Die Semantik der Algebra dynamisch erkunden

REINHARD OLDENBURG: *Frankfurt/M.*

1 Sprachliche Aspekte der Algebra: Syntax, Semantik und Pragmatik

Algebra ist ein wichtiger aber auch komplexer Bestandteil der Schulmathematik. Es gibt verschiedene Dimensionen längs derer man dieses Gebiet ordnen kann, um seine Struktur in Hinblick auf das Unterrichten besser zu verstehen. Eine Dimension kann durch die ausgeführten Handlungen wie Umformen und Aufstellen charakterisiert werden (Kieran 2004). Eine andere Dimension orientiert sich an den linguistischen Begriffen syntaktisch, semantisch und pragmatisch (Hodgen et al. 2013). Pragmatische Aspekte der Sprache betreffen die situationsangemessene Verwendung, etwa in Modellbildungssituationen. Dies ist von allergrößter Wichtigkeit. Bemerkenswerterweise gibt es dazu bisher nach meiner Einschätzung kein Computerwerkzeug, das beim Erlernen der algebraischen Pragmatik helfen kann, ich weiß auch nicht, wie es aussehen könnte. Zum Üben von Syntax und Semantik der algebraischen Sprache gibt es dagegen geeignete Werkzeuge. Die Syntax wird durch jedes Programm gefordert und gestützt, in das man Terme eingeben kann. Selbst Formeleditoren in Textverarbeitungsprogrammen bieten, sofern sie die mathematische Struktur etwa durch Schablonen für Exponentialterme respektieren, ein Übungsfeld. Zwischen Syntax und Pragmatik steht die Semantik. Um diese geht es in diesem Beitrag. Was bedeuten mathematische Terme, Gleichungen und Ungleichungen?

2 Algebraische Semantik – die statische Interpretation der Logik

Die Semantik der Algebra ist stark verbunden mit der Idee der Referenz. Variablen referieren auf Objekte einer bestimmten Menge – in der Schulal-

gebra eine der üblichen Zahlenmengen. Die mathematische Logik erklärt die Bedeutung von Formeln wie $x + y = 10$ oder $x + y = y + x$ mittels sogenannter Interpretationen. Eine Interpretation ist eine Zuordnung, die jeder Variable eindeutig ein Element der Grundmenge zuweist. Am besten stellt man sich eine Interpretation als eine 2-spaltige Tabelle aus Variablennamen und Werten vor. Bezogen auf eine Interpretation sind die Formeln entweder wahr oder falsch. Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie in jeder Interpretation wahr ist, und widersprüchlich, wenn sie in keiner Interpretation wahr ist. Dazwischen gibt es noch ganz viele Formeln (man nennt sie erfüllbar), die je nach Interpretation wahr oder falsch sind, wie etwa $x + y = 10$. Die Bedeutung einer solchen Formel ist die Menge der Interpretationen, die sie erfüllen. In einer interpretierten Formeln ist x eine Zahl, deswegen ist es sinnlos zu sagen ‚x wächst', da man ja auch nicht sagen kann ‚5 wächst'. Die mathematische Logik hat also eine statische Sicht auf Variablen, den Veränderlichenaspekt der Didaktik (Malle 1993) gibt es fachwissenschaftlich nicht. Deswegen wird auch die Monotonie einer Funktion auf einem Intervall definiert als: $\forall x_1, x_2 \in [a, b]: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Die intuitive Formulierung „Wenn x wächst, dann wächst $f(x)$" ist so nicht formalisierbar. Sie wird logisch nur zugänglich als Vergleich zweier Interpretationen.
Damit stellt sich die didaktische Herausforderung diese sperrige Theorielage intellektuell ehrlich zu vermitteln, insbesondere also die statische Sicht der Logik und die an die Lebenswelt anknüpfende dynamische Sicht zu verbinden. Letztere wird insbesondere durch die Interaktionsmöglichkeiten mit modernen Computeroberflächen ermöglicht. Dieser Beitrag schlägt mit dem Programm FeliX1D eine technologische Lösung des Problems vor.

3 FeliX1D

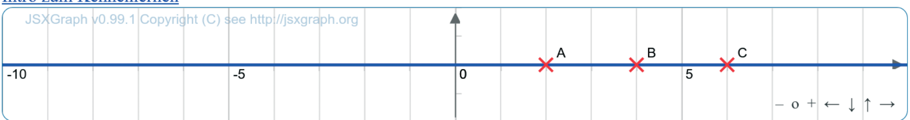
Das Programm FeliX1D (Oldenburg 2009) ist eine eindimensionale Fassung von FeliX (Oldenburg 2007). Neben einer älteren Version, die als eigenständiges Programm verfügbar ist, existiert seit Kurzem eine Realisierung in HTML5/Javascript, die in jedem modernen Browser, auch auf Tablet-Computern http://*http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~oldenbre/jsfelix2/felix1d2.html*.
Zentrales Objekt ist eine Zahlengerade, auf der Punkte erzeugt und mit der Maus verschoben werden können. Diese Darstellungsform ist bidirek-

tional verknüpft mit einer Tabellensicht, die die Namen der Variablen und ihre aktuellen Werte anzeigt. Verschieben eines Punktes auf der Geraden ändert den Wert in der Tabelle und das Eintragen eines neunen Wertes in der Tabelle lässt den Punkt an die entsprechende Stelle springen.

Interessant wird das Ganze, weil in einer weiteren Tabelle beliebig viele Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den erzeugten Variablen eingegeben werden können, die dann von den Variablen befolgt werden in dem Sinne, dass die Variablenwerte so gewählt werden, dass die Gleichungen gelten. Das heißt, dass das System, ausgehend von den Werten, die der Benutzer vorgibt, nach einer Interpretation der eingegebenen Formeln sucht. Wenn man etwa in der Situation von Abb. 1 A nach links bewegt, so bewegt sich B nach rechts (wegen der Gleichung A + 2*B = 10) und ebenso C wegen C > B + 1. Es gibt in FeliX1D keine Unterscheidung zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen, da dies eine pragmatische Bezeichnung der rechnenden Mathematik, nicht der Logik ist. Widersprüchliche Mengen von Formeln führen dazu, dass einige der Gleichungen nicht erfüllt werden können. Es wird dann als Defekt (in Rot) angezeigt, um wie viel die Gleichheit verfehlt wird.
Felix1D ist eine geradlinige Umsetzung der Sicht der mathematischen Logik: Die Variablentabelle gibt zu jedem Zeitpunkt eine Interpretation. Das

FeliX1D

Intro zum Kennenlernen



Neuer Punkt

Relax

☑ Ganzzahlige Bewegung   Darstellung: ◉ einzeilig ○ mehrzeilig

Variable	Wert	fix	Sichtbar
A	2	☐	☑
B	4	☐	☑
C	6	☐	☑

Gleichung / Term	Defekt/Wert	Gültig
A+2*B=10	0	☑
C>B+1	0	☑

Neue Gleichung oder Term

Nachkommastellen 2

Abb. 1: FeliX1D

Ziehen mit der Maus (oder Einsetzen in der Variablentabelle) wechselt von einer Interpretation zu einer neuen. Das System verändert die Interpretationen so, dass die Formeln erfüllt sind.

Mögliche Aufgaben, die man Schülern mit diesem Werkzeug stellen kann:

- Sorge dafür, dass B immer mindestens den Abstand 2 von *A* hat.
- Mache C zum Mittelpunkt von A und B.
- Veranschauliche die Beziehung, die durch die Linsengleichung ausgedrückt wird.
- Finde allgemeingültige Beziehungen, also Gleichungen, deren Eingabe die Zugmöglichkeiten nicht einschränken.
- Erkläre die Beweglichkeit der Variablen bei Gleichungen wie $A^2 = 1$ oder $A^2 < 1$.

Die didaktische Hoffnung ist, dass solche Aktivitäten die verschiedenen Rollen von Variablen (Unbekannte, Unbestimmte, Veränderliche) integrieren und so zu mentalen Vorstellungen führen, die kompatibel sind mit der Sichtweise der Logik.

Literatur

Kieran, C. (2004). The core of algebra: reflections on its main activities. In Stacey, K. et al., The future of the teaching and learning of algebra. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Oldenburg, R, Hodgen, J., Kuechemann, D. (2013). Syntactic and Semantic Items in Algebra Tests – A conceptual and empirical view. CERME 2013.

Oldenburg R. (2007). The Algebraic Modeling of Geometric Constraints in FeliX. Proceedings of ICTMT8.

Oldenburg R. (2009). An algebraic number line and its applications. Proceedings of ICTMT 9.

Tourlakis, G. (2003). Lectures in Logic and Set Theory Vol. 1: Mathematical Logic. Cambridge University Press: Cambridge.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In Coxford, A. F. & Shulte, A. P. (Eds.), The ideas of algebra, K-12 (8–19). Reston, VA: NCTM.