Matthias Ludwig,
Reinhard Oldenburg,
Jürgen Roth (Hrsg.)

Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht

AK Geometrie 2007/08

Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg, Jürgen Roth (Hrsg.):
Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht
AK Geometrie 2007/08

ISBN 978-3-88120-487-3

Inhaltsverzeichnis

Geometrie im Spiegel der Standards

Reinhard Oldenburg

Zusammenfassung. In diesem Beitrag wird analysiert, wie die Standardorientierung den Gehalt des Geometrieunterrichts verändert. Dazu wird der Einfluss der Kompetenzorientierung auf die Legitimation von Unterricht beleuchtet. Anschließend werden die geometrischen Aufgabenbeispiele der KMK-Standards und des IQB-Buchs „Bildungsstandards konkret“ analysiert.

Einleitung

Welche geometrischen Inhalte werden zu welchem Zweck wie unterrichtet? Diese Frage ist in sich schon extrem komplex, dennoch soll hier versucht werden, sogar die Ableitung der Antwort nach der Zeit zu schätzen – sprich die Veränderungen der letzten Zeit zu beschreiben. Die Ergebnisse können also nur exemplarisch sein. Es stellt sich einerseits die Frage nach den Begründungsmustern für bestimmte inhaltliche Entscheidungen, andererseits sind diese Entscheidungen selbst zu analysieren.

Mathematik und Allgemeinbildung

Die Idee der Allgemeinbildung stellt eine vage, aber universelle Quelle der Legitimation von Unterricht dar. Ein normatives Unterfangen wie die Erstellung von Bildungsstandards könnte hier ansetzen. Aus dem Kontext der Bildungsdiskussion der letzen Jahre wäre z.B. zu erwarten gewesen, dass die Bildungsstandards sich der normativen Konzeption der „mathematical literacy“ (zwischen „mathematical literacy“ und mathematischer Grundbildung gibt es feine, vor allem durch die Genese der Begriffe bedingte Unterschiede, aber m.E. sind diese Unterschiede in der folgenden Diskussion vernachlässigbar) wie sie für die PISA-Studien konkretisiert wurde, anschließt. Dies ist zwar nicht ausdrücklich geschehen – die KMK-Bildungsstandards für Mathematik (mittlerer Abschluss) erwähnen das literacy-Konzept nicht – trotzdem kann man davon ausgehen, dass dieses Konzept eine zentrale Rolle bei der inhaltlichen Ausgestaltung gespielt hat. Im Rahmen von PISA 2000 wurde definiert:

> *„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik*

In: Ludwig, Oldenburg, Roth (Hrsg.): Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht – AK Geometrie 2007/08. Franzbecker, Hildesheim, 2009, S. 75-91

> *zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.“* (Deutsches Pisa-Konsortium 2000)

Allerdings ist schon fraglich, ob mit diesem Konzept alle PISA-Aufgaben legitimiert werden können. Zwar merkt man vielen der veröffentlichen Aufgaben an, dass sie in diesem Geiste entwickelt wurden, aber ob z.B. die bekannte Apfelbaum-Aufgabe wirklich im Sinne dieser Definition relevant ist, kann diskutiert werden. Die Bildungsstandards gehen – das wird später erläutert – noch stärker über den Rahmen der literacy-Definition hinaus.

Hier ist eine Betrachtung aus der Perspektive der Informatikdidaktik nützlich. Dort unterscheidet man seit langem ITG (=Informationstechnische Grundbildung) vom eigentlichem Informatikunterricht. Bei der ITG steht im Vordergrund, dass die Schüler in die Lage versetzt werden, mit dem Computer zu arbeiten und ihn als Werkzeug zur Problemlösung bei Fragen aus anderen Gebieten einzusetzen, z.B. zum Lernen, Kommunizieren, Auswertung von Versuchen etc.

Begründet wird der ITG-Unterricht oft über das Argument, dass hier eine neue Kulturtechnik entstanden sei, die wie das Schreiben und Lesen grundlegend für jedes weitere Eindringen in die Kultur sei.

Für den ITG-Unterricht ergibt sich daraus, dass er am Anfang der Sekundarstufe konzentriert sein sollte, da er überwiegend erst nach dem Erwerb der anderen Kulturtechniken erfolgen kann, und vor dem wesentlichen Teil des Unterrichts anderer Fächer erfolgen muss.

Je nach den organisatorischen Bedingungen kann es vernünftig sein, den Unterricht in dieser Stufe als Fachunterricht stattfinden zu lassen – also erteilt von wenigen besonders qualifizierten Lehrerinnen, oder aber er kann in die Fächer integriert werden, wo seine Früchte ja später genutzt werden sollen.

Es drängt sich die Analogie ITG = mathematical literacy auf. Man vergleiche dazu die obige literacy-Definition z.B. mit der Berliner ITG-Definition:

> *„Dieser Bereich (ITG) hat zwei Schwerpunkte, zum einen die Ausbildung einer Kompetenz zum Gebrauch des Rechners als Werkzeug, zum anderen die Vorbereitung auf die Teilhabe an einem gesellschaftlichen Leben, das in weiten Bereichen durch Informationstechnik geprägt ist.“* (Rahmenplan Sek I, Berlin 2006)

In der Informatikdidaktik unterscheidet sich der eigentliche Informatikunterricht von der ITG vor allem dadurch, dass seine Inhalte nicht (nur) als Mittel zu anderen Zwecken interessieren, sondern dass die informationsverarbeitenden Maschinen selbst zum Gegenstand und ihr Verständnis zum Ziel des Unterrichts werden, dass es also nicht mehr darum geht, etwas (für andere Fächer/Anwendungen/Lebenssituationen) Nützliches tun zu können, sondern die Dinge wegen ihrer selbst zu verstehen.

Wenn man nun mathematical literacy mit ITG identifiziert, fällt auf, dass das Analogon zum eigentlichen Informatikunterricht in der PISA-Sicht der Mathematik fehlt. Man könnte versucht sein zu schließen, dass dem Mathematikunterricht das nötige Selbstbewusstsein gegenwärtig fehlt.

Bei den inhaltlichen Analysen werden wir später auch für die Mathematik eine analoge Einteilung verwenden, also eine Klassifikation in MG (mathematische Grundbildung, literacy) und MUieS (Mathematikunterricht im engeren Sinne).

Ergänzung: Es sei angemerkt, dass die Einteilung MG/MUieS Parallelitäten zur Einteilung der Mathematik in „reine“ und „angewandte“ Mathematik hat, dass diese beiden Einteilungen aber verschieden sind: Erstens betrifft die Unterscheidung MG/MUieS nicht nur den Inhalt an sich, sondern auch die Intention (als Mittel oder als Zweck) mit der er unterrichtet wird. Zweitens gibt es Inhalte der reinen Mathematik, die der MG zuzuordnen sind, etwa die Gesetzte der proportionalen Zuordnung, und umgekehrt gibt es Fragen der angewandten Mathematik, die dem MUieS zuzuordnen sind, etwa wie ein GPS funktioniert.

Kompetenzen als normatives Konzept

Im Zuge der Outputorientierung werden nicht mehr abzuarbeitende Inhalte benannt, sondern Kompetenzen, die die Schüler am Ende bestimmter Zeiträume erworben haben sollen. Dabei gibt es allgemeine und inhaltsbezogene Kompetenzziele. Letztere sind oft so nah an mathematische Inhalte gekoppelt, dass sie davon kaum zu trennen sind (so ist etwa die Kompetenz „lineare Gleichungssysteme graphisch [zu] interpretieren“, nur mit dem Unterrichtsinhalt „Graphische Interpretation linearer Gleichungen“ zu erreichen – zumindest wenn man realistische Erwartungen an die Transferleistungen der Schüler hegt.) Die allgemeinen Lernziele wie etwa „Argumentieren“ werden in den Bildungsstandards für die Mathematik fachbezogen interpretiert, aber von ihrer Definition her zielen sie auf Kompetenzen, die auch in anderen Fächern vermittelt werden können. In einem schlüssigen System müssten sich die inhaltsbezogenen Kompetenzen aus den allgemeinen Kompetenzerwartungen ableiten lassen oder zumindest systematisch als verträglich erweisen lassen. In Blum et al. (2006) werden solche systematischen Entwicklungen aber mit Verweis auf ein pragmatisches Herangehen zurück gestellt.

Für die Mathematik nehmen die KMK-Bildungsstandards implizit Anleihen bei Heinrich Winter, indem sie fordern, dass Schüler die bekannten Winter’schen

Grunderfahrungen (s.u.) machen können. Diese geben zwar eine überzeugende Antwort auf die Frage nach allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts, sie beantworten aber nicht die Frage, warum überhaupt Mathematik unterrichtet wird. Man könnte fragen, ob Problemlösefähigkeit nicht mit anderen Inhalten als denen des traditionellen MU besser befördert werden könnte, und man könnte fragen, ob es nicht andere Gebiete gibt, die mit formalen Sprachen interessante theoretische Strukturen aufbauen und Phänomene der Welt damit beschreiben.

Eine mögliche Antwort wäre es, begründet zu behaupten, dass der Mathematikunterricht die allgemeinen Kompetenzen, die die Bildungsstandards benennt, besonders gut entwickeln kann. Dies soll jetzt geprüft werden. Allerdings ist die Frage ungünstig gestellt. Es ist schon vor dem Hintergrund traditioneller Vorstellungen zur Allgemeinbildung schwierig zu entscheiden, ob ein bestimmtes Thema – in einer bestimmten Behandlungsweise – allgemeinbildend sei oder nicht. Einfacher ist es, zwei Themen gegeneinander abzuwägen und zu fragen, welches, bei knappen Ressourcen an Zeit etc., den größeren Beitrag zur Allgemeinbildung verspricht. Wir gehen hier nach diesem Muster vor und vergleichen Mathematikunterricht und Informatikunterricht daraufhin, in welchem Fach die in den KMK-Bildungsstandards für Mathematik geforderten allgemeinen Kompetenzziele besser verfolgt werden können.

Mathematik-Bildungsstandards	**Mathematik**	**Informatik**
1 Der Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht [...]:		
– technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen	Technik ist gegenwärtig weitgehend ausgeblendet. Durch die Modellbildungsbewegung wurde einiges erreicht.	Technikbezüge sind natürlich und treten vielfach auf Der soziale und kulturelle Einfluss der Informatik ist augefälliger als der der Mathematik und daher besser vermittelbar
– Mathematik mit ihrer Sprache,	Mathematik als formale	Sprache als fundamen-

ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen,	Sprache ist derzeit kaum Gegenstand von MU	tale Idee ist allgegenwärtig. Symbolische Beschreibungen sind zentral.
– in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben.	Da weiter Transfer das Ziel ist, sind auch die Inhalte des Übungsfeldes nicht so relevant.	Kein Unterschied zur Mathematik
Die Bildungsstandards … benennen dementsprechend **allgemeine** und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, ... Dazu bearbeiten sie Probleme, Aufgaben und Projekte mit mathematischen Mitteln, lesen und schreiben mathematische Texte, kommunizieren über mathematische Inhalte u. a. m. Dies geschieht in einem Unterricht, der selbstständiges Lernen, die Entwicklung von kommunikativen Fähigkeiten und Kooperationsbereitschaft sowie eine zeitgemäße Informationsbeschaffung, Dokumentation und Präsentation von Lernergebnissen zum Ziel hat.	Dies mit den traditionellen Inhalten des MU zu vereinbaren ist eine schwierige Aufgabe, an der gegenwärtig viele Lehrer und Didaktiker arbeiten.	Die Selbstständigkeit, Kommunikation, Informationsbeschaffung etc sind Schlüsselworte, die den Informatikunterricht schon immer begleitet haben. Der IU unterstützt diese Ziele, weil er die Mittel dazu zum Thema hat.
Der Auftrag der schulischen Bildung geht über den Erwerb fachspezifischer Kompetenzen hinaus. Zusammen mit anderen Fächern zielt Mathematikunterricht auch auf Persönlichkeitsentwicklung und Wertorientierung. … Schülerinnen und Schüler sollen auf diese Weise Mathematik als anregendes, nutzbringendes und kreatives Betätigungsfeld erleben, in dem auch Hilfsmittel, insbesondere elektronische		Die IT gibt Schülern weit mehr Möglichkeiten zu unmoralischem Handeln (Raubkopien, Verstoß gegen Datenschutz, anonyme Äußerungen,…) als die Mathematik, und eben damit ein Feld der Entwicklung ihrer Persönlichkeit. Schüler erleben sich im IU als kreativer denn im MU.

Medien entsprechend sinnvoll eingesetzt werden.		Der IU hat keine Probleme, elektronische Medien einzusetzen.
Für einen solchen Mathematikunterricht ist die Beschreibung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Kapitel 2 in den Vordergrund gerückt worden. ...		
(K 1) Mathematisch argumentieren Dazu gehört: – Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es …?“, „Wie verändert sich…?“, „Ist das immer so …?“) und Vermutungen begründet äußern, – mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise), – Lösungswege beschreiben und begründen.	Kein Unterschied feststellbar	Begründungen, Beweise und formale Beschreibungen sind in der Informatik besonders wichtig, weil die Resultate auf den Rechner übertragen werden müssen.
(K 2) Probleme mathematisch lösen Dazu gehört: – vorgegebene … Probleme bearbeiten, – geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden, – die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie … Lösungswege reflektieren.	Kein Unterschied feststellbar	
(K 3) Mathematisch modellieren Dazu gehört:		Die Informatik benötigt oft mathematische Modelle, von einfachen (Stellenwertsystem,

– den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen, – in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten, – Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.		lineare Trafo) bis zu anspruchsvollen (Erwartungswert, geometrische Abbildung). Modellierung ist im IU schon lange ein Thema. Modrow schätzt: „Informatik ist reicher an Modellen als Physik".
(K 4) Mathematische Darstellungen verwenden Dazu gehört: – verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten anwenden, interpretieren und unterscheiden, – Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen, – unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln.	Kein Unterschied feststellbar	Die Informatik ist besonders reich an Darstellungsformen, an graphischen Modellierungsmitteln etc.
(K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen. Dazu gehört: – mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten, – symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt, – Lösungs- und Kontrollverfahren – mathematische Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Ta-	Das ist mathematisches „Kerngeschäft".	„Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten" sind auch Teil der Informatik. „symbolische und formale Sprache" das ist Informatik.

schenrechner, Software) sinnvoll … einsetzen.		
(K 6) Kommunizieren Dazu gehört: – Überlegungen,…. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien, – … Fachsprache … – Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen.		Beide Fächer geben Anlass zum Kommunizieren, aber die Informatik beschäftigt sich auch explizit mit Kommunikationsmöglichkeiten

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Informatikunterricht die gewünschten Ziele weitaus besser umsetzen könnte als Mathematikunterricht. Dies deckt sich auch mit meinen Erfahrungen als Lehrer, mit empirischen Untersuchungen z.B. der Frage, in welchem Fach die Schüler eher kreativ sein können, und mit den Rückmeldungen der Schüler (etwa bei der Evaluation des mathematisch-naturwissenschaftliches Zweiges meiner ehemaligen Schule).

Die Lage ist klar: Wenn es einem vorrangig um Modellbildung, Problemlösen, Argumentieren, Darstellung und Kommunizieren geht, dann ist Mathematikunterricht im Vergleich zum Informatikunterricht nur schlecht zu legitimieren.

Es gibt meines Erachtens drei mögliche Antworten, wenn man am Mathematikunterricht festhalten möchte:

- Mathematikunterricht wird pragmatisch gerechtfertigt durch Tradition, die Ausbildung der vorhandenen Lehrer, KMK-Beschlüsse, etc.
- Man legitimiert den Mathematikunterricht über Inhalte (bzw. über inhaltsbezogene Kompetenzen)
- Man rekurriert auf ein Allgemeinbildungskonzept.

Ich plädiere für eine Kombination der letzen beiden Antworten: Es gibt mathematische Inhalte, die die Schule vermitteln muss, um die Schüler zukunftsfähig zu machen. Für viele technische Lehrberufe wie Studiengänge sind bestimmte mathematische inhaltliche Fähigkeiten notwendig und eine Schule, die Inhalte zugunsten von allgemeinen Kompetenzen zurückschneidet, nimmt den Schülern mögliche Wege für ihre Zukunft, statt ihnen so viele Wege wie möglich zu eröffnen. Die dritte Antwort führt z.B. zur kulturellen Bedeutung der Mathematik (Beispiele: die Ethiken von Spinoza und Mill) und kann hier nicht diskutiert werden.

Geometrie in den KMK-Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss

Es ist eine schwierige Aufgabe, einen sinnvollen inhaltlichen Kern für die verschiedenen Schulformen zu definieren. Statt dieser normativen Aufgabe setzt sich dieser Aufsatz als nächstes das einfachere deskriptive Ziel, die Gewichtung verschiedener Inhalte im standardbasierten Unterricht zu analysieren.

Oben wurde die Unterscheidung von MG und MUieS postuliert. Diese wenden wir jetzt auf die geometrischen Anteile der KMK-Bildungsstandards an. Dies führt zu folgender Einteilung der Aufgabenbeispiele, die geometrischen sind kursiv gesetzt:

MG: (1) *Abkürzung*, (2) Studentenarbeit, (5) Lohnerhöhung, (7) Holzbestand, (9) Skipiste, (11) Schulzeit, (13) Handy, (14) *Wassertank*

MUieS: (3) *Pyramidenstern*, (4) Würfel, (6) *Trapez*, (8) *Würfeldarstellung*, (10) Fakultät, (12) Lineare Funktionen

Diese Klassifikation ist allerdings nicht ganz eindeutig, weil die Zuordnung z.B. davon abhängt, welche Hypothesen man zum Lösungsweg des Schülers hat. Hier wurde versucht, möglichst nahe liegende Vorgehensweise zu erahnen. Das Ergebnis, das also mit einiger Vorsicht zu interpretieren ist, lautet also: Mehr als die Hälfte der Aufgaben ist der MG zuzuordnen, knapp die Hälfte ist schwerpunktmäßig geometrisch. Auffällig ist, dass sich geometrische Aufgaben verstärkt im MUieS-Bereich finden. Festzuhalten ist, dass die Standards mehr abdecken als der MG zugeordnet werden kann. Dies ist m.E. sinnvoll, aber derzeit kaum beachtet, und sollte offensiv vertreten werden.

Bemerkenswert ist, dass fünf Aufgaben (14, 3, 4, 8, 9) raumgeometrische Aspekte haben. Im IQB-Buch bestätigt sich dieser Trend aber nicht.

Geometrie im IQB-Buch

Die Exegese der Bildungsstandards wird erleichtert durch das offiziell vom IQB unterstütze Cornelsen-Buch von Blum et al. (2006). Es enthält neben Überlegungen zum kompetenzorientierten Unterricht eine Vielzahl von Beispielaufgaben. Wir konzentrierten uns dabei auf die Aufgaben zu geometrischen Inhalten. Natürlich sind die Aufgaben nicht nach Inhaltsbereichen sondern nach Leitideen klassifiziert, so dass die Geometrieteilmenge von mir ad hoc definiert wurde.

Unter Auslassung einiger Aufgaben, die andere nur leicht variieren, ergaben sich 34 Geometrieaufgaben von insgesamt 81 Aufgaben (42%). Dies ist ein – je nach Standpunkt – erstaunlich und/oder erfreulich hoher Anteil. Diese Zahl kommt zustande, obwohl die geometrischen Leitideen im Gegensatz zu „Daten und Zufall“ keine eigenen Kapitel bekommen haben.

Der Bestand an Geometrieaufgaben wird jetzt unter verschiedenen Gesichtspunkten analysiert.

Inhaltliche Schwerpunkte

Mathematische Sätze sind eingebunden in größere Theoriezusammenhänge und so scheint es sinnvoll, nicht zu fragen, wie oft der Satz des Thales oder wie oft seine Umkehrung thematisiert werden, sondern wie oft z.B. die Satzgruppe des Thales relevant ist.

Die Statistik zu *Anwendungen geometrischer Inhalte* liefert folgendes Ergebnis:

Inhaltsbereich	**Aufgabenzahl**
Kongruenz	0
Ähnlichkeit	0
Strahlensätze	1
Thales	4
Pythagoras	5

Man kann hier eine Dominanz des rechtwinkligen Dreiecks ablesen. Dies ist konsistent mit dem Verschwinden von Sinus- und Kosinussatz aus den gymnasialen Kerncurricula bzw. den Bildungsstandards der Bundesländer, mit denen die KMK-Bildungsstandards schulformspezifisch umgesetzt werden sollen.

Körpergeometrie

Wir hatten oben gesehen, dass die Raumgeometrie in den KMK-Standards relativ breiten Raum einnimmt. Hier ergibt sich folgendes Bild: Es gibt 6 Aufgaben zu Körperberechnungen, aber keine zur Darstellung von Körpern.

Wir haben oben gesehen, dass der Informatikunterricht die erwarteten allgemeinen Kompetenzen besser umsetzen könnte als der MU. Kann man am IQB-Aufgabenkatalog erkennen, dass auch die Autoren der Aufgaben diese Einsicht zumindest ahnen? Diese Frage kann deutlich bejaht werden. Indiz ist das Auf-treten von vielen Fragestellungen der diskreten Mathematik, also jener Mathematik, die zentraler Teil Informatik ist.

Arten der Modellbildung

Modelle erfüllen viele verschiedene Funktionen und entsprechend gibt es viele verschiedene Typen von Modellen. Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal ist die Dauerhaftigkeit der Modelle, hier illustriert an geometrischen Vertretern:

- *ad hoc-Modelle* (quick&dirty, Einmal-Modelle): Das Modell wird in einer Situation erstellt, benutzt und ist nicht weiter von Interesse. Beispiele: Die Modellierung eines Heißluftballons durch eine Halbkugel und einen Kegelstumpf, die Modellierung einer Baumkrone durch eine Kugel etc.
- *Standard-Modelle* (durabel): Modelle, die bestimmte Erscheinungen vereinfacht beschreiben, wenn auch in einer zeitüberdauernd interessanten Form. Beispiele: Zentralprojektion als Modell der photographischen Abbildung, Zykloide als Modell der Bewegung eines Punktes auf einem rollenden Rad, Kettenlinie, harmonische Schwingung, Erde als Kugel etc.
- *First-Principle-Models*: Das Modell erhebt den Anspruch, die beste bekannte Beschreibung einer Situation zu sein, eine akzeptierte wissenschaftliche Theorie darzustellen. Beispiele: Die dreidimensionale euklidische Geometrie als Modell des Erfahrungsraums, die allgemeine Relativitätstheorie als geometrisches Modell der Gravitation und des Raums.

Während der dritte Typ für die Schule von untergeordneter Wichtigkeit ist, erscheint es wichtig, dass die Schüler Modelle der beiden ersten Typen kennen und unterscheiden lernen.

Im IQB-Buch sind die Anzahlen der Aufgaben zu den drei Typen: 6-1-0.

Eine Detailanalyse: Die Laternenaufgabe („Höhen“)

Der Aufgabentext im Original (Blum et al. 2006):

a) Schätze zunächst die Höhe der Laterne. Entwickle dann eine rechnerische Methode, um ihre Höhe zu bestimmen. Ein auf Dezimeter genaues Ergebnis genügt.

Diese Aufgabe mag in der Sekundarstufe I überraschen. Soll hier ernsthaft Photogrammetrie betrieben werden? Dies ist nicht zu erwarten. Stattdessen handelt es sich um einen modernen Vertreter der eingekleideten Aufgaben: Es soll in die Realsituation eine Strahlensatzfigur hinein gesehen werden. Das ist in der Tat möglich, denn Laterne und Maßstab stehen vertikal, definieren also eine Ebene. Da aber die Ebene der Strahlensatzfigur in der Realität nicht parallel zur Bildebene ist, ist das Teilverhältnis keine Invariante der photographischen Abbildung. Man kann also nicht bedenkenlos Verhältnisse ansetzen. Eine ernsthafte Lösung muss diesen Aspekt berücksichtigen.

Es sind verschiedene Lösungen dieses Problems denkbar. Mit etwas projektiver Geometrie etwa folgende: Geraden, die im Raum parallel sind, schneiden sich in der als Zentralprojektion modellierten Photographie in einem Punkt. Wenn man die Straßenränder als hinreichen parallel annimmt, kann man den 2m-Maßstab, den der Junge im Bild in der Hand hält, auf die Laterne projizieren und erhält so eine Laternenhöhe von 10,0m.

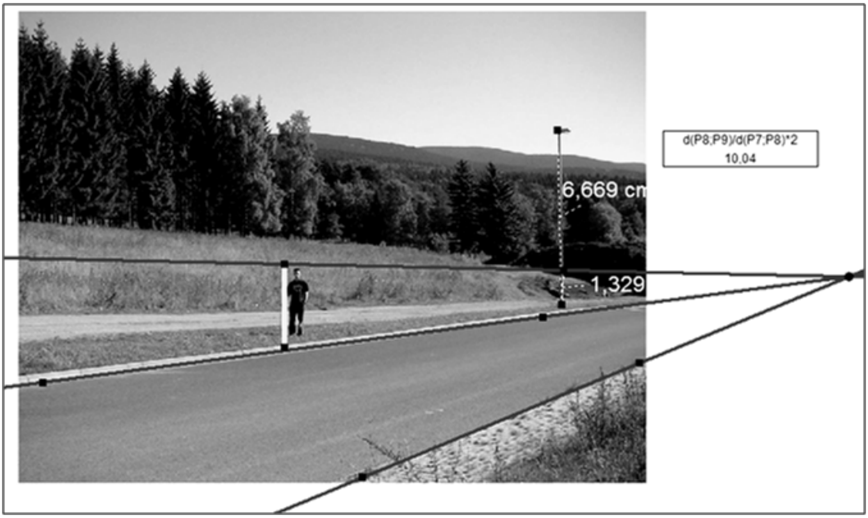


Abbildung 1: Mögliche Lösung

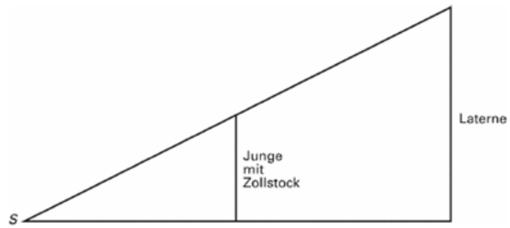
Alternativ könnte man so argumentieren: Man misst die Höhe *h* des 2m Zollstocks und die Höhe der Laterne *l* im Bild. Die maßstäblich errechnete Höhe 2m·*l*/*h* ist dann aber zu niedrig, weil die Laterne weiter hinten stehend ja perspektivisch verkleinert abgebildet ist. Man kompensiert, indem man die reale Breite der Straße als konstant annimmt. Das Verhältnis der Breiten im Bild auf Höhe des Maßstabs und auf Höhe der Laterne ergibt dann den Verkleinerungsfaktor. Man findet so eine Höhe von ca. 10,4m.

Beide Lösungswege führen also fast zum gleichen Ergebnis, allerdings sind auch beide recht anspruchsvoll, da die räumliche Situation bedacht werden muss.

Die IQB-Lösung ist erstaunlich flach angesichts der Problematik:

Mögliche Lösungen

a)



Man schätzt die Entfernungen von *S* bis zum Jungen bzw. bis zu der Laterne auf z. B. 4,5 m bzw. 13,5 m. Der Zollstock ist 2 m lang.

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:

$$\frac{\text{Laternenhöhe}}{\text{Zollstocklänge}} = \frac{13{,}5\text{ m}}{4{,}5\text{ m}}$$

$$\text{Laternenhöhe} = \frac{2\text{ m} \cdot 13{,}5\text{ m}}{4{,}5\text{ m}} = 6\text{ m}$$

Abbildung 2: IQB-Lösung

Man bedenke, dass in der Aufgabenstellung gefordert war, das Ergebnis auf einen dm genau zu berechnen! Man erhält als Ergebnis schon 6,1m, wenn man den Abstand bis zur Laterne auf 13,75m geschätzt hätte! Gutes Augenmaß ist da gefordert!

Es ist interessant, die Situation mit dem 3D-Programm „Archimedes Geo3D" von Andreas Göbel zu untersuchen. Damit können die Schüler den Effekt der Verkürzung hautnah erleben.

Verallgemeinerndes Fazit

Die erfreuliche Beachtung des Aspekts der geometrischen Modellbildung hat in der konkreten Umsetzung in den IQB-Aufgaben (und auch in weiteren Teilen der aktuellen Didaktik) einen entscheidenden Nachteil: Trotz anderslautender Überlegungen im Zusammenhang mit dem Modellbildungskreislauf kommt der Aspekt des Validierens zu kurz.

Bedenklich ist auch, dass es zwar eine Flut von groben ad-hoc Modellierungen gibt, die ihrer Intention nach den Schülern das Gefühl geben sollen, überhaupt anfangen zu können, die aber – so befürchte ich – eine Kultur des „anything goes" (Paul Feyerabend) etablieren. Schüler gewöhnen sich dabei daran (Modellierung-)„Fehler" zu machen. Solche Näherungen zur Vereinfachung müssen sein, aber sie sollten bewusst gemacht werden. Hier zeigt sich ein Defizit in der

Betrachtung unterschiedlicher Qualitäten von Modellen. Es ist eben ein Unterschied, ob ein Endergebnis nur ungenau ist, weil eine Eingabegröße ungenau geschätzt oder bestimmt wurde, oder weil das Modell eine relevante Eigenschaft im Sinne des Verkürzungsmerkmals der allgemeinen Modellbildungstheorie nicht berücksichtigt. Vermutlich könnte eine explizite Thematisierung von Modellen unterschiedlicher Qualität (z.B. auch eine Einteilung der Modelle in Arten wie oben gegeben) hier unterstützen.

Was fehlt?

Gibt es auffallende Auslassungen in den KMK-Bildungsstandards gegenüber traditionellen Inhaltskatalogen? Natürlich.

- Konstruktionsbeschreibungen
- Sinus- und Kosinussatz (siehe oben bemerkte Dominanz des rechtwinkligen Dreiecks)
- Kongruenzgeometrie, Abbildungen, Verkettung von Abbildungen
- zentrische Streckung
- Kathetensatz, Höhensatz
- Geschichte der Geometrie
- Parabel als Ortslinie
- Traditionelle Erweiterungsthemen: Vektoren, Sehnenviereck, Umfangswinkelsatz, Ellipsen, ...

Diese Auslassungen lassen sich teilweise damit erklären, dass die KMK-Bildungsstandards ja für alle Schulformen gelten, die den mittleren Schulabschluss vergeben können. Für das Gymnasium können (könnten), die Länder über dies hinausgehen und den traditionellen Inhalten näher kommen.

Ein positiver Aspekt der Beschränkung ist sicher, dass damit Luft geschaffen wird für andere Dinge und für Unterrichtsmethoden, die mehr Zeit erfordern. Sicher ist einiges gewonnen, wenn die am Sinussatz gesparte Zeit investiert wird, um einfache Zusammenhänge, wie rund um den Satz des Thales und seiner Umkehrung, so zu unterrichten, dass mathematisches Argumentieren und Darstellen Raum findet, oder wenn substantielle Selbstlern-Phasen realisiert werden.

Zielklarheit

Blum et al. nennen als eines der Ziele der Bildungsstandards „höhere Zielklarheit“ (S. 16). Es mag erstaunen, wie dieses Ziel angesichts des geringen Umfangs der Standards und der darauf basierenden Kerncurricula erreicht werden soll. Die heuristische Regel, dass eine knappe Beschreibung eine unpräzise sei, ist zwar nicht immer richtig, aber konkret hat es sich z.B. in Baden-Württemberg eingebürgert, dass viele Lehrer wie auch Lehrende an den Pädagogischen Hochschulen das Verständnis der dortigen Bildungsstandards dadurch unterstützen, dass immer noch die alten Bildungspläne verwendet werden.

In „mathematik lehren“ 143 bringt Andreas Büchter das Problem der Kompetenz-Standards auf den Punkt, indem er folgende Lesarten für möglich erklärt:

Geometrie (Ende Klasse 10)

> Die Schülerinnen und Schüler […] berechnen geometrische Größen und verwenden dazu […] Ähnlichkeitsbeziehungen […]
>
> Kernlehrplan Sekundarstufe I, Realschule, Mathematik, Nordrhein-Westfalen

Lesart 1: „Damit meine Schülerinnen und Schüler mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen geometrische Größen berechnen können, müssen wir die Strahlensätze vollständig erarbeiten.“

Lesart 2: „Auf die systematische Erarbeitung der Strahlensätze kann ich verzichten, ich thematisiere nur Vergrößerungen und Verkleinerungen.“

Abbildung 3: Problem der Kompetenzstandards

Wenn es tatsächlich so ist, dass nennenswert viele real existierende Lehrer die Standards so unterschiedlich lesen, stellt dies die Idee der Bildungsstandards vor große Probleme. Allerdings vermute ich, dass es den meisten Lehrern durchaus gelingt, den Komplex „Ähnlichkeit-Strahlensätze-zentrische Streckung“ fachlich und didaktisch so zu strukturieren, dass die Strahlensätze nicht im Zentrum stehen müssen. Trotzdem zeigt das Beispiel: Die Kompetenzbeschreibungen sind sehr unscharf. Eigentlich sollte jede Kompetenz mit 3-4 Aufgabenbeispielen illustriert werden. Leider macht das erhebliche Mühe.

Die Frage, ob die Standards standardisieren, kann auch in Bezug auf die Schulbücher gestellt, aber noch nicht abschließend beantwortet werden, weil die

Überarbeitung erst im Gange ist. Der aktuelle Trend ist aber eindeutig: Die Streuung der Bücher in Hinblick auf verschiedene Aspekte wird eher größer als kleiner. Die Autorenteams kommen offensichtlich zu sehr unterschiedlichen Einschätzungen, wie viel Inhalte nötig sind, die geforderten Kompetenzen daran zu entwickeln. Obwohl alle Bücher sich bemühen, Anregungen für kompetenzorientiertes Lernen zu geben, tut sich hier auch eine erhebliche Bandbreite auf. Das ist m. E. rundum positiv: Evolution braucht Vielfalt. Bedenklich wird das Ganze wohl dadurch, dass das Selektionskriterium das Durchschnittsergebnis bei zentralen Prüfungen sein wird. Damit besteht die Gefahr, dass gerade ein „Mehr an Bildung“ nicht belohnt wird.

Chancen

Nach diesen vielen kritischen Bemerkungen soll nicht verschwiegen werden, dass die Standardisierung in vielen Bereichen eine verbesserte Unterrichtspraxis unterstützen kann:

- Lehrer können stoffliche Auslassungen (z.B. gegenüber dem Buch) leichter rechtfertigen. Wenn sie dies tun, um den Bedürfnissen der Schüler und Schülerinnen besser zu entsprechen, ist dies ein großer Gewinn. Dass dies auch Gefahren birgt, ist offensichtlich.
- Lehrer werden gedrängt, stärker Argumentationsprozesse zu initiieren.
- Die inhaltliche Verschlankung erleichtert die Entscheidung zugunsten von (zunächst) ineffizienteren selbständigen Lernformen.

Fazit

Die Bildungsstandards haben viele wichtige Anregungen zur Veränderung des Mathematikunterrichts gegeben, sie weisen aber selbst auch eine Reihe von Defiziten auf. Gerade im Vergleich zur Informatik(auch wenn diese tatsächlich keine ernsthafte Konkurrenz darstellt) sollte sich die Mathematik auf ihre Stärken (wie etwa ihr großer Vorrat an durablen Modellen) und eigenen Inhalte besinnen.

Literatur

W. Blum et al.: Bildungsstandards konkret. Cornelsen, 2006

M. Neubrand: Die Konzepte „mathematical literacy“ und „mathematische Grundbildung“ in der PISA-Studie. BMU, 2001

M. Thomas: Informatische Modellbildung. Dissertation, Potsdam, 2002