

# Stochastische Resonanz

P. Jung, P. Hänggi

Ein neues Verfahren, schwache verrauschte Signale zu verstärken

Als Stochastische Resonanz (SR) wird ein neuartiges Phänomen bezeichnet, das in bistabilen und multistabilen Systemen auftreten kann, wenn Fluktuationen mit schwachen periodischen Signalen zusammenwirken. Der Begriff der stochastischen Resonanz – die keine Resonanz im üblichen Sinne darstellt – wurde von einer Gruppe italienischer Wissenschaftler zu Anfang der achtziger Jahre geprägt [1]. Innerhalb eines idealisierten bistabilen Klimamodells, das nur zwei Klimazustände berücksichtigt, nämlich normales Klima und Eiszeit, können durch SR kleine orbitale (daher periodische) Störungen (Periode ca.  $10^5$  Jahre) so verstärkt werden, daß sie im Zeitverlauf des Klimas als ausgeprägte periodische Ereignisse (z. B. Eiszeiten) in Erscheinung treten. Im Fourier-Spektrum der Zeitreihen von Klimadaten ist deshalb ein scharfes Maximum bei der Frequenz der orbitalen Störung zu finden [1].

Das Prinzip der SR wird nun anhand eines einfachen bistabilen Potentialmodells (Abb. 1) qualitativ erklärt. Ein Teilchen bewege sich zunächst ohne äußere Kraft in dem skizzierten Doppelmuldenpotential mit der Barrierenhöhe  $\Delta U$  und dem Muldenabstand  $l$ . Infolge von Fluktuationen (z. B. thermischen Ursprungs) wird ein solches Teilchen auf einer langen Zeitskala zwischen den beiden Potentialmulden zufällig hin- und herhüpfen. Die statistische Verteilung der Zeitintervalle zwischen zwei Hüpfereignissen wird als Wartezeitverteilung bezeichnet. Es handelt sich hierbei um eine Exponentialverteilung der Form  $P_W(t) = (1/T_K) \exp(-t/T_K)$  (gestrichelte Kurve in Abb.

**Dieser Artikel berichtet über einen kürzlich entdeckten, technisch sehr nützlichen Effekt: Mit ihm wird es möglich, schwache Signale bei Anwesenheit von Fluktuationen zu verstärken, indem ein Teil der Leistung des Rauschhintergrunds auf das Signal übertragen wird. Verbunden damit ist das paradox erscheinende Resultat, daß durch Vergrößerung der Fluktuationen eine Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses erreicht werden kann!**

2). Die hier auftretende charakteristische Zeitskala  $T_K$  (Kramers-Zeitskala) gibt die mittlere Wartezeit zwischen zwei Hüpfereignissen an. Sie ist bestimmt durch den sogenannten Arrhenius-Faktor  $\exp(\Delta U/D)$  und durch die Frequenz  $\nu$ , mit der das System in der Mulde oszilliert:

$$T_K(D) = 1/\nu \exp(\Delta U/D)$$

(vgl. auch Phys. Bl. 46 (1990) Nr. 4, S. 113). Die Größe  $D$  ist dabei ein Maß für die Stärke der Fluktuationen. (So ist z. B. in thermodynamischen Gleichgewichtssystemen  $D$  durch das Produkt der Temperatur  $T$  und der Boltzmann-Konstante  $k_B$  gegeben.) In Gegenwart eines kleinen, äußeren periodischen Signals mit der Amplitude  $A \ll \Delta U/l$  sowie der Periode  $T_c = 2\pi/\Omega$  wird die Barrierenhöhe periodisch gegenphasig verkleinert bzw. vergrößert. Das Teilchen wird bevorzugt springen, wenn die zu überwindende Barriere am kleinsten ist. Bei der Fluktuationsstärke  $D = \hat{D} = \Delta U/[\ln(T_c \nu/2)]$ , d. h. bei *stochastischer Resonanz*, ist die resultierende Dynamik des Hüpfens maximal mit dem äußeren Signal korreliert. Der vorher zufällige Sprungprozeß hat also bei Anwesenheit von Modulation einen

signifikanten kohärenten Anteil. Infolgedessen weist die Wartezeitverteilung einen nicht-exponentiellen Verlauf (durchgezogene Kurve in Abb. 2) mit Maxima bei  $t_n = (2n + 1)T_c/2$  auf [2]. Das Spektrum des ansonsten zufälligen Hüpfprozesses wird auf der durch die stochastische Resonanzbedingung definierten Zeitskala eine anomale Verstärkung  $\eta$  erfahren (siehe Abb. 3). Die spektrale Verstärkung des schwachen periodischen Signals, gegeben durch den Quotient aus der Leistung des kohärenten Anteils des Sprungprozesses und der Leistung des schwachen Signals, zeigt in der Tat ein Maximum als Funktion der Fluktuationsstärke  $D$ , dessen Position bei kleinen Frequenzen sehr gut mit  $\hat{D}$  übereinstimmt (Abb. 3). Bei der Fluktuationsstärke  $D \approx \hat{D}$  ist daher ein Maximum des kohärenten Anteils des Hüpfprozesses zu erwarten. Hervorzuheben ist hierbei, daß bei kleinen Fluktuationsstärken der Verstärkungsfaktor mit zunehmender Rauschstärke ansteigt und erst nach Erreichen des Maximums um  $\hat{D}$  wieder abfällt. Es ist dieses atypische Verhalten („mehr Rauschen bringt höhere Verstärkung“), das die stochastische Resonanz auszeichnet.

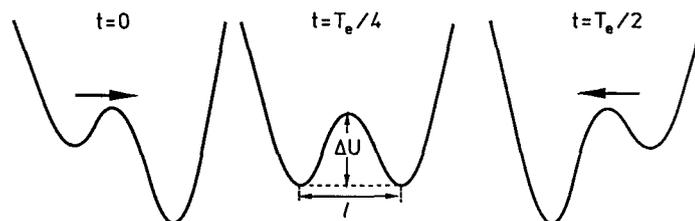


Abb. 1: Typische Konfigurationen des modulierten bistabilen Potentials. Bei  $t = 0$  ist der Hüpfprozeß von links nach rechts (durch den Pfeil angedeutet) sehr wahrscheinlich. Eine halbe Periode später, bei  $t = T_c/2$ , ist dagegen der Hüpfprozeß von rechts nach links sehr wahrscheinlich.

Dr. Peter Jung und Prof. Dr. Dr. Peter Hänggi, Universität Augsburg, Institut für Theoretische Physik, Memminger Straße 6, W-8900 Augsburg.

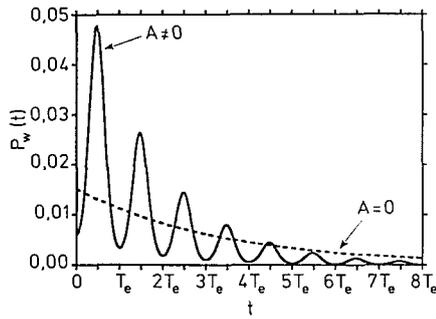


Abb. 2: Die statistische Verteilung der Wartezeiten zwischen zwei Sprüngen in einem bistabilen Potential ohne äußere Störung (gestrichelte Linie) und mit einem schwachen äußeren periodischen Signal der Amplitude  $A \neq 0$  (durchgezogene Linie). Die Maxima der Verteilung in letzterem Fall liegen bei  $t_n = (2n + 1)T_e/2$ .

Auch das Signal-Rausch-Verhältnis, der Quotient aus der Leistung des kohärenten Anteils des Sprungprozesses und der Spektraldichte des unmodulierten Prozesses bei der Frequenz der Modulation (in linearer Antworttheorie gegeben durch einen zu  $(1/D^2)\exp(-\Delta UID)$  proportionalen Ausdruck [3], zeigt als Funktion der Fluktuationsstärke diese Anomalie (vgl. Abb. 4). Für einen periodisch getriebenen Schmitt-Trigger, der im bistabilen Bereich seiner Hystereseurve betrieben wird, wurde diese charakteristische Anomalie im Signal-Rausch-Verhältnis ebenfalls demonstriert [4].

Der Effekt der SR blieb nach seiner Entdeckung und den ersten qualitativen Anwendungen [4] lange Zeit unbeachtet, bis

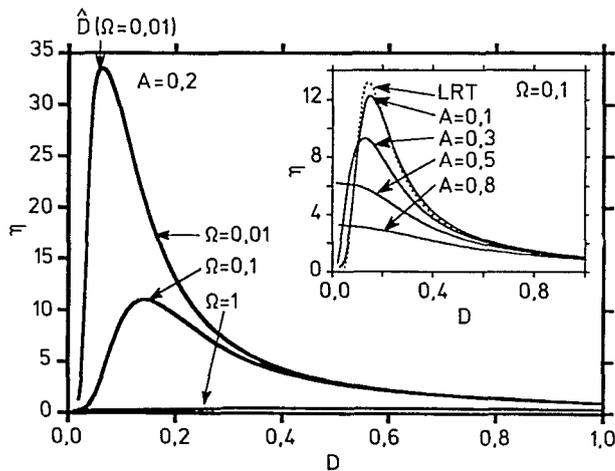


Abb. 3: Stochastische Resonanz: Der Verstärkungsfaktor  $\eta$  eines periodischen Signals der Stärke  $A$  und der Frequenz  $\Omega$  in einem bistabilen System als Funktion der Fluktuationsstärke  $D$  (jeweils dimensionslose Einheiten). Man beachte den atypischen anfänglichen Anstieg mit zunehmender Stärke der Fluktuationen. Für feste Signalstärke  $A$  wird die Verstärkung für abfallende Frequenzen größer, wobei sich das Maximum zu kleineren Fluktuationsstärken verschiebt. Für feste Frequenz  $\Omega$  dagegen nimmt die Verstärkung für wachsende Signalstärke  $A$  ab (siehe Nebenbild). Ab einem kritischen Wert von  $A$ , ab dem das System seine Bistabilität verliert, verschwindet das Maximum in der Resonanzkurve völlig. Die gestrichelte Kurve im Nebenbild, die mit LRT bezeichnet ist, resultiert aus einer linearen Antworttheorie für periodisch getriebene stochastische Systeme.

er von einer Gruppe amerikanischer Wissenschaftler [5] am Georgia Institute of Technology in Atlanta bei Experimenten an einem bidirektionalen Ringlaser demonstriert wurde (siehe Abb. 4). Die Beobachtung, daß ein gewisser *Zuwachs* an Rauschen die Detektion eines schwachen, mit Rauschen behafteten Signals – entgegen der intuitiven Erwartung – verbessert, begann jetzt nicht nur viele Physiker, sondern auch Informationsingenieure und Biologen zu interessieren. Mittlerweile gibt es eine Reihe von Patenten und Vorhaben, die den Effekt der SR ausnützen. Hier sind vor allem der Bau von neuartigen Instrumenten zur Detektion von schwachen Magnetfeldern für medizinische und geophysikalische Anwendungen sowie Verfahren zur Bildverarbeitung in Kameras und Monitoren zu nennen. Aber auch für die Grundlagenforschung ist der Effekt ebenfalls von Bedeutung. So beschäftigt sich zur Zeit eine italienische Kooperation (Perugia/Pisa/Rom) mit der Konstruktion neuer Instrumente zur Detektion von Gravitationswellen auf der Grundlage des SR-Effekts.

Ein besonders interessanter Aspekt der Theorie für die SR besteht darin, daß die übliche kontinuierliche Zeittranslationssymmetrie von dissipativen stochastischen Prozessen nicht mehr vorliegt. Die theoretische Analyse basiert auf der Untersuchung von Fokker-Planck-Gleichungen mit *diskreter* Zeittranslationssymmetrie [6]. Einige ihrer wesentlichen Gesichtspunkte seien im folgenden kurz zusammengestellt:

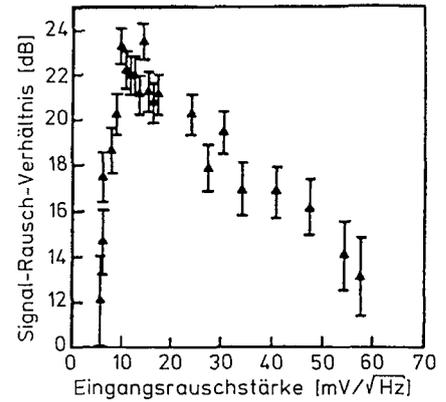


Abb. 4: Signal-Rausch-Verhältnis des zeitlichen Intensitätsverlaufs einer der beiden Moden eines bidirektionalen Ringlasers, bei dem die probabilistische Gewichtung der beiden Moden gegenphasig periodisch moduliert wurde.

- (i) Über die Phase der periodischen Modulation gemittelte Korrelationsfunktionen sind zeithomogen (d. h. nur eine Funktion von Zeitdifferenzen). Für lange Zeiten zerfallen diese gemittelten Korrelationsfunktionen nicht in das Produkt der Momente, sondern oszillieren periodisch.
- (ii) Die spektrale Dichte (Fourier-Spektrum der Autokorrelation) des modulierten Sprungprozesses enthält somit eine Reihe von Deltafunktionen an den Frequenzen  $\nu_n = n\nu_c$ , deren Gewichte  $M_n$  von der Stärke der Fluktuationen  $D$  sowie von der Amplitude und der Periode des externen periodischen Signals abhängen.
- (iii) Das Verhältnis  $\eta = 4 M_1/A^2$  des führenden Deltapeaks bei der Frequenz  $\nu_c = 1/T_c$  des Signals ist die Leistungsverstärkung von Signalen dieser Frequenz und charakterisiert die SR auf eindeutige Weise [siehe Abb. 3].

Verteilungen mit denselben charakteristischen Merkmalen der in Abb. 2 gezeigten Wartezeitverteilungen treten auch in anderen Zusammenhängen auf. So läßt z. B. in der Neurobiologie die entsprechende Form von Histogrammen der Wartezeiten zwischen Neuronen-Feuerpulsen [7] vermuten, daß zur Dekodierung der Information, die in den Pulssequenzen der Neuronen enthalten ist, Fluktuationen wegen des kooperativen Zusammenspiels mit dem einlaufenden Informationssignal eine wichtige Rolle spielen.

Grundsätzlich kann SR in jedem bi- oder multistabilen Potential auftreten, in einwie auch in mehrdimensionalen Poten-

tiallandschaften. Einen vorzüglichen Überblick über die historische Entwicklung, erste Experimente, digitale Simulationen sowie die theoretischen Entwicklungen zum gegenwärtigen Stand der SR gab kürzlich F. Moss in einem Konferenzbeitrag [8]. Viele weiterführende Fragen werden gegenwärtig intensiv von mehreren Gruppen untersucht, z. B. die Optimierung des SR-Effekts mittels SR-fähiger Elemente in Serienschaltung, die Wirkung von SR in multistabilen Netzwerken oder der Einfluß von Trägheit und korre-

lierten Rauschkraften mit endlicher Korrelationszeit.

- [1] *R. Benzi, S. Sutura* und *A. Vulpiani*, *J. Phys.* **A14** (1981) L. 453; *R. Benzi, G. Parisi, A. Sutura* u. *A. Vulpiani*, *Tellus* **34** (1982) 11.
- [2] *T. Zhou, F. Moss* u. *P. Jung*, *Phys. Rev.* **A42** (1990) 3161.
- [3] *L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta* u. *S. Santucci*, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 349.
- [4] *S. Fauve* u. *F. Heslot*, *Phys. Lett.*

**97A** (1983) 5.

- [5] *B. McNamara, K. Wiesenfeld* u. *R. Roy*, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2626; *G. Vemuri* u. *R. Roy*, *Phys. Rev.* **A39** (1989) 4668.
- [6] *P. Jung* u. *P. Hänggi*, *Europhys. Lett.* **8** (1989) 505; *Phys. Rev.* **A41** (1990) 2977; *Phys. Rev.* **A44** (im Druck).
- [7] *A. Longtin, A. Bulsara* u. *F. Moss*, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 656.
- [8] *F. Moss*, *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.* **95** (1991) 303.