Risikoprämien in Optionspreisen –

Reale und risikoneutrale Welten und die Beurteilung von Derivaten

Marco Wilkens / Rainer Baule / Oliver Entrop

Bewertungsmodelle für Optionen wie das Binomial- und das Black/Scholes-Modell sind in der Literatur ausführlich dargestellt. Diese Darstellungen tragen aber häufig nichts zur Beantwortung der Frage bei, wie hoch die tatsächlich erwartete Rückzahlung aus Derivaten ist. Diese und weitere unter anderem für praktische Anlageentscheidungen zentralen Größen werden in diesem Beitrag für Calls und Puts hergeleitet und veranschaulicht. Sie bilden zugleich die Grundlage für die Überlegungen, ob und wann in Derivate, insbesondere Optionen investiert werden sollte und welche Risikoprämie diese erwarten lassen. Einhergehend wird der Zusammenhang der realen und der risikoneutralen Bewertungswelten für Derivate erläutert und so einer ökonomischen Betrachtung leichter zugänglich gemacht.

A. Einleitung

Wann sollte man Optionen kaufen? Neben den Motiven Arbitrage und Hedging werden Optionen auch unter dem Gesichtspunkt der Spekulation gekauft, das heißt, die Option selbst wird als Investitionsobjekt angesehen. Zur Beurteilung einer Investition dienen regelmäßig ihre erwarteten Auszahlungsüberschüsse und deren Standardabweichung sowie gegebenenfalls weitere höhere Momente, allgemein also die Verteilung der zukünftigen Zahlungen.

Seit den Arbeiten von Black und Scholes (1973) sowie Merton (1974) hat sich im Rahmen der Optionspreistheorie die duplikationstheoretisch begründete und damit präferenzfreie risikoneutrale Bewertungssystematik als Standard etabliert.[1] Für die Entwicklung der Aktienkurse wird dabei sehr häufig, dem Black/Scholes-Modell folgend, eine geometrische Brownsche Bewegung unterstellt. Dies impliziert eine logarithmische Normalverteilung der zukünftigen Kurse. Daneben hat das zeitdiskrete Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein (1979) eine große Bedeutung, das im Grenzfall in das erstgenannte zeitkontinuierliche Modell übergeht.

Während die Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung in der Regel die Realität in akzeptabler Näherung widerspiegelt, hat das (einperiodige) Binomialmodell den Vorteil großer Simplizität und methodischer Klarheit. Dementsprechend wird unter den im Folgenden analysierten Fragestellungen zunächst jeweils das Binomialmodell betrachtet, um anschließend die Analoga im Black/Scholes-Modell aufzeigen und losgelöst von übertriebenem Formalismus darstellen zu können.

Anhand dieser beiden grundlegenden Modelle werden in dem vorliegenden Beitrag die Verteilungen der zukünftigen Aktienkurse und der Zahlungen aus Optionen untersucht. Die Betrachtung fokussiert dabei sehr wesentlich auf den Unterschied zwischen der realen Verteilung und der duplikationstheoretisch begründeten, bewertungsrelevanten Verteilung in der so genannten risikoneutralen Welt. Dieser Schwerpunkt wurde insbesondere aus dem Grund gewählt, als dass die Beziehung dieser beiden Verteilungen respektive ihre Unterschiede in der betriebswirtschaftlichen Literatur nicht selten zu Interpretations- und Abgrenzungsschwierigkeiten führen.

Die reale Verteilung ist primär im Rahmen des Risikomanagements und bei der Beurteilung des Investitionsobjektes Option heranzuziehen.[2] Demgegen-

---

[1] Die ursprüngliche Motivation lag dabei in der Bewertung von risikobehafteten Fremdkapitalpositionen, die sich als Optionen auf den jeweiligen Unternehmenswert interpretieren lassen. Vgl. zu dieser Anwendung der Optionspreistheorie auf die finanzielle Haftung von Unternehmen Lohmann (1990).

[2] Vgl. zu dieser Problematik auch Duffie/Pan (1997), S. 10 f., Keller/Sièvi (1999) und Jarrow/Turnbull (2000), S. 276.

über findet die risikoneutrale Verteilung ihre Bedeutung bei der duplikationstheoretisch begründeten, präferenzfreien Bewertung von Derivaten.

Der Begriff der risikoneutralen Welt wird in diesem Beitrag neben der üblichen Weise auf eine andere, ökonomisch plausiblere Art interpretiert. Diese Interpretation der „real-risikoneutralen Welt“ erlaubt eine vereinfachte und gut nachvollziehbare Darstellung beziehungsweise Kalkulation von Risikoprämien, die letztlich bei der Vorteilhaftigkeitsuntersuchung einer Optionsposition von zentraler Bedeutung sind. Um eine hohe Anschaulichkeit der Ausführungen zu erzielen, werden die allgemein gültigen Variablen und Formeln um konkrete Werte auf der Basis eines durchgängigen Beispiels ergänzt.

B. Modellierung des Aktienkurses

B.I. Allgemeine Annahmen

Den Ansätzen zur Derivatebewertung ist gemein, dass sie im Grundsatz von vollkommenen Märkten ausgehen. Kern eines jeden Bewertungsansatz ist die Modellierung des als stochastisch angesehenen Kurses des Underlyings – hier einer Aktie S. Wesentliche Parameter zur Beschreibung der Verteilung des Aktienkurses S_T im Fälligkeitszeitpunkt T einer europäischen Option sind dessen Erwartungswert $E(S_T)$ und Varianz $Var(S_T)$ beziehungsweise Standardabweichung $Std(S_T)$. Diese Größen lassen sich in die Analoga bezüglich der diskreten Renditen der Aktien r_d überführen und vice versa. Tabelle 1 stellt die grundlegenden Zusammenhänge dar und enthält darüber hinaus beispielhafte Ausgangsdaten.

Der Zusammenhang zwischen dem heutigen und dem erwarteten Aktienkurs kann auch über die (kontinuierliche) Wachstumsrate μ beschrieben werden. Für diese im Weiteren zentrale Größe gilt folgende Beziehung zum Erwartungswert des Aktienkurses:

(1) $E(S_T) = S_0\, e^{\mu T}$.

Der ausfallrisikofreie kontinuierliche Zinssatz r wird wie in diesem Zusammenhang üblich als zeit- und laufzeitinvariant angenommen. Er entspricht einer diskreten risikofreien Rendite von $r_{dis} = e^r - 1$. Demnach führt eine T-jährige risikofreie Anlage eines Kapitalbetrages KB zu einem sicheren Endwert von $KB\, e^{r\,T} = KB\,(1 + r_{dis})^T$.

Im Folgenden wird der Fall $\mu > r$ zugrunde gelegt, das heißt, die Differenz zwischen dem erwarteten Kurs $S_0\, e^{\mu\, T}$ und dem Endwert $S_0\, e^{r\,T}$ einer sicheren heutigen Anlage desselben Betrages S_0 ist stets positiv.[3] Die im Beispiel verwendeten Zahlen finden sich in Tabelle 2.

Tabelle 1: Ausgangssituation und grundlegende Zusammenhänge

	Aktienkurs	diskrete (Total-)Rendite
heute	$S_0 = 100$	
in T ($T = 1$)	S_T	$r_d = \frac{S_T - S_0}{S_0}$
Erwartungswert	$E(S_T) = 115$	$E(r_d) = \frac{E(S_T) - S_0}{S_0} = 15\ \%$
Varianz	$Var(S_T) = 2.500$	$Var(r_d) = \frac{Var(S_T)}{S_0^2} = 25\ \%$
Standardabweichung	$Std(S_T) = 50$	$Std(r_d) = \frac{Std(S_T)}{S_0} = 50\ \%$

Tabelle 2: Zinssätze und Wachstumsrate

diskreter risikofreier Zinssatz	$r_{dis} = 3{,}00\ \%$
kontinuierlicher risikofreier Zinssatz	$r = \ln(1 + r_{dis}) = 2{,}96\ \%$
Wachstumsrate	$\mu = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{E(S_T)}{S_0}\right) = 13{,}98\ \%$

B.II. Binomialmodell

B.II.1. Reale Welt

Beim einperiodigen Binomialmodell wird davon ausgegangen, dass der Aktienkurs S_T zum zukünftigen Zeitpunkt T nur zwei Ausprägungen annehmen kann, nämlich $u\,S_0$ und $d\,S_0$ mit einem up-Faktor $u > 1$ und einem down-Faktor $d < 1$, wobei die beiden Zustände mit den Wahrscheinlichkeiten p beziehungsweise $1 - p$ erreicht werden. Sinnvollerweise sollte dabei $u\,S_0$ oberhalb von $S_0\,e^{r\,T}$ und $d\,S_0$ darunter liegen, da ansonsten eine risikofreie Anlage die Aktie stets dominieren würde oder umgekehrt. Dies impliziert die Bedingung

[3] Im Rahmen des CAPM ist dies gleichbedeutend damit, dass die Aktie ein positives Beta besitzt. Vgl. hierzu exemplarisch Elton/Gruber (1995), S. 294-308.

(2) $d < e^{r\,T} < u$.

Die reale Verteilung P des Aktienkurses in T, determiniert durch die „up-Wahrscheinlichkeit“ p und die „down-Wahrscheinlichkeit“ $(1 - p)$, ist eine Punktverteilung auf $u\,S_0$ und $d\,S_0$. Die Freiheitsgrade bei der Modellierung des Aktienkurses bestehen somit in der Wahl der Wahrscheinlichkeit p sowie der Faktoren u und d. Bedingung für die Wahl dieser Parameter ist hier und im Folgenden die Übereinstimmung der ersten beiden Momente, gleichbedeutend mit Erwartungswert und Varianz der modellierten Verteilung mit den vorgegebenen Werten (vgl. Tabelle 1). Da drei Parameter (p, u, d) zu bestimmen sind, existiert ein echter Freiheitsgrad, der zum Beispiel für die Einhaltung der Bedingung $d = 1 / u$ verwendet werden kann.[4]

Der Erwartungswert und die Varianz des Aktienkurses beziehungsweise der diskreten Aktienrendite ergeben sich im Binomialmodell zu:

(3) $E(S_T) = (p\,u + (1 - p)\,d)\,S_0$ bzw. $E(r_d) = p\,u + (1 - p)\,d - 1$,

(4) $Var(S_T) = p\,(1 - p)\,(u - d)^2\,S_0^2$ bzw. $Var(r_d) = p\,(1 - p)\,(u - d)^2$.

Aus (3) folgt zusammen mit (1)

(5) $p = \dfrac{e^{\mu\,T} - d}{u - d}$.

Setzt man (5) in (4) ein, so ergibt sich als Darstellung für die Varianz des Aktienkurses beziehungsweise der diskreten Rendite im Zeitpunkt T:

(6) $Var(S_T) = (e^{\mu\,T} - d)\,(u - e^{\mu\,T}\,)\,S_0^2$ bzw. $Var(r_d) = (e^{\mu\,T} - d)\,(u - e^{\mu\,T}\,)$.

Die sich unter der Bedingung $d = 1 / u$ ergebenden möglichen Aktienkurse zum Zeitpunkt T sind mit den zugehörigen realen Wahrscheinlichkeiten Abbildung 1 zu entnehmen.

B.II.2. Risikoneutrale Welten

Wie in vielen Lehrbüchern zur Wertpapieranalyse im Zusammenhang mit der Optionspreistheorie oder dem State-Preference-Ansatz erläutert, wird zur arbitragefreien Bewertung von Derivaten die reale Verteilung des Underlyings

[4] Dies ist die Bedingung, die von Cox/Ross/Rubinstein (1979) bei der erstmaligen Diskussion des Binomialmodells verwendet wurde. Daneben existiert eine Reihe weiterer Vorschläge, für eine Übersicht s. zum Beispiel Leisen/Reimer (1996).

nicht benötigt. Vielmehr ist die Verteilung in einer (imaginären) risikoneutralen Welt relevant, in der sich die Investoren bei ihrer Anlageentscheidung lediglich an dem Erwartungswert einer Zahlung orientieren.[5] Stimmen die Erwartungswerte der Zahlungen verschiedener Anlagealternativen überein, so messen die Investoren diesen identische Werte bei, auch wenn die Alternativen unterschiedlich hohe Risiken – etwa gemessen durch die Standardabweichung der zukünftigen Zahlungen – aufweisen.

Oft ergeben sich jedoch Schwierigkeiten bei der ökonomischen Interpretation der unterstellten Risikoneutralität der Investoren und den daraus zu ziehenden Schlussfolgerungen. Daher wird in diesem Abschnitt der Begriff „risikoneutrale Welt" in ökonomischer Hinsicht auf zwei verschiedene, im Kern aber ähnliche Weisen interpretiert, die sich aus den beiden folgenden Fragestellungen ergeben:

1. Wie wäre – bei gegebener Verteilung des zukünftigen Kurses – der heutige Wert der Aktie, wenn sämtliche Investoren risikoneutral wären?
2. Wie wäre – bei gegebenem heutigen Wert der Aktie – die Verteilung des zukünftigen Kurses, damit der heutige Aktienkurs unter der Annahme der Risikoneutralität der Investoren erklärt wird?

Der Unterschied besteht also darin, dass in der ersten Welt von risikoneutralen Investoren in der ansonsten unveränderten realen Welt ausgegangen wird, weshalb sie „real-risikoneutrale Welt" genannt werden soll. Sie erlaubt – wie später erläutert – eine einfache und direkte Berechnung von Risikoprämien. Demgegenüber wird in der zweiten Interpretation die Verteilung geändert. Da darüber die Derivatebewertung ermöglicht wird, wird sie „bewertungsrelevante risikoneutrale Welt" genannt.

In der real-risikoneutralen Welt ist der heutige Wert der Aktie S_0^* identisch mit dem Barwert eines Zerobonds mit Fälligkeit T und Nominalwert $E(S_T)$, also

(7) $$S_0^* = e^{-r\,T}\,E(S_T).$$

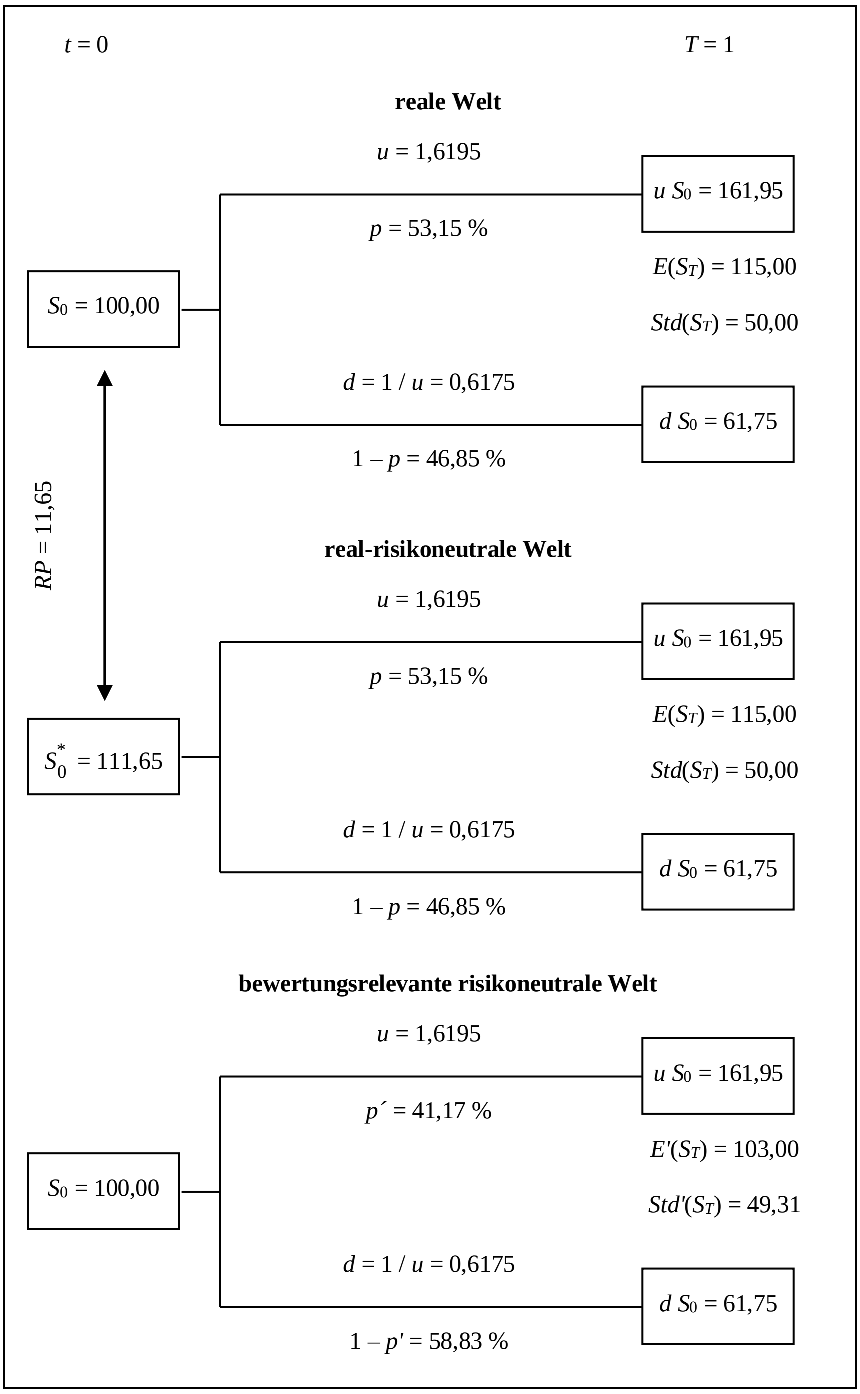
Damit in der bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt umgekehrt der heutige Kurs S_0 unter der Annahme der Risikoneutralität erklärt werden kann, muss er dem mit dem risikofreien Zinssatz r abgezinsten Erwartungswert entsprechen. Es ist also eine Verteilung P' derart zu bestimmen, dass gilt:

(8) $$S_0 = e^{-r\,T}\,E'(S_T),$$

wobei E' die Erwartungswertbildung bezüglich P' bezeichnet.

[5] Vgl. exemplarisch Cox/Ross/Rubinstein (1979), Zimmermann (1998), Hull (2003).

Abbildung 1: Aktienkursverlauf im Binomialmodell



Die Verteilung P' soll ebenfalls zur Familie der Punktverteilungen auf $u\,S_0$ und $d\,S_0$ gehören, weshalb die Wahrscheinlichkeit p' für den Zustand $u\,S_0$ den einzigen Freiheitsgrad darstellt. Diese zur Unterscheidung von der realen Wahrscheinlichkeit p auch Pseudowahrscheinlichkeit genannte Größe p' ist demnach so zu bestimmen, dass $S_0 = e^{-r\,T}\,E'(S_T) = e^{-r\,T}\,(p'\,u + (1-p')\,d)\,S_0$ erfüllt ist (vgl. auch (3)). Als (einzige) Lösung ergibt sich

$$(9) \quad p' = \frac{e^{r\,T} - d}{u - d}.$$

Wegen (2) gilt $0 < p' < 1$, so dass damit wirklich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $u\,S_0$ und $d\,S_0$ definiert wird. Offenbar ist (9) analog zu (5), wobei jedoch $e^{\mu\,T}$ durch $e^{r\,T}$ ersetzt wurde. Wegen $r < \mu$ ist die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit p' für eine Aufwärtsbewegung geringer als die reale Wahrscheinlichkeit p. Dementsprechend werden also durch die risikoneutrale Verteilung (aus Anlegersicht positiv zu beurteilende) Wertsteigerungen der Aktie unter- und (negativ zu beurteilende) Wertminderungen übergewichtet. Die beispielhaften Werte in den risikoneutralen Welten sind Abbildung 1 zu entnehmen.

Bemerkenswert ist, dass die Varianz des Aktienkurses, welche sich analog zu (6) für die risikoneutrale Verteilung P' als $Var'(S_T) = (e^{r\,T} - d)\,(u - e^{r\,T})\,S_0^2$ ergibt, nicht mit der realen Varianz übereinstimmt.[6] Für die Preisbildung ist die Varianz in einer Welt mit risikoneutralen Investoren jedoch irrelevant.

B.III. Kontinuierliches Modell (geometrische Brownsche Bewegung)

B.III.1. Reale Welt

Regelmäßig, wie beispielsweise im Zusammenhang mit dem Black/Scholes-Modell, wird für den Prozess des Aktienkurses $S = \{S_t \mid t \geq 0\}$ über die Zeit eine geometrische Brownsche Bewegung

$$(10) \quad dS = \bar{\mu}\,S\,dt + \sigma\,S\,dZ$$

mit den Parametern $\bar{\mu}$ und σ unterstellt, wobei $Z = \{Z_t \mid t \geq 0\}$ einen Wiener Prozess beschreibt.[7] Dies impliziert, dass der Aktienkurs S_T zum Zeitpunkt T

[6] Gleiches gilt für die Varianz der diskreten Rendite. Die Differenz ist ceteris paribus jedoch umso geringer, je kleiner die Restlaufzeit T ist.

[7] Vgl. hierzu zum Beispiel Black/Scholes (1973), Merton (1974), Lohmann (1995), S. 130 f., Hull (2003), S. 223.

logarithmisch normalverteilt[8] ist mit den Parametern $(\bar{\mu} - \sigma^2 / 2)\, T + \ln(S_0)$ und $\sigma^2\, T$, das heißt die Dichte

$$(11)\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma x}\exp\left(\frac{-(\ln(x / S_0) - (\bar{\mu} - \sigma^2 / 2)\, T)^2}{2\,\sigma^2\, T}\right),\ x > 0,$$

aufweist. Dementsprechend ist die kontinuierliche Rendite $\ln(S_T / S_0)$ des Aktienkurses normalverteilt mit dem Erwartungswert $(\bar{\mu} - \sigma^2 / 2)\, T$ und der Standardabweichung $\sigma\sqrt{T}$, das heißt, sie hat die Dichte

$$(12)\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\exp\left(\frac{-(x - (\bar{\mu} - \sigma^2 / 2)\, T)^2}{2\,\sigma^2\, T}\right).$$

Um die reale Verteilung der diskreten Aktienrendite in Bezug auf den Erwartungswert $E(r_d)$ und die Varianz $Var(r_d)$ beziehungsweise Standardabweichung $Std(r_d)$ sowie die Analoga des Kurses abzubilden, sind die Parameter $\bar{\mu}$ und σ so zu wählen, dass gilt:[9]

$$(13)\quad E(S_T) = S_0\, e^{\bar{\mu}\, T} \quad \text{bzw.} \quad Var(S_T) = S_0^2\, e^{2\,\bar{\mu}\, T}(e^{\sigma^2 T} - 1).$$

Aus der ersten Gleichung wird ersichtlich, dass $\bar{\mu}$ mit der in (1) definierten Wachstumsrate μ übereinstimmt, so dass im Folgenden auch für $\bar{\mu}$ die Bezeichnung μ verwendet wird. Die Parameter μ und σ ergeben sich durch Umstellen von (13) aus den Momenten des Aktienkurses in T beziehungsweise der diskreten Renditen (vgl. Tabelle 1) zu:

$$(14)\quad \mu = \bar{\mu} = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{E(S_T)}{S_0}\right) = \frac{1}{T}\ln(E(r_d) + 1)\ ,$$

$$(15)\quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{Var(S_T)}{S_0^2\, e^{2\,\mu\, T}} + 1\right)} = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{Var(r_d)}{e^{2\,\mu\, T}} + 1\right)}.$$

---

[8] Vgl. zur logarithmischen Normalverteilung Aitchison/Brown (1981), S. 7-9. Ist X eine lognormalverteilte Zufallsvariable zu den Parametern x und y^2, so hat sie den Erwartungswert $e^{x + y^2/2}$ und die Varianz $e^{2x + y^2}\,(e^{y^2} - 1)$. $\mathrm{Ln}(X)$ ist normalverteilt mit Erwartungswert x und Varianz y^2.

[9] Vgl. Lohmann (1995), S. 132 f.

B.III.2. Risikoneutrale Welten

In der real-risikoneutralen Welt (vgl. B.II.2.) gilt wie im Binomialmodell für den heutigen Aktienkurs

(16) $S_0^* = e^{-r\,T}\, E(S_T)$.

In der bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt wird aus der Klasse der Lognormalverteilungen eine Verteilung P' so ausgewählt, dass analog zu (8) gilt:

(17) $S_0 = e^{-r\,T}\, E'(S_T)$.

Wegen (13) reicht es aus, μ durch r zu ersetzen, das heißt, die zu berücksichtigende risikoneutrale Verteilung des Aktienkurses ist eine logarithmische Normalverteilung mit den Parametern $(r - \sigma^2 / 2)\, T + \ln(S_0)$ und $\sigma^2\, T$.[10] Damit sind die Renditen $\ln(S_T / S_0)$ normalverteilt mit dem Erwartungswert $(r - \sigma^2 / 2)\, T$ und der Varianz $\sigma^2\, T$, das heißt, sie haben die Dichte

(18) $$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\, T}\,\sigma}\exp\left(\frac{-(x-(r-\sigma^2/2)\,T)^2}{2\,\sigma^2\,T}\right).$$

Die bewertungsrelevante Verteilung des Kurses geht also aus der realen Verteilung durch Ersetzen des Parameters μ durch r hervor. Somit ergeben sich auch Erwartungswert und Varianz beziehungsweise Standardabweichung analog zu (13) mit r statt μ. Bei den kontinuierlichen Renditen führt diese einfache Transformation zu der anschaulichen Interpretation, dass die (Normal-)Verteilung lediglich derart „nach links“ (wegen $\mu > r$) verschoben wird (vgl. Abbildung 2), dass aus dem Erwartungswert $(\mu - \sigma^2 / 2)\, T$ gerade $(r - \sigma^2 / 2)\, T$ wird. Damit werden – wie bei der risikoneutralen Verteilung im Binomialmodell – positive Wertänderungen der Aktien unter- und negative übergewichtet.

---

[10] An dieser Stelle könnte man einwenden, dass (17) auch von jeder Lognormalverteilung mit erstem Parameter $(r - \xi^2/ 2)\, T + \ln(S_0)$ und zweitem Parameter $\xi^2 T$ mit beliebigem ξ erfüllt wird. Dieser vermeintliche „Freiheitsgrad“ tritt hier jedoch lediglich deshalb auf, weil die Bedingung (17) zu schwach ist. Korrekterweise ist nicht nur die Verteilung zum Zeitpunkt T, sondern die Verteilung des gesamten Prozesses (10) beziehungsweise das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß derart zu verändern, dass $S_t / e^{r\,t}$ ein Martingal ist. Vgl. zu diesem allgemeinen Prinzip insbesondere die grundlegende Arbeit von Harrison/Pliska (1981) sowie beispielhaft Zimmermann (1998) und Bingham/Kiesel (2000). Dieses Prinzip liegt de facto, ohne dass es hier erwähnt wurde, auch dem Binomialmodell zugrunde. $S_t / e^{r\,t}$ ist genau dann ein Martingal, wenn μ durch r ersetzt wird, vgl. zum Beispiel Bingham/Kiesel (2000), S. 184-191. Die daraus resultierende Verteilung per T ist die angegebene.

Tabelle 3: Verteilungsparameter bei geometrischer Brownscher Bewegung

	reale Welt	real-risikoneutrale Welt	bewertungsrelevante risikoneutrale Welt
		Aktienkurs	
aktueller Kurs	100,00	111,65	100,00
Verteilungstyp		Logarithmische Normalverteilung	
Erwartungswert	115,00		103,00
Varianz	2.500		2.005
Standardabweichung	50,00		44,78
std. Schiefe	1,387		1,387
std. Kurtosis	6,602		6,602
Median	105,46		94,46
Modus	88,70		79,44
Risikoprämie		11,65	
		diskrete Aktienrendite	
Verteilungstyp		Logarithmische Normalverteilung	
Erwartungswert	15,00 %	3,00 %	
Varianz	25,00 %	20,05 %	
Standardabweichung	50,00 %	44,78 %	
std. Schiefe	138,7 %	138,7 %	
std. Kurtosis	660,2 %	660,2 %	
Median	5,46 %	– 5,54 %	
Modus	– 11,30 %	– 20,56 %	
		kontinuierliche Aktienrendite	
Verteilungstyp		Normalverteilung	
Erwartungswert	5,32 %	– 5,70 %	
Varianz		17,31 %	
Standardabweichung		41,61 %	

Abbildung 2: Dichtefunktionen bei geometrischer Brownscher Bewegung

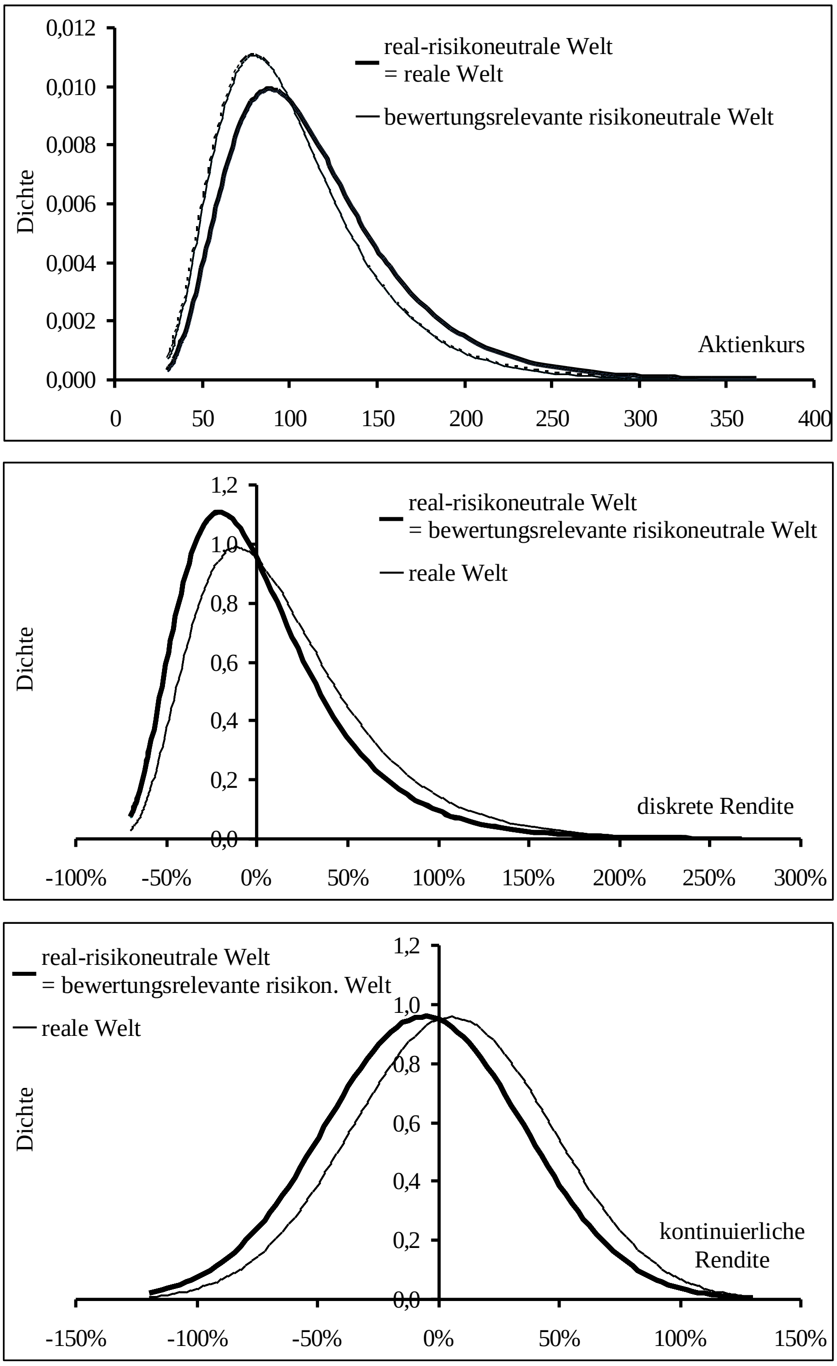


Abbildung 2 und Tabelle 3 enthalten die Dichten und Verteilungsparameter der Aktienkurse sowie der diskreten und kontinuierlichen Renditen in der realen, der real-risikoneutralen und der bewertungsrelevanten Welt. Neben den bereits diskutierten Momenten sind auch die standardisierte Schiefe und Kurtosis sowie Median und Modus aufgeführt. Formeln hierfür finden sich in der einschlägigen Standardliteratur.[11] Insbesondere mit den Abbildungen soll ein leichter und intuitiv eingängiger Zugang zu den wesentlichen Zusammenhängen ermöglicht werden.

Annahmegemäß stimmen die Verteilungen des Kurses in der realen und der real-risikoneutralen Welt überein. Die Verteilungen der Renditen sind hingegen in der bewertungsrelevanten und der real-risikoneutralen Welt identisch, da sie zum einen wegen der Risikoneutralitätsbedingung den gleichen Erwartungswert aufweisen und zum anderen auch die Standardabweichungen übereinstimmen[12] und die Lognormalverteilungen durch diese Parameter determiniert sind. So ist zum Beispiel die erwartete diskrete Rendite in der real-risikoneutralen Welt mit (16) und (1) gegeben durch

$$(19)\quad \frac{E(S_T)-S_0^*}{S_0^*}=\frac{e^{\mu T}S_0-e^{-rT}E(S_T)}{e^{-rT}E(S_T)}=\frac{e^{\mu T}S_0-e^{-rT}e^{\mu T}S_0}{e^{-rT}e^{\mu T}S_0}=\mathrm{e}^{rT}-1$$

und entspricht damit der erwarteten diskreten Rendite in der bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt. Für kontinuierliche Renditen sowie die Standardabweichungen ergeben sich die Überlegungen analog.

B.IV. Risikoprämien

Risikoneutrale Investoren sind bei gleicher erwarteter Auszahlung indifferent zwischen einem risikobehafteten und einem risikofreien Finanztitel (hier zwischen der Aktie per T und einem Zerobond mit Nominalwert $E(S_T)$). An den realen Märkten herrscht hingegen Risikoaversion, so dass die Preise im Allgemeinen eine Risikoprämie enthalten.[13] Im Rahmen des CAPM ist dies äquivalent dazu, dass Investoren für die Übernahme systematischen Risikos eine Verzinsung oberhalb der risikofreien Rendite und mithin eine positive Überschuss-

[11] Vgl. beispielhaft Aitchison/Brown (1981), S. 8, oder Taylor (1986), S. 36.

[12] Vgl. die hierfür notwendige Bedingung in Fn. 10.

[13] Die Risikoaversion der am Kapitalmarkt agierenden Investoren ist unterschiedlich. Der beobachtbare Marktpreis lässt sich gleichgewichtstheoretisch durch den Preis erklären, bei dem sich Angebot und Nachfrage ausgleichen. Dementsprechend spiegelt der Preis eine „durchschnittliche“ Risikoaversion wider. In der Literatur wird deshalb häufig von einem „durchschnittlichen Investor“ ausgegangen, vgl. exemplarisch Rubinstein (1976), S. 411.

rendite erwarten.[14] Die hier als absolute Größe definierte Risikoprämie RP entspricht der Differenz $S_0^* - S_0$ der Preise des betrachteten Finanztitels in einer Welt, in der sämtliche Investoren risikoneutral sind, mithin der real-risikoneutralen Welt, und in der realen Welt.[15] Sie ergibt sich mit (1) und (7) zu:

$$(20) \quad RP = S_0^* - S_0 = e^{-r\,T} E(S_T) - S_0$$

$$= e^{-r\,T} E(S_T) - e^{-\mu\,T} E(S_T) = e^{-r\,T} (1 - e^{-(\mu - r)\,T}) E(S_T).$$

Wegen der Voraussetzung $\mu > r$ ist die Risikoprämie positiv, das heißt, gegenüber risikoneutralen Investoren wird ein (Risiko-)Abschlag verlangt:

$$(21) \quad S_0 = S_0^* - RP = e^{-r\,T} E(S_T) - RP.$$

Andererseits gilt

$$(22) \quad S_0 = e^{-r\,T} E'(S_T)$$

und damit

$$(23) \quad e^{-r\,T} E'(S_T) = e^{-r\,T} E(S_T) - RP$$

mit der risikoneutralen Verteilung P' (vgl. B.III.2).[16] Obwohl der Preis S_0 allein über Erwartungswertbildung dargestellt werden kann (vgl. linke Seite von (23)) und sich damit wie bei risikoneutralen Investoren ergibt, enthält er wie ausgeführt eine Risikoprämie (vgl. rechte Seite von (23)). Diese Risikoprämie ist demnach implizit in der Verteilung P' enthalten, die Verteilung ist sozusagen risikoprämienadjustiert. Wie in den entsprechenden Abschnitten zum Binomialmodell und dem kontinuierlichen Modell ausgeführt, erfolgt diese Risikoprämienadjustierung durch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Übergewichtung für den Investor „schlechter“ Ereignisse und eine Untergewichtung „guter“ Ereignisse.

---

[14] Die Risikoprämie muss jedoch nicht bei jedem Finanzititel positiv, sondern kann – trotz angenommener Risikoaversion – auch negativ sein. Dies ist zum Beispiel bei Put-Optionen der Fall, durch die systematisches Risiko vernichtet wird. Vgl. hierzu die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt C.

[15] Die folgenden Ausführungen sind invariant unter dem konkreten Finanztitel, also nicht nur für Aktien von Bedeutung. Für analoge Ausführungen zu Optionen vgl. Abschnitt C, für eine Übertragung und Erweiterung auf Forderungstitel vgl. Entrop (2000), S. 270-273.

[16] Wird die Risikoprämie nicht als absoluter Preisabschlag, sondern als Zinsaufschlag rp definiert, so bedeutet dies $e^{-(r\,+\,rp)\,T} E(S_T) = e^{-r\,T} E'(S_T)$.

Bei der bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt muss man sich also mit der zunächst paradox erscheinenden Tatsache auseinandersetzen, dass Preise in einer risikoneutralen Welt eine Risikoprämie (bezogen auf die reale Welt) enthalten. Dies wird auch durch Umformung von (23) deutlich:

(24) $RP = e^{-r\,T}\,(E(S_T) - E'(S_T))$,

das heißt, die Risikoprämie ist die abgezinste Differenz der erwarteten Werte der Aktie in der realen und bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt. Damit entspricht die Risikoprämie zum einen der Differenz der Werte in der realen und real-risikoneutralen Welt (vgl. (20)) und zum anderen der abgezinsten Differenz der erwarteten Werte in der realen und bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt (vgl. (24)).

C. Aktienoptionen

C.I. Binomialmodell

C.I.1. Reale Welt

Im Folgenden werden europäische Optionen f mit (Rest-)Laufzeit beziehungsweise Fälligkeit T betrachtet, deren Auszahlung nur vom Aktienkurs in T abhängt. Zur Veranschaulichung dienen Plain-Vanilla-Calls und -Puts mit $T = 1$ und dem Ausübungspreis $X = 110$. Die Payoff-Strukturen eines Calls beziehungsweise Puts sind gegeben durch

(25) $c_T = \max\{S_T - X; 0\}$ bzw. $p_T = \max\{X - S_T; 0\}$.

Im Binomialmodell seien f_T^u beziehungsweise f_T^d die beiden möglichen Werte der Option bei Fälligkeit in Abhängigkeit vom Aktienkurs. Im Beispiel eines Calls ist $f_T^u = \max\{u\,S_0 - X; 0\}$ und $f_T^d = \max\{d\,S_0 - X; 0\}$. Für einen Put ist entsprechend $f_T^u = \max\{X - u\,S_0; 0\}$ beziehungsweise $f_T^d = \max\{X - d\,S_0; 0\}$. Dabei ist es sinnvoll anzunehmen, dass der Ausübungspreis zwischen den beiden möglichen Ausprägungen des Aktienkurses in T liegt, das heißt $d\,S_0 < X < u\,S_0$.

Die Bewertung einer solchen Option beruht auf der duplikationstheoretisch grundlegenden Idee, aus Δ Aktien und einem Zerobond[17] mit Nominalwert ZB ein Portfolio derart zusammenzustellen, dass es zum Fälligkeitszeitpunkt immer den gleichen Wert aufweist wie die Option. Eine Investition in dieses Portfolio ist dann gleichbedeutend mit einer Investition in die Option, so dass aus Arbitrageüberlegungen die Werte beider Investitionsalternativen identisch sein müssen. Zur Bestimmung von Δ und ZB muss hierzu für jeden möglichen Aktienkurs S_T gelten:

(26) $f_T = \Delta\, S_T + ZB.$

Da im Binomialmodell in T nur zwei Aktienkurse möglich sind, wird die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten gesucht:

(27) $f_T^u = \Delta\, u\, S_0 + ZB,$

(28) $f_T^d = \Delta\, d\, S_0 + ZB.$

Als Lösung erhält man

(29) $\Delta = \dfrac{f_T^u - f_T^d}{(u-d)\, S_0}$ und $ZB = \dfrac{f_T^d\, u - f_T^u\, d}{u-d}.$

Der Wert der Option muss nun dem Wert der im Duplikationsportfolio enthaltenen Finanztitel entsprechen, da ansonsten Arbitragegewinne möglich wären. Der heutige Wert des Zerobonds ist $e^{-r\,T}\, ZB$ und der der Aktie natürlich S_0. Damit ist

(30) $f_0 = \Delta\, S_0 + e^{-r\,T}\, ZB = \Delta\, S_0 + e^{-r\,T}\, \dfrac{f_T^d\, u - f_T^u\, d}{u-d}.$

Bemerkenswert ist an dieser Formel, dass sie unabhängig von den (realen) Eintrittswahrscheinlichkeiten für die möglichen Ausprägungen des Aktienkurses und damit auch des Optionswertes ist. Die Wachstumsrate μ und damit der reale Erwartungswert des Aktienkurses haben keinen Einfluss auf den Optionswert. Hingegen sind der real erwartete Wert der Option zum Zeitpunkt T und die Standardabweichung abhängig von der realen Wahrscheinlichkeit p:

(31) $E(f_T) = p\, f_T^u + (1-p)\, f_T^d$ und $Std(f_T) = \sqrt{p\,(1-p)}\ \left| f_T^u - f_T^d \right|.$

[17] Dies entspricht einer Kreditaufnahme beziehungsweise Geldanlage.

Abbildung 3: Callwerte im Binomialmodell

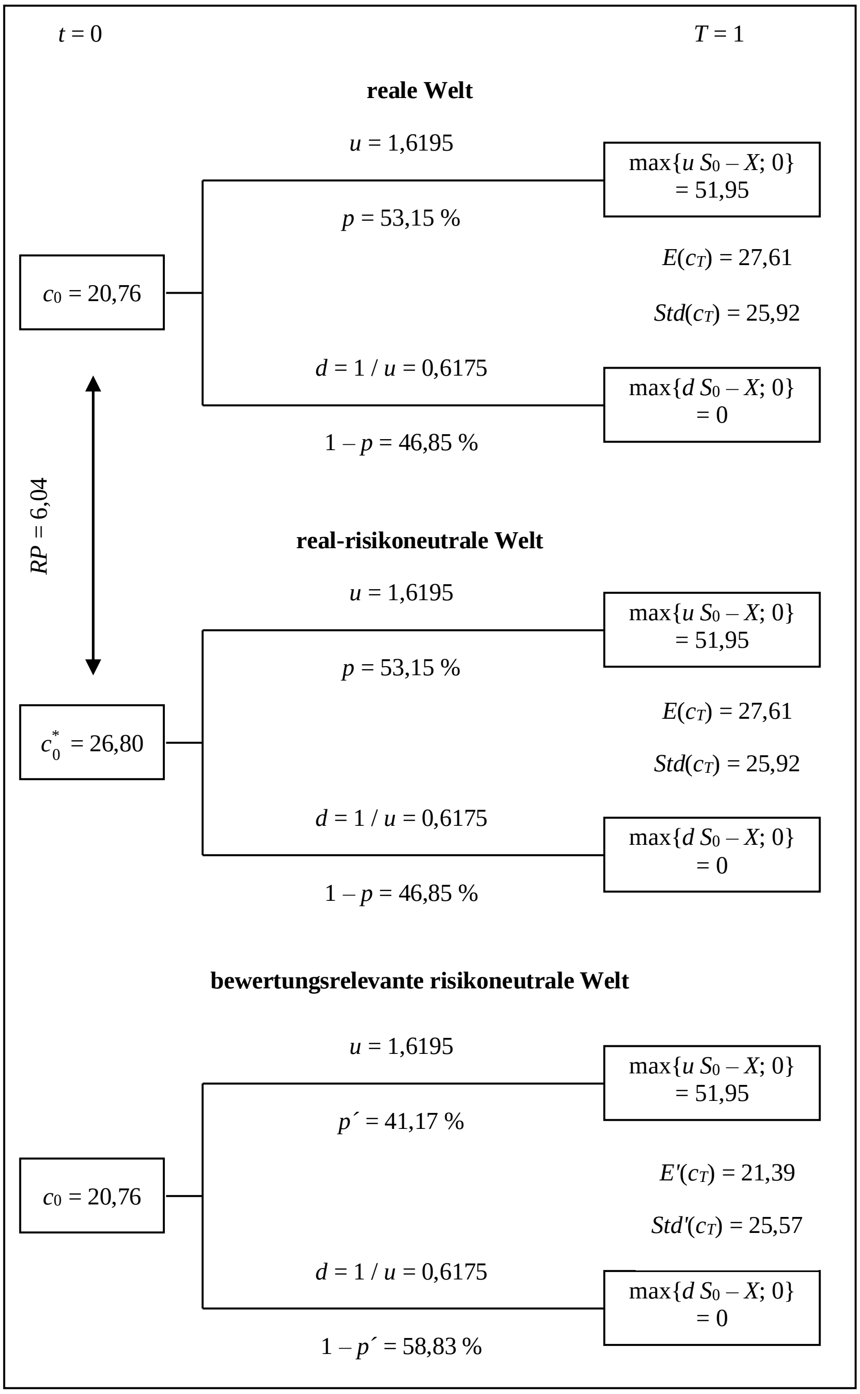
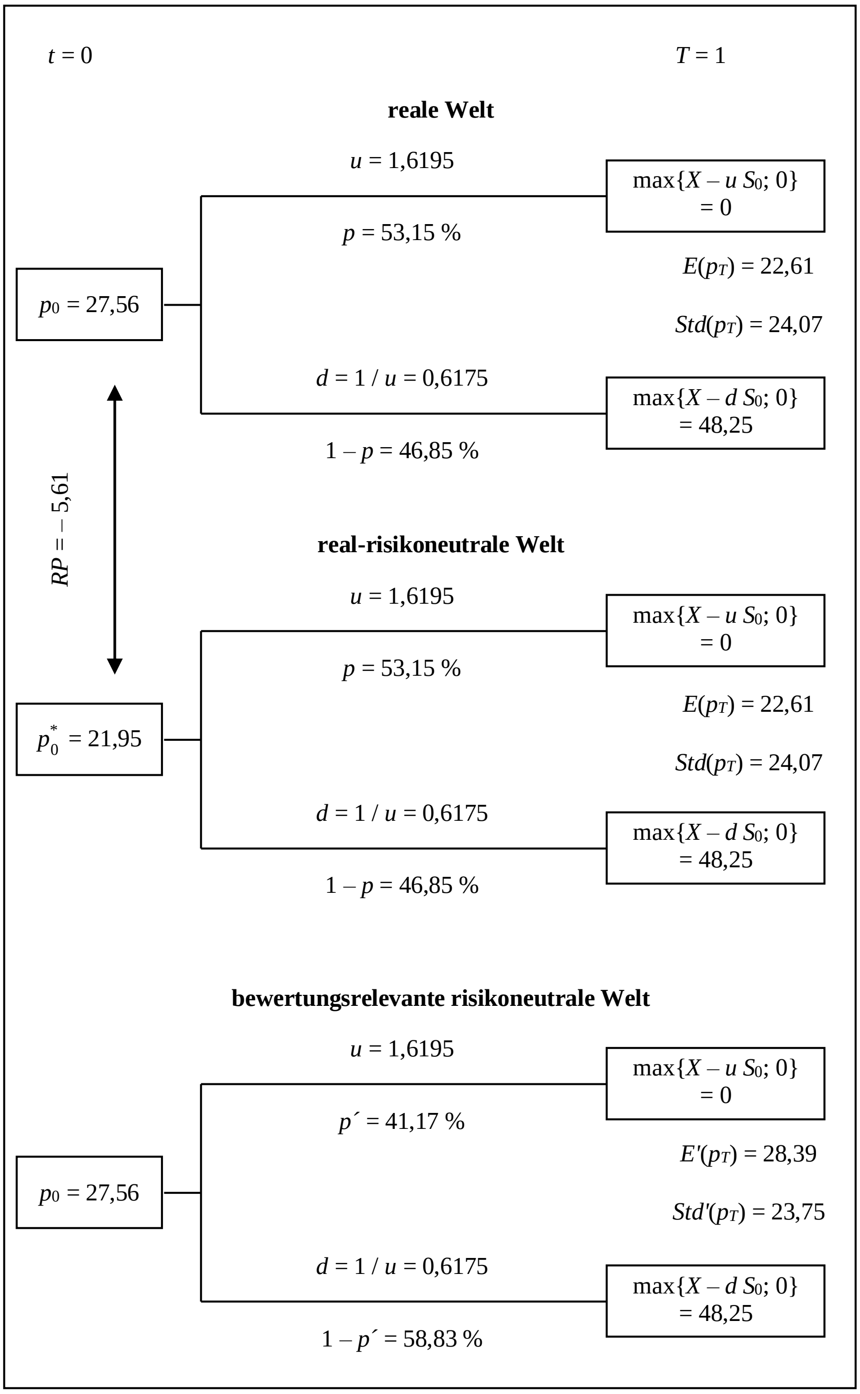


Abbildung 4: Putwerte im Binomialmodell



C.I.2. Bewertungsrelevante risikoneutrale Welt

Der Clou der modernen Derivatebewertung liegt in der Präferenzfreiheit. Damit einhergehend sind für die Optionsbewertung nicht die realen, sondern die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bewertungsrelevant. Dies lässt sich aus der duplikationstheoretisch begründeten Herleitung zeigen. Werden (27) und (28) nach *ZB* aufgelöst und in (30) eingesetzt, so ergibt sich mit (9):

$$
\begin{aligned}
(32)\quad f_0 &= e^{-r\,T}\,ZB + \Delta\,S_0 \\
&= e^{-r\,T}\,(p'\,(f_T^u - \Delta\,u\,S_0) + (1-p')\,(f_T^d - \Delta\,d\,S_0)) + \Delta\,S_0 \\
&= e^{-r\,T}\,(p'\,f_T^u + (1-p')\,f_T^d) - e^{-r\,T}\,\Delta\,S_0\,(p'\,u + (1-p')\,d) + \Delta\,S_0 \\
&= e^{-r\,T}\,(p'\,f_T^u + (1-p')\,f_T^d) \\
&= e^{-r\,T}\,E'(f_T).
\end{aligned}
$$

Während also bei (30) noch explizit die Hedgeratio Δ angegeben werden musste, bedeutet (32), dass der heutige, duplikationstheoretisch begründete Wert einer Option genau dem abgezinsten Erwartungswert der Auszahlung bezüglich der bewertungsrelevanten risikoneutralen Verteilung entspricht. Damit wird die Wahl des Begriffes bewertungsrelevante risikoneutrale Welt noch deutlicher (vgl. für die verschiedenen Welten die Abbildungen 3 und 4). Der duplikationstheoretisch begründete Optionswert ergibt sich durch Erwartungswertbildung bezüglich der geeignet adjustierten Verteilung P'. Eine Welt mit der Verteilung P' ist bewertungsrelevant und die Bepreisung über die Erwartungswertbildung ist ein Zeichen für die Risikoneutralität.

C.II. Black/Scholes-Modell (geometrische Brownsche Bewegung)

C.II.1. Reale Welt

In Analogie zum Binomialmodell lässt sich auch im Zusammenhang mit der unterstellten geometrischen Brownschen Bewegung der Aktienkurse ein Duplikationsportfolio aus Δ Aktien und einem Zerobond bilden, das sich identisch zur Option verhält, wobei allerdings jetzt die Hedgeratio Δ kontinuierlich angepasst werden muss.[18] Mithilfe der Hedgeratio beziehungsweise des Duplikationsportfolios kann dann die Option bewertet werden, und man gelangt schließlich zu den bekannten Black/Scholes-Formeln. Die Kenntnis der konkreten Hedgeratio kann bei der Bewertung jedoch – wie im Binomialmodell – ersetzt werden durch den Übergang zur bewertungsrelevanten risikoneutralen Verteilung P', worauf in Abschnitt C.II.2 eingegangen wird.

Im Folgenden wird die reale Verteilung der Auszahlung aus dem Derivat analysiert. Dazu sei $f_T = \pi(S_T)$ der Payoff der Option in T in Abhängigkeit vom Aktienkurs. Der Erwartungswert dieser Auszahlung in der realen Welt ist mit der Dichte (11) gegeben durch[19]

$$(33)\quad E(f_T) = E(\pi(S_T))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma} \int_0^\infty \frac{\pi(s_T)}{s_T} \exp\left(\frac{-(\ln(s_T / S_0) - (\mu - \sigma^2 / 2)\,T)^2}{2\,\sigma^2\,T}\right) ds_T\,.$$

Für Calls und Puts lassen sich hierfür und auch für höhere Momente rekursive Formeln herleiten, was eine relativ einfache Berechnung ermöglicht. Wesentlich sind die oberen (upper) beziehungsweise unteren (lower) n-ten Momente der Verteilung des Aktienkurses in T:[20]

$$(34)\quad U(n) = E(S_T^n\, 1_{\{S_T \geq X\}}) = S_0^n \exp(n\,(\mu + (n-1)\,\sigma^2 / 2)T)\, N(d(\mu, n)),$$

$$(35)\quad L(n) = E(S_T^n\, 1_{\{S_T \leq X\}}) = S_0^n \exp(n\,(\mu + (n-1)\,\sigma^2 / 2)T)\, N(-d(\mu, n))$$

mit

$$(36)\quad d(h, n) = \frac{\ln(S_0 / X) + (h + (2\,n-1)\,\sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(\cdot)$.

[18] Dies wird auch als dynamische Duplikationsstrategie bezeichnet. Für Details s. Black/Scholes (1973), Merton (1974) oder Hull (2003), S. 302-305.

[19] Vgl. allgemein Krengel (1991), S. 144.

[20] Vgl. hierzu Lhabitant (1998), S. 28-30. Die Indikatorfunktion 1_A ist dabei gleich eins, wenn die Bedingung A wahr ist, und null sonst.

Die nicht-zentralen Momente n-ter Ordnung ($n \geq 1$) des Payoffs von Calls und Puts bestimmen sich dann zu:[21]

$$(37)\quad E(c_T^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} X^{n-j}\, U(j),$$

$$(38)\quad E(p_T^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j} X^{n-j}\, L(j).$$

Die zentralen Momente sind gegeben durch:

$$(39)\quad E((c_T - E(c_T))^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} E(c_T^j)\, E(c_T)^{n-j},$$

$$(40)\quad E((p_T - E(p_T))^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} E(p_T^j)\, E(p_T)^{n-j}.$$

Für die Erwartungswerte erhält man mit (37), (38) und $n = 1$

$$(41)\quad E(c_T) = E(\max\{S_T - X;\, 0\}) = S_0\, e^{\mu T} N(d(\mu, 1)) - X\, N(d(\mu, 0))$$

beziehungsweise

$$(42)\quad E(p_T) = E(\max\{X - S_T;\, 0\}) = -\, S_0\, e^{\mu T} N(-\, d(\mu, 1)) + X\, N(-\, d(\mu, 0)),$$

und für die Varianzen mit (39), (40) und $n = 2$

$$(43)\quad Var(c_T) = -\,(S_0\, e^{\mu T} N(d(\mu, 1)) - X\, N(d(\mu, 0)))^2 + S_0^2\, e^{2(\mu + \sigma^2/2)T} N(d(\mu, 2)) - 2\, S_0\, X\, e^{\mu T} N(d(\mu, 1)) + X^2 N(d(\mu, 0))$$

beziehungsweise

$$(44)\quad Var(p_T) = -\,(-\, S_0\, e^{\mu T} N(-\, d(\mu, 1)) + X\, N(-\, d(\mu, 0)))^2 + S_0^2\, e^{2(\mu + \sigma^2/2)T} N(-\, d(\mu, 2)) - 2\, S_0\, X\, e^{\mu T} N(-\, d(\mu, 1)) + X^2 N(-\, d(\mu, 0)).$$

---

[21] Zur Definition der Payoff-Struktur s. Abschnitt C.I.1. Zur Herleitung der folgenden Formeln s. Anhang 1.

C.II.2. Bewertungsrelevante risikoneutrale Welt

Auch beim Black/Scholes-Modell gelangt man wie erläutert mit einer der im Binomialmodell vergleichbaren Argumentation zu einer risikoneutralen Bewertungssystematik. Der Wert einer Option ergibt sich in Analogie zu (32) als abgezinster Erwartungswert in der bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt, also bezüglich der risikoneutralen Verteilung P':[22]

$$(45)\quad f_0 = e^{-r\,T}\,E'(\pi(S_T))$$

$$= e^{-r\,T}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,T}\;\sigma}\int_0^\infty \frac{\pi(s_T)}{s_T}\exp\left(\frac{-(\ln(s_T/S_0)-(r-\sigma^2/2)\,T)^2}{2\,T\,\sigma^2}\right)ds_T\,.$$

Dieser Wert ist duplikationstheoretisch begründet. Die notwendige Hedgeratio zum Zeitpunkt null, Δ_0, ergibt sich als Ableitung des Optionswertes f_0 nach dem Wert der Aktie S_0:

$$(46)\quad \Delta_0 = \frac{\partial f_0}{\partial S_0}\,.$$

Das Duplikationsportfolio besteht dann aus Δ_0 Aktien und einem Zerobond mit Barwert $f_0 - \Delta_0\,S_0$. Der Vorteil der Bewertung in der risikoneutralen Welt liegt darin, dass unter geringen technischen Vorraussetzungen[23] ein duplikationstheoretisch begründeter Wert bestimmt werden kann, ohne das Duplikationsportfolio ex ante zu kennen.

Für Call und Put ergeben sich über (45) die wohl bekannten Black/Scholes-Formeln, wobei für die Erwartungswertbildung die Formeln (34) bis (38) angewendet werden können, wenn die Drift μ durch den Zinssatz r ersetzt wird:

$$(47)\quad c_0 = e^{-r\,T}\,E'(\max\{S_T - X;\,0\}) = S_0\,N(d(r,1)) - e^{-r\,T}\,X\,N(d(r,0)),$$

$$(48)\quad p_0 = e^{-r\,T}\,E'(\max\{X - S_T;\,0\}) = -\,S_0\,N(-\,d(r,1)) + e^{-r\,T}\,X\,N(-\,d(r,0)).$$

In den folgenden Abbildungen werden die Dichtefunktionen des Call- und Putwertes in T wiedergegeben. Diese Dichten existieren nicht im klassischen Sinne, da eine Auszahlung in Höhe von 0 bei Fälligkeit in der Regel eine posi-

---

[22] Vgl. zum Beispiel Bingham/Kiesel (2000), S. 178.

[23] So muss beispielsweise in der Regel der Erwartungswert (45) existieren, vgl. zu Formalia exemplarisch Harrison/Pliska (1981).

tive Wahrscheinlichkeit besitzt, die zugehörigen Verteilungen mithin atomar sind. Dennoch lassen sich verallgemeinerte Dichten bestimmen, die im nicht-atomaren Teil mit „klassischen" Dichten übereinstimmen (vgl. hierzu Anhang 2). Diese nicht atomaren Teile sind dabei über Standard-Transformationssätze herleitbar und werden in den Abbildungen wiedergegeben. Wie bei den Aktienkursen stimmen die Verteilungen der Optionswerte in der realen und real-risikoneutralen Welt überein (vgl. die Abbildungen 5 und 6). Die entsprechenden Verteilungsparameter im Beispiel sind Tabelle 4 zu entnehmen.

Abbildung 5: Nicht-atomarer Teil der Dichtefunktion des Callwertes bei geometrischer Brownscher Bewegung des Aktienkurses

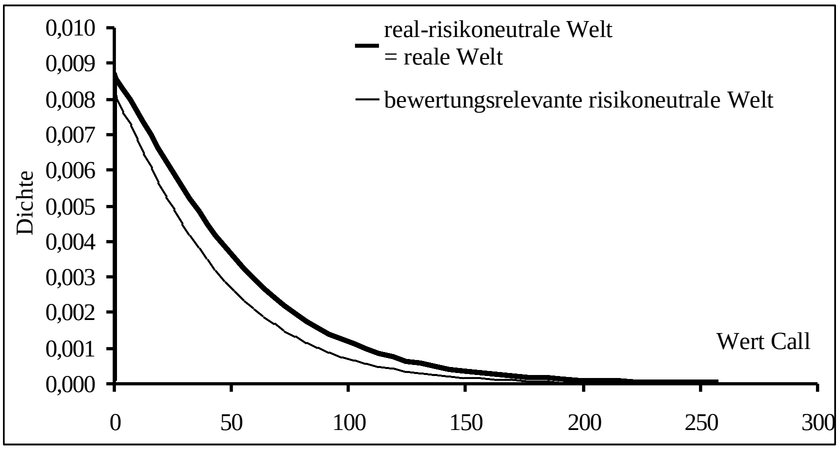


Abbildung 6: Nicht-atomarer Teil der Dichtefunktion des Putwertes bei geometrischer Brownscher Bewegung des Aktienkurses

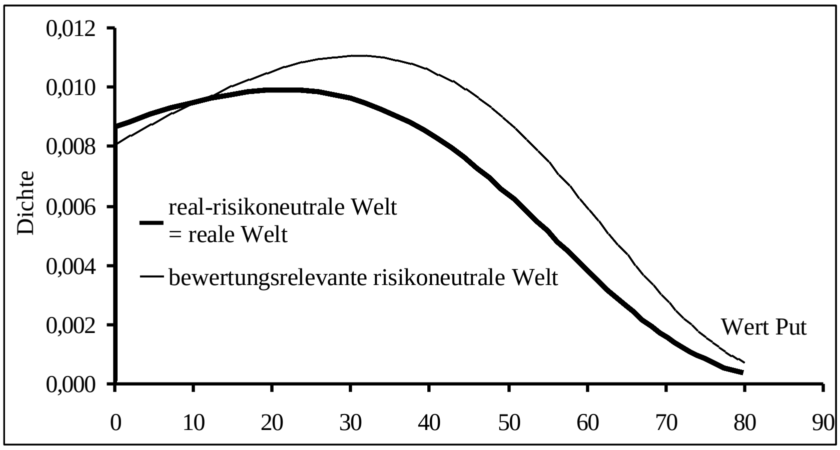


Tabelle 4: Verteilungsparameter bei geometrischer Brownscher Bewegung

	reale Welt	real-risikoneutrale Welt	bewertungsrelevante risikoneutrale Welt
		Callwert	
aktueller Wert	13,85	20,53	13,85
Verteilungstyp	verschobene gestutzte logarithmische Normalverteilung		
Erwartungswert	21,15		14,27
Varianz	1.409		907
Standardabweichung	37,54		30,11
std. Schiefe	2,731		3,248
std. Kurtosis	13,68		17,93
Ausübungswahrschein-lichkeit	45,97 %		35,72 %
Risikoprämie		6,68	
		diskrete Callrendite	
Verteilungstyp	verschobene gestutzte logarithmische Normalverteilung		
Erwartungswert	52,65 %	3,00 %	
Varianz	734,4 %	334,4 %	472,5 %
Standardabweichung	271,0 %	182,9 %	217,4 %
		Putwert	
aktueller Wert	20,65	15,68	20,65
Verteilungstyp	verschobene gestutzte logarithmische Normalverteilung		
Erwartungswert	16,15		21,27
Varianz	407,9		491,9
Standardabweichung	20,20		22,18
std. Schiefe	1,0249		0,6716
std. Kurtosis	2,906		2,249
Ausübungswahrschein-lichkeit	54,03 %		64,28 %
Risikoprämie		– 4,97	
		diskrete Putrendite	
Verteilungstyp	verschobene gestutzte logarithmische Normalverteilung		
Erwartungswert	– 21,81 %	3,00 %	
Varianz	95,68 %	166,02 %	115,37 %
Standardabweichung	97,82 %	128,85 %	107,41 %

C.III. Risikoprämien

Parallel zu den Überlegungen im Zusammenhang mit der Aktie kann nun auch die Risikoprämie in Optionspreisen bestimmt werden. Diese Risikoprämie *RP* ist analog zu (20) gerade die Differenz zwischen den Optionswerten in der realen und der real-risikoneutralen Welt (vgl. die Abbildungen 3 und 4 sowie Tabelle 4). Letzterer ist nach Definition der real-risikoneutralen Welt gegeben durch

(49) $f_0^* = e^{-r\,T}\, E(f_T)$,

somit erhält man

(50) $RP = f_0^* - f_0 = e^{-r\,T}\, E(f_T) - f_0 = e^{-r\,T}\,(E(f_T) - E'(f_T))$.

Wiederum in Analogie zu (24) ist die Risikoprämie also die abgezinste Differenz der erwarteten Werte der Option in der realen und bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt.

Im Binomialmodell ist

(51) $f_0^* = e^{-r\,T}\,(p\, f_T^u + (1-p)\, f_T^d)$ und $f_0 = e^{-r\,T}\,(p'\, f_T^u + (1-p')\, f_T^d)$

und damit

(52) $RP = e^{-r\,T}\,(p - p')\,(f_T^u - f_T^d)$.

Wegen $p > p'$ gilt $RP > 0$ genau dann, wenn $f_T^u > f_T^d$ ist, das heißt, die Risikoprämie ist genau dann positiv, wenn wie bei einem Call eine Wertsteigerung der Aktie auch zu einem größeren Optionswert bei Fälligkeit führt. Umgekehrt ist sie negativ, wenn der Optionswert bei niedrigerem Aktienkurs höher ist.

Im Black/Scholes-Modell ist der Wert eines Calls in der real-risikoneutralen Welt

(53) $c_0^* = e^{-r\,T}\, E(c_T) = S_0^*\, N(d(\mu, 1)) - e^{-r\,T}\, X\, N(d(\mu, 0))$

und der eines Puts

(54) $p_0^* = e^{-r\,T}\, E(p_T) = -\, S_0^*\, N(-\, d(\mu, 1)) + e^{-r\,T}\, X\, N(-\, d(\mu, 0))$,

das heißt, diese Formeln unterscheiden sich hier von denen für die reale Welt (vgl. (47), (48)) wiederum nur durch Austausch der Parameter r und μ sowie S_0 und S_0^*. Damit erhält man die Risikoprämien zu $c_0^* - c_0$ beziehungsweise $p_0^* - p_0$.

In Analogie zu den Überlegungen im Binomialmodell zeigt sich, dass die Risikoprämie stets positiv ist, wenn die Auszahlung $f_T = \pi(S_T)$ der Option eine monoton wachsende Funktion des Aktienkurses S_T darstellt, wie zum Beispiel bei einem Call. Auf der anderen Seite ist sie stets negativ, wenn π monoton fällt wie bei einem Put. Dieser Zusammenhang lässt sich über Gleichung (26) beziehungsweise deren dynamische Variante auch duplikationstheoretisch begründen, wenn man berücksichtigt, dass die Hedgeratio Δ als Ableitung des Optionswertes nach dem Aktienkurs bei Calls stets positiv und bei Puts stets negativ ist.[24] Allgemein bedeutet Monotonie von π gerade konstantes Vorzeichen der Hedgeratio.[25] Das aus Δ Aktien und dem Zerobond gebildete Portfolio muss nun die gleiche Risikoprämie enthalten wie die Option. Da der ausfallrisikofreie Zerobond keine Risikoprämie im hier definierten Sinn aufweist, kann diese lediglich den Δ Aktien zugeordnet werden. Ist Δ positiv, so entspricht der Kauf der Option partiell dem Kauf von Aktien, so dass die Option eine identische positive Risikoprämie enthält wie die Aktienposition. Ist Δ negativ, so entspricht der Kauf der Option umgekehrt partiell dem (Leer-)Verkauf von Aktien. Der (Leer-)Verkäufer von Aktien muss jedoch eine positive Risikoprämie zahlen, da der Käufer diese beansprucht, weshalb eine Short-Position in Aktien eine negative Risikoprämie enthält. Damit enthält eine Option eine negative Risikoprämie – das heißt, der Käufer muss eine Prämie zahlen – genau dann, wenn Δ negativ ist. Dies bedeutet insbesondere, dass im Put eine negative Risikoprämie enthalten ist. Der Käufer eines Puts zahlt also ceteris paribus mehr, als er als Auszahlung aus der Option erwarten kann.

D. Konsequenzen und Zusammenfassung

Wann sollte man nun Optionen kaufen? Die vorstehenden Überlegungen haben gezeigt, dass in der realen Welt mit risikoaversen Investoren Optionspreise grundsätzlich Risikoprämien enthalten. Im Falle von Calls sind diese positiv, das heißt, der Käufer eines Calls erhält als Ausgleich für die übernommene Unsicherheit der zukünftigen Auszahlung einen höheren Erwartungswert als mit einer risikofreien Anlage zu erzielen wäre. Somit kann der Kauf eines Calls aus Investitionsgesichtspunkten durchaus Sinn machen. Hingegen muss der Käufer eines Puts die Risikoprämie zahlen, er wird für die Übernahme von Risiko also quasi bestraft, weshalb der alleinige Kauf eines Puts allenfalls für risikofreudige Investoren sinnvoll sein kann. Erklärt wird dieser Sachverhalt im Portfolio-

[24] Vgl. zum Beispiel Hull (2003), S. 303 f.

[25] Ein formaler Beweis ist auf Anfrage von den Autoren erhältlich. Man kann sich den Zusammenhang aber auch dadurch klar machen, dass bei steigendem Aktienkurs die Dichtefunktion nach rechts verschoben wird, so dass auch der Optionswert steigen wird, wenn bei höherem Aktienkurs der Payoff aus der Option höher ist.

kontext: Da der Wert eines Puts im Allgemeinem negativ mit dem Markt korreliert ist, kann durch seinen Kauf auf Portfolioebene (systematisches) Risiko vernichtet werden, weshalb unter diesem Gesichtspunkt auch für risikoaverse Anleger der Erwerb von Puts vorteilhaft sein kann.

Um zu diesen Antworten zu gelangen, war eine detaillierte Auseinandersetzung mit dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung und damit einhergehend dem Begriff der risikoneutralen Welt notwendig. Es stellte sich heraus, dass dieser Begriff zwei verschiedene ökonomisch sinnvolle Interpretationen zulässt: Neben der in der Literatur gebräuchlichen bewertungsrelevanten risikoneutralen Welt ist als weiteres gedankliches Konstrukt die real-risikoneutrale Welt hilfreich, da sie neben einer hohen Anschaulichkeit eine einfache Kalkulation der Risikoprämien erlaubt. Anhand der Risikoprämien wurde gezeigt, wie sich beide Sichtweisen ineinander überführen lassen und dass sie letztlich zwei verschiedene Spielarten derselben grundlegenden risikoneutralen Bewertungssystematik sind.

Die risikoneutrale Verteilung hat ihre primäre Bedeutung für die Bewertung von Optionen oder allgemeiner Finanztiteln mit derivativem Charakter. Es muss jedoch stets zwischen dieser und der realen Verteilung unterschieden werden. Letztere ist bei verschiedenen Fragestellungen des Risikomanagements von zentraler Bedeutung, so zum Beispiel bei der Bestimmung zukünftiger Preisverteilungen in Value-at-Risk-Ansätzen. Auf keinen Fall sollte dort die reale mit der risikoneutralen Verteilung verwechselt werden.

Verzeichnis der zitierten Literatur

Aitchison, John; *Brown*, James A. (1981): The Lognormal Distribution, repr., Cambridge u. a.

Bingham, Nicholas H.; *Kiesel*, Rüdiger (2000): Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives, 3rd pr., London u. a.

Black, Fisher; *Scholes*, Myron (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy, Vol. 81, S. 637-654.

Cox, John C.; *Ross*, Stephen A.; *Rubinstein*, Mark (1979): Option Pricing: A Simplified Approach, in: Journal of Financial Economics, Vol. 7, S. 229-263.

Duffie, Darrel; *Pan*, Jun (1997): An Overview of Value at Risk, in: Journal of Derivatives, Vol. 4, No. 3, S. 7-49.

Elton, Edwin J.; *Gruber*, Martin J. (1995): Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5th ed., New York u. a.

Entrop, Oliver (2000): Credit-Value-at-Risk unter besonderer Berücksichtigung des Zusammenhangs von Markt- und Kreditrisiken, in: *Holst*, Jonny; *Wilkens*, Marco (Hrsg.): Finanzielle Märkte und Banken – Innovative Entwicklungen am Beginn des 21. Jahrhunderts, Berlin, S. 257-285.

Harrison, J. Michael*; Pliska*, Stanley, R. (1981): Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, in: Stochastic Processes and their Applications, Vol. 11, S. 215-260.

Hull, John C. (2003): Options, Futures & Other Derivatives, 5th ed., Upper Saddle River.

Jarrow, Robert A.; *Turnbull*, Stuart M. (2000): The Intersection of Market and Credit Risk, in: Journal of Banking and Finance, Vol. 24, S. 271-299.

Keller, Thomas*; Sièvi*, Friedemann (1999): Kreditwirtschaft in der Wahrscheinlichkeitsfalle?, in: Die Bank, H. 9, S. 638-643.

Krengel, Ulrich (1991): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 3. Aufl., Braunschweig u. a.

Leisen, Dietmar; *Reimer*, Matthias (1996): Binomial Models for Option Valuation – Examining and Improving Convergence, in: Applied Mathematical Finance, Vol. 3, S. 319-346.

Lhabitant, François-Serge (1998): Enhancing Portfolio Performance Using Options Strategies – Why Beating the Market is Easy, Working Paper, Ecole des Hautes Edutes Commercials, University of Lausanne.

Lohmann, Karl (1990): Finanzielle Haftung im optionstheoretischen Modell, in *Benner*, Wolfgang; *Liebau*, Gerhard (Hrsg.): Finanzielle Haftung in der Geldwirtschaft, Stuttgart, S. 165-228.

Lohmann, Karl (1995): Stochastische Modelle zur Bewertung künftiger Zahlungsleistungen in betriebswirtschaftlicher Sicht, Göttingen.

Merton, Robert C. (1974): On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, in: Journal of Finance, Vol. 29, S. 449-470.

Rubinstein, Mark (1976): The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options, in: Bell Journal of Economics and Management, Vol. 7, S. 407-425.

Taylor, Stephen (1986): Modeling Financial Time Series, Chichester.

Zimmermann, Heinz (1998): State-Preference Theorie und Asset Pricing – eine Einführung, Heidelberg.

Anhang

Anhang 1. Höhere Momente von Calls und Puts

Seien S eine lognormalverteile Zufallsvariable zu den Parametern $(h - \sigma^2 / 2)\, T + \ln(S_0)$ und $\sigma^2\, T$ sowie $X > 0$ eine Konstante. Nach Lhabitant (1998), S. 30, gilt für die oberen beziehungsweise unteren Momente von S:

$$U(n) = E(S^n\, 1_{\{S_T \geq X\}}) = S_0^n \exp(n\,(h + (n-1)\,\sigma^2 / 2)T)\; N(d(h, n)),$$

$$L(n) = E(S^n\, 1_{\{S_T \leq X\}}) = S_0^n \exp(n\,(h + (n-1)\,\sigma^2 / 2)T)\; N(-d(h, n))$$

mit $d(h, n) = \dfrac{\ln(S_0 / X) + (h + (2\,n-1)\,\sigma^2 / 2)\,T}{\sigma\,\sqrt{T}}$.

Satz (i) *Für die n-ten nicht-zentralen Momente ($n \geq 1$) von $c = max\{S - X; 0\}$ und $p = max\{X - S; 0\}$ gilt:*

$$E(c^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}\, X^{n-j}\, U(j),$$

$$E(p^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j}\, X^{n-j}\, L(j).$$

(ii) *Für die n-ten zentralen Momente gilt:*

$$E((c - E(c))^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}\, E(c^j)\, E(c)^{n-j},$$

$$E((p - E(p))^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}\, E(p^j)\, E(p)^{n-j}.$$

Beweis: Der Beweis wird geführt für c, der Beweis für p verläuft analog. Sei F die Verteilung von S.

zu (i): Es ist

$$E(c^n) = E((\max\{S - X; 0\})^n) = \int_X^\infty (s - X)^n\, dF = \int_X^\infty \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j}\, s^j\, X^{n-j}\, dF$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} X^{n-j} \int_X^{\infty} s^j \, dF = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} X^{n-j} \, U(j).$$

zu (*ii*): Sei Y eine Zufallsvariable. Dann ist

$$E((Y - E(Y))^n) = E\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} Y^j E(Y)^{n-j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} E(Y^j) \, E(Y)^{n-j}.$$

Anwenden dieser Identität auf c beziehungsweise p liefert mit (*i*) die Behauptung.♥

Anhang 2. Dichten

Satz *Seien X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte h_X, g eine streng monoton wachsende bis auf abzählbar viele Ausnahmen überall differenzierbare Funktion auf den reellen Zahlen und $Y = g(X)$, so ist die Dichte von Y gegeben durch*

(55) $h_Y(y) = h_X(g^{-1}(y)) \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y).$

Ist g streng monoton fallend, so gilt

(56) $h_Y(y) = -\, h_X(g^{-1}(y)) \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y).$

Beweis: Siehe Krengel (1991), S. 139. ♥

Sei f nun ein Derivat mit – wie bei Calls und Puts – monotoner bis auf abzählbar viele Ausnahmen überall differenzierbarer Payoff-Funktion $f_T = \pi(S_T)$ und h_S die Dichte von S_T. Ist diese Payoff-Funktion nicht streng monoton, sondern teilweise flach, so besitzt das Derivat im Allgemeinen keine Dichte im klassischen Sinn, da die Verteilung Atome, das heißt Sprünge aufweist.

Dieser Mangel lässt sich jedoch leicht beheben, wenn auf den Atomen nicht das klassische Lebesgue-Maß λ, sondern geeignete Dirac-Maße betrachtet werden. Seien $x_1, ..., x_n$ die Atome der Verteilung von f_T und $y_i = P(f_T = x_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Dann gilt folgender Zusammenhang für jede (meßbare) Teilmenge A der reellen Zahlen:

(57) $P(f_T \in A) = \int_A h(s)\,ds + \sum_i y_i\,\delta_{x_i}(A).$

Dabei ist $h(y)$ durch (55) respektive (56) für $y \notin \{x_1, ..., x_n\}$ und 0 sonst gegeben; $\delta_{x_i}(A)$ ist genau dann 1, wenn $x_i \in A$ ist, und 0 sonst.

Der erste Teil von (57) entspricht dabei gerade einer „normalen Dichte“ über dem nicht-atomaren Teil, der zweite Teil trägt der Atombildung Rechnung. Mit einer modifizierten Dichte $h^*(y) = h(y)$ für $y \notin \{x_1, ..., x_n\}$ und jeweils $h^*(x_i) = y_i$ sowie dem über $\lambda^*(A) = \lambda(A) + \sum_i \delta_{x_i}(A)$ modifizierten Lebesgue-Maß lässt sich (57) darstellen als

(58) $P(f_T \in A) = \int_A h^*(s)\,d\lambda^*,$

und die Option besitzt somit auch eine Dichte. Analoge Zusammenhänge ergeben sich auch für monotone Funktionen von Derivaten, also zum Beispiel Renditen. Im Folgenden sind die nicht-atomaren Teile der Dichten für Aktienkurs, Callwert und Putwert sowie deren diskrete Renditen über die normalverteilte kontinuierlichen Aktienrendite, deren Dichte mit f_{r_k} bezeichnet werde, aufgeführt:

Aktienkurs: $f_{S_T}(s) = f_{r_k}(\ln(s / S_0))\,\frac{1}{s},$

diskrete Aktienrendite: $f_{r_d,S}(r) = f_{r_k}(\ln(1 + r))\,\frac{1}{1 + r},$

Callwert: $f_{c_T}(c) = f_{r_k}(\ln((X + c) / S_0))\,\frac{1}{X + c}$ $(c > 0),$

diskrete Callrendite: $f_{r_d,c}(r) = f_{r_k}(\ln((X + (1 + r)\,c_0) / S_0))\,\frac{c_0}{X + (1 + r)\,c_0}$ $(r > -1),$

Putwert: $f_{P_T}(p) = f_{r_k}(\ln((X - p) / S_0))\,\frac{1}{X - p}$ $(p > 0),$

diskrete Putrendite: $f_{r_d,P}(r) = f_{r_k}(\ln((X - (1 + r)\,p_0) / S_0))\,\frac{p_0}{X - (1 + r)\,p_0}$ $(r > -1).$