Teacher's corner – kurze Beweise mit langer Wirkung

In Heft 3–2001 starteten wir eine neue Kolumne, welche ungewöhnlich kurze Beweise oder prägnante Konzepte sammelt, unmittelbar geeignet für den Einsatz in der Lehre. (FB)

No. 4: Patins Kurzbeweis von Stirlings Fakultätenformel.

Die von Stirling (1730) gefundene Approximation der Fakultäten $n!$ hat immer wieder Versuche provoziert, das Ergebnis auf kurzem Weg zu beweisen. Patin (1989) ist ein solcher ‚wirklich kurzer' Beweis gelungen, der sich zudem nahtlos in eine Vorlesung einpasst, in der die Integralrechnung zur Verfügung steht.

Die Stirling-Formel besagt, dass die Folge der Quotienten q_n von $n!$ und $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ gegen Eins konvergiert. Patin stellt q_n mit dem Gamma-Integral

$$(n-1)! = \Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\, dy$$

dar und erhält

$$q_n = \frac{e^n \Gamma(n)}{n^{n-1}\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{y}{n}\right)^{n-1} e^{n-y} \frac{dy}{\sqrt{n}}\,.$$

Dann führt er einige Substitutionen durch, die sich zu

$$y = n\,(1 + \frac{x}{2\sqrt{n}})^2$$

reduzieren lassen, mit

$$dy = \sqrt{n}\,(1 + \frac{x}{2\sqrt{n}})\, dx\,.$$

Dies ergibt *Patins Integraldarstellung*

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2\sqrt{n}}^\infty \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{2n-1} e^{-x\sqrt{n}-x^2/4}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f_n(x) e^{-x^2/4}\, dx\,, \end{aligned}$$

wobei

$$f_n(x) = (1 + \frac{x}{2\sqrt{n}})^{2n-1} e^{-x\sqrt{n}} \quad \text{falls} \quad x \geq -2\sqrt{n}\,,$$

und $f_n(x) = 0$ sonst. Die Funktion f_n ist nichtnegativ und verschwindet im Unendlichen. Ihre Ableitung hat auf dem Intervall $(-2\sqrt{n}, \infty)$ nur die Nullstelle $-\frac{1}{\sqrt{n}}$. Dort muss also ein Maximum liegen,

$$f_n(x) \leq f_n(-\frac{1}{\sqrt{n}}) = (1 - \frac{1}{2n})^{2n-1}\, e < e\,,$$

was zur Majorante $e \cdot e^{-x^2/4}$ führt. Die Reihenentwicklung

$$\log(1 + \frac{x}{2\sqrt{n}}) = \frac{x}{2\sqrt{n}} - \frac{x^2}{8n} + O(n^{-3/2})$$

liefert die punktweise Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^{-1} \\ &\qquad e^{2n\log\left(1+\frac{x}{2\sqrt{n}}\right) - x\sqrt{n}} \\ &= e^{-x^2/4}. \end{aligned}$$

Mit einem Verweis auf den Satz von der majorisierten Konvergenz schließt der Beweis ab:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}\, dx = 1\,.$$

Literatur

Stirling, J. (1730). *Methodus Differentialis.* [Siehe `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Stirling.html`]

Patin, J. M. (1989). A very short proof of Stirling's formula. *Amer. Math. Monthly* **96**, 41–42.

Adresse des Autors

Prof. Dr. Friedrich Pukelsheim
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
86135 Augsburg
`pukelsheim@math.uni-augsburg.de`