\quad + \lambda^d d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_D(z_1, w_1, s_1) \prod_{i=2}^d \mathbb{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(z_i) d\mathbf{z} Q^{(d)}(d(\mathbf{w}, \mathbf{s})) \\ &\leq \lambda^{d+1} \int_D \nu_d(\varrho W \cap Z(y, v, t)) dy Q(d(v, t)) \\ &\quad + 2^{d-1} \lambda^d (\varrho r(W))^{d-1} d \int_D dy Q(d(v, t)) \\ &\leq (\varrho r(W))^{d-1} (2\lambda)^d \lambda \int_D t dy Q(d(v, t)) \\ &\quad + 2^{d-1} \lambda^d (\varrho r(W))^{d-1} d \int_D dy Q(d(v, t)). \end{aligned}$$

Zum Abschluss des Beweises beachte man noch, dass  $(y, v, t) \in D_{x'} \iff \langle v, x' \rangle - y \in [-t, t]$  für beliebige  $x' \in \mathbb{R}^d$  und deshalb

$$\int_{D_{x'}} f(v, t) dy Q(d(v, t)) = 2 \int_{\mathbb{M}} t f(v, t) Q(d(v, t)) = 2\mathbb{E}[R_0 f(U_0, R_0)] \quad (6.25)$$

für jede integrierbare oder nicht-negative, messbare Funktion  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Insbesondere kann

$$\int_D dy Q(d(v, t)) \leq 4\mathbb{E}R_0 \quad \text{und} \quad \int_D t dy Q(d(v, t)) \leq 4\mathbb{E}R_0^2$$

unabhängig von den Punkten  $x', y' \in \mathbb{R}^d$  abgeschätzt werden kann.  $\square$

Für die Abschätzung der zweiten Momente müssen wir zunächst noch umformen, verwenden aber grundsätzlich dieselben Argumente wie eben.

**Lemma 6.11** *Seien  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{M})^d$  paarweise verschieden und  $x' \in \mathbb{R}^d$  beliebig.*

1. *Sei  $1 \leq j \leq d$  und  $I \in [d]_j^<, J \in [d]_j^\neq$ . Dann gilt für alle  $\varrho \geq 1$  die Abschätzung*

$$\mathbb{E} \left[ \left( H_{F;\varrho W}^{j,I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \Pi_{\lambda,Q} \llcorner D_{x'}^c) \right)^2 \right] \leq (\varrho r(W))^{2d-2} c_{0,j}, \quad (6.26)$$

wobei

$$c_{i,j} = \sum_{k=i}^{d-j} k! \binom{d-j}{k} \binom{d-j}{k} (2\lambda)^{2(d-j)-k}.$$

2. *Für alle  $\varrho \geq 1$  gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( N_F(\varrho W) - H_{\varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \Pi_{\lambda,Q} \llcorner D_{x'}^c) \right)^2 \right] \\ & \leq (\varrho r(W))^{2d-2} 3 \left( (2\lambda)^{2d+1} \mathbb{E} R_0^3 + c + c(\mathbf{r}) \right), \end{aligned} \quad (6.27)$$

wobei

$$c(\mathbf{r}) = d \sum_{i=1}^d \left( 2^d r_i c_{1,d} + (2\lambda)^{2d} r_i^2 \right)$$

und

$$\begin{aligned} c &= \mathbb{E} R_0^2 (2^{d+1} \lambda c_{1,0} + (2\lambda)^2 2^d c_{1,0} \mathbb{E} R_0 + (2\lambda)^{2d+2} \mathbb{E} R_0^2) \\ &+ (d 2\lambda \mathbb{E} R_0)^2 (\sqrt{c_{0,1}} + (d-1)\sqrt{c_{0,2}})^2 + d^2 c_{0,1} 2\lambda \mathbb{E} R_0. \end{aligned}$$

**Beweis.** Für den ersten Teil schätzen wir wie im vorherigen Beweis mit

$$\begin{aligned} & \left( H_{F;\varrho W}^{j,I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{x'}^c) \right)^2 \\ & \leq \left( \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_{d-j}, v_{d-j}, t_{d-j}) \in s(\psi)}^{\neq} \prod_{\ell=1}^{d-j} \mathbf{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(y_\ell + \hat{F}_\ell \circ g_{I,J}) \right) \\ & \quad \times \left( \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_{d-j}, v_{d-j}, t_{d-j}) \in s(\psi)}^{\neq} \prod_{\ell=1}^{d-j} \mathbf{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(y_\ell + \hat{F}_\ell \circ g_{I,J}) \right) \end{aligned}$$

ab. Dies wird dann mit Hilfe von (6.10) ausmultipliziert und anschließend die Mecke-Slivnyak-Formel angewendet. Dabei treten Indikatorfunktionen in gewissem Sinne doppelt auf, d.h.  $\mathbf{1}_{[-\varrho, \varrho]}(y_\ell + m_1)$  und  $\mathbf{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(y_\ell + m_2)$ . Wenn wir eine von beiden

mit 1 abschätzen und die Verschiebung mit einer Transformation eliminieren, so erhalten

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[ \left( H_{F;\varrho W}^{j,I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \Pi_{\lambda,Q} \llcorner D_{x'}^c) \right)^2 \right] \\
 & \leq \sum_{k=0}^{d-j} k! \binom{d-j}{k} \binom{d-j}{k} \lambda^{2(d-j)-k} \\
 & \quad \times \int_{\mathbb{M}^{2(d-j)-k}} \int_{\mathbb{R}^{2(d-j)-k}} \prod_{\ell=1}^{2(d-j)-k} \mathbb{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(y_\ell) \, d\mathbf{y} \, Q^{(2(d-j)-k)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & = \sum_{k=0}^{d-j} k! \binom{d-j}{k} \binom{d-j}{k} (2\lambda\varrho r(W))^{2(d-j)-k},
 \end{aligned}$$

womit die erste Aussage bewiesen ist.

Der Beweis des zweiten Teils ist wesentlich komplizierter. Wir beginnen damit, dass wir die Differenz wie im vorherigen Beweis (Gleichung (6.24)) zerlegen. Für jedes einfache Zählmaß  $\psi \in \mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  ist

$$\begin{aligned}
 & N_F(\varrho W) - H_{F;\varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{x'}^c) \\
 & = N_F(\varrho W) - H_{F;\varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) + H_{F;\varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) - H_{F;\varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{x'}^c) \\
 & = \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi)}^{\neq} \mathbb{1}_{\varrho W \cap \bigcup_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i)}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \quad \times G\left(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)}\right) \\
 & - \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi) \cap D_{x'}^c}^{\neq} \mathbb{1}_{\varrho W \cap \bigcap_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i)^c}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \quad \times G\left(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi \llcorner D_{x'}^c - \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)}\right) \left(1 - G(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi \llcorner D_{x'}^c)\right) \\
 & + \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi)}^{\neq} \mathbb{1}_{\varrho W \cap \bigcap_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i)^c}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \quad \times \left(1 - \prod_{k=1}^d \mathbb{1}_{D_{x'}^c}(y_k, v_k, t_k)\right) G\left(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi - \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)}\right).
 \end{aligned}$$

Wir wenden dann die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$  an und schätzen einige nicht benötigte Terme ab. Wir erhalten dann

$$\mathbb{E} \left[ \left( N_F(\varrho W) - H_{\varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \Pi_{\lambda,Q} \llcorner D_{x'}^c) \right)^2 \right] \leq 3(I_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) + I_2(x') + I_3(x'))$$

mit

$$\begin{aligned}
 I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) &= \mathbb{E} \left[ N_F \left( \varrho W \cap \bigcup_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i) \right)^2 \right] \\
 I_\varrho^{(2)}(x') &= \int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi) \cap D_{x'}^c} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \right. \\
 &\quad \left. \times \left( 1 - G(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), \psi \llcorner D_{x'}) \right) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\
 I_\varrho^{(3)}(x') &= \int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi)} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \right. \\
 &\quad \left. \times \left( 1 - \prod_{i=1}^d \mathbf{1}_{D_{x'}^c}(y_i, v_i, t_i) \right) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi).
 \end{aligned}$$

Zumindest für  $I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$  könnten wir Satz 6.2 verwenden und die  $\alpha_{j, I, J}^{(2)}$  abschätzen. Es ist jedoch einfacher bereits vorher einige Abschätzungen vorzunehmen. Wir definieren deshalb noch für jedes  $\psi \in \mathcal{N}_M$  und paarweise verschiedene  $(z_1, w_1, s_1), \dots, (z_j, w_j, s_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$  sowie  $i_1 \neq \dots \neq i_j$ ,  $1 \leq j \leq d-1$ , die Zählmaße

$$\hat{H}_A(\psi) = \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi)} \mathbf{1}_A(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))$$

und

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_A^{j, i_1, \dots, i_j}((\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s})_{1, \dots, j}, \psi) &= \\
 &= \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_{d-j}, v_{d-j}, t_{d-j}) \in s(\psi)} \mathbf{1}_A(X_F \circ g_{i_1, \dots, i_j}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), (\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}))).
 \end{aligned}$$

Dabei entsteht  $g_{i_1, \dots, i_j}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), (\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{s}))$ , indem wir für alle  $\ell = 1, \dots, j$ , die Komponente  $i_\ell$  in  $((y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d))$  durch  $(z_{i_\ell}, w_{i_\ell}, t_{i_\ell})$  ersetzen.  $\hat{H}_A$  ist also nichts anderes als die Anzahl aller verschobenen Schnittpunkte in  $A$ , während  $\hat{H}_A^{j, i_1, \dots, i_j}(\psi)$  die Anzahl aller Schnittpunkte in  $A$  ist, welche aus dem Schnitt von jeweils  $d-j$  Hyperebenen, gebildet mit Punkten aus  $\psi$ , und  $j$  festen Hyperebenen entstehen. Mit diesen Bezeichnungen und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) &\leq d \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[ \left( N_F(\varrho W \cap Z(x_i, u_i, r_i)) \right)^2 \right] \\
 &\leq d \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W \cap Z(x_i, u_i, r_i)}(\Pi_{\lambda, Q}) \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$



Für die Größe  $I_\varrho^{(2)}(x')$  finden wir mit Hilfe der Zerlegung (6.10) (für  $d = q = 1$ ) und der Mecke-Slivnyak-Formel

$$\begin{aligned}
 I_\varrho^{(2)}(x') &\leq \int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{\substack{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi) \\ (z, w, s) \in s(\psi) \cap D_{x'}}} \mathbf{1}_{\varrho W \cap Z(z, w, s)}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\
 &= \int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{(z, w, s) \in s(\psi) \cap D_{x'}} \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z, w, s)}(\psi \llcorner D_{x'}^c) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\
 &= \lambda \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z, w, s)}((\Pi_{\lambda, Q} + \delta_{(z, w, s)}) \llcorner D_{x'}^c) \right)^2 \right] dz Q(d(w, s)) \\
 &\quad + \lambda^2 \int_{D_{x'}} \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1)}((\Pi_{\lambda, Q} + \delta_{(z_1, w_1, s_1)} + \delta_{(z_2, w_2, s_2)}) \llcorner D_{x'}^c) \right. \\
 &\quad \left. \times \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2)}((\Pi_{\lambda, Q} + \delta_{(z_1, w_1, s_1)} + \delta_{(z_2, w_2, s_2)}) \llcorner D_{x'}^c) \right] \\
 &\quad dz_1 Q(d(w_1, s_1)) dz_2 Q(d(w_2, s_2)).
 \end{aligned}$$

Für  $(z, w, s) \in D_{x'}$  folgt aber  $(\Pi_{\lambda, Q} + \delta_{(z, w, s)}) \llcorner D_{x'}^c = \Pi_{\lambda, Q} \llcorner D_{x'}^c \leq \Pi_{\lambda, Q}$  und analog  $(\Pi_{\lambda, Q} + \delta_{(z_1, w_1, s_1)} + \delta_{(z_2, w_2, s_2)}) \llcorner D_{x'}^c \leq \Pi_{\lambda, Q}$ , wenn  $(z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2) \in D_{x'}$ . Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
 I_\varrho^{(2)}(x') &\leq \lambda \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z, w, s)}(\Pi_{\lambda, Q}) \right)^2 \right] dz Q(d(w, s)) \\
 &\quad + \lambda^2 \int_{D_{x'}} \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1)}(\Pi_{\lambda, Q}) \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2)}(\Pi_{\lambda, Q}) \right] \\
 &\quad dz_1 Q(d(w_1, s_1)) dz_2 Q(d(w_2, s_2)).
 \end{aligned}$$

Für die Größe  $I_\varrho^{(3)}(x')$  liefert die Cauchy-Schwarz-Ungleichung hingegen

$$\begin{aligned}
 I_\varrho^{(3)}(x') &\leq d \sum_{k=1}^d \int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{(y_1, v_1, t_1), \dots, (y_d, v_d, t_d) \in s(\psi)} \mathbf{1}_{D_{x'}}(y_k, v_k, t_k) \mathbf{1}_{\varrho W}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\
 &\leq d \sum_{k=1}^d \int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{(z, w, s) \in s(\psi) \cap D_{x'}} \hat{H}_{\varrho W}^{1;k}((z, w, s), \psi - \delta_{(z, w, s)}) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi)
 \end{aligned}$$

und hieraus folgt weiter mit Hilfe der Mecke-Slivnyak-Formel und durch ausmultipliziere-

ren (Formel (6.10) mit  $d = q = 1$ )

$$\begin{aligned}
 I_\varrho^{(3)}(x') &\leq d \sum_{k=1}^d \lambda \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W}^{1;k}((z, w, s), \Pi_{\lambda, Q}) \right)^2 \right] dz Q(d(w, s)) \\
 &+ d \sum_{k=1}^d \lambda^2 \int_{D_{x'}} \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ \hat{H}_{\varrho W}^{1;k}((z_1, w_1, s_1), \Pi_{\lambda, Q}) \hat{H}_{\varrho W}^{1;k}((z_2, w_2, s_2), \Pi_{\lambda, Q}) \right] \\
 &\quad dz_1 Q(d(w_1, s_1)) dz_2 Q(d(w_2, s_2)) \\
 &+ 2d \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ \ell \neq k}}^d \lambda^2 \int_{D_{x'}} \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ \hat{H}_{\varrho W}^{1;k}((z_1, w_1, s_1), \Pi_{\lambda, Q}) \right. \\
 &\quad \left. \times H_{\varrho W}^{2;k, \ell}((z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2), \Pi_{\lambda, Q}) \right] \\
 &\quad dz_1 Q(d(w_1, s_1)) dz_2 Q(d(w_2, s_2)) \\
 &+ d \sum_{\substack{k, \ell, m=1 \\ \ell, m \neq k}}^d \lambda^2 \int_{D_{x'}} \int_{D_{x'}} \mathbb{E} \left[ H_{\varrho W}^{2;k, \ell}((z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2), \Pi_{\lambda, Q}) \right. \\
 &\quad \left. \times H_{\varrho W}^{2;k, m}((z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2), \Pi_{\lambda, Q}) \right] \\
 &\quad dz_1 Q(d(w_1, s_1)) dz_2 Q(d(w_2, s_2)).
 \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genügt es nun zu zeigen, dass die 3 Größen  $\mathbb{E} \left[ \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_2, w_2, t_2)}(\Pi_{\lambda, Q}) \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, t_1)}(\Pi_{\lambda, Q}) \right]$ ,  $\mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W}^{1;k}((z, w, s), \Pi_{\lambda, Q}) \right)^2 \right]$  und  $\mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W}^{2;k, \ell}((z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2), \Pi_{\lambda, Q}) \right)^2 \right]$  jeweils die Ordnung  $\mathcal{O}(\varrho^{2d-2})$  haben, denn die Integrale über  $D_{x'}$  sind stets endlich und unabhängig von  $x'$ , wie im am Ende des Beweises von Lemma 6.10 gezeigt.

Die letzten Beiden Erwartungswerte lassen sich genauso abschätzen wie die Größen im ersten Teil des Beweises, d.h.

$$\mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W}^{1;k}((z_1, w_1, s_1), \Pi_{\lambda, Q}) \right)^2 \right] \leq c_{0,1} (\varrho r(W))^{2d-2}$$

und

$$\mathbb{E} \left[ \left( \hat{H}_{\varrho W}^{2;k, \ell}((z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2), \Pi_{\lambda, Q}) \right)^2 \right] \leq c_{0,2} (\varrho r(W))^{2d-2}$$

für alle  $k, \ell \in \{1, \dots, d\}$  mit  $\ell \neq k$  und beliebige  $(z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ . Der verbleibende Erwartungswert ist schwerer abzuschätzen, da hier die Reduktion in der Ordnung von  $\varrho$  allein daraus gewonnen werden muss, dass das Beobachtungsfenster mit einem Zylinder geschnitten wird, was grob gesagt den Freiheitsgrad einschränkt.

Wir müssen zunächst wieder mit Hilfe von (6.10) ausmultiplizieren und dann die Transformation (6.14), welche zur Berechnung des 2. Momentenmaßes verwendet wurde,

benutzen. Für zwei beliebige markierte Punkte  $(z_1, w_1, s_1), (z_2, w_2, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$  erhalten wir dann die Abschätzung (mit  $m_{j,I,J}$  wie in Satz 6.2)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[ \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_2, w_2, t_2)}(\Pi_{\lambda, Q}) \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, t_1)}(\Pi_{\lambda, Q}) \right] = \\
 & = \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^{\neq}} \lambda^{2d-j} \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{\mathbb{R}^{2d-j}} \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1)}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \quad \times \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2)}(X_F \circ g_{I,J}((\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), (\mathbf{y}', \mathbf{v}', \mathbf{t}')))) \\
 & \quad \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{y}' Q^{(d)}(\mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{t})) Q^{(d-j)}(\mathrm{d}(\mathbf{v}', \mathbf{t}')) \\
 & + \lambda^{2d} \int_{\mathbb{M}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1)}(X_F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t})) \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2)}(X_F(\mathbf{y}', \mathbf{v}', \mathbf{t}')) \\
 & \quad \mathrm{d}\mathbf{y} \mathrm{d}\mathbf{y}' Q^{(d)}(\mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{t})) Q^{(d)}(\mathrm{d}(\mathbf{v}', \mathbf{t}')) \\
 & \leq \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^{\neq}} \lambda^{2d-j} \\
 & \quad \times \int_{\mathbb{M}^{2d-j}} \int_{[\mathbf{v}_J]^\perp} \nu_d(\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1) \cap (\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2) + m_{j,I,J} + x)) \\
 & \quad \nu_{[\mathbf{v}_J]^\perp}(\mathrm{d}x) Q^{(d)}(\mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{t})) Q^{(d-j)}(\mathrm{d}(\mathbf{v}', \mathbf{t}')) \\
 & + \lambda^{2d} \nu_d(\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1)) \nu_d(\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2)).
 \end{aligned}$$

Die beiden Volumina im letzten Summanden schätzen wir wie im vorherigen Beweis durch

$$\nu_d(\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1)) \nu_d(\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2)) \leq 2^{2d} s_1 s_2 (\varrho r(W))^{2d-2}$$

ab. Für das Integral über  $[\mathbf{v}_J]^\perp$  beachte man, dass zum einen der Träger der Abbildung  $x \mapsto \nu_d(A \cap (B + x))$  gerade  $A \oplus (-B)$  ist und zum anderen  $\nu_d(A \cap (B + x)) \leq \nu_d(A)$  gilt. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
 & \nu_d(\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1) \cap (\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2) + m_{j,I,J} + x)) \\
 & \leq \nu_d(\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1)) \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1) \oplus (-\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2) + m_{j,I,J})}(x) \\
 & \leq 2^d s_1 (\varrho r(W))^{d-1} \mathbb{1}_{B_{2\varrho r(W)}^d}(x + m_{j,I,J}).
 \end{aligned}$$

Weiter haben wir für alle  $x \in [\mathbf{v}_J]^\perp$  stets die Abschätzung  $\mathbb{1}_{B_{2\varrho r(W)}^d}(x + m_{j,I,J}) \leq \mathbb{1}_{B_{2\varrho r(W)}^d}(x + \pi_{[\mathbf{v}_J]^\perp}(m_{j,I,J}))$  und damit folgt

$$\int_{[\mathbf{v}_J]^\perp} \nu_d(\varrho W \cap Z(z_1, w_1, s_1) \cap (\varrho W \cap Z(z_2, w_2, s_2) + m_{j,I,J} + x)) \nu_{[\mathbf{v}_J]^\perp}(\mathrm{d}x)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2^d s_1(\varrho r(W))^{d-1} \int_{[\mathbf{v}_J]^\perp} 1_{B_{2\varrho r(W)}^d}(x + \pi_{[\mathbf{v}_J]^\perp}(m_{j,I,J})) \nu_{[\mathbf{v}_J]^\perp}(dx) \\
 &\leq 2^d s_1(\varrho r(W))^{d-1} \nu_{d-j}(B_{2\varrho r(W)}^{d-j}) \\
 &\leq 2^{3d-j} s_1(\varrho r(W))^{2d-2}
 \end{aligned}$$

für alle  $(\mathbf{v}, \mathbf{t}) \in \mathbb{M}^d$  und  $(\mathbf{v}', \mathbf{t}') \in \mathbb{M}^{d-j}$ . Insgesamt also

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[ \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_2, w_2, t_2)}(\Pi_{\lambda, Q}) \hat{H}_{\varrho W \cap Z(z_1, w_1, t_1)}(\Pi_{\lambda, Q}) \right] \\
 &\leq (2\lambda)^{2d} s_1 s_2 (\varrho r(W))^{2d-2} + 2^d s_1 (\varrho r(W))^{2d-2} \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} (2\lambda)^{2d-j} \\
 &= (2\lambda)^{2d} s_1 s_2 (\varrho r(W))^{2d-2} + 2^d s_1 (\varrho r(W))^{2d-2} c_{1,0}.
 \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \leq (\varrho r(W))^{2d-2} d \sum_{i=1}^d \left( 2^d c_{1,0} r_i + (2\lambda)^{2d} r_i^2 \right).$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und (6.25) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
 I_\varrho^{(2)}(x') &\leq (\varrho r(W))^{2d-2} \left[ (2\lambda)^{2d+1} \mathbb{E} R_0^3 + \mathbb{E} R_0^2 (2^{d+1} \lambda c_{1,0} + 2^d (2\lambda)^2 c_{1,0} \mathbb{E} R_0 \right. \\
 &\quad \left. + (2\lambda)^{2d+2} \mathbb{E} R_0^2 \right]
 \end{aligned}$$

und

$$I_\varrho^{(3)}(x') \leq (\varrho r(W))^{2d-2} \left[ (d 2\lambda \mathbb{E} R_0)^2 (\sqrt{c_{0,1}} + (d-1)\sqrt{c_{0,2}})^2 + d^2 c_{0,1} 2\lambda \mathbb{E} R_0 \right]. \quad \square$$

Mit diesen Hilfsaussagen können wir die Größen  $S_\varrho^{1,k}(t)$ ,  $S_\varrho^{2,k}(t)$  und  $S_\varrho^{3,k,\ell}(t)$  abschätzen. Zusätzlich beachte man auch, dass für jede nicht-negative, messbare oder integrierbare Funktion  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  die Abschätzung  $\int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) f(\mathbf{r}) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \leq 2^d \varrho^{d-1} r(W)^d \int_{[0, \infty)^d} f(\mathbf{r}) P_{R_0}^{(d)}(d\mathbf{r})$  gilt.

**Lemma 6.12** Für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \geq 1$  gilt

$$|S_\varrho^{1,k}(t)| \leq \varrho^{-1/2} t^2 (r(W))^{3d-2} c_1,$$

wobei

$$c_1 = \frac{1}{2} m \|a\|^2 \left( \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} \binom{d}{j} j! \right) (2\lambda)^d \sum_{j=1}^d j! \binom{d}{j} \binom{d}{j} c_{0,j}.$$

Insbesondere gilt  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} S_\varrho^{1,k}(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** Mit Hilfe der elementaren Relationen  $|h_{t,\varrho}| = 1$  und  $|e^{is} - 1 - is| \leq \frac{s^2}{2}$ , für alle  $s \in \mathbb{R}$ , erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} |S_\varrho^{1,k}(t)| &\leq \frac{t^2}{2} \varrho^{-(3d-3/2)} \lambda^d (1-p) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ &\quad \times \int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{\ell=1}^m a_\ell R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \, d\mathbf{x} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})). \end{aligned}$$

Wir betrachten dann das innere Integral über  $\mathcal{N}_M$  für feste  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{M})^d$ . Dabei können wir annehmen, dass  $u_1, \dots, u_d \in S^{d-1}$  linear unabhängig sind, denn ansonsten ist  $\mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) = 0$ . Die quadrierte Summe wird dann mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abgeschätzt und die Summen in  $R_{F_\ell; \varrho W}$  ebenfalls. Wenden wir anschließend (6.26) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{N}_M} \left( \sum_{\ell=1}^m a_\ell R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &\leq \|a\|^2 \sum_{\ell=1}^m \int_{\mathcal{N}_M} \left( R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &= \|a\|^2 \sum_{\ell=1}^m \int \left( \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} H_{F_\ell; A}^{j, I, J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &\leq \|a\|^2 \left( \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} \binom{d}{j} j! \right) \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq, \mathcal{N}_M} \int \left( H_{F_\ell; A}^{j, I, J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &\leq (\varrho r(W))^{2d-2} m \|a\|^2 \left( \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} \binom{d}{j} j! \right) \left( \sum_{j=1}^d j! \binom{d}{j} \binom{d}{j} c_{0,j} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\begin{aligned} |S_\varrho^{1,k}(t)| &\leq \varrho^{-d-1/2} \frac{t^2}{2} m \|a\|^2 \left( \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} \binom{d}{j} j! \right) \sum_{j=1}^d j! \binom{d}{j} \binom{d}{j} c_{0,j} (r(W))^{2d-2} \\ &\quad \times \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \, d\mathbf{x} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ &\leq \varrho^{-1/2} \frac{t^2}{2} m \|a\|^2 (r(W))^{3d-2} (2\lambda)^d \left( \sum_{j=1}^d \binom{d}{j} \binom{d}{j} j! \right) \left( \sum_{j=1}^d j! \binom{d}{j} \binom{d}{j} c_{0,j} \right). \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 6.13** Für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \geq 1$  gilt

$$|S_\varrho^{2,k}(t)| \leq \varrho^{-1/2} t^2 (r(W))^{3d-2} c_2$$

mit

$$c_2 = \frac{3}{2} (2\lambda)^d m \|a\|^2 \left( (2\lambda)^{2d+1} \mathbb{E}R_0^3 + c + d^2 (2^d c_{1,0} \mathbb{E}R_0 + (2\lambda)^{2d} \mathbb{E}R_0^2) \right).$$

Insbesondere gilt  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} S_\varrho^{2,k}(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , falls  $\mathbb{E}R_0^3 < \infty$ .

**Beweis.** Wegen  $\mathbb{E}N_{F_k}(\varrho W) = \lambda^d (1-p) \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r}))$  können wir

$$\begin{aligned} S_\varrho^{2,k}(t) &= \varrho^{-(d-1/2)} \lambda^d (1-p) \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ &\quad \times \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( 1 + it \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right) \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ it \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right) \right\} \right) \\ &\quad \times h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \end{aligned}$$

schreiben. Wir betrachten auch hier wieder das innere Integral über  $\mathcal{N}_{\mathbb{M}}$  für feste, linear unabhängige  $u_1, \dots, u_d \in S^{d-1}$  und verwenden  $|h_{t, \varrho}| = 1$  sowie  $|e^{is} - 1 - is| \leq \frac{s^2}{2}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Anschließend wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewendet und mit (6.27) abgeschätzt. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( 1 + it \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \left\{ it \varrho^{-(d-1/2)} \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right) \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. \times h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) P_{\lambda, Q}(d\psi) \right| \\ &\leq \varrho^{-(2d-1)} \frac{t^2}{2} \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( \sum_{\ell=1}^m a_\ell \left( N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ &\leq \varrho^{-(2d-1)} \frac{t^2}{2} \|a\|^2 \sum_{\ell=1}^m \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right)^2 P_{\lambda, Q}(d\psi) \end{aligned}$$

$$\leq \varrho^{-1} \frac{t^2}{2} 3m \|a\|^2 (r(W))^{2d-2} ((2\lambda)^{2d+1} \mathbb{E}R_0^3 + c + c(\mathbf{r})).$$

Setzen wir diese Abschätzung oben ein, so erhalten wir

$$|S_\varrho^{2,k}(t)| \leq \varrho^{-1/2} t^2 \frac{3}{2} m \|a\|^2 (r(W))^{3d-2} (2\lambda)^d \int_{[0,\infty)^d} ((2\lambda)^{2d+1} \mathbb{E}R_0^3 + c + c(\mathbf{r})) P_{R_0}^{(d)}(d\mathbf{r}).$$

Für das verbleibende Integral finden wir schließlich noch

$$\begin{aligned} & \int_{[0,\infty)^d} ((2\lambda)^{2d+1} \mathbb{E}R_0^3 + c + c(\mathbf{r})) P_{R_0}^{(d)}(d\mathbf{r}) = \\ & = (2\lambda)^{2d+1} \mathbb{E}R_0^3 + c + d^2 (2^d c_{1,0} \mathbb{E}R_0 + (2\lambda)^{2d} \mathbb{E}R_0^2). \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 6.14** Für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $\varrho \geq 1$  gilt

$$|S_\varrho^{3,k,\ell}(t)| \leq \varrho^{-1/2} |t| (r(W))^{3d-2} c_3 + \left| \varrho^{-(2d-1)} \text{Cov}(N_{F_k}(\varrho W), N_{F_\ell}(\varrho W)) - \sigma_{F_k, F_\ell}^2(W) \right|$$

mit

$$\begin{aligned} c_3 = & \|a\|_1 (2\lambda)^d \left( \sum_{j=1}^d j! \binom{d}{j}^2 (2\lambda)^{d-j} \left( \sum_{k=1}^{d-j} k! \binom{d-j}{k} \binom{d}{k} (2\lambda)^{d-k} \right. \right. \\ & \left. \left. + (2\lambda)^d (2\lambda \mathbb{E}R_0^2 + (4d-j) \mathbb{E}R_0) \right) \right) \\ & + 2d [c_{1,0} \mathbb{E}R_0 + (2\lambda)^{2d} (2\lambda \mathbb{E}R_0^2 \mathbb{E}R_0 + \mathbb{E}R_0^2 + (4d-1) (\mathbb{E}R_0)^2)] \\ & + 2\lambda \mathbb{E}R_0^2 [c_{1,0} + (2\lambda)^{2d} (2\lambda \mathbb{E}R_0^2 + 4d \mathbb{E}R_0)] \Big), \end{aligned}$$

wobei  $\|\cdot\|_1$  die 1-Norm bezeichnet. Insbesondere gilt  $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} S_\varrho^{3,k,\ell}(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , falls  $\mathbb{E}R_0^2 < \infty$ .

**Beweis.** Zunächst bemerken wir, dass die am Anfang des Abschnitts gemachte Zerlegung (6.22) mit der Formel (6.10) korrespondiert, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} & \lambda^d (1-p) \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right. \\ & \quad \left. + H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})}^c) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ & = \mathbb{E}[N_{F_k}(\varrho W) N_{F_\ell}(\varrho W)]. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} & \lambda^d(1-p) \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \right. \\ & \quad \left. + H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) - N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ & = \text{Cov}(N_{F_k}(\varrho W), N_{F_\ell}(\varrho W)). \end{aligned}$$

Wir ersetzen als erstes  $h_{t, \varrho}$  in der Definition von  $S_\varrho^{3, k, \ell}(t)$  durch  $\varphi_\varrho(t)$  und schätzen den Fehler ab. Zerlegen wir den Fehlerterm noch einmal ähnlich wie im Beweis im zu Lemma 6.10 (siehe Gleichung (6.24)) in drei Teile, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S_\varrho^{3, k, \ell}(t) &= \varphi_\varrho(t) \left( \varrho^{-(2d-1)} \text{Cov}(N_{F_k}(\varrho W), N_{F_\ell}(\varrho W)) - \sigma_{F_k, F_\ell}^2(W) \right) \\ & \quad + \lambda^d(1-p) \varrho^{-(2d-1)} \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ & \quad \times \left( I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) + I_\varrho^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) + I_\varrho^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \right) d\mathbf{x} Q^{(d)}(d(\mathbf{u}, \mathbf{r})), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) &= \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} R_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ & \quad \times \left( h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ I_\varrho^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) &= \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) - N_{F_\ell; \varrho W}(\psi) \right) \\ & \quad \times \left( h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\ I_\varrho^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) &= \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left( H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) - H_{F_\ell; \varrho W}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi) \right) \\ & \quad \times \left( h_{t, \varrho}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \lrcorner D_{X_{F_k}}^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \end{aligned}$$

für beliebige  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{M})^d$ , wobei wir aber wieder ohne Einschränkung annehmen, dass  $u_1, \dots, u_d \in S^{d-1}$  linear unabhängig sind. Das Vorgehen ist nun bei allen drei Termen das Gleiche. Nach Anwendung der Mecke-Slivnyak-Formel benutzen wir Lemma 6.9 und schätzen dann mit Hilfe von  $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$  ab. Anschließend kann Lemma 6.10 angewendet werden. Um die Übersicht zu wahren, lassen wir die Argumente mancher Funktionen teilweise weg und schreiben kurz  $X_{F_k}$  für  $X_{F_k}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$  und  $X_{F_\ell} \circ g_{I, J}$



für  $X_{F_\ell} \circ g_{I,J}((\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), (\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{t}))$ . Es ergibt sich auf diese Weise

$$\begin{aligned}
 & |I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})| \\
 & \leq \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} \lambda^{d-j} \\
 & \times \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \int_{\mathbb{R}^{d-j}} \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, t_i) \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell} \circ g_{I,J}) \\
 & \times \left| \int_{\mathcal{N}_M} G(X_{F_\ell} \circ g_{I,J}, \psi \llcorner D_{X_{F_k}}^c) \left( h_{t,\varrho} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}}^c + \sum_{i=1}^{d-j} \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \right| \\
 & \quad d\mathbf{y} Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \leq \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} \lambda^{d-j} \\
 & \times \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \int_{\mathbb{R}^{d-j}} \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, t_i) \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell} \circ g_{I,J}) \\
 & \times \left| \int_{\mathcal{N}_M} \left( h_{t,\varrho} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}}^c \llcorner D_{X_{F_\ell} \circ g_{I,J}}^c + \sum_{i=1}^{d-j} \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \right| \\
 & \quad d\mathbf{y} Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})).
 \end{aligned}$$

Die Abschätzung  $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$  und Lemma 6.10 liefern dann

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathcal{N}_M} \left( h_{t,\varrho} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \psi \llcorner D_{X_{F_k}}^c \llcorner D_{X_{F_\ell} \circ g_{I,J}}^c + \sum_{i=1}^{d-j} \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \right| \\
 & \leq \varrho^{-(d-1/2)} |t| \sum_{\ell'=1}^m |a_{\ell'}| \\
 & \quad \times \int_{\mathcal{N}_M} \left| H_{F_{\ell'}; \varrho W} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \psi \llcorner D_{X_{F_\ell}}^c + \sum_{i=1}^{d-j} \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \llcorner D_{X_{F_k}}^c \right) - N_{F_{\ell'}; \varrho W}(\psi) \right| P_{\lambda, Q}(d\psi) \\
 & \leq \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{d-1} c_{d-j}(\mathbf{r}, \mathbf{t}).
 \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun oben ein und schätzen die verbleibenden Integrale wie in der Ab-

schätzung von  $I_\varrho^{(1)}$  im Beweis von Lemma 6.10, womit wir schließlich

$$\begin{aligned}
 & |I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})| \\
 & \leq \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{d-1} \\
 & \quad \times \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} \lambda^{d-j} \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \int_{\mathbb{R}^{d-j}} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell} \circ g_{I,J}) c_{d-j}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \, d\mathbf{y} \, Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \leq \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{d-1} \\
 & \quad \times \sum_{j=1}^d \sum_{I \in [d]_j^<} \sum_{J \in [d]_j^\neq} \lambda^{d-j} \int_{\mathbb{M}^{d-j}} \int_{\mathbb{R}^{d-j}} \prod_{i=1}^{d-j} \mathbb{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(y_i) c_{d-j}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \, d\mathbf{y} \, Q^{(d-j)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \leq \varrho^{d-3/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{2d-2} \sum_{j=1}^d j! \binom{d}{j}^2 (2\lambda)^{d-j} \int_{[0, \infty)^{d-j}} c_{d-j}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d-j)}(d\mathbf{t}).
 \end{aligned}$$

erhalten. Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & |I_\varrho^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})| \\
 & \leq \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W \cap (\cup_{i=1}^d Z(x_i, u_i, r_i))}(X_{F_\ell}) \\
 & \quad \times \left| \int_{\mathcal{N}_M} G(X_{F_\ell}, \psi) \left( h_{t, \varrho} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \psi + \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \lrcorner D_{X_{F_k}}^c \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \right| \\
 & \quad d\mathbf{y} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \leq \lambda^d \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(x_i, u_i, r_i)}(X_{F_\ell}) \\
 & \quad \times \left| \int_{\mathcal{N}_M} \left( h_{t, \varrho} \left( (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \psi \lrcorner D_{X_{F_\ell}}^c + \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \lrcorner D_{X_{F_k}}^c \right) \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \right| \\
 & \quad d\mathbf{y} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \leq \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{d-1} \lambda^d \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W \cap Z(x_i, u_i, r_i)}(X_{F_\ell}) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \, d\mathbf{y} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \leq \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{d-1} \lambda^d \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{M}^d} \nu_d(\varrho W \cap Z(x_i, u_i, r_i)) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \, d\mathbf{y} \, Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & \leq \varrho^{d-3/2} (2\lambda)^d |t| \|a\|_1 (r(W))^{2d-2} \sum_{i=1}^d r_i \int_{[0, \infty)^d} c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(d\mathbf{t}).
 \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung für  $|I_\varrho^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})|$  muss die Differenz zusätzlich wieder wie in Lemma 6.10 und 6.11 zerlegt werden. Verwenden wir anschließend die Mecke-Slivnyak-Formel, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & |I_\varrho^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})| \\
 & \leq \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) \prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, r_i) \left| \int_{\mathcal{N}_M} \left(1 - G(X_{F_\ell}, \psi \llcorner D_{X_{F_k}})\right) G(X_{F_\ell}, \psi \llcorner D_{X_{F_k}}^c) \right. \\
 & \quad \times \left. \left( h_{t, \varrho}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \psi + \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \llcorner D_{X_{F_k}}^c \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \Big| d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & + \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) \left(1 - \prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, r_i)\right) \\
 & \quad \times \left| \int_{\mathcal{N}_M} G(X_{F_\ell}, \psi) \left( h_{t, \varrho}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \psi + \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \llcorner D_{X_{F_k}}^c \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \Big| \\
 & \quad d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})).
 \end{aligned}$$

Beim ersten Summanden verwenden wir noch, dass  $\Pi_{\lambda, Q} \llcorner D_{X_{F_k}}^c$  und  $\Pi_{\lambda, Q} \llcorner D_{X_{F_k}}$  unabhängig sind und gehen dann wie bei  $I_\varrho^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$  und  $I_\varrho^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$  vor:

$$\begin{aligned}
 & |I_\varrho^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})| \\
 & \leq \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) \prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, r_i) \int_{\mathcal{N}_M} \left(1 - G(X_{F_\ell}, \psi \llcorner D_{X_{F_k}})\right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \\
 & \quad \times \left| \int_{\mathcal{N}_M} G(X_{F_\ell}, \psi \llcorner D_{X_{F_k}}^c) \left( h_{t, \varrho}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \psi + \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \llcorner D_{X_{F_k}}^c \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \Big| \\
 & \quad d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 & + \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) \left(1 - \prod_{i=1}^d \mathbb{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, r_i)\right) \\
 & \quad \times \left| \int_{\mathcal{N}_M} G(X_{F_\ell}, \psi) \left( h_{t, \varrho}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}), \left( \psi + \sum_{i=1}^d \delta_{(y_i, v_i, t_i)} \right) \llcorner D_{X_{F_k}}^c \right) - \varphi_\varrho(t) \right) P_{\lambda, Q}(d\psi) \Big| \\
 & \quad d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t}))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{d-1} \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left(1 - G(X_{F_\ell}, \psi \lfloor D_{X_{F_k}})\right) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 &+ \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{d-1} \lambda^d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \\
 &\quad \times \left(1 - \prod_{i=1}^d \mathbf{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, t_i)\right) d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})).
 \end{aligned}$$

Die verbleibenden Integrale werden wie bei der Abschätzung von  $I_\varrho^{(3)}$  im Beweis von Lemma 6.10 berechnet. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \int_{\mathcal{N}_{\mathbb{M}}} \left(1 - G(X_{F_\ell}, \psi \lfloor D_{X_{F_k}})\right) P_{\lambda, Q}(d\psi) d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 &\leq \lambda \int_{D_{X_{F_k}}} \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W \cap Z(z, w, s)}(X_{F_\ell}) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) dz Q(d(w, s)) \\
 &= \lambda \int_{D_{X_{F_k}}} \int_{\mathbb{M}^d} \nu_d(\varrho W \cap Z(z, w, s)) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) dz Q(d(w, s)) \\
 &\leq 2^d \lambda (\varrho r(W))^{d-1} \int_{D_{X_{F_k}}} s dz Q(d(w, s)) \int_{[0, \infty)^d} c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(d\mathbf{t}) \\
 &= 2^d (2\lambda) (\varrho r(W))^{d-1} \mathbb{E} R_0^2 \int_{[0, \infty)^d} c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(d\mathbf{t})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_{F_\ell}) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \left(1 - \prod_{i=1}^d \mathbf{1}_{D_{X_{F_k}}^c}(y_i, v_i, t_i)\right) d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 &\leq d \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{D_{X_{F_k}}}(y_1, v_1, t_1) \prod_{i=2}^d \mathbf{1}_{[-\varrho r(W), \varrho r(W)]}(y_i) c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) d\mathbf{y} Q^{(d)}(d(\mathbf{v}, \mathbf{t})) \\
 &\leq d 2^d (\varrho r(W))^{d-1} \mathbb{E} R_0 \int_{[0, \infty)^d} c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(d\mathbf{t}).
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also für  $|I_\varrho^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})|$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_\varrho^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})| &\leq \varrho^{d-3/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{2d-2} (2\lambda)^{d+1} \mathbb{E} R_0^2 \int_{[0, \infty)^d} c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(\mathbf{d}\mathbf{t}) \\ &\quad + \varrho^{d-3/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{2d-2} (2\lambda)^d d \int_{[0, \infty)^d} t_1 c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(\mathbf{d}\mathbf{t}) \end{aligned}$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned} |S_\varrho^{3,k,\ell}(t)| &\leq \left| \varrho^{-(2d-1)} \text{Cov}(N_{F_k}(\varrho W), N_{F_\ell}(\varrho W)) - \sigma_{F_k, F_\ell}^2 \right| \\ &\quad + \varrho^{-d-1/2} |t| \|a\|_1 \lambda^d (1-p) (r(W))^{2d-2} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{M}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\varrho W}(X_F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})) g(\mathbf{r}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} Q^{(d)}(\mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{r})) \\ &\leq \left| \varrho^{-(2d-1)} \text{Cov}(N_{F_k}(\varrho W), N_{F_\ell}(\varrho W)) - \sigma_{F_k, F_\ell}^2 \right| \\ &\quad + \varrho^{-1/2} |t| \|a\|_1 (r(W))^{3d-2} (2\lambda)^d \int_{[0, \infty)^d} g(\mathbf{r}) P_{R_0}^{(d)}(\mathbf{d}\mathbf{r}), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^d j! \binom{d}{j} \binom{d}{j} (2\lambda)^{d-j} \int_{[0, \infty)^{d-j}} c_{d-j}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d-j)}(\mathbf{d}\mathbf{t}) \\ &\quad + (2\lambda)^d \sum_{j=1}^d r_j \int_{[0, \infty)^d} c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(\mathbf{d}\mathbf{t}) \\ &\quad + (2\lambda)^d d \int_{[0, \infty)^d} t_1 c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(\mathbf{d}\mathbf{t}) \\ &\quad + (2\lambda)^{d+1} \mathbb{E} R_0^2 \int_{[0, \infty)^d} c_d(\mathbf{r}, \mathbf{t}) P_{R_0}^{(d)}(\mathbf{d}\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Da die  $c_{d-j}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = c_{d-j}(r_1, \dots, r_d, t_1, \dots, t_{d-j})$  nur linear sowie quadratisch von  $r_1, \dots, r_d$  und  $t_1, \dots, t_d$  abhängen sind die Integrale, unter der Voraussetzung  $\mathbb{E} R_0^2 < \infty$ , in jedem Fall endlich. Ausführen der Integrale liefert dann noch die Konstante  $c_3$ .  $\square$

Die Lemmas 6.12, 6.13 und 6.14 zeigen zusammen mit der Zerlegung (6.23) schlussendlich die Abschätzung (6.20) im Beweis des zentralen Grenzwertsatzes, welcher damit abgeschlossen ist. Man beachte auch, dass die Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  isoton von  $\mathbb{E} R_0$  und  $\mathbb{E} R_0^2$  abhängen.

## Kommentare und offene Fragen

Die Aussagen in diesem Kapitel bieten verschiedene Möglichkeiten für Verallgemeinerungen. Eine Möglichkeit wäre, statt der Schnittpunkte, auch die nicht überdeckten Teile des Schnitts von  $1 \leq \ell < d$  Hyperebenen zu betrachten. Dies wäre also der Flächenprozess

$$\Psi_\ell(A) = \frac{1}{\ell!} \sum_{(X_1, U_1, R_1), \dots, (X_\ell, U_\ell, R_\ell) \in \Pi_{\lambda, Q}}^{\neq} f_A((\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{R})_{1, \dots, \ell}, \Pi_{\lambda, Q} - \sum_{i=1}^{\ell} \delta_{(X_i, U_i, R_i)}),$$

wobei

$$f_A((x_1, u_1, r_1), \dots, (x_\ell, u_\ell, r_\ell), \psi) = \mathbb{1} \left( \bigcap_{i=1}^{\ell} H(x_i, u_i) \cap \bigcap_{(z, v, t) \in \psi} Z(z, v, t)^c \cap A \neq \emptyset \right).$$

Wir sehen, dass dies, im Gegensatz zu den sichtbaren Schnittpunkten, nicht mehr als verdünnter Prozess geschrieben werden kann. Es handelt sich hier also um eine andere Art von Problem. Man macht sich dies anschaulich schnell klar, indem man sich überlegt, dass beim bilden der nicht überdeckten Schnittpunkte aus einem Punktprozess in  $\mathbb{R}^d$  wieder ein Punktprozess in  $\mathbb{R}^d$  entsteht. Schneiden wir aber aus den Schnitten von jeweils  $1 \leq \ell \leq d-1$  Hyperebenen den nicht überdeckten Teil heraus, so wird aus einem  $d-\ell$ -Ebenenprozess ein Flächenprozess. Diese Verallgemeinerung kann also augenscheinlich nicht analog behandelt werden. Alternativ könnte man auch das totale  $d-\ell$ -Volumen betrachten. Im Fall  $\ell = 1$  ist dies nicht anderes als die Oberfläche von  $\Xi_{\lambda, Q} \cap A$  und hierfür wurden Grenzwertsätze von Heinrich und Spiess (2013) bewiesen.

Eine weitere Möglichkeit der Verallgemeinerung der Ergebnisse dieses Kapitels bestünde darin, den Poisson-Prozess durch eine allgemeinere Klasse stationärer markierter Punktprozesse zu ersetzen. Hierfür bieten sich beispielsweise stationäre unabhängig markierte Erneuerungsprozesse an, siehe z.B. Daley und Vere-Jones (1998) oder König und V. Schmidt (1992). Für die Schnittpunkte eines Geradenprozesses wurde dies von Bauer (2009) gemacht. In unserem Fall bauen wir aber stark auf dem Poisson-Prozess, insbesondere auf der Mecke-Slivnyak-Formel auf. Es müsste also ein Ersatz hierfür gefunden werden, zumindest in einem asymptotischen Sinne.

Ferner stellt sich noch die Frage nach der Konvergenzgeschwindigkeit, welche in dieser Arbeit nicht beantwortet wurde. Die Bestimmung scheint aber grundsätzlich möglich. Dazu muss natürlich zunächst bestimmt werden, wie schnell die asymptotische Kovarianz konvergiert. Hier können wir vermuten, dass diese mit der Ordnung  $\mathcal{O}(\varrho^{-1})$  konvergiert. Für den Konvergenzgeschwindigkeit des zentralen Grenzwertsatzes können wir aber keine Vermutung aufstellen.

# 7 Ein Zentraler Grenzwertsatz für die Euler-Poincaré-Charakteristik eines stationären Poisson-Zylindermodells in der Ebene

Die *Euler-Poincaré-Charakteristik* eines konvexen Körpers wird definiert durch

$$\chi(C) = \begin{cases} 1 & \text{falls } C \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } C = \emptyset \end{cases}$$

für alle  $C \in \mathcal{C}_d$ . Mit Hilfe der Ein-Ausschluss-Formel lässt sie sich eindeutig, additiv auf den *Konvexring*  $\mathcal{S}_d := \{\bigcup_{i=1}^m C_i : C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}_d, m \in \mathbb{N}\}$  fortsetzen (siehe Gruber (2007, S. 117 f.) oder Schneider (1993, S. 175)), d.h. es ist

$$\chi(S) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \chi(C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_k}),$$

wenn  $S = \bigcup_{i=1}^m C_i$  mit  $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}_d$ . Die auf diese Weise definierte ganze Zahl stimmt ferner mit der topologischen Invarianten selben Namens überein (Hadwiger (1957, S. 239)).

Im Fall  $d = 2$  können wir die Euler-Poincaré-Charakteristik einer Menge  $S$  aus dem Konvexring  $\mathcal{S}_2$  nach Schneider und Weil (1992, S. 57) auch einfacher darstellen als

$$\chi(S) = b_0(S) - b_1(S),$$

wobei  $b_0(S)$  die *Anzahl der Zusammenhangskomponenten* und  $b_1(S)$  die *Anzahl der „Löcher“* ist. Letzteres ist genauer zu verstehen als die Anzahl der beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements von  $S$ .  $b_0(S)$  und  $b_1(S)$  sind gerade die 0-te und 1-te *Betti-Zahl* von  $S$ , siehe K. Mecke und Stoyan (2002). Die Euler-Poincaré-Charakteristik und die Betti-Zahlen sind auch wichtige Größen in der Bildbearbeitung und der Materialwissenschaft, siehe hierfür K. Mecke und Stoyan (2002) oder V. Schmidt (2015).

Ist nun  $d = 2$  und  $S = \Xi_{\lambda, Q}(\omega) \cap \varrho W$ , wobei  $W \in \mathcal{C}_2$  mit  $\text{int } W \neq \emptyset$ , so macht man sich anschaulich schnell klar, dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten asymptotisch keine Rolle spielt. Zwar schneidet jeder Zylinder jeden anderen Zylinder, solange  $U_0$  zumindest zwei verschiedene Werte annimmt, allerdings muss dieser Schnitt

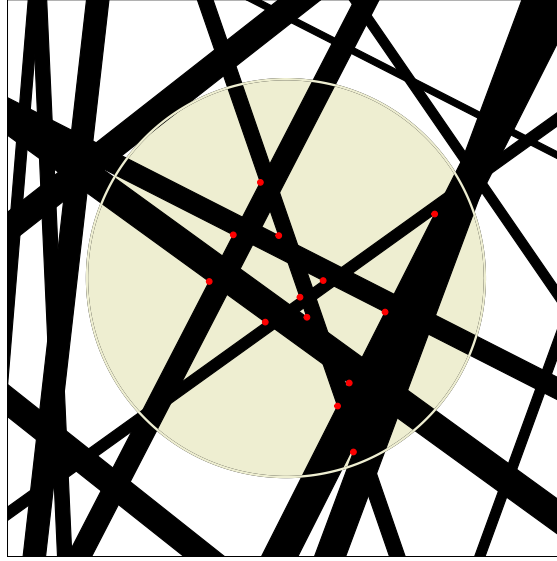


Abbildung 7.1: Simulation von  $\Xi_{\lambda,Q}$ .  $\Xi_{\lambda,Q} \cap B_\varrho^2$  hat hier 2 Zusammenhangskomponenten und 8 Löcher, während  $M_{\max}(B_\varrho^2) = 13$  ist.

nicht in  $\varrho W$  liegen. Im ungünstigsten Fall liegen also all diese Schnitte außerhalb von  $\varrho W$  und die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ist dann gleich der Anzahl der Zylinder, welche  $\varrho W$  schneiden. Deren Anzahl wird aber durch die hohe Normierung kontrolliert. Die Anzahl der Löcher von  $\Xi_{\lambda,Q} \cap \varrho W$  andererseits sollte ungefähr gleich  $M_{\max}(\varrho W)$ , definiert wie in (6.5), sein. Denn die beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements von  $\Xi_{\lambda,Q}$  sind wie bereits erwähnt Polytope. Die „Löcher“, d.h. die beschränkten Zusammenhangskomponenten sind also gerade diejenigen Polytope, welche ganz in  $\varrho W$  liegen. Zählt man also die lexikographisch größten Ecken, so zählt man auch mögliche Polytope, welche den Rand von  $\varrho W$  schneiden. Dies ist ein typischer Randeffect und sollte asymptotisch keine Rolle spielen. In Heinrich, H. Schmidt und V. Schmidt (2005) wird beispielsweise eine entsprechende Aussage für stationäre Mosaik gezeigt. Für  $M_{\max}(\varrho W)$  können wir aber den zentralen Grenzwertsatz 6.8 aus dem letzten Kapitel verwenden.

**Satz 7.1** *Im Fall  $d = 2$  gilt unter der Voraussetzung  $\mathbb{E}R_0^2 < \infty$  die asymptotische Normalität*

$$\varrho^{-3/2} \left( \chi(\Xi_{\lambda,Q} \cap \varrho W) + \frac{\gamma_2}{2} \nu_2(\varrho W) \right) \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_\chi^2(W)) \quad (7.1)$$

mit  $\gamma_2$  wie in Satz 6.1 und  $\sigma_\chi^2(W) = \sigma_{\max}^2(W)$  wie in Korollar 6.8. Ist die Richtungsverteilung stetig, so gilt

$$\sigma_\chi^2(W) = 4\lambda^3 \left( \frac{1}{2}(1-p) \mathbb{E} \bar{\nabla}_{2,1}(U_0) \right)^2 \mathbb{E} \left[ \bar{\gamma}_W(U_0) \left( \frac{\bar{\nabla}_{2,1}(U_0)}{\mathbb{E} \bar{\nabla}_{2,1}(U_0)} - \lambda R_0 \right)^2 \right] \quad (7.2)$$

mit  $\bar{\gamma}_W$  und  $\bar{\nabla}_{2,1}$  wie in Abschnitt 6.4.



**Beweis.** Es sei

$$N_\varrho = \#\{(X, U, R) \in s(\Pi_{\lambda, Q}) : Z(X, U, R) \cap \varrho W \neq \emptyset\}$$

die Anzahl der Zylinder, welche  $\varrho W$  schneiden. Um den Erwartungswert zu bestimmen, beschreiben wir ausnahmsweise die Richtung mittels Matrizen. Dabei sei  $\widehat{Q}$  das Bildmaß von  $Q$  unter der Abbildung, welche jedem Einheitsvektor  $u$  die eindeutig bestimmte Matrix  $\theta_u \in \text{SO}_{d, d-1}$  mit  $\theta_u e_1 = u$  zuordnet. Weil  $W$  konvex ist folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_\varrho &= \mathbb{E}\#\{(X, U, R) \in s(\Pi_{\lambda, Q}) : Z(X, U, R) \cap \varrho W \neq \emptyset\} \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{(X, U, R) \in s(\Pi_{\lambda, Q})} \mathbf{1}(Z(X, U, R) \cap \varrho W \neq \emptyset)\right] \\ &= \lambda \int_{\text{SO}_{d, d-1} \times [0, \infty)} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}(Z(x, \theta, r) \cap \varrho W \neq \emptyset) dx \widehat{Q}(d(\theta, r)) \\ &= \lambda \int_{\text{SO}_{d, d-1} \times [0, \infty)} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}(x \in [-r, r] \oplus \pi_1(-\varrho \theta^T W)) dx \widehat{Q}(d(\theta, r)) \\ &= \lambda \mathbb{E}\nu_1([-R_0, R_0] \oplus \pi_1(-\varrho \Theta_0^T W)) \\ &= \lambda(\mathbb{E}\nu_1([-R_0, R_0]) + \mathbb{E}\nu_1(\pi_1(-\varrho \Theta_0^T W))) \\ &= 2\lambda \mathbb{E}R_0 + \varrho \lambda \mathbb{E}\nu_{U_0}(\pi_{U_0} W). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also  $\mathbb{E}N_\varrho \in \mathcal{O}(\varrho)$ . Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W$  ist aber höchstens so groß, wie die Anzahl aller Zylinder, welche  $\varrho W$  schneiden, also  $b_0(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) \leq N_\varrho$ , und deshalb

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\varrho^{-3/2} b_0(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W)\right] = 0.$$

Seien wieder  $Z_i, i \geq 1$ , die abgeschlossenen Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_{\lambda, Q}^c$  und  $Z = \sum_{i \geq 1} \delta_{Z_i}$  der hiermit gebildete Partikelprozess. Wir haben bereits in Abschnitt 3.2 festgestellt, dass die  $Z_i$  für alle  $i \geq 1$  mit Wahrscheinlichkeit 1 regulär abgeschlossen sind. Es gilt dann

$$(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W)^c = \bigsqcup_{i \geq 1: \text{int } Z_i \subset \varrho W} \text{int } Z_i \sqcup \left( \bigsqcup_{i \geq 1: \text{int } Z_i \cap \partial(\varrho W) \neq \emptyset} (\text{int } Z_i \cup \varrho W^c) \right) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

wobei  $\partial A$  den Rand einer Menge  $A$  bezeichnet. Außerdem ist wegen der Stationarität  $\text{int } Z_i \subset \varrho W \Leftrightarrow Z_i \subset \varrho W$  und  $\text{int } Z_i \cap \partial(\varrho W) \neq \emptyset \Leftrightarrow Z_i \cap \partial(\varrho W) \neq \emptyset$ ,  $\mathbb{P}$ -fast sicher. Dies hat für die Anzahl der beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements

$$b_1(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) = \#\{i \geq 1 : Z_i \subset \varrho W\} = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \subset \varrho W) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

zur Folge. Zum Zählen der Polytope, welche vollständig in  $\varrho W$  liegen, ordnen wir jedem Polytope sein lexikographisches Maximum (also die lexikographisch größte Ecke) zu und erhalten so den Punktprozess  $M_{\max}$  wie in Gleichung (6.5) definiert. Im allgemeinen ist nun  $\sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \subset \varrho W) \leq M_{\max}(\varrho W)$ , denn auch die lexikographischen Maxima von Polytopen, die den Rand von  $\varrho W$  schneiden, könnten noch in  $\varrho W$  liegen. Das heißt es gilt

$$\begin{aligned} M_{\max}(\varrho W) &= \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \subset \varrho W) + \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \cap \partial(\varrho W) \neq \emptyset) \mathbf{1}(\text{lex max}(Z_i) \in \varrho W) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \subset \varrho W) + \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \cap \partial(\varrho W) \neq \emptyset) \quad \text{P-fast sicher} \end{aligned}$$

und dies zieht

$$0 \leq M_{\max}(\varrho W) - b_1(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) \leq \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \cap \partial(\varrho W) \neq \emptyset) \quad \text{P-fast sicher}$$

nach sich. Die Anzahl der Polytope, welche den Rand von  $\varrho W$  schneiden, ist aber sicherlich kleiner als die Anzahl der Schnittpunkte von  $\partial(\varrho W)$  mit den die Zylinder begrenzenden Geraden. Hiervon gibt es höchstens  $4N_\varrho$  Stück, also

$$\sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(Z_i \cap \partial(\varrho W) \neq \emptyset) \leq \#\{\partial Z(X, U, R) \cap \partial(\varrho W) : (X, U, R) \in \Pi_{\lambda, Q}\} = 4N_\varrho$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 und dies ergibt

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \varrho^{-3/2} \left( M_{\max}(\varrho W) - b_1(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) \right) \right| = 0.$$

Die Behauptung folgt schließlich aus

$$\begin{aligned} \varrho^{-3/2} \left( \chi(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) + \frac{\gamma_2}{2} \nu_2(\varrho W) \right) &= \varrho^{-3/2} b_0(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) \\ &\quad - \varrho^{-3/2} \left( b_1(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) - M_{\max}(\varrho W) \right) \\ &\quad - \varrho^{-3/2} \left( M_{\max}(\varrho W) - \frac{\gamma_2}{2} \nu_2(\varrho W) \right) \end{aligned}$$

zusammen mit dem Satz von Slutsky und Satz 6.8. □

Der obige Beweis zeigt außerdem

$$\varrho^{-3/2} \left| \mathbb{E} \chi(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) + \frac{\gamma_2}{2} \nu_2(\varrho W) \right| \in \mathcal{O}(\varrho^{-1/2}),$$

so dass man  $\frac{\gamma_2}{2} \nu_2(\varrho W)$  in (7.1) auch durch  $-\mathbb{E} \chi(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W)$  ersetzen kann.

---

**Korollar 7.2** *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 7.1 gilt*

$$\varrho^{-3/2} \left( \chi(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) - \mathbb{E}\chi(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) \right) \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_\chi^2(W)).$$

Leider scheint es im allgemeinen Fall keine übersichtliche Formel für den Erwartungswert  $\mathbb{E}\chi(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W)$  zu geben. In der Arbeit von Hoffmann (2009) finden sich zwar Formeln für Quermaßdichten von Poisson-Zylinderprozessen, diese lassen sich im allgemeinen Fall jedoch nur bis zu einem bestimmten Grad vereinfachen. Es entsteht hier also die Situation, dass ein Grenzwertsatz für eine Zufallsgröße existiert, für die aber der Erwartungswert nicht vereinfacht darstellbar ist. Im Fall, dass  $U_0$  und  $R_0$  unabhängig sind und die Richtungsverteilung rotationsinvariant, also die Gleichverteilung auf  $S^1$  ist, ergibt sich aber aus Tabelle (7.3.) und Formel (7.4) von Davy (1978) die Formel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\chi(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) &= -\frac{1}{\pi} \lambda^2 (1-p) \nu_2(\varrho W) + \frac{1}{\pi} \lambda (1-p) S(\varrho W) + p \\ &= -\varrho^2 \frac{\gamma_2}{2} \nu_2(W) + \frac{\varrho}{\pi} \lambda (1-p) S(W) + p, \end{aligned}$$

wobei  $S$  den Oberflächeninhalt, bzw. in diesem Fall den Umfang bezeichnet. Die asymptotische Varianz ist dann ferner

$$\sigma_\chi^2(W) = 4\lambda^3 (1-p)^2 \frac{1}{\pi^2} I_2(W) \mathbb{E}[(1 - \lambda R_0)^2].$$

Zum Vergleich zitieren wir an dieser Stelle noch die zentralen Grenzwertsätze für das Volumen  $\nu_2$  und die Oberfläche  $S$ , welche von Heinrich und Spiess (2013) gefunden wurden. Es gilt

$$\varrho^{-3/2} \left( \nu_2(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) - \mathbb{E}\nu_2(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) \right) \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_V^2(W))$$

und

$$\varrho^{-3/2} \left( S(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) - \mathbb{E}S(\Xi_{\lambda, Q} \cap \varrho W) \right) \xrightarrow[\varrho \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma_S^2(W)).$$

Die asymptotischen Varianzen sind dabei im Falle einer stetigen Richtungsverteilung durch

$$\sigma_V^2(W) = 4\lambda(1-p)^2 \mathbb{E}[\bar{\gamma}_W(U_0) R_0^2]$$

und

$$\sigma_S^2(W) = 4\lambda(1-p)^2 \mathbb{E}[\bar{\gamma}_W(U_0)(1 - 2\lambda R_0)^2]$$

gegeben. Die Struktur der asymptotischen Varianz  $\sigma_\chi^2(W)$  ist im Fall einer stetigen Richtungsverteilung also sehr ähnlich (vgl. (7.2)). Allerdings ist die Abhängigkeit von  $U_0$  durch das Vorhandensein die Funktion  $\bar{\nabla}_{2,1}$  in gewisser Weise „stärker“. Abgesehen davon, dass die Potenz von  $\lambda$  immer um 2 ansteigt, kann ansonsten keine Systematik festgestellt werden.

## Kommentare und offene Fragen

Der Beweis von Satz 7.1 wird im Wesentlichen durch die hohe Normierung mit  $\varrho^{-3/2}$  ermöglicht, welche durch die starken weitreichenden Abhängigkeiten bedingt ist. Diese starken Abhängigkeiten stellen hier also in gewisser Weise einen Vorteil dar.

Es muss natürlich die Frage nach Dimensionen  $d > 2$  gestellt werden. Da im Beweis teilweise etwas anschaulich argumentiert wird, ist allerdings nicht ganz klar, wie dieser verallgemeinert werden kann. Für die Anzahl der Zusammenhangskomponenten kann zwar wieder genauso argumentiert werden, es treten nun aber verschiedene Arten von „Löchern“ auf. Im Fall  $d = 3$  unterscheidet man anschaulich Ringlöcher, oder Tunnels (Löcher der Dimension 2) und Kavitäten, oder Hohlräume (Löcher der Dimension 3), wobei aber zu beachten ist, dass dies bereits anschauliche Interpretationen sind. Die jeweiligen Anzahlen sind gerade die Betti-Zahlen  $b_1$  bzw.  $b_2$ . Die Kavitäten lassen sich wieder mit den lexikographisch größten Ecken zählen und die Anzahl der Ringlöcher sollte asymptotisch keine Rolle spielen, denn diese lässt sich zumindest rein anschaulich mit der Anzahl aller  $Z_i$ , welche den Rand von  $\varrho W$  schneiden und diese wiederum mit  $2^3 N_\varrho$  abschätzen. Für den allgemeinen Fall wäre nun also eine passende formale Beschreibung der Betti-Zahlen nötig, welche uns erlaubt diese abzuschätzen. Eine solche konnte jedoch nicht gefunden werden. Insgesamt besteht aber kaum ein Zweifel, dass die Grenzwertsätze für die Euler-Poincaré-Charakteristik analog wie oben, d.h. mit der jeweiligen Intensität und asymptotischen Varianz, für beliebige Dimensionen gültig sind.

Die obige Beweismethode ist offenbar zugeschnitten auf den Fall von stationären Poisson- $(d - 1)$ -Zylinderprozessen. Die Frage nach einem zentralen Grenzwertsatz für die Euler-Poincaré-Charakteristik von  $\Xi_{\lambda, Q}^{d, k} \cap \varrho W$  mit einem beliebigen  $1 \leq k \leq d - 1$  bleibt deshalb offen.

Trotzdem stehen nun abschließend im ebenen Fall zentrale Grenzwertsätze für alle inneren Volumina zur Verfügung.

## 8 Stationäre Poisson- $(d - 1)$ -Zylinderprozesse als Mosaik mit dicken Rändern

Wir wollen in diesem Kapitel die geometrischen Eigenschaften des abgeschlossenen Komplements  $\text{cl}(\Xi_{\lambda, Q}^c)$  untersuchen. Dazu fassen wir  $\text{cl}(\Xi_{\lambda, Q}^c)$  als ein zufälliges Mosaik mit „dicken Rändern“ auf.

Alle in diesem Kapitel auftretenden Richtungsverteilungen seien außerdem nicht degeneriert, d.h. sie seien nicht auf einer Großsphäre konzentriert, siehe Abschnitt 3.2.

### 8.1 Zufällige Mosaik und deren Zellen

Wir definieren zunächst zufällige Mosaik im eigentlich Sinne, wie in Schneider und Weil (2000, Abschnitt 6.1), wobei wir uns auf stationäre Mosaik beschränken werden und nicht zu sehr ins Detail gehen.

**Definition 8.1** *Ein stationäres zufälliges Mosaik ist ein stationärer Partikelprozess  $\sum_{i \geq 1} \delta_{\Xi_i}$ , welcher jeweils  $\mathbb{P}$ -fast sicher die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. Die  $\Xi_i$ ,  $i \geq 1$ , sind abgeschlossene Polytope.
2.  $\text{int}(\Xi_i) \cap \text{int}(\Xi_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$ .
3.  $\bigcup_{i \geq 1} \Xi_i = \mathbb{R}^d$ .

*Die einzelnen Polytope werden auch Zellen des Mosaiks genannt.*

Die Untersuchung eines zufälligen stationären Mosaiks kann nun auf einer globalen und einer lokalen Ebene erfolgen. Auf globaler Ebene kann man beispielsweise die erzeugten Schnittpunkte betrachten oder die Anzahl aller Zellen mit einer bestimmten Zahl von Ecken. Auf lokaler Ebene betrachtet man die geometrischen Eigenschaften der einzelnen Zellen. Um diese zu untersuchen kann man deterministisch eine dieser Zellen auswählen oder ein gewisses Mittel aller Zellen betrachten. Für die erste Möglichkeit kann man beispielsweise diejenige Zelle wählen, welche den Nullpunkt enthält. Die zweite Möglichkeit führt auf den Begriff der typischen Zelle.

**Definition 8.2** *Es sei  $\Psi = \sum_{i \geq 1} \delta_{\Xi_i}$  ein stationäres zufälliges Mosaik. Weiter sei  $c$  eine Zentrumsfunktion und  $\Psi_c = \sum_{i \geq 1} \delta_{(c(\Xi_i), \Xi_i - c(\Xi_i))}$  der hiermit gewonnene markierte Punktprozess mit Markenverteilung  $\widehat{P}$ , siehe Ende von Abschnitt 2.1.*

1. Eine zufällige abgeschlossene Menge  $\widehat{Z}$  mit Verteilung  $\widehat{P}$  heißt eine *typische Zelle des Mosaiks*.
2. Die  $\mathbb{P}$ -fast sicher eindeutig bestimmte Zelle, welche den Nullpunkt enthält bezeichnen wir als *Nullpunktzelle*, formal ist dies  $\widehat{Z}_0 = \bigcup_{i \geq 1} \mathbf{1}(0 \in \text{int } \Xi_i) \Xi_i$ .

Wie bereits am Ende von Abschnitt 2.1 bemerkt wurde, hängt die Markenverteilung translativ von der Zentrumsfunktion ab. Um dies zu umgehen wird die Verteilung der typischen Zelle manchmal auf einem Quotientenraum definiert, so dass man eine „Verteilung bis auf Translation“ erhält (siehe Matheron (1975, S. 168 ff.)), welche nicht mehr von der Zentrumsfunktion abhängt. Diese Verteilung ist dann eindeutig bestimmt, wenn man die Erwartungswerte  $\mathbb{E}h(\widehat{Z})$  für alle translationsinvarianten, messbaren Funktionen  $h : \mathcal{C}_d \rightarrow [0, \infty)$  kennt. Da man aber ohnehin meist nur an den geometrischen Eigenschaften interessiert ist, ist die Kenntnis dieser Funktionale auch ausreichend. Die typische Zelle kann alternativ auch als eine Art ergodisches Mittel aller Zellen eingeführt werden und daher auch die Bezeichnung, siehe z.B. Calka (2013).

Ein wichtiges Beispiel sind die durch stationäre Poisson-Hyperebenenprozesse bzw. deren Vereinigungsmengen induzierten Mosaik, d.h. die abgeschlossenen Hüllen der Zusammenhangskomponenten, welche das Komplement der Vereinigungsmenge eines stationären Poisson-Hyperebenenprozesses bilden. Die Nullpunktzelle  $\widehat{Z}_0$  und die typische Zelle  $\widehat{Z}$  in diesem Modell wurden und werden auch aktuell intensiv untersucht, siehe zum Beispiel Matheron (1975, Kapitel 6), Schneider und Weil (2000, Abschnitt 6.3), Calka (2013) sowie Hug (2013) und die dortigen Literaturangaben.

## 8.2 Durch stationäre Poisson- $(d - 1)$ -Zylinderprozesse induzierte Zellen

Der stationäre Partikelprozess  $Z = \sum_{i \geq 1} \delta_{Z_i}$ , gebildet aus abgeschlossenen Zusammenhangskomponenten von  $\Xi_{\lambda, Q}^c$ , ist nun im Fall  $\mathbb{P}(R_0 > 0) > 0$  kein Mosaik im eigentlichen Sinn, denn offenbar ist die 3. Bedingung in Definition 8.1 in diesem Fall nicht erfüllt. Trotzdem können wir eine typische Zelle  $\widehat{Z}$  analog wie oben definieren. Dazu wählen wir als Zentrumsfunktion das lexikographische Maximum.

Die Definition einer Nullpunktzelle ist allerdings komplizierter, da der Nullpunkt auch innerhalb von  $\Xi_{\lambda, Q}$  liegen kann und zwar gerade mit Wahrscheinlichkeit  $p = 1 - \exp\{-2\lambda ER_0\}$ . Wir müssen also auf das Ereignis  $0 \notin \Xi_{\lambda, Q}$  bedingen. Dann gibt es wieder ein eindeutig bestimmtes Polytop  $Z_0$  mit  $0 \in Z_0$ . Genauer definiert man diese bedingte zufällige abgeschlossene Menge wie folgt.

Wir definieren zunächst die zufällige abgeschlossene Menge  $Z'_0 \sim P'$  durch

$$Z'_0 := \begin{cases} \bigcup_{i \geq 1} \mathbf{1}(0 \in \text{int } Z_i) Z_i & \text{falls } 0 \notin \Xi_{\lambda, Q} \\ \emptyset & \text{falls } 0 \in \Xi_{\lambda, Q} \end{cases}$$

und hiermit  $Z_0$  als ZAM mit Verteilung

$$P_0(\mathcal{A}) := \frac{P'(\mathcal{A} \cap \{F \in \mathcal{F}_d : 0 \in F\})}{P'(\{F \in \mathcal{F}_d : 0 \in F\})}, \quad (8.1)$$

für alle  $\mathcal{A} \in \sigma_f$ . Man beachte dabei

$$P'(\{F \in \mathcal{F}_d : 0 \in F\}) = \mathbb{P}(0 \notin \Xi_{\lambda, Q}) = 1 - p > 0.$$

Für Details zur Theorie bedingter ZAM siehe auch Matheron (1975, S. 36-37). Da in unserem Fall das Ereignis  $\{F \in \mathcal{F}_d : 0 \in F\}$ , auf welches bedingt wird, eine positive Wahrscheinlichkeit hat, wird diese aber nicht zwangsläufig benötigt.

Eine intuitiv naheliegende Vermutung ist nun, dass die Verteilung von  $\widehat{Z}$  bzw.  $Z_0$  von der Dicke der Zylinder, also von  $R_0$  abhängt. Insbesondere sollten  $\widehat{Z}$  bzw.  $Z_0$  in einem gewissen Sinne „kleiner“ sein als die entsprechende typische Zelle bzw. Nullpunktzelle eines Poisson-Hyperebenenmosaiks mit gleicher Intensität und Richtungsverteilung. Andererseits wird von Spiess (2012, S. 27) beispielsweise festgestellt, dass die lineare und sphärische Kontaktverteilung im ebenen Fall nicht von der Breite  $R_0$  abhängt. Überraschenderweise ist auch hier der Fall. Dieses Ergebnis findet sich bereits bei Miles (1972, S. 254) und Miles (1974, S. 219), allerdings jeweils ohne Beweis.

**Satz 8.1** *Die Verteilung  $P_0$  von  $Z_0$  hängt nicht von der Verteilung von  $R_0$  ab.*

**Beweis.** Wie bereits in Abschnitt 3.2 bemerkt wurde, sind die  $Z_i$  für alle  $i \geq 1$  mit Wahrscheinlichkeit 1 regulär abgeschlossen. Damit gilt dies auch für die bedingte ZAM  $Z_0$ . Die Verteilung von  $Z_0$  wird deshalb nach Molchanov (2005, S. 63) eindeutig bestimmt durch das Inklusionsfunktional  $I(K) := P_0(\{F \in \mathcal{F}_d : K \subseteq F\})$ , wobei  $K$  eine endliche Menge ist.

Es genügt also zu zeigen, dass dieses Funktional nicht von der Verteilung von  $R_0$  abhängt. Nach der Definition von  $P_0$  (8.1) folgt zunächst

$$\begin{aligned} I(K) &= P_0(\{F \in \mathcal{F}_d : K \subseteq F\}) \\ &= \frac{1}{1-p} P'(\{F \in \mathcal{F}_d : K \subseteq F\} \cap \{F \in \mathcal{F}_d : 0 \in F\}) \\ &= \frac{1}{1-p} \mathbb{P}(K \subseteq Z'_0, 0 \notin \Xi_{\lambda, Q}). \end{aligned}$$

Da die ZAM  $Z'_0$  unter der Bedingung  $0 \notin \Xi_{\lambda, Q}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 kompakt und konvex ist sowie den Nullpunkt enthält, ist  $K \subseteq Z'_0 \Leftrightarrow \text{conv}(K \cup \{0\}) \subseteq Z'_0$ , wobei  $\text{conv}$  die konvexe Hülle bezeichnet. Wir müssen also zeigen, dass  $I(C)$  für alle  $C \in \mathcal{C}_d$  mit  $0 \in C$  nicht von der Verteilung von  $R_0$  abhängt. Für solche Mengen ist aber  $C \subseteq Z'_0 \Leftrightarrow \text{int}(C) \cap \Xi_{\lambda, Q} = \emptyset \Leftrightarrow C \cap \Xi_{\lambda, Q} = \emptyset$   $\mathbb{P}$ -fast sicher, wegen der Stationarität von  $\Xi_{\lambda, Q}$ , und damit folgt

$$\mathbb{P}(C \subseteq Z'_0, 0 \notin \Xi_{\lambda, Q}) = \mathbb{P}(C \cap \Xi_{\lambda, Q} = \emptyset) = 1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}}(C).$$

Zur Vereinfachung des Kapazitätsfunktional beschreiben wir die Richtung wieder mit Hilfe von Matrizen. Weil  $C$  konvex ist, erhalten wir aus (3.2) dann

$$\begin{aligned} 1 - T_{\Xi_{\lambda, Q}}(C) &= \exp\{-\lambda \mathbb{E} \nu_1([-R_0, R_0] \oplus \pi_1(-\Theta_0^T C))\} \\ &= \exp\{-2\lambda \mathbb{E} R_0 + \mathbb{E} \nu_1(\pi_1(-\Theta_0^T C))\} \\ &= (1-p) \exp\{-\lambda \mathbb{E} \nu_1(\pi_1(-\Theta_0^T C))\} \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$I(C) = \exp\{-\lambda \mathbb{E} \nu_1(\pi_1(-\Theta_0^T C))\} \quad \text{für alle } C \in \mathcal{C}_d.$$

Also hängt  $I(C)$  und somit auch die Verteilungen von  $Z_0$  nicht von der Verteilung von  $R_0$  ab.  $\square$

Die entsprechende Aussage für die typische Zelle ist gemäß ihrer Natur nicht mehr ganz so exakt. Wir gehen dabei ähnlich vor wie Schneider und Weil (2000, S. 252).

**Satz 8.2** *Sei  $h : \mathcal{C}_d \rightarrow [0, \infty)$  eine messbare, translationsinvariante Funktion. Dann hängt  $\mathbb{E}h(\widehat{Z})$  nicht von der Verteilung von  $R_0$  ab.*

**Beweis.** Wir definieren die Zentrumsfunktion  $c : \mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{R}^d$  als das lexikographische Maximum und hiermit  $Z_c = \sum_{i \geq 1} \delta_{(c(Z_i), Z_i - c(Z_i))}$ . Insbesondere ist  $\sum_{i \geq 1} \delta_{c(Z_i)} = M_{\max}$ , mit  $M_{\max}$  wie in Kapitel 6, und die Intensität von  $Z_c$  ist gerade  $\frac{1}{d!} \gamma_d$  mit  $\gamma_d$  aus Satz 6.1. Die Verteilung der typischen Marke von  $Z_c$ , also die Verteilung von  $\widehat{Z}$  bezeichnen wir mit  $\widehat{P}$ . Mit der Campbell-Mecke-Formel (2.3) und der Translationsinvarianz von  $h$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h(Z_0) &= \mathbb{E}[h(Z'_0) \mid 0 \notin \Xi_{\lambda, Q}] \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} \mathbf{1}(0 \in \text{int } Z_i) h(Z_i)\right]}{\mathbb{P}(0 \notin \Xi_{\lambda, Q})} \\ &= \frac{1}{1-p} \mathbb{E}\left[\sum_{(X, \Xi) \in s(Z_c)} h(X + \Xi) \mathbf{1}(0 \in X + \Xi)\right] \\ &= \frac{\gamma_d}{d!(1-p)} \int \int_{\mathcal{K}'_d \mathbb{R}^d} h(K) \mathbf{1}(0 \in x + K) dx \widehat{P}(dK) \\ &= \frac{\gamma_d}{d!(1-p)} \mathbb{E}[h(\widehat{Z}) \nu_d(\widehat{Z})]. \end{aligned}$$

Mit  $h$  ist auch  $\mathcal{C}_d \ni C \mapsto h(C)/\nu_d(C)$  translationsinvariant und wir erhalten aus der obigen Gleichung

$$\mathbb{E}h(\widehat{Z}) = \frac{d!(1-p)}{\gamma_d} \mathbb{E}\left[\frac{h(Z_0)}{\nu_d(Z_0)}\right].$$



Nach Satz 8.1 hängt  $\mathbb{E}\left[\frac{h(Z_0)}{\nu_d(Z_0)}\right]$  nicht von der Verteilung von  $R_0$  ab und

$$\frac{\gamma_d}{d!(1-p)} = \frac{\lambda^d}{d!} \int_{(S^{d-1})^d} \nabla_d(u_1, \dots, u_d) Q_0(du_1) \cdots Q_0(du_d)$$

ebenfalls nicht. Dies beweist die Behauptung.  $\square$

Insbesondere entsprechen die Nullpunktzelle und die typische Zelle induziert durch den stationären Poisson- $(d-1)$ -Zylinderprozess also der bekannten Nullpunktzelle bzw. typischen Zelle von stationären Poisson-Hyperebenenmosaiken, so dass alle hierfür bekannten Eigenschaften auch für die Nullpunktzelle und die typische Zelle des verallgemeinerten Modells gelten.

Ähnliche Ergebnisse wie oben finden sich ferner auch bei Matheron (1975, S. 166 ff.). Genauer wird für die Nullpunktzelle  $\widehat{Z}_0$  eines stationären Poisson-Hyperebenenmosaiks gezeigt, dass

$$\mathbb{P}(K' \subseteq \widehat{Z}_0 \ominus (-K) | 0 \in \widehat{Z}_0 \ominus (-K)) = \mathbb{P}(K' \subseteq \widehat{Z}_0),$$

wobei  $A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$  und  $K, K' \in \mathcal{C}_d$ ,  $0 \in K, K'$ . Diese Eigenschaft ist sogar charakterisierend für die Nullpunktzelle eines Poisson-Hyperebenenmosaiks. Ein analoges Ergebnis findet sich dann auch für die typische Zelle.

## Kommentare und offene Fragen

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind vergleichsweise überraschend, weil sie der intuitiven Vorstellung widersprechen. Da die typische Zelle als Mittel aller Zellen gedeutet werden kann, können wir Satz 8.2 vielleicht so verstehen, dass durch die „dicken“ Hyperebenen zwar „kleinere Zellen“, aber auch insgesamt weniger Zellen, erzeugt werden. Im Mittel bleibt die Verteilung dann gleich.

Die obigen Ergebnisse dürfen ferner keinesfalls so verstanden werden, dass der Partikelprozess  $Z$  bzw. dessen Verteilung nicht von  $R_0$  abhängt. Zum Beispiel hängt die Intensität  $\gamma_d$  von  $Z$  nach Kapitel 6 sehr wohl von  $R_0$  ab.

Die Interpretation als Mosaik mit „dicken“ Rändern ist möglicherweise auch für die Anwendung interessant. Redenbach und Liebscher (2015) beschreiben beispielsweise Aluminiumschäume mittels „verdickter“ Voronoi- und Laguerre-Mosaik. Ähnliche Anwendungen sind vielleicht auch für „verdickte“ Poisson-Hyperebenenmosaik denkbar.



# Literaturverzeichnis

- Bauer, A. (2009). „Zentrale Grenzwertsätze für nichtpoissonsche ebene Geradenprozesse“. Diplomarbeit. Augsburg: Universität Augsburg (siehe S. 94).
- Bolthausen, E. (1982). „On the Central Limit Theorem for Stationary Mixing Random Fields“. In: *The Annals of Probability* 10 (4), S. 1047–1050 (siehe S. 66).
- Bräu, C. und L. Heinrich (2015). „Multivariate Poisson Distribution Associated with Boolean Modells“. Eingereicht. (siehe S. 2).
- Calka, P. (2013). „Asymptotic methods for random tessellations“. In: *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*. Hrsg. von E. Spodarev. Springer Verlag (siehe S. 102).
- Daley, D. J. und D. Vere-Jones (1998). *An Introduction to the Theory of Point Processes*. New York, NY: Springer New York (siehe S. 20, 24, 94).
- Davy, P. (1978). „Stereology. A Statistical Viewpoint“. Dissertation. Canberra: Australian National University (siehe S. 2, 13, 27, 99).
- Elstrodt, J. (2005). *Maß- und Integrationstheorie*. 4., korrigierte Aufl. Springer-Lehrbuch : Grundwissen Mathematik. Berlin: Springer.
- Gruber, P. M. (1983). *Convexity and its applications*. Basel: Birkhäuser (siehe S. 41).
- (2007). *Convex and discrete geometry*. Bd. 336. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer (siehe S. 95).
- Hadwiger, H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Bd. 93. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer (siehe S. 95).
- Harding, E. F. und D. Kendall, Hrsg. (1974). *Stochastic geometry. A tribute to the memory of Rollo Davidson*. Wiley series in probability and mathematical statistics. London: Wiley.
- Heinrich, L. (1992). „On existence and mixing properties of germ-grain models“. In: *Statistics* 23 (3), S. 271–286 (siehe S. 20, 23).
- (2013). „Asymptotic Methods in Statistics of Random Point Processes“. In: *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*. Hrsg. von E. Spodarev. Springer Verlag (siehe S. 5, 20).
- Heinrich, L. und I. Molchanov (1999). „Central Limit Theorem for a Class of Random Measures Associated with Germ-Grain Models“. In: *Advances in Applied Probability* 31 (2), S. 283–314.
- Heinrich, L. und L. Muche (2008). „Second-order properties of the point process of nodes in a stationary Voronoi tessellation“. In: *Mathematische Nachrichten* 281 (3), S. 350–375 (siehe S. 44, 51).

- Heinrich, L., H. Schmidt und V. Schmidt (2005). „Limit Theorems for Stationary Tessellations with Random Inner Cell Structures“. In: *Advances in Applied Probability* 37 (1), S. 25–47 (siehe S. 96).
- (2006). „Central limit theorems for Poisson hyperplane tessellations“. In: *The Annals of Applied Probability* 16 (2), S. 919–950 (siehe S. 36, 51, 64).
- (2007). „Limit theorems for functionals on the facets of stationary random tessellations“. In: *Bernoulli* 13 (3), S. 868–891 (siehe S. 36).
- Heinrich, L. und M. Spiess (2009). „Berry–Esseen bounds and Cramér-type large deviations for the volume distribution of Poisson cylinder processes“. In: *Lithuanian Mathematical Journal* 49 (4), S. 381–398 (siehe S. 2, 13, 15).
- (2013). „Central limit theorems for volume and surface content of stationary Poisson cylinder processes in expanding domains“. In: *Advances in Applied Probability* 45 (2), S. 312–331 (siehe S. 1, 2, 13, 15, 20, 26, 57, 59–61, 94, 99).
- Hoffmann, L. M. (2009). „Mixed Measures of Convex Cylinders and Quermass Densities of Boolean Models“. In: *Acta Applicandae Mathematicae* 105 (2), S. 141–156 (siehe S. 99).
- Hug, D. (2013). „Random polytopes“. In: *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*. Hrsg. von E. Spodarev. Springer Verlag (siehe S. 102).
- Klenke, A. (2008). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2., korrigierte Aufl. Berlin: Springer (siehe S. 65, 66, 68).
- König, D. und V. Schmidt (1992). *Zufällige Punktprozesse. Eine Einführung mit Anwendungsbeispielen*. Teubner-Skripten zur mathematischen Stochastik. Stuttgart: Teubner (siehe S. 5, 94).
- Lanford, O. E. und D. Ruelle (1969). „Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics“. In: *Communications in Mathematical Physics* 13 (3), S. 194–215 (siehe S. 20).
- Matheron, G. (1975). *Random sets and integral geometry*. Wiley series in probability and mathematical statistics. New York: Wiley (siehe S. 2, 13, 16, 27, 36, 56, 102, 103, 105).
- McMullen, P. (1982). „The volume of certain convex sets“. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 91 (01), S. 91–97 (siehe S. 22).
- Mecke, K. und D. Stoyan, Hrsg. (2002). *Morphology of condensed matter. Physics and geometry of spatially complex systems*. Bd. 600. Physics and astronomy online library. Berlin: Springer (siehe S. 95).
- Miles, R. E. (1972). „The Random Division of Space“. In: *Advances in Applied Probability* 4, S. 243–266 (siehe S. 2, 103).
- (1974). „A synopsis of Poisson flats in Euclidean spaces“. In: *Stochastic geometry. A tribute to the memory of Rollo Davidson*. Hrsg. von E. F. Harding und D. Kendall. Wiley series in probability and mathematical statistics. London: Wiley (siehe S. 2, 13, 103).
- Molchanov, I. (2005). *Theory of random sets*. Probability and its applications. London: Springer (siehe S. 103).

- 
- (2013). „Foundations of stochastic geometry and theory of random sets“. In: *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*. Hrsg. von E. Spodarev. Springer Verlag (siehe S. 11).
  - Redenbach, C. und A. Liebscher (2015). „Asymptotic methods in statistics of random point processes“. In: *Stochastic geometry, spatial statistics and random fields. Models and algorithms*. Hrsg. von V. Schmidt. Bd. 2120. Lecture Notes in Mathematics 2120. Cham: Springer (siehe S. 105).
  - Schladitz, K. u. a. (2006). „Design of acoustic trim based on geometric modeling and flow simulation for non-woven“. In: *Computational Materials Science* 38 (1), S. 56–66 (siehe S. 1).
  - Schmidt, V., Hrsg. (2015). *Stochastic geometry, spatial statistics and random fields. Models and algorithms*. Bd. 2120. Lecture Notes in Mathematics. Cham: Springer (siehe S. 95).
  - Schneider, R. (1987). „Geometric Inequalities for Poisson Processes of Convex Bodies and Cylinders“. In: *Results in Mathematics* 11 (1-2), S. 165–185 (siehe S. 2).
  - (1993). *Convex bodies. The Brunn-Minkowski theory*. Bd. 44. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge: Cambridge (siehe S. 95).
  - Schneider, R. und W. Weil (1992). *Integralgeometrie*. Teubner-Skripten zur mathematischen Stochastik. Stuttgart: Teubner (siehe S. 25, 41, 63, 95).
  - (2000). *Stochastische Geometrie*. Teubner-Skripten zur mathematischen Stochastik. Stuttgart: Teubner (siehe S. 5, 10, 11, 18, 20, 23, 25–27, 36, 41, 50, 64, 69, 101, 102, 104).
  - Spiess, M. (2012). „Characteristics of Poisson Cylinder Processes and their Estimation“. Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. Dissertation. Ulm: Universität Ulm (siehe S. 2, 13, 15, 17, 57, 60, 61, 63, 103).
  - Spiess, M. und E. Spodarev (2011). „Anisotropic Poisson Processes of Cylinders“. In: *Methodology and Computing in Applied Probability* 13 (4), S. 801–819 (siehe S. 1, 2, 15).
  - Spodarev, E., Hrsg. (2013). *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*. Springer Verlag.
  - Stoyan, D., W. S. Kendall und J. Mecke (1995). *Stochastic geometry and its applications*. 2. ed. Wiley series in probability and statistics. Chichester: Wiley. 436 S. (siehe S. 47).
  - Weil, W. (1987). „Point processes of cylinders, particles and flats“. In: *Acta Applicandae Mathematicae* 9 (1-2), S. 103–136 (siehe S. 2).
  - (2007). *Stochastic Geometry*. Bd. 1892. Springer Berlin Heidelberg (siehe S. 47).



# Symbolverzeichnis

- $B_r^d$   $d$ -dimensionale Kugel in  $\mathbb{R}^d$  mit Radius  $r > 0$  und Mittelpunkt 0. 17
- $D_z$  Hilfsgröße für den Beweis von Satz 6.7. 69
- $E_k$   $\text{span}\{e_{d-k+1}, \dots, e_d\}$ . 13
- $G$  Funktion, welche eine abhängige Verdünnung beschreibt. 38
- $H(x, u)$  Hyperebene mit Normalenvektor  $u$  und Abstand  $x$  zum Nullpunkt. 17
- $H_{F_k;A}$  Hilfsgröße für den Beweis von Satz 6.7. 71
- $H_{F_k;A}^{j,I,J}$  Hilfsgröße für den Beweis von Satz 6.7. 71
- $N_F$  Punktprozess der verschobenen, sichtbaren Schnittpunkte. 38
- $N_{F_k;A}$  Hilfsgröße für den Beweis von Satz 6.7. 71
- $P_{\Psi_M}$  Verteilung des markierten Punktprozesses  $\Psi_M$ . 6
- $Q_0$  Richtungsverteilung eines Poisson-Zylindermodells oder Zylinderprozesses. 15
- $R_0^{(\varrho)}$  Abgeschnittene Variante von  $R_0$ . 67
- $R_{F_k;A}$  Hilfsgröße für den Beweis von Satz 6.7. 71
- $S^{d-1}$  Einheitskugel in  $\mathbb{R}^d$ . 16
- $T_{\Xi}$  Kapazitätsfunktional einer zufälligen abgeschlossenen Menge  $\Xi$ . 11
- $X_F$  Verschobener Schnittpunkt. 37
- $Z(x, \theta, K)$  Zylinder mit Basis  $x + K \in \mathcal{K}_{d-k}$  und Richtung  $\theta$ . 14
- $Z(x, u, r)$   $(d-1)$ -Zylinder mit Abstand  $x$ , Normalenvektor  $u$  und Dicke  $r$ . 16
- $Z_0$  Nullpunktzelle eines stationären Mosaiks bzw. des Komplements eines  $(d-1)$ -Zylindermodells. 103
- $Z_{\lambda, Q_0}$  Assoziierter Zonoid. 41
- $\mathcal{B}(X)$  Borel- $\sigma$ -Algebra über einem topologischen Raum  $X$ . 5

- $\mathcal{C}_d$  System der konvexen, kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ . 11
- $\mathcal{F}_K$  Die „hitting sets“  $\{F \in \mathcal{F}_d : F \cap K \neq \emptyset\}$ . 11
- $\mathcal{F}_d$  System der abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ . 11
- $\mathcal{K}(E), \mathcal{K}'(E)$  System der kompakten und nicht-leeren kompakten Teilmengen eines Unterraums  $E$ . 27
- $\mathcal{K}_d, \mathcal{K}'_d$  System der kompakten bzw. der nicht leeren kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ . 10
- $\Lambda_{\Psi_{\mathbb{M}}}$  Intensitätsmaß des markierten Punktprozesses  $\Psi_{\mathbb{M}}$ . 7
- $M_{\text{Ecken}}$  Punktprozess aller Ecken eines Poisson- $(d-1)$ -Zylindermodells. 38
- $M_{\text{max}}$  Punktprozess der lexikographisch größten Ecken eines Poisson- $(d-1)$ -Zylindermodells. 38
- $\overline{\nabla}_{d,d-1}$  Abkürzung zur Darstellung der Asymptotischen Kovarianz. 53
- $\Pi_{\lambda,Q}$  Stationärer Poisson-Punktprozess auf  $\mathbb{R}$  mit Markenraum  $\mathbb{M} := S^{d-1} \times [0, \infty)$ , Intensität  $\lambda > 0$  und Markenverteilung  $Q$ . 17
- $\Pi_{\lambda,Q}^{d,k}$  Stationärer Poisson-Prozess auf  $\mathbb{R}^{d-k}$  mit Markenraum  $\mathbb{M}_{d,k} = \text{SO}_{d,k} \times \mathcal{K}'_{d-k}$ , Intensität  $\lambda$  und Markenverteilung  $Q$ . 15
- $\Psi_{\mathbb{M}}$  Markierter Punktprozess mit Markenraum  $\mathbb{M}$ . 6
- $\Xi_{\lambda,Q}$  Stationäres Poisson- $(d-1)$ -Zylindermodell. 17
- $\Xi_{\lambda,Q}^{d,k}$  Stationäres Poisson- $k$ -Zylindermodell. 15
- $\alpha_{\Psi_{\mathbb{M}}}^{(k)}$   $k$ -tes faktorielles Momentenmaß des markierten Punktprozesses  $\Psi_{\mathbb{M}}$ . 8
- $\alpha_{j,I,J}^{(2)}$  Komponenten der gemischten Momente  $\mathbb{E}N_{F_1}(A)N_{F_2}(B)$ . 44
- $\chi$  Euler-Poincaré-Charakteristik. 95
- cl Topologischer Abschluss einer Menge. 18
- $\gamma_K$  Mengenkovarianz. 16
- int Der innere Kern einer Menge. 18
- $\kappa_k$   $k$ -dimensionales Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^k$ . 42
- $\mathcal{E}_k^d$  Menge der  $k$ -dimensionalen affinen Unterräume des  $\mathbb{R}^d$ . 13
- $\mathcal{L}_k^d$  Menge der  $k$ -dimensionalen linearen Unterräume des  $\mathbb{R}^d$ . 13



- $\mathcal{N}_M$  Menge der lokal endlichen Zählmaße. 5
- $O_d$  Die orthogonale Gruppe. 13
- $SO_d$  Die spezielle orthogonale Gruppe. 6
- $SO_{d,k}$  Eine spezielle Teilmenge von  $SO_d$ . 13
- $\nabla_k(u_1, \dots, u_k)$  Volumen des durch die  $k$  Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_k \in S^{d-1}$  aufgespannten Parallelotops. 39
- $\mathcal{N}_m(\mu, \Sigma)$   $m$ -dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor  $\mu$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$ . 65
- $\nu_E$  Lebesgue-Maß auf einem festen Unterraum  $E$ . 7
- $\nu_d$  Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^d$ . 7
- $\oplus$  Minkowski-Addition. 14
- $\bar{\gamma}_W(u)$  Über  $u^\perp$  gemittelte Mengenkovarianz von  $W$ . 53
- $\partial$  Topologischer Rand einer Menge. 97
- $\pi_L$  Orthogonale Projektion auf einen linearen Unterraum  $L$ . 15
- $\pi_{d-k}$  Projektion auf die ersten  $d - k$  Komponenten. 15
- $Z$  Partikelprozess gebildet aus den abgeschlossenen Zusammenhangskomponenten von  $(\Xi_{\lambda,Q})^c$ . 18
- $\psi \llcorner A$  Einschränkung des Zählmaßes  $\psi$  auf  $A$ . 69
- $\gamma_d$  Intensität der verschobenen, sichtbaren Schnittpunkte. 39
- $\sigma_f$  Die Matheronsche  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{F}_K : K \in \mathcal{K}_d)$ . 11
- $\sigma_{F_1, F_2}^2(W)$  Asymptotische Kovarianz. 53, 62
- $\stackrel{d}{=}$  Verteilungsgleichheit. 6
- $\sum^\neq$  Summation über paarweise verschiedene Elemente. 8
- $\hat{Z}$  Typische Zelle eines stationären Mosaiks bzw. des Komplements eines  $(d-1)$ -Zylindermodells. 102
- $\xrightarrow{\mathbb{P}}$  Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. 65
- $\xrightarrow{d}$  Schwache Konvergenz der Verteilungsfunktionen. 65

$g_{I,J}$  Eine spezielle Permutation. 43

$h_{t,\varrho}$  Hilfsgröße für den Beweis von Satz 6.7. 72

$m_{j,I,J}$  Abkürzung zur Darstellung der gemischten Momente  $\mathbb{E}N_{F_1}(A)N_{F_2}(B)$ . 44

$s(\psi)$  Träger des Zählmaßes  $\psi$ . 5

$\mathbb{R}^d$   $d$ -dimensionaler euklidischer Raum. 5

# Index

- $k$ -Zylinder, 14
- Assoziierter Zonoid, 41
- Asymptotische Kovarianz, 53, 62
- Campbell-Mecke-Formel, 7
- einfach (Punktprozess), 6
- Einschränkung eines Zählmaßes, 69
- ergodisch, 19
- Erzeugendes Funktional, 9
- Euler-Poincaré-Charakteristik, 95
- faktorielles Momentenmaß
  - allgemeine Definition, 8
  - Poisson-Prozess, 9
- Formverteilung, 10
- gleichmäßig wachsend (Mengenfolge), 19
- Intensität
  - allgemeine Definition, 7
  - der verschobenen, sichtbaren Schnittpunkte, 39
  - der verschobenen, sichtbaren Schnittpunkte (isotrop), 42
- Intensitätsmaß
  - stationär, 7
- isotrop
  - Punktprozess, 6
  - zufällige abgeschlossene Menge, 11
- Kapazitätsfunktional
  - allgemeine Definition, 11
  - Poisson- $k$ -Zylindermodell, 15
- Kovarianzfunktion, 12
- Markenverteilung, 7
- Mecke-Slivnyak-Formel, 10
- Mengenvkovarianz, 16
- mischend, 19
- Mischungsbedingung
  - Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodell, 25
  - Poisson- $k$ -Zylindermodell, 23
- nicht degeneriert (Richtungsverteilung), 18
- Nullpunktzelle
  - des Komplements eines Poisson- $(d - 1)$ -Zylinderprozesses, 102
  - eines Mosaiks, 102
- Paarkorrelationsfunktion, 48
- Partikelprozess, 10
- Poisson- $k$ -Zylindermodell
  - in einem linearen Unterraum, 27
- Poisson- $k$ -Zylindermodell
  - allgemein, 15
  - Spezialfall  $k = d - 1$ , 17
- Poisson- $k$ -Zylinderprozess
  - allgemein, 15
  - Spezialfall  $k = d - 1$ , 17
- Punktprozess
  - aller Ecken eines Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodells, 38
  - allgemein, 6
  - der lexikographisch größten Ecken eines Poisson- $(d - 1)$ -Zylindermodells, 38

- der verschobenen, sichtbaren  
Schnittpunkte, 38
- Richtungsverteilung, 15
- schwach mischend, 19
- spezielle Lage, 25
- stationär
  - Punktprozess, 6
  - zufällige abgeschlossene Menge, 11
- Summenzerlegung, 43
- Träger (Zählmaß), 5
- typische Marke, 7
- typische Zelle
  - des Komplements eines Poisson-  
 $(d - 1)$ -Zylinderprozesses,  
102
  - eines Mosaiks, 102
- unabhängig markiert, 9
- Volumenanteil
  - allgemeine Definition, 12
  - Poisson- $(d - 1)$ -Zylinderprozess, 17
  - Poisson- $k$ -Zylindermodell, 15
- Zentrumsfunktion, 10
- zufällige abgeschlossene Menge, 11
- zufälliges Mosaik, 101

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Simulationen von Zylindermodellen in der Ebene und im Raum . . . . .	1
1.2	Mikroskopische Aufnahme eines gas diffusion layers . . . . .	2
2.1	Realisierungen von Poisson-Prozessen . . . . .	8
3.1	Konstruktion eines $k$ -Zylinders . . . . .	14
3.2	Konstruktion eines $(d - 1)$ -Zylinders . . . . .	16
3.3	Poisson-2-Zylinderprozess in $\mathbb{R}^3$ (beispielhaft) . . . . .	17
6.1	Ecken eines Zylinderprozesses in der Ebene . . . . .	35
6.2	Schnittpunkte erzeugt durch zwei Zylinder in der Ebene . . . . .	37
6.3	Simulation der nicht überdeckten Schnittpunkte . . . . .	39
6.4	Paarkorrelationsfunktionen für $N_0$ . . . . .	52
7.1	Simulation der lexikographisch größten Ecken . . . . .	96