# Experimentelle Geometrie von Lietzmann bis Lego

von Reinhard Oldenburg

Experimentelle Geometrie – Geometrie experimentell. Dieses Begriffs-Paar hat es in sich, schließlich reicht es von den philosophischen Grundlagen der Mathematik bis zur Unterrichtsmethodik. Im vorliegenden Beitrag soll der Bogen nicht ganz so weit gespannt werden. Ausgangspunkt ist das Buch "Experimentelle Geometrie" von Walther Lietzmann, aus dem einige Ideen geborgen und in die heute Zeit transportiert werden. Die Entwicklung der Didaktik seit Lietzmanns Zeiten lässt sich darlegen im Vergleich zu neueren Beiträgen zur experimentellen Geometrie. Ein wesentlicher Punkt ist, dass bei Lietzmann noch nicht diskutiert wird, welche Experimente durch die Schüler durchgeführt werden können. Dazu bietet sich die Verwendung von Lego oder anderer Baukastensysteme an.

# Walther Lietzmanns "Experimentelle Geometrie" von 1959

Eine Zeitreise von nur knapp 50 Jahren ist nötig, um in eine ganz eigentümliche Welt einzutauchen. Lietzmann beschreibt Ideen für einen gymnasialen Mathematikunterricht, in dem das Beweisen einen hohen Stellenwert besitzt, in dem die Geometrie axiomatisch aufgebaut wird und in dem algebraische Hilfsüberlegungen kein Problem darstellen. Insofern könnte man zweifeln, ob man dem Buch heutzutage überhaupt einen Nutzen abgewinnen kann. Allerdings liegt der Schwerpunkt des Buchs außerhalb des traditionellen Geometriekanons und viele der beschriebenen Experimente können, wie gezeigt werden soll, auch aktuellen Zielen des Mathematikunterrichts dienen.

Schon im Vorwort gibt Lietzmann eine interessante Definition: Experimentelle Geometrie ist jene Geometrie, die andere Hilfsgeräte als Zirkel und Lineal benutzt: Bilineal, Zeichendreieck, Schablonen, Winkelhaken, Fäden, Gelenkmechanismen, Faltungen. Weiter unterscheidet Lietzmann im Anschluss an Klein zwischen rationaler Geometrie als Teil der Präzisionsmathematik (Mathematik als rationale Konstruktion, ideal, exakt) und Wirklichkeitsgeometrie als Teil der Approximationsmathematik (Mathematik in realen Objekten, approximativ). Unter diesem Gesichtspunkt diskutiert Lietzmann ausführlich die Beziehungen zwischen real ausgeführten Konstruktionen und ihren idealen Partnern. Dabei betont er, dass man bei den Überlegungen zur Approximationsgeometrie nicht auf die rationale Geometrie verzichten kann. Sie stellt, so würde ich sagen, die Sprache bereit, mit der über reale Konstruktionen gesprochen werden kann. Aus moderner Sicht verdient auch der umgekehrte Blickwinkel verstärkt Beachtung, also die Konstruktion der rationalen Geometrie in Wechselwirkungen mit den Operationen, die das Individuum ausführt (vgl. auch Lakoff/Nunez 2000).

Typischerweise wechselt Lietzmann sehr schnell von der Realsituation zur rationalgeometrischen Modellierung. Es gibt wenig Hinweise zur konkreten Durchführung von
Experimenten, schon gar nicht für Schüler. Natürlich ist auch für Lietzmann Schüleraktivität
ein wichtiges Ziel und er formuliert eine Vielzahl von Aufgaben, die sich aber
schwerpunktmäßig auf die rationale Analyse und das Führen von Beweisen beziehen. Für eine
zeitgemäße Nutzung von Lietzmanns Buch muss man in diesem Bereich nachlegen und eben
dazu bieten sich Schülerexperimente u.a. mit Lego-Materialien an.

### **Zum Vergleich: Schwengelers "Geometrie experimentell"**

Den Paradigmenwechsel der Mathematikdidaktik seit den Fünfziger-Jahren kann man gut im Kontrast zwischen Lietzmanns Buch und dem von Schwengeler erkennen, das fast den gleichen Titel trägt, Lietzmann aber leider nicht zitiert. Bei Schwengeler ist die Bedeutung

des Beweisens deutlich reduziert, dafür gibt es mehr Materialien für die Schülerarbeit. Außerdem dienen die Experimente häufiger der Veranschaulichung oder dem Entdecken mathematischer Sachverhalte als dem Initiieren von mathematischen Beweisen und Analysen. Ein gemeinsames Thema beider Bücher ist aber die Winkeldreiteilung. Aus meiner Sicht ist dies allerdings ein Problem, dessen Bedeutung sich aus der lokalen Schülersicht nur schwer erschließen lässt.

### Lego

Für geometrische Experimente können viele verschiedene Materialien benutzt werden, und der Mathematikunterricht sollte hier auch die Vielfalt aufzeigen. Wenn sich dieser Beitrag auf Lego konzentriert, so liegt das neben der Begrenzung des Umfangs an folgenden Vorzügen:

- Fast alle Schüler können mit Lego umgehen und viele können zu Hause damit weiter experimentieren.
- Durch die Legotechnik-Serie stehen eine Reihe interessanter Bauelemente zur Verfügung.
- Über die Roboter der Lego-Mindstormsreihe ist auch eine aktive Steuerung und Messdatenerfassung möglich.

Dem stehen aber auch einige Nachteilen gegenüber:

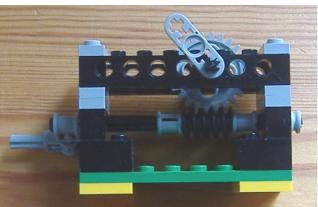
- Ungeometrische Bevorzugung bestimmter Richtungen
- Die Verwaltung der vielen Legosteine in der Schule ist ein organisatorisches Problem.
- Geringe Stabilität

### Kleine Beispiele zu Lego im Mathematikunterricht

Hier geben wir einige kleine Beispiele, die vor allem aus dem Blickwinkel interessant sind, dass sie als Schülerexperimente durchgeführt werden können. (Mehr zu mathematischen Schülerexperimenten findet man in Ludwig/Oldenburg 2007.)

**Zahnradgetriebe 1**: Wann treffen sich zwei markierte Zähne zweier in sich greifender Zahnräder wieder? Die Lösung ergibt sich natürlich aus dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahnzahlen. Wenn mehrere verschiedene Zahnräder zur Verfügung stehen, können die Schüler ausprobieren, Hypothesen und Theorien bilden und evtl. falsifizieren.





**Zahnradgetriebe 2**: Ein Getriebe kann als eine Funktions-Maschine aufgefasst werden, bei der die Eingabe und die Ausgabe als Umdrehungszahlen erfolgt. Dabei wird eine proportionale Zuordnung realisiert. Das Ganze ist auch mit einem Schneckengetriebe möglich, dann allerdings hat man die Umkehrfunktion nicht direkt "im Griff".

**Kongruenzsatz SSS**: Dreiecke aus drei Stäben sind trotz drehbaren Verbindungen an den Ecken starr. Diese Erfahrung ist schon der ganze Kongruenzsatz.





**Parallelogramm-Charakterisierung**: Bei einem Viereck, bei dem gegenüber liegende Seiten gleiche Längen haben, sind die Seiten immer parallel (außer wenn es überschlagen wird). Diese Erfahrung demonstriert den Satz – bewiesen wird er natürlich nicht experimentell.

All diese Beispiele könnten auch virtuell durchgeführt werden, z.B. mit einem DGS. Die Vorteile eines realen, materiellen Experimentes liegen aber auf der Hand:

- Das Experiment demonstriert das Phänomen ohne weiteres Zutun, es macht klar, dass es neben den offensichtlichen Bedingungen keine weiteren, versteckten Wirkmechanismen gibt. Dies ist gerade bei DGS-Modellen oft nicht der Fall, weil die Schüler nicht wissen, ob der Lehrer in einer Konstruktion "Tricks" mit verstecken Objekten eingebaut hat, oder ob das DGS selbst durch die komplexen Zugregeln den Effekt erzeugt. Auch wenn es den Schülern klar ist, dass es keine verborgenen Elemente gibt, so bleibt doch die Unsicherheit, ob ein Ergebnis einer bestimmten Konstruktionsweise geschuldet ist. Wenn beispielsweise ausgehend von der Definition der Parabel als geometrischem Ort die übliche Tangentenkonstruktion mit einer Mittelsenkrechten gemacht wird, können die Schüler die Parabel als Ortslinie visualisieren. Aber sind die daran zu beobachtenden Eigenschaften Konsequenzen allein der Definition oder aber dieser speziellen Konstruktion?
- Das Realexperiment schränkt die Handlungsmöglichkeiten nicht ein. Kontrast: Bei DGS-Modellen lassen sich immer nur bestimmte Basispunkte ziehen.
- Unterrichtserfahrungen zeigen, dass die Motivationswirkung von Experimenten noch höher ist als die durch den Computereinsatz.

### **Konstruktion und Analyse**

Die Arbeit mit Lego macht das Wechselspiel von Konstruktion (Synthese) und Analyse offensichtlich. Bei Lietzmann wird der Analyse viel Raum gegeben, deshalb soll hier exemplarisch gezeigt werden, wie experimentelles Tun zur Konstruktion von Begriffen genutzt werden kann.

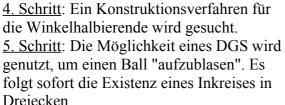
#### Die Winkelhalbierende

1. Schritt: Problem erkunden, Erfahrungen sammeln

Fragestellung: Wo bleibt ein Ball stecken, der in einen enger werdenden Spalt fällt? Die Realisierung im zweidimensionalen Lego-Modell ist leicht (siehe Bild). Durch Veränderung des Spaltwinkels erhält man eine dynamische Sicht. Außerdem können verschiedene Balldurchmesser verwendet werden.

2. Schritt: Über Skizzen nähert man sich einer zweidimensionalen Modellierung aus Kreisen und Geraden. Diese kann mit DGS erkundet werden. Dabei sollte zunächst keinerlei Beziehung zwischen Kreis und Scheitel hergestellt werden, damit die Situation möglichst lange offen bleibt.

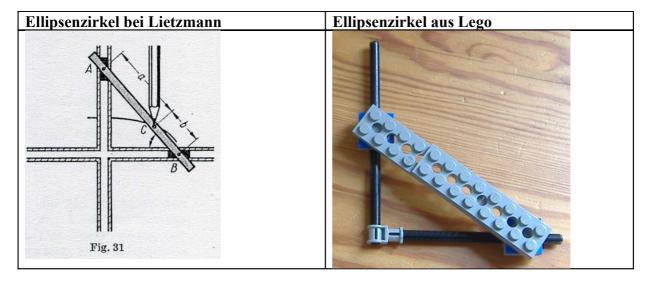
3. Schritt: Die Rolle der Winkelhalbierenden wird erkannt, ihre Symmetrieeigenschaft benannt. Jetzt kann die DGS-Funktion zur Konstruktion der Winkelhalbierenden sinnvoll verwendet werden.

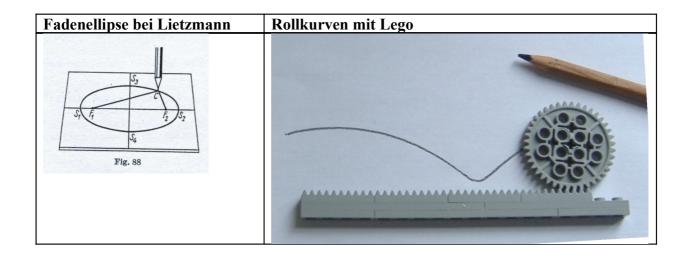




- 1. Bemerkung: Die Dynamik des DGS kann hier unterschiedlich genutzt werden. Einerseits zur Umsetzung einer zeitlichen Bewegung, zum anderen zur Parametrisierung verschiedener Fälle (Variation des Kreisradius).
- 2. Bemerkung: Es ist erstaunlich, wie viele verschiedene Konstruktionen in einem herkömmlichen DGS zu dieser Situation sinnvoll sind:
- a) Scheitel und Kreis beziehungsfrei (zur Exploration)
- b) Kreismittelpunkt auf Winkelhalbierende Konstruiert
  - b1) Kreisradius fest
  - b2) Kreisradius aus Abstand zu Geraden
- c) Kreis Mittelpunkt aus tangentialer Lage konstruiert
  - c1) Kreisradius fest
  - c2) Kreisradius aus Abstand zu Geraden

### Ein Katalog von Beispielen





# Constraint Geometry

Pantographen lassen sich außer mit Lego (siehe Bild) sehr schön mit dynamischer Geometrie realisieren. Dabei stellt man allerdings fest, dass es nicht möglich ist, die volle Funktionalität

des Lego-Modells umzusetzen, weil man sich entscheiden muss, welche Punkte als Basispunkte am Anfang der Konstruktion stehen.

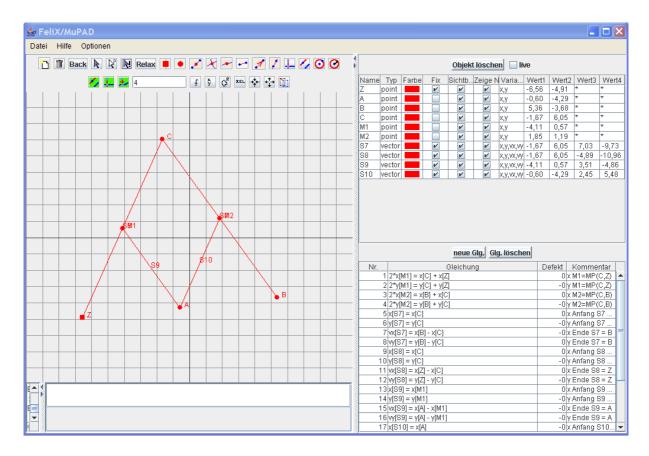
Geometrieprogramme müssen aber nicht notwendig Konstruktionen verwenden. Die Systeme der "constraint geometry" wollen es dem Nutzer ermöglichen, Objekte zu erzeugen und danach willkürlich einzuschränken, indem geometrische Relationen gesetzt werden. Es gibt bisher ein kommerzielles DGS dieser Art, GeometryExpression von Saltire (www.geometryexpressions.com). Allerdings ist das Ziel, beliebige Relationen angeben zu können, dort nur teilweise erreicht. Flexibler ist der Prototype FeliX des Autors. Mit diesem Programm kann man einen voll funktionsfähigen Pantographen z.B. mit folgenden Schritten erhalten:



- Vier Punkte Z,A,B,C erzeugen.
- Mittelpunkte M1, M2 von ZC bzw. CB erzeugen.
- Strecken ZC, CB, AM1, AM2 erzeugen
- Parallelität von ZC und AM2 erzwingen
- Parallelität von BC und AM1 erzwingen
- Länge von AM1 gleich Länge von AM2 gleich feste Zahl.

In der speziellen Wahl dieser Relationen steckt übrigens kein Geheimwissen um Eigenschaften des Programms – sie ist rein willkürlich, man kann z.B. auch nur mit Längenangaben auskommen.

Das so entstandene Modell ist voll funktionsfähig und entspricht dem Realmodell, d.h. es kann insbesondere an allen Punkten mit der Maus bewegt werden. Die Gleichungen können nachträglich noch so modifiziert werden, dass andere Vergrößerungsfaktoren realisiert werden.



Die entsprechende Konstruktion in GeometryExpression dagegen kann nicht an allen Punkten bewegt werden, ist also nicht äquivalent zum Modell. Allerdings wird hier unfairerweise ein Prototyp (FeliX) mit einem fertigen und gut nutzbaren Programm verglichen. Festzuhalten bleibt aber, dass die künftige Entwicklung von Geometrieprogrammen Constraints immer nutzbarer machen werden und dass daraus die Notwendigkeit erwächst, die Bedeutung von Konstruktionen aus didaktischer Sicht neu zu bewerten. Wie viele Konstruktionen braucht der Mensch? Ein Versuch einer Antwort soll in (Oldenburg 2007) gegeben werden.

Bemerkenswerterweise fällt nach Lietzmanns Verständnis jedes Arbeiten mit einem Constraint-Geometry-System (CGS) in den Bereich der experimentellen Geometrie, weil man ja Werkzeuge jenseits von Zirkel und Lineal verwendet. Aber auch wenn man unter experimenteller Geometrie weniger an die Definition des Werkzeugs als an die offene, probierende Herangehensweise denkt, ist diese Zuordnung treffend.

**These**: CGS ermöglichen einen weitaus stärker experimentierenden Zugang zur Geometrieals DGS.

Die Begründung ist denkbar einfach, muss aber in der Zukunft noch durch Unterrichtsbeobachtung abgesichert werden: Bei DGS erfordert das eigene freie Tun, dass man einen Plan (der sich zur Konstruktion verfeinert) hat, bei CGS dagegen, kann man willkürlich Objekte erzeugen und Bedingungen hinzufügen und dann mit der Maus erforschen, welche Konsequenzen das hat. Gibt es ein Viereck mit drei rechten Winkeln? Sind alle Sechsecke, bei denen gegenüberliegende Seiten parallel sind, symmetrisch? Diese und ähnliche Fragen kann man frei erkunden.

#### **Planimetrie**

Planimeter sind Geräte, die den Flächeninhalt eines durch eine Kurve berandeten Flächenstücks der Ebene bestimmen, indem die Randkurve abgefahren wird. Dass so etwas möglich ist, illustriert schön den Gaußschen Integralsatz in der Ebene

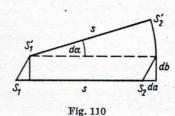
$$\int_{B} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy = \oint_{\partial B} u dx + v dy, \text{ der sich für } u(x, y) = -y, v(x, y) = x \text{ auf}$$

$$|B| = \frac{1}{2} \oint_{\partial B} -y dx + x dy \text{ reduziert.}$$

Interessanterweise braucht man nicht unbedingt einen Computer, um dieses Integral approximativ zu bestimmen, und auch die Theorie kann bis aus Schulniveau elementarisiert werden.

Lietzmann beschreibt das Planimeter nach Amsler, bei dem eine Stange an einem Ende auf einem festen Kreisbogen wandern kann, während das andere Ende längs der Randkurve der interessierenden Fläche bewegt wird. Lietzmann untersucht zunächst die von der Stange bei einer infinitesimalen Bewegung überstrichene Fläche und integriert diese auf.

Durch eine genügend kleine Bewegung möge  $S_1 S_2$  in die Lage  $S_1' S_2'$  kommen (Fig. 110). Diese Bewegung setzt sich zusammen aus einer Parallelverschiebung, die durch eine x-Komponente da und eine y-Komponente db, und eine Drehung um  $S_1'$ , die durch die Drehung da gegeben sei. s überstreicht dann ein Viereck  $S_1 S_2 S_2' S_1'$ , dessen Fläche angenähert durch



$$\mathrm{d}F = s \cdot \mathrm{d}b + \frac{s^2}{2} \cdot \mathrm{d}\alpha$$

gegeben ist. Bei dieser Berechnung ist auf das Vorzeichen von db und d $\alpha$  zu achten. Wir setzen etwa db positiv, wenn es in Richtung der positiven y-Achse liegt, d $\alpha$  positiv, wenn es im positiven Drehsinn, also entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers genommen ist.

Wenn jetzt s seine ganze Bewegung durchführt, d. h.  $S_1$  auf  $k_1$ ,  $S_2$  auf  $k_2$  bis wieder in die Anfangslage zurückkehrt, dann ist die überstrichene Fläche durch ein Integral

$$F = \int s \, \mathrm{d}b + \int \frac{s^2}{2} \cdot \mathrm{d}\alpha = s \int \mathrm{d}b + \frac{s^2}{2} \int \mathrm{d}\alpha$$

gegeben. Wir wollen annehmen, die Kurve  $k_2$  umschließe den Kreis  $k_1$  nicht. Das zweite Integral ist dann Null, da keine volle Umdrehung erfolgt ist — der Stab  $S_1S_2$  wurde nur ausgelenkt und ging in seine Ausgangslage zurück. Wir haben es also nur noch mit  $F=s\int \mathrm{d}b$  zu tun.

An dieser Stelle könnte Lietzmann so argumentieren: Beiträge von mehrfach in verschiedene Richtungen überstrichenen Flächenstücken heben sich gegenseitig auf. Am Ende ist der Stab wieder in Ausgangslage und das linke Ende hat sich auf dem Kreisbogen nur hin- und herbewegt. Also kommt ein Beitrag nur von dem Flächenstück, um das der rechte Endpunkt herumgelaufen ist.

Lietzmann zieht es allerdings vor, die überstrichene Fläche zu diskretisieren und das Wegheben von Beiträgen in der Summe zu verfolgen. Dann argumentiert er weiter:

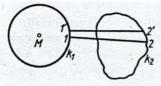


Fig. 112

Dreiecke zu einem der Kurve  $k_2$  eingeschriebenen n-Eck, jedoch das dem Kreis eingeschriebene n-Eck mit dem negativen Vorzeichen. So wird also im Grenzfall  $n \to \infty$ 

$$F = F_2 - F_1.$$

Da  $F = s \int db$  ist, so ergibt sich jetzt

$$F_2 = F_1 + s \int \mathrm{d}b.$$

Dem Konstrukteur des Planimeters blieben also zwei Aufgaben. Wie bestimmt man  $F_1$  möglichst einfach, und wie wertet man  $\int \mathrm{d}b$  aus? Die erste Aufgabe ist mit der Wahl der Kreisführung von  $S_1$  bereits erledigt. Wenn  $S_1$  bei der Bewegung des Planimeters auf einem Kreisbogen hin und her läuft, so wird der eingeschlossene Inhalt  $F_1=0$ . Alles hängt von der Lösung der zweiten Aufgabe ab.

Amsler benutzte eine am Rande geriffelte Rolle, die mit ihrer Drehung nur die Bewegungen in der zum Stab  $S_1S_2$  senkrechten Richtung mitmacht. Dann ist die Drehung proportional der Verschiebung db. Ist der von der Stablänge s, dem Radius r der Rolle abhängige Proportionalfaktor f,  $\varphi$  der Drehwinkel der Rolle, dann wird

$$F_2 = f \cdot \varphi$$
.

Letztlich ergibt sich der Flächeninhalt also direkt aus der Strecke, die die Rolle abfährt. Ein Planimeter aus Lego ist einfach gebaut, Hauptproblem und Fehlerquelle ist zu messen, wie weit die Rolle sich bewegt hat. Dazu könnte ein Rotationssensor aus der Lego Mindstorm-Roboter-Reihe die Umdrehungszahl zählen, im Sinne eines technologischen Minimalismus kann man aber auch darauf verzichten. Das so gebaute Planimeter ist ein recht ungenaues Messinstrument. Man kann aber sehr gut erkennen, dass der Flächeinhalt eines um den Faktor 2 gestreckten Rechtecks mit dem Faktor 4 zunimmt (im Experiment: 3,5). Für den Quotienten aus dem Flächeninhalt des Zweiheitsquadrates und dem Inhalt seines einbeschriebenen Einheitskreises ergab sich 1,5 (statt  $4/\pi \approx 1,27$ ).



#### Literatur

Lakoff, G., Nunez, R. E.: Where Mathematics comes from. Basic Books, New York, 2000.

Lietzmann, W.: Experimentelle Geometrie. Teubner, Stuttgart 1959.

Ludwig, M., Oldenburg, R.: Mathematische Experimente. Themenheft mathematik lehren, erscheint 2007.

Oldenburg, R: Eine didaktische Analyse der "Constraint Geometry", in Vorbereitung.

Schwengeler, A. Ch.: Geometrie experimentell: Zürich 1998.

Wittmann, E. Ch.: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Vieweg, Wiesbaden 1987.

Wittmann, G.: Ellipse, Hyperbel, Parabel – Koordinatengeometrie ohne Vektoren. In: *mathematik lehren*, Heft 133, 2005.

Adresse des Autors: Prof. Dr. R. Oldenburg, PH Heidelberg, INF 561, 69120 Heidelberg, oldenburg@phheidelberg.de