MITTEILUNGEN

aus dem

MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgegeben von den Professoren
des Mathematischen Instituts der Universität Giessen

Geschäftsführung: D. Gaier, G. Pickert

Heft 120

CODEN: MMUGAU

GIESSEN 1976

SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS

VERALLGEMEINERTE KLINGENBERG-EBENEN

Dieter Jungnickel

Abstract

The classical combinatorial result on finite Hjelmslev planes is the theorem of KLEINFELD [6]. Recently, DRAKE and LENZ [3] observed that this theorem remains true for Klingenberg planes, a generalization of Hjelmslev planes. The purpose of this note is the determination of the minimal set of axioms required for the validity of Kleinfeld's theorem. We will see that the theorem is of almost universal validity.

To be more specific: An epimorphism $\varphi: \Pi \to \Pi'$ of incidence structures is called a Klingenberg epimorphism provided that

(K_0) For any points p,q of Π with $p^\varphi \neq q^\varphi$ and for any line G' of Π' with $p^\varphi, q^\varphi \; I \; G'$ there is precisely one line G of Π with $G^\varphi = G'$ and $p,q \; I \; G$.

(K_1) the dual of (K_0)

both hold. If Π' is an ordinary affine or projective plane, Π is called a Klingenberg plane, provided that Π' has order $\neq 2$, if it is affine.

By Kleinfeld's theorem, finite Klingenberg planes may be characterized by two natural numbers t and r in the following way: r is the order of Π' and t^2 is the cardinality of the pre-image of any point or line of Π' Furthermore for any flag (p,G) of Π, we have $t = \text{card}\,\{q: q^\varphi = p^\varphi \text{ and } qIG\}$ $= \text{card}\,\{H: H^\varphi = G^\varphi \text{ and } pIH\}$. Also $t \neq 1$ implies $r \leq t$.

Also a second important theorem (by DRAKE and LENZ, [3]) holds: If $t \neq 1$ and if r is the order of a projective plane, a (t,r)-Klingenberg-plane exists if and only if a set of $r-1$ mutually orthogonal Latin squares exists.

We show that given a Klingenberg epimorphism of arbitrary incidence structures the minimum set of axioms on Π' still sufficient for the validity of both Kleinfeld's and Drake-Lenz's theorem is

(L_0) Π' is connected, i.e. the equivalence relation generated by I has only one class.

(L_1) Each point of Π' is on at least 3 lines.

(L_2) the dual of (L_1)

These are surprisingly weak conditions; in this sense we called Kleinfeld's theorem almost universally valid.
We will call a triple (φ,Π,Π') satisfying (K_0), (K_1) and (L_0) to (L_2) a generalized Klingenberg plane. Finally we will apply some wellknown results on the existence of nets.

1. Präliminarien

Für alle geometrischen Grundlagen (Inzidenzstrukturen, Homomorphismen, Inzidenzmatrizen etc.) verweisen wir auf das Buch von DEMBOWSKI [2]. Auch die Schreibweise ist aus diesem Werk entnommen. Für kombinatorische Begriffe vergleiche man auch HALL [5]. $\varphi: \Pi \to \Delta$ sei ein Epimorphismus. Wir nennen Punkte p,q bzw. Geraden G,H von Π benachbart (p○q, G○H), wenn gilt $p^\varphi=q^\varphi$ bzw. $G^\varphi=H^\varphi$. Wir betrachten nur Epimorphismen mit der Eigenschaft, daß jede Fahne (p^φ,G^φ) von Δ mindestens eine Fahne (q,H) als Urbild besitzt. Bezeichnet man dann mit p' bzw. G' die Nachbarschaftsklasse von p bzw. G, so wird durch

(1) p' I G' genau dann, wenn gilt qIH für geeignete q○p und H○G.

eine zu Δ isomorphe Inzidenzstruktur Π' definiert. Daher können wir ab jetzt stets o.B.d.A. $\Delta = \Pi'$ annehmen.

2. Definition

Eine verallgemeinerte Klingenberg-Ebene (kurz: VK-Ebene) ist ein Tripel (φ,Π,Π'), wo $\varphi: \Pi \to \Pi'$ ein Epimorphismus von Inzidenzstrukturen ist und Π' wie in 1. beschrieben, so daß gilt:

(K_0) Zu je zwei Punkten p,q mit $p' \neq q'$ und zu jeder Geraden G' mit p',q' I G' gibt es stets eine Gerade H mit p,q I H und H'=G'.

(K_1) dual zu (K_0).

(L_0) Π' ist zusammenhängend, d.h. die von I erzeugte Äquivalenzrelation hat nur eine Äquivalenzklasse.

(L_1) $[p'] \geq 3$ für jeden Punkt p'.

(L_2) $[G'] \geq 3$ für jede Gerade G'.

Ist Π' sogar eine projektive oder affine Ebene, sprechen wir von einer Klingenberg-Ebene (kurz: K-Ebene).

Offenbar ist die duale Struktur einer VK-Ebene (K-Ebene) wieder eine VK-Ebene (K-Ebene). Im folgenden werden wir statt (φ,Π,Π') kurz Π schreiben.

3. Beispiele

Jede projektive oder affine Ebene ist eine VK-Ebene über sich selbst (bzgl. des identischen Automorphismus). Entsprechendes gilt für jede K-Ebene.
Wir geben noch zwei weniger triviale Beispiele; wir definieren 4x4-Matrizen wie folgt:

$$A := \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad B := \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad C := \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Dann sind

$$\begin{matrix} A & B & O & C & O & O & O \\ O & A & B & O & C & O & O \\ O & O & A & B & O & C & O \\ O & O & O & A & B & O & C \\ C & O & O & O & A & B & O \\ O & C & O & O & O & A & B \\ B & O & C & O & O & O & A \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} A & B & O & C & O & O & O \\ O & A & B & O & C & O & O \\ O & O & A & B & O & C & O \\ O & O & O & O & B & A & C \\ C & O & O & O & A & B & O \\ O & C & O & A & O & O & B \\ B & O & C & O & O & O & A \end{matrix}$$

Inzidenzmatrizen von VK-Ebenen, wobei die erste Matrix sogar eine K-Ebene (über der projektiven Ebene der Ordnung 2) darstellt, die zweite Matrix dagegen nicht.

4. Hilfssatz

Π sei VK-Ebene und (p',G') eine Fahne von Π'. Dann gibt es mindestens eine Gerade H mit pIH und $H'=G'$ und mindestens einen Punkt q mit qIG und $q'=p'$. Daher enthält jede Gerade von Π mindestens drei paarweise nicht benachbarte Punkte und dual.

Die Durchführung des einfachen Beweises sei dem Leser überlassen.

5. Definition

Π sei eine VK-Ebene. Wir setzen für jede Fahne (p,G):

(2) $t(p,G) := \operatorname{card}\{q\colon qIG \text{ und } q \circ p\}$

(3) $T(p,G) := \operatorname{card}\{H\colon pIH \text{ und } H \circ G\}$

Falls Π endlich ist, definieren wir weiter:

(4) $r+1 := \max(\{[p']: p\in\Pi\} \cup \{[G']: G\in\Pi\})$

6. Satz

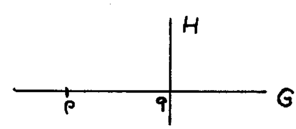
Π sei eine endliche VK-Ebene. Dann gibt es natürliche Zahlen t und r, so daß gilt:

(i) $t(p,G) = t$ für jede Fahne (p,G).
(ii) $T(p,G) = t$ für jede Fahne (p,G).
(iii) $\operatorname{card} p' = t^2$ für jeden Punkt p.
(iv) $\operatorname{card} G' = t^2$ für jede Gerade G.
(v) $[p'] = x \Rightarrow [p] = tx$ für jeden Punkt p.
(vi) $[G'] = y \Rightarrow [G] = ty$ für jede Gerade G.
(vii) Wenn Π' v Punkte hat, hat Π t^2v Punkte.
(viii) Wenn Π' b Geraden hat, hat Π t^2b Geraden.
(ix) r erfüllt (4). Falls Π sogar K-Ebene ist, ist r die Ordnung von Π'.

Daher stimmen die Parameter (t,r) einer VK-Ebene, die sogar K-Ebene ist, mit denen der als K-Ebene betrachteten Ebene überein.

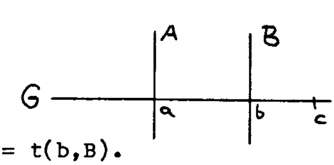
Beweis:
Wir benötigen eine Reihe von Hilfsbehauptungen.

I. Es seien $p, q\ I\ G$, $q\ I\ H$, $G' \neq H'$, $p' \neq q'$. Dann gilt $t(q,H) = T(p,G)$.



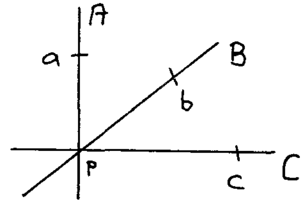
Beweis:
Sei r ein beliebiger Nachbarpunkt von q auf H. Dann gilt $r' \neq p'$. Nach (K_0) gibt es also genau eine Gerade K_r mit $p,r\ I\ K_r$ und $K_r \circ G$. Ist umgekehrt K eine beliebige Nachbargerade von G durch p, so gibt es nach (K_1) genau einen Punkt s mit $s \circ q$ und $s\ I\ H,K$; für diesen Punkt s gilt also $K = K_s$. Daher entsprechen sich die Nachbarpunkte von q auf H und die Nachbargeraden von G durch p umkehrbar eindeutig.

II. Es seien $a\ I\ A,G$, $b\ I\ B,G$, $c\ I\ G$, $A' \neq G' \neq B'$; $a \not\circ c \not\circ b$. Dann gilt $t(a,A) = t(b,B)$.



Beweis:
Nach I. gilt $t(a,A) = T(c,G) = t(b,B)$.

III. Es seien $p \; I \; A,B,C$, $a \; I \; A$, $b \; I \; B$, $c \; I \; C$, $p' \ddagger a',b',c'$, $B' \ddagger A' \ddagger C' \ddagger B'$. Dann gilt: $t(p,A) = t(p,B) = t(p,C)$.

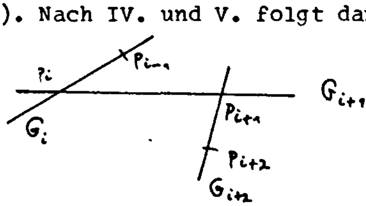


Beweis:
Nach I. und der dualen Aussage zu II. gilt $t(p,A) = T(b,B) = T(c,C) = t(p,B)$. Entsprechend folgt $t(p,A) = t(p,C)$.

IV. Sei $p \; I \; G,H$. Dann gilt $t(p,G) = t(p,H)$.
Beweis:
Sei zunächst $G' \ddagger H'$. Nach 4. gibt es eine Gerade K mit $p \; I \; K$ und $K' \ddagger G',H'$. Wieder nach 4. gibt es Punkte g,h,k mit gIG, hIH, kIK und $p' \ddagger g',h',k'$. Nach III. folgt daher $t(p,G) = t(p,H)$.
Ist jetzt $G'=H'$, wähle man wieder eine Gerade K mit $K' \ddagger G'$ und pIK. Nach dem schon Bewiesenen folgt dann $t(p,G) = t(p,K) = t(p,H)$.

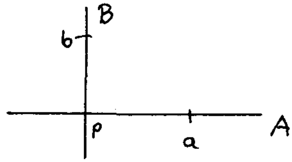
V. Es seien $p,q \; I \; G$. Dann gilt $t(p,G) = t(q,G)$.
Beweis:
Für $p'=q'$ ist die Behauptung trivial. Anderenfalls gibt es einen Punkt r mit rIG und $r' \ddagger p',q'$ (nach 4.). Wieder nach 4. gibt es Geraden H,K mit pIH, qIK und $H' \ddagger G' \ddagger K'$. Nach I. und IV. folgt dann
$t(p,G) = t(p,H) = T(r,G) = t(q,K) = t(q,G)$.

VI. Beweis von (i) und (ii):
Seien (p,G) und (q,H) Fahnen. Wir nehmen zunächst $p' \ddagger q'$ an. Da Π' zusammenhängend ist, gibt es eine endliche Folge $p'=p_0'$, p_1', ..., $p_n'=q'$ von Punkten von Π', so daß p_{i-1}' und p_i' für $i=1,\dots,n$ verbindbar sind. O.B.d.A. kann $p_{i-1}' \ddagger p_i'$ angenommen werden.
Es sei etwa $p_{i-1}', p_i' \; I \; G_i'$ $(i=1,\dots,n)$; wir setzen $G_0 := G$ und $G_{n+1} := H$. O.B.d.A. sei $G_i' \ddagger G_{i+1}'$ für $i=0,\dots,n$. Ferner können wir nach (K_0) Urbilder p_i,G_i von p_i',G_i' so wählen, daß auch $p_{i-1},p_i \; I \; G_i$ gilt $(i=1,\dots,n)$. Nach IV. und V. folgt dann für $i=0,\dots,n$



$t(p_i,G_i) = t(p_i,G_{i+1}) = t(p_{i+1},g_{i+1})$.
Es ergibt sich also
$t(p,G) = t(p_0,G_0) = \dots = t(p_n,G_n) = t(p_n,G_{n+1}) = t(q,H)$.
Sei jetzt $p'=q'$. Dann wählen wir nach 4. einen Punkt r mit $r'\neq p'$ und eine Gerade K mit $r \mathrel{I} K$. Es folgt
$t(p,G) = t(r,K) = t(q,H)$.
Dual zeigt man $T(p,G)=t(Q,H)$. Da es nach 4. und I. Fahnen (p,G) und (q,H) mit $t(p,G) = T(q,H)$ gibt, ist der Beweis von (i) und (ii) vollständig.

VII. Es seien $p \mathrel{I} A,B$, $a \mathrel{I} A$ und $b \mathrel{I} B$, ferner $p'\neq a',b'$ und $A'\neq B'$. Dann gilt
card $p' = t(p,A)\cdot t(p,B)$.



Beweis:
Wegen $p',a' \mathrel{I} A$ und $p'\neq a'$ liegt nach (K_0) jeder Nachbarpunkt von p auf genau einer Nachbargeraden von A durch a. Nach I. gibt es aber genau $t(p,B)$ derartige Geraden, etwa $A=A_1, A_2,\dots,A_n$. Ebenso liegt jeder Nachbarpunkt von p auf genau einer Nachbargeraden von B durch b; und es gibt $t(p,B)$ derartige Geraden, etwa $B=B_1, B_2,\dots,B_m$. Wegen $p' \mathrel{I} A',B'$ und $A'\neq B'$ schneidet nach (K_1) jedes A_i $(i=1,\dots,n)$ jedes B_j $(j=1,\dots,m)$ in genau einem Nachbarpunkt von p. Daher gibt es genau $m\cdot n$ Nachbarpunkte von p', w.z.b.w.

VIII. Nach VI. und VII. folgt unmittelbar (iii); (iv) gilt aus Dualitätsgründen. Die übrigen Behauptungen des Satzes sind nun leicht einzusehen.

Man beachte, daß I. bis III. und VII. ohne Verwendung der Axiome (L_0) bis (L_2) bewiesen wurden.

7. Satz

Π' sei eine endliche Inzidenzstruktur mit (L_0) bis (L_2) und r wie in (4). Dann gibt es genau dann eine (t,r)-VK-Ebene Π $(t\neq 1)$ mit Π' als Bildebene, wenn es $r-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung t gibt (was bekanntlich genau dann der Fall ist, wenn es ein $(t,r+1)$-Netz gibt). Insbesondere erfüllt eine (t,r)-VK-Ebene mit $t\neq 1$ stets $r\leq t$.

Beweis:

I. '⇒'

Π sei (t,r)-VK-Ebene mit $t \neq 1$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß es einen Punkt p gibt mit $[p'] = r+1$ (sonst betrachten wir die duale Ebene Π^* anstelle von Π). Aufgrund von 4. gibt es paarweise nicht benachbarte Geraden $G_1,\dots,G_{r+1}$ mit $p \, I \, G_i$ für $i=1,\dots,r+1$. Wir betrachten die Inzidenzstruktur Σ, deren Punkte die von p' sind und deren Geraden wie folgt bestimmt sind: Auf jedem G_i wählen wir einen Punkt q_i mit $q_i \not\sim p$; die Geraden von Σ seien diejenigen Nachbargeraden von G_i in Π, die q_i enthalten $(i=1,\dots,r+1)$. Die i-te Parallelklasse $\mathfrak{B}_i$ von Σ bestehe aus den durch q_i bestimmten Geraden. Dann ist Σ ein $(t,r+1)$-Netz mit $r \geq 2$ (wegen (L_1) und (L_2)). Jede Gerade von Σ enthält nämlich wegen pIG_i nach 4. Nachbarpunkte von p, und zwar nach 6. genau t Stück. Andererseits liegt jeder Nachbarpunkt s von p nach (K_0) auf genau einer Nachbargeraden von G_i durch q_i $(i=1,\dots,r+1)$. Σ erfüllt also das Parallelenaxiom. Schließlich schneiden sich Geraden aus verschiedenen Parallelklassen nach (K_1) genau einmal. Damit ist bereits alles bewiesen.

II. '⇐'

B sei eine Inzidenzmatrix von Π'. Dann sind alle Zeilen- und Spaltensummen von $B \leq r+1$. Nach [7, Theorem 11.1.6] ist B daher Summe von $r+1$ Matrizen $P_0,\dots,P_r$, die in jeder Zeile und Spalte höchstens einmal 1 (und sonst 0) enthalten. Nach [3, Theorem 3.1] gibt es $t^2 x t^2$-Matrizen $M_0,\dots,M_r$ mit Einträgen 0 und 1, so daß gilt:

(5) $M_i^T M_j = M_i M_j^T = J \quad$ für $i,j = 0,\dots,r;\ i \neq j$
(dabei bezeichnet J die $t^2 x t^2$-Matrix mit allen Einträgen 1).

In jeder Matrix P_i ersetze man nun jede 1 durch die Matrix M_i und jede 0 durch die $t^2 x t^2$-Nullmatrix $(i=0,\dots,r)$. A sei die Summe der so erhaltenen Matrizen. Wie in [3, Section 1] zeigt man, daß A eine (t,r)-VK-Ebene Π über Π' definiert. Die Durchführung der Einzelheiten sei dem Leser überlassen.

8. Hilfssatz

Für jedes $r \geq 2$ gibt es partielle Ebenen (das sind Inzidenzstrukturen, in denen je zwei verschiedene Punkte höchstens eine Verbindungsgerade besitzen), die (L_0) bis (L_2) und (4) erfüllen.

Beweis:
Bekanntlich gibt es stets ein $(r+1,3)$-Netz. Ein solches Netz hat $r+1$ Punkte pro Gerade und 3 Geraden pro Punkt, erfüllt also (4). Ferner ist ein Netz offenbar eine partielle Ebene; auch (L_0) bis (L_2) sind erfüllt.

9. Korollar

t und r seien natürliche Zahlen mit $r \geq 2$ und $t \neq 1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt eine (t,r)-VK-Ebene.
(ii) Es gibt ein $(t,r+1)$-Netz.
(iii) Es gibt $r-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung t.

10. Korollar

Es sei t eine natürliche Zahl, die nicht Ordnung einer projektiven Ebene ist (etwa nach dem Satz von Bruck-Ryser). Das Polynom $p(x)$ sei durch $p(x) := \frac{1}{2}x^4+x^3+3x^2+\frac{3}{2}x$ definiert. $k(t)$ sei die größte natürliche Zahl mit $p(k(t)) < t$. Dann gibt es keine (t,r)-VK-Ebenen mit $t-2-k(t) < r$.

Beweis:
Angenommen, es gibt eine (t,r)-VK-Ebene mit $r < t-2-k(t)$. Nach 9. gibt es dann ein $(t,r+1)$-Netz. Für dieses Netz gilt für die Defizienz $d = p(t-r-1) \leq p(k(t)) < t$. Nach [1, Theorem 4.3 und Corollary] gibt es dann eine affine und daher auch eine projektive Ebene der Ordnung t. Widerspruch!

Wir erhalten daher z.B. die Nichtexistenz von (t,r)-VK-Ebenen für

t	6		14			21			22			30			33	
r	6	5	14	13	12	21	20	19	22	21	20	30	29	28	33	32	31

11. Korollar

Es sei $r \geq 2$ und $t \neq 1$. (t,r)-VK-Ebenen existieren mindestens in den folgenden Fällen:

(i) t Primzahlpotenz, $r \leq t$.

(ii) $t=t_1 t_2$, und es gibt (t_1,r)- und (t_2,r)-VK-Ebenen.

(iii) $r=3$, $t \neq 2,6$. Für $t=2,6$ gibt es nur $(t,2)$-VK-Ebenen.

(iv) $r=6$, $t \geq 63$.

(v) $r=7$, $t \geq 91$.

(vi) r beliebig gegeben, $t = t(r)$ hinreichend groß.

Beweis:
Folgt aus 9. und wohlbekannten Tatsachen über Netze bzw. lateinische Quadrate (vgl. [2], [5] und [8]).

2. Minimalität des Axiomensystems

Wir zeigen jetzt durch Angabe von Gegenbeispielen, daß die Axiome (L_0) bis (L_2) nicht weiter abgeschwächt werden können, wenn Kleinfeld's Satz beweisbar bleiben soll.

Sei etwa Π_1 eine $(2,2)$-K-Ebene über der projektiven Ebene der Ordnung 2 (vgl. 3.) und Π_2 eine analog konstruierte $(3,3)$-K-Ebene über der projektiven Ebene der Ordnung 3. Π sei die disjunkte Vereinigung von Π_1 und Π_2. Wir erhalten in natürlicher Weise einen Klingenberg-Epimorphismus auf die disjunkte Vereinigung Π' von Π_1' und Π_2'. Π' erfüllt (L_1) und (L_2), aber nicht (L_0). Der Satz von Kleinfeld ist verletzt, denn es gibt Fahnen (p,G) mit $t(p,G) = 2$ (die aus Π_1 stammen) und solche mit $t(p,G) = 3$ (aus Π_2). Also kann (L_1) nicht abgeschwächt werden.

Bei [4] findet man (in (5.5)) ein Beispiel eines Klingenberg-Epimorphismus auf die affine Ebene der Ordnung 2, für den Kleinfeld's Satz nicht gilt; es treten nämlich für t die Werte 2 und 8 auf. Demzufolge kann (L_2) nicht abgeschwächt werden und damit aus Dualitätsgründen auch (L_1) nicht.

3. Literaturverzeichnis

[1] BRUCK, R.H.: Finite Nets II. Uniqueness and Embedding. Pac. J. Math. 13, 421-457 (1963)

[2] DEMBOWSKI, Peter: Finite Geometries Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1968)

[3] DRAKE, D.A. und LENZ, H.: Finite Klingenberg planes erscheint (Abh.Math.Sem.Hamburg)

[4] DRAKE, D.A. und SHULT, E.: Construction of Hjelmslev-planes from (t,k)-nets Preprint (1975)

[5] HALL, M. Jr.: Combinatorial Theory Blaisdell Publishing Co., Waltham Toronto-London (1967)

[6] KLEINFELD, E.: Finite Hjelmslev planes Ill. J. Math. 3, 4o3-4o7 (1959)

[7] MIRSKY, L.: Transversal Theory Academic Press, New York-London (1971)

[8] WILSON, R.M.: Concerning the number of mutually orthogonal Latin squares discr. math. 9, 181-198 (1974)

Dieter Jungnickel

2. Mathematisches Institut
der Freien Universität Berlin

Königin-Luise-Str. 24-26

D-1ooo Berlin 33

F.R.Germany