OSBORNE, J., ERDURAN, S., & SIMON, S. (2004). Enhancing the quality of argumentation in school science. *Journal of Research in Science Teaching, 41*(10), 994–1020.

OTT, K. (2001). Moralbegründungen. Dresden: Junius-Verlag.

PFEIFFER, V. (2003). *Didaktik des Ethikunterrichts. Wie lässt sich Moral lehren und lernen?*. Stuttgart: Kohlhammer GmbH.

TOULMIN, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

VOSS, J. F. & VAN DYKE, J. A. (2003). Argumentation in psychology: Background Comments. *Discourse Processes*, 32 (2&3), 89–111.

ZOGLAUER, T. (1998). *Normenkonflikte – zur Logik und Rationalität ethischen Argumentierens*. Stuttgart: Friedrich Frommann Verlag.

Dr. NICOLA MITTELSTEN SCHEID, Queen's University Kingston, Faculty of Education, Arthur McDuncan Hall, 511 Union St, Kingston, Ontario, Canada K7M 5R7, nms@queensu.ca. Jg. 1977, Dr. phil.; Studium der Biologie, Theologie und Klassischen Philologie für das Lehramt an Gymnasien an der Universität Münster/Westfalen; 2005–2008 Setbetreuerin im Projekt »Biologie im Kontext« des BMBF und IPN; ebenfalls 2005–2008 wissenschaftliche Mitarbeiterin und Doktorandin der Abteilung Biologiedidaktik der Universität Oldenburg zum Thema »Niveaus von Bewertungskompetenz«; Zoopädagogin im Jahre 2007; seit Juni 2008 Postdoc-Stipendiatin an der Faculty of Education der Queen's University in Kingston, Ontario, Kanada.

Bilder aus ganzrationalen Funktionen

RENATE MOTZER

Um aktiv-entdeckend mit ganzrationalen Funktionen zu arbeiten, sollen Schülerinnen und Schüler einer 11. Klasse mit Geogebra selbstständig Bilder erstellen. Sie können hierbei den Schwierigkeitsgrad ihres Bildes selbst bestimmen und vor allem rechnerisch-planendes Handeln und spielerisches Ausprobieren am PC kombinieren. Eine Individualisierung ist sowohl hinsichtlich der mathematischen, als auch der ästhetischen Gesichtspunkte möglich. Computergestütztes Explorieren hilft den Schülerinnen und Schülern, ihr bisheriges Wissen vom ihrem persönlichen Standpunkt aus zu erweitern.

1 Ziele der Unterrichtseinheit

In dieser Unterrichtseinheit sollten Schülerinnen und Schüler einer 11. Klasse des Gestaltungszweiges einer bayerischen Fachoberschule ganzrationale Funktionen als Werkzeuge kennenlernen, um mit Hilfe von Geogebra Bilder zu erzeugen. Sie sollten dabei auch einen ästhetischen Aspekt der Mathematik selbst zum Ausdruck bringen dürfen. Sie hatten für die Bearbeitung 3 Schulwochen mit jeweils 4 Unterrichtsstunden Zeit, in denen sie zunächst das Aufstellen von Funktionstermen erarbeiten mussten.

Geogebra war der Klasse bis dahin nicht bekannt. Ich habe es gewählt, weil die Einarbeitungszeit für das, was für die Aufgabe nötig ist, nicht lange dauert und es für alle Schülerinnen und Schüler kostenlos zugänglich ist. Da die Schülerinnen und Schüler mit einem Klick prüfen können, ob die eingegebenen Funktionsgraphen das gewünschte Aussehen haben und durch Verschieben der Graphen auch manche Fehler direkt am PC ausbessern können, bekommen sie einen breiteren Zugang zum Thema Funktion vor allem zur Ermittlung oder Kontrolle der Eigenschaften.

Bei dieser Gelegenheit sollten die Schülerinnen und Schüler parametrische Funktionen als Modellierungswerkzeuge für selbstgewählte Motive kennenlernen. Was sie dabei lernen, können sie später aber auch anwenden, wenn Daten vorgegeben sind (z. B. physikalische Messdaten oder sonstige statistische Daten), für die »passende« Funktionsterme gefunden werden sollen.

2 Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

Vorausgegangen war eine Unterrichtseinheit, in der die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe eines Expertenpuzzles die Untersuchung ganzrationaler Funktionen vor allem 3. und 4. Grades erarbeiteten. Dabei sind die Funktionsterme gegeben und die Eigenschaften der Graphen gesucht[1].

3 Wissen und Fertigkeiten, die in dieser Einheit erworben werden

Nun geht es darum, die Sichtweise umzukehren: Eigenschaften sind bekannt, und es sollen die zugehörigen Funktionsterme bestimmt werden. Der Graph, von dem man vielleicht eine ungefähre Vorstellung im Kopf hat, kann genau gezeichnet werden. Unter Umständen kann sich dabei freilich zeigen, dass der errechnete Graph doch um einiges anders ausschaut als gedacht. Das Wechselspiel von Funktionsterm und Graph kann folglich besser durchdrungen werden. Wie wichtig dieses Wechselspiel für den Aufbau des funktionalen Denkens (VOLLRATH, 1989) ist, wird zu recht immer wieder betont (LEUDERS & PREDIGER, 2005; VOGEL, 2006).

Verwirklicht wird dabei auch das »Prinzip des operativen Übens, d. h. gleichartige Übungsaufgaben sollten im Sinne des operativen Prinzips als systematische Variation der Daten erzeugt werden, um dadurch Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und somit Kenntnisgewinn zu erzielen«(WINTER, 1984).

[1] Material dazu gibt es auf meiner Homepage: *http://www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/team/motzer/downloads/expertenpuzzle/*

Bilder aus ganzrationalen Funktionen –

eine Ausstellung der Klasse 11GE zum Jahr der Mathematik

Ihr Auftrag: Erstellen Sie mit geogebra *(www.geogebra.org)* ein kleines Bild, das durch mindestens 5 ganzrationale Funktionen entstanden ist.

Schön wäre es auch, wenn Sie mit anderen zusammenarbeiten und aus Ihren Einzelteilen ein gemeinsames größeres Bild gestalten.

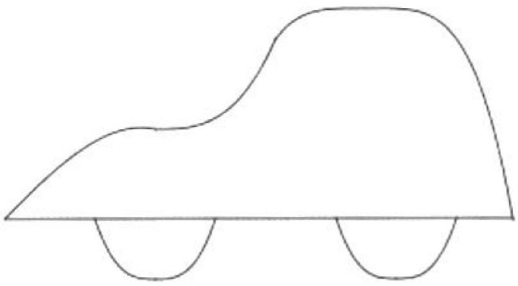
Neben dem Bild(ausschnitt) sollten Sie auch die »Entstehungsgeschichte« abgeben:

- Vorüberlegungen
- eine Aufstellung der verwendeten Funktionen mit den zugehörigen Intervallen
- nachvollziehbare Rechnungen zur Ermittlung der Funktionsterme
- was Sie im Laufe der Bearbeitung der Aufgabe für sich dazugelernt haben

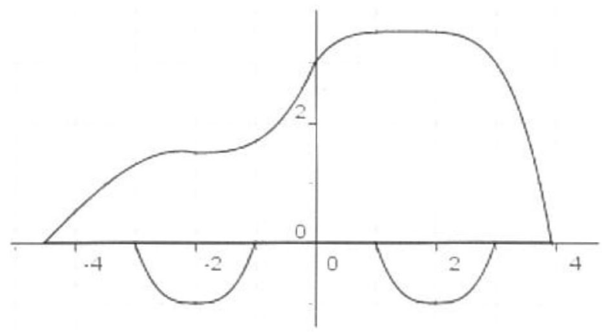
Sie sollten auch dazu in der Lage sein, Ihre Rechungen ggf. mündlich zu erläutern und auf Nachfrage weitere Eigenschaften der verwendeten Funktionen zu erklären.

Stichtag für die Abgabe: 9. Mai.

Beispiel



bzw.



Zusammengesetzt aus 8 Funktionen:

Nr.	Name	Definition	Algebra
1	Funktion f		$f(x) = 0$
2	Funktion g	Funktion f im Intervall [-4.5, 3.94]	$g(x) = 0$
3	Funktion h		$h(x) = -0.07\,(x + 4.5)^3 + 1.02\,(x + 4.5)$
4	Funktion f_1	Funktion h im Intervall [-4.5, -2]	$f_1(x) = -0.07\,(x + 4.5)^3 + 1.02\,(x + 4.5)$
5	Funktion l		$l(x) = 0.19\,(x + 2)^3 + 1.5$
6	Funktion g_1	Funktion l im Intervall [-2, 0]	$g_1(x) = 0.19\,(x + 2)^3 + 1.5$
7	Funktion m		$m(x) = -0.1\,(x - 1.5)^4 + 3.5$
8	Funktion h_1	Funktion m im Intervall [0, 3.94]	$h_1(x) = -0.1\,(x - 1.5)^4 + 3.5$
9	Funktion n		$n(x) = (x + 2)^3 - 1$
10	Funktion f_2	Funktion n im Intervall [-2, -1]	$f_2(x) = (x + 2)^3 - 1$
11	Funktion o		$o(x) = -(x + 2)^3 - 1$
12	Funktion g_2	Funktion o im Intervall [-3, -2]	$g_2(x) = -(x + 2)^3 - 1$
13	Funktion p		$p(x) = (x - 2)^3 - 1$
14	Funktion h_2	Funktion p im Intervall [2, 3]	$h_2(x) = (x - 2)^3 - 1$
15	Funktion q		$q(x) = -(x - 2)^3 - 1$
16	Funktion f_3	Funktion q im Intervall [1, 2]	$f_3(x) = -(x - 2)^3 - 1$

Abb. 1. Arbeitsblatt

Wichtige Fragen der Funktionslehre, mit denen sich die Schülerinnen und Schüler in diesem Zusammenhang beschäftigen sollten sind: Welche Bedeutung haben die Koeffizienten, die in den Funktionstermen vorkommen? Wie wirkt es sich auf den Graphen aus, wenn einer abgeändert wird? Wie wirkt es sich aus, denn die Potenz beim x erhöht/erniedrigt wird?
Um zu lernen, wie man Funktionsterme aufstellt, erhielten die Schülerinnen und Schüler Informationsmaterial von mir[2]. Darin werden Beispiele vorgerechnet und die Rechnungen begründet. Weiterhin gibt es dort Übungsaufgaben, die die Schülerinnen und Schüler zu lösen haben. In diesem Zusammenhang wird auch aufgezeigt, wie Gleichungssysteme mit bis zu 4 Gleichungen für 4 Unbekannte gelöst werden können.
Sind keine Geogebra-Kenntnisse vorhanden, empfiehlt sich eine kurze Einführung vorab.

4 Aufgabe der Schülerinnen und Schüler

Nach dieser Vorarbeit wurden die Hauptaufgaben (siehe Arbeitsblatt) im Wesentlichen daheim erledigt.

5 Vorgaben der Lehrkraft

Damit die Schülerinnen und Schüler eine inhaltlich anschauliche Vorstellung von der Aufgabe bekommen, empfiehlt es sich, die Aufgabe anhand eines Beispiels zu verdeutlichen. Dabei geht es insbesondere um die Vorgehensweise mit all den notwendig werdenden Überarbeitungen, Verwerfungen, der Kombination aus Rechnen und Ausprobieren.
Ich habe als Beispiel ein Auto gewählt (Abb. 1). An der Tafel erläuterte ich den Schülerinnen und Schülern nun, wie ich zu den Funktionstermen für das Auto gekommen bin. So konnten sie einen Einblick darin bekommen, wie man vorgehen kann (nicht muss). Bei der Erstellung der »Räder« zeigte ich ihnen auf, dass man manchmal auch seine Ideen verwerfen muss bzw. wie man sie abändern kann.
Wegen der Begrenzung auf ganz-rationale Funktionen kam die naheliegende Überlegung, einen Halbkreis zu verwenden, nicht in Frage. Meine nächste Idee war, eine Parabel zu nehmen.
Für das linke Rad muss sie ihren Scheitel bei (– 2; – 1) haben. Also lautet der Ansatz:

$$n(x) = a(x + 2)^2 - 1.$$

Da die Radfunktion bei – 1 eine Nullstelle haben muss, muss $a = 1$ sein.
Zeichnet man die Parabel im Intervall [– 3; – 1] ein, so sieht man, dass sie zu wenig einem Rad entspricht. Ähnlich wie eine Parabel verhält sich eine Funktion 4. Grades. Lässt man $(x + 2)^4 - 1$ einzeichnen, so ist der Reifen zu platt. Also sollte man es 3. Grades versuchen. $(x + 2)^3 - 1$ passt für x aus [– 2; –1], muss aber für kleinere x angepasst werden:
$-(x + 2)^3 - 1$ für den Bereich [– 3; – 2].
Man kann an diesem Beispiel sehen, wie sich die Änderung der Potenz auf die »Flachheit« des Graphen von x^n im Ursprung auswirkt und wie man diesen flachen Punkt aus dem Ursprung an eine andere Stelle im Koordinatensystem verschieben kann.
Bei der Funktion h bin ich so vorgegangen, dass der Graph beim Wendepunkt (– 4,5; 0) beginnen sollte. Daher die (zur Scheitelform analoge) Wendepunktsform (diese ist auch im Skript vorgekommen):

$$h(x) = a(x + 4{,}5)^3 + b(x + 4{,}5) + 0.$$

a und b werden so gewählt, dass die Funktion bei $x = -2$ relativ flach ist und eine angemessene Höhe hat. Da die Klasse noch keine Differentialrechnung gelernt hatte, konnten a und b nicht durch zwei Gleichungen ermittelt werden, sondern nur durch Probieren.
Bei $x = -2$ wird eine Funktion 3.Grades angeschlossen:

$$a(x + 2)^3 + b,$$

so dass bei $x = 0$ die Höhe 3 erreicht wird. Hierfür stellte ich mit den Jugendlichen die beiden Gleichungen für a und b auf und löste sie.
Da das Autodach sehr flach werden soll, wurde von mir eine Funktion 4. Grades verwendet

$$a(x - 1{,}5)^4 + b.$$

Hier wurde nun eine Gleichung für a und b aufgestellt, damit die Zusammensetzung bei 0 stetig ist. Dann variierte ich, bis das Bild meinen Vorstellungen entsprach. Je kleiner man a wählt, desto flacher wird das Dach.
Ich wollte mit diesem Vorgehen den Jugendlichen zeigen, dass man Rechnen und systematisches Probieren durchaus kombinieren kann, und hoffte ihnen darin ein Vorbild zu sein.

6 Arbeiten der Schülerinnen und Schüler

Ich kann zwar nicht nachprüfen, wie weit sie sich haben helfen lassen. Die Ergebnisse fand ich jedenfalls überwältigend. Dies betrifft insbesondere den kreativen und probierenden Teil, aber bei einigen Schülerinnen und Schülern auch den systematisch rechnenden.
Selbst eine der schwächsten Schülerinnen, die auch keine besondere Beziehung zum PC hatte und noch wenig Vorstellung vom Zusammenhang einer Funktionsgleichung und dem Graph einer Funktion hatte, hat ein eigenständiges Bild erstellt und konnte durch Probieren so manches über Funktionen lernen.

Mein Bild, ein „Heartagramm" ist durch fünf Gerade und zwei Halbkreise entstanden.
Ich habe das Bild größtenteils durch ausprobieren zustande gebracht.
Zuerst wollte ich die Halbkreise mit einer Funktion machen, nach langem probieren fand ich auch eine, die durch alle drei Notwendigen punkte ging, die jedoch zu flach war, also ersetzte ich sie durch halbkreise.
Die Funktion war: $f(x) = -0{,}04x^4 + 5$
wobei ich herrausfand das ich mit dem + 5 genau den mittleren Punkt treffen konnte. Auch entdeckte ich, dass bei $-0{,}001x^4 + 5$ die Parabel breiter wurde, sogar allgemein bei $-0{,}01x^4$ oder $0{,}1x^4$.
Am Anfang war es auch Schwierig die Richtige Steigung für die Geraden zu finden. Ich habe es zuerst mit $f(x) = 1x + 4$ probiert, bis ich zu $f(x) = 1{,}25x + 5$ kam, was dem Bild dann entsprach.

Abb. 2. Bericht zum Probierverfahren

---

2 *http://www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/team/motzer/downloads/aufstellen_von_funktionstermen.pdf*

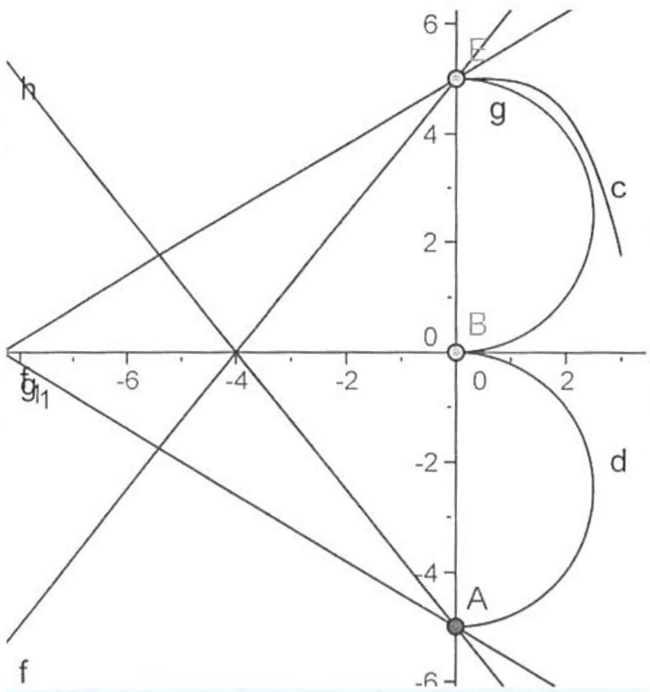


Abb. 3. Bild zum Bericht

Abb. 4. Schirm aus Geraden und Parabeln

Etliche Schülerinnen und Schüler beschränkten sich auf Geraden und Parabeln.

Manche stellten jedoch bewusst eine Funktion 3. oder 4. Grades in den Mittelpunkt und komponierten das Bild darum herum.

Die guten Schülerinnen und Schüler rechneten die Funktionsterme aus. Sie setzten Stück an Stück und berechneten die Parameter so, dass der Übergang (einigermaßen) stetig wird.

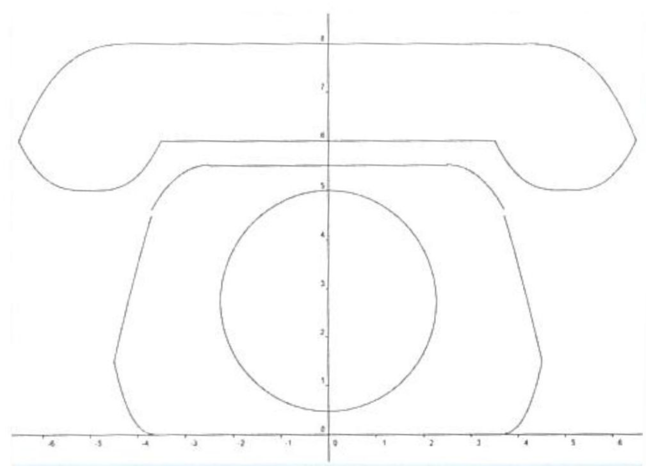


Abb. 5. Telefon aus Funktionen höheren Grades

7 Das Beispiel »Segelboot«

Nicht immer sieht der Graph am Bildschirm so aus, wie man es sich vorgestellt hat. Z. B. wollte eine Schülerin eine Welle erzeugen und versuchte, den Term durch die vorgegebenen Nullstellen zu finden (Die Sinusfunktion ist nicht Stoff des Ausbildungsbereiches Gestaltung).

Doch die erzeugte Welle sieht nicht so aus, wie gewünscht, ein Teil der »Welle« geht viel zu weit nach unten, ein anderer ist zu flach. Durch Spielen mit dem Parameter a beim Ansatz

$$f(x) = a(x - x_1)^2\,(x - x_2)^2\,(x - x_3)^2\,(x - x_4)^2\,(x - x_5)^2$$

sieht die Welle schließlich doch einigermaßen so aus, dass die Schülerin zufrieden war. Durch die Bewegung des Schiffs geht die Welle vielleicht doch nicht überall gleich tief.
An der beigefügten Rechnung sieht man außerdem, dass die Schülerin beim Auflösen nach a einen Fehler machte, denn sie berechnete den Kehrwert von a. Beim Eingeben merkte sie, dass das Ergebnis nicht stimmen konnte. Als sie den Kehrwert testete, passte das Bild. Sie übersah dann aber beim Verbessern der Lösung eine Zeile.

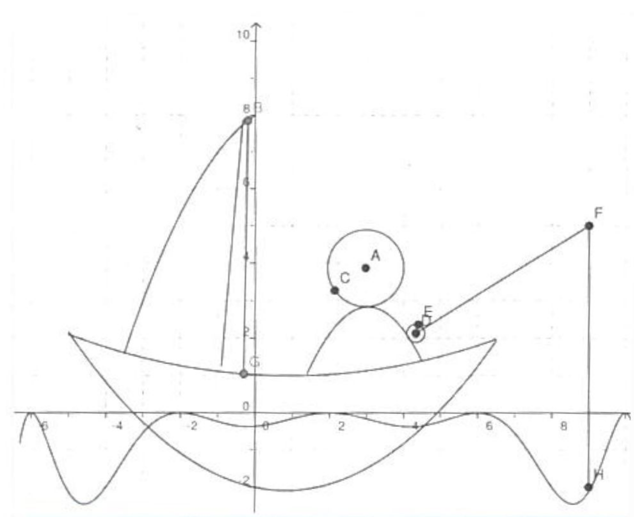


Abb. 6. Segelboot

8 Verwendung weiterer Funktionstypen:

Ein anderer Schüler, der ebenfalls eine Welle einbauen wollte, erinnerte sich an die Sinusfunktion, die er in der Realschule

Wellen: NST: x_1 -6², x_2 -2², x_3 2², x_4 6², x_5 10² ; P(-4|-2)

$-2 = a(-4+6)^2(-4+2)^2(-4-2)^2(-4-6)^2(-4-10)^2$

$-2 = a \cdot 11289600 \quad |:(-2) : 11289600$

$a = -5644800$

$f(x) = -\frac{1}{5644800}(x+6)^2(x+2)^2(x-2)^2(x-6)^2(x-10)^2$

Schiff "boden": NST: -4, 6 P(4|2)

$2 = a(4+4)(4-6)$

$2 = a(-16) \quad |:2(-16)$

$a \hat{=} -\frac{1}{8} \quad f(x) = -\frac{1}{8}(x+4)(x-6)$

Schiff "oben": NST: 1² P(5|0,5)

$0{,}5 = a(5-1)^2 \Rightarrow 0{,}5 = a \cdot 16 \quad |:0{,}5$

$a = \frac{1}{32} \quad f(x) = \frac{1}{32}(x-1)^2$

Abb. 7. Beschreibung zum Segelboot

kennengelernt hatte. Ich half ihm ein wenig, sein Wissen aufzufrischen, so dass er mit Hilfe der Sinusfunktion die gewünschte Welle erzeugen konnte.

Als die Schülerinnen und Schüler selbst mit Geogebra experimentierten und schnell entdeckten, wie man dort Kreise zeichnen kann, habe ich nachträglich zugelassen, auch Kreise bzw. Kreisteile einzubauen. Statt Strecken einfach einzuzeichnen, sollten jedoch immer die zugehörigen Geradengleichungen berechnet werden. Dies tat de facto schließlich aber nur ein Teil der Klasse. Viele Schülerinnen und Schüler hielten sich jedoch an die Vorgabe.
Viele Schülerinnen und Schüler entdeckten auch, dass sie durch Ziehen am Funktionsgraph diesen im Koordinatensystem verschieben können und die Funktionsterme automatisch angepasst werden. Das, was sie über die Scheitelform einer Parabel gelernt haben und schon im Skript auf die Wendepunktsform übertragen wurde, konnten sie in noch größerer Verallgemeinerung erleben.

9 Fazit und Ausblick

Jeder Schüler hat ein Stück der Funktionenwelt selbstständig erkunden können, und die Klasse freute sich, dass sie so eine kleine durchaus sehenswerte Ausstellung zum Jahr der Mathematik im Schulhaus zusammenstellen konnte.

In der anschließenden Probearbeit wurde außerdem deutlich, dass die allermeisten Schülerinnen und Schüler nach dieser Unterrichtseinheit in der Lage waren, Funktionsterme aus vorgegebenen Eigenschaften zu erstellen. Dadurch, dass sie zu selbstgewählten Motiven Funktionen gesucht haben, haben sie ein viel persönlicheres Verhältnis zu den Funktionstermen erworben. Sie haben einen anderen Bezug zu Funktionstermen bekommen und können Funktionsterme und die Eigenschaften der Graphen besser zueinander in Beziehung setzen. Dies war auch im folgenden Schuljahr bemerkbar. Die Schülerinnen und Schüler, die in dieser 11. Klasse waren, taten sich im nächsten Schuljahr mit der Vorstellung von Funktionsgraphen um einiges leichter, als diejenigen, die in der 12. Klasse neu in die Klasse gekommen sind und denen diese Vorerfahrungen fehlten.

An viele Erfahrungen, die die Schülerinnen und Schüler bei diesem Projekt gewonnen haben, konnte im weiteren Unterrichtsverlauf angeknüpft werden. Da Funktionsgraphen aneinander gefügt werden, kann über Stetigkeit und später auch über Differenzierbarkeit an der Nahtstelle diskutiert werden. Wenn die Bestimmung von Hoch-, Tief- und Wendepunkten behandelt sind, können auch diese Eigenschaften beim Aufstellen der Funktionsterme eine Rolle spielen. Auch Flächeninhalte von eingeschlossenen Flächen können bestimmt werden.

In der 12. Klasse gab es darum auch für diese Klasse eine Fortsetzung derartiger Aktivitäten, die die neuen Inhalte wie Differenzierbarkeit und Flächenberechnung aufnahm.

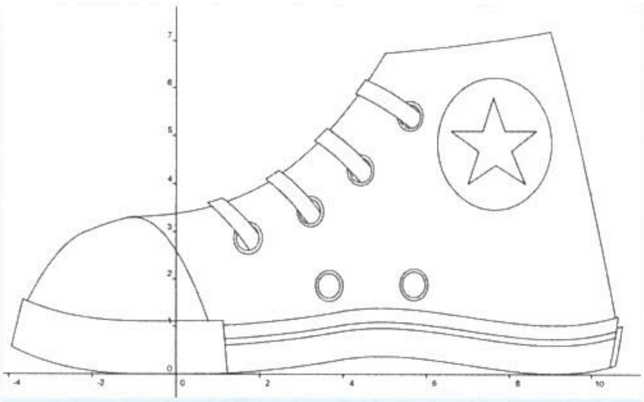


Abb. 8. Turnschuh

Literatur

LEUDERS, T. & PREDIGER, S. (2005). Funktioniert's? – Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik, 47(2)*, 1–7.

VOGEL, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation*. Hildesheim: franzbecker.

VOLLRATH H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10(1)*, 3–37.

WINTER, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *Mathematik Lehren, 1(2)*, 4–16.

Dr. RENATE MOTZER, Universität Augsburg, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de, ist Akademische Oberrätin am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik. Sie unterrichtet außerdem im Rahmen eines Lehrauftrags eine Klasse an der Staatlichen FOS/BOS Augsburg.