Herausgegeben von
Friedrich Kasch
und Bodo Pareigis
Mathematisches
Institut der
Ludwig-Maximilians-
Universität München

Titel Nr. 55
14. Jahrgang
1987

Algebra Berichte

55

Wolfgang Schneider

Das Total von Moduln und Ringen

Verlag
Reinhard
Fischer

Wolfgang Schneider

Das Total von Moduln und Ringen

Verlag Reinhard Fischer München

CIP - Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Schneider, Wolfgang:

Das Total von Moduln und Ringen / Wolfgang Schneider.
- München: R. Fischer, 1987.
(Algebra-Berichte; Nr. 55)
ISBN 3-88927-036-0
NE: GT
27;28

ISBN 3-88927-036-0

Fallmerayerstr. 36 8000 München 40

Druck und Bindung: Novotny, Söcking
Printing in West Germany 1987

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung .... I - IV

I. KAPITEL : Der Begriff des Totals und seine Stellung in der Theorie der Halbideale 1

II.KAPITEL : Totale Moduln 14

III.KAPITEL: Die Stellung der totalen Moduln in der Theorie der Ideale und Halbideale 27

IV.KAPITEL : Der Zusammenhang zwischen Total und Radikal und der Begriff des RaT-Moduls 30

V. KAPITEL : RaT-Zerlegungen 39

VI.KAPITEL : Das Total von Ringen 48

Literaturverzeichnis 58

EINLEITUNG

In dieser Arbeit soll der von F. Kasch definierte Begriff des Totals für volle Modulkategorien systematisch untersucht werden.

Wir wollen unter einer Klasse k von R-Moduln (R Ring mit Einselement) stets eine solche Klasse verstehen, bei der mit $M \in k$ auch jeder zu M isomorphe R-Modul Element von k ist.
Für eine Klasse k von R-Moduln und R-Moduln A,B bezeichnen wir $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ als totalen k-Nichtisomorphismus, wenn für alle direkten Summanden $0 \neq A_o$ von A und B_o von B mit $A_o \in k$, $B_o \in k$ und $\alpha(A_o) \subset B_o$ $A_o \ni x \longmapsto \alpha(x) \in B_o$ nicht isomorph ist. Die Menge der totalen k-Nichtisomorphismen von A nach B wird als k-Total von A nach B bezeichnet, kurz $\mathrm{Tot}_k(A,B)$. Für den Fall, daß k die ganze Kategorie der R-Moduln ist, sprechen wir vom Total von A nach B, kurz Tot(A,B).
Ich nenne einen R-Modul M total, wenn Tot(M,M) additiv abgeschlossen ist. Die totalen Moduln erweisen sich als von großer Bedeutung für die in dieser Arbeit behandelten Fragestellungen.

Diese Fragestellungen sollen nun angegeben werden. Für jede Klasse k von R-Moduln ist $\{\mathrm{Tot}_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Moduln, d.h. für alle R-Moduln A,B,X,Y ist $\mathrm{Hom}_R(B,Y)\mathrm{Tot}_k(A,B)\mathrm{Hom}_R(X,A) \subset \mathrm{Tot}_k(X,Y)$. F. Kasch hat mir folgende Fragestellungen vorgelegt:

- Für welche Klassen k ist $\{\mathrm{Tot}_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ sogar Ideal ?
- Welcher Zusammenhang besteht mit der Austauscheigenschaft ?
- Welcher Zusammenhang besteht mit dem Radikal ?
- Welche Kennzeichnungen des Totals im Endomorphismenring sind möglich ?

Die sechs Kapitel dieser Arbeit geben auf diese Fragen Antwort. Zentrale Rollen nehmen hierbei die von mir eingeführten Begriffe des totalen Moduls, des RaT-Moduls und der d2-Austauscheigenschaft ein. Totaler Modul und RaT-Modul sind Verallgemeinerungen des LE-Moduls (Modul mit lokalem Endomorphismenring). Für Ringe führe ich ein seitenunabhängiges Total und die Begriffe des totalen Rings und des RaT-Rings ein, welche eine Verallgemeinerung des lokalen Rings darstellen.

Im folgenden soll über die genaueren Inhalte der sechs Kapitel ein Überblick gegeben werden.

I. Kapitel

Ich weise zunächst nach, daß für jede Klasse k von R-Moduln $\{Tot_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Moduln ist, d.h. für R-Moduln A,B,X und Y gilt grundsätzlich $Hom_R(B,Y)Tot_k(A,B)Hom_R(X,A) \subset Tot_k(X,Y)$. Folgender Fragestellung von F. Kasch gehe ich anschließend nach: Gibt es zu einem vorgegebenen Halbideal $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Moduln eine Klasse k von R-Moduln, vielleicht sogar eine dS-Klasse, mit $Tot_k(A,B) \supset I(A,B)$ bzw. $Tot_k(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Moduln A,B ? Eine dS-Klasse k von R-Moduln ist dadurch ausgezeichnet, daß für jedes $M \in k$ nicht nur jeder zu M isomorphe R-Modul, sondern auch jeder von Null verschiedene direkte Summand von M Element von k ist.

II. Kapitel

Ich führe den Begriff des totalen Moduls ein. In einem totalen Modul M_R ist Tot(M,M) zweiseitiges Ideal in $End_R(M)$. Ich weise nach, daß ein Modul genau dann total ist, wenn er die sogenannte d2-Austauscheigenschaft, kurz d2-ATE, besitzt. Wie von mir gezeigt wird, handelt es sich bei der d2-ATE um eine abgeschwächte Form der 2-Austauscheigenschaft, kurz 2-ATE. Am Ende des II. Kapitels werden wichtige Beispiele für totale Moduln genannt.

III. Kapitel

Ich weise nach , daß für eine dS - Klasse k von R-Moduln das Halbideal $\{Tot_k(A,B) \mid A,B \ \mathfrak{M}_R\}$ genau dann ein Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Moduln ist , wenn k eine Teilklasse der dS-Klasse der totalen R-Moduln ist .

IV. Kapitel

Für einen Modul M gilt grundsätzlich $Ra(End(M)) \subset Tot(M,M)$. Ich bezeichne $M \neq 0$ als RaT-Modul , wenn $Ra(End(M)) = Tot(M,M)$ gilt. RaT-Moduln sind totale Moduln. Im IV. Kapitel weise ich nach , daß ein Modul genau dann RaT-Modul ist , wenn er eine verschärfte d2-ATE besitzt.Wie von mir gezeigt wird ,fällt die 2-ATE unter diese verschärfte d2-ATE. Wie weiter Beispiele zeigen , gilt folgendes Schema: 2-ATE-Modul $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ RaT-Modul $\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}$ d2-ATE-Modul $\Longleftrightarrow$ totaler Modul .

V. Kapitel

Ein Modul besitzt eine RaT-Zerlegung , wenn er direkte Summe von RaT-Moduln ist. LE-Zerlegungen sind also spezielle RaT - Zerlegungen. Ein wichtiges Ergebnis von Azumaya für LE-Zerlegungen kann ich für RaT-Zerlegungen verallgemeinern : zu jedem direkten Summanden $N \neq 0$ eines Moduls mit RaT-Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ gibt es $i \in I$ und dazu einen direkten Summanden M_i' von M_i , so daß N einen zu M_i' isomorphen direkten Summanden besitzt. Aus dieser Tatsache folgt insbesondere , daß jeder Modul , der eine RaT-Zerlegung besitzt , total ist.Eine zentrale Rolle im V. Kapitel nimmt auch die Frage ein , wann ein Modul , der eine RaT-Zerlegung besitzt , RaT-Modul ist .

VI. Kapitel

Ich gebe zunächst für das Total eines Moduls eine Kennzeichnung im Endomorphismenring des Moduls an. Daraus läßt sich dann ableiten , daß für jeden Ring R mit Eins ein seitenunabhängiges Total Tot(R) eingeführt werden kann. Tot(R) ist Halbideal in R , d.h. $R\,Tot(R)\,R \subset Tot(R)$ und es ist $Ra(R) \subset Tot(R)$. Ich nenne R totalen Ring bzw. RaT-Ring , wenn Tot(R) additiv abgeschlossen ist bzw. $Ra(R) = Tot(R)$ gilt. Für jeden Modul M ist Tot(M,M) gerade das Total seines Endomorphismenrings. Am Ende des VI. Kapitels werden zahlreiche Beispiele für totale und nicht totale Ringe und deren Totale angegeben. Die Arbeit schließt mit dem bemerkenswertesten dieser Beispiele.

Der Fachmann wird erkennen , daß die Auseinandersetzung mit dem Totalbegriff auf gewisse Kategorien ausgeweitet werden kann.

Die Bezeichnungen in dieser Arbeit werden wie im Lehrbuch "Moduln und Ringe" und in der Seminarausarbeitung "Zerlegungseigenschaften von Moduln und Ringen" gehandhabt (vgl. Literaturverzeichnis [5] , [6]) und bedürfen keiner gesonderten Erklärung .

Wie anfangs erwähnt , geht der Begriff des Totals , wie er dieser Arbeit zu Grunde liegt , auf F. Kasch zurück , der mir auch die in dieser Arbeit behandelten Fragestellungen vorgelegt hat. Während der Arbeit hat er mich weiterhin durch Fragen und Bemerkungen angeregt und unterstützt. Für seine Bemühungen möchte ich F. Kasch recht herzlich danken.

I. DER BEGRIFF DES TOTALS UND SEINE STELLUNG IN DER THEORIE DER HALBIDEALE

Sei R ein Ring mit Eins und $\mathfrak{M}_R$ die Kategorie der R-Rechtsmoduln .

1.1 Definitionen

a) Ein System $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ von Teilmengen $I(A,B)$ von $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ wird als Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ bezeichnet, wenn (E1) und (E2) gelten.

(E1) : $\forall\ A,B,X,Y \in \mathfrak{M}_R \qquad \mathrm{Hom}_R(B,Y)I(A,B)\mathrm{Hom}_R(X,A) \subset I(X,Y)$

(E2) : $\forall\ A,B \in \mathfrak{M}_R \qquad I(A,B)$ additiv abgeschlossen

$\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ wird als Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ bezeichnet , wenn nur (E1) gilt.

b) Unter einer Klasse k von R-Rechtsmoduln wollen wir in dieser Arbeit stets eine solche Klasse verstehen,bei der für jedes $M \in k$ auch jeder zu M isomorphe R-Rechtsmodul Element von k ist .

Sei nun k eine Klasse von R-Rechtsmoduln ; für R-Rechtsmoduln A,B sei ferner $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$.
α heißt totaler k-Nichtisomorphismus , wenn für alle direkten Summanden $0 \neq A_0$ von A und B_0 von B mit $A_0 \in k$, $B_0 \in k$ und $\alpha(A_0) \subset B_0$ $\quad A_0 \ni x \longmapsto \alpha(x) \in B_0$ nicht isomorph ist.

Die Menge $\{\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A,B) \mid \alpha$ totaler k-Nichtisomorphismus$\}$ wird als das k-Total von A nach B , kurz $\mathrm{Tot}_k(A,B)$, bezeichnet .

Die größtmögliche Klasse von R-Rechtsmoduln ist die ganze Kategorie $\mathfrak{M}_R$. In diesem Spezialfall $k = \mathfrak{M}_R$ können wir anstelle von totaler $\mathfrak{M}_R$-Nichtisomorphismus einfacher nur totaler Nichtisomorphismus sagen.

Die Menge $\{\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A,B) \mid \alpha$ totaler Nichtisomorphismus$\}$ wird als Total von A nach B , kurz $\mathrm{Tot}(A,B)$, bezeichnet.

1.2 Lemma

Sei k eine Klasse von R-Rechtsmoduln ;

dann ist $\{\mathrm{Tot}_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln.

Beweis:
Es ist die Eigenschaft (E1) aus 1.1 nachzuweisen:
Seien also A,B,X,Y R-Rechtsmoduln , $\alpha \in \mathrm{Tot}_k(A,B)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(X,A)$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(B,Y)$;
angenommen $f\alpha g \notin \mathrm{Tot}_k(X,Y)$,
dann gibt es direkte Summanden $0 \neq X_0$ von X und Y_0 von Y mit $X_0 \in k$, $Y_0 \in k$ und $f\alpha g(X_0) \subset Y_0$, so daß $X_0 \ni x \longmapsto f\alpha g(x) \in Y_0$ isomorph ist ; als Folge ist $g|_{X_0}$ ein zerfallender Monomorphismus , d.h. $0 \neq g(X_0)$ ist direkter Summand von A und Element von k ; da aus dem Isomorphismus von X_0 nach Y_0 weiterhin folgt, daß $\alpha|_{g(X_0)}$ ein zerfallender Monomorphismus ist , haben wir also einen Widerspruch zu $\alpha \in \mathrm{Tot}_k(A,B)$.

Wir wenden uns folgender Problemstellung zu :

$\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ sei Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln. Gibt es eine Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset I(A,B)$ oder $\mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$ für alle $A,B \in \mathfrak{M}_R$?

Gleichwertig damit ist folgende Frage: Gibt es eine Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(M,M) \supset I(M,M)$ oder $\mathrm{Tot}_k(M,M) = I(M,M)$ für alle $M \in \mathfrak{M}_R$?

Die Gleichwertigkeit der beiden Fragestellungen wird im folgenden Lemma nachgewiesen.

<u>1.3 Lemma</u> (vgl. [13] L.3)

Seien $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ und $\{J(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideale in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln ; dann gilt :

a) $\forall\ A,B \in \mathfrak{M}_R \quad J(A,B) \supset I(A,B) \iff \forall\ M \in \mathfrak{M}_R \quad J(M,M) \supset I(M,M)$

b) $\forall\ A,B \in \mathfrak{M}_R \quad J(A,B) \subset I(A,B) \iff \forall\ M \in \mathfrak{M}_R \quad J(M,M) \subset I(M,M)$

c) $\forall\ A,B \in \mathfrak{M}_R \quad J(A,B) = I(A,B) \iff \forall\ M \in \mathfrak{M}_R \quad J(M,M) = I(M,M)$

Beweis von a):

"$\Longrightarrow$" : Klar.

"$\Longleftarrow$" : Für alle $M \in \mathfrak{M}_R$ gelte also $J(M,M) \supset I(M,M)$;
seien A,B R-Rechtsmoduln ;
angenommen $J(A,B) \not\supset I(A,B)$,
dann gibt es α mit $\alpha \in I(A,B)$ und $\alpha \notin J(A,B)$;
sei $M := A \oplus B$, ι_A bzw. ι_B die Inklusion von A bzw. B in M und π_A bzw. π_B die Projektion von M auf den direkten Summanden A bzw. B ; wegen der Halbidealeigenschaft ist $\iota_B \alpha \pi_A$ Element von $I(M,M)$ und auf Grund der Voraussetzung damit auch von $J(M,M)$;
aus $\alpha = \pi_B \iota_B \alpha \pi_A \iota_A$ und der Halbidealeigenschaft folgt $\alpha \in J(A,B)$, also Widerspruch.

Beweis von b):
Wie Beweis von a) mit vertauschtem I und J.

Beweis von c):
Folgt aus a) und b).

1.4 Beispiel

Sei k' eine Klasse von R-Rechtsmoduln und $I(A,B) := \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für R-Rechtsmoduln A,B.

a) Für eine Klasse k von R-Rechtsmoduln sind äquivalent :

   (i) $\forall$ R-Rechtsmoduln A,B $\quad \mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$

   (ii) Jeder R-Rechtsmodul $\neq 0$ aus k besitzt einen direkten Summanden $\neq 0$ aus k'.

b) Sei

   $k'_g := \{M \in \mathfrak{M}_R \mid M = 0 \vee M \text{ besitzt einen direkten Summanden} \neq 0 \text{ aus } k'\}$.

   Dann ist k'_g Klasse von R-Rechtsmoduln. Für jede Teilklasse k von k'_g gilt $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B. k'_g ist die größte Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B.

c) Für eine Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $k \supset k'$ sind äquivalent:

   (i) $\forall$ R-Rechtsmoduln A,B $\quad \mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$

(ii) $\forall$ R-Rechtsmoduln A,B $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$

(iii) Jeder R-Rechtsmodul $\neq 0$ aus k besitzt einen direkten Summanden $\neq 0$ aus k' .

d) Für jede Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $k' \subset k \subset k'_g$ gilt $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B.
k'_g ist die größte Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

Beweis von a):
(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Für alle R-Rechtsmoduln A,B sei $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$;
angenommen es gibt einen R-Rechtsmodul $M \neq 0$ aus k , der keinen direkten Summanden $\neq 0$ aus k' enthält ,
dann ist $\mathrm{Tot}_{k'}(M,M) = \mathrm{End}_R(M)$ und auf Grund der Voraussetzung damit auch $\mathrm{Tot}_k(M,M) = \mathrm{End}_R(M)$; wegen $0 \neq M \in k$ ist aber 1_M kein Element von $\mathrm{Tot}_k(M,M)$, also Widerspruch .
(ii) $\Longleftarrow$ (i) : Jeder R-Rechtsmodul $\neq 0$ aus k besitze einen direkten Summanden $\neq 0$ aus k';
seien A,B R-Rechtsmoduln ;
angenommen $\mathrm{Tot}_k(A,B) \not\supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$,
dann gibt es α mit $\alpha \in \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ und $\alpha \notin \mathrm{Tot}_k(A,B)$; folglich existieren direkte Summanden $0 \neq A_0$ von A und B_0 von B mit $A_0 \in k$, $B_0 \in k$ und $\alpha(A_0) \subset B_0$, so daß $A_0 \ni x \longmapsto \alpha(x) \in B_0$ isomorph ist ;
nach Voraussetzung besitzt A_0 einen direkten Summanden $0 \neq A_1$ aus k';
$A_1 \ni x \longmapsto \alpha(x) \in \alpha(A_1)$ ist isomorph, im Widerspruch zu $\alpha \in \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$.

Beweis von b):
Folgt aus a) .

Beweis von c):
(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) : Nach a) .
(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Klar.
(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Wegen $k \supset k'$ gilt von vornherein für alle R-Rechtsmoduln A,B $\mathrm{Tot}_k(A,B) \subset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$.

Beweis von d):
Folgt aus c) und a) .

Wir verschärfen unsere bisherige (im Anschluß an 1.2 formulierte) Fragestellung:

$\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ sei Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln. Gibt es eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset I(A,B)$ oder $\mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$ für alle $A,B \in \mathfrak{M}_R$?

Dabei soll eine Klasse k von R-Rechtsmoduln als dS-Klasse bezeichnet werden , wenn für jedes $M \in k$ nicht nur jeder zu M isomorphe R-Rechtsmodul , sondern auch jeder direkte Summand $\neq 0$ von M Element von k ist.

Für Halbideale $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ und $\{J(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ sei

$$k_{JI} := \{M \in \mathfrak{M}_R \mid J(M,M) \supset I(M,M)\} .$$

<u>1.5 Lemma</u>

k_{JI} ist eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln.

Beweis:

a) Es wird nachgewiesen , daß für jedes $M \in k_{JI}$ auch jeder zu M isomorphe R-Rechtsmodul Element von k_{JI} ist :
   sei also $M \in k_{JI}$, N weiterer R-Rechtsmodul und α Isomorphismus von M nach N ; dann ist wegen der Halbidealeigenschaft $\alpha I(M,M)\alpha^{-1} = I(N,N)$ und $\alpha J(M,M)\alpha^{-1} = J(N,N)$; aus $J(M,M) \supset I(M,M)$ folgt $J(N,N) \supset I(N,N)$, d.h. $N \in k_{JI}$.
b) Es wird nachgewiesen , daß für jedes $M \in k_{JI}$ auch jeder direkte Summand $\neq 0$ von M Element von k_{JI} ist :
   sei also $M \in k_{JI}$ und $A \neq 0$ direkter Summand von M ; sei ι die Inklusion von A in M und π Projektion von M auf den direkten Summanden A ;
   angenommen $A \notin k_{JI}$,
   dann gibt es α mit $\alpha \in I(A,A)$ und $\alpha \notin J(A,A)$; wegen der Halbidealeigenschaft ist $\iota\alpha\pi$ Element von $I(M,M)$ und auf Grund von $M \in k_{JI}$ damit auch von $J(M,M)$; aus $\alpha = \pi\iota\alpha\pi\iota$ und der Halbidealeigenschaft folgt $\alpha \in J(A,A)$, also Widerspruch .

Wir schreiben im Falle $\{J(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\} = \{\mathrm{Tot}(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ anstelle von $k_{\mathrm{Tot}I}$ kürzer k_I .

Für ein Halbideal $\{I(A,B) | A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ ist also

$$k_I = \{M \in \mathfrak{M}_R \mid Tot(M,M) \supset I(M,M)\} .$$

1.6 Lemma

Für jede Klasse k von R-Rechtsmoduln , die Teilklasse von k_I ist , gilt $Tot_k(A,B) \supset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

Beweis:
Sei also k eine Teilklasse von k_I und seien A,B R-Rechtsmoduln ; angenommen $Tot_k(A,B) \not\supset I(A,B)$,
dann gibt es α mit $\alpha \in I(A,B)$ und $\alpha \notin Tot_k(A,B)$; dann existieren direkte Summanden $0 \neq A_o$ von A und B_o von B mit $A_o \in k$, $B_o \in k$ und $\alpha(A_o) \subset B_o$, so daß $\bar{\alpha}: A_o \ni x \longmapsto \alpha(x) \in B_o$ isomorph ist ; seien ι die Inklusion von A_o in A und π Projektion von B auf den direkten Summanden B_o ; wegen $1_{A_o} = \bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{-1}\pi\alpha\iota$ und der Halbidealeigenschaft ist 1_{A_o} Element von $I(A_o,A_o)$ und müßte es auf Grund von $A_o \in k_I$ damit auch von $Tot(A_o,A_o)$ sein , im Widerspruch zu $1_{A_o} \notin Tot(A_o,A_o)$.

1.7 Lemma

Zum Halbideal $\{I(A,B) | A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ gebe es eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $Tot_k(A,B) \supset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B ; dann ist k eine Teilklasse von k_I .

Beweis:
Sei $M \in k$;
da k eine dS-Klasse ist , ist $Tot_k(M,M) = Tot(M,M)$; nach Voraussetzung gilt $Tot_k(M,M) \supset I(M,M)$; es folgt also $Tot(M,M) \supset I(M,M)$, d.h. $M \in k_I$.

1.8 Satz

Sei $\{I(A,B) | A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln und sei k eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln .

Genau dann gilt $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B , wenn k eine Teilklasse von k_I ist.

Insbesondere ist also k_I die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

Beweis:
Folgt aus 1.5 , 1.6 , 1.7 .

<u>1.9 Beispiel</u>

Sei k' eine Klasse von R-Rechtsmoduln und $I(A,B) := \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für R-Rechtsmoduln A,B ; sei

$$k'_{dg} := k_I = \{M \in \mathfrak{M}_R \mid \mathrm{Tot}(M,M) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(M,M)\} =$$

$$= \{M \in \mathfrak{M}_R \mid \mathrm{Tot}(M,M) = \mathrm{Tot}_{k'}(M,M)\} .$$

a) Die Klasse k'_{dg} kann wie folgt gekennzeichnet werden :

$$k'_{dg} = \{M \in \mathfrak{M}_R \mid \text{jeder direkte Summand} \neq 0 \text{ von } M \text{ besitzt einen direkten Summanden} \neq 0 \text{ aus } k'\} .$$

k'_{dg} ist eine Teilklasse der in 1.4 behandelten Klasse k'_g . An der soeben angegebenen Kennzeichnung von k'_{dg} ist dies auf den ersten Blick zu erkennen.

b) Nach 1.4 gilt für jede Klasse k von R-Rechtsmoduln , die Teilklasse von k'_g ist , $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .
Nach 1.8 ist k'_{dg} die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

c) k'_{dg} braucht keine Oberklasse von k' zu sein .
Ist allerdings k' insbesondere eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln , so ist k'_{dg} Oberklasse von k'.

d) Ist k' insbesondere eine dS-Klasse , so gilt nach 1.4 für jede Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $k' \subset k \subset k'_g$ und damit erst recht für jede Klasse k mit $k' \subset k \subset k'_{dg}$ $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

k'_{dg} ist in diesem Fall nach 1.8 die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $Tot_k(A,B) = Tot_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B.

Beweis von a):
" $\subset$ " : Sei $M \in k'_{dg}$, d.h. $Tot(M,M) \supset Tot_{k'}(M,M)$; sei weiterhin $A \neq 0$ direkter Summand von M ;

angenommen A besitzt keinen direkten Summanden $\neq 0$ aus k',

dann ist $Tot_{k'}(A,A) = End_R(A)$; k'_{dg} ist nach 1.5 dS-Klasse, so daß mit M auch A Element von k'_{dg} ist, d.h. $Tot(A,A) \supset Tot_{k'}(A,A)$; es folgt $Tot(A,A) = End_R(A)$, im Widerspruch zu $1_A \notin Tot(A,A)$.

" $\supset$ " : Sei M R-Rechtsmodul und jeder direkte Summand $\neq 0$ von M besitze einen direkten Summanden $\neq 0$ aus k' ;

angenommen $M \notin k'_{dg}$,

dann gibt es α mit $\alpha \in Tot_{k'}(M,M)$ und $\alpha \notin Tot(M,M)$; folglich existieren direkte Summanden $0 \neq A$ und B von M , so daß $A \ni x \longmapsto \alpha(x) \in B$ isomorph ist ; A besitzt einen direkten Summanden $A_0 \neq 0$ aus k' ; $A_0 \ni x \longmapsto \alpha(x) \in \alpha(A_0)$ ist isomorph , im Widerspruch zu $\alpha \in Tot_{k'}(M,M)$.

"Beweis" von c):
Sei R = Z , d.h. der Ring der ganzen Zahlen ; sei weiterhin $F := Z_2 \times Z_2$ mit $Z_2 := Z/2Z$;

dann ist $k' := \{M \in \mathfrak{M}_Z \mid M_Z \cong F_Z\}$ eine Klasse von Z-Rechtsmoduln, allerdings keine dS-Klasse .

F ist Element von k' ; da der direkt unzerlegbare direkte Summand Z_2 von F nicht zu F isomorph ist , kann F nach der Kennzeichnung von k'_{dg} in a) kein Element von k'_{dg} sein, d.h. k'_{dg} ist keine Oberklasse von k'.

Ist k' jedoch eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln, so ist k'_{dg} nach 1.7 Oberklasse von k'.

Der Übersichtlichkeit halber sollen die wesentlichen Erkenntnisse der Beispiele 1.4 und 1.9 nochmals in einem Satz zusammengefaßt werden.

1.10 Satz

Sei k' eine Klasse von R-Rechtsmoduln ;

seien dazu k'_g und k'_{dg} wie in 1.4 bzw. 1.9 (k' und k'_{dg} sind Teilklassen von k'_g) ;

dann gilt :

a) Für jede Klasse k von R-Rechtsmoduln , die Teilklasse von k'_g ist , gilt $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B. k'_g ist die größte Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B. k'_{dg} ist die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

b) Für jede Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $k' \subset k \subset k'_g$ gilt $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B . k'_g ist die größte Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .
Ist k' insbesondere eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln , so gilt $k' \subset k'_{dg} \subset k'_g$ und k'_{dg} ist die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

Wir knüpfen an den letzten Satz in 1.10 b) an. Gibt es für den Fall, daß k' keine dS-Klasse ist , auch eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B ?

Wir gehen der allgemeineren Fragestellung nach :

$\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ sei Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln. Gibt es eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $Tot_k(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B ?

Es ist klar , daß man nur dann eine positive Antwort erwarten kann , wenn man für das Halbideal fordert , daß $I(A,B) \supset Tot(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B gilt ; dies wird im folgenden stets stillschweigend getan.

Für Halbideale $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ und $\{J(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ sei

$$k(JI) := \{M \in \mathfrak{M}_R \mid J(M,M) = I(M,M)\} .$$

<u>1.11 Lemma</u>

k(JI) ist eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln .

Beweis:
Identisch mit dem Beweis von 1.5 ; im Beweis von 1.5 sind lediglich jeweils die Bezeichnung k_{JI} durch die Bezeichnung k(Jl) und die "$\supset$"-Zeichen durch Gleichheitszeichen zu ersetzen .

Wir schreiben im Falle $\{J(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\} = \{Tot(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ anstelle von k(TotI) kürzer k(I).
Für ein Halbideal $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ ist also

$$k(I) = \{M \in \mathfrak{M}_R \mid Tot(M,M) = I(M,M)\} .$$

Zum Vergleich :

$$k_I = \{M \in \mathfrak{M}_R \mid Tot(M,M) \supset I(M,M)\} .$$

k(l) ist eine Teilklasse von k_I . Ist k' eine Klasse von R-Rechtsmoduln und $I(A,B) := Tot_{k'}(A,B)$, so stimmen k(I) und k_I überein ; wir haben für $k(I) = k_I$ die spezielle Bezeichnung k'_{dg} eingeführt .

Wir betrachten weiterhin ein beliebiges Halbideal $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln . Aus der Tatsache , daß k(I) eine Teilklasse von k_I ist , folgt mit 1.6 unmittelbar:

1.12 Lemma

a) Für jede Klasse k von R-Rechtsmoduln, die Teilklasse von k(I) ist, gilt $\mathrm{Tot}_k(A,B) \supset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B.

b) Für eine Klasse k von R-Rechtsmoduln, die Teilklasse von k(I) ist, sind äquivalent :

(i) $\forall$ R-Rechtsmoduln A,B $\quad \mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$

(ii) $\forall$ R-Rechtsmoduln A,B $\quad \mathrm{Tot}_k(A,B) \subset I(A,B)$.

1.13 Lemma

Zum Halbideal $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ gebe es eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B;

dann ist k eine Teilklasse von k(I).

Beweis:
Identisch mit dem Beweis von 1.7 ; im Beweis von 1.7 sind lediglich die "$\supset$"-Zeichen durch Gleichheitszeichen und die Bezeichnung k_I durch die Bezeichnung k(I) zu ersetzen.

1.14 Satz

Sei $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln ; dann sind äquivalent :

(i) $\exists$ dS-Klasse k (von R-Rechtsmoduln) $\forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad \mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$

(ii) $\exists$ dS-Klasse $k \subset k(I) \quad \forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad \mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$

(iii) $\exists$ dS-Klasse $k \subset k(I) \quad \forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad \mathrm{Tot}_k(A,B) \subset I(A,B)$

(iv) $\forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad \mathrm{Tot}_{k(I)}(A,B) \subset I(A,B)$

(v) $\forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad \mathrm{Tot}_{k(I)}(A,B) = I(A,B)$.

Ist eine (und damit alle) der Bedingungen erfüllt, so ist k(I) die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B.

Beweis:
(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Nach 1.13 .
(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Klar.
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) : Nach 1.12 .
(iv) $\Longrightarrow$ (iii) : Klar .
(iv) $\Longleftrightarrow$ (v) : Nach 1.12 .
(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Es existiere also eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln , die Teilklasse von k(I) ist , mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) \subset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B ; wegen $k \subset k(I)$ gilt $\mathrm{Tot}_{k(I)}(A,B) \subset \mathrm{Tot}_k(A,B)$ und folglich $\mathrm{Tot}_{k(I)}(A,B) \subset \mathrm{Tot}_k(A,B) \subset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

Ist eine (und damit alle) der Bedingungen erfüllt , so gilt nach (v) $\mathrm{Tot}_{k(I)}(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B und nach 1.11 ist k(I) dS-Klasse . Ist k eine weitere dS-Klasse von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B , so ist k nach 1.13 Teilklasse von k(I) .

Hat man also ein Halbideal $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ vorgegeben (es sei nochmals explizit auf die sinnvolle Forderung $I(A,B) \supset \mathrm{Tot}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B hingewiesen) und hat zu entscheiden , ob es eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B gibt , so hat man zu überprüfen , ob $\mathrm{Tot}_{k(I)}(A,B) \subset I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln gilt. Diese Überprüfung reduziert sich nach 1.3 dahingehend , daß man nur zu testen hat , ob $\mathrm{Tot}_{k(I)}(M,M) \subset I(M,M)$ für alle R-Rechtsmoduln M gilt.

Im folgenden Punkt 1.16 wird ein Beispiel für ein Halbideal $\{I(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ mit $I(A,B) \supset \mathrm{Tot}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B angegeben , für das es keine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = I(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B gibt. Damit wird auch die im Anschluß an 1.10 gestellte Frage beantwortet, ob es zu einer Klasse k' von R-Rechtsmoduln , die keine dS-Klasse ist , stets eine dS-Klasse k mit $\mathrm{Tot}_k(A,B) = \mathrm{Tot}_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B gibt.

1.15 Beispiel

a) Sei k' eine Klasse von R-Rechtsmoduln und sei $I(A,B) :=$ $Tot_{k'}(A,B)$ für R-Rechtsmoduln A,B ;
dann ist $k(I) = k_I = k'_{dg}$ wie in 1.9 .

Nach 1.14 sind äquivalent :

(i) $\exists$ dS-Klasse k $\forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad Tot_k(A,B) = Tot_{k'}(A,B)$

(ii) $\forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad Tot_{k'_{dg}}(A,B) = Tot_{k'}(A,B)$

(iii) $\forall A,B \in \mathfrak{M}_R \quad Tot_{k'_{dg}}(A,B) \subset Tot_{k'}(A,B)$.

Ist eine (und damit alle) der Bedingungen erfüllt , so ist nach 1.14 k'_{dg} die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln mit $Tot_k(A,B) = Tot_{k'}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B .

b) Seien R = Z , $F := Z_2 \times Z_2$ mit $Z_2 := Z/2Z$ und die Klasse $k' = \{M \in \mathfrak{M}_Z \mid M_Z \cong F_Z\}$ wie im "Beweis" von 1.9 c) ;

Z_2 und F selbst sind bis auf Isomorphie die einzigen direkten Summanden $\neq 0$ von F_Z . Da Z_2 direkt unzerlegbar ist und nicht zu F isomorph ist , ist nach der Kennzeichnung von k'_{dg} in 1.9 a) weder Z_2 noch F Element von k'_{dg} . Folglich ist $Tot_{k'_{dg}}(F,F) = End_Z(F)$.

Hingegen ist $Tot_{k'}(F,F) = \{\alpha \in End_Z(F) \mid \alpha \text{ nicht isomorph}\}$

und damit $Tot_{k'_{dg}}(F,F) \not\subset Tot_{k'}(F,F)$.

Es gibt demnach keine dS-Klasse k von Z - Rechtsmoduln mit $Tot_k(A,B) = Tot_{k'}(A,B)$ für alle Z-Rechtsmoduln A,B .

II. TOTALE MODULN

Sei R ein Ring mit Eins und $\mathfrak{M}_R$ die Kategorie der R-Rechtsmoduln.

2.1 Definition

Ein R-Rechtsmodul M heiße total, wenn Tot(M,M) additiv abgeschlossen ist.

2.2 Bemerkungen und Beispiele

a) Ist M totaler R-Rechtsmodul, so ist Tot(M,M) zweiseitiges Ideal in $\mathrm{End}_R(M)$.

Beweis:
Nach 1.2 ist $\{\mathrm{Tot}(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln.

b) Ist M totaler R-Rechtsmodul, so auch jeder zu M isomorphe R-Rechtsmodul.

Beweis:
Sei also M totaler R-Rechtsmodul, N weiterer R-Rechtsmodul und α Isomorphismus von M nach N; wegen der in 1.2 nachgewiesenen Halbidealeigenschaft gilt $\mathrm{Tot}(N,N) = \alpha \mathrm{Tot}(M,M)\alpha^{-1}$; da Tot(M,M) additiv abgeschlossen ist, ist es folglich auch Tot(N,N).

c) Ein direkt unzerlegbarer R-Rechtsmodul M ist genau dann total, wenn er LE-Modul ist, d.h. wenn $\mathrm{End}_R(M)$ lokaler Ring ist.

Beweis:
In einem direkt unzerlegbaren R-Rechtsmodul M ist $\mathrm{Tot}(M,M) = \{\alpha \in \mathrm{End}_R(M) \mid \alpha \text{ nicht automorph}\}$; die Menge der Nichteinheiten in $\mathrm{End}_R(M)$ ist genau dann additiv abgeschlossen, wenn $\mathrm{End}_R(M)$ lokaler Ring ist.

Die direkt unzerlegbaren totalen R-Rechtsmoduln sind also die LE-Moduln. Für den Ring Z der ganzen Zahlen ist beispielsweise Z_Z direkt unzerlegbar, aber kein LE-Modul. Z_Z ist also ein Beispiel für einen nicht totalen Rechtsmodul.

Es stellt sich die Frage nach weiteren Beispielen für totale Rechtsmoduln , insbesondere nach solchen , die nicht direkt unzerlegbar sind . In 2. 9 werden derartige Beispiele angegeben.

Zunächst aber sollen die totalen Rechtsmoduln durch eine geeignete Form von Austauscheigenschaft charakterisiert werden .

Wir benötigen die Aussage des folgenden Lemmas :

Nach 2.2 b) bilden die totalen R-Rechtsmoduln eine Klasse von R-Rechtsmoduln , die wir k_t nennen wollen .

2.3 Lemma

k_t ist insbesondere eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln , d.h. jeder direkte Summand $\neq 0$ eines totalen R-Rechtsmoduls ist total .

Beweis:
Sei also M totaler R-Rechtsmodul und $A \neq 0$ direkter Summand von M ; seien weiterhin $f,g \in Tot(A,A)$;
wir weisen $f + g \in Tot(A,A)$ nach :
Ist ι die Inklusion von A in M und π Projektion von M auf den direkten Summanden A , so ist nach 1.2 $\iota f \pi \in Tot(M,M)$ und ebenso $\iota g \pi \in Tot(M,M)$; da Tot(M,M) additiv abgeschlossen ist , folgt $\iota(f + g)\pi = \iota f \pi + \iota g \pi \in Tot(M,M)$; damit ergibt sich nach 1 . 2 $f + g = \pi\iota(f + g)\pi\iota \in Tot(A,A)$.

Die beabsichtigte Charakterisierung der totalen Rechtsmoduln durch eine geeignete Form von Austauscheigenschaft wird durch ein Ergebnis von Warfield motiviert. Ein direkt unzerlegbarer Rechtsmodul ist genau dann LE-Modul , also total , wenn er die 2-Austauscheigenschaft besitzt ([10] Prop. 1 ; [2] Def. 3.1 und L. 5.1) . Wir streben eine vergleichbare Charakterisierung an , bei der jedoch nicht die direkte Unzerlegbarkeit vorausgesetzt werden muß .

2.4 Definition

Sei M R-Rechtsmodul .

a) Zunächst soll die auf Crawley und Jonsson zurückgehende Definition der 2-Austauscheigenschaft angegeben werden ([2] Def. 3.1) :

M hat die 2-Austauscheigenschaft (kurz 2-ATE) $:\Longleftrightarrow$

für jede Situation $A_R = M' \oplus N = C \oplus D$, wobei $M' \cong M$, gibt es Untermoduln C' von C und D' von D mit $A = M' \oplus C' \oplus D'$.

b) Neu eingeführt wird die folgende Definition :

M hat die d2-Austauscheigenschaft (kurz d2-ATE) $:\Longleftrightarrow$

für jeden direkten Summanden $\overline{M} \neq 0$ von M und für jede Situation $A_R = \overline{M}' \oplus N = C \oplus D$, wobei $\overline{M}' \cong \overline{M}$, gilt : es gibt Untermoduln $M_1' \neq 0$ von $\overline{M}'$ und C' von C mit $A = M_1' \oplus C' \oplus D$ oder Untermoduln $M_2' \neq 0$ von $\overline{M}'$ und D' von D mit $A = M_2' \oplus C \oplus D'$.

Unmittelbar aus der Definition folgt :

2.5 Bemerkung

Hat ein R-Rechtsmodul M die d2-ATE , so auch jeder zu M isomorphe R-Rechtsmodul und jeder direkte Summand von M.

Die R-Rechtsmoduln , die die d2-ATE besitzen , bilden also eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln. Wir zeigen, daß sie mit der Klasse k_t der totalen R-Rechtsmoduln identisch ist und erhalten damit die angestrebte Charakterisierung der totalen Rechtsmoduln. Wir brauchen den folgenden wichtigen Hilfssatz.

2.6 Hilfssatz

Die Anregungen zu diesem Hilfssatz gehen auf [10] Prop. 1 und [6] Satz 2.3.1. zurück.

Sei M R-Rechtsmodul und $f \in \mathrm{End}_R(M)$; $g := 1_M - f$;
dann besitzt der R-Rechtsmodul $M \times M$ die direkten Zerlegungen

$$M \times M = M_1 \oplus M_2 = C_f \oplus D$$

mit $M_1 = \{(x,0) \mid x \in M\}$, $M_2 = \{(0,x) \mid x \in M\}$, $D = \{(x,x) \mid x \in M\}$
und $C_f = \{(f(x),-g(x)) \mid x \in M\}$.

Die Zerlegung von $(x,y) \in M \times M$ in $C_f \oplus D$ lautet
$(x,y) = (f(x-y),-g(x-y)) + (x - f(x-y), x - f(x-y))$.

Wichtige Isomorphismen :
$M \cong M_1$ via $\eta_1 : M \ni x \longmapsto (x,0) \in M_1$
$M \cong M_2$ via $\eta_2 : M \ni x \longmapsto (0,x) \in M_2$
$M \cong D$ via $\phi : M \ni x \longmapsto (x,x) \in D$
$M \cong C_f$ via $\varphi_f : M \ni x \longmapsto (f(x),-g(x)) \in C_f$.

Nun zu den eigentlichen Aussagen des Hilfssatzes :

a) Sei π_f die Projektion von $M \times M = C_f \oplus D$ auf den Summanden D ;
dann ist

$$\phi^{-1}\pi_f\big|_{M_2}\eta_2 = f \quad \text{und} \quad \phi^{-1}\pi_f\big|_{M_1}\eta_1 = g \ .$$

b) Gibt es Untermoduln M_1' von M_1 und M_2' von M_2 mit $M \times M =$
$= C_f \oplus M_1' \oplus M_2'$, so gilt im Falle $M_2' \neq 0$ $f \notin \mathrm{Tot}(M,M)$,
im Falle $M_1' \neq 0$ $g \notin \mathrm{Tot}(M,M)$.

c) Sei $C_f = C_f' \oplus C_f''$ und t_f die Projektion von $M \times M = C_f' \oplus C_f'' \oplus D$
auf den Summanden $C_f'' \oplus D$;
sei $\widetilde{M} := \varphi_f^{-1}(C_f')$, $\widetilde{M}_1 := \eta_1(\widetilde{M})$, $\widetilde{M}_2 := \eta_2(\widetilde{M})$;
dann ist

$$t_f(\widetilde{M}_1) \subset D \ \text{ und } \ t_f(\widetilde{M}_2) \subset D$$

und es gilt

$$\phi^{-1} t_f\Big|_{\widetilde{M}_2}^{D} \eta_2\Big|_{\widetilde{M}}^{\widetilde{M}_2} = f\big|_{\widetilde{M}} \quad \text{und} \quad \phi^{-1} t_f\Big|_{\widetilde{M}_1}^{D} \eta_1\Big|_{\widetilde{M}}^{\widetilde{M}_1} = g\big|_{\widetilde{M}} \ .$$

d) Gibt es Untermoduln $C_f' \neq 0$ von C_f und M_1' von M_1 mit $M \times M = C_f' \oplus M_1' \oplus M_2$, so ist $f \notin \mathrm{Tot}(M,M)$.
Gibt es Untermoduln $C_f' \neq 0$ von C_f und M_2' von M_2 mit $M \times M = C_f' \oplus M_1 \oplus M_2'$, so ist $g \notin \mathrm{Tot}(M,M)$.

Beweis von a):
Die Zerlegung von $(x,0) \in M_1$ in $C_f \oplus D$ lautet
$(x,0) = (f(x),-g(x)) + (x - f(x), x - f(x))$, d.h. $\pi_f(x,0) =$
$= (x - f(x), x - f(x)) = (g(x),g(x))$ für alle $(x,0) \in M_1$;
also $\phi^{-1}\pi_f|_{M_1}\eta_1 = g$.
Die Zerlegung von $(0,x) \in M_2$ in $C_f \oplus D$ lautet
$(0,x) = (f(-x),-g(-x)) + (f(x),f(x))$, d.h. $\pi_f(0,x) = (f(x),f(x))$ für alle $(0,x) \in M_2$; also $\phi^{-1}\pi_f|_{M_2}\eta_2 = f$.

Beweis von b):
Es gebe also Untermoduln M_1' von M_1 und M_2' von M_2 mit $M \times M =$
$= C_f \oplus M_1' \oplus M_2'$;
dann ist $\pi_f|_{M_1' \oplus M_2'}$ Isomorphismus und $\pi_f|_{M_1'}$ und $\pi_f|_{M_2'}$ sind zerfallende Monomorphismen;
seien $N := \eta_1^{-1}(M_1')$ und $L := \eta_2^{-1}(M_2')$; N und L sind direkte Summanden von M;
nach a) ist $\phi^{-1}\pi_f|_{M_1'}\eta_1|_N^{M_1'} = g|_N$ und $\phi^{-1}\pi_f|_{M_2'}\eta_2|_L^{M_2'} = f|_L$;
$g|_N$ und $f|_L$ sind damit zerfallende Monomorphismen.
Ist $M_1' \neq 0$, so ist auch $N \neq 0$ und damit ist g kein Element von $\mathrm{Tot}(M,M)$; ist $M_2' \neq 0$, so ist auch $L \neq 0$ und damit ist f kein Element von $\mathrm{Tot}(M,M)$.

Beweis von c):
Sei $(x,0) \in \widetilde{M}_1$; dann ist $(f(x),-g(x)) \in C_f'$; die Zerlegung von $(x,0)$ in $C_f' \oplus C_f'' \oplus D$ lautet $(x,0) = (f(x),-g(x)) + (g(x),g(x))$;
$t_f(x,0) = (g(x),g(x)) \in D$.
Man hat also $\phi^{-1}\pi_f|_{\widetilde{M}_1}^{D}\eta_1|_{\widetilde{M}}^{\widetilde{M}_1} = g|_{\widetilde{M}}$.

Sei $(0,x) \in \widetilde{M}_2$; dann ist $\varphi_f(-x) = (f(-x),-g(-x)) \in C_f'$; die Zerlegung von $(0,x)$ in $C_f' \oplus C_f'' \oplus D$ lautet $(0,x) = (f(-x),-g(-x)) + (f(x),f(x))$; $t_f(0,x) = (f(x),f(x)) \in D$.
Man hat also $\phi^{-1}\pi_f\Big|_{\widetilde{M}_2}^{D} \eta_2\Big|_{\widetilde{M}}^{\widetilde{M}_2} = f|_{\widetilde{M}}$.

Beweis von d):
Es gebe also Untermoduln $C_f' \neq 0$ von C_f und M_1' von M_1 mit $M \times M = C_f' \oplus M_1' \oplus M_2$;
dann ist $C_f = C_f' \oplus C_f''$ mit $C_f'' := C_f \cap (M_1' \oplus M_2)$;
sei wie in c) t_f die Projektion von $M \times M = C_f' \oplus C_f'' \oplus D$ auf den Summanden $C_f'' \oplus D$; ebenso seien $\widetilde{M}$ und $\widetilde{M}_2$ wie in c) : $\widetilde{M}$ ist direkter Summand von M und $\widetilde{M}_2$ direkter Summand von M_2 ;
$t_f|_{M_1' \oplus M_2}$ ist Isomorphismus und $t_f|_{\widetilde{M}_2}$ damit zerfallender Monomorphismus ;
nach c) ist $t_f(\widetilde{M}_2) \subset D$ und $\phi^{-1}t_f\Big|_{\widetilde{M}_2}^{D} \eta_2\Big|_{\widetilde{M}}^{\widetilde{M}_2} = f|_{\widetilde{M}}$; demnach ist $f|_{\widetilde{M}}$ zerfallender Monomorphismus ;
wegen $C_f' \neq 0$ ist $\widetilde{M}$ ein von Null verschiedener direkter Summand von M und folglich f kein Element von $\mathrm{Tot}(M,M)$.

Gibt es Untermoduln $C_f' \neq 0$ von C_f und M_2' von M_2 mit $M \times M = C_f' \oplus M_1 \oplus M_2'$, so folgt mit den Bezeichnungen aus c), daß $t_f|_{\widetilde{M}_1}$ zerfallender Monomorphismus ist , was nach c) $g \notin \mathrm{Tot}(M,M)$ zur Folge hat.

2.7 Satz

Für einen R-Rechtsmodul M sind äquivalent :

(i) M hat die d2-ATE

(ii) Für jeden direkten Summanden $\overline{M} \neq 0$ von M und für jede Situation $A_R = \overline{M}' \oplus N = C \oplus D$, wobei $\overline{M}' \cong \overline{M}$, $N \cong \overline{M}$, $C \cong \overline{M}$ und $D \cong \overline{M}$, gilt :

es gibt Untermoduln $M_1' \neq 0$ von $\overline{M}'$ und C' von C mit $A = M_1' \oplus C' \oplus D$ oder Untermoduln $M_2' \neq 0$ von $\overline{M}'$ und D' von D mit $A = M_2' \oplus C \oplus D'$

(iii) M ist total

(iv) Jeder direkte Summand $\neq 0$ vo
direkten Summanden $\neq 0$.

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Klar .

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : M habe also die in (ii) beschriebene Eigenschaft; seien $\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M)$, $\beta \in \mathrm{Tot}(M,M)$; es ist $\alpha + \beta \in \mathrm{Tot}(M,M)$ zu zeigen:

Angenommen $\alpha + \beta \notin \mathrm{Tot}(M,M)$,

dann gibt es direkte Summanden $0 \neq \hat{M}$ und $\overline{M}$ von M mit $(\alpha + \beta)(\hat{M}) \subset \overline{M}$, so daß $\overline{\alpha+\beta} : \hat{M} \ni x \longmapsto (\alpha + \beta)(x) \in \overline{M}$ isomorph ist;

sei $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(\hat{M},\overline{M})$ der inverse Isomorphismus , ι die Inklusion von $\hat{M}$ in M und π Projektion von M auf den direkten Summanden $\overline{M}$;

es ist $\overline{\alpha+\beta} = \pi(\alpha + \beta)\iota = \pi\alpha\iota + \pi\beta\iota$ und folglich $\gamma\,\overline{\alpha+\beta} =$
$= \gamma\pi\alpha\iota + \gamma\pi\beta\iota = 1_{\hat{M}}$;

wir setzen $f := \gamma\pi\alpha\iota$ und $g := \gamma\pi\beta\iota = 1_{\hat{M}} - f$;

wir betrachten wie in Hilfssatz 2.6 (mit $\hat{M}$ in der Rolle des dortigen M) den R-Rechtsmodul

$$\hat{M} \times \hat{M} = M_1 \oplus M_2 = C_f \oplus D \ ;$$

nach 2.6 ist $M_1 \cong \hat{M}$, $M_2 \cong \hat{M}$, $C_f \cong \hat{M}$, $D \cong \hat{M}$; nach Voraussetzung gibt es Untermoduln $C_f' \neq 0$ von C_f und M_1' von M_1 mit $\hat{M} \times \hat{M} =$
$= C_f' \oplus M_1' \oplus M_2$ oder Untermoduln $C_f' \neq 0$ von C_f und M_2' von M_2 mit $\hat{M} \times \hat{M} = C_f' \oplus M_1 \oplus M_2'$;

nach 2.6 d) folgt $f \notin \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$ oder $g \notin \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$;

nach 1.2 gilt aber wegen $\alpha,\beta \in \mathrm{Tot}(M,M)$ sowohl $f = \gamma\pi\alpha\iota \in \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$ als auch $g = \gamma\pi\beta\iota \in \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$, also Widerspruch .

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Ist M total , so ist nach 2.3 auch jeder von Null verschiedene direkte Summand von M total .

(iv)$\Longrightarrow$(i) : Jeder direkte Summand $\neq 0$ von M besitze also einen totalen direkten Summanden $\neq 0$;
sei $\overline{M} \neq 0$ direkter Summand von M und $A_R = \overline{M}' \oplus N = C \oplus D$, wobei $\overline{M}' \cong \overline{M}$;
es ist nachzuweisen:
es gibt Untermoduln $M_1' \neq 0$ von $\overline{M}'$ und C' von C mit $A = M_1' \oplus C' \oplus D$ oder Untermoduln $M_2' \neq 0$ von $\overline{M}'$ und D' von D mit $A = M_2' \oplus C \oplus D'$.

Nach Voraussetzung besitzt $\overline{M}'$ einen totalen direkten Summanden $\overline{M}'' \neq 0$; $\overline{M}' = \overline{M}'' \oplus L$;

seien ι die Inklusion von $\overline{M}''$ in A , π die Projektion von $A = \overline{M}'' \oplus L \oplus N$ auf $\overline{M}''$ und e_C bzw. e_D der Projektor von $A = C \oplus D$ auf den Summanden C bzw. D ;

aus $1_A = e_C + e_D$ folgt $1_{\overline{M}''} = \pi\iota = \pi 1_A \iota = \pi e_C \iota + \pi e_D \iota$;

$1_{\overline{M}''}$ ist kein Element von $\mathrm{Tot}(\overline{M}'',\overline{M}'')$; da $\overline{M}''$ total ist , folgt $\pi e_C \iota \notin \mathrm{Tot}(\overline{M}'',\overline{M}'')$ oder $\pi e_D \iota \notin \mathrm{Tot}(\overline{M}'',\overline{M}'')$.

1. Möglichkeit: $\pi e_C \iota \notin \mathrm{Tot}(\overline{M}'',\overline{M}'')$.

Dann gibt es direkte Summanden $M_1' \neq 0$ und M_1'' von $\overline{M}''$ mit $\pi e_C \iota(M_1') \subset M_1''$, so daß $\overline{\pi e_C \iota} : M_1' \ni x \longmapsto \overline{\pi e_C \iota}(x) \in M_1''$ isomorph ist ;

sei $\overline{M}'' = M_1'' \oplus P$ und t die Projektion von $\overline{M}'' = M_1'' \oplus P$ auf M_1''; dann ist $t\pi$ die Projektion von $A = M_1'' \oplus P \oplus L \oplus N$ auf M_1'' ;

es ist $\overline{\pi e_C \iota} = t\pi e_C \iota \big|_{M_1'}$ und folglich

$$A = M_1' \oplus \mathrm{Ker}(t\pi e_C) = M_1' \oplus D \oplus (\mathrm{Ker}(t\pi) \cap C) ,$$

mit $C' := \mathrm{Ker}(t\pi) \cap C$ also $A = M_1' \oplus C' \oplus D$.

2. Möglichkeit: $\pi e_D \iota \notin \mathrm{Tot}(\overline{M}'',\overline{M}'')$.

Völlig analog zur 1. Möglichkeit findet man Untermoduln $M_2' \neq 0$ von $\overline{M}'$ und D' von D mit $A = M_2' \oplus C \oplus D'$.

Aus dem im Vorfeld von 2.4 angegebenen Ergebnis von Warfield , aus 2.7 und 2.2 c) folgt :

2.8 Korollar

Für einen direkt unzerlegbaren R-Rechtsmodul M sind äquivalent :

(i) M ist total

(ii) M ist LE-Modul

(iii) M hat die 2-ATE

(iv) M hat die d2-ATE .

Der Schluß (iii)$\Longrightarrow$(i) bzw. (iii)$\Longrightarrow$(iv) gilt auch für Rechtsmoduln , die eine direkte Zerlegung besitzen: Hat ein Rechtsmodul die 2-ATE , so ist er total bzw. hat die d2-ATE . Umgekehrt braucht jedoch ein Rechtsmodul , der eine direkte Zerlegung besitzt und total ist bzw. die d2-ATE hat , nicht die 2-ATE zu haben. Dies alles wird in 2.9 und 2.14 gezeigt.
In 2.9 werden , wie bereits im Anschluß an 2.2 angekündigt , Beispiele für totale Rechtsmoduln angegeben.

2.9 Beispiele

a) Jeder R-Rechtsmodul M , der eine LE-Zerlegung besitzt (d.h. M ist direkte Summe von LE-Moduln , also von direkt unzerlegbaren totalen Untermoduln) , ist total .

b) Ein artinscher oder noetherscher R-Rechtsmodul $\neq 0$ ist genau dann total , wenn er eine endliche LE-Zerlegung besitzt.

c) Jeder R-Rechtsmodul , der die 2-ATE hat , ist total .

Beweis von a):
Jeder direkte Summand $\neq 0$ eines Moduls M , der eine LE-Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ hat, besitzt nach einem Ergebnis von Azumaya einen direkten Summanden $\neq 0$, der zu einem der M_i isomorph und damit total ist ([1] Th. 1). Nach 2.7 ist damit jeder Modul M_R , der eine LE-Zerlegung besitzt , total .

Beweis von b):
Jeder artinsche oder noethersche R-Rechtsmodul $M \neq 0$ ist endliche direkte Summe von direkt unzerlegbaren Untermoduln $M_1,\ldots,M_n$ ([5] Satz 7.2.9). Ist M total , so sind auch die M_i als direkte Summanden total , also LE-Moduln .

Umgekehrt ist nach a) jeder R-Rechtsmodul mit LE-Zerlegung total.

Beweis von c): Sei M R-Rechtsmodul und im Besitz der 2-ATE ; wie im Beweis des späteren Satzes 4.7 könnte man den Besitz der d2-ATE nachweisen, was nach 2.7 genügt ; ohne den Begriff der d2-ATE und Satz 2.7 kommt der folgende direkte Beweis aus:

Seien $\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M)$, $\beta \in \mathrm{Tot}(M,M)$; angenommen $\alpha+\beta \notin \mathrm{Tot}(M,M)$,

dann gibt es direkte Summanden $\hat{M} \neq 0$ und $\overline{M}$ von M mit $(\alpha+\beta)(\hat{M}) \subset \overline{M}$, so daß $\overline{\alpha+\beta} : \hat{M} \ni x \longmapsto (\alpha+\beta)(x) \in \overline{M}$ isomorph ist ;

seien $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(\hat{M},\overline{M})$ der inverse Isomorphismus, ι die Inklusion von $\hat{M}$ in M und π Projektion von M auf den direkten Summanden $\overline{M}$;

es ist $\overline{\alpha+\beta} = \pi(\alpha+\beta)\iota = \pi\alpha\iota + \pi\beta\iota$ und folglich ist $\gamma\,\overline{\alpha+\beta} =$
$= \gamma\pi\alpha\iota + \gamma\pi\beta\iota = 1_{\hat{M}}$;

wir setzen $f := \gamma\pi\alpha\iota$ und $g := \gamma\pi\beta\iota = 1_{\hat{M}} - f$;

wir betrachten wie in Hilfssatz 2.6 (mit $\hat{M}$ in der Rolle des dortigen M) den R-Rechtsmodul

$$\hat{M} \times \hat{M} = M_1 \oplus M_2 = C_f \oplus D ;$$

nach 2.6 ist $D \cong \hat{M}$, $C_f \cong \hat{M}$; $\hat{M}$ besitzt als direkter Summand von M die 2-ATE ; folglich gibt es Untermoduln M_1' von M_1 und M_2' von M_2 mit $\hat{M} \times \hat{M} = C_f \oplus M_1' \oplus M_2'$;

es ist $M_1' \oplus M_2' \cong D$; wegen $D \neq 0$ ist also $M_1' \neq 0$ oder $M_2' \neq 0$, so daß nach 2.6 b) $g \notin \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$ oder $f \notin \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$;

nach 1.2 gilt aber wegen $\alpha,\beta \in \mathrm{Tot}(M,M)$ sowohl $f = \gamma\pi\alpha\iota \in \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$ als auch $g = \gamma\pi\beta\iota \in \mathrm{Tot}(\hat{M},\hat{M})$, also Widerspruch.

Nach 2.9 a) ist jeder Rechtsmodul, der eine LE-Zerlegung hat, total. Für R-Rechtsmoduln A und B, die LE-Zerlegungen besitzen, soll Tot(A,B) näher untersucht werden. Anlaß ist die Tatsache, daß für Moduln, die eine LE-Zerlegung haben, bereits seit mehreren Jahren ein Total bekannt ist.

2.10 Definition

Sind A, B R-Rechtsmoduln mit LE-Zerlegungen $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ und

$B = \bigoplus_{j \in J} B_j$ und ist ι_i $(i \in I)$ die Inklusion von A_i in A bzw. π_j $(j \in J)$ die Projektion von B auf B_j , so soll die von Harada und Sai in [3] eingeführte Menge $\{\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A,B) \mid \pi_j \alpha \iota_i$ nicht isomorph für alle $i \in I, j \in J\}$ als Harada-Total von A nach B bezeichnet werden , kurz TotH(A,B) (siehe auch [6] Def. 3.2.3.) .

<u>2.11 Lemma</u> ([6] H.satz 3.2.4. und 3.2.5.)

a) TotH(A,B) ist additiv abgeschlossen .

b) Sind C,D weitere R-Rechtsmoduln mit LE-Zerlegungen $C = \bigoplus_{k \in K} C_k$ und $D = \bigoplus_{l \in L} D_l$, so ist $\mathrm{Hom}_R(B,D)\mathrm{TotH}(A,B)\mathrm{Hom}_R(C,A) \subset \mathrm{TotH}(C,D)$.

Wir wollen nun nachweisen , daß das Harada-Total und das in dieser Arbeit definierte Total identisch sind .

<u>2.12 Lemma</u>

Seien A , B R-Rechtsmoduln mit LE-Zerlegungen $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ und $B = \bigoplus_{j \in J} B_j$ und sei ι_i $(i \in I)$ die Inklusion von A_i in A bzw. π_j $(j \in J)$ die Projektion von B auf B_j ; dann ist

$$\mathrm{Tot}(A,B) = \mathrm{TotH}(A,B) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}(A,B) \mid \pi_j \alpha \iota_i \text{ nicht isomorph } \forall\, i \in I, j \in J\} .$$

Beweis:

" $\subset$ " : Sei $\alpha \in \mathrm{Tot}(A,B)$; dann ist nach 1.2 $\pi_j \alpha \iota_i \in \mathrm{Tot}(A_i,B_j)$ für alle $i \in I, j \in J$, d.h. $\pi_j \alpha \iota_i$ nicht isomorph für alle $i \in I, j \in J$.

" $\supset$ " : Sei also $\alpha \in \mathrm{TotH}(A,B)$;

angenommen α ist kein Element von Tot(A,B) ,

dann gibt es direkte Summanden $0 \neq A'$ von A und B' von B mit $\alpha(A') \subset B'$, so daß $\overline{\alpha}: A' \ni x \longmapsto \alpha(x) \in B'$ isomorph ist ;

nach einem im Beweis von 2.9 a) angegebenen Ergebnis von Azumaya besitzt A' einen direkten Summanden N , der zu einem der A_i isomorph ist , sagen wir zu A_{i_0} ;

$\hat{\alpha}: N \ni x \longmapsto \alpha(x) \in \alpha(N)$ ist isomorph ; dazu können wir jedoch einen Widerspruch konstruieren :

Sei q Isomorphismus von N nach A_{i_0} , ι die Inklusion von N in A und π Projektion von B auf den direkten Summanden $\alpha(N)$; setze $\beta := \iota q^{-1}\pi_{i_0}$;

es gibt $0 \neq x \in N$; dazu gibt es eine endliche Teilmenge J' von J mit $\pi_j \alpha\beta\iota_{i_0} q(x) = 0$ für alle $j \in J \setminus J'$; sei $J'' := J \setminus J'$ und e' bzw. e'' der Projektor von $B = (\bigoplus_{j \in J'} B_j) \oplus (\bigoplus_{j \in J''} B_j)$ auf den ersten bzw. zweiten Summanden ;

es ist $\hat{\alpha} = \pi\alpha\iota = \pi\alpha\beta\iota_{i_0} q = \pi e'\alpha\beta\iota_{i_0} q + \pi e''\alpha\beta\iota_{i_0} q$;

$\pi e''\alpha\beta\iota_{i_0} q$ ist kein Monomorphismus und daher kein Isomorphismus ;

$\pi e'\alpha\beta\iota_{i_0} q$ ist nach 2.11 wegen $\alpha \in \mathrm{TotH}(A,B)$ ebenfalls kein Isomorphismus , so daß auch $\hat{\alpha}$ als Summe zweier Nichtisomorphismen nicht isomorph sein kann. ↯

Für das Harada-Total ist eine Vielzahl von Resultaten bekannt. Im nächsten Satz fassen wir einige davon zusammen.

<u>2. 13 Satz</u> ([6] Satz 3.3.1. und Hpt.satz 4.1.3. ; [11] Th. 1)
Für einen R-Rechtsmodul M , der eine LE-Zerlegung besitzt , gilt grundsätzlich $\mathrm{Ra}(\mathrm{End}_R(M)) \subset \mathrm{Tot}(M,M)$ und genau dann stimmen $\mathrm{Ra}(\mathrm{End}_R(M))$ und $\mathrm{Tot}(M,M)$ überein , wenn M die 2-ATE besitzt .

Der Satz ermuntert uns , generell den Zusammenhang zwischen dem Totalbegriff und dem Radikalbegriff zu untersuchen; dies soll im IV. Kapitel geschehen. Zunächst einmal können wir mit Hilfe des Satzes ein Beispiel für einen totalen Rechtsmodul angeben , das nicht unter die bereits in 2.9 behandelten Beispiele fällt . Mit dem in 2.14 angegebenen Beispielmodul setzt sich auch Zöllner in ([12] 5. Some ex.) auseinander.

2.14 Beispiel

Wir lernen einen totalen Rechtsmodul kennen , der weder eine LE-Zerlegung noch die 2-ATE besitzt.

Sei k ein Körper und T ein lokaler Unterring von k ; dann sei

$$R := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in k^{\mathbb{N}} \mid \exists n_o \in \mathbb{N}, t \in T \quad \forall n \geq n_o \quad x_n = t\}.$$

Nicholson und Stock haben sich mit diesem Ringtyp beschäftigt ([7] Ex. 1.7 ; [8] Bsp. 1.18) . R ist kommutativ , Austauschring (d.h. R_R hat die 2-ATE) , nicht regulär und es ist Ra(R)=0. Nach Resultaten von Stock besitzt damit der R-Rechtsmodul

$$M := R^{(\mathbb{N})}$$

nicht die 2-ATE ([8] Prop. 4.5 , Kor. 4.13).Man kann Tot(M,M) = 0 nachweisen . Nach Satz 2.13 kann M demnach wegen $Ra(End_R(M)) = Tot(M,M) = 0$ keine LE-Zerlegung haben .

Der Nachweis von Tot(M,M) = 0 erfolgt in zwei Schritten :

1. Schritt: $Tot(R_R,R_R) = 0$.

Sei für $i \in \mathbb{N}$ $_ie = (_ie_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R$ definiert durch $_ie_n := \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$.

Die R-Rechtsmoduln $_ieR$ $(i \in \mathbb{N})$ sind einfach . Für jede endliche Teilmenge L von $\mathbb{N}$ ist $\bigoplus_{i\in L} {_ieR}$ direkter Summand von R_R .

Sei nun $0 \neq \alpha \in End(R_R)$; dann gibt es $j \in \mathbb{N}$ mit $\alpha(1)_je \neq 0$ und wegen $\alpha(_je) = \alpha(1)_je = {_je}\alpha(1)$ ist also $0 \neq \alpha(_jeR) \subset {_jeR}$; da $_jeR$ einfach ist , ist folglich $_jeR \ni x \longmapsto \alpha(x) \in {_jeR}$ ein Automorphismus und damit α kein Element von $Tot(R_R,R_R)$.

2. Schritt: Schluß auf Tot(M,M) = 0 .

$M_R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$, $M_n \cong R_R \; \forall n \in \mathbb{N}$; seien ι_n $(n \in \mathbb{N})$ die Inklusion von M_n in M und π_n die Projektion von M auf M_n ;

ist nun $0 \neq f \in End_R(M)$, so gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $\pi_j f \iota_i \neq 0$; nach dem 1. Schritt ist $\pi_j f \iota_i$ kein Element von $Tot(M_i,M_j)$, weswegen f nach 1.2 kein Element von Tot(M,M) ist .

III. DIE STELLUNG DER TOTALEN MODULN IN DER THEORIE DER IDEALE UND HALBIDEALE

Nach dem I .Kapitel ist für eine Klasse k' von R-Rechtsmoduln $\{Tot_{k'}(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Halbideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln.

Ist k' insbesondere die dS-Klasse der totalen R-Rechtsmoduln, so ist nach der Kennzeichnung in 1.9 a)

$$k'_{dg} = \{M \in \mathfrak{M}_R \mid \text{jeder direkte Summand} \neq 0 \text{ von } M \text{ besitzt einen totalen direkten Summanden} \neq 0\}$$

und nach 2.7 somit $k'_{dg} = k'$. Nach 1.10 gilt daher der folgende Satz:

<u>3.1 Satz</u>

Sei k_t die Klasse der totalen R-Rechtsmoduln;

dann gibt es keine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln, welche echt größer als k_t ist und für die $Tot_k(A,B) \supset Tot_{k_t}(A,B)$ für alle R-Rechtsmoduln A,B gilt.

Im I. Kapitel beschäftigten wir uns ausschließlich mit den Halbidealeigenschaften von $\{Tot_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$. Die Idealfrage wurde dort vorerst nicht angesprochen:

Für welche Klassen k von R-Rechtsmoduln ist das Halbideal $\{Tot_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ sogar ein Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln ?

Beschränken wir uns auf dS-Klassen von R-Rechtsmoduln, so gelingt eine vollständige Antwort.

3.2 Lemma

Sei k_t die Klasse der totalen R-Rechtsmoduln und k eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln , die Teilklasse von k_t ist ;

dann ist $\{Tot_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln .

Beweis:

Da die Halbidealeigenschaft klar ist , bleibt die additive Abgeschlossenheit nachzuweisen:

Seien also A , B R-Rechtsmoduln und $\alpha \in Tot_k(A,B)$, $\beta \in Tot_k(A,B)$;

angenommen $\alpha + \beta \notin Tot_k(A,B)$,

dann gibt es direkte Summanden $0 \neq A_0$ von A und B_0 von B mit $A_0 \in k$, $B_0 \in k$ und $(\alpha + \beta)(A_0) \subset B_0$, so daß $\overline{\alpha+\beta}: A_0 \ni x \longmapsto (\alpha + \beta)(x) \in B_0$ isomorph ist ;

sei $\gamma \in Hom_R(B_0,A_0)$ der inverse Isomorphismus , ι die Inklusion von A_0 in A und π Projektion von B auf den direkten Summanden B_0 ;

es ist $\overline{\alpha+\beta} = \pi(\alpha + \beta)\iota = \pi\alpha\iota + \pi\beta\iota$ und folglich $\gamma\overline{\alpha+\beta} =$

$= \gamma\pi\alpha\iota + \gamma\pi\beta\iota = 1_{A_0}$;

1_{A_0} ist kein Element von $Tot(A_0,A_0)$; da A_0 total ist , folgt demnach $\gamma\pi\alpha\iota \notin Tot(A_0,A_0)$ oder $\gamma\pi\beta\iota \notin Tot(A_0,A_0)$;

da k eine dS-Klasse ist und A_0 Element von k ist , gilt andererseits $Tot(A_0,A_0) = Tot_k(A_0,A_0)$, so daß auf Grund der Halbidealeigenschaft wegen $\alpha,\beta \in Tot_k(A,B)$ sowohl $\gamma\pi\alpha\iota$ als auch $\gamma\pi\beta\iota$ Element von $Tot(A_0,A_0)$ sein müßten , also Widerspruch .

3.3 Lemma

Sei k eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln mit der Eigenschaft , daß $\{Tot_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln ist ;

dann ist k eine Teilklasse der Klasse k_t der totalen R-Rechtsmoduln .

Beweis:
Sei $M \in k$; da k dS-Klasse ist , ist dann $\mathrm{Tot}_k(M,M) = \mathrm{Tot}(M,M)$; nach Voraussetzung ist $\{\mathrm{Tot}_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Ideal , so daß also $\mathrm{Tot}(M,M)$ additiv abgeschlossen ist , d.h. M ist total .

Aus 3.2 und 3.3 folgt unmittelbar :

3.4 Satz

Für eine dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln ist $\{\mathrm{Tot}_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ genau dann ein Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R- Rechtsmoduln , wenn k eine Teilklasse der Klasse k_t der totalen R-Rechtsmoduln ist .

Die Klasse k_t ist also insbesondere die größte dS-Klasse k von R-Rechtsmoduln , für die $\{\mathrm{Tot}_k(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln ist .

Mit 2.10 c) folgt aus 3.4 ein Ergebnis von Zöllner ([12] Cor. 1):

3.5 Korollar

Sei k_2 die Klasse der R-Rechtsmoduln , die die 2-ATE besitzen ; dann ist $\{\mathrm{Tot}_{k_2}(A,B) \mid A,B \in \mathfrak{M}_R\}$ Ideal in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Rechtsmoduln .

IV. DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN TOTAL UND RADIKAL UND DER BEGRIFF DES RaT-MODULS

In 2 . 13 wurde schon einmal auf den Zusammenhang zwischen Total und Radikal eingegangen , allerdings beschränkten sich die Aussagen auf Rechtsmoduln mit LE-Zerlegungen .

4.1 Satz

Für jeden R-Rechtsmodul M gilt $Ra(End_R(M)) \subset Tot(M,M)$.

Beweis:
Für R-Rechtsmoduln , die eine LE-Zerlegung besitzen , haben wir diese Aussage bereits in 2.13 formuliert.

Sei also M R-Rechtsmodul und $S := End_R(M)$; für $\alpha \in S$ ist zu zeigen: $\alpha \notin Tot(M,M) \Longrightarrow \alpha \notin Ra(S)$.

Sei nun $\alpha \in S \setminus Tot(M,M)$; dann gibt es direkte Summanden $0 \neq M_1$ und M_2 von M mit $\alpha(M_1) \subset M_2$, so daß $\overline{\alpha} : M_1 \ni x \longmapsto \alpha(x) \in M_2$ isomorph ist ;

seien $\overline{\beta} \in Hom_R(M_2, M_1)$ der inverse Isomorphismus , ι_i die Inklusion von M_i in M , π_i Projektion von M auf den direkten Summanden M_i und $e_i = \iota_i \pi_i$ $(i = 1,2)$; setze $\gamma := \iota_1 \overline{\beta} \pi_2$;

aus $\overline{\alpha} = \pi_2 \alpha \iota_1$ folgt $e_2 \alpha \gamma = \iota_2 \pi_2 \alpha \iota_1 \overline{\beta} \pi_2 = \iota_2 \overline{\alpha} \overline{\beta} \pi_2 = \iota_2 \pi_2 = e_2$ und folglich $\alpha\gamma + (1_M - e_2)(1_M - \alpha\gamma) = \alpha\gamma + 1_M - \alpha\gamma - e_2 + e_2\alpha\gamma = 1_M$,

d.h. $\alpha S + (1_M - e_2)S = S$;

wegen $M_2 \neq 0$ ist $(1_M - e_2)S \neq S$; damit ist αS nicht klein in S und somit α kein Element von Ra(S) .

4.2 Definition

Einen R-Rechtsmodul $M \neq 0$, für den $Ra(End_R(M)) = Tot(M,M)$ gilt , wollen wir als RaT-Modul bezeichnen .

Ein R-Rechtsmodul M , der eine LE-Zerlegung besitzt und für den $Ra(End_R(M)) = Tot(M,M)$ gilt , wird speziell als Harada-Modul bezeichnet (vgl. [6] S. 57) .

4.3 Bemerkungen und Beispiele

a) Ist M_R RaT-Modul, so auch jeder zu M isomorphe R-Rechtsmodul.

Beweis:
Seien also M,N R-Rechtsmoduln, M insbesondere RaT-Modul und α Isomorphismus von M nach N; wegen $Ra(End_R(N)) = \alpha Ra(End_R(M))\alpha^{-1}$ und $Tot(N,N) = \alpha Tot(M,M)\alpha^{-1}$ folgt aus $Ra(End_R(M)) = Tot(M, M)$ auch $Ra(End_R(N)) = Tot(N,N)$.

b) Ist M_R RaT-Modul, so auch jeder direkte Summand von M.

Beweis:
Sei also M_R RaT-Modul und A ein direkter Summand von M; ist ι die Inklusion von A in M und π Projektion von M auf den direkten Summanden A, so ist nach 1.2 $Tot(A,A) = \pi Tot(M,M)\iota$; da auch $Ra(End_R(A)) = \pi Ra(End_R(M))\iota$ gilt, stimmen also wegen $Ra(End_R(M)) = Tot(M,M)$ folglich $Ra(End_R(A))$ und $Tot(A,A)$ überein.

c) Jeder RaT-Modul M_R ist total.

Beweis:
$Ra(End_R(M))$ ist additiv abgeschlossen.

d) Für einen direkt unzerlegbaren R-Rechtsmodul M sind äquivalent:

(i) M ist total

(ii) M ist LE-Modul

(iii) M ist Harada-Modul

(iv) M ist RaT-Modul.

Beweis:
In einem direkt unzerlegbaren R-Rechtsmodul M ist $Tot(M,M)$ die Menge der nicht automorphen Endomorphismen.
Während (i)$\Rightarrow$(ii) und (iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(i) nach 2.2 c) und 4.3 c) klar sind, ist auf (ii)$\Rightarrow$(iii) noch einzugehen:
Ist M LE-Modul, so ist für alle $\alpha \in Tot(M,M)$ $1_M - \alpha$ automorph, so daß also $Tot(M,M) \subset Ra(End_R(M))$ gilt und die umgekehrte Inklusion gilt nach 4.1 von vornherein.

f) Jeder halbeinfache R-Rechtsmodul M ist ein Harada-Modul; es ist

$Ra(End_R(M)) = Tot(M,M) = 0$.

Beweis:
Ein halbeinfacher R-Rechtsmodul M ist direkte Summe von einfachen Untermoduln . Diese einfachen Untermoduln sind insbesondere LE-Moduln . Da ein Homomorphismus zwischen einfachen Moduln entweder der Nullhomomorphismus oder ein Isomorphismus ist, folgt unter Benützung von 2.12 $Tot(M,M) = 0$ und nach 4.1 also $Ra(End_R(M)) = Tot(M,M) = 0$.

f) Der in 2.14 behandelte Rechtsmodul M ist ein Beispiel für einen RaT-Modul , der kein Harada-Modul ist. Nach den Ausführungen in 2.14 ist $Ra(End(M)) = Tot(M,M) = 0$.

g) Es wird ein Beispiel für einen totalen Rechtsmodul angegeben, der kein RaT-Modul ist .

Sei $R = Z$, d.h. der Ring der ganzen Zahlen und für eine feste Primzahl p sei $M_Z := \coprod_{n \in \mathbb{N}} Z_{p^n} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Z'_{p^n}$; dabei steht Z_{p^n} kurz für Z/p^nZ .

Die Z-Rechtsmoduln Z_{p^n} ($n \in \mathbb{N}$) sind LE-Moduln , so daß M_Z nach 2.9 a) total ist.

M_Z ist allerdings kein Harada-Modul , was im folgenden nachgewiesen wird:

Seien für $n \in \mathbb{N}$ $\eta_n\colon Z_{p^n} \longmapsto Z'_{p^n}$, $\bar{z} \longmapsto (\bar{z}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\bar{z}_i := \begin{cases} \bar{z} & i=n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$,

ι_n die Inklusion von Z'_{p^n} in M , π_n die Projektion von M auf

Z'_{p^n} , $f_n\colon Z_{p^n} \ni \bar{z} \longmapsto \overline{pz} \in Z_{p^{n+1}}$ und $\alpha_n := \iota_{n+1}\eta_{n+1}f_n\eta_n^{-1}\pi_n$;

$\alpha \in End_Z(M)$ sei definiert durch $\alpha(x) := \sum_{\alpha_n(x) \neq 0} \alpha_n(x)$.

Für $i,j \in \mathbb{N}$ ist $\pi_j\alpha\iota_i$ im Falle $j=i+1$ gleich $\eta_{i+1}f_i\eta_i^{-1}$, sonst 0 und damit also nicht isomorph , so daß unter Benutzung von 2.12 $\alpha \in Tot(M,M)$ folgt .

Wegen $\eta_1(\bar{1}) \notin Bi(1_M - \alpha)$ ist aber $1_M - \alpha$ kein Epimorphismus und damit α kein Element von $Ra(End_R(M))$.

Nach 4.3 bilden die RaT-Moduln über einem Ring R eine dS-Klasse von R-Rechtsmoduln , die insbesondere Teilklasse der Klasse der totalen R-Rechtsmoduln ist.Da die totalen Rechtsmoduln bekanntlich genau die sind , die die d2-Austauscheigenschaft besitzen, sollte es möglich sein , die RaT-Moduln durch eine verschärfte d2-ATE zu charakterisieren.Eine derartige Charakterisierung wird in 4.5 angegeben. Wir benützen den folgenden Hilfssatz.

4.4 Hilfssatz

Sei M R-Rechtsmodul ;

der R-Rechtsmodul $M \times M$ besitzt nach 2.6 folgende Zerlegungen :

$M \times M = M_1 \oplus M_2$, für alle $f \in End_R(M)$ $M \times M = C_f \oplus D$.

(Dabei sind die Bezeichnungen wie in 2.6 .)

Die Aussagen des Hilfssatzes lauten:

a) Für alle $f \in Ra(End_R(M))$ gilt $M \times M = C_f \oplus M_1$.

b) M ist genau dann RaT-Modul , wenn für alle $f \in Tot(M,M)$ $M \times M = C_f \oplus M_1$ gilt.

Beweis:

Wir verwenden 2.6 a) ; danach gilt

* für alle $f \in End_R(M)$ $\phi^{-1}\pi_f|_{M_1}\eta_1 = 1_M - f$,

wobei π_f insbesondere die Projektion von $M \times M = C_f \oplus D$ auf D ist.

Nun zum Beweis von a):

Ist $f \in Ra(End_R(M))$, so ist $1_M - f$ automorph und wegen * damit $\pi_f|_{M_1}$ isomorph ; es folgt $M \times M = M_1 \oplus Ker(\pi_f) = M_1 \oplus C_f$.

Beweis von b) :

Ist $Ra(End_R(M)) = Tot(M,M)$, so folgt nach a) $M \times M = C_f \oplus M_1$ für alle $f \in Tot(M,M)$.

Gilt umgekehrt für alle $f \in Tot(M,M)$ $M \times M = C_f \oplus M_1$, dann ist $\pi_f|_{M_1}$ für alle $f \in Tot(M,M)$ isomorph ; wegen * ist damit $1_M - f$ für alle $f \in Tot(M,M)$ automorph , so daß also $Tot(M,M) \subset Ra(End_R(M))$ gilt ; die umgekehrte Inklusion gilt nach 4.1 von vornherein .

4.5 Satz

Für einen R-Rechtsmodul M sind äquivalent:

(i) M ist RaT-Modul

(ii) Für jede Situation $A_R = M' \oplus N = C \oplus D$, wobei $M' \cong M$, gilt (*) oder (**) oder (***)

(iii) Für jede Situation $A_R = M' \oplus N = C \oplus D$, wobei $M' \cong M$, $N \cong M$, $C \cong M$ und $D \cong M$, gilt (*) oder (**) oder (***).

Dabei ist jeweils

(*) es gibt Untermoduln $M_1' \neq 0$ von M' und C' von C mit $A = M_1' \oplus C' \oplus D$ und Untermoduln $M_2' \neq 0$ von M' und D' von D mit $A = M_2' \oplus C \oplus D'$

(**) es gibt einen Untermodul C' von C mit $A = M' \oplus C' \oplus D$

(***) es gibt einen Untermodul D' von D mit $A = M' \oplus C \oplus D'$.

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Sei also M RaT-Modul;

sei $A = M' \oplus N = C \oplus D$, wobei $M' \cong M$; es ist zu zeigen, daß (*) oder (**) oder (***) gilt:

Seien ι die Inklusion von M' in A , π die Projektion von $A = M' \oplus N$ auf M' und e_C bzw. e_D der Projektor von $A = C \oplus D$ auf den Summanden C bzw. D ;

aus $1_A = e_C + e_D$ folgt $1_{M'} = \pi\iota = \pi 1_A \iota = \pi e_C \iota + \pi e_D \iota$;

da M' als RaT-Modul total ist, ist folglich $\pi e_C \iota \notin \mathrm{Tot}(M',M')$ oder $\pi e_D \iota \notin \mathrm{Tot}(M',M')$; es gibt nun drei Möglichkeiten:

<u>1. Möglichkeit:</u> $\pi e_C \iota \notin \mathrm{Tot}(M',M')$ und $\pi e_D \iota \notin \mathrm{Tot}(M',M')$.

Dann gibt es direkte Summanden $M_1' \neq 0$, $M_2' \neq 0$, M_1'' und M_2'' von M' mit $\pi e_C \iota(M_1') \subset M_1''$ und $\pi e_D \iota(M_2') \subset M_2''$, so daß $\overline{\pi e_C \iota} : M_1' \ni x \longmapsto \pi e_C \iota(x) \in M_1''$ und $\overline{\pi e_D \iota} : M_2' \ni x \longmapsto \pi e_D \iota(x) \in M_2''$ isomorph sind ;

sei t_1 bzw. t_2 Projektion von M' auf den Summanden M_1'' bzw. M_2'' ;

es ist $\overline{\pi e_C \iota} = t_1 \pi e_C \iota|_{M_1'}$ und $\overline{\pi e_D \iota} = t_2 \pi e_D \iota|_{M_2'}$; folglich ist

$$A = M_1' \oplus \mathrm{Ker}(t_1 \pi e_C) = M_1' \oplus D \oplus (\mathrm{Ker}(t_1\pi) \cap C) \quad \text{und}$$

$$A = M_2' \oplus \mathrm{Ker}(t_2 \pi e_D) = M_2' \oplus C \oplus (\mathrm{Ker}(t_2\pi) \cap D) \ ;$$

mit $C' := \mathrm{Ker}(t_1\pi) \cap C$ und $D' := \mathrm{Ker}(t_2\pi) \cap D$ gilt demnach (*) .

2._Möglichkeit: $\pi e_C \iota \notin \mathrm{Tot}(M',M')$ und $\pi e_D \iota \in \mathrm{Tot}(M',M')$.
Da M' RaT-Modul ist , gilt $\pi e_D \iota \in \mathrm{Ra}(\mathrm{End}_R(M'))$ und folglich ist
$\pi e_C \iota = 1_{M'} - \pi e_D \iota$ automorph ; damit ist

$$A = M' \oplus \mathrm{Ker}(\pi e_C) = M' \oplus D \oplus (\mathrm{Ker}(\pi) \cap C) \ ;$$

setzen wir $C' := \mathrm{Ker}(\pi) \cap C = N \cap C$, so gilt demnach (**) .

3._Möglichkeit: $\pi e_C \iota \in \mathrm{Tot}(M',M')$ und $\pi e_D \iota \notin \mathrm{Tot}(M',M')$.
Völlig analog zur 2. Möglichkeit findet man einen Untermodul D' von D mit $A = M' \oplus C \oplus D'$; es gilt also (***) .

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Klar .

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : M habe also die in (iii) beschriebene Eigenschaft; um $\mathrm{Ra}(\mathrm{End}_R(M)) = \mathrm{Tot}(M,M)$ nachzuweisen , genügt es nach 4.4 b) zu zeigen , daß für alle $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ $M \times M = C_f \oplus M_1$ gilt mit C_f , M_1 wie in 2.6 :

Sei also $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$; nach 2.6 ist $M \times M = M_1 \oplus M_2 = C_f \oplus D$ und es ist $C_f \cong M$, $D \cong M$, $M_1 \cong M$, $M_2 \cong M$;
nach Voraussetzung gilt in der Situation $M \times M = C_f \oplus D = M_1 \oplus M_2$

(*) es gibt Untermoduln $C_f' \neq 0$ von C_f und M_1' von M_1 mit $M \times M = C_f' \oplus M_1' \oplus M_2$ und Untermoduln $C_f'' \neq 0$ von C_f und M_2' von M_2 mit $M \times M = C_f'' \oplus M_1 \oplus M_2'$

o d e r

(**) es gibt einen Untermodul M_1' von M_1 mit $M \times M = C_f \oplus M_1' \oplus M_2$

o d e r

(***) es gibt einen Untermodul M_2' von M_2 mit $M \times M = C_f \oplus M_1 \oplus M_2'$;

wegen $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ kommen nach 2.6 d) die Möglichkeiten (*) und (**) nicht in Frage ; es bleibt also $M \times M = C_f \oplus M_1 \oplus M_2'$; nach 2 . 6 b) gilt wegen $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ $M_2' = 0$, so daß wir also $M \times M = C_f \oplus M_1$ haben .

Der folgende Satz 4.6 beschäftigt sich mit Rechtsmoduln , die direkte Summe eines RaT-Untermoduls und eines totalen Untermoduls sind.

4.6 Satz

Jeder R-Rechtsmodul , der direkte Summe eines RaT - Untermoduls und eines totalen Untermoduls (nicht notwendig RaT-Untermodul) ist , ist total.

Beweis:

Sei also $M_R = \overline{M} \oplus N$, wobei $\overline{M}$ RaT-Modul und N total ; nach 2.7 genügt es nachzuweisen , daß jeder direkte Summand $\neq 0$ von M einen totalen direkten Summanden $\neq 0$ besitzt :

Sei also $C \neq 0$ direkter Summand von M : $M = C \oplus D$; für die Situation $M = \overline{M} \oplus N = C \oplus D$ gilt nach 4.5

(*) es gibt Untermoduln $\overline{M}_1 \neq 0$ von $\overline{M}$ und C' von C mit $M = \overline{M}_1 \oplus C' \oplus D$ und Untermoduln $\overline{M}_2 \neq 0$ von $\overline{M}$ und D' von D mit $M = \overline{M}_2 \oplus C \oplus D'$

o d e r

(**) es gibt einen Untermodul C' von C mit $M = \overline{M} \oplus C' \oplus D$

o d e r

(***) es gibt einen Untermodul D' von D mit $M = \overline{M} \oplus C \oplus D'$;

im Fall (*) ist $C \cong \overline{M}_1 \oplus C'$ und $\overline{M}_1$ ist als direkter Summand von $\overline{M}$ total ;

im Fall (**) ist $C \cong \overline{M} \oplus C'$ und $\overline{M}$ ist total ;

im Fall (***) ist $C \oplus D' \cong N$, so daß wegen N total auch C total ist.

Ein Rechtsmodul , der direkte Summe zweier totaler Untermoduln ist , kann allerdings auch dann total sein , wenn keiner der beiden totalen direkten Summanden RaT-Modul ist. So können wir beispielsweise für einen Rechtsmodul M , der eine LE-Zerlegung besitzt , aber kein Harada-Modul ist , den Rechtsmodul $M \times M$ betrachten. $M \times M$ läßt sich als direkte Summe zweier totaler Untermoduln darstellen , die beide keine RaT-Moduln sind ; nach 2.9 a) ist $M \times M$ total. Ein Beispiel für einen Rechtsmodul M , der eine LE-Zerlegung besitzt , aber kein Harada-Modul ist , haben wir in 4.3 g) kennengelernt.

Nach dem Satz 4.6 soll ein weiteres wichtiges Ergebnis formuliert werden , das sich aus der Charakterisierung der RaT-Moduln in 4.5 ergibt. Dieses Ergebnis stellt insbesondere eine Verschärfung der Aussage von 2.9 c) dar.

4.7 Satz

Jeder Rechtsmodul , der die 2-ATE besitzt , ist RaT-Modul.

Beweis: Sei M R-Rechtsmodul und im Besitz der 2-ATE ; es wird nachgewiesen , daß die Bedingung (iii) in 4.5 erfüllt ist: sei $A = M' \oplus N = C \oplus D$ mit $M' \cong M$, $N \cong M$, $C \cong M$, $D \cong M$; es wird gezeigt , daß in dieser Situation (*) oder (**) oder (***) wie in 4.5 beschrieben gilt .

Da M die 2-ATE besitzt , gibt es zunächst einmal Untermoduln $\hat{C}$ von C und $\hat{D}$ von D mit $A = M' \oplus \hat{C} \oplus \hat{D}$; es gibt drei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: es ist $\hat{C} \neq C$ und $\hat{D} \neq D$.

In diesem Fall wollen wir die Tatsache benützen , daß C und D wegen $C \cong M$ und $D \cong M$ die 2-ATE und nach [2] L. 3.11 damit die endliche ATE besitzen ; wir wenden sie auf die Situation $A = C \oplus D = M' \oplus \hat{C} \oplus \hat{D}$ an :

es gibt Untermoduln M_1' von M', C' von $\hat{C}$, $\hat{D}'$ von $\hat{D}$ mit $A =$ $= D \oplus M_1' \oplus C' \oplus \hat{D}'$ und Untermoduln M_2' von M' , $\hat{C}'$ von $\hat{C}$, D' von $\hat{D}$ mit $A = C \oplus M_2' \oplus \hat{C}' \oplus D'$;

da $\hat{C}'$ Untermodul von C und $\hat{D}'$ Untermodul von D ist , muß $\hat{C}' = 0$ und $\hat{D}' = 0$ gelten ;

es folgt $A = M_1' \oplus C' \oplus D$ und $A = M_2' \oplus C \oplus D'$; wegen $\hat{C} \neq C$ und $\hat{D} \neq D$ ist auch $C' \neq C$ und $D' \neq D$ und damit gilt $M_1' \neq 0$ und $M_2' \neq 0$, so daß also (*) gegeben ist .

2. Möglichkeit: $\hat{D} = D$.

In diesem Fall ist $A = M' \oplus \hat{C} \oplus D$, so daß also (**) gegeben ist.

3. Möglichkeit: $\hat{C} = C$.

In diesem Fall ist $A = M' \oplus C \oplus \hat{D}$, so daß also (***) gegeben ist .

Die Erkenntnis , daß aus der 2-ATE direkt auf die d2-ATE geschlossen werden kann , verdanke ich einer Mitteilung von J. Stock vom 19.12.1986 . Im Beweis von 4.7 benütze ich auf J. Stock zurückgehende Gedankengänge .

Umgekehrt braucht ein Rechtsmodul nicht notwendig die 2-ATE zu besitzen , wenn er RaT-Modul ist.
Für den in 2.14 behandelten Rechtsmodul M gilt $Ra(End_R(M)) =$ $= Tot(M,M) = 0$;er ist also RaT-Modul.Wie in 2.14 festgestellt, besitzt M nicht die 2-ATE.
Hat ein Rechtsmodul allerdings eine LE-Zerlegung,so besitzt er nach 2.13 genau dann die 2-ATE , wenn er RaT-Modul ist.

V. RaT-ZERLEGUNGEN

LE-Moduln sind RaT-Moduln. Die Tatsache , daß LE-Zerlegungen im bisherigen Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle gespielt haben , veranlaßt zur folgenden Definition.

5.1 Definition

Ist ein R-Rechtsmodul M direkte Summe von RaT-Untermoduln M_i $(i \in I)$, so wird die Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ als RaT-Zerlegung bezeichnet.

LE-Zerlegungen sind also spezielle RaT-Zerlegungen . In 4.3 g) haben wir ein Beispiel für einen Rechtsmodul kennengelernt, der eine RaT-Zerlegung besitzt, ohne dabei selbst RaT-Modul zu sein. In diesem V. Kapitel nimmt die Frage , wann ein Rechtsmodul , der eine RaT-Zerlegung besitzt , insbesondere RaT-Modul ist , eine zentrale Stellung ein.

5.2 Hilfssatz ([6] H.satz 3.3.2.)

Seien A , B R-Rechtsmoduln und $\alpha \in Hom_R(A,B)$, $\beta \in Hom_R(B,A)$; dann gilt:

$$1_A + \beta\alpha \text{ ist automorph} \Longleftrightarrow 1_B + \alpha\beta \text{ ist automorph} .$$

5.3 Lemma

Sei M R-Rechtsmodul mit RaT-Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$; $S := End_R(M)$; für $i \in I$ sei $e_i \in S$ der Projektor von M auf den Summanden M_i ;

dann ist für alle $i \in I$ $e_i Tot(M,M) \subset Ra(S)$ und $Tot(M,M)e_i \subset Ra(S)$.

Beweis:
Ist $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ speziell eine LE-Zerlegung , so findet sich eine entsprechende Aussage in [6] Satz 3.3.3. .
Sei also $i \in I$; es soll $e_i Tot(M,M) \subset Ra(S)$ gezeigt werden:

Dazu ist für alle $\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M)$ die Isomorphie von $1_M + e_i\alpha =$ $= 1_M + e_ie_i\alpha$, die nach 5.2 mit der Isomorphie von $1_M + e_i\alpha e_i$ äquivalent ist, nachzuweisen;

wir geben also $\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M)$ vor; dann ist $e_i\alpha e_i \in e_i\mathrm{Tot}(M,M)e_i$;

seien ι_i $(i \in I)$ die Inklusion von M_i in M und π_i die Projektion von M auf M_i;

nach 1.2 ist $e_i\mathrm{Tot}(M,M)e_i = \iota_i\mathrm{Tot}(M_i,M_i)\pi_i$; da M_i RaT-Modul ist, *folgt* $e_i\mathrm{Tot}(M,M)e_i = \iota_i\mathrm{Ra}(\mathrm{End}_R(M_i))\pi_i = e_i\mathrm{Ra}(S)e_i =$ $= \mathrm{Ra}(e_iSe_i)$;

also $e_i\alpha e_i \in \mathrm{Ra}(e_iSe_i)$; dann besitzt $e_i + e_i\alpha e_i$ ein Inverses $e_i\beta e_i$ in e_iSe_i;

$1_M - e_i + e_i\beta e_i$ ist Inverses von $1_M + e_i\alpha e_i$ in S, denn es ist $(1_M - e_i + e_i\beta e_i)(1_M + e_i\alpha e_i) = (1_M - e_i + e_i\beta e_i)(1_M - e_i + e_i +$ $+ e_i\alpha e_i) = 1_M - e_i + e_i = 1_M$ und ebenso $(1_M + e_i\alpha e_i)(1_M - e_i +$ $+ e_i\beta e_i) = 1_M$.

Der Nachweis von $\mathrm{Tot}(M,M)e_i \subset \mathrm{Ra}(S)$ verläuft völlig analog zum Nachweis von $e_i\mathrm{Tot}(M,M) \subset \mathrm{Ra}(S)$.

5.4 Satz

Sei M R-Rechtsmodul mit endlicher RaT-Zerlegung $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$;

dann ist M RaT-Modul.

Beweis:

Setze $S := \mathrm{End}_R(M)$; es ist $\mathrm{Tot}(M,M) = \mathrm{Ra}(S)$ zu zeigen, wobei nach 4.1 der Nachweis von $\mathrm{Tot}(M,M) \subset \mathrm{Ra}(S)$ genügt:

Sei für $i \in \{1,\dots,n\}$ $e_i \in S$ der Projektor von M auf den Summanden M_i; wegen $1_M = \sum_{i=1}^{n} e_i$ gilt nach 5.3 $\mathrm{Tot}(M,M) = 1_M\mathrm{Tot}(M,M) =$ $= \sum_{i=1}^{n} e_i\mathrm{Tot}(M,M) \subset \mathrm{Ra}(S)$.

Ist in 5.4 $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ speziell eine LE-Zerlegung , so findet sich eine entsprechende Aussage in [6] Folg. 3.3.4. .

5.5 Korollar

Sei M artinscher oder noetherscher R-Rechtsmodul ; dann sind äquivalent:

(i) M besitzt eine endliche LE-Zerlegung

(ii) M besitzt eine endliche RaT-Zerlegung

(iii) M ist RaT-Modul

(iv) M ist total .

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Jede LE-Zerlegung ist eine RaT-Zerlegung .

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Nach 5.4 .

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Siehe 4.3 c) .

(iv) $\Longrightarrow$ (i) : Siehe 2.9 b) .

Jeder Rechtsmodul , der eine endliche RaT-Zerlegung besitzt, ist also grundsätzlich ein RaT-Modul. Daß die entsprechende Aussage für Rechtsmoduln mit unendlicher RaT-Zerlegung nicht möglich ist, zeigt das Beispiel 4.3 e) ; wir haben dies bereits im Anschluß an 5.1 festgestellt. Ehe wir nach hinreichenden Bedingungen suchen , unter denen auch ein Rechtsmodul , der eine unendliche RaT-Zerlegung besitzt , stets RaT-Modul ist , soll ein Ergebnis von Azumaya verallgemeinert werden. Wir haben von diesem Ergebnis schon Gebrauch gemacht ; es besagt, daß jeder direkte Summand $\neq 0$ eines Rechtsmoduls M mit LE-Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ einen direkten Summanden besitzt , der zu einem der M_i isomorph ist ([1] Th. 1).

5.6 Hilfssatz

Sei $M_R = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, wobei die M_i alle total sind ;

dann sind äquivalent:

(i) M ist total

(ii) Zu jedem direkten Summanden $N \neq 0$ von M gibt es $i \in \{1,\dots,n\}$ und dazu einen direkten Summanden $M_i' \neq 0$ von M_i , so daß N einen zu M_i' isomorphen direkten Summanden besitzt .

Beweis:

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Sei also die in (ii) beschriebene Eigenschaft gegeben ; da die M_i alle total sind , sind auch alle direkten Summanden der M_i total und damit besitzt jeder direkte Summand $N \neq 0$ von M einen totalen direkten Summanden $\neq 0$, so daß M nach 2 . 7 total ist .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Sei also M total und $N \neq 0$ direkter Summand von M : $M = N \oplus L$; sei für $i \in \{1,\dots,n\}$ e_i der Projektor von $M = M_1 \oplus .. \oplus M_n$ auf den Summanden M_i und e_N der Projektor von $M = N \oplus L$ auf N ;
es ist $1_M = \sum_{i=1}^{n} e_i$ und folglich $e_N = \sum_{i=1}^{n} e_N e_i$;
da e_N kein Element von Tot(M,M) ist und M total ist , existiert $i_o \in \{1,\dots,n\}$ mit $e_N e_{i_o} \notin \mathrm{Tot}(M,M)$;
sind ι_{i_o} die Inklusion von M_{i_o} in M , ι_N die Inklusion von N in M, π_{i_o} die Projektion von $M = M_1 \oplus .. \oplus M_n$ auf M_{i_o} und π_N die Projektion von $M = N \oplus L$ auf N , so ist $e_{i_o} = \iota_{i_o}\pi_{i_o}$ und $e_N = \iota_N \pi_N$;
aus $e_N e_{i_o} \notin \mathrm{Tot}(M,M)$ folgt $\pi_N \iota_{i_o} \notin \mathrm{Tot}(M_{i_o},N)$ und damit existieren direkte Summanden $M_{i_o}' \neq 0$ von M_{i_o} und N' von N mit $\pi_N \iota_{i_o}(M_{i_o}') \subset N'$,
so daß $M_{i_o}' \ni x \longmapsto \pi_N \iota_{i_o}(x) \in N'$ isomorph ist ;
N' ist also ein direkter Summand von N , der zum direkten Summanden $M_{i_o}' \neq 0$ von M_{i_o} isomorph ist .

<u>5.7 Satz</u>

Sei M R-Rechtsmodul mit RaT-Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$; dann besitzt M folgende Eigenschaft :

Zu jedem direkten Summanden $N \neq 0$ von M gibt es ein $i \in I$ und dazu einen direkten Summanden $M_i' \neq 0$ von M_i, so daß N einen zu M_i' isomorphen direkten Summanden besitzt.

Beweis:

1. Fall: I ist endlich.

Nach 5.4 ist M in diesem Fall RaT-Modul und damit total, so daß die Aussage des Satzes aus 5.6 folgt.

2. Fall: I ist unendlich.

Sei $N \neq 0$ direkter Summand von M: $M = N \oplus L$.

Man kann zunächst zeigen:

Es gibt eine endliche Teilmenge I' von I und einen direkten Summanden $X \neq 0$ von $\bigoplus_{i \in I'} M_i$, so daß N einen zu X isomorphen direkten Summanden N' besitzt.

Wie im 1. Fall kann man dann folgern, daß es $i \in I'$ und dazu einen direkten Summanden $M_i' \neq 0$ von M_i gibt, so daß X und damit N' einen zu M_i' isomorphen direkten Summanden besitzt.

Die Existenz von I' und X weist man wie folgt nach:

Es gibt eine endliche Teilmenge I' von I mit $N \cap \bigoplus_{i \in I'} M_i \neq 0$; wir setzen $\overline{M} := \bigoplus_{i \in I'} M_i$;

nach 5.4 ist $\overline{M}$ RaT-Modul; in der Situation $M = \overline{M} \oplus (\bigoplus_{i \in I \setminus I'} M_i) = N \oplus L$ gilt daher nach 4.5

(*) es gibt Untermoduln $\overline{M}_1 \neq 0$ von $\overline{M}$ und N' von N mit $M = \overline{M}_1 \oplus N' \oplus L$ und Untermoduln $\overline{M}_2 \neq 0$ von $\overline{M}$ und L' von L mit $M = \overline{M}_2 \oplus N \oplus L'$

o d e r

(**) es gibt einen Untermodul N' von N mit $M = \overline{M} \oplus N' \oplus L$

o d e r

(∗∗∗) es gibt einen Untermodul L' von L mit $M = \overline{M} \oplus N \oplus L'$;

die Möglichkeit (∗∗∗) ist auf Grund von $N \cap \overline{M} \neq 0$ ausgeschlossen;

sei π_N die Projektion von $M = N \oplus L$ auf N und sei bei Möglichkeit (∗) $X := \overline{M}_1$, bei Möglichkeit (∗∗) $X := \overline{M}$;
bei beiden Möglichkeiten (∗) und (∗∗) ist $\pi_N|_{X \oplus N'}$ Isomorphismus bzw. $\pi_N|_X$ zerfallender Monomorphismus ;
es ist also X ein direkter Summand $\neq 0$ von $\overline{M} = \bigoplus_{i \in I'} M_i$ und $N' := = \pi_N(X)$ ist ein zu X isomorpher direkter Summand von N .

5.8 Korollar

Jeder R-Rechtsmodul , der eine RaT-Zerlegung besitzt , ist total .

Beweis:

Nach 5.7 besitzt jeder direkte Summand $\neq 0$ eines Rechtsmoduls , der eine RaT-Zerlegung hat,einen totalen direkten Summanden $\neq 0$; nach 2.7 ist damit jeder Rechtsmodul,der eine RaT-Zerlegung besitzt , total .

Die Aussage von 5.8 stellt eine Verallgemeinerung von 2.9 a) dar.

Im folgenden soll eine hinreichende Bedingung erarbeitet werden, unter der auch ein Rechtsmodul , der eine unendliche RaT-Zerlegung besitzt , stets RaT-Modul ist. Hat man einen Rechtsmodul M gegeben und will zeigen , daß M RaT-Modul ist , so hat man unter Berücksichtigung von 4.1 nachzuweisen , daß für alle $f \in Tot(M,M)$ $1_M - f$ automorph ist. Bei einem Rechtsmodul , der eine RaT-Zerlegung besitzt , reduziert sich der Nachweis der Bijektivität von $1_M - f$ auf den Nachweis der Surjektivität. Dies besagt das folgende Lemma. Für den Spezialfall einer LE-Zerlegung findet sich die Aussage des Lemmas in [6] S. 46 .

5.9 Lemma

Für einen R-Rechtsmodul M mit RaT-Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ gilt :

Für alle $f \in Tot(M,M)$ ist $1_M - f$ monomorph .

Beweis:

Sei $f \in Tot(M,M)$ und $x \in M$ mit $(1_M - f)(x) = 0$; es ist $x = 0$ zu zeigen :

Es gibt eine endliche Teilmenge I' von I mit $x \in \bigoplus_{i \in I'} M_i$; sei für $i \in I$ $e_i \in End_R(M)$ der Projektor von M auf den Summanden M_i und sei $e := \sum_{i \in I'} e_i$;
dann ist nach 5.3 $fe = \sum_{i \in I'} fe_i \in Ra(End_R(M))$; für den Automorphismus $1_M - fe$ gilt $(1_M - fe)(x) = (1_M - f)(x) = 0$ und daher ist $x = 0$.

In 5.12 soll die angekündigte hinreichende Bedingung formuliert werden , unter der auch ein Rechtsmodul mit unendlicher RaT-Zerlegung stets RaT-Modul ist.

5.10 Definition

Sei M R-Rechtsmodul mit RaT-Zerlegung.

Ein Untermodul A von M heiße lokaler direkter Summand von M , wenn A eine RaT-Zerlegung $A = \bigoplus_{k \in K} A_k$ besitzt und für jede endliche Teilmenge K' von K $\bigoplus_{k \in K'} A_k$ direkter Summand von M ist .

Eine entsprechende Definition für LE-Zerlegungen geht auf [4] S. 473 zurück (siehe auch [6] 5.3.).

5.11 Lemma

Für einen R-Rechtsmodul M mit RaT-Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ gilt :

Für alle $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ ist $(1_M - f)(M)$ lokaler direkter Summand von M .

Beweis:

Sei also $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$;

nach 5.9 ist $1_M - f$ monomorph , so daß $(1_M - f)(M) = \bigoplus_{i\in I} (1_M - f)(M_i)$ RaT-Zerlegung von $(1_M - f)(M)$ ist ;

sei nun I' eine endliche Teilmenge von I ; es ist nachzuweisen, daß $\bigoplus_{i\in I'} (1_M - f)(M_i)$ direkter Summand von M ist :

Für $i \in I$ sei $e_i \in \mathrm{End}_R(M)$ der Projektor von M auf den Summanden M_i und es sei $e := \sum_{i\in I'} e_i$; nach 5.3 ist $fe = \sum_{i\in I'} fe_i$ Element von $\mathrm{Ra}(\mathrm{End}_R(M))$ und damit $1_M - fe$ automorph ; wir haben folglich $M = (1_M - fe)(M) = \bigoplus_{i\in I'} (1_M - f)(M_i) \oplus \bigoplus_{i\in I\setminus I'} (1_M - fe)(M_i)$.

5.12 Satz

Sei M R-Rechtsmodul mit RaT-Zerlegung $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$; jeder lokale direkte Summand von M sei insbesondere direkter Summand von M ;

dann ist M RaT-Modul .

Beweis:

Unter Berücksichtigung von 4.1 ist zu zeigen , daß $1_M - f$ für alle $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ Automorphismus ist ; dies ist äquivalent dazu , daß $1_M - f$ für alle $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ zerfallender Monomorphismus ist, denn besitzt $1_M - f$ für alle $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ ein Linksinverses in $\mathrm{End}_R(M)$, so auch ein Inverses (vgl. [5] H.satz 9.3.1) .

Aus 5.9 , 5.11 und der Voraussetzung , daß jeder lokale direkte Summand von M insbesondere direkter Summand von M ist , folgt unmittelbar , daß $1_M - f$ für alle $f \in \mathrm{Tot}(M,M)$ zerfallender Monomorphismus ist .

Ist in 5.11 und 5.12 $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ speziell eine LE-Zerlegung, so finden sich vergleichbare Aussagen in [6] 5.3. .

Umgekehrt braucht ein Rechtsmodul, der eine RaT-Zerlegung besitzt, in dem Fall, daß er RaT-Modul ist, nicht notwendig die Eigenschaft zu haben, daß jeder lokale direkte Summand direkter Summand ist. Ist nämlich R wie in 2.14, so ist wegen $Ra(End(R_R)) = Tot(R_R, R_R) = 0$ R_R ein RaT-Modul; der Untermodul $U := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} {}_m eR$ von R_R (mit ${}_m eR$ wie in 2.14 angegeben) ist lokaler direkter Summand von R_R, aber kein direkter Summand von R_R, denn U ist groß in R_R (zu jedem $0 \neq x \in R$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit ${}_m e \in xR$).

Der in 2.14 behandelte R-Rechtsmodul $M = R^{(\mathbb{N})}$ ist demnach ein Beispiel für einen RaT-Modul, der weder die 2-ATE noch die Eigenschaft, daß jeder lokale direkte Summand direkter Summand ist, besitzt.

VI. DAS TOTAL VON RINGEN

Für jeden Modul M_R ist Tot(M,M) nach 1.2 Halbideal in $S:=\mathrm{End}_R(M)$, d.h. $S\,\mathrm{Tot}(M,M)S \subset \mathrm{Tot}(M,M)$. Im folgenden Satz werden die Elemente von S , die Tot(M,M) angehören , näher gekennzeichnet.

6.1 Satz

Sei M R-Rechtsmodul , $S := \mathrm{End}_R(M)$ und $\alpha \in S$; dann sind äquivalent :

(i) $\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M)$

(ii) $\forall$ Idempotente $0 \neq e \in S$ $\forall\ \beta \in S$ $\beta\alpha e \neq e$

(iii) $\forall\ \beta \in S$ $[\beta\alpha$ Idempotent in $S \Longrightarrow \beta\alpha = 0]$

(iv) $\forall$ Idempotente $0 \neq e \in S$ $\forall\ \beta \in S$ $\alpha\beta e \neq e$

(v) $\forall\ \beta \in S$ $[\alpha\beta$ Idempotent in $S \Longrightarrow \alpha\beta = 0]$.

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Sei also $\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M)$;
angenommen es gibt ein Idempotent $0 \neq e \in S$ und $\beta \in S$ mit $\beta\alpha e = e$, dann ist e(M) direkter Summand $\neq 0$ von M ; ist ι die Inklusion von e(M) in M und π Projektion von M auf den direkten Summanden e(M) , so ist $\pi\beta\alpha e\iota = \pi\beta\alpha\iota = \pi e\iota = 1_{e(M)}$ und damit $\alpha\iota$ zerfallender Monomorphismus , im Widerspruch zu $\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Gelte also für alle Idempotente $0 \neq e \in S$ und für alle $\beta \in S$ $\beta\alpha e \neq e$; ist dann für $\beta \in S$ $\beta\alpha$ Idempotent in S , so ist $\beta\alpha\beta\alpha = \beta\alpha$ und damit muß $\beta\alpha = 0$ sein.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Gelte also für alle $\beta \in S$ $[\beta\alpha$ Idempotent in $S \Longrightarrow \beta\alpha = 0]$; hat man dann ein Idempotent $e \in S$ und $\beta \in S$ mit $\alpha\beta e = e$, so ist $\beta e\alpha\beta e\alpha = \beta e\alpha$ und daher ist $\beta e\alpha = 0$, woraus $\alpha\beta e\alpha = e\alpha = 0$ und schließlich $e\alpha\beta e = e = 0$ folgt .

(iv) $\Longrightarrow$ (v) : Gelte also für alle Idempotente $0 \neq e \in S$ und für alle $\beta \in S$ $\alpha\beta e \neq e$;

ist dann für $\beta \in S$ $\alpha\beta$ Idempotent in S , so ist $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta$ und damit muß $\alpha\beta = 0$ sein .

(v) $\Longrightarrow$ (i) : Gelte also für alle $\beta \in S$ $[\alpha\beta$ Idempotent in $S \Longrightarrow \alpha\beta = 0]$;

angenommen α ist kein Element von Tot(M,M) ,
dann gibt es direkte Summanden $0 \neq A$ und B von M mit $\alpha(A) \subset B$, so daß $\overline{\alpha} : A \ni x \longmapsto \alpha(x) \in B$ isomorph ist ; sei $\overline{\beta}$ der inverse Isomorphismus von $\overline{\alpha}$, ι_A bzw. ι_B die Inklusion von A bzw. B in M und π_A bzw. π_B Projektion von M auf den direkten Summanden A bzw. B ; mit $e_B = \iota_B\pi_B$ und $\beta := \iota_A\overline{\beta}\pi_B$ ist $e_B\alpha\beta e_B = \iota_B\pi_B\alpha\iota_A\overline{\beta}\pi_B e_B =$
$= \iota_B\overline{\alpha}\overline{\beta}\pi_B = \iota_B\pi_B = e_B$ und damit $\alpha\beta e_B\alpha\beta e_B = \alpha\beta e_B$;daher muß $\alpha\beta e_B = 0$ sein , was aber wegen $e_B\alpha\beta e_B = e_B$ im Widerspruch zu $e_B \neq 0$ steht .

Bei entsprechender Formulierung der Definitionen für Linksmoduln lassen sich alle Aussagen und Beispiele der Kapitel I. bis V. und der Satz 6.1 auch für Linksmoduln bilden .

Für einen Ring R mit Eins sollen $\mathrm{Tot}(R_R,R_R)$ und $\mathrm{Tot}({}_RR,{}_RR)$ verglichen werden . Dazu erinnern wir , daß

$$\mathrm{End}(R_R) = \{r^{(l)} : R \ni x \longmapsto rx \in R \mid r \in R\}$$
$$\mathrm{End}({}_RR) = \{r^{(r)} : R \ni x \longmapsto xr \in R \mid r \in R\}$$

ist und

$\rho_l : R \ni r \longmapsto r^{(l)} \in \mathrm{End}(R_R)$ und $\rho_r : R \ni r \longmapsto r^{(r)} \in \mathrm{End}({}_RR)$

Ringisomorphismen sind .

Dann folgt aus 6.1 unmittelbar :

<u>6.2 Satz</u>

Sei R ein Ring mit Eins und $r \in R$; dann sind äquivalent :

(i) $r^{(l)} \in \mathrm{Tot}(R_R, R_R)$

(i') $r^{(r)} \in \mathrm{Tot}({}_RR, {}_RR)$

(ii) $\forall$ Idempotente $0 \neq e \in R$ $\forall s \in R$ $sre \neq e$

(iii) $\forall s \in R$ $[sr$ Idempotent in $R \Longrightarrow sr = 0]$

(iv) $\forall$ Idempotente $0 \neq e \in R$ $\forall s \in R$ $rse \neq e$

(v) $\forall s \in R$ $[rs$ Idempotent in $R \Longrightarrow rs = 0]$.

6.3 Definition

Für einen Ring R mit Eins soll $r \in R$ als totales Element von R bezeichnet werden , wenn r die äquivalenten Bedingungen in 6.2 erfüllt.
Die Menge aller totalen Elemente von R wollen wir als Total von R , kurz Tot(R) , bezeichnen.

$$\mathrm{Tot}(R) = \rho_l^{-1}(\mathrm{Tot}(R_R, R_R)) = \rho_r^{-1}(\mathrm{Tot}({}_RR, {}_RR)) .$$

$$\mathrm{Ra}(R) = \rho_l^{-1}(\mathrm{Ra}(\mathrm{End}(R_R)) = \rho_r^{-1}(\mathrm{Ra}(\mathrm{End}({}_RR)) .$$

Nach 1.2 ist Tot(R) grundsätzlich Halbideal in R , d.h. es ist $R\,\mathrm{Tot}(R)R \subset \mathrm{Tot}(R)$, und nach 4.1 ist grundsätzlich $\mathrm{Ra}(R) \subset \mathrm{Tot}(R)$.

6.4 Definition

Ein Ring R mit Eins soll als totaler Ring bezeichnet werden , wenn Tot(R) additiv abgeschlossen ist.
R werde als RaT- Ring bezeichnet , wenn Ra(R) = Tot(R) gilt .

In einem totalen Ring ist Tot(R) zweiseitiges Ideal. Außerdem sei bemerkt , daß jeder RaT-Ring totaler Ring ist.

Aus den Definitionen ergibt sich auf der Grundlage des Satzes 6.2 das folgende Korollar.

6.5 Korollar

Sei R ein Ring mit Einselement.

a) Dann sind äquivalent :

(i) R ist totaler Ring

(ii) R_R ist total

(iii) ${}_R R$ ist total .

b) Dann sind äquivalent :

(i) R ist RaT- Ring

(ii) R_R ist RaT - Modul

(iii) ${}_R R$ ist RaT- Modul .

Im folgenden Satz wird ein wichtiger Zusammenhang angegeben.

6.6 Satz

Sei M R-Rechtsmodul oder R-Linksmodul ; $S := \mathrm{End}_R(M)$;

dann ist $\mathrm{Tot}(M,M) = \mathrm{Tot}(S)$.

Beweis:

Nach 6.1 und 6.2 gilt für $\alpha \in S$:

$\alpha \in \mathrm{Tot}(M,M) \iff \forall$ Idempotente $0 \neq e \in S$ $\forall \beta \in S \quad \beta\alpha e \neq e$

$\iff \alpha \in \mathrm{Tot}(S)$.

Aus den Definitionen ergibt sich mit 6.6 unmittelbar:

6.7 Korollar

Sei M R-Rechtsmodul oder R-Linksmodul ; $S := \mathrm{End}_R(M)$.

a) M ist genau dann totaler Modul , wenn S totaler Ring ist.

b) M ist genau dann RaT- Modul , wenn S RaT- Ring ist.

Es sollen Beispiele für totale und nicht totale Ringe und deren Totale angegeben werden.

6.8 Beispiele

1. Sei R Ring mit Eins und R_R bzw. $_RR$ direkt unzerlegbar.

a) Es sind für $r \in R$ äquivalent :

(i) $r \in \mathrm{Tot}(R)$

(ii) r hat kein Linksinverses

(iii) r hat kein Rechtsinverses

(iv) r hat kein Inverses.

b) Es sind äquivalent :

(i) R ist lokaler Ring

(ii) R ist RaT- Ring

(iii) R ist totaler Ring.

Beweis von a):
0 und 1 sind die einzigen Idempotente in R, so daß die Äquivalenzen aus 6.2 folgen.

Beweis von b):
R_R ist genau dann LE-Modul, wenn R lokaler Ring ist, so daß 4.3 d) herangezogen werden kann.

So ist für R = Z (= Ring der ganzen Zahlen) oder R = k[X] (k beliebiger Körper) R_R bzw. $_RR$ direkt unzerlegbar, jedoch genügt R in beiden Fällen nicht den unter b) genannten äquivalenten Bedingungen.

$\mathrm{Tot}(Z) = Z \setminus \{+1,-1\}$ $\qquad$ $\mathrm{Ra}(Z) = 0$

$\mathrm{Tot}(k[X]) = k[X] \setminus k^*$ $(k^* = k \setminus 0)$ $\qquad$ $\mathrm{Ra}(k[X]) = 0$

Bei der Ringerweiterung $k \subset k[X]$ ist also der Unterring k ein totaler Ring, der Oberring k[X] hingegen nicht.
Es sei außerdem noch bemerkt, daß k[X] ein Beispiel für eine nicht totale unendlich dimensionale k-Algebra ist.

2. Seien R_i $(i \in I)$ Ringe mit Einselement und $R := \prod_{i \in I} R_i$; dann ist

$$\mathrm{Tot}(R) = \left\{ (r_i)_{i \in I} \in R \;\middle|\; r_i \in \mathrm{Tot}(R_i) \quad \forall\, i \in I \right\}$$

und R ist genau dann totaler Ring bzw. RaT-Ring , wenn für alle $i \in I$ R_i totaler Ring bzw. RaT-Ring ist .

Beweis:

Sei $r = (r_i) \in R$;

gibt es $i_o \in I$ mit $r_{i_o} \notin \mathrm{Tot}(R_{i_o})$, so existiert nach der Kennzeichnung in 6.2 $s_{i_o} \in R_{i_o}$ derart, daß $s_{i_o} r_{i_o}$ Idempotent $\neq 0$ in R_{i_o} ist ; für $x = (x_i) \in R$ mit $x_{i_o} = s_{i_o}$, sonst $x_i = 0$ ist somit xr Idempotent $\neq 0$ in R und daher nach 6.2 $r \notin \mathrm{Tot}(R)$.

Ist umgekehrt $r \notin \mathrm{Tot}(R)$, so existiert nach 6.2 $s = (s_i) \in R$, so daß sr Idempotent $\neq 0$ in R ist ; in $sr = (s_i r_i)$ gibt es $s_{i_o} r_{i_o}$ mit $s_{i_o} r_{i_o} \neq 0$; $s_{i_o} r_{i_o}$ ist dann Idempotent $\neq 0$ in R_{i_o} , so daß nach 6.2 $r_{i_o} \notin \mathrm{Tot}(R_{i_o})$ folgt .

Klar ist Tot(R) genau dann additiv abgeschlossen, wenn es alle $\mathrm{Tot}(R_i)$ sind.

$\mathrm{Ra}(R) = \mathrm{Tot}(R)$ gilt genau dann , wenn für alle $i \in I$ $\mathrm{Ra}(R_i) = \mathrm{Tot}(R_i)$ gilt, denn in vergleichbarer Weise ist wie beim Total $\mathrm{Ra}(R) = \left\{ (r_i) \in R \;\middle|\; r_i \in \mathrm{Ra}(R_i) \quad \forall\, i \in I \right\}$.

3. Sei R ein Ring mit Einselement.

Besitzt R_R oder $_RR$ eine RaT-Zerlegung, so ist R RaT-Ring.

Beweis:

Besitzt R_R oder $_RR$ eine RaT-Zerlegung , so ist diese nach [5] H.satz 7.2.3 endlich ; nach dem Satz 5.4 sind dann R_R und $_RR$ RaT-Modul .

Wir wollen einige explizite Beispiele für Ringe angeben , bei denen R_R insbesondere eine LE-Zerlegung besitzt:

- lokale Ringe (Ist R lokal , so ist R_R LE-Modul.)
- halbeinfache Ringe; es ist Ra(R) = Tot(R) = 0 (vgl. 4.3 e))
- semi-perfekte Ringe (Ist R semi-perfekt, so besitzt R_R nach [5] Folg. 11.4.3 eine LE-Zerlegung.) .

4. Für einen rechts (bzw. links) noetherschen Ring R sind äquivalent:

(i) R_R (bzw. ${}_RR$) besitzt eine endliche LE-Zerlegung

(ii) R ist RaT-Ring

(iii) R ist totaler Ring .

Ist R beidseitig noethersch , dann sind äquivalent:

(i) R_R besitzt eine endliche LE-Zerlegung

(ii) ${}_RR$ besitzt eine endliche LE-Zerlegung

(iii) R ist RaT-Ring

(iv) R ist totaler Ring .

Beweis: Folgt unmittelbar aus Korollar 5.5 .

Wir wollen einige Beispiele behandeln:

a) Jeder rechts (bzw. links) artinsche Ring ist ein Beispiel für einen rechts (bzw. links) noetherschen Ring , der den äquivalenten Bedingungen (i) bis (iii) genügt.
Nach [5] Folg. 11.1.6 ist nämlich jeder rechts oder links artinsche Ring ein semi-perfekter Ring und als solcher nach 6.8 3. ein RaT-Ring.

Ein Beispiel für einen beidseitig artinschen Ring ist der Ring $R = Z/nZ$ (Z Ring der ganzen Zahlen ; $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$). Ist $n=p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}$ die Primzahlzerlegung von n (mit $p_i \neq p_j$ für alle $i \neq j$, $l_i \in \mathbb{N}$) , so ist $R = \bigoplus_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i^{l_i}} Z/nZ$ LE-Zerlegung von R_R und ${}_RR$.
Es ist $Ra(R) = Tot(R) = p_1\cdots p_k/nZ$.

Ein weiteres Beispiel für einen beidseitig artinschen Ring ist jede endlich dimensionale k-Algebra über einem Körper k.

b) Beispiele für nicht totale beidseitig noethersche Ringe haben wir in 6.8 <u>1.</u> kennengelernt: Z , $k[X]$

c) Sei $k \subset K$ eine unendlich dimensionale Körpererweiterung und $R := \begin{pmatrix} k & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$.

R ist nicht kommutativ. Nach [5] S. 140/141 ist R rechts noethersch und artinsch , links hingegen nicht noethersch. R_R besitzt die LE-Zerlegung $R = \begin{pmatrix} k & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$

<u>Wir bestimmen Tot(R) = Ra(R) :</u>

Seien $a \in k$, $b,c \in K$ und $r := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$;
im Falle $a \neq 0$ und $c \neq 0$ ist r Einheit in R , im Falle $a \neq 0$ und $c = 0$ ist $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Idempotent $\neq 0$ in R , im Falle $a = 0$ und $c \neq 0$ ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Idempotent $\neq 0$ in R ;
nach der Kennzeichnung in 6.2 folgt demnach: $r \in Tot(R) \Longrightarrow$ $a = 0$ und $c = 0$; wir zeigen , daß auch "$\Longleftarrow$" gilt:

dazu bilden wir für $x \in k$, $x,y \in K$ $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und stellen wegen $\begin{pmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ fest , daß $s\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für alle $s \in R$ kein von Null verschiedenes Idempotent in R ist ; nach der Kennzeichnung in 6.2 folgt $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Tot}(R)$ und damit ist also

$$\mathrm{Tot}(R) = \mathrm{Ra}(R) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es sei noch bemerkt , daß auch ${}_R R$ eine LE-Zerlegung besitzt:
$R = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$.
Außerdem sei noch darauf hingewiesen, daß es sich bei R insbesondere um eine unendlich dimensionale k-Algebra handelt .

5. Jeder reguläre Ring R ist RaT-Ring ; es ist $\mathrm{Ra}(R) = \mathrm{Tot}(R) = 0$.

Beweis:
Ist R regulärer Ring und $r \in R$, so gibt es $s \in R$ mit $rsr = r$ und sr ist dann Idempotent in R ; ist nun $r \in \mathrm{Tot}(R)$, so muß nach der Kennzeichnung in 6.2 $sr = 0$ sein und folglich ist $r = rsr = 0$.

6. Jeder Austauschring R (d.h. R_R hat die 2-ATE) ist RaT-Ring.

Beweis: Folgt aus 4.7 .

Ein Beispiel für einen Austauschring ist der in 2.14 behandelte Ring R. Nach 2.14 besitzt R_R bzw. ${}_R R$ keine LE-Zerlegung , ist R nicht regulär und es ist $\mathrm{Ra}(R) = \mathrm{Tot}(R) = 0$.

7. Wir wollen folgenden totalen Endomorphismenring betrachten:

Sei M ein Rechts- oder Linksmodul , der eine LE-Zerlegung besitzt , aber kein Haradamodul ist (z.B. M der in 4.3 g) behandelte Z-Modul $M_Z = \coprod_{n\in\mathbb{N}} Z/p^nZ$ mit fester Primzahl p) und sei S der Endomorphismenring von M ; nach 6.6/6.7 ist S totaler Ring ohne RaT-Ring zu sein.(Bei der Behandlung von M_Z in 4.3g) wird explizit ein f angegegeben,das zwar in Tot(M,M)=Tot(S) liegt, nicht aber in Ra(S).)

Wir fassen die Besonderheiten von S zusammen:

- S ist totaler Ring
- S ist kein RaT-Ring
- S_S bzw. $_SS$ besitzt keine RaT-Zerlegung und damit erst recht keine LE-Zerlegung (folgt aus 6.8 <u>3.</u>)
- S ist weder rechts noch links noethersch (folgt aus 6.8 <u>4.</u>)
- S ist nicht regulär (folgt aus 6.8 <u>5.</u>)
- S ist kein Austauschring (folgt aus 6.8 <u>6.</u>) .

In S_S bzw. $_SS$ lernen wir also ein Beispiel für einen totalen Modul kennen , der keine RaT-Zerlegung hat !

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. Azumaya
"Correction and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's Theorem"
Nagoya Math. J. 1 (1950) , 117 - 124

[2] P. Crawley and B. Jonsson
"Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems"
Pacific J. Math. 14 (1964) , 797 - 855

[3] M. Harada and Y. Sai
"On categories of indecomposable modules I"
Osaka J. Math. 7 (1970) , 323 - 344

[4] T. Ishii
"On locally direct summands of modules"
Osaka J. Math. 12 (1975) , 473 - 482

[5] F. Kasch
"Moduln und Ringe"
B.G. Teubner Stuttgart 1977

[6] F. Kasch
"Zerlegungseigenschaften von Moduln und Ringen"
Seminarausarbeitung München 1980/81

[7] W.K. Nicholson
"Lifting idempotents and exchange rings"
Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1977) , 269 - 278

[8] J. Stock
"Über die Austauscheigenschaft von Moduln"
Dissertation , München 1982.

[9] R.B. Warfield
"Exchange rings and decompositions of modules"
Math. Ann. 199 (1972) , 31 - 36

[10] R.B. Warfield
"A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules"
Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969) , 460 - 465

[11] K. Yamagata
"On rings of finite representation type and modules with the finite exchange property"
Sei. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku , Sec.A , 13 (1975) , 1 - 6

[12] A. Zöllner
"Two-exchange decompositions"
München 1986

[13] G.M. Kelly
"On the radical of a category"
J. Austral. Math. Soc. 4 (1964) , 299 - 307

Wolfgang Schneider
Rugendasstr. 6
D - 8900 Augsburg

Algebra Berichte

Herausgeber/Editors

Prof. Dr. Friedrich Kasch,
Prof. Dr. Bodo Pareigis
Mathematisches Institut
der Ludwig-Maximilians-
Universität München
Theresienstr. 39
8000 München 2
West-Germany

Verlag/Publisher

Reinhard Fischer
Fallmerayerstraße 36
8000 München 40
West-Germany

Abonnement- oder
Einzeltitelbestellungen richten Sie
an den Verlag.

Korrespondenz und Manuskripte
bitte an die Herausgeber.

Please send subscription or
copy order directly to the publisher.

Please send correspondence and
manuscripts to the editors.

ISBN 3-88927-036-0