Affine und nicht affine synthetische Ebenen

Ein Projekt in der 10. Jahrgangsstufe eines Augsburger Gymnasiums

WOLFGANG SCHNEIDER

Durch eine langjährige Geometrielehrtätigkeit an der Universität Augsburg angeregt, rief ich im Jahre 2008 an einem Augsburger Gymnasium ein Projekt ins Leben, bei dem es um einen wissenschaftlich exakten Zugang zur Geometrie geht. Das Projekt, das mindestens 20 Stunden zu 45 Minuten in Anspruch nimmt, führe ich seither im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft in jedem Schuljahr durch. Die teilnehmenden Schüler sind stets aus der jeweiligen 10. Jahrgangsstufe. Es gibt keine Zulassungsbeschränkungen; etwa 20 % aller Zehntklässler der Schule können so alljährlich für das Projekt gewonnen werden. In den folgenden Abschnitten werden die wichtigsten Inhalte und Merkmale des Projekts beschrieben.

1 Zur Geschichte der Geometrie

Bei dieser Thematik bietet sich als Anfang ein geschichtlicher Rückblick an, der mit den griechischen Philosophen PLATO und ARISTOTELES beginnt. Diese beiden Persönlichkeiten sind jedem Schüler der 10. Jahrgangsstufe vertraut. Welche Schüler haben aber je von EUKLID gehört, der ARISTOTELES folgend in seinen »Elementen« einen beeindruckend logischen Aufbau der Geometrie versuchte? In der Regel ist EUKLID für die Schüler ein Unbekannter und damit natürlich auch sein Versuch, das Wesen eines Punktes zu beschreiben. Stellt man die Frage, was denn ein Punkt sei, kommt von den Schülern meist die Antwort, dass man sich einen Punkt als 2-Tupel von Zahlen – darstellbar in einem entsprechenden Koordinatensystem– vorstellen kann; vereinzelt verweisen Schüler aber auch auf die Kleinheit eines Punktes und damit letztlich im Stile von EUKLID auf die fehlende Möglichkeit, einen Punkt in Teile zu zerlegen. Jedermann scheint sich unter einem Punkt Ähnliches vorzustellen, niemand vermag aber genau zu sagen, was ein Punkt letztendlich ist. Diese Schwierigkeit und andere Schwachstellen im Werk des EUKLID bewogen Ende des 19. bzw. Anfang des 20. Jahrhunderts zu einem Umdenken: HILBERT (1862–1943) bemerkte, dass nicht das Wesen eines Punktes entscheidend sei, sondern einzig die gegenseitige Beziehung von Punkten und Geraden, die durch plausible Gesetzmäßigkeiten (Axiome) geregelt sein müsse.

2 Inzidenzaxiome und synthetische Ebenen

HILBERTs Denkansatz wird nun beschrieben.

Man stelle sich eine Menge E vor, deren Elemente Punkte genannt werden, bezeichnet mit Großbuchstaben $A, B, C, \ldots, P, \ldots, A_1, A_2, A_3$ usw.

Man stelle sich ferner eine gewisse Menge G von Teilmengen von E vor, wobei die Elemente von G Geraden genannt und mit Kleinbuchstaben $a, b, c, \ldots, g, h, \ldots, g_1, g_2, g_3$ usw. bezeichnet werden.

Das Paar (E, G) erfüllt sinnvolle Geometriegrundvorstellungen und heißt dann auch synthetische Ebene, wenn folgende Gesetzmäßigkeiten, die so genannten Inzidenzaxiome (I1) bis (I4), erfüllt sind:

(I1) Zu $A, B \in E$ gibt es $g \in G$ mit $A, B \in g$.

(I2) Zu $A, B \in E$ mit $A \neq B$ gibt es höchstens ein $g \in G$ mit $A, B \in g$.

(I3) Auf jeder Geraden $g \in G$ liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.

(I4) Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die bei (I1) bis (I4) formulierten Anforderungen an ein System von Punkten und Geraden entsprechen genau dem, was ein Schüler nach einigen Jahren gymnasialer Schulgeometrie auch von Punkten und Geraden erwartet. Allerdings wirkt eine derartige Herangehensweise an eine Definition im Schulbetrieb befremdlich und bedarf einer sorgfältigen Vertiefung. Ist die gelegentlich mangelhafte Vertiefung derartiger Begriffsbildungen im universitären Vorlesungsbetrieb nicht vielleicht auch ein Grund dafür, dass so viele Studenten in den ersten Semestern eines Mathematikstudiums große Schwierigkeiten haben?

Zur Vertiefung der Inzidenzaxiome und des Begriffs der synthetischen Ebene werden die Schüler mit folgender Aufgabenstellung konfrontiert:

> E sei eine Menge von drei Punkten, sagen wir $\{A, B, C\}$.
> Wie sieht dann G aus?

Die Antwort ist elementar: Bei der Potenzmenge von E scheiden wegen (I3) die leere Menge und die einelementigen Teilmengen von E aus. Ebenfalls nicht infrage als Gerade kommt wegen (I4) die ganze Menge E. Es bleiben also $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, die wegen (I1) zu G gehören müssen. Ist $|E| = 3$, so ist (E, G) genau dann eine synthetische Ebene, wenn G die Menge aller zweielementigen Teilmengen von E ist. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache eignen sich die in Abbildung 1 dargestellten Schemata.

Wann ist (E, G) im Fall $|E| = 4$ eine synthetische Ebene? Nachdem es wegen (I4) keine Gerade mit vier Punkten und wegen (I2) höchstens eine Gerade mit drei Punkten geben kann, werden die beiden möglichen Typen rasch klar. Entweder ist G die Menge aller zweielementigen Teilmengen von E oder aus einer dreielementigen Teilmenge von E und drei zweielementigen Teilmengen von E bestehend; verdeutlicht werden kann dies durch die in Abbildung 2 dargestellten Schemata.

Für die Schüler wird es nun immer schwieriger, aber auch interessanter: Wann ist (E, G) in den Fällen $|E| = 5$, $|E| = 6$, $|E| = 7$ usw. eine synthetische Ebene?

Jedem Schüler scheint übrigens die Unabhängigkeit der Inzidenzaxiome intuitiv klar zu sein; wie allerdings beispielsweise nachgewiesen wird, dass (I1) keine Folge der übrigen Axiome (I2), (I3), (I4) ist, kann sich zunächst einmal kaum jemand vorstellen. Haben die Schüler allerdings erst einmal ein System kennengelernt, in dem (I2), (I3), (I4) gelten, nicht aber (I1), finden sie relativ schnell selbständig Systeme, mit deren Hilfe die übrigen Unabhängigkeiten nachgewiesen werden können.

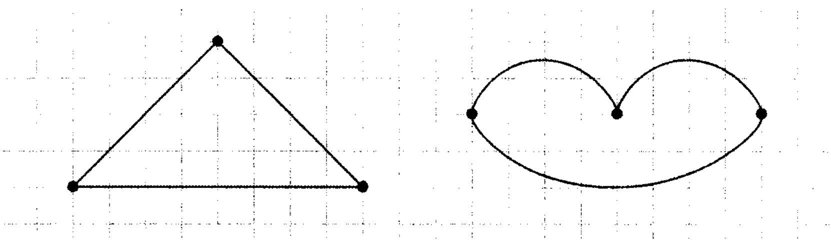

Abb. 1. Die synthetische Ebene mit drei Punkten

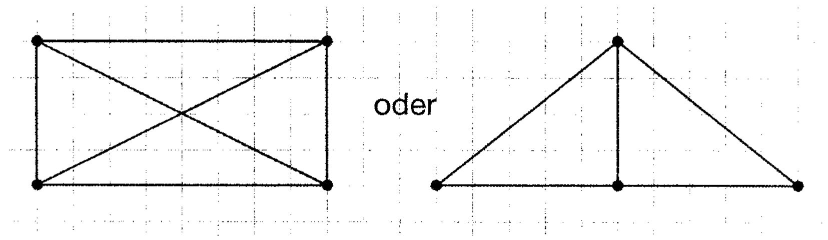

Abb. 2. Die synthetischen Ebenen mit vier Punkten

3 Parallelität und affine synthetische Ebenen

Abbildung 3 zeigt zwei synthetische Ebenen mit $|E| = 5$, die gegenübergestellt werden.

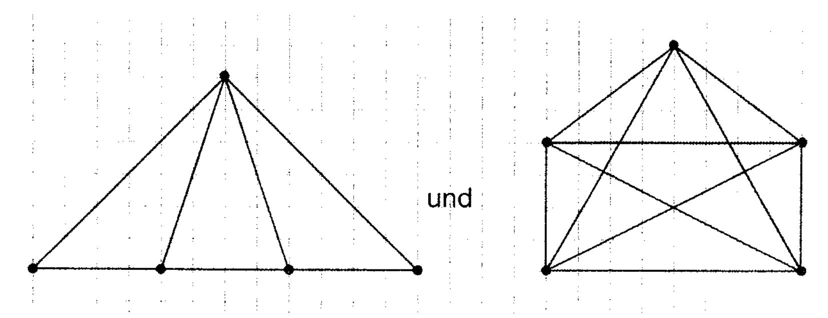

Abb. 3. Zwei synthetische Ebenen mit fünf Punkten

Bei der links dargestellten Ebene besteht G aus einer Geraden mit vier Punkten und vier Geraden mit zwei Punkten, bei der rechts dargestellten Ebene ist G die Menge der zweielementigen Teilmengen von E, d. h. es sind zehn Geraden mit je zwei Punkten.

Was fällt auf? Bei der links dargestellten Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ niemals eine Parallele h zu g durch P, bei der rechts dargestellten Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ stets zwei Parallelen zu g durch P. Dabei werden Geraden h und g als parallel bezeichnet (kurz $h \| g$), wenn entweder $h = g$ oder $h \cap g = \{\,\}$ gilt.

Die gemachten Beobachtungen passen überhaupt nicht zum Vorstellungsvermögen der Schüler, sind sie es doch gewohnt, dass es zu einer Geraden g und einem Punkt P außerhalb von g genau eine Parallele zu g durch P gibt. Möchte man diese vom Schüler erwartete Eigenschaft bei einer synthetischen Ebene gewährleistet haben, muss man dies offensichtlich durch die Gültigkeit eines weiteren Axioms sichern, welches man Parallelenaxiom (P) nennt:

> (P) Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h mit $h \| g$, $P \in h$.

Eine synthetische Ebene, bei der zusätzlich auch das Parallelenaxiom (P) gilt, wird als affine synthetische Ebene bezeichnet.

Beispielsweise ist die Ebene mit $|E| = 4$ und G = {alle zweielementigen Teilmengen von E} affin. Die Ebene E mit $|E| = 5$ und G = {alle zweielementigen Teilmengen von E} ist dagegen keine affine Ebene. Bei dieser Ebene macht man noch eine überraschende Entdeckung: Aus $g \| h$ und $h \| k$ folgt nicht zwingend $g \| k$, wie unter der Annahme $E = \{A, B, C, D, E\}$ das Beispiel $g = \{A, B\}$, $h = \{C, D\}$, $k = \{A, E\}$ zeigt. Die Transitivität der Parallelität lässt sich allerdings für jede affine synthetische Ebene nachweisen; beim Beweis wird der entscheidende Einfluss des Parallelenaxioms eindrucksvoll deutlich.

4 Aus den Inzidenzaxiomen folgende Eigenschaften synthetischer Ebenen

Das streng logische Argumentieren im Rahmen mathematischer Beweise wird im alltäglichen Mathematikunterricht vernachlässigt. Dies ist sicherlich ein Grund dafür, warum viele Mathematikstudenten mit unzureichenden Vorstellungen vom eigentlichen Wesen der Mathematik das Studium beginnen und dann auch schnell aufgeben. Die Eigenschaften synthetischer Ebenen sind ein ideales Terrain für das Einüben und auch selbständige Durchführen einfacher Beweise nach den Kriterien der strengen Logik. Folgende Sätze bieten sich an:

- Zu jeder Geraden gibt es einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.
- Jeder Punkt ist Durchschnitt zweier Geraden.
- Zu jedem Punkt gibt es eine Gerade, die nicht durch den Punkt geht.

Beim zuletzt genannten Satz lohnt es sich in hohem Maße, sowohl einen direkten als auch einen indirekten Beweis durchzuführen. Qualitativ sind die Beweise enorm verschieden; beim direkten Beweis konstruiert man zu einem vorgegebenen Punkt explizit die gesuchte Gerade, beim indirekten Beweis macht schon die richtige Formulierung der gegenteiligen Annahme Schwierigkeiten. Zudem fehlt beim indirekten Beweis das konstruktive Element. Für das pure Einüben lückenlosen logischen Denkens ist der indirekte Beweis allerdings bestens geeignet.

5 Weitere Beispiele für synthetische Ebenen

Ein unverzichtbares Beispiel ist die affine Ebene über einem Körper, insbesondere deshalb, weil hier eine hervorragende Verbindung zur Algebra hergestellt wird. Nach einer allgemeinen Klärung des Körperbegriffs kann man neben den Körpern $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ der rationalen bzw. reellen Zahlen interessante andere Körper thematisieren: Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, endliche Körper mit zwei, drei oder vier Elementen. Bei der affinen Ebene über $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ erkennen die Schüler natürlich sofort »ihre« Schulgeometrie wieder. Durch das Eingehen auch auf andere Körper bekommen sie aber auch ein sicheres Gespür dafür, welch zahlreiche andere Möglichkeiten für synthetische Ebenen existieren.

Die affine Ebene über einem Körper mit zwei Elementen – diese Elemente sind das Nullelement 0 und das Einselement 1 – ist auch noch dank früherer Überlegungen besonders interessant. Da die Ebene mit (0|0), (1|0), (0|1), (1|1) aus vier verschiedenen Punkten besteht, müssen nämlich nach dem 2. Abschnitt sechs verschiedene Geraden mit jeweils zwei Punkten existieren. Mit den Geraden $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 0$, $x + y = 1$ bestätigt sich diese Vorhersage; beispielsweise liegen auf der Geraden $x + y = 0$ die Punkte (0|0) und (1|1).

Nicht vorenthalten sollte man den Schülern Einblicke in das Klein'sche Modell bzw. die Poincaré'sche Halbebene, wo es zu einer vorgegebenen Gerade g und einem Punkt P außerhalb von g unendlich viele Parallelen zu g durch P gibt.

6 Endliche affine synthetische Ebenen

Im Rahmen der ausschließlich auf den Inzidenzaxiomen beruhenden Eigenschaften synthetischer Ebenen haben die Schüler bereits etliche kürzere Beweise kennengelernt. Nun sollen sie abschließend einen umfangreicheren Satz mit einem entsprechend umfangreicheren Beweis kennenlernen. Es geht um Eigenschaften einer endlichen affinen synthetischen Ebene.

Satz: Sei (E, G) eine endliche affine synthetische Ebene. Dann gilt:

a) Zu je zwei Geraden $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 \neq g_2$, $g_1 \cap g_2 \neq \{\,\}$ gibt es $A \in E$ mit $A \notin g_1 \cup g_2$.

b) Jede Gerade umfasst die gleiche Anzahl m von Punkten.

c) $|E| = m^2$

d) $|G| = m^2 + m$

Der Beweis, der bei detaillierter Durchführung mehrere Unterrichtsstunden in Anspruch nimmt, erweist sich als äußerst konstruktiv und informativ. Die Schüler lernen im Rahmen des Beweises die innere Struktur einer derartigen Ebene kennen. Damit man sich dies besser vorstellen kann, wird im Folgenden eine Beweisskizze angegeben.

Zum Beweis von a):
Neben dem Schnittpunkt P von g_1 und g_2 gibt es auf g_1 einen Punkt $Q \neq P$. Durch den Punkt Q, der nicht auf g_2 liegt, geht eine zu g_2 parallele Gerade p. Für einen von Q verschiedenen Punkt A von p gilt dann $A \notin g_1$ und $A \notin g_2$.
Man beachte, dass die Endlichkeit von E bei a) keine Rolle spielt.

Zum Beweis von b):
Es gibt eine Gerade g_0 mit einer größten Anzahl m von Punkten. Die Punkte von g_0 wollen wir mit $A_1, \ldots, A_m$ bezeichnen. Ist nun h eine von g_0 verschiedene Gerade, sind die Fälle $|h \cap g_0| = 1$ und $h \cap g_0 = \{\,\}$ zu unterscheiden.
Fall 1:
Nimmt man $h \cap g_0 = \{A_1\}$ an und ist A ein nach a) existierender Punkt, der weder auf h noch g_0 liegt, so treffen genau $m - 2$ der $m - 1$ Geraden $g(A_2, A), \ldots, g(A_m, A)$ – mit $g(A_i, A)$ wird die eindeutige Gerade durch A_i und A bezeichnet – die Gerade h in insgesamt $m - 2$ verschiedenen Punkten, die überdies alle ungleich A_1 sind. Der noch fehlende m-te Punkt auf h ist schließlich der Schnittpunkt von h und der Parallelen zu g_0 durch A.
Fall 2:
Im Fall $h \cap g_0 = \{\,\}$ betrachtet man für einen Punkt B auf h die Gerade $g(A_1, B)$, welche mit g_0 genau den Punkt A_1 gemeinsam hat. Nach Fall 1 gibt es auf $g(A_1, B)$ m verschiedene Punkte, was wegen $h \cap g(A_1, B) = \{B\}$ wiederum nach Fall 1 m verschiedene Punkte auf h zur Folge hat.

Zum Beweis von c):
Ist g eine Gerade mit Punkten $A_1, \ldots, A_m$ und B_1 ein Punkt außerhalb von g, so liegen auf der Parallelen zu g durch B_1 weitere Punkte $B_2, \ldots, B_m$. Auf jeder der m Geraden $g(A_i, B_1)$ $(1 \leq i \leq m)$ liegen neben A_i und B_1 $m - 2$ weitere Punkte, sodass es mindestens $m + m + m(m - 2) = m^2$ verschiedene Punkte gibt. Da man zudem nachweisen kann, dass neben den bereits thematisierten Punkten keine weiteren existieren, sind es insgesamt also genau m^2 Punkte.

Zum Beweis von d):
Ist g eine Gerade mit Punkten $A_1, \ldots, A_m$ und h eine zweite Gerade, die mit g genau den Punkt A_1 gemeinsam hat und neben A_1 $m-1$ weitere Punkte $B_1, C_1, \ldots$ umfasst, so sind die $m-1$ Parallelen zu g durch diese weiteren Punkte $B_1, C_1, \ldots$ genau die Geraden, die mit g keinen Punkt gemeinsam haben. Sind $B_1, B_2, \ldots, B_m$ die Punkte der Parallelen zu g durch B_1, so sind die m^2 Geraden $g(A_i, B_j)$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le m)$ genau die Geraden, die mit g genau einen Punkt gemeinsam haben. Mit g selbst kommt man also auf $1 + (m-1) + m^2 = m^2 + m$ Geraden.

Die Kenntnis der Vorgehensweise beim Beweis befähigt die Schüler danach zur Bewältigung folgender schwieriger Aufgabenstellung:
Entwickle mit Hilfe des Satzbeweises ein Beispiel für eine affine synthetische Ebene mit 9 Punkten.

Das Ergebnis zeigt die Abbildung 4.

Da die in der Abbildung dargestellte Situation doch etwas komplex wirkt, werden E und G vorsorglich ausführlich angegeben:

$$E = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\}$$

$$\begin{aligned} G = \{&\{A_1, A_2, A_3\}, \{B_1, B_2, B_3\}, \{C_1, C_2, C_3\},\\ &\{A_1, B_1, C_1\}, \{A_2, B_2, C_2\}, \{A_3, B_3, C_3\},\\ &\{A_1, B_2, C_3\}, \{A_2, B_3, C_1\}, \{A_3, B_1, C_2\},\\ &\{A_1, B_3, C_2\}, \{A_2, B_1, C_3\}, \{A_3, B_2, C_1\}\} \end{aligned}$$

Dabei sind die in einer Zeile stehenden Geraden jeweils zueinander parallel.

Die letzte Aufgabenstellung stellt den Schlusspunkt eines Projekts dar, das den teilnehmenden Schülern in der Regel großen Spaß macht, vor allem aber Mathematik in einer Form behandelt, die einen Einblick in typische Anforderungen eines universitären Mathematikstudiums gibt.

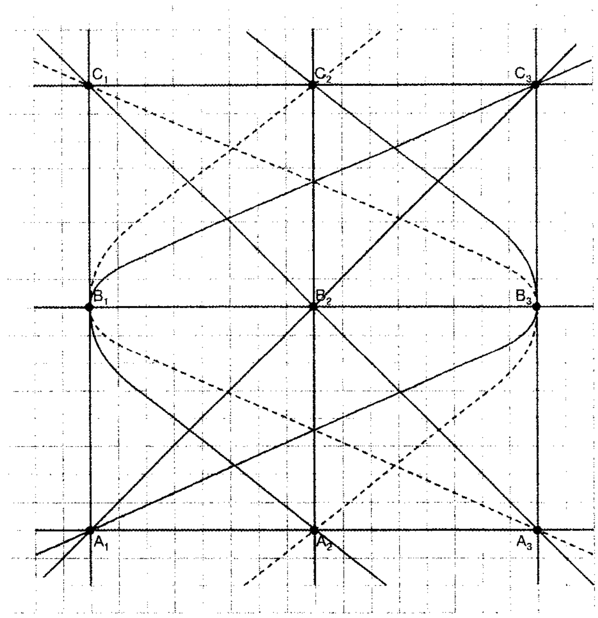

Abb. 4. Affine synthetische Ebene mit 9 Punkten

Prof. Dr. WOLFGANG SCHNEIDER, gymnasium@stetten-institut.de, ist stellvertretender Schulleiter des A. B. von Stettenschen Instituts in Augsburg und Hochschullehrer an der Universität Augsburg (Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik).