

Wilhelm Klingenberg, 1924–2010

Jost-Hinrich Eschenburg

Wenn der Knabe zu begreifen anfängt, dass einem sichtbaren Punkte ein unsichtbarer vorhergehen müsse, dass der nächste Weg zwischen zwei Punkten schon als Linie gedacht werde, ehe sie mit dem Bleistift aufs Papier gezogen wird, so fühlt er einen gewissen Stolz, ein Behagen. Und nicht mit Unrecht; denn ihm ist die Quelle alles Denkens aufgeschlossen, Idee und Verwirklichtes, potentia et actu, ist ihm klar geworden; der Philosoph entdeckt ihm nichts Neues, dem Geometer war von seiner Seite der Grund alles Denkens aufgegangen.
J.W. Goethe: Wilhelm Meisters Wanderjahre, Aus Makariens Archiv Nr. 40

It was Goethe who in the epigram no. 40 ... most clearly gave expression to the essence of geometry.

W. Klingenberg, Vorwort zu [1]

J.-H. Eschenburg (✉)

Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135, Augsburg, Deutschland

e-mail: eschenburg@math.uni-augsburg.de

Abb. 1 Wilhelm Klingenberg,
anlässlich seiner
Ehrenpromotion 2001 in Leipzig

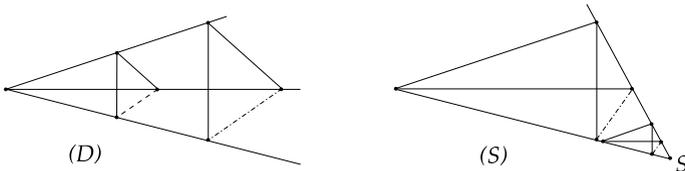


Wilhelm Klingenberg¹ hat für die Differentialgeometrie in Deutschland nach dem Zweiten Weltkrieg eine ähnliche Bedeutung wie Marcel Berger für Frankreich oder Manfredo Do Carmo für Brasilien: Fast alle, die heute in Deutschland mit diesem Fach zu tun haben, sind in irgendeiner Weise mit Klingenberg verbunden, als direkte oder indirekte Schüler von ihm selbst oder von Kollegen, die mit ihm eng verbunden waren. Unter den 27 Doktoranden, die in [1] aufgeführt werden, finden sich 14 spätere Professorinnen und Professoren, die die Differentialgeometrie in Deutschland und international vertreten. Diese außerordentliche Leistung war nicht allein sein Verdienst, es hatte auch sehr viel zu tun mit der ungewöhnlich anregenden und ambitionierten Atmosphäre an seiner hauptsächlichlichen Wirkungsstätte, an die er 1966 berufen wurde, dem Mathematischen Institut der Universität Bonn. Aber von entscheidender Bedeutung war seine ganz persönliche Art im Umgang mit seinen Schülern. Diese war sehr unkompliziert und weit entfernt von altem Ordinariengehabe. Noch bis ins hohe Alter blieb das Fahrrad in Bonn sein wichtigstes Transportmittel. Als Student wurde man sehr schnell geduzt und zu den zahlreichen mathematischen Tees und Partys eingeladen, die nicht selten im Klingenbergerschen Haus in Bonn-Röttgen stattfanden, voll von ostasiatischer Kunst. Dort traf man informell mit den vielen Gästen am Institut und am Sonderforschungsbereich zusammen. Als Doktorand von Wilhelm Klingenberg konnte man von seiner Ermutigung, seinen Anregungen und vor allem seinen Verbindungen profitieren – er kannte einfach jeden in der Riemannschen Geometrie. Die Betreuung seiner Doktoranden war unterschiedlich intensiv. Als ich ihn nach meinem Diplom nach einem möglichen Thema für eine Doktorarbeit fragte, schob er mir einen Stapel neuerer Preprints zu und sagte, ich solle mir daraus etwas aussuchen. Es blieb nicht dabei; ich habe im Laufe meiner Arbeit viele Anregungen von ihm bekommen, Hinweise, die es zu überprüfen galt, keine fertigen Ideen oder gar Rezepte. Nur Leute, die schon eine gewisse Selbständigkeit in ihrer mathematischen Arbeit erworben hatten, konnten bei ihm Erfolg haben. Manche sind frühzeitig ausgeschieden, und auch in dieser Auswahl lag vermutlich ein Teil seines großen Erfolges als Lehrer.

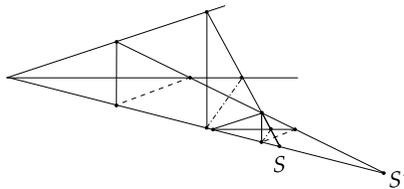
Wilhelm Klingenberg hat sich in seinen frühen Jahren bei Karl-Heinrich Weise und Friedrich Bachmann in Kiel mit klassischer Geometrie beschäftigt; das hat seine

¹Klingenbergs selbst verfasster Lebenslauf findet sich in [1]; weitere Biographien: [http://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Klingenberg_\(Mathematiker\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Klingenberg_(Mathematiker)), www.gap-system.org/~history/Biographies/Klingenberg.html.

Denkweise geprägt. „Man darf einen Geometer als einen zur Gestaltwahrnehmung besonders begabten Menschen ansehen“, schreibt er 1997 in seinem Aufsatz [15] „Mathematik und Melancholie“ und fährt fort: „Aus der scheinbaren Wirrnis des Vexierbildes gliedert sich, vielleicht erst nach längerer Dauer, urplötzlich eine Figur heraus.“ Als Beispiel führt er einen Moment aus seiner Kieler Zeit an, in dem er blitzartig die Äquivalenz zweier Schließungssätze der affinen ebenen Geometrie erkannte, des Desargues-Satzes (D) und des Schmetterlingssatzes (S). Beide Sätze behaupten, dass das gestrichelte Geradenpaar parallel ist, wenn die durchgezogenen Geradenpaare parallel sind.



Es war klar, dass (S) aus (D) folgte, aber die Umkehrung war ein offenes Problem, mit dem sich bereits Ruth Moufang beschäftigt hatte. Wie Klingenberg in [15] ausführt, gelang ihm der Beweis allein durch die Vorstellung einer Figur, die zwei Versionen von (S) (mit Scheiteln S und S') mit der Kontraposition von (D) vereinigte: Aus (S) und (S') folgt die Nichtparallelität der gestrichelten und der Strichpunkt-Linie und damit (D) in der Kontraposition.²



Die Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie prägte auch seine Habilitationsschrift an der Universität Hamburg (1954) mit dem Thema „Ebene Geometrien mit Nachbarelementen“, vgl. [2]. Es ging darin um eine Sorte von Ebenen, wo die Verbindungsgerade zweier Punkte und der Schnittpunkt zweier Geraden nicht mehr eindeutig sind, die aber eine geradentreue Projektion auf eine echte projektive Ebene gestatten; sie wurden später mit seinem Namen verbunden und sind bis heute Gegenstand zahlreicher mathematischer Arbeiten. In einer Rede anlässlich seiner Emeritierung 1989 in Bonn [14] sagte er dazu: „There even seems to be a Klingenberg plane. But whatever it is, it is not nearly as important as the Poincaré halfplane.“

Unter dem Einfluss vor allem von Marston Morse, den er durch Vermittlung von Wilhelm Blaschke in Hamburg kennen lernte, wechselte Wilhelm Klingenberg Ende

²Wenn das gestrichelte Geradenpaar nicht parallel ist, dann ist auch eins der durchgezogenen Geradenpaare nicht parallel.

der fünfziger Jahre sein Forschungsgebiet in Richtung Riemannsche Geometrie. Seine in Kiel erworbene Einstellung zur Geometrie lässt sich aber auch noch in seinen späteren Arbeiten erkennen. In [5] schreibt er über den Dreiecks-Vergleichssatz von Alexandrov-Toponogov auf krummen Flächen: „Ich glaube, dass ich kein Wort zu verlieren brauche über die Schönheit dieses Satzes, die jeder echte Geometer spüren wird.“ Er bleibt aber nicht bei dieser Feststellung stehen: „Alle vielleicht noch verbleibenden Zweifel an der Bedeutung dieses Satzes werden jedoch behoben, wenn ich nun zwei Beispiele gebe, wie dieser Dreiecksvergleichssatz den Schlüssel bildet für eine Reihe von Sätzen der Flächentheorie im Großen.“ Es folgen globale Sätze über Flächen, die danach auf beliebige Dimension erweitert werden und am Ende in dem berühmten Sphärensatz gipfeln, eine seiner folgenreichsten wissenschaftlichen Entdeckungen [4]:

Liegt die Schnittkrümmung einer einfach zusammenhängenden und vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit zwischen $\frac{1}{4}$ und 1 (Grenzen ausgeschlossen), dann ist diese zu einer Sphäre homöomorph.

Der Wert dieser Sätze liegt nicht allein in der Schönheit der Konstruktion, die vielleicht nur von einigen Mathematikern („echte Geometer“) so empfunden wird, sondern letztlich in dem Beitrag, den sie über ihren ursprünglichen Bereich hinaus für das Verständnis zentraler Teile der Mathematik leisten, hier für die Theorie der Mannigfaltigkeiten und das Verhältnis von Geometrie und Topologie. Die geometrische Intuition ist nicht Selbstzweck, sie wird in Dienst genommen zum Verstehen von tief liegender Mathematik weit jenseits des anschaulich Vorstellbaren. Die Effektivität dieses Dienstes beschreibt Klingenberg am Ende seines Artikels [5] mit den Worten: „Alle diese Sätze ... leiten ihren Ursprung, ihre Motivation und auch die wesentlichen Ideen zu ihren Beweisen her aus jener Quelle, die ich nicht besser zu umschreiben vermag als mit dem mir hier viel zu abstrakten Begriff: Geometrische Intuition.“

Zum Sphärensatz³ gab eine frühe Version von Harry Rauch (1951) mit nicht optimalen Krümmungsschranken, „somewhat mysterious and very difficult to understand“ [1]. Die optimalen Krümmungsschranken sind $\frac{1}{4}$ und 1, denn projektive Räume und Ebenen über den Divisionsalgebren \mathbb{C} , \mathbb{H} , \mathbb{O} sind einfach zusammenhängend, aber nicht zu einer Sphäre homöomorph, und ihre Schnittkrümmung liegt zwischen $\frac{1}{4}$ und 1, wobei beide Grenzen angenommen werden. Klingenberg gelang ein entscheidender Schritt zu den optimalen Schranken: Abstandsbälle mit Radius π (die Menge der Punkte, die mit einem Punkt p durch eine Kurve von Länge $< \pi$ verbunden werden können), sind wirklich topologische Bälle, homöomorph (sogar diffeomorph) zum offenen Einheitsball im \mathbb{R}^n , wie auf der Sphäre mit Krümmung 1, wo π der sphärische Abstand von Pol zu Pol ist. Dies konnte Klingenberg 1958 [3] für gerade Dimension und 1961 [4] für ungerade Dimension zeigen; der Beweis ist im letzteren Fall ungleich schwieriger, die Behauptung wird sogar falsch ohne die untere Krümmungsschranke. Mit dieser Aussage und dem schon erwähnten Satz von Alexandrov und Toponogov zeigte Marcel Berger 1960, dass ein solcher Raum von zwei

³Zur Wirkungsgeschichte dieses Satzes und seiner erst kürzlich bewiesenen differenzierbaren Version siehe den Artikel von Simon Brendle: Der Sphärensatz in der Riemannschen Geometrie, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 113 (2011), 123–138.

topologischen Bällen überdeckt wird und deshalb homöomorph zu einer Sphäre ist.⁴ Der Beweis galt zunächst nur für gerade Dimensionen; erst Klingenberg [4] konnte ihn auch auf ungerade Dimensionen erweitern. Er hielt 1961 eine Gastvorlesung in Bonn über seine Ergebnisse. Zwei seiner Hörer, Detlef Gromoll und Wolfgang Meyer, arbeiteten diese Ideen aus und schufen damit „das“ Lehrbuch über „Riemannsche Geometrie im Großen“ [7]; selbst der Name des Gebietes war neu im Deutschen. Generationen von Studierenden haben nach diesem Buch Riemannsche Geometrie gelernt. Anfang der achziger Jahre gab Misha Gromov eine sehr einfache neue Beweisidee für den topologischen Sphärensatz: Krümmung misst die lokale Konvexität des Komplements von Abstandsbällen; je größer die Schnittkrümmung K , desto „konvexer“ die Ball-Komplemente. Wegen $K < 1$ bilden alle von einem Punkt ausgehenden Geodäten der Länge π gemeinsam einen immersiellen Ball, wie auf der stärker gekrümmten Sphäre mit Radius 1. Wegen $K > \frac{1}{4}$ ist das Komplement dieses lokalen Abstandsballs lokal konvex wie auf der schwächer gekrümmten Sphäre vom Radius 2 (Krümmung $\frac{1}{4}$), und wegen der strikten Ungleichung ist die Konvexität strikt. Weil sich strikt lokal konvexe Mengen bei $K \geq 0$ und Dimension ≥ 3 auf einen Punkt zusammenziehen lassen, wird der Raum von zwei am Rand diffeomorph zusammengeklebten Bällen überlagert, also von einer topologischen Sphäre.⁵

Klingenberg liebte die Weite, nicht nur die mathematische, sondern auch die räumliche. Schon in den frühen fünfziger Jahren bewarb er sich in Italien und verbrachte u.a. ein halbes Jahr in Rom bei Francesco Severi und Beniamino Segre. Bei mehrfachen Aufenthalten in den USA ab 1954 besuchte er Marston Morse in Princeton und Shiing Shen Chern in Berkeley, 1963 folgte er einer Einladung nach Recife, Brasilien. Nach Professuren in Göttingen und Mainz lehrte er ab 1966 an der Universität Bonn. Der dort gegründete Sonderforschungsbereich 40 „Theoretische Mathematik“, die Keimzelle des späteren Max-Planck-Instituts, stellte die Mittel für ein umfangreiches auswärtiges Gästeprogramm zur Verfügung. Aus aller Welt, von Amerika bis Japan, kamen Mathematiker nach Bonn. Marcel Berger aus Paris und seine Studenten waren ohnehin oft und gern gesehene Gäste. Ich persönlich habe erst während meines Bonner Diplom- und Promotionsstudiums Anfang der siebziger Jahre ein erträgliches Englisch gelernt, die einzige Sprache, in der man mit allen Gästen kommunizieren konnte. So etwas war damals höchst ungewöhnlich; es gab kein zweites mathematisches Institut in Deutschland mit einem vergleichbaren Programm. Die japanischen Gäste, von denen einige mit Wilhelm Klingenberg eng zusammenarbeiteten, trugen auch zu seiner Ostasien-Begeisterung bei, die später durch seine Bücher über seine Tibet-Wanderungen und die Sammlung chinesischer Bronzen „Wilhelm und Christine Klingenberg“ im Museum für Ostasiatische Kunst in Berlin-Dahlem einem großen Publikum bekannt wurde. Seine Tätigkeit in Bonn war allerdings nicht frei von Spannungen: „The number of students, guests and staff grew, and some of the intimate charm of a close-knit group went down the drain. Not without some pain and struggle, I finally accepted the change and concentrated my activities on my own

⁴M. Berger: Les variétés riemanniennes $(1/4)$ -pincées, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* (3) 14 (1960), 161–170

⁵*Invent. Math.* 84 (1986), 507–522

differential geometry group“ [1]. Es gereicht Klingenberg und den anderen Beteiligten zur Ehre, dass sie diese Spannungen nur unter sich austrugen; das kollegiale Verhältnis zu anderen Mitgliedern des Instituts und die kollegiale Atmosphäre am ganzen Institut blieben davon weitgehend verschont.

Während seines Aufenthaltes in Brasilien 1963 begann Klingenberg, sich mit einem neuen Thema zu beschäftigen: die Dynamik des geodätischen Flusses und insbesondere die Existenz geschlossener geodätischer Linien; Ausgangspunkt waren Arbeiten von A.S. Svarc und S.I. Al’ber über die Existenz von periodischen Lösungen in der Variationsrechnung, vgl. [6]. Einerseits kann der geodätische Fluss als ein spezielles Hamiltonsches Vektorfeld angesehen werden [9, 10], und es gehört wohl zu Klingenberg’s Verdiensten, die Fruchtbarkeit dieser Verbindung zwischen Geometrie und Dynamik erkannt zu haben. Andererseits können geschlossene Geodätische als kritische Punkte des Energiefunktional auf einem Raum geschlossener Wege betrachtet und mit Methoden der Morse-Theorie gefunden werden [8, 11, 12]. Während z. B. in John Milnors Buch über Morse-Theorie (1963) der Wegeraum bei beschränkter Weglänge durch geodätische Polygone endlich-dimensional approximiert wird, führt Klingenberg [6] die unendlich-dimensionale Hilbert-Mannigfaltigkeit der geschlossenen H^1 -Kurven (geschlossene Wege mit quadratintegrierbarer Ableitung) ein, den maximalen Definitionsbereich des Energiefunktional. Auf diesem Raum wirkt die Gruppe $O(2)$ durch Transformation der Parameter-Kreislinie, und es lassen sich Methoden der äquivarianten Morsetheorie auf das Energiefunktional auf diesem Raum anwenden. In seinem Lehrbuch über Riemannsche Geometrie [13] hat Klingenberg daher Riemannsche Mannigfaltigkeiten von Anfang an auf Hilberträumen modelliert. Seine Forschungen über geschlossene Geodätische gingen in zwei Richtungen: Existenz von kurzen und Anzahl von (beliebig langen) geschlossenen Geodätischen. Eins der schönsten von ihm angeregten Resultate stammt von Detlef Gromoll und Wolfgang Meyer: Wenn die Folge der Bettizahlen des freien Schleifenraums einer kompakten Mannigfaltigkeit M unbeschränkt ist, gibt es für jede Riemannsche Metrik auf M unendlich viele geschlossene Geodätische.⁶ Klingenberg’s Methoden wurden vielfach aufgegriffen und spielen sowohl in der Differentialgeometrie (Riemannsche, Finslersche und Lorentzsche Geometrie) als auch in der symplektischen Geometrie (Hamiltonsche Flüsse) eine Rolle.

Bei seiner Emeritierung [14] sagte er zu seinen Arbeiten über geschlossene Geodätische: „While I myself did not get the best results, I can pride myself with my students who got many important theorems in this long neglected and difficult field.“ In der Tat hat sich ein beträchtlicher Teil seiner Doktoranden mit diesem Fragenkomplex beschäftigt, viele von ihnen äußerst erfolgreich.

Nach seiner Emeritierung übernahm Wilhelm Klingenberg ab 1990 eine Gastprofessur an der Universität Leipzig und beteiligte sich an der Neugestaltung des mathematischen Fachbereiches nach der Wiedervereinigung. Am 4. Oktober 2001 verlieh ihm die Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Leipzig die Ehrendoktorwürde (s. Abb. 1)

⁶D. Gromoll, W. Meyer: Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 3 (1969), 493–510.

in Würdigung seines richtungsweisenden wissenschaftlichen Werkes auf den Gebieten der Globalen Riemannschen Geometrie und der Theorie der Geschlossenen Geodätischen sowie in Anerkennung seines besonderen Engagements als Wissenschaftler und Hochschullehrer für die Mathematik in Leipzig.

Trotz dieser Tätigkeit blieb ihm genügend Zeit für zahlreiche Reisen und Wanderungen, besonders durch das Land, das für ihn „ein Stück Heimat“ [16] geworden war: Tibet. Einem seiner Reiseberichte [16] stellt er einige Verse aus dem „Cherubinischen Wandersmann“ von Angelus Silesius (1657) voran, die mir wie ein Motto seines ganzen bewegten Lebens erscheinen⁷:

*Freund, so du etwas bist
so bleib doch ja nicht stehn:
Man muss von einem Licht
fort in das andere gehn.*

Literatur

1. Klingenberg, W.: Selected Papers. World Scientific, Singapore (1991)
2. Klingenberg, W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. *Math. Z.* **60**, 384–406 (1954)
3. Klingenberg, W.: Contributions to Riemannian geometry in the large. *Ann. Math.* **69**, 654–666 (1959)
4. Klingenberg, W.: Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Comment. Math. Helv.* **35**, 47–54 (1961)
5. Klingenberg, W.: Neue Methoden und Ergebnisse in der Riemannschen Geometrie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **66**, 85–94 (1964)
6. Klingenberg, W.: On the number of closed geodesics on a Riemannian manifold. *Bull. Am. Math. Soc.* **70**, 279–282 (1964)
7. Gromoll, D., Klingenberg, W., Meyer, W.: Riemannsche Geometrie im Großen. *Springer Lecture Notes in Math.*, vol. 55 (1968)
8. Klingenberg, W.: Closed geodesics. *Ann. Math.* **89**, 68–91 (1969)
9. Klingenberg, W., Takens, F.: Generic properties of geodesic flows. *Math. Ann.* **197**, 323–334 (1972)
10. Klingenberg, W.: Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type. *Ann. Math.* **99**, 1–13 (1974)
11. Klingenberg, W.: Existence of infinitely many closed geodesics. *J. Differ. Geom.* **11**, 299–308 (1976)
12. Klingenberg, W.: Lectures on Closed Geodesics. *Springer Grundlehren Math. Wiss.*, vol. 230 (1978)
13. Klingenberg, W.: Riemannian Geometry. De Gruyter, Berlin (1982)
14. Klingenberg, W.: Rede zur Emeritierung, Bonn (1989) (unveröffentlicht)
15. Klingenberg, W.: Mathematik und Melancholie. Von Albrecht Dürer bis Robert Musil. *Akademie der Wissenschaften und der Literatur*, Mainz (1997)
16. Klingenberg, W.: Erfahrungen auf dem Dach der Welt. *Sierra*, München (2001)

⁷Dieser Nachruf wäre nicht möglich gewesen ohne die Hilfe von vielen Kolleginnen und Kollegen, die mit Wilhelm Klingenberg verbunden waren. Dafür möchte ich mich sehr herzlich bedanken, ganz besonders bei Hans-Bert Rademacher, Hermann Karcher, Werner Ballmann, Victor Bangert, Gudlaugur Thorbergsson und Ernst Heintze.



Jost-Hinrich Eschenburg ist Professor für Mathematik an der Universität Augsburg. Er studierte Mathematik, Physik und Philosophie in Tübingen, Bonn und Münster. Seine Diplomarbeit schrieb er 1972 bei Wilhelm Klingenberg und promovierte 1975 bei ihm. Nach seiner Assistentenzeit 1976–1986 in Münster, einem einjährigen Forschungsaufenthalt in Berkeley 1981/1982 und einer Professurvertretung in Freiburg 1987/1988 lehrt er seit 1988 in Augsburg. Seine hauptsächlichen Forschungsinteressen liegen auf den Gebieten der Riemannschen Geometrie (positive Krümmung, symmetrische Räume, harmonische Abbildungen) sowie der diskreten Geometrie (aperiodische Pflasterungen).