

**О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ
КОНТИГУАЛЬНОСТИ И ПОЛНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ
РАЗДЕЛИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР**

Р. Ш. Липцер, Ф. Пукельшейм, А. Н. Ширяев

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов	97
§ 2. Разложение Лебега	103
§ 3. Асимптотическая равномерная плотность для субмартингалов	108
§ 4. Характеризация контигуальности и полной асимптотической разделимости	111
§ 5. Доказательство теоремы 1	113
§ 6. Доказательство теорем 2 и 3	120
Л и т е р а т у р а	123

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

1. Пусть $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)_{n \geq 1}$ — последовательность измеримых пространств, \mathbf{P}^n и $\tilde{\mathbf{P}}^n$ — вероятностные меры на $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, $n \geq 1$.

О п р е д е л е н и е 1 ([1] — [6]). Последовательность мер $(\tilde{\mathbf{P}}^n)_{n \geq 1}$ называется *контигуальной*¹⁾ по отношению к последовательности мер $(\mathbf{P}^n)_{n \geq 1}$ (обозначение: $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n)$), если для любой последовательности множеств $(A^n)_{n \geq 1}$ с $A^n \in \mathcal{F}^n$

$$(1.1) \quad \lim_n \mathbf{P}^n(A^n) = 0 \Rightarrow \lim_n \tilde{\mathbf{P}}^n(A^n) = 0.$$

О п р е д е л е н и е 2 ([7] — [10]). Последовательности мер $(\tilde{\mathbf{P}}^n)_{n \geq 1}$ и $(\mathbf{P}^n)_{n \geq 1}$ называются *вполне асимптотически разделимыми* (обозначение: $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n)$), если существует подпоследовательность (n') и множества $A^{n'} \in \mathcal{F}^{n'}$ такие, что $\lim_{n'} \mathbf{P}^{n'}(A^{n'}) = 0$, и в то же время $\lim_{n'} \tilde{\mathbf{P}}^{n'}(A^{n'}) = 1$.

З а м е ч а н и е 1. В том частном случае, когда $(\Omega^n, \mathcal{F}^n) \equiv (\Omega, \mathcal{F})$ и $\mathbf{P}^n \equiv \mathbf{P}$, $\tilde{\mathbf{P}}^n \equiv \tilde{\mathbf{P}}$, т. е. когда рассматриваемые измеримые пространства и меры не зависят от n , свойство контигуальности превращается в свойство абсолютной непрерывности ($\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$) меры $\tilde{\mathbf{P}}$ относительно \mathbf{P} , а полная асимптотическая разделимость будет означать сингулярность ($\tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$) мер $\tilde{\mathbf{P}}$ и \mathbf{P} .

¹⁾ Contiguity (*англ.*) — смежность, соприкосновение, близость.

2. Во всем дальнейшем будет предполагаться, что наряду с измеримыми пространствами $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ при каждом $n \geq 1$ заданы семейства σ -алгебр $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$ такие, что $\mathcal{F}_0^n = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n \subseteq \mathcal{F}^n$ и $\mathcal{F}^n = \sigma(\bigcup_k \mathcal{F}_k^n)$. Обозначим $\mathbf{P}_k^n = \mathbf{P}^n | \mathcal{F}_k^n$ и $\tilde{\mathbf{P}}_k^n = \tilde{\mathbf{P}}^n | \mathcal{F}_k^n$ — сужения вероятностных мер \mathbf{P}^n и $\tilde{\mathbf{P}}^n$ на σ -алгебры \mathcal{F}_k^n .

З а м е ч а н и е 2. Пусть на (Ω, \mathcal{F}) заданы две вероятностные меры \mathbf{P} и $\tilde{\mathbf{P}}$, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$ — семейство σ -алгебр, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_k \mathcal{F}_k)$ и $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} | \mathcal{F}_k$, $\tilde{\mathbf{P}}_k = \tilde{\mathbf{P}} | \mathcal{F}_k$. Тогда контигуальность семейства мер $(\tilde{\mathbf{P}}_k)_{k \geq 0}$ по отношению к $(\mathbf{P}_k)_{k \geq 0}$, рассматриваемых на $(\Omega, \mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$, равносильна тому, что мера $\tilde{\mathbf{P}}$ абсолютно непрерывна по отношению к мере \mathbf{P} . Иначе говоря, в этом частном случае

$$(\tilde{\mathbf{P}}_k) \triangleleft (\mathbf{P}_k) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}.$$

Аналогичным образом

$$(\tilde{\mathbf{P}}_k) \triangle (\mathbf{P}_k) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}.$$

3. Для того чтобы сформулировать результаты настоящей работы и объяснить их связь с предшествующими результатами, введем ряд обозначений.

Пусть $\mathbf{Q}^n = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{P}}^n + \mathbf{P}^n)$, $\mathbf{Q}_k^n = \mathbf{Q}^n | \mathcal{F}_k^n$ ($= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{P}}_k^n + \mathbf{P}_k^n)$). Для всякого $0 \leq a \leq \infty$ положим

$$(1.2) \quad a^\oplus = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a^{-1}, & 0 < a < \infty, \\ 0, & a = \infty, \end{cases} \quad a^\ominus = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a^{-1}, & 0 < a < \infty, \\ \infty, & a = \infty, \end{cases}$$

и будем обозначать

$$\mathfrak{z}_{nk} = \frac{d\mathbf{P}_k^n}{d\mathbf{Q}_k^n}, \quad \tilde{\mathfrak{z}}_{nk} = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_k^n}{d\mathbf{Q}_k^n}$$

— производные Радона — Никодима мер \mathbf{P}_k^n и $\tilde{\mathbf{P}}_k^n$ по мере \mathbf{Q}_k^n . (Всюду далее рассматриваются конечные варианты производных Радона — Никодима.)

Положим также (для $k \geq 1$)

$$(1.3) \quad \beta_{nk} = \mathfrak{z}_{nk} \cdot \mathfrak{z}_{n, k-1}^\ominus, \quad \tilde{\beta}_{nk} = \tilde{\mathfrak{z}}_{nk} \cdot \tilde{\mathfrak{z}}_{n, k-1}^\ominus,$$

условившись считать $\mathfrak{z}_{n0} = \tilde{\mathfrak{z}}_{n0} = 1$.

В дальнейшем существенную роль будут играть отношения правдоподобия

$$(1.4) \quad z_{nk} = \frac{\tilde{\mathfrak{z}}_{nk}}{\mathfrak{z}_{nk}}$$

и построенные по ним величины

$$(1.5) \quad \alpha_{nk} = z_{nk} \cdot z_{n, k-1}^\ominus, \quad k \geq 1.$$

Заметим, что в (1.4) не возникает неопределенности вида ∞/∞ ; как обычно, $a/0 = \infty$ для $a > 0$, а в случае неопределенности $0/0$ полагаем z_{nk} равным любому числу, например, для определенности равным нулю, что

несущественно, поскольку

$$Q^n (\tilde{\delta}_{nk} = 0, \delta_{nk} = 0) \leq \frac{1}{2} [\tilde{P}^n (\tilde{\delta}_{nk} = 0) + P^n (\delta_{nk} = 0)] = 0.$$

Таким образом, $z_{nk} = \tilde{\delta}_{nk} \cdot \delta_{nk}^{\oplus} = \tilde{\delta}_{nk} \cdot \delta_{nk}^{\ominus}$ (Q^n -почти наверное (п. н.)). Точно так же в (1.5) неопределенность типа $0 \cdot \infty$ или $\infty \cdot 0$ возникает лишь с Q^n -вероятностью, равной нулю, поскольку состояния 0 и ∞ являются для $(z_{nk})_{k \geq 1}$ поглощающими; см. свойство 3° в § 2.

4. Следующая теорема является одним из основных результатов настоящей статьи¹⁾.

Т е о р е м а 1. I. Для того чтобы $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих двух условий:

$$(\alpha) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n (\sup_k \alpha_{nk} \geq N) = 0,$$

$$(\beta) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{Q^n} [(V \sqrt{\tilde{\beta}_{nk}} - V \sqrt{\beta_{nk}})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] \geq N \right) = 0,$$

где E_{Q^n} — усреднение по мере Q^n .

II. При выполнении (α) условие (β) равносильно любому из условий

$$(\beta^*) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [1 - E^n (V \sqrt{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq N \right) = 0$$

или

$$(\beta^{**}) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} E^n [(1 - V \sqrt{\alpha_{nk}})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] \geq N \right) = 0,$$

где E^n — усреднение по мере P^n .

С л е д с т в и е 1. Пусть $P^n = \mu_1^n \times \mu_2^n \times \dots$, $\tilde{P}^n = \tilde{\mu}_1^n \times \tilde{\mu}_2^n \times \dots$ — меры, являющиеся прямым произведением вероятностных мер на $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, где

$$\Omega^n = \Omega_1^n \times \Omega_2^n \times \dots, \quad \mathcal{F}^n = \mathcal{F}_1^n \otimes \mathcal{F}_2^n \otimes \dots$$

Тогда в условии (β) условные математические ожидания совпадают с безусловными,

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} \frac{d\mu_k^n}{d(\mu_k^n + \tilde{\mu}_k^n)}, \quad \tilde{\beta}_{nk} = \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\mu}_k^n}{d(\mu_k^n + \tilde{\mu}_k^n)}$$

и

$$E_{Q^n} (V \sqrt{\tilde{\beta}_{nk}} - V \sqrt{\beta_{nk}})^2 = \int (V \sqrt{\tilde{\beta}_{nk}} - V \sqrt{\beta_{nk}})^2 d \left(\frac{\mu_k^n + \tilde{\mu}_k^n}{2} \right)$$

есть в точности квадрат расстояния Хеллингера $H(\tilde{\mu}_k^n, \mu_k^n)$ между мерами $\tilde{\mu}_k^n$ и μ_k^n (подробнее см. далее п. 5 в § 2).

Из теоремы 1 в качестве частного случая получаем следующий результат, ранее установленный Остерхофом и Ван Цветом [6]: для контигуальности $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$ семейства (\tilde{P}^n) по отношению к (P^n) , где каждая из мер является

¹⁾ Далее \sup_m означает $\sup_{1 \leq m < \infty}$ и $\lim_m = \lim_{m \rightarrow \infty}$.

прямым произведением мер, необходимо и достаточно, чтобы

$$(a) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sup_k \frac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \geq N \right) = 0,$$

$$(b) \quad \overline{\lim}_n \sum_{k=1}^{\infty} H^2(\tilde{\mu}_k^n, \mu_k^n) < \infty.$$

Следствие 2. Пусть $\mathbf{P}^n = \mu_1^n \times \dots \times \mu_n^n$, $\tilde{\mathbf{P}}^n = \tilde{\mu}_1^n \times \dots \times \tilde{\mu}_n^n$ — меры, являющиеся прямым произведением вероятностных мер на $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, где $\Omega^n = R^n$, $\mathcal{F}^n = \mathcal{B}(R^n)$ и $\mu_i^n = \mu^n$, $\tilde{\mu}_i^n = \tilde{\mu}^n$. Предположим для простоты, что μ^n и $\tilde{\mu}^n$ имеют плотности $p^n(x)$ и $\tilde{p}^n(x)$ по мере Лебега. Тогда в рассматриваемой «треугольной схеме серий, отвечающих случаю независимых одинаково распределенных случайных величин» для $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

$$\lim_N \overline{\lim}_n n \tilde{\mu}^n \left\{ x : \frac{\tilde{p}^n(x)}{p^n(x)} \geq N \right\} = 0$$

и

$$\overline{\lim}_n n \int_{-\infty}^{\infty} (|\sqrt{\tilde{p}^n(x)} - \sqrt{p^n(x)}|)^2 dx < \infty.$$

Следствие 3. Пусть при каждом $n \geq 1$ меры $\tilde{\mathbf{P}}^n$ локально абсолютно непрерывны относительно мер $\tilde{\mathbf{P}}^n$ (обозначение: $\tilde{\mathbf{P}}^n \ll_{loc} \mathbf{P}^n$), т. е.

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^n \ll \mathbf{P}_k^n, \quad k \geq 1.$$

В этом предположении $\tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{n,k-1} < \infty) = 1$, и тогда из теоремы 1 в качестве частного случая получаем результаты работ Игلسона и Гунди [9] и Игلسона и Мемена [10] о том, что условие (a) и условие

$$(1.6) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n (1 - \sqrt{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) = 0$$

являются достаточными для $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n)$.

Следствие 4. В замечании 2 отмечалось, что в том случае, когда на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) с выделенным семейством $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$, $\mathcal{F} = \sigma(\cup \mathcal{F}_k)$ заданы две меры \mathbf{P} и $\tilde{\mathbf{P}}$ с сужениями $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} | \mathcal{F}_k$ и $\tilde{\mathbf{P}}_k = \tilde{\mathbf{P}} | \mathcal{F}_k$, свойство абсолютной непрерывности $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$ равносильно свойству контигуальности $(\tilde{\mathbf{P}}_k) \triangleleft (\mathbf{P}_k)$.

Предположим, что $\tilde{\mathbf{P}} \ll_{loc} \mathbf{P}$. В этом случае условие (a) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{P}} \left(\sup_k \alpha_k < \infty \right) = 1$$

с $\alpha_k = z_k \cdot z_{k-1}^{\ominus}$, $z_k = d\tilde{\mathbf{P}}_k/d\mathbf{P}_k$ и автоматически выполняется (см. далее свойство 5° в § 2).

Поэтому из теоремы 1 вытекает как частный случай следующий результат работы Кабанова, Липцера, Ширяева [11]: если $\tilde{\mathbf{P}} \ll_{loc} \mathbf{P}$, то

$$(1.7) \quad \tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} (1 - \sqrt{\alpha_k} | \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \right) = 1.$$

5. В следующих двух теоремах даются условия полной асимптотической разделимости семейств мер $(\tilde{\mathbf{P}}^n)$ и (\mathbf{P}^n) .

Теорема 2. Пусть выполнено условие

$$(\gamma) \quad \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [1 - \mathbf{E}^n (V \overline{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq N \right) = 1 \quad \forall N > 0.$$

Тогда $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n)$.

Следствие 5. Если $\tilde{\mathbf{P}}^n \ll^{\text{loc}} \mathbf{P}^n$, $n \geq 1$, то $\tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{n, k-1} < \infty) = 1$ и из теоремы 2 следует результат работ [9], [10]:

$$(1.8) \quad \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} [1 - \mathbf{E}^n (V \overline{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq N \right) = 1 \quad \forall N > 0 \Rightarrow (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n).$$

В теореме 3 приводятся условия, обеспечивающие справедливость импликации, обратной к (1.8).

Теорема 3. Пусть $\tilde{\mathbf{P}}^n \ll^{\text{loc}} \mathbf{P}^n$, $n \geq 1$, и выполнены условия

$$(\alpha) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k \alpha_{nk} \geq N) = 0,$$

$$(\delta) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\inf_k \alpha_{nk} \leq \frac{1}{N} \right) = 0.$$

Тогда условие

$$(\rho) \quad \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} [1 - \mathbf{E}^n (V \overline{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq N \right) = 1 \quad \forall N > 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n)$.

Из теорем 1 и 3 непосредственно вытекают следующие полезные следствия.

Следствие 6. Пусть $\tilde{\mathbf{P}}^n \ll^{\text{loc}} \mathbf{P}^n$, $n \geq 1$, и выполнены условия (α) , (δ) . Тогда

$$(1.9) \quad \begin{cases} (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n (1 - V \overline{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) = 0, \\ (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n (1 - V \overline{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) = 1 \quad \forall N > 0. \end{cases}$$

В частности, для случая, рассмотренного в замечании 2, при $\tilde{\mathbf{P}} \ll^{\text{loc}} \mathbf{P}$, условия (α) и (δ) имеют соответственно вид

$$\tilde{\mathbf{P}} (\sup_k \alpha_k < \infty) = 1, \quad \tilde{\mathbf{P}} (\inf_k \alpha_k = 0) = 0$$

и следуют из условий (β^{**}) и (ρ) . Поэтому из (1.9) получаем следующий результат работы [11]: если $\mathbf{P} \ll^{\text{loc}} \mathbf{P}$, то

$$(1.10) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{P}} \ll^{\text{loc}} \mathbf{P} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} (1 - V \overline{\alpha_k} | \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \right) = 1, \\ \tilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{P}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} (1 - V \overline{\alpha_k} | \mathcal{F}_{k-1}) = \infty \right) = 1. \end{cases}$$

Следствие 7. Предположим, что рассматривается ситуация (прямого произведения мер), изложенная в следствии 1, и пусть выполнены

следующие три условия:

$$(1.11) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{P}}^n \stackrel{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}^n, \quad n \geq 1, \\ (\alpha) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sup_k \frac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \geq N \right) = 0, \\ (\delta) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\inf_k \frac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \leq \frac{1}{N} \right) = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$(1.12) \quad \begin{cases} (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \sum_{h=1}^{\infty} H^2(\tilde{\mu}_h^n, \mu_h^n) < \infty, \\ (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \sum_{h=1}^{\infty} H^2(\tilde{\mu}_h^n, \mu_h^n) = \infty. \end{cases}$$

Тем самым в предположениях (1.11) имеет место альтернатива:

$$\text{либо } (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n), \text{ либо } (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n).$$

(Ср. с альтернативой Какутани; [11].)

6. Поясним вкратце идею доказательства теорем 1—3, для чего полезно следующее известное

О п р е д е л е н и е 3. Семейство $(\xi^n)_{n \geq 1}$ случайных величин ξ^n , заданных на $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{P}^n)$, $n \geq 1$, называется *асимптотически равномерно плотным относительно семейства мер* $(\mathbf{P}^n)_{n \geq 1}$ (обозначение: (ξ^n, \mathbf{P}^n) -плотно), если

$$(1.13) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \mathbf{P}^n (|\xi^n| \geq N) = 0.$$

Согласно лемме 9 (см. ниже)

$$(1.14) \quad (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow (\sup_k z_{nk}, \tilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно.}$$

Таким образом, доказательство теоремы 1, данное в § 5, сводится к проверке того, что асимптотическая равномерная плотность $(\sup_k z_{nk})$ относительно семейства $(\tilde{\mathbf{P}}^n)$ равносильна условиям (α) и (β) , также выраженным в терминах асимптотической равномерной плотности соответствующих семейств. Далее, согласно лемме 10

$$(1.15) \quad (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n) \Leftrightarrow \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k z_{nk} \geq N) = 1 \quad \forall N > 0.$$

Таким образом, доказательство теоремы 2 сводится к установлению того, что

$$(\gamma) \Rightarrow \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k z_{nk} \geq N) = 1 \quad \forall N > 0.$$

Доказательство этой теоремы и теоремы 3 дается в § 6.

В § 2 приводится разложение Лебега и ряд полезных утверждений, следующих из него. В частности, устанавливается формула преобразования условного математического ожидания при неабсолютно непрерывной замене меры (лемма 3). В § 3 даются (в предсказуемых терминах) условия асимптотической равномерной плотности семейств субмартигалов. В § 4 приведен ряд характеристик контигуальности и полной асимптотической делимости.

§ 2. Разложение Лебега

1. Пусть (Ω, \mathcal{F}) — измеримое пространство, $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ — неубывающее семейство σ -алгебр, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \equiv \sigma(\bigcup_k \mathcal{F}_k)$; \mathbf{P} и $\tilde{\mathbf{P}}$ — вероятностные меры и $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} | \mathcal{F}_k$, $\tilde{\mathbf{P}}_k = \tilde{\mathbf{P}} | \mathcal{F}_k$ — их сужения на \mathcal{F}_k .

Обозначим $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}})$, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q} | \mathcal{F}_k$,

$$\delta_k = \frac{d\mathbf{P}_k}{d\mathbf{Q}_k}, \quad \tilde{\delta}_k = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_k}{d\mathbf{Q}_k}$$

— конечные варианты соответствующих производных Радона — Никодима, и пусть

$$z_k = \frac{\tilde{\delta}_k}{\delta_k}$$

— отношения правдоподобия (в случае неопределенности $0/0$ полагаем $z_k = 0$; отметим, что $\mathbf{Q}(\tilde{\delta}_k = 0, \delta_k = 0) = 0$).

Укажем ряд простейших свойств последовательностей (δ_k) , $(\tilde{\delta}_k)$, (z_k) , $k \geq 1$.

1°. Относительно меры \mathbf{Q} последовательности $\delta = (\delta_k, \mathcal{F}_k)$ и $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_k, \mathcal{F}_k)$ являются неотрицательными равномерно интегрируемыми мартингалами. Отсюда вытекает, что \mathbf{Q} -, $\tilde{\mathbf{P}}$ - и \mathbf{P} -п. н. существуют пределы

$$\delta_\infty \equiv \lim \delta_k, \quad \tilde{\delta}_\infty \equiv \lim \tilde{\delta}_k, \quad \sup_k \delta_k + \sup_k \tilde{\delta}_k < \infty$$

и

$$\delta_\infty = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}, \quad \tilde{\delta}_\infty = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}}.$$

2°. Справедливы равенства $\mathbf{P}(\inf_k \delta_k > 0) = 1$, $\tilde{\mathbf{P}}(\inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1$. Действительно, пусть $T = \inf\{k \geq 0: \delta_k = 0\}$, полагая $T = \infty$, если $\delta_k > 0$ для всех $k \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\inf_k \delta_k = 0) &= \int_{\{\inf_k \delta_k = 0\}} \delta_\infty d\mathbf{Q} = \\ &= \int_{\{\delta_T = 0, T < \infty\}} \delta_\infty d\mathbf{Q} + \int_{\{\delta_\infty = 0, T = \infty\}} \delta_\infty d\mathbf{Q} = \int_{\{\delta_T = 0, T < \infty\}} \delta_T d\mathbf{Q} = 0. \end{aligned}$$

3°. Поскольку значение 0 является поглощающим (\mathbf{Q} -п. н.) для мартингалов $\delta = (\delta_k, \mathcal{F}_k)$ и $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_k, \mathcal{F}_k)$, то значения 0 и ∞ будут поглощающими состояниями (\mathbf{Q} -, \mathbf{P} - и $\tilde{\mathbf{P}}$ -п. н.) для последовательности $(z_k)_{k \geq 1}$.

4°. \mathbf{Q} -, \mathbf{P} - и $\tilde{\mathbf{P}}$ -п. н. существует предел

$$z_\infty \equiv \lim z_k.$$

5°. Справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P}(\sup_k z_k < \infty) = 1, \quad \tilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k > 0) = 1,$$

и если $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$, то

$$\tilde{\mathbf{P}}(\sup_k z_k < \infty) = 1.$$

Действительно,

$$\tilde{\mathbf{P}}(\sup_k z_k < \infty) \geq \tilde{\mathbf{P}}\left(\frac{\sup_k \tilde{\delta}_k}{\inf_k \tilde{\delta}_k} < \infty\right) \geq \tilde{\mathbf{P}}(\sup_k \tilde{\delta}_k < \infty, \inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1$$

и

$$\tilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k > 0) = \tilde{\mathbf{P}}(\inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1.$$

2. Лемма 1 (разложение Лебега). Пусть T — марковский момент (относительно $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$). Тогда для любого множества $A \in \mathcal{F}_T$

$$(2.1) \quad \tilde{\mathbf{P}}(A) = \int_A z_T d\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}(A \cap \{z_T = \infty\}).$$

Доказательство (ср. с [11]). Поскольку

$$1 = \delta_T^{\oplus} \cdot \delta_T + (1 - \delta_T^{\oplus} \delta_T),$$

то для $A \in \mathcal{F}_T$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(A) &= \int_A \tilde{\delta}_\infty d\mathbf{Q} = \int_A \tilde{\delta}_T d\mathbf{Q} = \int_A \tilde{\delta}_T [\delta_T^{\oplus} \delta_T + (1 - \delta_T^{\oplus} \delta_T)] d\mathbf{Q} = \\ &= \int_A \tilde{\delta}_T \delta_T^{\oplus} \delta_\infty d\mathbf{Q} + \int_A \tilde{\delta}_T (1 - \delta_T^{\oplus} \delta_T) d\mathbf{Q} = \int_A \tilde{\delta}_T \delta_T^{\oplus} d\mathbf{P} + \int_A (1 - \delta_T^{\oplus} \delta_T) d\tilde{\mathbf{P}}. \end{aligned}$$

Здесь (свойство 2°)

$$(2.3) \quad \tilde{\delta}_T \delta_T^{\oplus} = \frac{\tilde{\delta}_T}{\delta_T} \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.})$$

и

$$(2.4) \quad \int_A (1 - \delta_T^{\oplus} \delta_T) d\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}(A, \delta_T = 0) = \tilde{\mathbf{P}}\left(A, \frac{\tilde{\delta}_T}{\delta_T} = \infty\right),$$

поскольку $\tilde{\mathbf{P}}(\inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1$ (свойство 2°).

Из (2.2) — (2.4) получаем требуемое разложение (2.1).

С л е д с т в и е 1. Пусть η — \mathcal{F}_T -измеримая неотрицательная случайная величина с $\tilde{\mathbf{E}}\eta < \infty$ ($\tilde{\mathbf{E}}$ — усреднение по мере $\tilde{\mathbf{P}}$). Тогда

$$(2.5) \quad \tilde{\mathbf{E}}\eta = \mathbf{E}\eta z_T + \tilde{\mathbf{E}}\eta I(z_T = \infty).$$

С л е д с т в и е 2. Пусть η — \mathcal{F}_T -измеримая неотрицательная случайная величина такая, что $\eta = 0$ (\mathbf{P} -п. н.). Тогда

$$(2.6) \quad \eta I(z_T < \infty) = 0 \quad (\tilde{\mathbf{P}}\text{-п. н.}).$$

3. Лемма 2. Для всякого $b > 0$ справедливы неравенства

$$(2.7) \quad \tilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k \leq b) \leq b, \quad \mathbf{P}(\sup_k z_k \geq b) \leq \frac{1}{b}.$$

Доказательство. Пусть $T = \inf\{k: z_k \leq b\}$, считая $T = \infty$, если $z_k > b$ при всех k . Тогда $\{\inf_k z_k \leq b\} = \{z_T \leq b\}$. В силу

разложения (2.1)

$$\tilde{\mathbf{P}}(\inf z_k \leq b) = \int_{\{z_T \leq b\}} z_T d\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}(z_T \leq b, z_T = \infty) \leq b.$$

Пусть теперь $S = \inf\{k: z_k \geq b\}$ с $S = \infty$, если $z_k < b$ при всех k . Тогда $\{\sup z_k \geq b\} = \{z_S \geq b\}$ и опять-таки согласно (2.1)

$$\begin{aligned} 1 \geq \tilde{\mathbf{P}}(\sup z_k \geq b) &= \tilde{\mathbf{P}}(z_S \geq b) = \\ &= \int_{z_S \geq b} z_S d\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{P}(z_S \geq b, z_S = \infty) \geq b\mathbf{P}, \quad (z_S \geq b) = b\mathbf{P}(\sup z_k \geq b). \end{aligned}$$

4. Обозначим $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = z_1$, $\alpha_k = z_k \cdot z_{k-1}^{\ominus}$, $k \geq 2$. Тогда в силу свойства 3° из п. 1

$$(2.8) \quad z_k = \prod_{j=1}^k \alpha_j.$$

Следующая лемма дает важную формулу для вычисления условных математических ожиданий при неабсолютно непрерывной замене меры.

Л е м м а 3. Пусть $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ и η — \mathcal{F}_k -измеримая неотрицательная $\tilde{\mathbf{P}}$ -интегрируемая случайная величина, $k \geq 1$. Тогда ($\tilde{\mathbf{P}}$ -п. н.)

$$(2.9) \quad \tilde{\mathbf{E}}(\eta | \mathcal{F}_{k-1}) = I(\alpha_{k-1} < \infty) \mathbf{E}(\eta \alpha_k | \mathcal{F}_{k-1}) + \tilde{\mathbf{E}}(\eta I(\alpha_k = \infty) | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при $k = 1$ (2.9) превращается в соотношение (2.5).

Пусть теперь $k \geq 2$. Равенство (2.9) достаточно доказать лишь для неотрицательных ограниченных случайных величин η . В этом предположении обозначим правую часть в (2.9) через ξ . Тогда для справедливости (2.9) надо установить, что для всякого множества $A \in \mathcal{F}_{k-1}$

$$(2.10) \quad \tilde{\mathbf{E}}\eta I(A) = \tilde{\mathbf{E}}\xi I(A).$$

Из (2.8) и свойства 3° (п.1) следует, что ($\tilde{\mathbf{P}}$ -п. н.) для всякого $k \geq 1$

$$(2.11) \quad \{\alpha_k < \infty\} = \{z_k < \infty\}.$$

Поэтому

$$(2.12) \quad \tilde{\mathbf{E}}\xi I(A) = \tilde{\mathbf{E}}I(z_{k-1} < \infty) \mathbf{E}(\eta \alpha_k | \mathcal{F}_{k-1}) I(A) + \tilde{\mathbf{E}}\eta I(z_k = \infty) I(A).$$

В силу (2.5)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}I(z_{k-1} < \infty) \mathbf{E}(\eta \alpha_k | \mathcal{F}_{k-1}) I(A) &= \mathbf{E}(I(z_{k-1} < \infty) \mathbf{E}(\eta \alpha_k | \mathcal{F}_{k-1}) I(A) z_{k-1}) + \\ &+ \tilde{\mathbf{E}}(I(z_{k-1} < \infty) \mathbf{E}(\eta \alpha_k | \mathcal{F}_{k-1}) \cdot I(A) \cdot I(z_{k-1} = \infty)) = \\ &= \mathbf{E}(I(z_{k-1} < \infty) \eta \alpha_k I(A) z_{k-1}) = \mathbf{E}(I(z_{k-1} < \infty) \eta z_k z_{k-1}^{\ominus} I(A) z_{k-1}). \end{aligned}$$

Опираясь на свойства 3° и 5°, находим, что (\mathbf{P} -п. н.)

$$I(z_{k-1} < \infty) z_k z_{k-1}^{\ominus} z_{k-1} = I(z_{k-1} < \infty) z_k z_{k-1}^{\oplus} z_{k-1} = z_k.$$

Поэтому

$$\tilde{\mathbf{E}}(I(z_{k-1} < \infty) \mathbf{E}(\eta \alpha_k | \mathcal{F}_{k-1}) I(A)) = \mathbf{E}\eta z_k I(A),$$

и значит,

$$(2.13) \quad \tilde{\mathbf{E}}\xi I(A) = \mathbf{E}\eta z_k I(A) + \tilde{\mathbf{E}}\eta I(z_k = \infty) I(A).$$

Согласно (2.5)

$$E\eta z_k I(A) + \tilde{E}\eta I(z_k = \infty) I(A) = \tilde{E}\eta I(A),$$

что вместе с (2.13) доказывает требуемое равенство (2.10).

Следствие 1. Пусть $\tilde{P} \ll_{\text{loc}} P$, т. е. $\tilde{P}_k \ll P_k$, $k \geq 1$. Тогда $\tilde{P}(\alpha_k < \infty) = \tilde{P}(z_k < \infty) = 1$ и (\tilde{P} -п. н.)

$$(2.14) \quad \tilde{E}(\eta | \mathcal{F}_{k-1}) = E(\eta \alpha_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad k \geq 1.$$

(Ср. с леммой 6.6 в [16].)

Следствие 2. Положим (ср. с (1.3)) $\beta_0 = \tilde{\beta}_0 = 1$, $\beta_k = \gamma_k \cdot \gamma_{k-1}^\ominus, \tilde{\beta}_k = \tilde{\gamma}_k \cdot \tilde{\gamma}_{k-1}^\ominus$. Значение 0 является (Q -, P -, \tilde{P} -п. н.) поглощающим состоянием для (γ_k) и $(\tilde{\gamma}_k)$ и

$$(2.15) \quad \gamma_k = \prod_{j=1}^k \beta_j, \quad \tilde{\gamma}_k = \prod_{j=1}^k \tilde{\beta}_j.$$

Из (2.14) следует, что имеют место формулы

$$(2.16) \quad E(\eta | \mathcal{F}_{k-1}) = E_Q(\eta \beta_k | \mathcal{F}_{k-1}) \quad (P\text{-п. н.})$$

и

$$(2.17) \quad \tilde{E}(\eta | \mathcal{F}_{k-1}) = E_Q(\eta \tilde{\beta}_k | \mathcal{F}_{k-1}) \quad (\tilde{P}\text{-п. н.}).$$

5. Пусть μ и $\tilde{\mu}$ — две вероятностные меры, заданные на измеримом пространстве.

Расстоянием Хеллингера (между мерами μ и $\tilde{\mu}$) называется величина

$$(2.18) \quad H(\mu, \tilde{\mu}) \equiv [E_\nu (V\beta - V\tilde{\beta})^2]^{1/2},$$

где ν — некоторая мера такая, что $\mu + \tilde{\mu} \ll \nu$, $\beta = d\mu/d\nu$, $\tilde{\beta} = d\tilde{\mu}/d\nu$ и E_ν — усреднение по мере ν . Значение $H(\mu, \tilde{\mu})$ не зависит от выбора меры ν , доминирующей меру $\mu + \tilde{\mu}$, и ясно, что

$$(2.19) \quad H^2(\mu, \tilde{\mu}) = 2 \left(1 - \int V\beta\tilde{\beta} d\nu \right).$$

Пусть теперь (Ω, \mathcal{F}) — измеримое пространство, P и \tilde{P} — две вероятностные меры. В том случае, когда эти меры являются прямым произведением мер,

$$(2.20) \quad P = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots, \quad \tilde{P} = \tilde{\mu}_1 \times \tilde{\mu}_2 \times \dots,$$

рассмотрение расстояний Хеллингера $H(\mu_k, \tilde{\mu}_k)$ между маргинальными мерами μ_k и $\tilde{\mu}_k$ оказывается полезным при решении разнообразных вопросов, касающихся соотношений между мерами P и \tilde{P} (см., например, [6], [15]).

В том же случае, когда P и \tilde{P} — вероятностные меры на (Ω, \mathcal{F}) (с выделенным на нем неубывающим семейством $F = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\cup \mathcal{F}_n)$), не обязательно являющиеся прямым произведением мер, соответствующую роль играют так называемые условные расстояния Хеллингера

$$(2.21) \quad H_k \equiv E_Q [(V\beta_k - V\tilde{\beta}_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}]^{1/2},$$

где β_k и $\tilde{\beta}_k$ определены в следствии 2 (п. 4), Q — некоторая мера, доминирующая меру $P + \tilde{P}$ (далее полагаем $Q = \frac{1}{2} (P + \tilde{P})$), $k \geq 1$.

Следующая лемма будет играть ключевую роль при доказательстве утверждения II теоремы 1.

Лемма 4. Для каждого $k \geq 1$ имеют место (\tilde{P} -п. н.) следующие равенства:

$$(2.22) \quad \frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = I(\alpha_{k-1} < \infty) (1 - E(V \overline{\alpha}_k | \mathcal{F}_{k-1})).$$

Доказательство. Пусть $k=1$. В этом случае $\alpha_0 = 1$ и Q -п. н.

$$H_1^2 = E_Q (V \overline{\beta}_1 - V \overline{\tilde{\beta}}_1)^2 = 2 (1 - E_Q V \overline{\beta}_1 \overline{\tilde{\beta}}_1).$$

С другой стороны, $\alpha_1 = z_1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ и

$$E(V \overline{\alpha}_1 | \mathcal{F}_0) = E V \overline{z}_1 = E_Q \left(\frac{\tilde{\beta}_1}{\beta_1} \right)^{1/2} \cdot \beta_1 = E_Q V \overline{\beta}_1 \overline{\tilde{\beta}}_1.$$

Поэтому в случае $k=1$ равенство (2.22) следует очевидным образом.

Пусть теперь $k > 1$. Поскольку $\{\alpha_{k-1} < \infty\} = \{z_{k-1} < \infty\}$ (\tilde{P} -п. н.), то

$$\{\alpha_{k-1} < \infty\} = \left\{ \frac{\tilde{\beta}_{k-1}}{\beta_{k-1}} < \infty \right\} = \{\tilde{\beta}_{k-1} > 0\} \quad (\tilde{P}\text{-п. н.}).$$

Поэтому (\tilde{P} -п. н.)

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 &= \\ &= \frac{1}{2} I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0) I(z_{k-1} < \infty) \cdot E_Q (\beta_k + \tilde{\beta}_k - 2\beta_k^{1/2} \tilde{\beta}_k^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}). \end{aligned}$$

По следствию 2 к лемме 3

$$E_Q (\beta_k | \mathcal{F}_{k-1}) = E(1 | \mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad (P\text{-п. н.}),$$

$$E_Q (\tilde{\beta}_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \tilde{E}(1 | \mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad (\tilde{P}\text{-п. н.}).$$

Из следствия 2 к лемме 1 (\tilde{P} -п. н.)

$$I(z_{k-1} < \infty) E(1 | \mathcal{F}_{k-1}) = I(z_{k-1} < \infty) = I(\alpha_{k-1} < \infty) = I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0).$$

Отсюда и из (2.23) получаем, что (\tilde{P} -п. н.)

$$(2.24) \quad \frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0) (1 - E_Q (V \overline{\beta}_k \overline{\tilde{\beta}}_k | \mathcal{F}_{k-1})).$$

С другой стороны, по следствию 2 к лемме 3 и следствию 2 к лемме 1

$$(2.25) \quad \begin{aligned} I(\alpha_{k-1} < \infty) E(\alpha_k^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}) &= I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0) E_Q (\alpha_k^{1/2} \beta_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0) E_Q ([\tilde{\beta}_k \beta_k^{-1} (\tilde{\beta}_{k-1} \cdot \beta_{k-1}^{-1})^\ominus]^{1/2} \beta_k \cdot \beta_{k-1}^\ominus | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= E_Q (I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0) [\tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_k^{-1} (\tilde{\beta}_{k-1} \cdot \beta_{k-1}^{-1})^\ominus]^{1/2} \beta_k \cdot \beta_{k-1}^\ominus | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= E_Q (I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0) [\tilde{\beta}_k \beta_k (\tilde{\beta}_{k-1} \cdot \beta_{k-1}^{-1})^\oplus (\beta_{k-1}^2)^\ominus]^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= I(\tilde{\beta}_{k-1} > 0) E_Q [V \overline{\beta}_k \overline{\tilde{\beta}}_k | \mathcal{F}_{k-1}]. \end{aligned}$$

Из (2.24) и (2.25) получаем требуемое равенство (2.22).

§ 3. Асимптотическая равномерная плотность для субмартиנגалов

1. Будем предполагать заданными вероятностные пространства $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{P}^n)_{n \geq 1}$ с потоками $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$, $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n \subseteq \mathcal{F}^n$, $\mathcal{F}^n = \sigma(\cup \mathcal{F}_k^n)$, $\mathcal{F}_0^n = \{\emptyset, \Omega\}$.

Л е м м а 5. Пусть $A^n = (A_k^n, \mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$, $n \geq 1$, — неубывающие процессы локально интегрируемой (относительно мер \mathbf{P}^n) вариации ($A^n \in \mathcal{M}_{loc}^+(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$) с $A_0^n = 0$, $\tilde{A}^n = (\tilde{A}_k^n, \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}^n)$ — их компенсаторы (т. е. $A^n - \tilde{A}^n$ принадлежит классу локальных мартиנגалов $\mathcal{M}_{loc}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$) и $A_\infty^n = \lim_k A_k^n$, $\tilde{A}_\infty^n = \lim_k \tilde{A}_k^n$.

Тогда

$$(\tilde{A}_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (A_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-плотно.}$$

Если к тому же

$$\sup_n \mathbf{E}^n \sup_{k \geq 1} (A_k^n - A_{k-1}^n) < \infty,$$

то

$$(\tilde{A}_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Leftrightarrow (A_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-плотно.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X = (X_k, \mathcal{F}_k)$ и $Y = (Y_k, \mathcal{F}_k)$ — два неотрицательных процесса с дискретным временем $k \geq 0$, причем Y — неубывающий и локально интегрируемый, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с неубывающим семейством σ -алгебр $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$.

Предположим, что процесс X доминируется процессом Y в том смысле, что для любого конечного момента остановки τ $\mathbf{E}X_\tau \leq \mathbf{E}Y_\tau$ [12]. Если процесс Y является предсказуемым, т. е. $Y_k - \mathcal{F}_{k-1}$ -измеримы, то справедливо неравенство Ленгляра (см. [12]): для любых $N > 0$, $L > 0$ и любого момента остановки τ

$$(3.1) \quad \mathbf{P}(\sup_{k \leq \tau} X_k \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbf{P}(Y_\tau \geq L).$$

В случае, когда Y не обязательно является предсказуемым, имеет место неравенство Ленгляра — Реболledo (см. [13]): для любых $N > 0$, $L > 0$ и любого момента остановки τ

$$(3.2) \quad \mathbf{P}(\sup_{k \leq \tau} X_k \geq N) \leq \frac{1}{N} [L + \mathbf{E} \sup_k (A_k - A_{k-1})] + \mathbf{P}(Y_\tau \geq L).$$

Поскольку в условиях леммы для любого конечного момента остановки τ (относительно \mathbf{F}^n) $\mathbf{E}A_\tau^n = \mathbf{E}\tilde{A}_\tau^n$, то из (3.1) выводим, что

$$(3.3) \quad \mathbf{P}^n(A_\infty^n \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n(\tilde{A}_\infty^n \geq L),$$

а из (3.2) находим, что

$$(3.4) \quad \mathbf{P}^n(\tilde{A}_\infty^n \geq N) \leq \frac{1}{N} [L + \mathbf{E}^n \sup_k (A_k^n - A_{k-1}^n)] + \mathbf{P}^n(A_\infty^n \geq L).$$

Из этих неравенств требуемые утверждения леммы следуют очевидным образом после применения операций $\lim_L \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n$.

2. Л е м м а 6. Пусть $M^n = (M_k^n, \mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$ — локальные мартингалы (относительно мер \mathbf{P}^n), $M^n \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$ и

$$(3.5) \quad \sup_n \mathbf{E}^n \sup_{k \geq 1} |M_k^n - M_{k-1}^n| < \infty.$$

Тогда

$$(3.6) \quad ([M^n, M^n]_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Leftrightarrow (\sup_h |M_h^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно.}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенствами Дэвиса ([17], с. 490)

$$(3.7) \quad \mathbf{E}^n \sup_{h \leq \tau} |M_h^n| \leq C_1 \mathbf{E}^n [M^n, M^n]_\tau^{1/2},$$

$$(3.8) \quad \mathbf{E}^n [M^n, M^n]_\tau^{1/2} \leq C_2 \mathbf{E}^n \sup_{h \leq \tau} |M_h^n|,$$

справедливыми для любого момента остановки τ (относительно \mathbf{F}^n) с универсальными константами $0 < C_1 < \infty$, $0 < C_2 < \infty$.

Тогда из (3.2)

$$(3.9) \quad \mathbf{P}^n (\sup_h |M_h^n| \geq N) \leq \frac{1}{N} \{L + C_1 \mathbf{E}^n \sup_h ([M^n, M^n]_h^{1/2} - [M^n, M^n]_{h-1}^{1/2})\} + \\ + \mathbf{P}^n ([M^n, M^n]_\infty^{1/2} \geq L/C_1)$$

и аналогично

$$(3.10) \quad \mathbf{P}^n ([M^n, M^n]_\infty \geq N) \leq \\ \leq \frac{1}{N} \{L + C_2 \mathbf{E}^n \sup_k (\sup_{j \leq k} |M_j^n| - \sup_{j \leq k-1} |M_j^n|)\} + \mathbf{P}^n (\sup_k |M_k^n| \geq L/C_2).$$

Поскольку

$$\sup_k (\sup_{j \leq k} |M_j^n| - \sup_{j \leq k-1} |M_j^n|) \leq \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|$$

и

$$\sup_h ([M^n, M^n]_h^{1/2} - [M^n, M^n]_{h-1}^{1/2}) \leq \\ \leq \sup_h \{([M^n, M^n]_{h-1} + (M_h^n - M_{h-1}^n)^2)^{1/2} - [M^n, M^n]_{h-1}^{1/2}\} \leq \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|,$$

то в силу предположения (3.5) требуемое утверждение (3.6) следует из неравенств (3.9) и (3.10) в результате применения операций $\lim_L \lim_N \lim_n$.

Л е м м а 7. Пусть $M^n = (M_h^n, \mathcal{F}_h^n)_{h \geq 0}$ — локально квадратично интегрируемые мартингалы ($M^n \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$). Тогда

$$(3.11) \quad (\langle M^n \rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (\sup_h |M_h^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно.}$$

Если к тому же

$$(3.12) \quad \sup_n \mathbf{E}^n \sup_h |M_h^n - M_{h-1}^n|^2 < \infty,$$

то

$$(3.13) \quad (\langle M^n \rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Leftrightarrow (\sup_h |M_h^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно.}$$

Доказательство. Поскольку $(M^n)^2$ доминируется предсказуемым процессом $\langle M^n \rangle$, то в силу (3.1)

$$\mathbf{P}^n (\sup_h |M_h^n| \geq N) \leq \frac{L}{N^2} + \mathbf{P}^n (\langle M^n \rangle_\infty \geq L)$$

и (3.11) следует отсюда после предельных переходов $\lim_L \lim_N \lim_n$.

Далее,

$$\sup_h ([M^n, M^n]_h - [M^n, M^n]_{h-1}) = \sup_h |M_h^n - M_{h-1}^n|^2.$$

Поэтому в силу (3.12) и второго утверждения леммы 5

$$(3.14) \quad ([M^n, M^n]_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Leftrightarrow (\langle M^n \rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-плотно.}$$

Вместе с (3.6) это дает требуемое соотношение (3.13).

Л е м м а 8. Пусть $X^n = (X_k^n, \mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$ — субмартиггал, $n \geq 1$, с

$$(3.15) \quad |x_k^n| \leq c, \quad k \geq 1, \quad n \geq 1,$$

где $x_k^n = X_k^n - X_{k-1}^n$, $k \geq 1$.

Тогда

$$(3.16) \quad (\sup_k |X_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Leftrightarrow \left(\sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{E}^n (x_h^n + (x_h^n)^2 | \mathcal{F}_{h-1}^n), \mathbf{P}^n \right)\text{-плотно.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку X^n — субмартигалы, то $\mathbf{E}^n(x_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq 0$. Обозначим

$$A_0^n = 0, \quad A_k^n = \sum_{j=1}^k \mathbf{E}^n (x_j^n | \mathcal{F}_{j-1}^n), \quad M_k^n = X_k^n - A_k^n.$$

Очевидно, что $A_k^n - A_{k-1}^n \leq c$ и $|M_k^n - M_{k-1}^n| \leq 2c$. Следовательно, $M^n \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \langle M^n \rangle_h &= \sum_{j=0}^h \{ \mathbf{E}^n ((x_j^n)^2 | \mathcal{F}_{j-1}^n) - (\mathbf{E}^n (x_j^n | \mathcal{F}_{j-1}^n))^2 \} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^h \mathbf{E}^n ((x_j^n)^2 | \mathcal{F}_{j-1}^n) \quad (= B_h^n), \end{aligned}$$

и если обозначить $Y_k^n = A_k^n + \sup_{j \leq k} (M_j^n)^2$, то, применяя неравенство Дуба, получим, что

$$\mathbf{E}^n Y_\tau^n \leq \mathbf{E}^n (A_\tau^n + 4 \langle M^n \rangle_\tau) \leq 4 \mathbf{E}^n (A_\tau^n + B_\tau^n)$$

для любого конечного момента остановки τ (относительно $(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$). Поэтому в силу (3.4)

$$\mathbf{P}^n (Y_\infty^n \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n (A_\infty^n + B_\infty^n \geq L/4).$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$Y_\infty^n + 1 \geq A_\infty^n + \sup_k |M_k^n| \geq \sup_k |X_k^n|.$$

Тогда

$$(3.17) \quad \mathbf{P}^n (\sup_k |X_k^n| \geq N + 1) \leq \mathbf{P}^n (Y_\infty^n \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n (A_\infty^n + B_\infty^n \geq L/4)$$

и импликация \Leftarrow в (3.16) следует отсюда в результате операций

$$\lim_L \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n.$$

Установим теперь импликацию \Rightarrow .

Поскольку для любого конечного момента остановки τ (относительно $(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$)

$$\mathbf{E}^n A_{k \wedge \tau}^n = \mathbf{E}^n X_{k \wedge \tau}^n \leq \mathbf{E}^n \sup_{j \leq \tau} |X_j^n|,$$

то

$$\mathbf{E}^n A_\tau^n \leq \mathbf{E}^n \sup_{j \leq \tau} |X_j^n|.$$

Тогда в силу (3.2)

$$\mathbf{P}^n(A_\infty^n \geq N) \leq \frac{L+c}{N} + \mathbf{P}^n(\sup_k |X_k^n| \geq L),$$

и значит,

$$(3.18) \quad (\sup_k |X_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (A_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-плотно}.$$

Поскольку $\sup_k |M_k^n| \leq \sup_k |X_k^n| + A_\infty^n$, то

$$(\sup_k |X_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (\sup_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно}.$$

По лемме 7

$$(3.19) \quad (\sup_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (\langle M^n \rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-плотно}.$$

Далее, $B_\infty^n \leq \langle M^n \rangle_\infty + (A_\infty^n)^2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n(x_k^n + (x_k^n)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) = A_\infty^n + B_\infty^n \leq A_\infty^n + (A_\infty^n)^2 + \langle M^n \rangle_\infty,$$

и поэтому импликация (\Rightarrow) в (3.16) следует из (3.18), (3.19).

§ 4. Характеризация контигуальности и полной асимптотической разделимости

Пусть $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ — последовательность измеримых пространств, (\mathbf{P}^n) и $(\tilde{\mathbf{P}}^n)$ — вероятностные меры на $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, $n \geq 1$.

Л е м м а 9. Следующие условия являются эквивалентными:

$$(a) \quad (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n);$$

(б) $\lim_n \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$ и $(z_{n\infty})_{n \geq 0}$ равномерно интегрируемы относительно (\mathbf{P}^n) :

$$(4.1) \quad \sup_n \int_{\{z_{n\infty} > c\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty;$$

$$(b) \quad (z_{n\infty}, \tilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно};$$

$$(r) \quad (\sup_k z_{nk}, \tilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность условий (а), (б) и (в) известна (см., например, [5]). Вводимое условие (г) и факт эквивалентности его условию (а) являются, по-видимому, новыми. Оказывается при этом, что именно равносильность условий (а) и (г) играет решающую роль при доказательстве основной теоремы 1.

Для полноты изложения и удобства читателя приведем доказательство эквивалентности всех указанных четырех условий.

(а) \Rightarrow (б). Поскольку $\mathbf{P}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$, то из условия контигуальности вытекает, что $\lim_n \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$. Условие (4.1) равносильно (см. лемму в п. 3 работы [5]; ср. также с леммой 2 на с. 206 в [17]) следующим двум условиям:

$$(4.2) \quad \sup_n \int_{\Omega} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n < \infty,$$

$$(4.3) \quad \mathbf{P}^n(A^n) \rightarrow 0, \quad A^n \in \mathcal{F}^n \Rightarrow \int_{A^n} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n \rightarrow 0.$$

Из разложения Лебега

$$\int_{A^n} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n \leq \tilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \leq 1.$$

Отсюда очевидным образом следует выполнимость условий (4.2) и (4.3), поскольку в силу контигуальности

$$\mathbf{P}^n(A^n) \rightarrow 0, \quad A^n \in \mathcal{F}^n \Rightarrow \tilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \rightarrow 0.$$

(б) \Rightarrow (в). В силу разложения Лебега

$$\tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) = \int_{\{z_{n\infty} > N\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n + \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty).$$

Тогда из условия (б)

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) = \overline{\lim}_n \int_{\{z_{n\infty} > N\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

что и доказывает (в).

(в) \Rightarrow (а). Из условия (в) вытекает, что для $\varepsilon > 0$ можно найти N и n_0 такие, что для всякого $n \geq n_0$ $\tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) \leq \varepsilon/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^n(A^n) &= \tilde{\mathbf{P}}^n(A^n \cap \{z_{n\infty} \leq N\}) + \tilde{\mathbf{P}}^n(A^n \cap \{z_{n\infty} > N\}) \leq \\ &\leq \int_{A^n \cap \{z_{n\infty} \leq N\}} z_{n\infty} d\tilde{\mathbf{P}}^n + \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) \leq N\mathbf{P}^n(A^n) + \varepsilon/2, \end{aligned}$$

и если $\mathbf{P}^n(A^n) \rightarrow 0$, то $\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \leq \varepsilon/2$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует условие (а).

(в) \Leftrightarrow (г). Справедливость этих импликаций следует очевидным образом из следующих неравенств:

$$(4.4) \quad \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geq N) \leq \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) \leq \frac{L}{N} + \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geq L).$$

Левое неравенство очевидно. Для доказательства правого воспользуемся разложением Лебега. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) &= \\ &= \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n + \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geq N, z_{n\infty} = \infty) = \\ &= \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n + \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = \\ &= \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N, z_{n\infty} \geq L\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n + \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N, z_{n\infty} < L\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n + \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) \leq \\ &\leq \int_{\{z_{n\infty} \geq L\}} z_{n\infty} d\mathbf{P}^n + L \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N\}} d\mathbf{P}^n + \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = \\ &= \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geq L) + L\mathbf{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N), \end{aligned}$$

где по лемме 2 $\mathbf{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) \leq 1/N$.

Тем самым правое неравенство в (4.4) также доказано.
 Л е м м а 10. Следующие условия:

- (а) $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n)$;
 (б) $\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geq N) = 1 \quad \forall N > 0$;
 (в) $\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) = 1 \quad \forall N > 0$

являются эквивалентными.

Доказательство равносильности условий (а) и (б) будет следовать работе [10]. (а) \Rightarrow (б). В соответствии с определением 2 § 1 найдутся подпоследовательность (n') и множества $A^{n'} \in \mathcal{F}^{n'}$ такие, что

$$(4.5) \quad \lim_{n'} \mathbf{P}^{n'}(A^{n'}) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n'} \tilde{\mathbf{P}}^{n'}(A^{n'}) = 1.$$

Тогда в силу разложения Лебега

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^{n'}(A^{n'}) &= \int_{A^{n'} \cap \{z_{n'\infty} \leq L\}} z_{n'\infty} d\mathbf{P}^{n'} + \tilde{\mathbf{P}}^{n'}(A^{n'} \cap \{z_{n'\infty} > L\}) \leq \\ &\leq L\mathbf{P}^{n'}(A^{n'}) + \tilde{\mathbf{P}}^{n'}(z_{n'\infty} > L). \end{aligned}$$

Вместе с (4.5) отсюда вытекает, что $\lim_{n'} \tilde{\mathbf{P}}^{n'}(z_{n'\infty} > L) = 1$, и значит, имеет место (б).

(б) \Rightarrow (а). Из справедливости (б) следует, что найдется подпоследовательность (n_k) такая, что $n_k < n_{k+1}$ и

$$\tilde{\mathbf{P}}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \geq 1 - 1/k.$$

Так что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{P}}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) = 1.$$

В то же время $\mathbf{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \leq \mathbf{E}^{n_k} z_{n_k\infty} / k \leq 1/k$. Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) = 0$, и следовательно, $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n)$.

(б) \Leftrightarrow (в). Импликация (б) \Rightarrow (в) очевидна. Для доказательства (в) \Rightarrow (б) заметим, что согласно (4.4)

$$\tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) \leq \frac{L}{N} + \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geq L),$$

и значит, для любого $L > 0$

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geq L) \leq 1 - \frac{L}{N} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

§ 5. Доказательство теоремы 1

1. Начнем с доказательства второй части теоремы, т. е. покажем, что при выполнении условия (α) имеют место импликации

$$(5.1) \quad (\beta) \Leftrightarrow (\beta^*)$$

и

$$(5.2) \quad (\beta) \Leftrightarrow (\beta^{**}).$$

(β) \Rightarrow (β^*). Согласно лемме 4

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E_{Q^n} [(V \sqrt{\tilde{\beta}_{nh}} - V \sqrt{\beta_{nh}})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] = \\ = I(\alpha_{n, k-1} < \infty) (1 - E^n(V \sqrt{\alpha_{nh}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)). \end{aligned}$$

Поэтому (β) \Rightarrow (β^*).

Пусть теперь выполнено условие (α). Покажем, что тогда (β^*) \Rightarrow (β). Пусть ξ_{nh} — неотрицательные случайные величины. Тогда для всяких $L > 0$ и $N > 0$

$$\begin{aligned} (5.3) \quad \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{nh} \geq N \right) &= \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \xi_{nh} \geq N, \sup_k \alpha_{nh} < \infty \right) + \\ &+ \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{nh} \geq N, \sup_k \alpha_{nh} = \infty \right) \leq \\ &\leq \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \xi_{nh} \geq N \right) + \tilde{P}^n(\sup_k \alpha_{nh} \geq L). \end{aligned}$$

Отсюда требуемая импликация (β^*) \Rightarrow (β) следует (с учетом (α)) в результате предельных переходов $\lim_L \lim_N \lim_n$, если положить $\xi_{nh} =$

$$= E_{Q^n} [(V \sqrt{\tilde{\beta}_{nh}} - V \sqrt{\beta_{nh}})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n].$$

Итак, (5.1) доказано.

(β) \Rightarrow (β^{**}). Ясно, что

$$\begin{aligned} (5.4) \quad I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n ((1 - V \sqrt{\alpha_{nh}})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) = \\ = 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \{1 - E^n(V \sqrt{\alpha_{nh}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)\} - 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) + \\ + I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E(1 | \mathcal{F}_{k-1}^n) + I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{n, k} | \mathcal{F}_{k-1}^n). \end{aligned}$$

Из (2.9) с $\eta \equiv 1$ следует, что \tilde{P}^n -п. н.

$$(5.5) \quad I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{n, k} | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 1 - \tilde{P}^n(\alpha_{n, k} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n),$$

а из (2.6) с $\eta = E^n(1 | \mathcal{F}_{k-1}^n) - 1$ следует, что \tilde{P}^n -п. н.

$$(5.6) \quad I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(1 | \mathcal{F}_{k-1}^n) = I(\alpha_{n, k-1} < \infty).$$

Поэтому из (5.4) — (5.6) находим, что \tilde{P}^n -п. н.

$$\begin{aligned} (5.7) \quad I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n((1 - V \sqrt{\alpha_{nh}})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) = \\ = 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \{1 - E^n(V \sqrt{\alpha_{nh}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)\} - I(\alpha_{n, k-1} < \infty) + \\ + 1 - \tilde{P}^n(\alpha_{n, k} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \{1 - E^n(V \sqrt{\alpha_{nh}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)\} + \\ + I(\alpha_{n, k-1} = \infty) - \tilde{P}^n(\alpha_{n, k} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n). \end{aligned}$$

Поскольку (β) \Rightarrow (β^*) и выполнено условие (α), то в силу (5.3) достаточно лишь показать, что для любого $L \geq 1$

$$(5.8) \quad (\alpha) \Rightarrow \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nh} = \infty) \geq L \right) = 0$$

и

$$(5.9) \quad (\alpha) \Rightarrow \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{P}^n(\alpha_{nh} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq L \right) = 0.$$

Но поскольку

$$\{\sup_k \alpha_{nk} > N\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} > N) \geq 1 \right\} \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geq 1 \right\},$$

то в силу условия (α)

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{n=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geq 1 \right) \leq \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k \alpha_{nk} \geq N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

и, в частности, для любого $L \geq 1$ справедливо соотношение (5.8).

Наконец, из (3.4)

$$\tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nk} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) \leq \frac{L+1}{N} + \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geq L \right).$$

Отсюда и из (5.8) следует (5.9).

$(\beta^{**}) \Rightarrow (\beta^*)$. Из (β^{**}) вытекает, что

$$\lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{E}^n [(1 - \alpha_{nk}^{1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] \geq N \right\} = 0.$$

Отсюда свойство (β^*) следует из (5.7) и соотношений (5.8) и (5.9), выполняемых при условии (α) .

Итак, $(\beta) \Rightarrow (\beta^{**}) \Rightarrow (\beta^*) \Rightarrow (\beta)$, что доказывает (в предположении (α)) справедливость импликаций (5.2).

2. Перейдем к доказательству первой части теоремы.

Достаточность. В силу леммы 9 надо показать, что

$$(5.10) \quad (\alpha), (\beta) \Rightarrow (\sup_k z_{nk}, \tilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно.}$$

С этой целью для всякого $c \geq 1$ введем функцию

$$u^*(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq c, \\ c \operatorname{sign} x, & |x| > c \end{cases}$$

и множества

$$A_c^n = \left\{ \sup_k \alpha_{nk} < e^c \right\} \cap \left\{ \inf_k \alpha_{nk} > e^{-c} \right\}.$$

Обозначим также

$$(5.11) \quad X_{nk}^c = \sum_{j=1}^k u_c(\ln \alpha_{nj})$$

и отметим, что

$$X_{nk}^c \cdot I_{A_c^n} = \left(\sum_{j=1}^k \ln \alpha_{nj} \right) \cdot I_{A_c^n} = (\ln z_{nk}) \cdot I_{A_c^n}.$$

Поэтому для $N \geq 1$

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \left\{ \sup_k z_{nk} \geq N \right\} &\subseteq \left\{ \sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N \right\} \cup \{\Omega \setminus A_c^n\} = \\ &= \left\{ \sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N \right\} \cup \left\{ \sup_k \alpha_{nk} \geq e^c \right\} \cup \left\{ \inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c} \right\} \end{aligned}$$

и аналогично

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \left\{ \sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N \right\} &\subseteq \left\{ \sup_k |\ln z_{nk}| \geq \ln N \right\} \cup \{\Omega \setminus A_c^n\} = \\ &= \left\{ \sup_k z_{nk} \geq N \right\} \cup \left\{ \inf_k z_{nk} \leq \frac{1}{N} \right\} \cup \left\{ \sup_k \alpha_{nk} \geq e^c \right\} \cup \left\{ \inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c} \right\}. \end{aligned}$$

Из (5.12) и условия (α) в результате операции $\overline{\lim}_c \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n$ находим, что

$$(5.14) \quad \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k z_{nk} \geq N) \leq \\ \leq \overline{\lim}_c \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N) + \overline{\lim}_c \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}).$$

Покажем, что

$$(5.15) \quad (\alpha), (\beta) \Rightarrow \overline{\lim}_c \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}) = 0.$$

Из леммы 3 с $\eta = (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2$ имеем ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.)

$$\tilde{\mathbf{E}}^n ((1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) = I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{E}^n ((1 - \sqrt{\alpha_{nk}})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) + \\ + \tilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nk} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) - I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{P}(\alpha_{n, k} = 0 | \mathcal{F}_{k-1}^n).$$

Поскольку $(\alpha), (\beta) \Rightarrow (\beta^{**})$ и $(\alpha) \Rightarrow (5.9)$, то

$$(5.16) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}^n ((1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n), \tilde{\mathbf{P}}^n \right)\text{-плотно.}$$

Отсюда по лемме 5

$$(5.17) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_{kn}^{-1/2})^2, \tilde{\mathbf{P}}^n \right)\text{-плотно.}$$

Далее, для $N \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) (N^{1/2} - 1)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2,$$

и значит,

$$\tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) \geq L (N^{1/2} - 1)^{-2} \right) \leq \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 \geq L \right).$$

Полагая $L = (N^{1/2} - 1)^2$, отсюда и из (5.17) после предельного перехода $\overline{\lim}_N \overline{\lim}_n$ получаем

$$(5.18) \quad \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) \geq 1 \right) = 0.$$

Но $\{\inf_k \alpha_{nk} < 1/N\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} < 1/N) \geq 1 \right\}$. Поэтому требуемая импликация (5.15) следует из (5.18).

Итак, в правой части неравенства (5.14) последнее слагаемое равно нулю. Установим теперь, что

$$(5.19) \quad (\alpha), (\beta) \Rightarrow \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N) = 0,$$

иначе говоря, покажем, что для $\forall c \geq 1$

$$(\alpha), (\beta) \Rightarrow (\sup_k |X_{nk}^c|, \tilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно.}$$

Покажем, что для $\forall c \geq 1$ $X^n = (X_{nk}^c, \mathcal{F}_k^n)$ относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}^n$ является субмартингалом, $n \geq 1$, для чего достаточно показать, что ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.)

$$(5.20) \quad \tilde{\mathbf{E}}^n (u_c(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) \geq 0.$$

По лемме 3 ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.)

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^n(u_c(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) &= \\ &= I(\alpha_{n, j-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nj} u_c(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) + c \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Заметим, что $x u_c(\ln x) \geq x - 1$ при $x \geq 0$. Поэтому ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.)

$$(5.22) \quad \begin{aligned} I(\alpha_{n, j-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nj} u_c(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) &\geq \\ &\geq I(\alpha_{n, j-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nj} - 1 | \mathcal{F}_{j-1}^n) \quad (= J_{nj}). \end{aligned}$$

Вновь применяя лемму 3 и следствие 2 к лемме 1, находим, что $\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.

$$(5.23) \quad \begin{aligned} J_{nj} &= 1 - \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n) - I(\alpha_{n, j-1} < \infty) = \\ &= I(\alpha_{n, j-1} = \infty) - \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Из (5.21)–(5.23) следует, что $\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.

$$\tilde{\mathbf{E}}^n(u_c(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) \geq I(\alpha_{n, j-1} = \infty) + (c-1) \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n) \geq 0,$$

поскольку $c \geq 1$.

Итак, $X^n = (X_{nh}^c, \mathcal{F}_h^n)$ относительно меры $\tilde{\mathbf{P}}^n$ является субмартиггалом с $|X_{nh}^c - X_{n, h-1}^c| \leq 2c$. Тогда согласно лемме 8 из § 3 ($\sup_k |X_{nk}^c|$, $\tilde{\mathbf{P}}^n$)-плотно тогда и только тогда, когда

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}^n(u_c(\ln \alpha_{nj}) + u_c^2(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n), \tilde{\mathbf{P}}^n \right)\text{-плотно.}$$

Из леммы 3 ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.)

$$(5.24) \quad \begin{aligned} L_{nj} &\equiv \tilde{\mathbf{E}}^n(u_c(\ln \alpha_{nj}) + u_c^2(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) = \\ &= I(\alpha_{n, j-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nj} u_c(\ln \alpha_{nj}) + \alpha_{nj} u_c^2(\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) + \\ &\quad + (c+c^2) \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n). \end{aligned}$$

С учетом (5.22) и (5.23) отсюда получаем, что

$$(5.25) \quad \begin{aligned} L_{nj} &= I(\alpha_{n, j-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nj} u_c(\ln \alpha_{nj}) + \alpha_{nj} u_c^2(\ln \alpha_{nj}) + \\ &\quad + 1 - \alpha_{nj} | \mathcal{F}_{j-1}^n) + (c+c^2) \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n) - \\ &\quad - I(\alpha_{n, j-1} < \infty) + 1 - \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тем, что для всякого $x \geq 0$

$$(5.26) \quad a(c)(1-x^{1/2})^2 \leq x u_c(\ln x) + x u_c^2(\ln x) + 1 - x \leq A(c)(1-x^{1/2})^2,$$

где $a(c)$ и $A(c)$ — некоторые положительные константы. Тогда

$$\begin{aligned} L_{nj} &\leq A(c) I(\alpha_{n, j-1} < \infty) \mathbf{E}^n((1 - \alpha_{nj}^{1/2})^2 | \mathcal{F}_{j-1}^n) + \\ &\quad + I(\alpha_{n, j-1} = \infty) + [(c-1) + c^2] \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n) \end{aligned}$$

и значит,

$$(5.27) \quad \sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \leq A(c) \xi_1^n + \xi_2^n + [(c-1) + c^2] \xi_3^n,$$

где

$$(5.28) \quad \begin{cases} \xi_1^n = \sum_{j=1}^{\infty} I(\alpha_{n, j-1} < \infty) \mathbf{E}^n((1 - \alpha_{nj}^{1/2})^2 | \mathcal{F}_{j-1}^n), \\ \xi_2^n = \sum_{j=1}^{\infty} I(\alpha_{n, j-1} = \infty), \\ \xi_3^n = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n). \end{cases}$$

Ясно, что

$$\tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \geq N \right) \leq \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\xi_1^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) + \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\xi_2^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) + \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\xi_3^n \geq \frac{N}{3[(c-1)+c^2]} \right).$$

Поскольку $(\alpha), (\beta) \Rightarrow (\beta^{**})$, то

$$\lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\xi_1^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) = 0,$$

и в силу (5.8), (5.9)

$$\lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\xi_2^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) = 0,$$

$$\lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\xi_3^n \geq \frac{N}{3[(c-1)+c^2]} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj}, \tilde{\mathbf{P}}^n \right)\text{-плотно,}$$

а значит, $(\sup_k |X_{nk}^c|, \tilde{\mathbf{P}}^n)$ -плотно, что и доказывает достаточность условий $(\alpha), (\beta)$ для контигуальности $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n)$.

3. Необходимость. Пусть $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n)$. Покажем прежде всего, что тогда имеет место (α) , т.е. что

$$(5.29) \quad (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n) \Rightarrow (\sup_k \alpha_{nk}, \tilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно.}$$

Согласно свойству 5° из § 2 ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.)

$$(5.30) \quad \alpha_{nk} = \frac{z_{nk}}{z_{n, k-1}} I(\sup_k z_{nk} < \infty) + \alpha_{nk} I(\sup_k z_{nk} = \infty).$$

Поэтому для любых $N > 0, L > 0, b > 0$

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_k \alpha_{nk} \geq N \right\} &\subseteq \left\{ \frac{\sup_k z_{nk}}{\inf_k z_{nk}} \geq N, \sup_k z_{nk} < \infty \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \sup_k \alpha_{nk} \geq N, \sup_k z_{nk} = \infty \right\} \subseteq \left\{ \sup_k z_{nk} \geq N \inf_k z_{nk} \right\} \cup \left\{ \sup_k z_{nk} \geq L \right\} = \\ &= \left(\left\{ \sup_k z_{nk} \geq N \inf_k z_{nk}, \inf_k z_{nk} \leq b \right\} \cup \left\{ \sup_k z_{nk} \geq L \right\} \right) \cup \\ &\cup \left(\left\{ \sup_k z_{nk} \geq N \inf_k z_{nk}, \inf_k z_{nk} > b \right\} \cup \left\{ \sup_k z_{nk} \geq L \right\} \right) \subseteq \\ &\subseteq \left\{ \inf_k z_{nk} \leq b \right\} \cup \left\{ \sup_k z_{nk} \geq L \right\} \cup \left\{ \sup_k z_{nk} \geq Nb \right\} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nh} \geq N) \leq \tilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k z_{nh} \leq b) + \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq L) + \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq Nb).$$

Отсюда в силу эквивалентности утверждений (а) и (г) леммы 9 и леммы 2 получаем

$$\lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nh} \geq N) \leq b + \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq L) \rightarrow 0, \\ b \rightarrow 0, \quad L \rightarrow \infty.$$

Итак, (5.29) доказано.

В силу (5.30) для любых $N > 0$, $L > 0$, $b > 0$ ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.н.)

$$(5.31) \quad \left\{ \inf_k \alpha_{nh} \leq \frac{1}{N} \right\} \subseteq \left\{ \frac{\inf_k z_{nh}}{\sup_k z_{nh}} \leq \frac{1}{N}, \sup_k z_{nh} < \infty \right\} \cup \\ \cup \left\{ \inf_k \alpha_{nh} \leq \frac{1}{N}, \sup_k z_{nh} = \infty \right\} \subseteq \\ \subseteq \{N \inf_k z_{nh} \leq \sup_k z_{nh}\} \cup \{\sup_k z_{nh} \geq L\} \subseteq \\ \subseteq \{Nb \leq \sup_k z_{nh}, \inf_k z_{nh} > b\} \cup \{N \inf_k z_{nh} \leq \sup_k z_{nh}, \inf_k z_{nh} \leq b\} \cup \\ \cup \{\sup_k z_{nh} \geq L\} \subseteq \{Nb \leq \sup_k z_{nh}\} \cup \{\inf_k z_{nh} \leq b\} \cup \{\sup_k z_{nh} \geq L\}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k \alpha_{nh} \leq \frac{1}{N}\right) \leq \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq Nb) + \tilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k z_{nh} \leq b) + \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq L).$$

По лемме 2 $\tilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k z_{nh} \leq b) \leq b$. Поэтому, принимая во внимание эквивалентность утверждений (а) и (г) леммы 9, имеем

$$(5.32) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k \alpha_{nh} \leq \frac{1}{N}\right) \leq \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq L) + b \rightarrow 0, \\ L \rightarrow \infty, \quad b \rightarrow 0.$$

Обратимся теперь к доказательству импликации

$$(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n) \Rightarrow (\beta).$$

В силу (5.13)

$$(5.33) \quad \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X_{nh}^c| \geq \ln N) \leq \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq N) + \tilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k z_{nh} \leq \frac{1}{N}\right) + \\ + \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nh} \geq e^c) + \tilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k \alpha_{nh} \leq e^{-c}).$$

Из (5.29) $\overline{\lim}_{c \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nh} \geq e^c) = 0$. Из леммы 2 $\overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k z_{nh} \leq \frac{1}{N}\right) = 0$; из леммы 9 $\overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nh} \geq N) = 0$; из (5.32) $\overline{\lim}_{c \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \times$
 $\times (\inf_k \alpha_{nh} \leq e^{-c}) = 0$. Поэтому в результате предельного перехода $\overline{\lim}_{c \rightarrow \infty} \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n$ из (5.33) находим, что

$$(5.34) \quad \overline{\lim}_c \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X_{nh}^c| \geq \ln N) = 0.$$

Отсюда и из леммы 8 вытекает, что

$$(5.35) \quad \overline{\lim}_c \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \geq N \right) = 0.$$

По аналогии с (5.27) из (5.25) и (5.26) следует оценка

$$(5.36) \quad \sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \geq a(c) \xi_1^n + \xi_2^n + [(c-1) + c^2] \xi_3^n, \quad c \geq 1,$$

где ξ_1^n , ξ_2^n и ξ_3^n задаются формулами (5.28).

Из (5.36)

$$(5.37) \quad \xi_1^n \leq a^{-1}(c) \left[\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} + \xi_2^n + ((c-1) + c^2) \xi_3^n \right].$$

Из (5.29) и (5.8) вытекает, что $((\xi_2^n), \tilde{\mathbf{P}}^n)$ -плотно, а из (5.29) и (5.9) следует, что $((\xi_3^n), \tilde{\mathbf{P}}^n)$ -плотно. Вместе с (5.35) из (5.37) получаем, что поскольку $\inf_{c \geq 1} a(c) > 0$

$$(5.38) \quad (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n) \Rightarrow ((\xi_1^n), \tilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно.}$$

Отсюда и из оценки (5.3), примененной к $\xi_{nk} = \mathbf{E}^n((1 - \alpha_{nk}^{1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n)$,

находим, что согласно (5.2) и (5.29) $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangleleft (\mathbf{P}^n) \Rightarrow (\beta^{**}) \Leftrightarrow (\beta)$.

Теорема 1 доказана.

§ 6. Доказательство теорем 2 и 3

1. Доказательство теоремы 2 опирается на следующий общий факт (лемма 11).

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с выделенным на нем неубывающим семейством σ -алгебр $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, и пусть $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ — \mathbf{F} -согласованная последовательность случайных величин со значениями в $[0, \infty]$, для которой состояния 0 и ∞ являются поглощающими, т. е. γ_k — \mathcal{F}_k -измеримы, $\gamma_k = 0$ на $\{\gamma_j = 0\}$ при $k > j$ и $\gamma_k = \infty$ на $\{\gamma_j = \infty\}$ при $k > j$ (\mathbf{P} -п. н.).

Положим

$$\Gamma_k = \prod_{j=1}^k \gamma_j, \quad a_k = \mathbf{E}(\gamma_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad A_k = \prod_{j=1}^k a_j, \quad k \geq 1.$$

Лемма 11. Если $\mathbf{E}\gamma_1 \leq 1$ и $\mathbf{E}(\gamma_k | \mathcal{F}_{k-1}) \leq 1$ (\mathbf{P} -п. н.), $k \geq 2$, то последовательность $\Gamma = (\Gamma_k)_{k \geq 1}$ допускает мультипликативное разложение

$$(6.1) \quad \Gamma_k = A_k \cdot S_k,$$

где $A = (A_k, \mathcal{F}_{k-1})_{k \geq 1}$ — невозрастающая последовательность \mathcal{F}_{k-1} -измеримых случайных величин A_k , а $S = (S_k, \mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ — неотрицательный супермартингал с $\mathbf{E}S_k \leq 1$.

При этом (\mathbf{P} -п. н.) существует предел $\Gamma_\infty \equiv \lim_n \Gamma_n$ и для любых $a > 0$, $b > 0$

$$(6.2) \quad \mathbf{P}(\Gamma_\infty \geq a) \leq \frac{b}{a} + \mathbf{P}(A_\infty \geq b).$$

Доказательство. Покажем, что для получения представления
(6.1) можно положить $S_k = \prod_{j=1}^k \gamma_j a_j^{\oplus}$, где, напомним,

$$a^{\oplus} = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a^{-1}, & 0 < a < \infty, \\ 0, & a = \infty. \end{cases}$$

С этой целью достаточно показать, что

$$(6.3) \quad \gamma_j = \gamma_j a_j^{\oplus} a_j \quad (\mathbf{P}\text{-п. н.}).$$

Поскольку $\gamma_j \geq \gamma_j a_j^{\oplus} a_j$ (\mathbf{P} -п. н.), то следует лишь установить, что

$$\mathbf{E}\gamma_j = \mathbf{E}\gamma_j a_j^{\oplus} a_j.$$

Но $\mathbf{E}\gamma_j = \mathbf{E}a_j$ и, с другой стороны,

$$\mathbf{E}\gamma_j a_j^{\oplus} a_j = \mathbf{E}[a_j^{\oplus} a_j \mathbf{E}(\gamma_j | \mathcal{F}_{j-1})] = \mathbf{E}a_j^{\oplus} a_j a_j = \mathbf{E}a_j,$$

что и доказывает (6.3).

Покажем теперь, что $S = (S_k, \mathcal{F}_k)$ — супермартиггал. Действительно, имеем (\mathbf{P} -п. н.)

$$\mathbf{E}(S_k | \mathcal{F}_{k-1}) = S_{k-1} \mathbf{E}(\gamma_k a_k^{\oplus} | \mathcal{F}_{k-1}) = S_{k-1} a_k^{\oplus} a_k \leq S_{k-1}.$$

Далее, $\mathbf{E}S_1 = a_1 a_1^{\oplus} \leq 1$, и значит, $\mathbf{E}S_k \leq 1$.

Известно, что неотрицательный супермартиггал сходится (\mathbf{P} -п. н.) к конечному пределу. Поэтому существует (\mathbf{P} -п. н.) предел $S_{\infty} \equiv \lim_n S_n$ и $\mathbf{E}S_{\infty} \leq 1$.

Заметим теперь, что $0 \leq A_1 = a_1 \leq 1$ и $A_{k+1} \leq A_k$ (\mathbf{P} -п. н.). Значит, существует предел $A_{\infty} \equiv \lim_n A_n \geq 0$ и, следовательно, (\mathbf{P} -п. н.) существует предел $\Gamma_{\infty} \equiv \lim_n \Gamma_n$ и $\Gamma_{\infty} = A_{\infty} \cdot S_{\infty}$.

Установим оценку (6.2).

Для любых $a > 0$, $b > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \{\Gamma_{\infty} \geq a\} &= \{\Gamma_{\infty} \geq a, S_{\infty} < \frac{a}{b}\} \cup \{\Gamma_{\infty} \geq a, S_{\infty} \geq \frac{a}{b}\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ \frac{a}{b} A_{\infty} \geq a \right\} \cup \left\{ S_{\infty} \geq \frac{a}{b} \right\} = \{A_{\infty} \geq b\} \cup \left\{ S_{\infty} \geq \frac{a}{b} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\Gamma_{\infty} \geq a) \leq \mathbf{P}(A_{\infty} \geq b) + \mathbf{P}\left(S_{\infty} \geq \frac{a}{b}\right).$$

Требуемая оценка (6.2) следует отсюда, если только заметить, что

$$\mathbf{P}\left(S_{\infty} \geq \frac{a}{b}\right) \leq \frac{b}{a} \mathbf{E}S_{\infty} \leq \frac{b}{a}.$$

2. Доказательство теоремы 2. Положим $\gamma_{nk} = \alpha_{nk}^{-1/2}$ и покажем, что

$$\tilde{\mathbf{E}}^n(\gamma_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \leq 1 \quad (\tilde{\mathbf{P}}^n\text{-п. н.}), \quad k \geq 1.$$

По лемме 3 ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п. н.)

$$\tilde{\mathbf{E}}^n(\alpha_{nk}^{-1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) = I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n),$$

а по лемме 4 ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п. н.)

$$I(\alpha_{n, k-1} < \infty) (1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)) \geq 0.$$

Поэтому ($\tilde{\mathbf{P}}^n$ -п.п.) $\tilde{\mathbf{E}}^n(\alpha_{nk}^{-1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \leq 1, k \geq 1$. Применяя лемму 11, находим, что

$$\tilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty}^{-1/2} \geq a) \leq \frac{b}{a} + \tilde{\mathbf{P}}^n\left(\prod_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq b\right).$$

Возьмем в этом неравенстве $0 < b \leq 1$. Тогда

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) &\geq \\ &\geq \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \tilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln [I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq \ln b\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\ln x \leq x - 1, x \geq 0$ и, значит,

$$\begin{aligned} \ln [I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] &\leq I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) - 1 \leq \\ &\leq I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) - 1], \end{aligned}$$

то из (6.4) находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) &\geq \\ &\geq \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \tilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \leq \ln \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Согласно условию (γ) для любого $0 < b \leq 1$

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \leq \ln \frac{1}{b}\right) = 0.$$

Поэтому

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) \geq 1 - \frac{b}{a},$$

и значит, в силу произвольности $0 < b \leq 1$

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) = 1,$$

что в силу леммы 10 равносильно тому, что $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n)$.

3. Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 5. Поскольку $\mathbf{P}_k^n(z_{nk} = \infty) = 0$ (свойство 5° из § 2) и $\tilde{\mathbf{P}}_k^n \ll \mathbf{P}_k^n$, то

$$\tilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nk} = \infty) = \tilde{\mathbf{P}}_k^n(\alpha_{nk} = \infty) = \tilde{\mathbf{P}}_k^n(z_{nk} = \infty) = 0$$

и (1.8) следует непосредственно из утверждения теоремы 2.

4. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. То, что условие (ρ) является достаточным (без условий (α) и (δ)), было установлено в следствии 5 к теореме 2.

Покажем теперь, что

$$(\alpha), (\delta), (\tilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n) \Rightarrow (\rho).$$

В силу леммы 10 это равносильно доказательству того, что

$$(6.5) \quad (\alpha), (\delta), \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) = 1 \quad \forall N > 0 \Rightarrow (\rho).$$

В соответствии с (5.12) для $N \geq 1$, $c \geq 1$

$$\{\sup_k z_{nk} \geq N\} \subseteq \{\sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geq e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}\}.$$

Поэтому

$$(6.6) \quad \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N) \geq \\ \geq 1 - \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geq e^c) - \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}).$$

Отсюда в силу условий (α) , (δ) находим, что для всякого $N \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется $c = c(\varepsilon) \geq 1$ такое, что

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N) \geq 1 - \varepsilon.$$

Согласно (3.17) с $N > e$

$$(6.7) \quad \tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \ln N) \leq \frac{2LA(c)}{\ln N - 1} + \tilde{\mathbf{P}}^n(A_\infty^n + B_\infty^n \geq 2LA(c)),$$

где A_∞^n и B_∞^n определены в доказательстве леммы 8 в § 3, $L > 0$, $0 < A(c) < \infty$ определено в (5.26).

Из (6.6) и (6.7)

$$(6.8) \quad \overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n(A_\infty^n + B_\infty^n \geq 2LA(c)) \geq 1 - \frac{2LA(c)}{\ln N - 1} \rightarrow 1 - \varepsilon, \quad N \rightarrow \infty.$$

Далее, на множестве $\{\sup_k \alpha_{nk} < \infty\}$ из (5.26) находим

$$A_\infty^n + B_\infty^n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n [\alpha_{nk} u_c(\ln \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2(\ln \alpha_{nk}) | \mathcal{F}_{k-1}^n] = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n [\alpha_{nk} u_c(\ln \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2(\ln \alpha_{nk}) + 1 - \alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n] \leq \\ \leq A(c) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n [(1 - \alpha_{nk}^{1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] = 2A(c) \sum_{k=1}^{\infty} [1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)].$$

Вместе с (6.8) и в силу (α) отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_n \tilde{\mathbf{P}}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} [1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq L \right) \geq 1 - \varepsilon.$$

В силу произвольности L и ε это доказывает, что из условий (α) , (δ) , $(\tilde{\mathbf{P}}^n) \Delta (\mathbf{P}^n)$ вытекает условие (ρ) . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Le C̃a m. Locally asymptotically normal families of distributions.— Univ. of Calif. Publ. Statist., 1960, 3, p. 37—98.
- [2] Дж. Р у с а с. Контигуальность вероятностных мер.— М.: Мир, 1975.
- [3] Я. Г а е к, З. Ш и д а к. Теория ранговых критериев.— М.: Наука, 1971.
- [4] Н. W i t t i n g, G. N ö l l e. Angewandte mathematische Statistik.— Stuttgart, Teubner, 1970.

- [5] W. J. Hall, R. M. Loynes. On the concept of contiguity.— *Ann. of Prob.*, 5:2, p. 278—282.
- [6] J. Oosterhoff, W. R. van Zwet. A note on contiguity and Hellinger distance. *Contributions to Statistics* (ed. J. Jurečkova).— Dordrecht, Reidel, 1979.
- [7] L. LeCam. On the asymptotic normality of estimates.— *Proc. of the Symposium to Honour Jerzey Neyman* (Warsaw, 1974), Warsaw Państw. Wydamu Nauk, 1977, p. 203—217.
- [8] G. K. Eagleson. An extended dichotomy theorem for sequences of pairs of Gaussian measures.— *Ann. of Prob.*, 1981, 9:3, p. 453—459.
- [9] G. K. Eagleson, R. F. Gundy. On a theorem of Kabanov, Liptser and Sirjaev.— Preprint.
- [10] G. K. Eagleson, J. Memin. Sur la contiguïté de deux suites de mesures; généralisation d'un théorème de Kabanov — Liptser — Shiryaev.— *Lect. Notes in Math.*, 1982, 920, с. 319—337.
- [11] Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Шпряев. К вопросу об абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер.— *Матем. сб.*, 1977, 104(146), с. 227—247.
- [12] E. Lengart. Relation de domination entre deux processus.— *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1977, 13, p. 171—179.
- [13] R. Rebolledo. La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus.— *M. Soc. Math. France*, 1979, 62.
- [14] U. Müller-Funk. On contiguity and weak convergence with an application to sequential analysis.— *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, 1982.
- [15] K. Vehnen, G. Neuhäus. A central limit theorem under contiguous alternatives.— *Ann. of Statist.*, 1975, 3, p. 1349—1353.
- [16] Р. Ш. Липцер, А. Н. Шпряев. Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974.
- [17] А. Н. Шпряев. Вероятность.— М.: Наука, 1980.

Институт проблем управления,
 Institut für Mathematische
 Stochastik der Albert-Ludwigs-Universität,
 Математический институт АН СССР
 им. В. А. Стеклова

Necessary and sufficient conditions for contiguity and entire asymptotic separation of probability measures

R.Sh. Liptser, F. Pukel'shein, and A.N. Shiryaev

CONTENTS

§1. Introduction. Statement of the main results	107
§2. The Lebesgue decomposition and Hellinger distance	113
§3. Asymptotic tightness of submartingales	118
§4. Characterization of contiguity and entire asymptotic separation	122
§5. Proof of Theorem 1	124
§6. Proofs of Theorems 2 and 3	132
References	135

§1. Introduction. Statement of the main results

Let $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)_{n \geq 1}$ be a sequence of measurable spaces, and let P^n and \tilde{P}^n be probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, $n \geq 1$.

Definition 1 ([1]–[6]). A sequence of probability measures $(\tilde{P}^n)_{n \geq 1}$ is said to be *contiguous* to a sequence of probability measures $(P^n)_{n \geq 1}$ (notation: $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$) if for every sequence of measurable sets $(A^n)_{n \geq 1}$ with $A^n \in \mathcal{F}^n$

$$(1.1) \quad \lim_n P^n(A^n) = 0 \Rightarrow \lim_n \tilde{P}^n(A^n) = 0.$$

Definition 2 ([7]–[10]). Two sequences of probability measures $(\tilde{P}^n)_{n \geq 1}$ and $(P^n)_{n \geq 1}$ are said to be *entirely asymptotically separating* (notation: $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$) if there exists a subsequence (n') and measurable sets $A^{n'} \in \mathcal{F}^{n'}$ such that simultaneously $\lim_n P^{n'}(A^{n'}) = 0$ and $\lim_n \tilde{P}^{n'}(A^{n'}) = 1$.

Note 1. In the special case when $(\Omega^n, \mathcal{F}^n) \equiv (\Omega, \mathcal{F})$ and $P^n \equiv P$, $\tilde{P}^n \equiv \tilde{P}$, that is, when the sequences of measurable spaces and probability measures in question do not depend on n , the property of contiguity is the same as the property of absolute continuity ($\tilde{P} \ll P$) of \tilde{P} relative to P , and the property of entire asymptotic separation indicates the singularity ($\tilde{P} \perp P$) of \tilde{P} and P .

2., Throughout what follows we assume that for every $n \geq 1$ together with the measurable spaces $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ we are given families of σ -algebras $P^n = (\mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$ such that $\mathcal{F}_0^n = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n \subseteq \mathcal{F}^n$, and $\mathcal{F}^n = \sigma(\bigcup_k \mathcal{F}_k^n)$. We write $P_k^n = P^n | \mathcal{F}_k^n$ and $\tilde{P}_k^n = \tilde{P}^n | \mathcal{F}_k^n$ for the restrictions of the probability measures P^n and \tilde{P}^n to the σ -algebra \mathcal{F}_k^n .

Note 2. Suppose that on (Ω, \mathcal{F}) there are given two probability measures P and \tilde{P} . Let $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$ be a family of σ -algebras, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_k \mathcal{F}_k)$, and $P_k = P | \mathcal{F}_k$, $\tilde{P}_k = \tilde{P} | \mathcal{F}_k$. Then the contiguity of the family $(\tilde{P}_k)_{k \geq 0}$ to $(P_k)_{k \geq 0}$, regarded on $(\Omega, \mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$, is equivalent to \tilde{P} being absolutely continuous relative to P . In other words, in this particular case

$$(\tilde{P}_k) \triangleleft (P_k) \Leftrightarrow \tilde{P} \ll P.$$

Similarly,

$$(\tilde{P}_k) \triangleleft (P_k) \Leftrightarrow \tilde{P} \perp P.$$

3. To state the results of this paper and to discuss their connection with earlier results we now introduce some notation.

Let $Q^n = \frac{1}{2}(\tilde{P}^n + P^n)$, $Q_k^n = Q^n | \mathcal{F}_k^n (= \frac{1}{2}(\tilde{P}_k^n + P_k^n))$. For every $0 \leq a \leq \infty$ we set

$$(1.2) \quad a^{\mathbb{P}} = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ a^{-1} & \text{if } 0 < a < \infty \\ 0 & \text{if } a = \infty, \end{cases} \quad a^{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ a^{-1} & \text{if } 0 < a < \infty \\ \infty & \text{if } a = \infty, \end{cases}$$

and we write

$$\beta_{nk} = \frac{dP_k^n}{dQ_k^n}, \quad \tilde{\beta}_{nk} = \frac{d\tilde{P}_k^n}{dQ_k^n}$$

for the Radon-Nikodym derivatives of the measures P_k^n and \tilde{P}_k^n relative to Q_k^n . (Throughout what follows we only consider finite versions of the Radon-Nikodym derivatives.)

We also set (for $k \geq 1$)

$$(1.3) \quad \beta_{nk} = \beta_{nk} \cdot \beta_{n, k-1}^{-1}, \quad \tilde{\beta}_{nk} = \tilde{\beta}_{nk} \cdot \tilde{\beta}_{n, k-1}^{-1}$$

assuming that $\beta_{n0} = \tilde{\beta}_{n0} = 1$.

A central role in what follows is played by the likelihood ratio

$$(1.4) \quad z_{nk} = \frac{\beta_{nk}}{\tilde{\beta}_{nk}}$$

and the quantities constructed from them

$$(1.5) \quad \alpha_{nk} = z_{nk} \cdot z_{n, k-1}^{-1}, \quad k \geq 1.$$

Observe that in (1.4) the undetermined form ∞/∞ does not arise; as usual, $a/0 = \infty$ for $a > 0$, and in the case of $0/0$ we set z_{nk} equal to an arbitrary number, for example 0, which is immaterial, because

$$Q^n(\tilde{\delta}_{nk} = 0, \delta_{nk} = 0) \leq \frac{1}{2} (\tilde{P}^n(\tilde{\delta}_{nk} = 0) + P^n(\delta_{nk} = 0)) = 0.$$

Thus, $z_{nk} = \tilde{\delta}_{nk} \cdot \tilde{\delta}_{nk} = \tilde{\delta}_{nk} \cdot \delta_{nk}$ (Q^n -almost surely). Just as in (1.5), an indeterminate expression of the type $0 \cdot \infty$ or $\infty \cdot 0$ can occur only with Q^n -probability zero, because the states 0 and ∞ are absorbing for $(z_{nk})_{k \geq 1}$, see § 2.3.⁽¹⁾

4. The following theorem is one of the main results of the present paper.

Theorem 1. For $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$ to hold it is necessary and sufficient that the following two conditions are satisfied:

$$(a) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geq N) = 0,$$

$$(b) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_{Q^n} (|V/\tilde{\beta}_{nk} - V/\beta_{nk}|^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n \geq N)\right) = 0,$$

where E_{Q^n} denotes the expectation relative to Q^n .

II. If (a) holds, then (b) is equivalent to

$$(b^*) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [1 - E^n(|V/\alpha_{nk}|^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N]\right) = 0,$$

or

$$(b^{**}) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} E^n [(1 - |V/\alpha_{nk}|^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N]\right) = 0,$$

where E^n denotes the expectation relative to P^n .

Corollary 1. Suppose that $P^n = \mu_1^n \times \mu_2^n \times \dots$, $\tilde{P}^n = \tilde{\mu}_1^n \times \tilde{\mu}_2^n \times \dots$ are direct products of probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, where

$$\Omega^n = \Omega_1^n \times \Omega_2^n \times \dots, \quad \mathcal{F}^n = \mathcal{F}_1^n \otimes \mathcal{F}_2^n \otimes \dots$$

Then in (b) the conditional mathematical expectations are the same as the unconditional ones.

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} \frac{d\beta_{nk}}{d(\beta_{nk} + \tilde{\beta}_{nk})}, \quad \tilde{\beta}_{nk} = \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\beta}_{nk}}{d(\beta_{nk} + \tilde{\beta}_{nk})},$$

and

$$E_{Q^n} (|V/\tilde{\beta}_{nk} - V/\beta_{nk}|^2) = \int (|V/\tilde{\beta}_{nk} - V/\beta_{nk}|^2) d\left(\frac{\beta_{nk} + \tilde{\beta}_{nk}}{2}\right)$$

is precisely the square of the Hellinger distance $H(\tilde{\mu}_k, \mu_k)$ between the measures $\tilde{\mu}_k$ and μ_k (for details, see § 2.5).

⁽¹⁾Henceforth sup denotes $\sup_{1 \leq n < \infty}$ and $\lim = \lim_{n \rightarrow \infty}$.

As a special case of Theorem 1 we can derive the following results due to Ostorhoof and van Zwet [6]: for the contiguity $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$ of the family (\tilde{P}^n) relative to (P^n) , where each is a direct product measure, it is necessary and sufficient that

$$(a) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n\left(\sup_k \frac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \geq N\right) = 0,$$

$$(b) \quad \lim_N \sum_{k=1}^{\infty} H^2(\mu_k, \tilde{\mu}_k) < \infty.$$

Corollary 2. Let $P^n = \mu_1^n \times \dots \times \mu_k^n$ and $\tilde{P}^n = \tilde{\mu}_1^n \times \dots \times \tilde{\mu}_k^n$ be direct products of probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, where $\Omega^n = R^n$, $\mathcal{F}^n = \mathcal{G}(R^n)$ and $\mu_k^n = \mu_k^n$, $\tilde{\mu}_k^n = \tilde{\mu}_k^n$. We assume for simplicity that μ_k^n and $\tilde{\mu}_k^n$ have densities $p_k^n(x)$ and $\tilde{p}_k^n(x)$ relative to Lebesgue measure. Then in the associated triangular scheme of series corresponding to the case of independent and identically distributed random variables, for the relation $(P^n) \triangleleft (P^n)$ to hold it is necessary and sufficient that

$$\lim_N \overline{\lim}_n \mu_k^n \left\{x: \frac{\tilde{p}_k^n(x)}{p_k^n(x)} \geq N\right\} = 0$$

and

$$\lim_N \int_{-\infty}^{\infty} (|V/\tilde{p}_k^n(x) - V/p_k^n(x)|^2) dx < \infty.$$

Corollary 3. Suppose that for every $n \geq 1$ the measures \tilde{P}^n are locally absolutely continuous relative to the P^n (notation: $\tilde{P}^n \ll_{loc} P^n$), that is,

$$\tilde{P}_k^n \ll P_k^n, \quad k \geq 1.$$

Under this assumption $\tilde{P}^n(\alpha_{n, k-1} < \infty) = 1$, and Theorem 1 includes the results of Eagleson and Gundy [9] and Eagleson and Memin [10] that condition (a) and the condition

$$(1.5) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} E^n (1 - |V/\alpha_{nk}|^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N\right) = 0$$

are sufficient for $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$.

Corollary 4. According to Note 2 absolute continuity $\tilde{P} \ll P$ is equivalent to contiguity $(\tilde{P}_k) \triangleleft (P_k)$, provided that the measurable space (Ω, \mathcal{F}) is equipped with a filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$, $\mathcal{F} = \sigma(\cup_k \mathcal{F}_k)$, and that $P_k = P |_{\mathcal{F}_k}$ and $\tilde{P}_k = \tilde{P} |_{\mathcal{F}_k}$ are the restrictions of measures P and \tilde{P} .

Let us assume that $\tilde{P} \ll_{loc} P$. In this case the condition (a) has the form

$$\tilde{P}(\sup_k \alpha_k < \infty) = 1$$

with $\alpha_k = z_k \cdot z_{k-1} \cdot z_k = d\tilde{P}_k/dP_k$ and holds automatically (for details see § 2.1.5^o).

Hence Theorem 1 includes as a special case the following generalization of a result of Kabanov, Lipsker, and Shiryaev [11]: if $\tilde{P} \ll_{loc} P$, then

$$(1.7) \quad \tilde{P} \ll P \Leftrightarrow \tilde{P} \left(\sum_{k=1}^{\infty} E(1 - V_{\alpha_k} | \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \right) = 1.$$

5. In the following two theorems we give necessary and sufficient conditions for entire asymptotic separation of two families of measures (\tilde{P}^n) and (P^n) .

Theorem 2. Suppose that

$$(v) \quad \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty) [1 - E^n(V_{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq N \right) = 1 \text{ for all } N > 0.$$

Then $(\tilde{P}^n) \Delta (P^n)$.

Corollary 5. If $\tilde{P}^n \ll_{loc} P^n$, $n \geq 1$, then $\tilde{P}^n(\alpha_{n,k-1} < \infty) = 1$ and Theorem 2 includes the following results from [9] and [10]:

$$(4.8) \quad \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} [1 - E^n(V_{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq N \right) = 1 \text{ for all } N > 0 \Rightarrow (\tilde{P}^n) \Delta (P^n).$$

In Theorem 3 we give condition for the reverse implication to (1.8) to hold.

Theorem 3. Suppose that $\tilde{P}^n \ll_{loc} P^n$, $n \geq 1$, and that

$$(a) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sup_k \alpha_{nk} \geq N \right) = 0,$$

$$(b) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\inf_k \alpha_{nk} \leq \frac{1}{N} \right) = 0.$$

Then the condition

$$(v) \quad \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} [1 - E^n(V_{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq N \right) = 1 \text{ for all } N > 0$$

is necessary and sufficient for $(\tilde{P}^n) \Delta (P^n)$ to hold.

Theorems 1 and 3 have the following immediate corollaries.

Corollary 6. Suppose that $\tilde{P}^n \ll_{loc} P^n$, $n \geq 1$, and that the conditions (a) and (b) are satisfied. Then

$$(1.9) \quad \begin{cases} (\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n) \Leftrightarrow \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} E^n(1 - V_{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) = 0, \\ (\tilde{P}^n) \Delta (P^n) \Leftrightarrow \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} F^n(1 - V_{\alpha_{nk}} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) = 1 \end{cases}$$

for all $N > 0$.

In particular, in the situation of Note 2 the conditions (a) and (b) take the form

$$\tilde{P} \left(\sup_k \alpha_k < \infty \right) = 1, \quad \tilde{P} \left(\inf_k \alpha_k = 0 \right) = 0$$

and follow from (β^{**}) and (ρ) . Therefore, (1.9) leads to the following result of [11]: if $P \ll_{loc} P$, then

$$(1.10) \quad \begin{cases} \tilde{P} \ll_{loc} P \Leftrightarrow \tilde{P} \left(\sum_{k=1}^{\infty} E(1 - V_{\alpha_k} | \mathcal{F}_{k-1}) < \infty \right) = 1, \\ \tilde{P} \perp P \Leftrightarrow \tilde{P} \left(\sum_{k=1}^{\infty} E(1 - V_{\alpha_k} | \mathcal{F}_{k-1}) = \infty \right) = 1. \end{cases}$$

Corollary 7. Suppose that we are in the situation of Corollary 1 (direct product of measures) and that

$$\tilde{P}^n \ll_{loc} P^n, \quad n \geq 1,$$

$$(1.11)$$

$$\begin{cases} (a) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sup_k \frac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \geq N \right) = 0, \\ (b) \quad \lim_N \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\inf_k \frac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \leq \frac{1}{N} \right) = 0. \end{cases}$$

Then

$$(1.12) \quad \begin{cases} (\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} H^2(\mu_k^n, \mu_k^n) < \infty, \\ (\tilde{P}^n) \Delta (P^n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} H^2(\tilde{\mu}_k^n, \mu_k^n) = \infty. \end{cases}$$

Thus, under the assumptions (1.11) we have the following alternative:

$$\text{either } (\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n), \text{ or } (\tilde{P}^n) \Delta (P^n).$$

(compare with the Kakutani alternative: [11]).

6. We now give a brief outline of the idea of the proofs of Theorems 1-3, and to this end it is useful to recall the following definition.

Definition 3. A family $(\xi^n)_{n \geq 1}$ of random variables ξ^n defined on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$, $n \geq 1$, is said to be *asymptotically tight* under a family of measures $(P^n)_{n \geq 1}$ (notation: (ξ^n, P^n) -as. tight) if

$$(1.13) \quad \lim_N \overline{\lim}_n P^n(|\xi^n| \geq N) = 0.$$

According to Lemma 9 (below)

$$(1.14) \quad (\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n) \Leftrightarrow (\sup_k z_{nk}, \tilde{P}^n)$$
-as. tight.

Thus, the proof of Theorem 1 in §5 reduces to a verification that asymptotic tightness of $(\sup_k z_{nk})$ under (\tilde{P}^n) is equivalent to the conditions (a) and (b) which can also be expressed in terms of asymptotic tightness of the corresponding families. Next, by Lemma 10,

$$(1.15) \quad (\tilde{P}^n) \Delta (P^n) \Leftrightarrow \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sup_k z_{nk} \geq N \right) = 1 \text{ for all } N > 0.$$

Thus, the proof of Theorem 2 reduces to showing that

$$(\gamma) \Rightarrow \lim_n \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) = 1 \text{ for all } N > 0.$$

Theorems 2 and 3 are proved in §6.

In §2 we derive the Lebesgue decomposition and a number of useful related results. In particular, we establish in Lemma 3 a formula for the transformation of a conditional mathematical expectation under a non-absolutely continuous change of probability measures. In §3 we give conditions (in predictable terms) for asymptotic tightness of families of submartingales. In §4 we give a number of characterizations of contiguity and entire asymptotic separation.

§2. The Lebesgue decomposition and Hellinger distance

1. Let (Ω, \mathcal{F}) be a measurable space equipped with a filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ of σ -algebras such that $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_k \mathcal{F}_k)$; let \mathbf{P} and $\tilde{\mathbf{P}}$ be two probability measures and $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} | \mathcal{F}_k$, $\tilde{\mathbf{P}}_k = \tilde{\mathbf{P}} | \mathcal{F}_k$ their restrictions to \mathcal{F}_k .

We write $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}})$, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q} | \mathcal{F}_k$. Let

$$\delta_k = \frac{d\mathbf{P}_k}{d\mathbf{Q}_k}, \quad \tilde{\delta}_k = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_k}{d\mathbf{Q}_k}$$

$$z_k = \frac{\delta_k}{\tilde{\delta}_k}$$

be finite versions of the corresponding Radon-Nikodym derivatives, and let

be the likelihood ratio (in the case of an indeterminacy 0/0 we define $z_k = 0$: notice, however, that $\mathbf{Q}(\tilde{\delta}_k = 0, \delta_k = 0) = 0$).

Next we list some basic properties of the sequences (δ_k) , $(\tilde{\delta}_k)$, and (z_k) , $k \geq 1$.

1°. Relative to \mathbf{Q} the families $\delta = (\delta_k, \mathcal{F}_k)$ and $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_k, \mathcal{F}_k)$ are non-negative uniformly integrable martingales. It follows that $\mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{P}}$, and \mathbf{P} -a.s.

$$\delta_\infty \equiv \lim \delta_k, \quad \tilde{\delta}_\infty \equiv \lim \tilde{\delta}_k, \quad \sup_k \delta_k + \sup_k \tilde{\delta}_k < \infty$$

and

$$\delta_\infty = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}, \quad \tilde{\delta}_\infty = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}}.$$

2°. $\mathbf{P}(\inf_k \delta_k > 0) = 1$, $\tilde{\mathbf{P}}(\inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1$. For let

$T = \inf\{k \geq 0: \delta_k = 0\}$, setting $T = \infty$ when $\delta_k > 0$ for every $k \geq 0$. Then

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\inf_k \delta_k = 0) &= \int_{\{\inf_{k \geq 0} \delta_k = 0\}} \delta_\infty d\mathbf{Q} = \\ &= \int_{\{\delta_T = 0, T < \infty\}} \delta_\infty d\mathbf{Q} + \int_{\{\delta_\infty = 0, T = \infty\}} \delta_\infty d\mathbf{Q} = \int_{\{\delta_T = 0, T < \infty\}} \delta_T d\mathbf{Q} = 0, \end{aligned}$$

3°. Since the value 0 is an absorbing state (\mathbf{Q} -a.s.) for the martingales $\delta = (\delta_k, \mathcal{F}_k)$ and $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_k, \mathcal{F}_k)$, the values 0 and ∞ are absorbing states ($\mathbf{Q}, \mathbf{P},$ and $\tilde{\mathbf{P}}$ -a.s.) for the submartingale $(z_k)_{k \geq 1}$.

$$z_\infty \equiv \lim z_k$$

exists $\mathbf{Q}, \mathbf{P},$ and $\tilde{\mathbf{P}}$ -a.s.

5°. The following equalities hold:

$$\mathbf{P}(\sup_k z_k < \infty) = 1, \quad \tilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k > 0) = 1,$$

and if $\tilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$, then

$$\tilde{\mathbf{P}}(\sup_k z_k < \infty) = 1.$$

For

$$\tilde{\mathbf{P}}(\sup_k z_k < \infty) \geq \tilde{\mathbf{P}}\left(\sup_k \frac{\delta_k}{\tilde{\delta}_k} < \infty\right) \geq \tilde{\mathbf{P}}(\sup_k \delta_k < \infty, \inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1$$

and

$$\tilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k > 0) = \tilde{\mathbf{P}}(\inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1.$$

2. **Lemma 1** (The Lebesgue decomposition). *Let T be a Markov time (relative to $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$). Then for every set $A \in \mathcal{F}_T$*

$$(2.1) \quad \tilde{\mathbf{P}}(A) = \int_A z_T d\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}(A \cap \{z_T = \infty\}).$$

Proof (see [11]). Since

$$1 = \delta_T^\mathbf{P} \cdot \delta_T + (1 - \delta_T^\mathbf{P}) \delta_T,$$

for every set $A \in \mathcal{F}_T$

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \tilde{\mathbf{P}}(A) &= \int_A \tilde{\delta}_\infty d\mathbf{Q} = \int_A \tilde{\delta}_T d\mathbf{Q} = \int_A \delta_T \{z_T^\mathbf{P} \delta_T + (1 - \delta_T^\mathbf{P}) \delta_T\} d\mathbf{Q} = \\ &= \int_A \tilde{\delta}_T \delta_T^\mathbf{P} \delta_\infty d\mathbf{Q} + \int_A \tilde{\delta}_T (1 - \delta_T^\mathbf{P} \delta_T) d\mathbf{Q} = \int_A \tilde{\delta}_T \delta_T^\mathbf{P} d\mathbf{P} + \int_A (1 - \delta_T^\mathbf{P} \delta_T) d\tilde{\mathbf{P}}. \end{aligned}$$

Here (see 2°)

$$(2.3) \quad \tilde{\delta}_T \delta_T^\mathbf{P} = \frac{\delta_T}{\tilde{\delta}_T} \quad (\mathbf{P}\text{-a.s.})$$

and

$$(2.4) \quad \int_A (1 - \delta_T^\mathbf{P} \delta_T) d\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}(A, \delta_T = 0) = \tilde{\mathbf{P}}\left(A, \frac{\delta_T}{\tilde{\delta}_T} = \infty\right),$$

since $\tilde{\mathbf{P}}(\inf_k \tilde{\delta}_k > 0) = 1$.

The decomposition (2.1) now follows from (2.2)–(2.4).

Corollary 1. Let η be a non-negative, \mathcal{F}_T -measurable random variable with $\tilde{E}\eta < \infty$ (where \tilde{E} denotes the expectation relative to \tilde{P}). Then

$$(2.5) \quad \tilde{E}\eta = E\eta z_T + \tilde{E}\eta I(z_T = \infty).$$

Corollary 2. Let η be a non-negative, \mathcal{F}_T -measurable random variable such that $\eta = 0$ (P -a.s.). Then

$$(2.6) \quad \eta I(z_T < \infty) = 0 \quad (\tilde{P}\text{-a.s.}).$$

3. **Lemma 2.** For every $b > 0$

$$(2.7) \quad \tilde{P}(\inf_k z_k \leq b) \leq b, \quad P(\sup_k z_k \geq b) \leq \frac{1}{b}.$$

Proof. Let $T = \inf\{k: z_k \leq b\}$, taking $T = \infty$ if $z_k > b$ for all k . Then $\inf_k z_k \leq b = \{z_T \leq b\}$. By (2.1)

$$\tilde{P}(\inf_k z_k \leq b) = \int_{\{z_T \leq b\}} z_T dP + \tilde{P}(z_T \leq b, z_T = \infty) \leq b.$$

Now let $S = \inf\{k: z_k \geq b\}$ with $S = \infty$ if $z_k < b$ for all k . Then $\{\sup_k z_k \geq b\} = \{z_S \geq b\}$, and again by (2.1)

$$\begin{aligned} 1 &\geq \tilde{P}(\sup_k z_k \geq b) = \tilde{P}(z_S \geq b) = \\ &= \int_{z_S \geq b} z_S d\tilde{P} + P(z_S \geq b, z_S = \infty) \geq bP(z_S \geq b) = bP(\sup_k z_k \geq b). \end{aligned}$$

4. We write $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = z_1$, $\alpha_k = z_k \cdot z_{k-1}^{\tilde{\alpha}}$ for $k \geq 2$. Then by 3°

$$(2.8) \quad z_k = \prod_{j=1}^k \alpha_j.$$

The following lemma gives an important formula for the computation of conditional expectations under a non-absolutely continuous change of probability measures.

Lemma 3. Let $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ and let η be a non-negative, $\tilde{\mathcal{F}}_k$ -measurable \tilde{P} -integrable random variable, $k \geq 1$. Then (\tilde{P} -a.s.)

$$(2.9) \quad \tilde{E}(\eta | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) = I(\alpha_{k-1} < \infty) E(\eta \alpha_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) + \tilde{E}(\eta I(\alpha_k = \infty) | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}).$$

Proof. Observe that for $k = 1$ (2.9) reduces to (2.5).

Suppose now, that $k \geq 2$. It is enough to prove (2.9) for bounded non-negative random variables η . Under this hypothesis, we denote the right-hand side of (2.9) by ξ . Then, to verify (2.9) we must establish that for every set $A \in \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}$

$$(2.10) \quad \tilde{E}\eta I(A) = \tilde{E}\xi I(A).$$

But from (2.8) and 3° it follows that (\tilde{P} -a.s.) for every $k \geq 1$

$$(2.11) \quad \{\alpha_k < \infty\} = \{z_k < \infty\}.$$

Therefore,

$$(2.12) \quad \tilde{E}\xi I(A) = \tilde{E}I(z_{k-1} < \infty) E(\eta \alpha_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) I(A) + \tilde{E}\eta I(z_k = \infty) I(A).$$

Utilizing (2.5),

$$\begin{aligned} \tilde{E}I(z_{k-1} < \infty) E(\eta \alpha_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) I(A) &= E(I(z_{k-1} < \infty) E(\eta \alpha_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) I(A) z_{k-1}) + \\ &+ \tilde{E}(I(z_{k-1} < \infty) E(\eta \alpha_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) \cdot I(A) \cdot I(z_{k-1} = \infty)) = \\ &= E(I(z_{k-1} < \infty) \eta \alpha_k I(A) z_{k-1}) = E(I(z_{k-1} < \infty) \eta z_k z_{k-1}^{\tilde{\alpha}} I(A) z_{k-1}). \end{aligned}$$

From 3° and 5° we find that (P -a.s.)

$$I(z_{k-1} < \infty) z_k z_{k-1}^{\tilde{\alpha}} z_{k-1} = I(z_{k-1} < \infty) z_k z_{k-1}^{\tilde{\alpha}} z_{k-1} = z_k.$$

Therefore,

$$\tilde{E}I(z_{k-1} < \infty) E(\eta \alpha_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) I(A) = E\eta z_k I(A),$$

hence,

$$(2.13) \quad \tilde{E}\xi I(A) = E\eta z_k I(A) + \tilde{E}\eta I(z_k = \infty) I(A).$$

According to (2.5)

$$E\eta z_k I(A) + \tilde{E}\eta I(z_k = \infty) I(A) = \tilde{E}\eta I(A),$$

and this, together with (2.13), establishes the required equality (2.10).

Corollary 1. Suppose that $\tilde{P} \ll P$, that is, $\tilde{P}_k \ll P_k$, $k \geq 1$. Then $\tilde{P}(\alpha_k < \infty) = \tilde{P}(z_k < \infty) = 1$ and (\tilde{P} -a.s.)

$$(2.14) \quad \tilde{E}(\eta | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) = E(\eta \alpha_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}), \quad k \geq 1.$$

(see Lemma 6.6 in [16]).

Corollary 2. We set (see (1.3)) $\beta_0 = \tilde{\beta}_0 = 1$, $\beta_k = \beta_k \cdot \beta_{k-1}^{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\beta}_k = \tilde{\beta}_k \cdot \tilde{\beta}_{k-1}^{\tilde{\alpha}}$. Then 0 is (Q -, P -, and \tilde{P} -a.s.) an absorbing state for (β_k) and $(\tilde{\beta}_k)$, and

$$(2.15) \quad \beta_k = \prod_{j=1}^k \beta_j, \quad \tilde{\beta}_k = \prod_{j=1}^k \tilde{\beta}_j.$$

From (2.14) it follows that

$$(2.16) \quad E(\eta | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) = E_Q(\eta \beta_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) \quad (P\text{-a.s.})$$

and

$$(2.17) \quad \tilde{E}(\eta | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) = E_Q(\eta \tilde{\beta}_k | \tilde{\mathcal{F}}_{k-1}) \quad (\tilde{P}\text{-a.s.}).$$

5. Let μ and $\tilde{\mu}$ be two probability measures on the measurable space. Then the Hellinger distance between μ and $\tilde{\mu}$ is the quantity

$$(2.18) \quad H(\mu, \tilde{\mu}) \equiv [E_V(V\beta - V\tilde{\beta})^2]^{1/2},$$

where ν is a measure such that $\mu + \tilde{\mu} \ll \nu$, $\beta = d\mu/d\nu$, $\tilde{\beta} = d\tilde{\mu}/d\nu$ and E_ν are the expectations relative to ν . The quantity $H(\mu, \tilde{\mu})$ does not depend on the choice of ν , which dominates $\mu + \tilde{\mu}$, and it is clear that

$$(2.19) \quad H^2(\mu, \tilde{\mu}) = 2 \left(1 - \int V(\beta\tilde{\beta}) d\nu \right).$$

Next we consider two probability measures \mathbf{P} and $\tilde{\mathbf{P}}$ on a measurable space (Ω, \mathcal{F}) . If \mathbf{P} and $\tilde{\mathbf{P}}$ are direct product measures

$$(2.20) \quad \mathbf{P} = \mu_1 \times \mu_2 \times \dots, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mu}_1 \times \tilde{\mu}_2 \times \dots$$

then the Hellinger distance $H(\mu_k, \tilde{\mu}_k)$ of the marginal measures μ_k and $\tilde{\mu}_k$ can sometimes be used successfully to describe properties of \mathbf{P} and $\tilde{\mathbf{P}}$ (see, for example, [6] and [15]).

When \mathbf{P} and $\tilde{\mathbf{P}}$ are not necessarily direct product measures on (Ω, \mathcal{F}) (equipped with a filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n)$), then the corresponding role is played by the so-called conditional Hellinger distance

$$(2.21) \quad H_k = E_Q[(V\beta_k - V\tilde{\beta}_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}]^{1/2},$$

where β_k and $\tilde{\beta}_k$ are defined in (2.15), and Q is a measure dominating $\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}$ (for instance, $Q = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}})$), $k \geq 1$.

The following lemma is the key to the proof of Theorem 1.11.

Lemma 4. For every $k \geq 1$ we have ($\tilde{\mathbf{P}}$ -a.s.)

$$(2.22) \quad \frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = I(\alpha_{k-1} < \infty) (1 - E(V\alpha_k | \mathcal{F}_{k-1})).$$

Proof. Let $k = 1$. Then $\alpha_0 = 1$ and Q -a.s.

$$H_1^2 = E_Q(V\beta_1 - V\tilde{\beta}_1)^2 = 2(1 - E_Q(V\alpha_1 | \mathcal{F}_{0-1})).$$

On the other hand, $\alpha_1 = \beta_1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ and

$$E(V\alpha_1 | \mathcal{F}_0) = E(V\beta_1) = E_Q\left(\frac{\beta_1}{\beta_1}\right)^{1/2} \cdot \beta_1 = E_Q(V\beta_1 | \mathcal{F}_0).$$

Hence, for $k = 1$ (2.22) obviously follows.

Now let $k > 1$. Since $\{\alpha_{k-1} < \infty\} = \{\beta_{k-1} < \infty\}$ ($\tilde{\mathbf{P}}$ -a.s.), we see that

$$\{\alpha_{k-1} < \infty\} = \left\{ \frac{\tilde{\beta}_{k-1}}{\beta_{k-1}} < \infty \right\} = \{\beta_{k-1} > 0\} \quad (\tilde{\mathbf{P}}\text{-a.s.}).$$

Therefore, ($\tilde{\mathbf{P}}$ -a.s.)

$$(2.23) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = \\ & = \frac{1}{2} I(\beta_{k-1} > 0) I(\beta_{k-1} < \infty) \cdot E_Q(\beta_k + \tilde{\beta}_k - 2\beta_k^{1/2}\tilde{\beta}_k^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}). \end{aligned}$$

By Corollary 2 to Lemma 3

$$\begin{aligned} E_Q(\beta_k | \mathcal{F}_{k-1}) &= E(1 | \mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad (\mathbf{P}\text{-a.s.}), \\ E_Q(\tilde{\beta}_k | \mathcal{F}_{k-1}) &= \tilde{E}(1 | \mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad (\tilde{\mathbf{P}}\text{-a.s.}). \end{aligned}$$

From Corollary 2 to Lemma 1 ($\tilde{\mathbf{P}}$ -a.s.)

$$\cdot \cdot \cdot I(\beta_{k-1} < \infty) E(1 | \mathcal{F}_{k-1}) = I(\beta_{k-1} < \infty) = I(\alpha_{k-1} < \infty) = I(\beta_{k-1} > 0).$$

Hence and from (2.23) we find that ($\tilde{\mathbf{P}}$ -a.s.)

$$(2.24) \quad \frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = I(\beta_{k-1} > 0) (1 - E_Q(V(\beta_k \tilde{\beta}_k) | \mathcal{F}_{k-1})).$$

On the other hand, by Corollary 2 to Lemma 3 and Corollary 2 to Lemma 1

$$(2.25) \quad \begin{aligned} I(\alpha_{k-1} < \infty) E(\alpha_k^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}) &= I(\beta_{k-1} > 0) E_Q(\alpha_k^{1/2} \beta_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= I(\beta_{k-1} > 0) E_Q([\beta_k \tilde{\beta}_k^{-1} (\beta_{k-1} \cdot \tilde{\beta}_{k-1}^{-1})]^{1/2} \beta_k \cdot \tilde{\beta}_{k-1}^{-1} | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= E_Q(I(\beta_{k-1} > 0) [\tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_k^{-1} (\beta_{k-1} \cdot \tilde{\beta}_{k-1}^{-1})]^{1/2} \beta_k \cdot \tilde{\beta}_{k-1}^{-1} | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= E_Q(I(\beta_{k-1} > 0) [\tilde{\beta}_k \tilde{\beta}_k (\tilde{\beta}_{k-1} \cdot \tilde{\beta}_{k-1}^{-1})]^{1/2} (\beta_{k-1}^2)^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= I(\beta_{k-1} > 0) E_Q(1 | \beta_k \tilde{\beta}_k) | \mathcal{F}_{k-1}. \end{aligned}$$

From (2.24) and (2.25) we now obtain the required equality (2.22).

§3. Asymptotic tightness of submartingales

1. We assume that the probability spaces $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{P}^n)_{n \geq 1}$ are equipped with filtrations $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$, $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n \subseteq \mathcal{F}^n$, $\mathcal{F}^n = \sigma(\cup_{k \geq 0} \mathcal{F}_k^n)$, $\mathcal{F}_0^n = \{\emptyset, \Omega\}$.

Lemma 5. Suppose that $A^n = (A_k^n, \mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$, $n \geq 1$, are non-decreasing processes, locally integrable (relative to the measure \mathbf{P}^n), $(A^n \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n))$ with $\tilde{A}_0^n = 0$, and that their compensators are $\tilde{A}^n = (\tilde{A}_k^n, \mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$ (that is, $A^n - \tilde{A}^n$ is in the class of locally integrable martingales of $\text{loc}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$) and $A_\infty^n = \lim_k A_k^n$, $\tilde{A}_\infty^n = \lim_k \tilde{A}_k^n$.

Then

$$(\tilde{A}_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow (A_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

If, in addition,

$$\sup_n E^n \sup_{k > 1} (A_k^n - A_{k-1}^n) < \infty,$$

then

$$(\tilde{A}_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow (A_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

Proof. Suppose that $X = (X_k, \mathcal{F}_k)$ and $Y = (Y_k, \mathcal{F}_k)$ are two non-negative processes with discrete time $k \geq 0$, and that Y is a non-decreasing and locally integrable process, defined on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ with filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$.

Let us assume that the process X is dominated by the process Y in the sense that $EY_k \leq EY_\tau$ for every finite stopping time τ [12]. If Y is

predictable, that is, if Y_k is $\bar{\mathcal{F}}_{k-1}$ -measurable, then the Lenglart inequality holds, (see [12]): for any $N > 0$, $L > 0$, and for every stopping time τ

$$(3.1) \quad \mathbf{P}(\sup_{k \leq \tau} X_k \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbf{P}(Y_\tau \geq L).$$

When Y is not necessarily predictable, then the Lenglart-Rebolledo inequality holds (see [13]): for any $N > 0$, $L > 0$, and for every stopping time τ

$$(3.2) \quad \mathbf{P}(\sup_{k \leq \tau} X_k \geq N) \leq \frac{1}{N} [L + \mathbf{E} \sup_k (A_k - A_{k-1})] + \mathbf{P}(Y_\tau \geq L).$$

Since under the assumptions of the lemma $\mathbf{E}A_\tau^2 = \mathbf{E}\tilde{A}_\tau^2$ for every finite stopping time τ (relative to \mathbf{F}^n) (3.1) implies that

$$(3.3) \quad \mathbf{P}^n(A_{\infty}^n \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n(\tilde{A}_{\infty}^n \geq L),$$

and (3.2) shows that

$$(3.4) \quad \mathbf{P}^n(\tilde{A}_{\infty}^n \geq N) \leq \frac{1}{N} [L + \mathbf{E}^n \sup_k (A_k^n - A_{k-1}^n)] + \mathbf{P}^n(A_{\infty}^n \geq L).$$

From these inequalities the required assertion of the lemma now follows in the obvious way from a passage to the limits $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty}$.

2. *Lemma 6.* Let $M^n = (M_k^n, \bar{\mathcal{F}}_k^n)_{k \geq 0}$ be local martingales (relative to \mathbf{P}^n), that is, $M^n \in \text{off}_{\text{loc}}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$, and let

$$(3.5) \quad \sup_n \mathbf{E}^n \sup_{k \geq 1} |M_k^n - M_{k-1}^n| < \infty.$$

Then

$$(3.6) \quad (|M^n, M^n|_{\infty}, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow (\sup_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

Proof. Now we use Davis's inequalities ([17], 490)

$$(3.7) \quad \mathbf{E}^n \sup_{k \leq \tau} |M_k^n| \leq C_1 \mathbf{E}^n [|M^n, M^n]_{\tau}^{1/2},$$

$$(3.8) \quad \mathbf{E}^n [|M^n, M^n]_{\tau}^{1/2} \leq C_2 \mathbf{E}^n \sup_{k \leq \tau} |M_k^n|,$$

which hold for any stopping time τ (relative to \mathbf{F}^n) with universal constants $0 < C_1 < \infty$, $0 < C_2 < \infty$.

Then from (3.2)

$$(3.9) \quad \mathbf{P}^n(\sup_k |M_k^n| \geq N) \leq \frac{1}{N} \{L + C_1 \mathbf{E}^n \sup_k (|M^n, M^n|_{k-1}^{1/2})\} + \mathbf{P}^n(|M^n, M^n|_{\infty} \geq L/C_1),$$

and similarly,

$$(3.10) \quad \mathbf{P}^n(|M^n, M^n|_{\infty} \geq N) \leq \frac{1}{N} \{L + C_2 \mathbf{E}^n \sup_{j \leq k} (|M_j^n| + \sup_{j \leq k-1} |M_j^n|)\} + \mathbf{P}^n(\sup_k |M_k^n| \geq L/C_2).$$

Since

$$\sup_k (\sup_{j \leq k} |M_j^n| - \sup_{j \leq k-1} |M_j^n|) \leq \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|$$

and

$$\begin{aligned} \sup_k (|M^n, M^n|_{k-1}^{1/2} - |M^n, M^n|_{k-2}^{1/2}) &\leq \\ &\leq \sup_k \{(|M^n, M^n|_{k-1} + (M_k^n - M_{k-1}^n)^2)^{1/2} - |M^n, M^n|_{k-1}^{1/2}\} \leq \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|, \end{aligned}$$

by the assumption (3.5) the required assertion (3.6) follows from (3.9) and (3.10), as a result of the passage to the limits $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty}$.

Lemma 7. Let $M^n = (M_k^n, \bar{\mathcal{F}}_k^n)_{k \geq 0}$ be a square integrable local martingale ($M^n \in \text{off}_{\text{loc}}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$). Then

$$(3.11) \quad (|M^n|_{\infty}, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow (\sup_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

If, in addition,

$$(3.12) \quad \sup_n \mathbf{E}^n \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|^2 < \infty,$$

then

$$(3.13) \quad (|M^n|_{\infty}, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow (\sup_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

Proof. Since $(M^n)^2$ is dominated by the process $\langle M^n \rangle$, from (3.1)

$$\mathbf{P}^n(\sup_k |M_k^n| \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n(\langle M^n \rangle_{\infty} \geq L).$$

Now (3.11) follows after a passage to the limits $\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty}$.

Next,

$$\sup_k (|M^n, M^n|_k - |M^n, M^n|_{k-1}) = \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|^2.$$

Therefore, by (3.12) and the second part of Lemma 5

$$(3.14) \quad (|M^n, M^n|_{\infty}, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow (|M^n|_{\infty}, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

Together with (3.6) this gives (3.13).

Lemma 8. Let $X^n = (X_k^n, \bar{\mathcal{F}}_k^n)_{k \geq 0}$, $n \geq 1$, be submartingales with

$$(3.15) \quad |x_k^n| \leq c, \quad k \geq 1, \quad n \geq 1,$$

where $x_k^n = X_k^n - X_{k-1}^n$, $k \geq 1$.

Then

$$(3.16) \quad (\sup_k |X_k^n|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n (x_k^n + (x_k^n)^2 | \bar{\mathcal{F}}_{k-1}^n), \mathbf{P}^n \right)\text{-as. tight}.$$

Proof. Since X^n is a submartingale, $\mathbf{E}^n(x_k^n | \bar{\mathcal{F}}_{k-1}^n) \geq 0$. We define

$$A_0^n = 0, \quad A_k^n = \sum_{j=1}^k \mathbf{E}^n (x_j^n | \bar{\mathcal{F}}_{j-1}^n), \quad M_k^n = X_k^n - A_k^n.$$

Obviously, $A_n^R - A_{n-1}^R \leq c$, and $|M_n^R - M_{n-1}^R| \leq 2c$. Hence, $M^n \in \text{colloc}(\mathbb{F}^n, \mathbb{P}^n)$.

Observe that

$$\langle M^n \rangle_n = \sum_{j=0}^n \{E^n((x_j^j)^2 | \mathcal{F}_{j-1}^R) - (E^n(x_j^j | \mathcal{F}_{j-1}^R))^2\} \leq \sum_{j=0}^n E^n((x_j^j)^2 | \mathcal{F}_{j-1}^R) \quad (= B_n^R),$$

and if we write $Y_n^R = A_n^R + \sup(M_j^R)^2$, then Doob's inequality shows that

$$E^n Y_n^R \leq E^n(A_n^R + 4(M^n)_n) \leq 4E^n(A_n^R + B_n^R)$$

for every finite stopping time τ (relative to $(\mathbb{F}^n, \mathbb{P}^n)$). Therefore, from (3.1),

$$\mathbb{P}^n(Y_\infty^n \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbb{P}^n(A_\infty^n + B_\infty^n \geq L/4).$$

Now we use the fact that

$$Y_\infty^n + 1 \geq A_\infty^n + \sup_n |M_n^R| \geq \sup_n |X_n^R|.$$

Then

$$(3.17) \quad \mathbb{P}^n(\sup_n |X_n^R| \geq N + 1) \leq \mathbb{P}^n(Y_\infty^n \geq N) \leq \frac{L}{N} + \mathbb{P}^n(A_\infty^n + B_\infty^n \geq L/4),$$

and the reverse implication in (3.16) follows from a passage to the limits $\lim_L \overline{\lim}_n \frac{L}{N}$.

Now let us establish the direct implication.

Since for every stopping time τ (relative to $(\mathbb{F}^n, \mathbb{P}^n)$)

$$E^n A_{n \wedge \tau}^R = E^n X_{n \wedge \tau}^R \leq E^n \sup_{j \leq \tau} |X_j^R|,$$

we find that

$$E^n A_n^R \leq E^n \sup_{j \leq n} |X_j^R|.$$

Then from (3.2)

$$\mathbb{P}^n(A_n^R \geq N) \leq \frac{L + \epsilon}{N} + \mathbb{P}^n(\sup_n |X_n^R| \geq L),$$

hence,

$$(3.18) \quad (\sup_n |X_n^R|, \mathbb{P}^n)\text{-as. tight} \Rightarrow (A_\infty^n, \mathbb{P}^n)\text{-as. tight}.$$

Since $\sup_n |M_n^R| \leq \sup_n |X_n^R| + A_n^R$, we obtain

$$(\sup_n |M_n^R|, \mathbb{P}^n)\text{-as. tight} \Rightarrow (\sup_n |M_n^R|, \mathbb{P}^n)\text{-as. tight}.$$

By Lemma 7,

$$(3.19) \quad (\sup_n |M_n^R|, \mathbb{P}^n)\text{-as. tight} \Rightarrow (\langle M^n \rangle_\infty, \mathbb{P}^n)\text{-as. tight}.$$

Thus, $B_\infty^n \leq \langle M^n \rangle_\infty + (A_\infty^n)^2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E^n(x_k^R + (x_k^R)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^R) = A_\infty^n + B_\infty^n \leq A_\infty^n + (A_\infty^n)^2 + \langle M^n \rangle_\infty,$$

therefore, the direct part of (3.16) follows from (3.18) and (3.19).

§4. Characterization of contiguity and entire asymptotic separation

1. Let $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{F}^n)$ be a sequence of measurable spaces, and \mathbb{P}^n and $\tilde{\mathbb{P}}^n$ probability measures on $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{F}^n)$, $n \geq 1$.

Lemma 9. The following conditions are equivalent:

$$(a) \quad (\tilde{\mathbb{P}}^n) \triangleleft (\mathbb{P}^n);$$

(b) $\lim_n \tilde{\mathbb{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$ and the $(z_{n\infty})_{n \geq 0}$ are uniformly integrable relative to (\mathbb{P}^n) :

$$(4.1) \quad \sup_n \int_{(z_{n\infty} > c)} z_{n\infty} d\mathbb{P}^n \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty;$$

$$(c) \quad (z_{n\infty}, \tilde{\mathbb{P}}^n)\text{-as. tight};$$

$$(d) \quad (\sup_n z_{n\infty}, \tilde{\mathbb{P}}^n)\text{-as. tight}.$$

Proof. The equivalence of (a), (b), and (c) is well known, see, for example, [5]. Condition (d) and its equivalence to (a) is apparently new. It turns out that the equivalence of (a) and (d) plays a decisive role in the proof of Theorem 1.

For the completeness of the exposition and the convenience of the reader we give a full proof of the equivalence of all four conditions.

(a) \Rightarrow (b). Since $\mathbb{P}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$, contiguity implies $\lim_n \tilde{\mathbb{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$.

Now (4.1) is equivalent to the following two conditions (see the lemma in [5], §3; or Lemma 2 in [17], 206):

$$(4.2) \quad \sup_n \int_{z_{n\infty}} z_{n\infty} d\mathbb{P}^n < \infty,$$

$$(4.3) \quad \mathbb{P}^n(A^n) \rightarrow 0, \quad A^n \in \mathcal{F}^n \Rightarrow \int_{A^n} z_{n\infty} d\mathbb{P}^n \rightarrow 0.$$

By the Lebesgue decomposition,

$$\int_{A^n} z_{n\infty} d\mathbb{P}^n \leq \tilde{\mathbb{P}}^n(A^n) \leq 1.$$

Hence, (4.2) and (4.3) follow obviously, because by contiguity

$$\mathbb{P}^n(A^n) \rightarrow 0, \quad A^n \in \mathcal{F}^n \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}^n(A^n) \rightarrow 0.$$

(b) \Rightarrow (c). By the Lebesgue decomposition,

$$\tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) = \int_{\{z_{n\infty} > N\}} z_{n\infty} dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty).$$

Then by (b),

$$\overline{\lim}_n \tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) = \overline{\lim}_n \int_{\{z_{n\infty} > N\}} z_{n\infty} dP^n \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

and this proves (c).

(c) \Rightarrow (a). From (c) it follows that for every $\varepsilon > 0$ there exist N and n_0 such that $\tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) \leq \varepsilon/2$ for every $n \geq n_0$. Therefore,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^n(A^N) &= \tilde{P}^n(A^N \cap \{z_{n\infty} \leq N\}) + \tilde{P}^n(A^N \cap \{z_{n\infty} > N\}) \leq \\ &\leq \int_{A^N \cap \{z_{n\infty} \leq N\}} z_{n\infty} d\tilde{P}^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) \leq NP^n(A^N) + \varepsilon/2, \end{aligned}$$

and if $P^n(A^N) \rightarrow 0$, then $\overline{\lim}_n \tilde{P}^n(A^N) \leq \varepsilon/2$. Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, this proves (a).

(c) \Leftrightarrow (d). The validity of these implications follows evidently from the inequalities

$$(4.4) \quad \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geq N) \leq \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) \leq \frac{L}{N} + \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geq L).$$

The left inequality is obvious. To prove the right inequality we use the Lebesgue decomposition. Then

$$\begin{aligned} \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) &= \\ &= \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N\}} z_{n\infty} dP^n + \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N, z_{n\infty} = \infty) = \\ &= \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N\}} z_{n\infty} dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty) = \\ &= \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N, z_{n\infty} < L\}} z_{n\infty} dP^n + \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N, z_{n\infty} < L\}} z_{n\infty} dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty) \leq \\ &\leq \int_{\{z_{n\infty} > L\}} z_{n\infty} dP^n + L \int_{\{\sup_k z_{nk} \geq N\}} dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty) = \\ &= \tilde{P}^n(z_{n\infty} > L) + LP^n(\sup_k z_{nk} \geq N), \end{aligned}$$

where by Lemma 2 $P^n(\sup_k z_{nk} \geq N) \leq 1/N$.

Thus, the right inequality in (4.4) is also established.

Lemma 10. *The following conditions are equivalent:*

- (a) $|\tilde{P}^n) \Delta (P^n)|$
 (b) $\overline{\lim}_n \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geq N) = 1$ for all $N > 0$;
 (c) $\overline{\lim}_n \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) = 1$ for all $N > 0$.

Proof. The equivalence of (a) and (b) follows as in [10].

(a) \Rightarrow (b). In accordance with the Definition 2 in §1 we can find a subsequence (n') and sets $A^{n'} \in \mathcal{F}^{n'}$ such that

$$(4.5) \quad \lim_{n'} P^{n'}(A^{n'}) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n'} \tilde{P}^{n'}(A^{n'}) = 1.$$

Then, by the Lebesgue decomposition,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{n'}(A^{n'}) &= \int_{A^{n'} \cap \{z_{n'\infty} \leq L\}} z_{n'\infty} dP^{n'} + \tilde{P}^{n'}(A^{n'} \cap \{z_{n'\infty} > L\}) \leq \\ &\leq LP^{n'}(A^{n'}) + \tilde{P}^{n'}(z_{n'\infty} > L). \end{aligned}$$

Together with (4.5) this shows that $\lim_{n'} \tilde{P}^{n'}(z_{n'\infty} > L) = 1$, and this establishes (b).

(b) \Rightarrow (a). From (b) it follows that for every $k > 0$ there is a subsequence (n_k) such that $n_k < n_{k+1}$ and

$$\tilde{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \geq 1 - 1/k.$$

Consequently,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) = 1.$$

Next, $P^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \leq P^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \leq 1/k$. Therefore, $\lim_{k \rightarrow \infty} P^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) = 0$, and this proves that $(\tilde{P}^{n_k}) \Delta (P^{n_k})$.

(b) \Leftrightarrow (c). That (b) \Rightarrow (c) is evident. To prove that (c) \Rightarrow (b) we note that according to (4.4)

$$\tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) \leq \frac{L}{N} + \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geq L),$$

hence, that for every $L > 0$

$$\overline{\lim}_n \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geq L) \leq 1 - \frac{L}{N} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

§5. Proof of Theorem 1

1. We begin with the second part of Theorem 1, that is, we show that under the condition (α)

$$(5.1) \quad (\beta) \Leftrightarrow (\beta^*)$$

and

$$(5.2) \quad (\beta) \Leftrightarrow (\beta^{**}).$$

By Lemma 4,

$$\frac{1}{2} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E_{Q^n} [(V/\tilde{\beta}_{nk} - V/\beta_{nk})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] =$$

$$= I(\alpha_{n, k-1} < \infty) (1 - E^n(V/\alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n)).$$

Therefore, $(\beta) \Rightarrow (\beta^*)$.

Suppose now that (α) holds. We claim that then $(\beta^*) \Rightarrow (\beta)$. Let ξ_{nk} be non-negative random variables. Then for all $L > 0$ and $N > 0$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{nk} \geq N \right) &= \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \xi_{nk} \geq N, \sup_k \alpha_{nk} < \infty \right) + \\ &+ \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{nk} \geq N, \sup_k \alpha_{nk} = \infty \right) \leq \\ &\leq \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \xi_{nk} \geq N \right) + \tilde{P}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geq L). \end{aligned}$$

From this the required implication $(\beta^*) \Rightarrow (\beta)$ follows (with (α) taken into account as a result of the limit passages $\lim_n \lim_N \overline{\lim}_n$ if we set

$$\xi_{nk} = E_{Q^n} (V/\tilde{\beta}_{nk} - V/\beta_{nk})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n.$$

Thus, (5.1) is established.

$(\beta) \Rightarrow (\beta^{**})$. Clearly,

$$(5.4) \quad \begin{aligned} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n((1 - V/\alpha_{nk})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) &= \\ &= 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \{1 - E^n(V/\alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n)\} - 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) + \\ &+ I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E(1 | \mathcal{F}_{k-1}^n) + I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n). \end{aligned}$$

From (2.9) with $\eta \equiv 1$ it follows that \tilde{P}^n -a.s.

$$(5.5) \quad I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 1 - \tilde{P}^n(\alpha_{n, k} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n),$$

and from (2.6) with $\eta = E^n(1 | \mathcal{F}_{k-1}^n) - 1$ that \tilde{P}^n -a.s.

$$(5.6) \quad I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(1 | \mathcal{F}_{k-1}^n) = I(\alpha_{n, k-1} < \infty).$$

Therefore, from (5.4)-(5.6) we find that \tilde{P}^n -a.s.

$$(5.7) \quad \begin{aligned} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n((1 - V/\alpha_{nk})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) &= \\ &= 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \{1 - E^n(V/\alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n)\} - I(\alpha_{n, k-1} < \infty) + \\ &+ 1 - \tilde{P}^n(\alpha_{n, k} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 2I(\alpha_{n, k-1} < \infty) \{1 - E^n(1 - \alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n)\} + \\ &+ I(\alpha_{n, k-1} = \infty) - \tilde{P}^n(\alpha_{n, k} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n). \end{aligned}$$

Since $(\beta) \Rightarrow (\beta^*)$ and (α) holds, due to (5.3) it is sufficient to show that for every $L \geq 1$

$$(5.8) \quad (\alpha) \Rightarrow \overline{\lim}_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geq L \right) = 0$$

and

$$(5.9) \quad (\alpha) \Rightarrow \overline{\lim}_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{P}^n(\alpha_{nk} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq L \right) = 0.$$

But since

$$\{\sup_k \alpha_{nk} > N\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} > N) \geq 1 \right\} \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geq 1 \right\},$$

by (α)

$$\overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geq 1 \right) \leq \overline{\lim}_n \tilde{P}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geq N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

in particular, (5.8) holds for every $L \geq 1$.

Finally, from (3.4)

$$\tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{P}^n(\alpha_{nk} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) \leq \frac{L+1}{N} + \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geq L \right).$$

Now (5.8) follows from this and (5.9).

$(\beta^*) \Rightarrow (\beta)$. From (β^{**}) it follows that

$$\lim_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n((1 - \alpha_{nk}^2)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq N \right) = 0.$$

Hence, (β^*) follows from (5.7) and the relations (5.8) and (5.9), which hold when (α) holds.

Thus, $(\beta) \Rightarrow (\beta^*) \Rightarrow (\beta^*) \Rightarrow (\beta)$, and this establishes (5.2) (assuming that (α) holds).

2. Now we turn to the first part of the theorem.

Sufficiency.

By Lemma 9 we have to show that

$$(5.10) \quad (\alpha), (\beta) \Rightarrow (\sup_k \alpha_{nk}, \tilde{P}^n)\text{-as. tight.}$$

With this aim we introduce for every $c \geq 1$ the function

$$u^c(x) = \begin{cases} x & \text{for } |x| \leq c, \\ c \operatorname{sign} x & \text{for } |x| > c, \end{cases}$$

and the sets

$$A_c^n = \{ \sup_k \alpha_{nk} < c^2 \} \cap \{ \inf_k \alpha_{nk} > c^{-2} \}.$$

We write

$$(5.11) \quad X_{nk}^c = \sum_{j=1}^k u_c(\log \alpha_{nj}),$$

and note that

$$X_{nk}^c \cdot I_{A_c^n} = \left(\sum_{j=1}^k \log \alpha_{nj} \right) \cdot I_{A_c^n} = (\log \alpha_{nk}) \cdot I_{A_c^n}.$$

Therefore, for $N \geq 1$,

$$(5.12) \quad \{\sup_k z_{nk} \geq N\} \subseteq \{\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N\} \cup \{\Omega \setminus A_n^c\} =$$

$$= \{\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geq e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}\}.$$

and similarly

$$(5.13) \quad \{\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N\} \subseteq \{\sup_k |\log z_{nk}| \geq \log N\} \cup \{\Omega \setminus A_n^c\} =$$

$$= \{\sup_k z_{nk} \geq N\} \cup \left\{ \inf_k z_{nk} \leq \frac{1}{N} \right\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geq e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}\}.$$

From (5.12) and (5.13) as a result of the passage to the limits $\overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k$ we find that

$$(5.14) \quad \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geq N) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k \tilde{P}^n(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N) + \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k \tilde{P}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}).$$

Now we claim that

$$(5.15) \quad (\alpha), (\beta) \Rightarrow \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k \tilde{P}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}) = 0.$$

By Lemma 3 with $\eta = (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2$ we have (\tilde{P}^n) -a.s.

$$\begin{aligned} \tilde{E}^n((1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) &= I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n((1 - V \alpha_{nk})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) + \\ &+ \tilde{P}^n(\alpha_{nk} = \infty | \mathcal{F}_{k-1}^n) - I(\alpha_{n, k-1} < \infty) P(\alpha_{n, k} = 0 | \mathcal{F}_{k-1}^n). \end{aligned}$$

Since $(\alpha), (\beta) \Rightarrow (\beta^{**})$ and $(\alpha) \Rightarrow (5.9)$,

$$(5.16) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{E}^n((1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \right), \tilde{P}^n\text{-as. tight.}$$

Hence, by Lemma 5,

$$(5.17) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2, \tilde{P}^n \right)\text{-as. tight.}$$

Finally, for $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) (N^{1/2} - 1)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2,$$

hence,

$$\tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) \geq L (N^{1/2} - 1)^2 \right) \leq \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2 \geq L \right).$$

Choosing $L = (N^{1/2} - 1)^2$, this and (5.17) together with a passage to the limits $\overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k$ gives

$$(5.18) \quad \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k \tilde{P}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leq 1/N) \geq 1 \right) = 0.$$

But $\{\inf_k \alpha_{nk} < 1/N\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} < 1/N) \geq 1 \right\}$. Therefore, the required

implication (5.15) follows from (5.18).

Thus, on the right-hand side of (5.14) the last term vanishes. We now show that

$$(5.19) \quad (\alpha), (\beta) \Rightarrow \overline{\lim}_N \overline{\lim}_n \overline{\lim}_k \tilde{P}^n(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N) = 0,$$

in other words, that for all $c \geq 1$

$$(\alpha), (\beta) \Rightarrow (\sup_k |X_{nk}^c|, \tilde{P}^n)\text{-as. tight.}$$

We claim that $X^n = (X_{nk}^c, \mathcal{F}_k^n)$ for all $c \geq 1$ is a submartingale relative to $\tilde{P}^n, n \geq 1$. It is sufficient to show that (\tilde{P}^n) -a.s.

$$(5.20) \quad \tilde{E}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) \geq 0,$$

By Lemma 3 (\tilde{P}^n) -a.s.)

$$(5.21) \quad \tilde{E}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) =$$

$$= I(\alpha_{n, j-1} < \infty) E^n(\alpha_{nj} u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) + c \tilde{P}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n).$$

Observe that $x u_c(\log x) \geq x - 1$ for $x \geq 0$. Therefore (\tilde{P}^n) -a.s.

$$(5.22) \quad I(\alpha_{n, j-1} < \infty) E^n(\alpha_{nj} u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) \geq$$

$$\geq I(\alpha_{n, j-1} < \infty) E^n(\alpha_{nj} - 1 | \mathcal{F}_{j-1}^n) (= J_{nj}).$$

Once again applying Lemma 3 and Corollary 2 to Lemma 1 we find that

(\tilde{P}^n) -a.s.

$$(5.23) \quad J_{nj} = 1 - \tilde{P}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n) - I(\alpha_{n, j-1} < \infty) =$$

$$= I(\alpha_{n, j-1} = \infty) - \tilde{P}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n).$$

From (5.21)-(5.23) it follows that \tilde{P}^n -a.s.

$$\tilde{E}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) \geq I(\alpha_{n, j-1} = \infty) + (c - 1) \tilde{P}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n) \geq 0,$$

because $c \geq 1$.

Thus, $X^n = (X_{nk}^c, \mathcal{F}_k^n)$ is a submartingale relative to \tilde{P}^n with

$|X_{nk}^c - X_{n, k-1}^c| \leq 2c$. According to Lemma 8 in §3, $(\sup_k |X_{nk}^c|, \tilde{P}^n)$ -as. tight if and only if

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{E}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) + u_c^2(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n), \tilde{P}^n \right)\text{-as. tight.}$$

From Lemma 3 (\tilde{P}^n) -a.s.)

$$(5.24) \quad L_{nj} \equiv \tilde{E}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) + u_c^2(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) =$$

$$= I(\alpha_{n, j-1} < \infty) E^n(\alpha_{nj} u_c(\log \alpha_{nj}) + \alpha_{nj} u_c^2(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}_{j-1}^n) +$$

$$+ (c + c^2) \tilde{P}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}_{j-1}^n).$$

Together with (5.22) and (5.23) this shows that

$$(5.25) \quad L_{n_j} = I(\alpha_{n_j, j-1} < \infty) E^n(\alpha_{n_j} \mu_c(\log \alpha_{n_j}) + \alpha_{n_j} \nu_c^2(\log \alpha_{n_j}) + 1 - \alpha_{n_j} |\bar{\sigma}_{j-1}^n| + (c + c^2) \tilde{P}^n(\alpha_{n_j} = \infty | \bar{\sigma}_{j-1}^n) - I(\alpha_{n_j, j-1} < \infty) + 1 - \tilde{P}^n(\alpha_{n_j} = \infty | \bar{\sigma}_{j-1}^n).$$

Now we use the fact that for every $x \geq 0$

$$(5.26) \quad a(c)(1 - x^{1/2})^2 \leq xu_c(\log x) + xu_c^2(\log x) + 1 - x \leq A(c)(1 - x^{1/2})^2,$$

where $a(c)$ and $A(c)$ are positive constants. Then

$$L_{n_j} \leq A(c)I(\alpha_{n_j, j-1} < \infty) E^n((1 - \alpha_{n_j}^{1/2})^2 | \bar{\sigma}_{j-1}^n) + I(\alpha_{n_j, j-1} = \infty) + [(c-1) + c^2] \tilde{P}^n(\alpha_{n_j} = \infty | \bar{\sigma}_{j-1}^n),$$

hence,

$$(5.27) \quad \sum_{j=1}^{\infty} L_{n_j} \leq A(c) \xi_1^n + \xi_2^n + [(c-1) + c^2] \xi_3^n,$$

where

$$(5.28) \quad \begin{cases} \xi_1^n = \sum_{j=1}^{\infty} I(\alpha_{n_j, j-1} < \infty) E^n((1 - \alpha_{n_j}^{1/2})^2 | \bar{\sigma}_{j-1}^n), \\ \xi_2^n = \sum_{j=1}^{\infty} I(\alpha_{n_j, j-1} = \infty), \\ \xi_3^n = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{P}^n(\alpha_{n_j} = \infty | \bar{\sigma}_{j-1}^n). \end{cases}$$

It is clear that

$$\tilde{P}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{n_j} \geq N \right) \leq \tilde{P}^n \left(\xi_1^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) + \tilde{P}^n \left(\xi_2^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) + \tilde{P}^n \left(\xi_3^n \geq \frac{N}{3[(c-1) + c^2]} \right).$$

Since (α) , $(\beta) \Rightarrow (\beta^{**})$,

$$\lim_N \lim_n \tilde{P}^n \left(\xi_1^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) = 0,$$

and by (5.8) and (5.9)

$$\begin{aligned} \lim_N \lim_n \tilde{P}^n \left(\xi_2^n \geq \frac{N}{3A(c)} \right) &= 0, \\ \lim_N \lim_n \tilde{P}^n \left(\xi_3^n \geq \frac{N}{3[(c-1) + c^2]} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Consequently, $(\sum_{j=1}^{\infty} L_{n_j}, \tilde{P}^n)$ -as-tight, hence also $(\sup_k X_{n_k}^c, \tilde{P}^n)$ -as-tight,

which shows that the conditions (α) and (β) are sufficient for the contiguity $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$.

3. Necessity.

Suppose that $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n)$. First of all we show that (α) then holds, that is,

$$(5.29) \quad (\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n) \Rightarrow (\sup_k \alpha_{n_k}, \tilde{P}^n)\text{-as-tight.}$$

According to §2.3°, \tilde{P} -a.s.

$$(5.30) \quad \alpha_{n_k} = \frac{z_{n_k}}{z_{n_k-1}} I(\sup_k z_{n_k} < \infty) + \alpha_{n_k} I(\sup_k z_{n_k} = \infty).$$

Thus, for every $N > 0$, $L > 0$, $b > 0$,

$$\begin{aligned} \{ \sup_k \alpha_{n_k} \geq N \} &\subseteq \left\{ \frac{\sup_k z_{n_k}}{\inf_k z_{n_k}} \geq N, \sup_k z_{n_k} < \infty \right\} \cup \\ &\cup \{ \sup_k \alpha_{n_k} \geq N, \sup_k z_{n_k} = \infty \} \subseteq \{ \sup_k z_{n_k} \geq N \inf_k z_{n_k} \} \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq L \} = \\ &= \{ \sup_k z_{n_k} \geq N \inf_k z_{n_k}, \inf_k z_{n_k} \leq b \} \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq L \} \cup \\ &\cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq N \inf_k z_{n_k}, \inf_k z_{n_k} > b \} \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq L \} \subseteq \\ &\subseteq \{ \inf_k z_{n_k} \leq b \} \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq L \} \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq Nb \} \end{aligned}$$

hence

$$\tilde{P}^n(\sup_k \alpha_{n_k} \geq N) \leq \tilde{P}^n(\inf_k z_{n_k} \leq b) + \tilde{P}^n(\sup_k z_{n_k} \geq L) + \tilde{P}^n(\sup_k z_{n_k} \geq Nb).$$

By the equivalence of (a) and (d) in Lemma 9 and by Lemma 2 we now obtain

$$\lim_N \lim_n \tilde{P}^n(\sup_k \alpha_{n_k} \geq N) \leq b + \lim_n \tilde{P}^n(\sup_k z_{n_k} \geq L) \rightarrow 0,$$

as $b \rightarrow 0$ and $L \rightarrow \infty$.

Thus, the proof of (5.29) is complete.

By (5.30), for every $N > 0$, $L > 0$, $b > 0$ (\tilde{P}^n -a.s.)

$$(5.31) \quad \left\{ \inf_k \alpha_{n_k} \leq \frac{1}{N} \right\} \subseteq \left\{ \frac{\inf_k z_{n_k}}{\sup_k z_{n_k}} \leq \frac{1}{N}, \sup_k z_{n_k} < \infty \right\} \cup \\ \cup \left\{ \inf_k \alpha_{n_k} \leq \frac{1}{N}, \sup_k z_{n_k} = \infty \right\} \subseteq \\ \subseteq \{ N \inf_k z_{n_k} \leq \sup_k z_{n_k} \} \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq L \} \subseteq \\ \subseteq \{ Nb \leq \sup_k z_{n_k}, \inf_k z_{n_k} > b \} \cup \{ N \inf_k z_{n_k} \leq \sup_k z_{n_k}, \inf_k z_{n_k} \leq b \} \cup \\ \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq L \} \subseteq \{ Nb \leq \sup_k z_{n_k} \} \cup \{ \inf_k z_{n_k} \leq b \} \cup \{ \sup_k z_{n_k} \geq L \}.$$

Consequently,

$$\tilde{P}^n \left(\inf_k \alpha_{n_k} \leq \frac{1}{N} \right) \leq \tilde{P}^n(\sup_k z_{n_k} \geq Nb) + \tilde{P}^n(\inf_k z_{n_k} \leq b) + \tilde{P}^n(\sup_k z_{n_k} \geq L).$$

By Lemma 2, $\tilde{P}^n(\inf_k z_{nk} \leq b) \leq b$. Therefore, bearing in mind the equivalence of (a) and (d) in Lemma 9, we obtain

$$(5.32) \quad \lim_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\inf_k \alpha_{nk} \leq \frac{1}{N} \right) \leq \overline{\lim}_n \tilde{P}^n (\sup_k z_{nk} \geq L) + b \rightarrow 0, \\ \text{as } L \rightarrow \infty \text{ and } |b| \rightarrow 0.$$

Next we turn to the proof of the implication

$$(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n) \Rightarrow (\beta).$$

By (5.13),

$$(5.33) \quad \tilde{P}^n \left(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N \right) \leq \tilde{P}^n (\sup_k z_{nk} \geq N) + \tilde{P}^n \left(\inf_k \alpha_{nk} \leq \frac{1}{N} \right) + \\ + \tilde{P}^n (\sup_k \alpha_{nk} \geq e^c) + \tilde{P}^n (\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}).$$

From (5.29), $\overline{\lim}_{c \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n \tilde{P}^n (\sup_k \alpha_{nk} \geq e^c) = 0$. From Lemma 2,

$$\overline{\lim}_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\inf_k z_{nk} \leq \frac{1}{N} \right) = 0; \quad \text{from Lemma 9, } \overline{\lim}_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n (\sup_k z_{nk} \geq N) = 0; \\ \text{from (5.32), } \overline{\lim}_{c \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \times (\inf_k \alpha_{nk} \leq e^{-c}) = 0. \text{ Therefore, as a result of the}$$

limit passage $\overline{\lim}_{c \rightarrow \infty} \overline{\lim}_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n$ we find from (5.33) that

$$(5.34) \quad \overline{\lim}_c \overline{\lim}_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n (\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N) = 0.$$

From this and from Lemma 8 it follows that

$$(5.35) \quad \overline{\lim}_c \overline{\lim}_n \overline{\lim}_n \tilde{P}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \geq N \right) = 0.$$

By analogy with (5.27), from (5.25) and (5.26) we deduce the inequality

$$(5.36) \quad \sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \geq a(c) \xi_1^n + \xi_2^n + [(c-1) + c^2] \xi_3^n, \quad c \geq 1,$$

where ξ_1^n , ξ_2^n , and ξ_3^n are defined in (5.28).

From (5.36),

$$(5.37) \quad \xi_1^n \leq a^{-1}(c) \left[\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} + \xi_2^n + [(c-1) + c^2] \xi_3^n \right].$$

From (5.29) and (5.8) it follows that (ξ_1^n, \tilde{P}^n) -as. tight, and from (5.29) and (5.9) (ξ_3^n, \tilde{P}^n) -as. tight. Together with (5.35) and (5.37) that since $\inf_{c \geq 1} a(c) > 0$,

$$(5.38) \quad (\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n) \Rightarrow ((\xi_1^n), \tilde{P}^n)\text{-as. tight.}$$

Hence and from (5.3) applied to $\xi_{nk} = E_{nk}^n (|1 - \alpha_{nk}^2|; \mathcal{F}_{k-1}^n)$ we find that by (5.2) and (5.29) $(\tilde{P}^n) \triangleleft (P^n) \Rightarrow (\beta^{**}) \Leftrightarrow (\beta)$.

The proof of Theorem 1 is now complete.

§6. Proofs of Theorems 2 and 3

1. The proof of Theorem 2 is based on the following general fact (Lemma 11).

Suppose that (Ω, \mathcal{F}, P) is a probability space equipped with a filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, and that $(\gamma_k)_{k \geq 1}$ is an \mathbf{F} -adapted sequence of random variables with values in $[0, \infty]$, for which 0 and ∞ are absorbing states, that is, γ_k is \mathcal{F}_k -measurable, $\gamma_k = 0$ on $\{\gamma_j = 0\}$ for $k > j$, and $\gamma_k = \infty$ on $\{\gamma_j = \infty\}$ for $k > j$ (\mathbf{P} -a.s.).

We set

$$\Gamma_k = \prod_{j=1}^k \gamma_j, \quad a_k = E(\gamma_k | \mathcal{F}_{k-1}), \quad A_k = \prod_{j=1}^k a_j, \quad k \geq 1.$$

Lemma 11. *If $E\gamma_1 \leq 1$ and $E(\gamma_k | \mathcal{F}_{k-1}) \leq 1$ (\mathbf{P} -a.s.) for $k \geq 2$, then the sequence $\Gamma = (\Gamma_k)_{k \geq 1}$ admits the multiplicative decomposition*

$$(6.1) \quad \Gamma_k = A_k \cdot S_k,$$

where $A = (A_k)$, $(\mathcal{F}_{k-1})_{k \geq 1}$ is a non-decreasing process of \mathcal{F}_{k-1} -measurable random variables A_k , and $S = (S_k)$, $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ is a non-negative supermartingale with $ES_k \leq 1$.

Here, the limit $\Gamma_\infty = \lim_n \Gamma_n$ exists (\mathbf{P} -a.s.), and for any $a > 0$ and $b > 0$

$$(6.2) \quad P(\Gamma_\infty \geq a) \leq \frac{b}{a} + P(A_\infty \geq b).$$

Proof. We claim that to obtain the decomposition (6.1) we can set

$$S_k = \prod_{j=1}^k \gamma_j a_j^{-1}, \text{ where}$$

$$a_j^{-1} = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a^{-1}, & 0 < a < \infty, \\ 0, & a = \infty. \end{cases}$$

For this purpose it is sufficient to show that

$$(6.3) \quad \gamma_j = \gamma_j a_j^{-1} a_j \quad (\mathbf{P}\text{-a.s.}).$$

Since $\gamma_j \geq \gamma_j a_j^{-1} a_j$ (\mathbf{P} -a.s.), we must verify that

$$E\gamma_j = E\gamma_j a_j^{-1} a_j.$$

But $E\gamma_j = E a_j$, and on the other hand,

$$E\gamma_j a_j^{-1} a_j = E[a_j^{-1} a_j E(\gamma_j | \mathcal{F}_{j-1})] = E a_j^{-1} a_j a_j = E a_j,$$

which proves (6.3).

We now claim that $S = (S_k)$ is a supermartingale. In fact, we have

(\mathbf{P} -a.s.)

$$E(S_k | \mathcal{F}_{k-1}) = S_{k-1} E(\gamma_k a_k^{-1} | \mathcal{F}_{k-1}) = S_{k-1} a_k^{-1} a_k \leq S_{k-1}.$$

Further, $ES_1 = a_1 a_1^{-1} \leq 1$, hence $ES_k \leq 1$.

It is well known that a non-negative supermartingale converges (P-a.s.) to a finite limit. Therefore, the limit $S_\infty \equiv \lim_n S_n$ exists (P-a.s.), and $E S_\infty \leq 1$.

Now we observe that $0 \leq A_1 = a_1 \leq 1$ and $A_{k+1} \leq A_k$ (P-a.s.). This means that the limit $A_\infty \equiv \lim_n A_n \geq 0$ exists, consequently, (P-a.s.) the limit $\Gamma_\infty \equiv \lim_n \Gamma_n$ exists and $\Gamma_\infty = A_\infty \cdot S_\infty$.

Now we establish (6.2).

For any $a > 0$ and $b > 0$ we have

$$\{\Gamma_\infty \geq a, S_\infty < \frac{a}{b}\} \cup \{\Gamma_\infty \geq a, S_\infty \geq \frac{a}{b}\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ \frac{a}{b} A_\infty \geq a \right\} \cup \left\{ S_\infty \geq \frac{a}{b} \right\} = \{A_\infty \geq b\} \cup \left\{ S_\infty \geq \frac{a}{b} \right\}.$$

Consequently,

$$P(\Gamma_\infty \geq a) \leq P(A_\infty \geq b) + P\left(S_\infty \geq \frac{a}{b}\right).$$

The required estimate (6.2) now follows when we observe that

$$P\left(S_\infty \geq \frac{a}{b}\right) \leq \frac{b}{a} E S_\infty \leq \frac{b}{a}.$$

2. Proof of Theorem 2.

We set $\gamma_{nk} = \alpha_{nk}^{-1/2}$ and claim that

$$\tilde{E}^n(\gamma_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \leq 1 \quad (\tilde{P}^n\text{-a.s.}), \quad k \geq 1.$$

By Lemma 3 (\tilde{P}^n -a.s.)

$$\tilde{E}^n(\alpha_{nk}^{-1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) = I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n),$$

and by Lemma 4 (\tilde{P}^n -a.s.)

$$I(\alpha_{n, k-1} < \infty) (1 - E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)) \geq 0.$$

Therefore, (\tilde{P}^n -a.s.) $\tilde{E}^n(\alpha_{nk}^{-1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \leq 1$, $k \geq 1$. Applying Lemma 11 we find that

$$\tilde{P}^n(z_{n\infty}^{-1/2} \geq a) \leq \frac{b}{a} + \tilde{P}^n\left(\prod_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq b\right).$$

In this inequality we take $0 < b \leq 1$. Then

$$(6.4) \quad \tilde{P}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \log I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \geq \log b\right).$$

Since $\log x \leq x - 1$ for $x \geq 0$, we have

$$\log I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) \leq I(\alpha_{n, k-1} < \infty) E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) - 1 \leq$$

$$\leq I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n) - 1],$$

and from (6.4) we find that

$$\tilde{P}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [1 - E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \leq \log \frac{1}{b}\right).$$

Now by (7), for any $0 < b \leq 1$,

$$\lim_n \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n, k-1} < \infty) [1 - E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \leq \log \frac{1}{b}\right) = 0.$$

Therefore,

$$\lim_n \tilde{P}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) \geq 1 - \frac{b}{a},$$

and since $0 < b \leq 1$ is arbitrary,

$$\lim_n \tilde{P}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) = 1,$$

which by Lemma 10 is equivalent to (\tilde{P}^n) Δ (P^n).

3. Proof of Corollary 5.

Since $P_n^N(z_{nA} = \infty) = 0$ (see §2.5°) and $\tilde{P}_k^N \ll P_k^N$, we obtain

$$\tilde{P}^n(\alpha_{nA} = \infty) = \tilde{P}_k^N(\alpha_{nA} = \infty) = \tilde{P}_k^N(z_{nA} = \infty) = 0,$$

and (1.8) follows directly from the assertion of Theorem 2.

4. Proof of Theorem 3.

The fact that (ρ) is sufficient (without (a) and (b)) was established in Corollary 5 to Theorem 2.

We now claim that

$$(a), (b), (\tilde{P}^n) \Delta (P^n) \Rightarrow (\rho).$$

By Lemma 10, this is equivalent to

$$(6.5) \quad (a), (b), \lim_n \tilde{P}^n(\sup_k z_{nA} \geq N) = 1 \text{ for all } N > 0 \Rightarrow (\rho).$$

According to (5.12), for $N \geq 1$ and $c \geq 1$

$$\{\sup_k z_{nA} \geq N\} \subseteq \{\sup_k |X_{nA}^c| \geq \log N\} \cup \{\sup_k \alpha_{nA} \geq e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nA} \leq e^{-c}\}.$$

Therefore

$$(6.6) \quad \lim_n \tilde{P}^n(\sup_k |X_{nA}^c| \geq \log N) \geq$$

$$\geq 1 - \lim_n \tilde{P}^n(\sup_k \alpha_{nA} \geq e^c) - \lim_n \tilde{P}^n(\inf_k \alpha_{nA} \leq e^{-c}).$$

Hence we find by (α) and (β) that for every $N \geq 1$ and $\varepsilon > 0$ there is a $c = c(\varepsilon) \geq 1$ such that

$$\overline{\lim}_n \tilde{P}^n(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N) \geq 1 - \varepsilon.$$

By (3.17) with $N > e$

$$(6.7) \quad \tilde{P}^n(\sup_k |X_{nk}^c| \geq \log N) \leq \frac{2LA(c)}{\log N - 1} + \tilde{P}^n(A_{nk}^n + B_{nk}^n \geq 2LA(c)),$$

where A_{nk}^n and B_{nk}^n are defined in the proof of Lemma 8 in §3, $L > 0$, and $0 < A(c) < \infty$ is defined in (5.26).

From (6.6) and (6.7)

$$(6.8) \quad \overline{\lim}_n \tilde{P}^n(A_{nk}^n + B_{nk}^n \geq 2LA(c)) \geq 1 - \frac{2LA(c)}{\log N - 1} \rightarrow 1 - \varepsilon, \quad N \rightarrow \infty.$$

Next, using the fact that $\{\sup_k \alpha_{nk} < \infty\}$ we find from (5.26) that

$$\begin{aligned} A_{nk}^n + B_{nk}^n &= \sum_{k=1}^{\infty} E^n[\alpha_{nk} u_c(\log \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2(\log \alpha_{nk}) | \mathcal{F}_{k-1}^n] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E^n[\alpha_{nk} u_c(\log \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2(\log \alpha_{nk}) + 1 - \alpha_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n] \leq \\ &\leq A(c) \sum_{k=1}^{\infty} E^n[(1 - \alpha_{nk}^{1/2})^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] = 2A(c) \sum_{k=1}^{\infty} [1 - E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)]. \end{aligned}$$

Together with (6.8) this shows that

$$\overline{\lim}_n \tilde{P}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} [1 - E^n(\alpha_{nk}^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}^n)] \geq L\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Since L and ε are arbitrary this shows that (ρ) follows from (α), (β), and $(\tilde{P}^n) \Delta (P^n)$. This proves the theorem.

References

- [1] L. LeCam, Locally asymptotically normal families of distributions, Univ. of Calif. Publ. Statist. **3** (1960), 37-98. MR 23 # A4197.
- [2] G.G. Roussas, Contiguity of probability measures: some applications in statistics, Cambridge University Press, London-New York 1972. MR 50 # 11554.
- [3] J. Hajek and Z. Sidak, Theory of rank tests, Academic Press, New York-London 1967. MR 37 # 4925.
- [4] H. Witting and G. Nolte, Angewandte mathematische Statistik, Teubner, Stuttgart 1970. MR 49 # 1625.
- [5] W.J. Hall and R.M. Lyons, On the concept of contiguity, Ann. Probab. **5** (1977), 278-282. MR 56 # 1543.
- [6] J. Oosterhoff and W.R. van Zwet, A note on contiguity and Hellinger distance. Contributions to Statistics, Reidel, Dordrecht 1979, 157-166. MR 81m:60037.

- [7] L. LeCam, On the asymptotic normality of estimates, Proc. of the Symposium to honour Jerzy Neyman (Warsaw 1974), PWN, Warsaw 1977, 203-217. MR 57 # 10882.
- [8] G.K. Eagleson, An extended dichotomy theorem for sequences of pairs of Gaussian measures, Ann. Probab. **9** (1981), 453-459. MR 82k:60083.
- [9] ——— and R.F. Gundy, On a theorem of Kabanov, Liptser and Shiryaev (Preprint 1982).
- [10] ——— and J. Memin, Sur la contiguïté de deux suites de mesures: généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryaev (Preprint 1982)
- [11] Yu.M. Kabanov, R.Sh. Liptser, and A.N. Shiryaev, On the question of the absolute continuity and singularity of probability measures, Mat. Sb. **104** (1977), 227-247. MR 58 # 24514.
- [12] ———, Math. USSR Sb. **33** (1977), 203-221.
- [13] E. Lenglart, Relation de domination entre deux processus, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B **13** (1977), 171-179. MR 57 # 10810.
- [14] R. Rebolledo, La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus, Bull. Soc. Math. France Mém. No. 62 (1979). MR 81g:60002.
- [15] U. Muller-Funk, On contiguity and weak convergence with an application to sequential analysis, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 1982.
- [16] K. Behnen and G. Neuhäus, A central limit theorem under contiguous alternatives, Ann. Statist. **3** (1975), 1349-1353. MR 52 # 9447.
- [17] R.Sh. Liptser and A.N. Shiryaev, *Statistika sluchainykh protsessov*. Nauka, Moscow 1974. MR 55 # 4365.

Institute of Control Problems

Institut für Mathematische Stochastik Freiburg

Steklov Mathematical Institute of the

Academy of Sciences USSR