Volker ULM, Bayreuth, Reinhard OLDENBURG, Augsburg,
Annalisa DRÖSEMEIER, Bayreuth, Gilbert GREEFRATH, Münster,
Hans-Stefan SILLER & Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen – eine theoretische Konzeption und empirische Überprüfung

Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt (Greefrath et al. 2016 a). Der Beitrag gibt zunächst einen Überblick über Grundvorstellungen zur ersten Ableitung und zum bestimmten Integral. Es wird ein Test vorgestellt, mit dem Ausprägungen dieser Grundvorstellungen bei ca. 1000 Studierenden erhoben wurden. Die Resultate geben Hinweise darauf, welche Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen Studierende in ihrer Schul- und ggf. Studienzeit entwickelt haben.

Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen

Begriffe in der Mathematik wurden geschaffen, um etwas Bedeutungshaltiges auszudrücken. Welche Bedeutungen dies sind, findet man etwa, indem man analysiert, wozu ein Begriff inner- oder außermathematisch verwendet wird. Der Begriff der ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle lässt sich etwa über Differentialquotienten definieren. Der Begriff des bestimmten Integrals kann als Grenzwert von Riemann-Summen definiert werden. Gemäß der eingangs gegebenen Definition lassen sich Grundvorstellungen zu diesen beiden Begriffen durch die Analyse ihrer inhaltlichen Bedeutungen identifizieren.

Als Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle stellen Greefrath et al. (2016 a, b) *Tangentensteigung* (die Ableitung gibt die Steigung einer Tangente an), *lokale Änderungsrate* (die Ableitung gibt die Momentangeschwindigkeit eines Veränderungsprozesses an), *lokale Linearität* (der Graph ist lokal approximativ eine Gerade und die Ableitung gibt die Steigung dieser Geraden an) und *Verstärkungsfaktor* (die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$) heraus.

Für das bestimmte Integral einer Funktion können nach Greefrath et al. (2016 a, b) folgende Grundvorstellungen unterschieden werden: *Flächeninhalt* (ein bestimmtes Integral ist eine Bilanz von Flächeninhalten), *(Re-)Konstruktion* (ein bestimmtes Integral (re-)konstruiert die Gesamtänderung einer Größe aus ihrer Änderungsrate), *Kumulation* (ein bestimmtes Integral ist das Ergebnis des Aufsummierens kleiner Summanden mit Produktstruktur) und *Mittelwert* (ein bestimmtes Integral mittelt eine Größe). Außerdem wird im

Folgenden der Aspekt der *Stammfunktion* (ein bestimmtes Integral ist die Differenz zweier Funktionswerte einer Stammfunktion) betrachtet.

Konzeption eines Tests

Um Ausprägungen dieser Grundvorstellungen bei Probanden zu erheben, konzipierten die Autoren einen Test. Er umfasst – neben allgemeinen Fragen zur Person – 14 Aufgaben zu Ableitungen und Integralen von zweierlei Typen. Bei acht Aufgaben erhalten die Probanden jeweils eine mathematische Aussage wie z. B.: „*Es gilt* $\int_0^{2\pi} sin(x)dx = 0$.“ Hierzu werden verschiedene Erklärungen angegeben, die jeweils auf spezifische inhaltliche Deutungen des Integralbegriffs und damit auf Grundvorstellungen Bezug nehmen. Die Probanden werden gebeten, in einer fünfstufigen Likert-Skala anzukreuzen, inwiefern die genannte Erklärung ihrem eigenen Denken entspricht (mit einer Skala von „entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise“ bis „entspricht genau meiner Denkweise“). Beispiele für solche Erklärungen zum oben angegebenen Integral der Sinusfunktion sind (hier mit Bezug zur Flächeninhaltsvorstellung und Rekonstruktionsvorstellung):

- *Der Graph begrenzt mit der x-Achse zwei kongruente Flächenstücke, wobei eines oberhalb und eines unterhalb der x-Achse liegt. Da das eine positiv, das andere negativ gezählt wird, ist das Ergebnis 0.*
- *Wenn man $sin(x)$ als Änderungsrate einer Größe betrachtet, ist die Zunahme der Größe in der ersten Intervallhälfte so groß wie die Abnahme in der zweiten Intervallhälfte. Die Gesamtänderung ist also 0.*

Der zweite Aufgabentyp, von dem sechs Aufgaben im Test enthalten sind, fordert von den Probanden frei zu formulierende Äußerungen. Ein Beispiel, das auf die Kumulationsvorstellung zum Integral abzielt, ist:

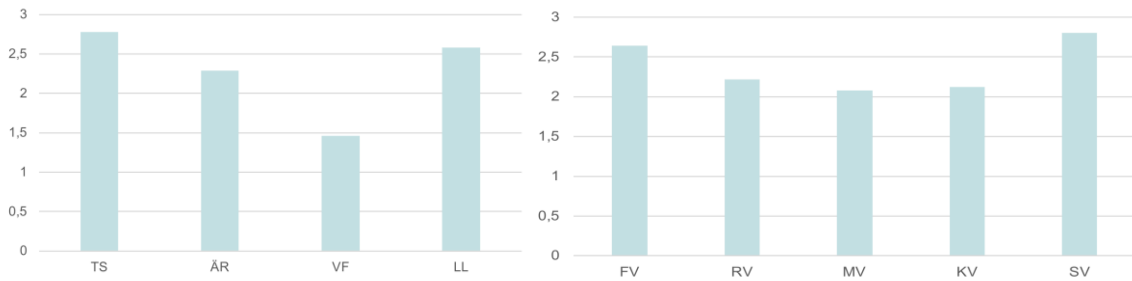
Ein Körper steht auf dem Boden und ist 2 m hoch. Schneidet man ihn parallel zum Boden in der Höhe h durch, so hat die Querschnittsfläche den Flächeninhalt $A(h) = -h^2 + 2h + 1$. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Ausdruck $\int_0^2 A(h)dh$ in dieser Situation hat.

Dieser Aufgabentyp erlaubt es insbesondere, die Antworten als richtig oder falsch zu interpretieren und in diesem Sinn „Leistung“ der Probanden zu beurteilen.

Durchführung des Tests und Ergebnisse

Der Test wurde Anfang des Wintersemesters 2017/18 mit 1018 Mathematikstudierenden an den Universitäten Augsburg, Bayreuth, Koblenz, Münster und Würzburg durchgeführt. Hiervon gaben 670 Teilnehmer an, Mathematik für das Lehramt zu studieren, 491 Teilnehmer waren im ersten Studiensemester. Nach der Exklusion von Fragebögen, bei denen die Studierenden offenbar keine ernsthafte Bearbeitung zeigten, wurden 946 Bögen der weiteren Auswertung zugrunde gelegt.

Die Einschätzungen zur Entsprechung bestimmter an den Grundvorstellungen orientierter Aussagen, die auf Likert-Skalen mit dem Intervall 0…4 bewertet wurden, lassen sich zu Skalen zusammenfassen, die die Gesamtzustimmung zu einzelnen Grundvorstellungen messen. Deren Homogenität ist jedoch gering (die Werte von Cronbach alpha liegen zwischen 0.3 und 0.61), es ist also zumindest mit diesem Test nicht möglich, Grundvorstellungen als Personenmerkmale zu verstehen. Abbildung 1 zeigt die globale Zustimmung zu den einzelnen Grundvorstellungen (TS=Tangentensteigung, ÄR=Änderungsrate, VF=Verstärkungsfaktor, LL=Lokale Linearisierung; FV=Flächenvorstellung, RV=Rekonstruktionsvorstellung, MV=Mittelwertvorstellung, KV=Kumulationsvorstellung, SV=Stammfunktionsaspekt).



Grundvorstellungen zur Ableitung

Grundvorstellungen zum Integral

Abbildung 1: Zustimmung zu Grundvorstellungen

Die geringe Skalenhomogenität drückt sich darin aus, dass die zu Abbildung 1 analogen Grundvorstellungsprofile für einzelne Items sehr stark variieren. So findet etwa die Kumulationsvorstellung bei einem Item die geringste, bei einem anderen die höchste Zustimmung von allen Grundvorstellungen.

Erste datengestützte Hypothesen sind demnach:

- (H1) Die Aktivierung von Grundvorstellungen hängt nicht nur von personalen Voraussetzungen ab, sondern sehr stark auch von situativen Eigenschaften der Aufgabe.
- (H2) Entscheidend für eine hohe Leistung ist es nicht so sehr, viele Grundvorstellungen zur Verfügung zu haben, sondern passende Grundvorstellungen in der Aufgabe zu sehen.

Passend zu (H1) findet eine explorative Faktorenanalyse im Wesentlichen die Aufgaben wieder, nicht die Grundvorstellungen.

Zur Untersuchung von (H2) wurden neben den Likert-Skalen insbesondere die Freiformat-Antworten berücksichtigt. Die Variable „*Zahl der verfügbaren Grundvorstellungen*“ ist als die Zahl der Grundvorstellungen definiert, bei denen der Proband einen Wert oberhalb des Neutralwerts der Likert-Skala erreicht. Allerdings zeigen sich nur sehr geringe Korrelationen bzgl. der Leistung (0.12 in Differentialrechnung, 0.18 in der Integralrechnung). Viele Grundvorstellungen im eigenen Denken zu identifizieren ist demnach für hohe Leistung nicht hinreichend. Wichtiger ist es offensichtlich, jeweils passende Grundvorstellungen zu aktivieren. Um dies zu prüfen, wurden in einer Expertenklassifikation für alle Likert-Skalen-Items die Grundvorstellung ermittelt, die sich am ehesten für die Beantwortung der Fragestellung anbietet. Die Zustimmung zu den so ausgewählten optimalen Grundvorstellungen korreliert dann mit 0.18 resp. 0.36 etwa doppelt so hoch mit der Leistung im Vergleich zur Zahl der Grundvorstellungen im obigen Sinne.

Weitere Überprüfungen der beiden Hypothesen mittels Implikationsanalyse stützen diese Beobachtung ebenfalls, werden hier aber nicht ausgeführt.

Beobachtungen auf Basis von Wilcoxon-Tests ergaben folgende Ergebnisse: Studierende mit dem Zweitfach Physik sind signifikant leistungsstärker ($p=4.0\cdot10^{-13}$, $d=0.68$). Wer die Note 1 im Matheabitur erreichte, ist ebenso signifikant leistungsstärker ($p=2.6\cdot10^{-17}$, $d=0.56$) wie die männlichen Studenten ($p=5.1\cdot10^{-13}$, $d=0.38$). Die Sonderrolle des Zweitfachs Physik zeigt sich auch bei signifikant höheren Präferenzen für bestimmte Grundvorstellungen: Tangentensteigung ($p=0.02$, $d=0.16$), Verstärkungsfaktor ($p=0.0006$, $d=0.22$), Kumulationsvorstellung ($p=0.039$, $d=0.19$), Stammfunktionsaspekt ($p=0.0006$, $d=0.27$).

Zusammenfassung

Die Bearbeitungen der Testaufgaben zu Ableitungen und Integralen legt die Sichtweise nahe, dass Mathematikstudierende ein Spektrum an Grundvorstellungen zu diesen beiden Begriffen besitzen und es auch adäquat in Problemstellungen anwenden können. Forschungs- und Handlungsbedarf gibt es im Bereich der Aktivierung passender Grundvorstellungen.

Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016 a). *Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016 b). Aspects and „Grundvorstellungen“ of the Concepts of Derivative and Integral – Subject Matter-related Didactical Perspectives of Concept Formation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(Suppl 1), 99-129