Experimentieren im Geometrieunterricht

Timo Leuders, Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg

Zum Thema

Die Herbsttagung 2006 des GDM-Arbeitskreises Geometrie stand unter der Überschrift „Experimentelle Geometrie“. Der Einladungstext erläuterte die Intention dieser Tagung:

> *Die Gegenstände der Geometrie als gedankliche Idealisierungen entstammen den Erfahrungen des Einzelnen in seinem Umgang mit "konkreten" Objekten in Ebene und Raum. Zu konkreten geometrischen Gegenständen kann man Fragen stellen: Mit welchen Flächen kann man einen regelmäßigen Polyeder bilden? Wo ist der Schwerpunkt eines Fünfecks? Welche Vierecke kann man an einem Geobrett spannen? In dieser Hinsicht sind auch solche Objekte "konkret", mit denen man "hantiert", wenn man mit computergestützten Geometrieumgebungen arbeitet. Gerade dynamische Geometriesoftware eröffnet neue Wege des experimentierenden Umgangs mit geometrischen Formen.*

Dass hiermit ein lohnendes Tagungsthema gefunden wurde, belegt auch ein eklektischer Blick in die Literatur:

> *Soll man nun [...] zur Methode der logischen Deduktion greifen? [...] Es gibt noch eine andere Art des Vorgehens, die derjenigen in den Naturwissenschaften genau entspricht, die experimentelle Methode. Wir stellen Versuche an, und aus den dabei gemachten Beobachtungen abstrahieren wir das Gesetz. [Lietzmann 1912, 4f].*

> *Bei der Ausstellung "Mathematik zum Anfassen 2001" haben die Besucher wieder Gelegenheit, selbständig mathematische Experimente durchzuführen und mathematische Phänomene spielerisch zu erleben. Dabei geht es nicht primär um die Vermittlung von Wissen, sondern um die Ermöglichung von Erlebnissen besonderer Art [Ausstellungshinweis 2001]*

> *In der Mathematik wie in aller wissenschaftlichen Forschung treffen wir zweierlei Tendenzen an: die Tendenz zur Abstraktion — sie sucht die logischen Gesichtspunkte aus dem vielfältigen Material herauszuarbeiten und dieses in systematischen Zusammenhang zu bringen — und die andere Tendenz, die der Anschaulichkeit, die vielmehr auf ein lebendiges Erfassen der Gegenstände und ihre inhaltlichen Beziehungen ausgeht.*

Was insbesondere die Geometrie betrifft, so hat bei ihr die abstrakte Tendenz zu den großartigen systematischen Lehrgebäuden der algebraischen Geometrie, [...] geführt [...]. Dennoch kommt auch heute dem anschaulichen Erfassen in der Geometrie eine hervorragende Rolle zu, und zwar nicht nur als einer überlegenen Kraft des Forschens, sondern auch für die Auffassung und Würdigung der Forschungsergebnisse.

D. Hilbert/ S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie [1932, Neuauflage 1996]

Zum Verständnis von Experimenten in der Geometrie

Die Geometrie steht auf zwei Füßen, einerseits auf dem theoretischen Fundament einer axiomatisch-deduktiven Wissenschaft, die ihre Sätze durch innermathematisches, logisches Ableiten begründet, anderseits fußt sie in der Erklärung und Erforschung des Anschauungsraums. Bei der Behandlung der Geometrie im Mathematikunterricht müssen beide Säulen ausgewogen beitragen. Bei einem Ungleichgewicht besteht einerseits die Gefahr, dass die Schüler die logische Konsistenz eines großen historisch gewachsenen Gedankengebäudes nicht erleben, anderseits, dass sie kaum erfahren, dass ihnen die Geometrie aus der Schule beim Erfassen der Welt hilft. Geometrische Experimente können genau diese Erfahrung ermöglichen.

Eine weitere wichtige Funktion kommt dem Experimentieren im Problemlöseprozess zu. Deshalb wird keine moderne Didaktik oder Methodik den Wert „experimentellen Arbeitens" im Mathematikunterricht leugnen. So fundamental der Konsens darüber, *dass* die „experimentelle Methode" von Bedeutung sei, so wenig Überseinstimmung herrscht darüber „*was*" diese „experimentelle Methode" eigentlich genau ist. Zum Kern dieses komplexen Begriffs gehört sicher das Ausprobieren (um zu sehen, was passiert wenn ... – „operatives Prinzip") und das Suchen nach Abhängigkeiten (was beeinflusst ... – „funktionales Denken"). Je nach Kontext kann und muss dieser Kern aber ausdifferenziert werden. Einige Beispiele für Definitionen:

Hering (1991) stelle die Objekte, mit denen operiert wird, ins Zentrum:

> *Experimentieren ist systematisch angelegtes, versuchsweises Handeln mit dem Ziel, bei Objekten Wirkungen von Einwirkungen oder ihren Aufbau zu untersuchen, also den konstruktiven Versuch zu unternehmen, sie aus "einfacheren" Objekten aufzubauen.*
>
> *Objekte und Handlungen können real, abstrakt oder auch bedeutungstragende Repräsentationen sein. Sie können auch nur*

vorgestellt werden: in Gedankenexperimenten. Handlungen in diesem Sinne sind immer schon zielorientiert[...]. Ziele können sich beim Experimentieren handlungsbedingt ändern [...].

Beim Umgang mit Mathematik, forschend oder lernend [...] ist Experimentieren unumgänglich. Dies wird besonders augenfällig bei folgenden Aktivitäten:

- Explorationen noch nicht festgemachter Objekte und Operationen, z.B. bei Begriffsentwicklungen, wobei Eigenschaften und Beziehungen zu entdecken sind;

- Problemlöseprozesse, bei denen Ausgangs- und Endzustand festliegen und Lösungswege (noch) offen sind;

- Anwendungen in Realsituationen, bei denen der Mathematisierungsprozess auf geeignete Mathematik zielt oder sich diese schaffen will.

In Ludwig & Oldenburg (2007) wurde formuliert:

Ein Experiment ist durch Hypothesen geleitetes, planvolles und kontrolliertes Handeln mit Objekten zum Zweck der Erkenntnisgewinnung durch Beobachtung.

Diese Definitionen sind weit genug, um auch innermathematische Experimente mit zu erfassen, bei denen – im Gegensatz zu physikalischen Experimenten – mit mathematischen Objekten gearbeitet wird. (Die mathematischen Objekte können wir dabei in Form von Zeichen verwenden. Für diese Art der Experimente ist die Semiotik daher eine wichtige Hintergrundtheorie.)

Eine interessante Zwischenstellung zwischen physikalischen Experimenten in der Realität und innermathematischen Experimenten im mathematischen Kosmos kommt der Computernutzung zu. Die virtuelle Welt erweitert den traditionellen Vorrat an Zeichen erheblich. Gleichzeitig ziehen mit der Nutzung von Computern im Mathematikunterricht (quasi-)experimentelle Methoden in den Mathematikunterricht ein. Es ist kein Zufall sondern tief in der Sache verwurzelt, dass Unterrichtsstunden, in denen ein dynamisches Geometriesystem eingesetzt wird, strukturell eher Physikstunden, denn traditionellen Mathematikstunden entsprechen.

Wenn wir die obigen Abgrenzungs- und Integrationsbemühungen als Grundlage nehmen und speziell auf die Experimente in der Geometrie blicken, kann man auch etliche Situationen finden, die den Rahmen des Experimentierens verlassen, etwa solche, bei denen kein mathematisches Interesse vorliegt. Wenn mit einer Sammellinse eine optische Abbildung hergestellt wird, kann es sich um ein geometrisches Experiment handeln, nämlich dann wenn dabei geometrische Fragen, etwa rund um Ähnlichkeit, Strahlensätze oder die Linsensgleichung geklärt werden. Wenn man aber nur die Helligkeit des Bildes und seine Schärfe beurteilt, liegt sicher, trotz der involvierten geometrischen Fragen, kein geometrisches Experiment vor.

Das Beispiel macht deutlich, dass nicht das Material an sich „geometrisch" ist, sondern die Geometrie als menschliche Konstruktion in die experimentelle Situation hineingetragen werden muss.

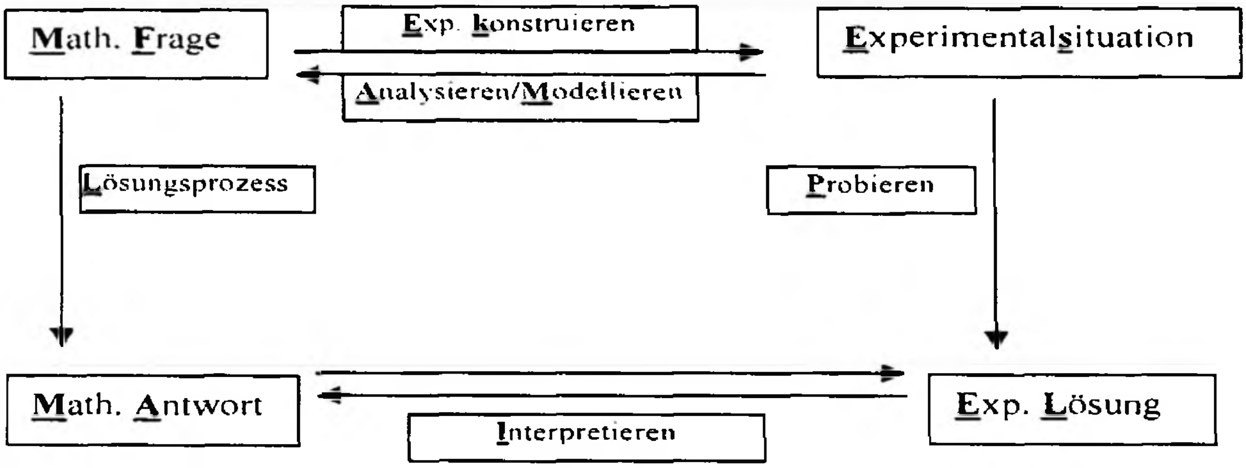
Das Beispiel mit der Sammellinse ist eine geometrische Modellbildung: Im viel diskutierten Modellbildungskreislauf (Pollak 1979; Blum 1985) wird zu einer Realsituation ein Realmodell und weiter ein mathematisches Modell erstellt. Wenn dieses Modell primär geometrischer Natur ist, kann man von geometrischer Modellbildung sprechen. Sie findet z.B. dann statt, wenn Lichtwege durch Strahlen, oder Regentropfen durch Kugeln (Bei der Erklärung des Regenbogens) modelliert werden. Bei der geometrischen Modellierung wird die Geometrie in die Situation hineingebracht. Aber auch der andere Weg ist denkbar: Wenn ein Lehrer Vielecke aus Pappe ausschneidet um Parkettierungsprobleme zu lösen, sind diese physikalischen Objekte so sehr nach dem geometrischen Objekt modelliert, dass auch Schüler das oft als eins setzen: Das ist ein Quadrat (wo es doch nicht mal ein flacher Quader ist).

Der geometrische Experimentalkreisel

Der Modellbildungskreislauf ist für das geometrische Experimentieren noch aus einer weiteren Perspektive interessant, er kann nämlich nahezu analogisiert werden zu einer Art Experimentalkreislauf, den wir aber, wie gleich diskutiert wird, lieber „Experimentalkreisel" nennen:

Er hat eine mathematische linke Seite und eine außermathematische rechte Seite. Außermathematisches umfasst dabei u.a. die Zeichnung auf einem Blatt Papier, den virtuellen Raum eines Geometrieprogramms oder die physikalische Wirklichkeit. Zwischen dieser außermathematischen Welt und der Mathematik gibt es dabei ein Wechselspiel.

EXPERMENTIEREN IM GEOMETRIEUNTERRICHT



Dieses Wechselspiel kann von beiden Seiten ausgehen: Mathematische Fragen können zu geplanten Experimenten führen, und Experimente können mathematische Fragten aufwerfen. Man sieht hier, wie die Experimente die eingangs erwähnten beiden Standbeine der Geometrie verbinden. Der „Kreislauf" kann also in verschiedenen Richtungen durchlaufen und auch an verschiedenen Stellen gestartet werden. Beim Modellbildungskreislauf ist es dagegen typisch, dass der Kreislauf mehrfach gleichsinnig durchlaufen wird. Um diesem Unterschied Rechnung zu tragen, sprechen wir von einem Kreisel.

Am Experimentalkreisel lassen sich unterschiedliche Arten von Experimenten darstellen. Die Tabelle zeigt eine einfache Klassifikation nach den Stellen des Kreislaufs, von denen die experimentelle Tätigkeit ihren Anfang nimmt. Die Abkürzungen sind dabei die im Kreisel unterstrichenen, fetten Buchstaben.

Art des Experiments	Ausgangspunkt			
	MF	ES	MA	EL
Veranschaulichung durch gegebenes Experiment		x	x	
Bau eines Experimentes zur Veranschaulichung einer Frage, Hypothesen generieren	x			
Bau eines Experimentes zur Veranschaulichung einer Lösung	x		x	

Experimentelle Lösung, z.B. π ermessen	X	X		
Gezielte Prüfung von mathematischen Hypothesen, Experimentum crucis	X	X	X	X
Offenes Experimentieren		X		

Geometrische Experimente lassen sich nach vielen Gesichtspunkten klassifizieren. In Ludwig & Oldenburg (2007) wurden die Experimente nach den Prozessen, die sie unterstützen, eingeteilt. Man erhält so Experimente für das Modellieren, das Problemlösen, die Begriffsbildung oder das Argumentieren.

Ein anderes Klassifikationsmerkmal ist die Differenziertheit der Verwendung des Experimentes. Die methodische Umsetzung erfordert entlang dieser Reihenfolge zunehmend reflektierendes Vorgehen seitens der Schülerinnen und Schüler. Dies lässt sich durch die folgende, noch keineswegs vollständig ausdifferenzierte Liste von Typen des Experimentierens beschreiben:

(1) Experiment als physische Veranschaulichung

- „Demonstrationsexperiment“
- Reale Umsetzung mathematischer (geometrischer) Situationen
- Geometrische Modelle (z.B. 1000 er Würfel oder Dodekaederkantenmodell)

(2) Experiment als handlungsorientiertes Arbeiten mit konkretem Material (oft wird Experimentieren undifferenziert generell in diesem Sinne verwendet)

- Bau von Körpern mit Geoclicks und Abwicklung ihrer Netze
- Dreiecke und Vierecks aus Stangen bauen

(3) Experiment als spielerisches Erkunden einer Situation

Eine Situation wird ungerichtet erkundet, divergente Prozesse sind zentral.

- Funktionsweise eines Pantographen erkunden
- Parkettierung suchen
- Freier Körperbau mit Geoclicks

(4)Experiment mit physikalischen Messungen (Spezialisierung von (1))

- Bestimmung von Pi durch Ausmessen
- Auswiegen von Flächen
- Bestimmung des Kugelvolumens durch Eintauchen

(5) Experiment zur Generierung von Hypothesen

Gute Hypothesen zu gewinnen und für die Induktion zu nutzen ist ebenso wichtig wie das Finden von Beweisen im deduktiven Modus.

- Bestimmung von Minima der Lageenergie
- Beobachtung von Winkeln an Seifenhäuten

(6) Experiment zur gezielten Prüfung von Hypothesen

- Dies ist analog zum naturwissenschaftlichen Experiment und komplementär zum epistemologischen Paradigma in der Mathematik: Die experimentelle Verifikation eines mathematischen Sachverhaltes wird nicht als Beweis anerkannt. Anderseits ist man bei wichtigen und schwierigen Fragen oft auf alle Möglichkeiten angewiesen, die etwas zur Klärung beitragen. Gelegentlich kann auch die experimentelle Handlung mathematisiert werden und so einen traditionellen Beweis ergeben.

(6a) Überprüfung am physischen Einzelfall

- z.B. Abreißbeweis für die Winkelsumme im Dreieck

(6b) Innermathematische Überprüfung an Einzelfällen

- Versicherung der Plausibilität durch Konstruktion / Simulation
- Überprüfung in endlichen Fällen
- Wissenschaftstheoretische Begründung: quasi-empirisches Vorgehen (z.B. mit Computerhilfe)

(6c) Experimentum crucis

Aussagen können durch experimentell gefundene Gegenbeispiele widerlegt werden.

Probleme der experimentellen Methode

Unterrichtseinheiten mit Experimenten müssen sorgfältig geplant werden. Aus der Physikdidaktik ist bekannt, dass „hands on“ nicht automatisch „minds on“

nach sich zieht. Stattdessen sollte gelten: „Die Hände sollen den Kopf zum Denken bringen, und der Kopf muss die Hände kontrollieren." (L. Profke). Ein Unterricht mit Experimenten muss sich kritischen Fragen stellen: Herrscht nicht nur oberflächliche Aktivität? Werden *mathematische* Lernziele verfolgt, oder geht es um generelle experimentelle Kompetenzen, die eher in den naturwissenschaftlichen Fächern vermittelt werden sollten? Wie werden Schüler unterstützt im Prozess von der Beobachtung zur Konstruktion mathematischer Begriffe oder Zusammenhänge?

Diese Fragen können hier nicht allgemein beantwortet werden, weil man sie auf konkrete Experimentalsituationen beziehen muss, und weil sie von normativen Vorstellungen zum Mathematikunterricht abhängen.

Experimentelle Geometrie bisher

Mathematische Experimente haben eine lange Tradition. Innermathematische Experimente wurden in der Fachwissenschaft schon immer benutzt, um Fragen, die man noch nicht abschließend behandeln konnte, zumindest etwas näher zu kommen. Mit der Einführung von Computern haben sich die Möglichkeiten dazu derart verbessert, dass es mancherorts schon Institute für experimentelle Mathematik gibt. Aber auch im didaktischen Bereich gibt es eine experimentelle Tradition. Godfrey und Siddons haben Anfang des 20. Jahrhunderts eine Reihe von Schulbüchern herausgegeben, in denen experimentelle Tätigkeiten einen breiten Raum einnahmen. In der „Elementary Geometry" gab es zwei Teile, einen experimentellen und einen theoretischen. Fujita und Jones fassen die Ziele der Experimente in diesem Buch zusammen: a) Vertraut machen mit geometrischen Instrumenten und Figuren, b) Entdeckung geometrischer Zusammenhänge, c) Anwendung geometrischer Aussagen in einem praktischen Kontext, d) Begründung von Aussagen durch experimentelle Evidenz.

Im deutschen Sprachraum hat sich besonders Lietzmann um die Didaktik des mathematischen Experimentierens verdient gemacht.

Experimentelle Situationen stellen komplexe Anforderungen an den, der sich in ihnen bewähren muss. Man kann die nötigen experimentellen Kompetenzen einerseits einteilen, in die die von Seiten der Lehrkraft eingebracht werden und in solche, die von den Schülern verlangt (und deren Erwerb gefördert) werden muss. Es ist aber möglicherweise besser zwischen Kompetenzen, die zur Konzeption eines mathematischen Experiments nötig sind, und denen, die zu seiner Durchführung benötigt werden, zu unterscheiden. Diese Trennlinie wird zwar häufig mit der Trennung nach Lehrern und Schülern übereinstimmen, aber besonders interessant sind natürlich auch die Situationen, in denen Schüler ihre Experimente selbst konzipieren bzw. eine gegebene Experimentalsituation nach eigenen Zielsetzungen weiter entwickeln. In dieser Trennung (Konzeption vs.

Durchführung) lassen sich die nötigen Kompetenzen auch im obigen Experimentalkreislauf verorten.

Die Experimente der Arbeitskreistagung 2006

Auf der Herbsttagung 2006 sollten die vielfältigen Aspekte des experimentellen Herangehens an die Geometrie beleuchtet werden. Eine ähnliche Zielsetzung hatte das Minisymposium „Experimentelle Geometrie" auf der GDM/DMV-Tagung im März 2007 in Berlin. Die Tabelle zeigt die Experimente, die auf der Tagung vorgestellt wurden und verortet sie im Experimentalkreisel.

Autor/Experiment (Schlagworte)	**Ausgang**	**Hauptaktivität**	**Altersstufe**
Amiras Geraden erzeugen Abbildungen durchführen	 MF ES	 Ek, P P,I	 GS/Sek I
Göbel Flächen zu gegebener Spezifikation erzeugen	MF	Ek, L	Sek II
Graumann Figuren scheiden und legen	ES	P	GS/Sek I
Haug Bauwas-Konfiguration nach Plan bauen	ES	P	GS/Sek I
Lambert Gerät für Umfangswinkelsatz Hyperbel aus prismatischem Trog	 MA ES	 AM AM	 Sek I Sek II
Mann Parkettieren und physikalische Experimente mit DGS	MF ES	Ek, P	Sek I Sek II
Meißner Körper klassifizieren	ES/EL	I	Sek I
Kortenkamp & Spannagel Konstruktion beobachten	MF	L	Sek I/II
Oldenburg Winkelhalbierende, Zahnradgetriebe Pantograph Planimetrie	 ES ES MF/ES MF	 P,AM AM, P I	 Sek I Sek II

Rosebrock & Rübig Quadrate in Gitter suchen	MF	P	Sek I, II
Roth Einparken	ES	AM, P	Sek I/II
Walser Fadenkonstruktion 3-Foci-Ellipse Fermatpunkt mit Gewichten, mit Seife	MF ES ES/MF	Ek P,I	Sek II

In den folgenden Beiträgen entfaltet sich damit ein breiter Überblick über die Aspekte Experimenteller Geometrie. Trotzdem sind damit noch längst nicht alle Möglichkeiten ausgelotet und so kann dieser Tagungsband, wie wir hoffen, auch zum Weiterdenken anregen.

Literatur

Blum, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion, Mathematische Semesterberichte (1985).

Cohn-Vosssen, Hilbert: Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin 1996.

Fujita, T, Jones, K.: The place of experimental tasks in geometry teaching: Learning from the textbooks design of the early 20th century

Hering: Didaktische Aspekte experimenteller Mathematik (1991)

Pollak, H.O.: The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. In: UNESCO (Hrsg.): New Trends in Mathematics Teaching IV. Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization 1979, S.232-248

Lakoff, G., Nunez, R. E.: Where Mathematics comes from. Basic Books, New York, 2000.

Lietzmann, W.: Experimentelle Geometrie. Teubner, Stuttgart 1959.

Ludwig, M., Oldenburg, R.: Lernen durch Experimentieren. *mathematik lehren 141*, 2007.

Schwengeler, A. Ch.: Geometrie experimentell: Zürich 1998.

Wittmann, E. Ch.: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Vieweg, Wiesbaden 1987.

Wittmann, G.: Ellipse, Hyperbel, Parabel – Koordinatengeometrie ohne Vektoren. In: *mathematik lehren*, Heft 133, 2005.