Reinhard OLDENBURG, Augsburg

Logik und Ungleichungen – ein leider exotisches Thema

Ausgangslage und Motivation eines Unterrichtsversuchs

Die mangende Passung von mathematischer Schulbildung und mathematikhaltigen Studiengängen wird heutzutage überwiegend im universitären Bereich adressiert: Brückenkurse, Begleitveranstaltungen und Einführungen in das mathematische Arbeiten sollen nachliefern, was der kompetenzorientierte Unterricht nicht mehr zur Verfügung stellt. So nützlich solche Maßnahmen sind, an denen ich ja auch selbst beteiligt bin, so sehr scheint es sinnvoll nach neuen Wegen zu suchen, die bereits in der Schule Grundlagen im Bereich der Formalisierung, der Logik und der für die Analysis so wichtigen Ungleichungen vermitteln. Da neuere Versionen von Geogebra die Möglichkeit bieten, die Lösungsmengen von durch logische Junktoren verbundenen Ungleichungssystemen graphisch darzustellen, scheinen neue Unterrichtskonzepte zu den genannten Themen gangbar. Im Sinne des design researchs wurde eine Unterrichtseinheit konzipiert und evaluiert, die die folgenden Ziele verfolgte:

- Einführung des Konzepts der Lösungsmenge einer Ungleichung in zwei Variablen und ihre graphische Darstellung.
- Übersetzung zwischen Algebra/Logik und Geometrie.
- Einführung der aussagenlogischen Junktoren.

Es sollte die folgenden Forschungsfragen beantwortet werden:

- Können SuS in Jg. 9 mit den genannten Konzepten arbeiten und argumentieren? Ist es motivierend?
    - Wird das graphische Darstellen von Lösungsmengen als sinnhaft verstanden?
- Eignet sich das Werkzeug Geogebra gut für diesen Zweck?

Der Unterrichtsversuch

Es ergab sich die Möglichkeit zur Durchführung eines Unterrichtsexperimentes in einer neunten Klasse eines bayerischen Gymnasiums über einen Zeitraum von vier Unterrichtsstunden. Die gesamte Zeit wurde im Computerraum gearbeitet. Die Konzeption der Lehrmaterialien folgte den Maximen der Maximierung der Selbsttätigkeit durch entdeckenlassenden, konstruktivistischen Unterricht in dualer Co-Konstruktion. Dazu wurde eine Folge von

Arbeitsblättern entwickelt, die abwechselnd logiko-algebraische Beschreibungen in graphische Form (auf Papier) übertragen lies bevor die andere Transformationsrichtung umgesetzt wurde.

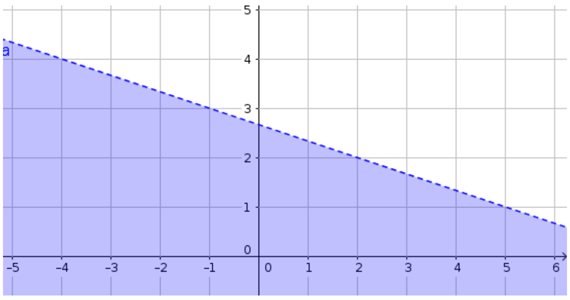
Das erste Übungsblatt enthielt (zusammen mit Koordinatensystem direkt auf dem Arbeitsblatt) die folgenden Aufträge:

Auftrag: Schraffiere in den folgenden Koordinatensystemen jeweils die Punkte $(x|y)$, deren Koordinaten die Bedingung erfüllen.

a) $x>y$ b) $y-x-2>0$ c) $x+y<2$ d) $2\cdot y>8-x$ e) $x\cdot y>0$
f) $x^2-y<0$ g) $x+2\cdot y<5$ h) $(x-1)\cdot y>0$

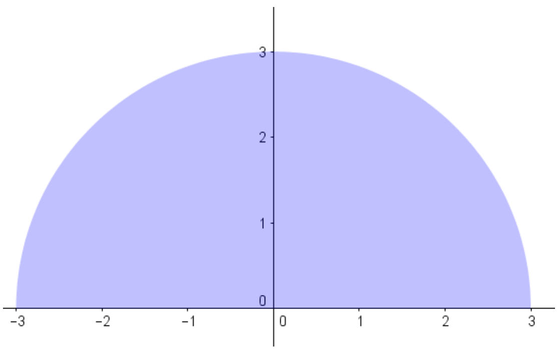
Weitere Aufträge thematisieren dann die umgekehrte Richtung:

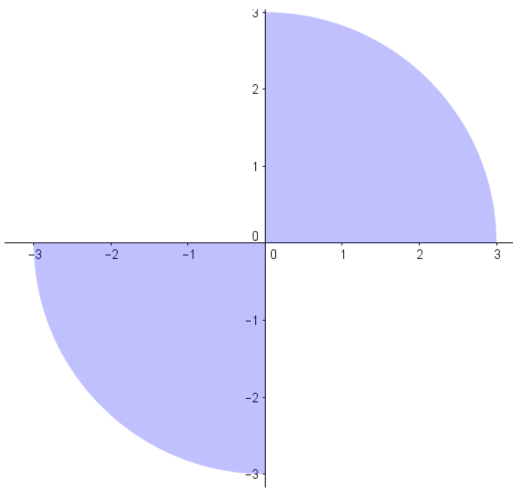
Auftrag: Welche Ungleichungen könnten diese Lösungsmenge haben? Prüfe mit Geogebra!



…

Auftrag: Gib Beschreibungen durch Ungleichungen verbunden mit ∧ an.





Schließlich sollten noch die Oder- und Nicht-Operatoren von den SuS selbstentdeckend erforscht werden (der Auftrag lautete: Außer mit „und“ ∧ können Ungleichungen auch verbunden werden mit den Operatoren ∨ und ¬. Beispielsweise $x>0 \vee y>0$ oder $\neg(x>1)$. Finde heraus, was diese Operatoren bedeuten.). Damit sollte dann ein schräges Kreissegment beschrieben und als kreativer Abschluss ein Gesicht durch einen einzigen logischen Ausdruck beschreiben werden.

Beobachtungen und Evaluation

Die Mathematiklehrerin (gleichzeitig Schulpsychologin) beobachtete den Unterrichtsversuch als instruierte Beobachterin und attestierte den Lernenden durchgehend hohe Motivation, ein hohes Ausmaß an sachbezogener Kommunikation und Kooperation. Gerade Schülerinnen mit schwachem Selbstkonzept hätten profitiert, u.a. durch den Produktstolz. Die Klasse sei ungewöhnlich diszipliniert und ruhig gewesen.

Einige Detailbeobachtungen: Anfangs gab es viele diskrete Lösungen, deren Anteil nahm aber stark ab. Das Konzept der Grenzgeraden wurde von den Lernenden selbst gefunden und formuliert. Bei Auftrag 1a (Zeichne y-x-2>0) formten zwei Gruppen spontan um zu $y>x+2$ und zeichneten dann, andere Gruppen argumentierten mit $y-x>2$.

Viele Probleme mit elementarer Algebra aufgedeckt: In 2-x wurde 2 als Steigung interpretiert, x^2+y^2 wurde zu $(x+y)^2$ „vereinfacht“, $y=4-x/2$ konnte nicht gezeichnet werden. Außerdem gab es Geogebra-spezifische Fehler wie die Verwechslung von xy und $x*y$. Ein klassisches Fehlkonzept in der Logik, die Verwechslung von „oder“ und „entweder oder“ trat ebenfalls auf, konnte aber durch das visuelle Feedback gut behandelt werden.

Interessant war eine Präferenz für Darstellungen spürbar, die die Zahl der Komponenten darstellt, z.B. $x^2+y^2<9 \wedge x>0 \wedge y>0 \vee x^2+y^2<9 \wedge x<0 \wedge y<0$ statt $x^2+y^2<9 \wedge xy>0$.

Bemerkenswert war weiter die sehr weit verbreitete Interpretation des Graphens zu $\neg(x>0)$, aus dem gefolgert wurde, dass $\neg$ eine Spiegelung darstellt. Das ist ein grundlegendes Problem mir Repräsentationen: Man kann einen Operator in seiner eigentlichen Domäne verwechseln mit dem repräsentierten Operator in der Bilddomäne.

Evaluiert wurde auch die Bewertung der Einheit durch die Lernenden durch Fragen mit Likert-Skalen als Antwortmöglichkeiten (Intervall 1...7; 4 neutral).

Es hat mir Spaß gemacht	5,4
Mehr angestrengt als sonst	3,8
Mehr logisches Denken also sonst	5,4
Ergebnisse fand ich schön	5,5
Ich habe wichtige Dinge wiederholt	5,8

Im Abschlusstest sollten die Lernenden mit Papier und Bleistift die Lösungsmengen zweier Ungleichungen skizzieren: $x+y>0$ (85% richtig) und $\neg(x\cdot y<0)$ (80% richtig).

Insgesamt kann von einer positiven Evaluation des Unterrichtsversuchs gesprochen werden. Die eingangs gestellten Forschungsfragen zur Durchführbarkeit einer solchen Einheit können also positiv beantwortet werden.

Geogebra als Werkzeug

Die Bedienung von Geogebra verursachte kaum Schwierigkeiten, seine mathematische Schwäche dagegen schon. Naheliegende Varianten, wie $x^3<y^2$ können nicht gezeichnet werden. Auch Weiterführungen wie Darstellungen von Implikationen und Gittermuster ($\sin(x)\cdot\sin(y)>0$) scheitern an Bugs oder prinzipiellen Beschränkungen. Solche Situationen sind ungünstig, weil sich schon in früheren Untersuchungen (Weygandt & Oldenburg 2013) gezeigt hat, dass Computer ihre Feedback-Funktion nur gut erfüllen, wenn die Lernenden beurteilen können, ob ein negatives Ergebnis mathematische Gründe oder technische Ursachen hat. Da der Bereich der Lösungsmengen von algebraischen Ungleichungen mit aussagenlogischen und prädikatenlogischen Junktoren algorithmisch entscheidbar ist (siehe etwa die Darstellung in Artigue & Oldenburg 2012), könnte ein gutes System den Lernenden hier Gewissheit geben, ist aber derzeit nicht finanzierbar.

Fazit

Der Unterrichtsversucht hat gezeigt, dass die beschriebene Unterrichtseinheit für Schülerinnen der neunten jahrgangsstufe keine Überforderung darstellt, sondern durchführbar ist und ihre Ziele erreicht. Basierend auf einem Fundament authentischer und noch aktueller Mathematik gibt die Einheit Lernenden Einblick in formalen Mathematik, die für jedes mathematische Studienfach entscheidend ist

Literatur

Artigue, M., Oldenburg, R. (2012). How to get rid of quantifiers? http://blog.kleinproject.org/?p=2466.

Weygandt, B., Oldenburg, R. (2013). Einsatzmöglichkeiten und Grenzen von Computeralgebrasystemen zur Förderung des Begriffsverständnisses. khdm-Report 2013.