Math. Z. 164, 143–152 (1978)

Mathematische Zeitschrift

Trigonometrische Charakterisierung der Räume konstanter Krümmung

Jost-Hinrich Eschenburg

Mathematisches Institut der Universität Münster, Roxeler Straße 64, D-4400 Münster, Bundesrepublik Deutschland

Vorbemerkung

In der vorliegenden Arbeit wird folgendes Resultat bewiesen: Wenn in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ein Punkt C existiert, so daß für alle Dreiecke (A, B, C) mit kleinem Winkel γ bei C und Seitenlängen a, b, c ein Cosinussatz der Form

$$F(c)=G(a, b)+H(a, b)\cos\gamma \tag{1}$$

gilt, F, G, H in einer gewissen Funktionenklasse, dann hat M konstante Krümmung.

Den Anstoß zu dieser Arbeit gab ein Problem aus der physiologischen Optik, das von Luneburg [3] aufgeworfen wurde, nämlich die Frage, ob der Anschauungsraum von konstanter Krümmung ist. In [1] wird anhand des vorliegenden Resultates eine Meßmethode angegeben, wie diese Frage entschieden werden kann.

Die Darstellung folgt in den Bezeichnungen i.w. [2]. Ich danke Professor Klingenberg sowie Professor v. Campenhausen, die mich auf diesen Fragenkreis aufmerksam machten.

1. Einführung

$(M, <,>)$ bezeichne eine nicht notwendig vollständige Riemannsche C^4-Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqq 2$. $M' \subset M$ sei eine offene Teilmenge und p ein Punkt im Abschluß $\overline{M'}$. M' soll *p-sternförmig* heißen, wenn $\exp_p$ eine offene Teilmenge R von T_pM diffeomorph auf M' abbildet und R folgende Eigenschaft hat: Ist $v \in R$, so auch $tv \in R$ für $t \in (0, 1]$. Auf M' ist also eine Umkehrabbildung log: $M' \to R$ von $\exp_p$ definiert. Eine Geodätische g: $[0, a] \to M$ heißt (M', p)-*Geodätische*, wenn $g(0)=p$ und $a g'(0) \in R$. Ist M vollständig, $p \in M$ mit Schnittort $C(p) \subset M$, so ist $M' = M - C(p)$ eine offene, dichte, p-sternförmige Teilmenge von M.

0025-5874/78/0164/0143/$02.00

Ein (M',p)-*Dreieck* $\Delta=(q,g,r)$ wird von zwei Punkten q, $r\in M'$ und einer Geodätischen $g\colon[0,\bar{c}]\to M'$ ohne konjugierte Punkte gebildet mit $g(0)=q$, $g(\bar{c})=r$. $a=\|\log q\|$, $b=\|\log r\|$ heißen die *Schenkellängen*, $\gamma=\sphericalangle(\log q, \log r)$ der *Öffnungswinkel*, $c=\bar{c}\cdot\|g'(0)\|$ die *Öffnung* des Dreiecks. Das Quadrupel (a, b, c, γ) heiße der *Typ* des Dreiecks Δ. Ist $a=b$, so heißt Δ *gleichschenklig*. Δ heißt *spitz*, wenn die Öffnung nicht größer ist als mindestens eine Schenkellänge.

$d=\sup\{\|x\|;\, x\in R\}\leqq\infty$ heißt der p-Durchmesser von M'. Sei I das halboffene Intervall $[0,d)$.

Für (M',p) gilt ein *Cosinussatz*, wenn es eine C^4-Funktion $F\colon I\to\mathbb{R}$ gibt mit isolierten kritischen Punkten und C^1-Funktionen $G\colon I\times I\to\mathbb{R}$ und $H\colon I\times I\to\mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Ist Δ ein spitzes (M',p)-Dreieck vom Typ (a, b, c, γ) so gilt

$$F(c)=G(a,b)+H(a,b)\cos\gamma. \tag{1}$$

Ist die Schnittkrümmung κ auf M' konstant, so gilt für (M',p) der gewöhnliche Cosinus-Satz. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß auch die Umkehrung gilt:

Theorem. *Sei M eine Riemannsche C^4-Mannigfaltigkeit, $M'\subset M$ offen und p-sternförmig für ein $p\in\overline{M'}$, und es gelte ein Cosinus-Satz für (M',p).*

Dann ist die Krümmung auf M' konstant.

2. Drehinvarianz

(M',p) erfülle die Voraussetzungen des Theorems, $R\subset T_pM$ sei wie in der Definition der p-Sternförmigkeit und $\log\colon M'\to R$ die Umkehrfunktion von $\exp_p|_R$. Für $x, y\in M$ bezeichne $|x,y|$ den Riemannschen Abstand. Ist $U\subset M$, so heißt

$$d(U)=\sup\{|x,y|;\, x,y\in U\}$$

der *Durchmesser* von U.

Lemma 1. *Sei A eine lineare Isometrie von T_pM, D eine offene Teilmenge von R mit $AD\subset R$. Dann ist die Abbildung*

$$A_D=\exp\circ A\circ\log|_{\exp D}\colon\ \exp D\to\exp AD$$

lokale Isometrie.

Beweis. Weil die kritischen Punkte von F isoliert sind, gibt es ein $\varepsilon>0$ so, daß $F|[0,\varepsilon)$ bijektiv ist. Für $v\in D$ sei V eine offene Umgebung von v in D, so daß für $U=\exp V$ und $U'=\exp AV$ gilt:

1. $d(U)<\varepsilon$
2. $d(U')<\varepsilon$
3. Je zwei Punkte in U lassen sich durch eine eindeutige kürzeste normale Geodätische in M' verbinden.
4. Dieselbe Eigenschaft für U'.

Wir zeigen, daß $A_D|_U\colon U\to U'$ Isometrie ist. Sei dazu q, $r\in U$, dann liegen $x=\log q$ und $y=\log r$ in V. $g_c\colon[0,c]\to M'$ sei die kürzeste normale Geodätische von q nach r mit der Länge $c=|q,r|$ und $\tilde{g}_c\colon[0,\tilde{c}]\to M'$ die von $A_D(q)=\exp Ax$ nach $A_D(r)$

$=\exp Ay$ mit der Länge $\tilde{c}=|A_D(a), A_D(r)|$. Dann sind (q, g_c, r) und $(A_D(q), \tilde{g}_c, A_D(r))$ (M', p)-Dreiecke mit gleichen Schenkellängen und Öffnungswinkeln. Nach (1) ist dann $F(c)=F(\tilde{c})$, und wegen $c, \tilde{c}<\varepsilon$ gilt $c=\tilde{c}$. Also ist $A_D|_U$ Isometrie. Allgemein definieren wir für eine p-sternförmige offene Menge M', $p\in\overline{M'}$: (M', p) heißt *drehinvariant*, falls die Behauptung von Lemma 1 zutrifft.

Lemma 2. *M' sei offen und p-sternförmig für ein $p\in\overline{M'}$, und (M', p) sei drehinvariant. Sind g_1, g_2: $[0, a]\to M$ normale (M', p)-Geodätische und $\tilde{x}_i$ parallele Einheitsvektorfelder längs g_i senkrecht zu g_i, so gibt es eine Umgebung U von $g_1((0, a])$ und eine lokale Isometrie B: $U\to M'$ mit $B\circ g_1=g_2$ und $B_*\tilde{x}_1=\tilde{x}_2$.*

Beweis. A sei eine lineare Isometrie von T_pM mit $Ag_1'(0)=g_2'(0)$, $A\tilde{x}_1(0)=\tilde{x}_2(0)$. Weil die Mengen $(0, a]\cdot g_1'(0)$ und $(0, a]\cdot g_2'(0)$ in R liegen, gibt es eine offene Umgebung D von $(0, a]\cdot g'(0)$ in R so daß $AD\subset R$. Setze $U=\exp D$, dann hat B: $=A_D$: $U\to M'$ die gewünschten Eigenschaften.

Lemma 3. *(Voraussetzungen wie Lemma 2). Ist E ein zweidimensionaler Unterraum von T_pM, so ist $E'=\exp(E\cap R)$ eine totalgeodätische 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, genannt p-Ebene. Insbesondere liegt jedes (M', p)-Dreieck in einer p-Ebene.*

Beweis. Es gibt eine lineare Isometrie A von T_pM, die genau E als Fixraum hat. Dann gibt es eine offene Umgebung D von $E\cap R$ in R, die unter A auf sich abgebildet wird. A_D hat dann genau E' als Fixmenge . E' ist somit totalgeodätisch. Ein (M', p)-Dreieck, (q, g_c, r), liegt in der p-Ebene $E'=\exp(E\cap R)$, wobei E ein zweidimensionaler Unterraum von T_pM ist, der $\log q$ und $\log r$ enthält.

3. Jacobifelder

Sei $M'\subset M$ offen, p-sternförmig und (M', p) drehinvariant. Weil p-Ebenen in M' totalgeodätisch sind, sind deren Jacobifelder auch Jacobifelder von M. Es seien also v, $x\in T_pM$ zueinander senkrechte Einheitsvektoren, $av\in R$, E die von v und x erzeugte Ebene in T_pM, $E'=\exp(E\cap R)$ zugehörige p-Ebene, g: $[0, a]\to M$ die Geodätische $g(t)=\exp tv$ in E', $\tilde{x}$ das parallele Vektorfeld längs g mit $\tilde{x}(0)=x$. Dann läßt sich jedes senkrechte Jacobifeld I von E' längs g in der Form $I(t)=j(t)\,\tilde{x}(t)$ darstellen, wobei j: $[0, a]\to\mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\text{(I)}\quad j''+\kappa j=0$$

mit $\kappa(t)=\langle R(\tilde{x}(t), g'(t))\,g'(t), \tilde{x}(t)\rangle$ genügt. Der Wert $\kappa(t)$ hängt dabei nicht von v und x ab, wie Lemma 2 zeigt, denn wir können jedes orthonormale Zweibein in T_pM durch eine lineare Isometrie A von T_pM in (v, x) überführen. Eine Basis der Lösungen von (I) bilden die Lösungen r und s mit den Anfangswerten.

$$r(0)=1, \quad r'(0)=0 \quad \text{und} \quad s(0)=0, \quad s'(0)=1$$

Mit Hilfe der letzteren können wir die Metrik von M' in Polarkoordinaten beschrieben. Es sei $S=\{v\in T_pM;\ \|v\|=1\}$. Die Abbildung P: $x\to(x/\|x\|, \|x\|)$ bildet $R-\{0\}$ injektiv auf eine Menge $R'\subset S\times(0, \infty)$ ab. Ist $w=(t, v)\in R'$, so läßt sich jeder Vektor $x\in T_wR'$ zerlegen in eine radiale Komponente $x_\perp\in T_t\mathbb{R}=\mathbb{R}$ und eine tangentiale $x_T \in T_v S = [v]^\perp \subset T_p M$, also $x = (x_\perp, x_T)$. Wir betrachten den Diffeomorphismus $\varphi = \exp \circ P^{-1}$: $R' \to M' - \{p\}$, $\varphi(t, v) = \exp tv$.

Lemma 4. *(Voraussetzungen wie Lemma 2). Für alle* $w = (v, t) \in R'$, $x \in T_w R'$ *gilt:*

$$\|\varphi_* x\|^2 = x_\perp^2 + s(t)^2 \|x_T\|^2$$

Beweis. Ist $y \in [v]^\perp = T_v S$, so ist

$$I(t) = \varphi_*|_w(y, 0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \exp(t(v+sy))$$

ein Jacobifeld längs der (M', p)-Geodätischen $g_v(t) = \exp tv$ mit Anfangswerten $I(0) = 0$, $I'(0) = y$. Also ist $I(t) = s(t) \cdot \tilde{y}(t)$, $\tilde{y}$ wieder das Parallelfeld durch y, und $\|I(t)\|^2 = s(t)^2 \|y\|^2$. Das übrige folgt aus dem Gaußlemma.

Zum Beweis des Theorems genügt es also zu zeigen, daß $\kappa = -s''/s$ eine Konstante ist.

Wir notieren noch zwei Hilfssätze aus der Variationsrechnung.

Lemma 5. $[b, a]$ *sei ein reelles Intervall,* $\delta > 0$, h: $[b, a] \times [0, \delta) \to M$ *eine* C^2-*Abbildung mit den Vektorfeldern* $T(t, u) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, u)$, $U(t, u) = \frac{\partial h}{\partial u}(t, u)$, ∇_t *und* ∇_u *die kovarianten Ableitungen nach t und u, und folgende Eigenschaften seien erfüllt:*

a) $\nabla_t T(t, u) = 0$ *für* $(t, u) \in [b, a] \times [0, \delta)$

b) $\langle \nabla_u U, T \rangle (t, u) = 0$ *für* $(t, u) \in \{b, a\} \times [0, \delta)$

Dann gilt für die Längenfunktion l: $[0, \delta) \to \mathbb{R}$, $l(u) = \int_b^a \|T(t, u)\| \, dt$:

(i) $l'(u) = \|T\|^{-1} \langle U, T \rangle |_{(b,u)}^{(a,u)}$

(ii) $l''(u) = \|T\|^{-1} \langle U^\perp, \nabla_t U^\perp \rangle |_{(b,u)}^{(a,u)}$

wobei $X^\perp = X - \|T\|^{-2} \langle X, T \rangle T$ *die zu* T *senkrechte Komponente eines Vektorfeldes* X *längs* h *bezeichnet.*

Beweis.

$$\begin{aligned} l'(u) &= \int_b^a \|T\|^{-1} \langle \nabla_u T, T \rangle (t, u) \, dt \\ &= \int_b^a \|T\|^{-1} \langle \nabla_t U, T \rangle (t, u) \, dt \\ &= \int_b^a \frac{d}{dt} (\|T\|^{-1} \langle U, T \rangle)(t, u) \, dt \end{aligned}$$

woraus (i) folgt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(\|T\|^{-1} \langle U, T \rangle) &= \|T\|^{-1} (\langle \nabla_u U, T \rangle + \langle U, \nabla_u T \rangle) \\ &\quad - \|T\|^{-3} \langle U, T \rangle \langle \nabla_u T, T \rangle \\ &= \|T\|^{-1} (\langle \nabla_u U, T \rangle + \langle U^\perp, \nabla_t U^\perp \rangle) \end{aligned}$$

woraus (ii) folgt.

Lemma 6. *Ist unter den Voraussetzungen von Lemma* 5 *noch* $h(b,u)=p$ *für alle* $u\in[0,\delta)$ *und* $\langle \nabla_t U, T\rangle(b,0)=0$, *so gilt für den Winkel* $\gamma(u)=\measuredangle(T_u, T_0)$ *mit* $T_u=T(b,u)$

$$(\cos\gamma)'(0)=0$$
$$(\cos\gamma)''(0)=-(\|\nabla_t U\|^2\|T\|^{-2})(b,0)$$

Beweis. Es ist $\cos\gamma(u)=(\|T_u\|\,\|T_0\|)^{-1}\langle T_u, T_0\rangle$ also

$$(\cos\gamma)'=(\|T\|\,\|T_0\|)^{-1}\langle \nabla_u T, T_0\rangle-\|T\|^{-2}\langle \nabla_u T, T\rangle\langle T_0, T\rangle,$$

woraus die Behauptung folgt.

4. Berechnung von G und H

Für (M',p) seien nun die Voraussetzungen des Theorems erfüllt.

Lemma 7. *Für jedes spitze* (M',p)*-Dreieck mit Schenkellängen* $a>b\geqq 0$, *Öffnung* c *und Öffnungswinkel* γ *gilt*

$$F(c)=F(a-b)+F'(a-b)\,f_a(b)(1-\cos\gamma) \tag{2}$$

mit

$$f_a(b)=s(b)\,s(a)[r(b)\,s(a)-s(b)\,r(a)]^{-1}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst $b>0$ an. Wenn ein solches Dreieck existiert, gibt es eine normale (M',p)-Geodätische $g\colon[0,a]\to M$; sei $g'(0)=v$. $\tilde{x}$ sei ein paralleles Einheitsvektorfeld längs g, senkrecht zu g', $q\colon(-\delta,\delta)\to M'$ sei die Geodätische $q(u)=\exp u\tilde{x}(b)$. Ist δ klein genug, so gibt es für jedes $u\in(-\delta,\delta)$ eine (M',p) Geodätische $g_u\colon[0,b]\to M$ mit $g_u(b)=q(u)$ und eine Geodätische ohne konjugierte Punkte $h_u\colon[b,a]\to M'$ mit $h_u(a)=g(a)$, $h_u(b)=q(b)$, und die Abbildungen $(u,t)\to g_u(t)$ und $(u,t)\to h_u(t)$ sind C^2 differenzierbar. Es sei $I(t)=\frac{\partial}{\partial u}g_u(t)|_{u=0}$ und $K(t)=\frac{\partial}{\partial u}h_u(t)|_{u=0}$. I und K sind Jacobifelder längs g mit den Randwerten $I(0)=0$, $I(b)=\tilde{x}(b)$; $K(b)=\tilde{x}(b)$, $K(a)=0$. Sie sind tangential an die p-Ebene $E'=\exp(\operatorname{Span}(v,\tilde{x}(0))\cap R)$ und daher von der Form $I=j\tilde{x}$, $K=k\tilde{x}$, und wegen der Anfangswerte $j(0)=k(a)=0$, $j(b)=k(b)=1$ gilt

$$j(t)=s(b)^{-1}s(t)$$
$$k(t)=(r(b)\,s(a)-r(a)\,s(b))^{-1}[s(a)\,r(t)-r(a)\,s(t)].$$

Für die Längenfunktionen $b(u)=\int_b^a\|g_u'(t)\|\,dt=b\,\|g_u'(0)\|$ und $c(u)=\int_b^a\|h_u'(t)\|\,dt$ gilt also nach Lemma 5:

$$b(0)=b,\qquad b'(0)=0,\qquad b''(0)=j(b)\,j(b)=j'(b),$$
$$c(0)=a-b,\qquad c'(0)=0,\qquad c''(0)=-k(b)\,k'(b)=-k'(b)$$

und für den Winkel $\gamma(u) = \sphericalangle(g_u'(0), g'(0))$ nach Lemma 6

$$\cos\gamma(0) = 1, \qquad (\cos\gamma)'(0) = 0,$$
$$(\cos\gamma)''(0) = -j'(0)^2 = -s(b)^{-2}$$

Wir wenden (1) auf die (M', p)-Dreiecke $(q(u), h_u, g(a))$ an und werten die Gl. (1) und ihre zweite Ableitung für $u=0$ aus. Man erhält bei $u=0$:

$$\text{(a)} \quad F(a-b) = G(a,b) + H(a,b)$$

$$\text{(a'')} \quad F'(a-b)\,c''(0) = \left[\frac{\partial G}{\partial b}(a,b) + \frac{\partial H}{\partial b}(a,b)\right] b''(0)$$
$$+ H(a,b)(\cos\gamma)''(0)$$

Aus (a) erhält man

$$\frac{\partial}{\partial b}(G+H)(a,b) = \frac{\partial}{\partial b} F(a-b) = -F'(a-b),$$

also aus (a'')

$$H(a,b) = F'(a-b)(c''(0) + b''(0))/(\cos\gamma)''(0)$$
$$= -F'(a-b)(j'(b) - k'(b))\, s(b)^2$$

und schließlich

$$\text{(b)} \quad H(a,b) = -F'(a-b)\, f_a(b)$$

mit

$$f_a(b) = (j'(b) - k'(b))\, s(b)^2$$
$$= s(b)\, s(a)[s'r - sr'](b)(r(b)\, s(a) - r(a)\, s(b))^{-1}.$$

Es gilt aber

$$[s'r - sr']' = s''r - sr'' = 0,$$

also ist dieser Term konstant:

$$[s'r - sr'](b) = [s'r - sr'](0) = 1,$$

und f_a ist wie in der Behauptung angegeben. Setzen wir (a) und (b) in (1) ein, so ergibt sich die Behauptung für $b>0$. Die Behauptung für $b=0$ folgt aus Stetigkeitsgründen.

5. Konstanz der Krümmung

Wir wenden die oben gewonnene Gl. (2) auf eine zweite Schar von (M', p)-Dreiecken an. Dazu betrachten wir zwei normale (M', p)-Geodätische $g\colon [0, a] \to M$, $g'(0) = v$ und $h\colon [0, \delta) \to M$, $h'(0) = w$, die einen beliebigen Winkel $\gamma = \sphericalangle(v, w) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

einschließen mögen; sei $q:=g(a)$. g und h liegen in einer p-Ebene $E' = \exp_p(\mathrm{Span}(v,w)\cap R)$. Ist $\delta>0$ genügend klein, so gibt es eine C^3-Schar von Geodätischen ohne konjugierte Punkte $g_u\colon [0,a]\to E'$ mit $g_0=g$, $g_u(0)=h(u)$, $g_u(a)=q$ für $0\leqq u<\delta$ und $g_u([0,a])\subset M'$ für $0<u<\delta$. Wir wollen die (M',p)-Dreiecke $(h(u), g_u, q)$ mit Schenkellängen a und u, Öffnung $c(u)=\int_0^a \|g'_u(t)\|\,dt$ und Öffnungswinkel γ betrachten.

Lemma 8. *Für die Öffnung $c(u)$ der oben definierten Schar von (M',p)-Dreiecken gilt:*

$$c(0)=a, \quad c'(0)=-\cos\gamma, \quad c''(0)=q(a)\sin^2\gamma,$$
$$c'''(0)=(\kappa_0+3q(a)^2)\sin^2\gamma\cos\gamma \quad \text{mit} \quad q=r/s, \quad \kappa_0=\kappa(0)$$

Beweis. Wir setzen $k(t,u)=g_u(t)$, $U=\frac{\partial k}{\partial u}$, $T=\frac{\partial k}{\partial t}$. Sei $z(u)=h'(u)-\|T(0,u)\|^{-2}\langle h'(u), T(0,u)\rangle T(0,u)$ und X das Vektorfeld längs k mit $X(0,u)=\|z(u)\|^{-1}z(u)$ und $\nabla_t X=0$. Nach Lemma 3 haben wir $c(u)=a\|T(u,0)\|$, $c'(u)=-\|T\|^{-1}\langle U,T\rangle(0,u)=-\cos\gamma(u)$ mit $\gamma(u)=\sphericalangle(T(0,u),U(0,u))$, $c''(u)=-\|T\|^{-1}\langle U^\perp, \nabla_t U^\perp\rangle(0,u)$ mit $U^\perp = U-\|T\|^{-2}\langle U,T\rangle T=\langle U,X\rangle X$. Für festes $u\in(0,\delta)$ ist $U^\perp(t,u)$ Jacobifeld längs g_u mit Randwerten $U^\perp(a,u)=0$, $U^\perp(0,u)=\sin\gamma(u)\,X(0,u)$. Die Funktion $l_u(t)=\langle U,X\rangle(u,t)$ ist also Lösung der Differentialgleichung

$$(\mathrm{I}_1) \quad l''_u(t)+\|T(u,0)\|^2\kappa(u,t)\,l_u(t)=0$$

mit $\kappa=\|T\|^{-2}\langle R(X,T)\,T,X\rangle$ zu den Randwerten $l_u(0)=\sin\gamma(u)$, $l_u(a)=0$. Zur Berechnung von l betrachten wir die Geodätischen $\tilde g_\varphi(\tau)=\exp_q[(a-\tau)(T(0,a)\cos\varphi - X(0,a)\sin\varphi)]$. Es gilt $g_u(t)=\tilde g_{\varphi(u)}(\tau(t))$ mit $\varphi(u)=\sphericalangle(T(a,u),T(a,0))$ und $\tau_u(t)=a-\int_t^a\|T(t',u)\|dt'=\|T(0,u)\|\cdot t+a(1-\|T(0,u)\|)$. Sei $\tilde R$ der Regularitätsbereich von $\exp_q$, $\tilde E=\mathrm{Span}(T(0,a),X(0,a))$, $\tilde E'=\exp_q\tilde E\cap\tilde R$. $\tilde\kappa(\tau,\varphi)$ sei die Krümmung von $\tilde E'$ an der Stelle $\tilde g_\varphi(\tau)$. Es gilt für $u\in[0,\delta)$, $t\in[0,a]$

$$\kappa(u,t)=\tilde\kappa(\varphi(u),\tau_u(t)),$$

denn $k((0,a)\times(0,\delta))$ ist Teilmenge von $\tilde E'$ und totalgeodätisch in M (Lemma 3).

Durch Vergleich von l mit der Lösung λ_φ der Jacobigleichung

$$(\mathrm{I}_2) \quad \lambda''_\varphi(\tau)+\tilde\kappa(\varphi,\tau)\,\lambda_\varphi(\tau)=0$$

zu den Anfangswerten $\lambda_\varphi(a)=0$, $\lambda'_\varphi(a)=-1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} l_u(t) &= \lambda_{\varphi(u)}(\tau_u(t)(\lambda_{\varphi(u)}(a-a\|\tau(0,u)\|))^{-1}\sin\gamma(u) \\ &= \lambda_{\varphi(u)}(\tau_u(t))(\lambda_{\varphi(u)}(a-c(u))^{-1}\sin\gamma(u). \end{aligned}$$

Damit berechnen wir c''': Es war

$$\begin{aligned} c''(u) &= -\|T\|^{-1}\langle U^\perp, \nabla_t U^\perp\rangle(0,u) \\ &= -\|T(0,u)\|^{-1}\,l_u(0)\,l'_u(0) \\ &= -\mu_{\varphi(u)}(a-c(u))\sin^2\gamma(u) \end{aligned}$$

mit $\mu_\varphi := \lambda'_\varphi/\lambda_\varphi$. Weiterhin

$$c'''(0) = = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0} \mu_\varphi(0)\sin^2\gamma - \mu'_0(0)\cos\gamma\sin^2\gamma$$
$$-2\mu_0(0)\,c''(0)\cos\gamma$$

denn $\sin^2\gamma(u) = 1 - c'(u)^2$ und $c'(0) = -\cos\gamma$.

Nach §2, Lemma 2 gibt es eine Umgebung U von $g((0,a])$ und eine lokale Isometrie $B: U \to M'$ so daß $B(g(t)) = g(t)$ und $B_* X(t,0) = -X(t,0)$ für alle $t\in(0,a]$. Wegen $B_* T_{g(t)}E' = T_{g(t)}E'$ gilt $B(E'\cap U)\subset E'\cap U$; also spiegelt $B|_{E'\cap U}$ die p-Ebene E' lokal an der Achse g. Insbesondere gibt es für alle $\tau_0\in(0,a]$ ein $\delta(\tau_0)>0$ so daß für alle $\tau\in[\tau_0,a]$ und alle φ mit $|\varphi|<\delta(\tau_0)$ gilt: $B(g_\varphi(\tau)) = g_{-\varphi}(\tau)$. Für solche φ und τ haben wir also $\tilde\kappa(\varphi,\tau) = \tilde\kappa(-\varphi,\tau)$, also auch $\lambda_\varphi(\tau) = \lambda_{-\varphi}(\tau)$ wegen der Eindeutigkeit des Anfangswertproblems (I_2). Es folgt $\mu_\varphi(\tau) = \mu_{-\varphi}(\tau)$, daher $\frac{\partial}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=0}\mu_\varphi(\tau) = 0$ für alle $\tau\in(0,a]$, und wegen Stetigkeit auch $\frac{\partial}{\partial\varphi}\big|_{\varphi=0}\mu_\varphi(0) = 0$.

Wegen $\kappa(\tau,0) = \kappa(\tau)$ in der Bezeichnung von §3 können wir λ_0 durch die dort eingeführten Funktionen r und s ausdrücken: Wegen der Anfangswerte $\lambda_0(a) = 0$, $\lambda'_0(a) = -1$ erhält man $\lambda_0 = s(a)\,r - r(a)\,s$. (Beachte $s'r - r's = 1$!) Daraus ergibt sich $\mu_0(0) = -q(a)$ mit $q := r/s$ und $\mu'_0(0) = -q(a)^2 - \kappa_0$ mit $\kappa_0 = \kappa(0)$, denn μ_0 erfüllt die Riccatigleichung $\mu'_0 + \mu_0^2 + \kappa = 0$.

Wir erhalten also

$$c''(0) = q(a)\sin^2\gamma$$
$$c'''(0) = (\kappa_0 + 3q(a)^2)\sin^2\gamma\cos\gamma.$$

Damit ist das Lemma gezeigt.

Jetzt können wir das Theorem beweisen:

Da $c'(0)<0$, sind die eingangs beschriebenen (M',p)-Dreiecke (h_u, g_u, q) für hinreichend kleines $\delta>0$ und alle $u\in(0,\delta)$ spitz. Nach Lemma 7 gilt also

$$F(c(u)) = F(a-u) + F'(a-u)\,f_a(u)(1-\cos\gamma) \tag{2a}$$

Man berechnet zunächst

$$f_a(0) = 0, \qquad f'_a(0) = 1,$$
$$f''_a(0) = 2q(a), \qquad f'''_a(0) = 2(\kappa_0 + 3q^2) \tag{$*$}$$

Wir leiten nun die Gl. (2a) dreimal ab und werten für $u=0$ aus, unter Verwendung von Lemma 8 und $(*)$.

Man erhält aus der zweiten Ableitung

$$(F''(a) - F'(a)\,q(a))[\cos^2\gamma - 2\cos\gamma + 1] = 0$$

und daraus, weil wir γ in einem gewissen Intervall frei wählen können,

$$F''(a) = F'(a)\,q(a) \tag{3}$$

für alle $a < d = \sup\{|p,x|\,|x\in M'\} \leqq \infty$.

Aus der dritten Ableitung von (2) erhalten wir

$$(F'''(a) - 3F''(a)\,q(a) + F'(a)(\kappa_0 + 3q(a)^2)[\cos^3\gamma - 3\cos\gamma + 2] = 0$$

und daher für alle $a < d$

$$F'''(a) - 3F''(a)\,q(a) + F'(a)(\kappa_0 + 3q(a)^2) = 0. \tag{4}$$

Setzt man nach (3) $F'' = F'r/s$ und $F''' = F'(r^2 - 1)/s^2$, so ergibt sich auf $(0, d)$ die Identität

$$(\kappa_0 + (r^2 - 1)/s^2)\,F' = 0$$

und daraus, weil F' isolierte Nullstellen hat,

$$r^2 + \kappa_0 s^2 = 1. \tag{5}$$

Daraus folgt, daß κ eine Konstante sein muß: Aus der Ableitung von (5) ergibt sich

$$rr' + \kappa_0 ss' = 0. \tag{5$'$}$$

Daraus durch nochmaliges Ableiten mit (5):

$$\kappa = r'^2 + \kappa_0 s'^2,$$

also

$$\kappa' = -2\kappa(r'r + \kappa_0 s's) = 0$$

mit (5)$'$. Die Schnittkrümmung auf M' ist also konstant. Damit ist das Theorem bewiesen.

Wenn $\kappa = \kappa_0$ ist, so gilt $r = s'$.

Daher folgt aus (3)

$$F' = Cs$$

für eine beliebige reelle Konstante $C \neq 0$. Also ist $F = CS$, S eine beliebige Stammfunktion von s. Aus (2) ergibt sich dann für jedes (M', p)-Dreieck von Typ (a, b, c, γ)

$$S(c) = S(a-b) + s(a-b)\,f_a(b)(1 - \cos\gamma)$$

mit $f_a(b) = s(a)\,s(b)/[s(a)\,r(b) - r(a)\,s(b)]$.

Weil im Fall konstanter Krümmung für s das Additionstheorem

$$s(a-b) = s(a)\,r(b) - r(a)\,s(b)$$

gilt, erhalten wir

$$S(c) = S(a-b) + s(a)\,s(b)(1 - \cos\gamma) \tag{6}$$

wobei s die Lösung der Differentialgleichung $s'' + \kappa_0 s = 0$ zu den Anfangswerten $s(0) = 0$, $s(0) = 1$ und S eine beliebige Stammfunktion von s ist. Das ist der Cosinus-Satz für Räume konstanter Krümmung.

Literatur

1. Eschenburg, J.-H.: Is the binocular visual space constantly curved? Preprint
2. Gromoll, D., Klingenberg, W., Meyer, W.: Riemannsche Geometrie im Großen. Lecture Notes in Mathematics **55**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968
3. Luneburg, R.K.: The Metric of Binocular Visual Space. J. Opt. Soc. Amer. **40**, 627–642 (1950)

Eingegangen am 5. März 1978