Zwei sich schneidende Diagonalen des regelmässigen Fünfecks teilen einander stetig.

5) Berechnen sie einen Lotvektor zur Fünfecksebene und zeigen sie, dass der Ortsvektor zum Punkt I_5 Lotvektor ist.

6) Welche Abstände hat die Fünfecksebene vom Ursprung und von Punkt I_5?

$\left(0{,}6\sqrt{50+15\sqrt{5}} \text{ bzw. } 1{,}2\sqrt{50-10\sqrt{5}}\right)$

Vergleichen sie diese Abstände mit $\overline{OI_5}$.

7) Berechnen sie die Koordinaten des Schnittpunktes F von Ebene und Lot.

$\left(F(1-0{,}6\sqrt{5}/2/2+1{,}2\sqrt{5})\right)$

8) Berechnen sie den Neigungswinkel β der Seitenflächen gegen die Grundfläche und den Winkel γ zwischen zwei Seitenflächen.

$\left(\cos\beta = \frac{1}{15}\sqrt{75+30\sqrt{5}} \quad \cos\gamma = -\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)$

9) Berechnen sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der zwei Lote durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Dreiecke $\triangle I_1I_9I_5$ und $\triangle I_{11}I_2I_5$. $(S(0/0/0))$

10) Berechnen sie den Radius r des Umkreises des Fünfecks in Abhängigkeit von der Seite des Fünfecks.

$\left(r = 0{,}1\sqrt{50+10\sqrt{5}} \cdot \overline{I_1I_9}\right)$

11) Berechnen sie den Radius ρ des Inkreis des Fünfecks in Abhängigkeit von der Seite des Fünfecks.

$\left(\rho = 0{,}1\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot I_1I_9\right)$

12) Berechnen sie die Fläche des Fünfecks.

13) Welche Beziehung besteht zwischen r und ρ

$\left(r = (\sqrt{5}-1)\,\rho\right)$

14) a) Untersuchen sie die gegenseitige Lage von Vektor $\overrightarrow{OS_2}$ und zugehöriger Dreiecksebene.

b) Berechnen sie das Volumen der Pyramide mit dem Dreieck $\triangle I_1I_9I_5$ als Grundfläche und dem Ursprung als Spitze.

$\left(\frac{1}{48}(3+\sqrt{5})\cdot\overline{I_1I_9}\right)$

c) Zeigen sie, dass $\cos 36° = 0{,}25(1+\sqrt{5})$ gilt.

Die aufgeführten Beispiele zeigen, wie Platonische Körper und das Computeralgebrasystem Mathematica Grundlage für Mathematikaufgaben in allen Jahrgangsstufen sein können.

OStR i. R. Dieter Schöttler, Dieter.Schoettler1@web.de, Erlenweg 9, 36251 Bad Hersfeld

Exponentielles Wachstum aus zwei Perspektiven

Die Wachstumskonstante *k* und das prozentuale Wachstum *p*

Renate Motzer

Exponentielles Wachstum wird meist mit der Gleichung $f(x) = Ae^{kx}$ beschrieben. Die Wachstumskonstante k ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der Wachstumsgeschwindigkeit $f'(x)$ und dem Bestand $f(x)$. Im Alltag ist eher die Angabe von proportionalem Wachstum mit einem Prozentsatz p geläufig. Beide Wachstumskonstanten hängen eng zusammen und können leicht auseinander abgeleitet werden. Sind die Werte relativ klein, unterscheiden sie sich zudem kaum. Es lohnt sich, dies im Unterricht zu thematisieren.

In der Oberstufe werden exponentielle Wachstumsvorgänge gewöhnlich durch die Gleichung

$$f(x) = Ae^{kx}$$

beschrieben, wobei A die Anfangsmenge (bei $x = 0$) angibt. Die Wachstumskonstante k gibt die relative Steigung

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

an. Sie ist zu jedem Zeitpunkt gleich. Aus dieser Tatsache lässt sich umgekehrt auch die Gleichung für $f(x)$ ermitteln.

Doch nicht nur die relative Tangentensteigung ist konstant. Auch die relative Sekantensteigung im Intervall $[x; x+1]$ ist konstant:

$$p = \frac{Ae^{k(x+1)} - Ae^{kx}}{Ae^{kx}} = e^k - 1.$$

Diesen Wert kann man als Prozentwert verstehen, denn die Menge steigt in jedem Einheitsintervall genau um $p \cdot 100\,\%$. Damit kann man f auch so beschreiben:

$$f(x) = A(1+p)^x.$$

MNU 63/7 (15.10.2010) Seiten 396–397, ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Mit einem Prozentwert zu argumentieren, entspricht mehr der Alltagserfahrung. Es macht biologische Wachstumsvorgänge, die kontinuierlich verlaufen, vergleichbar mit wirtschaftlichen Wachstumsvorgängen (z. B. Zinseszinsrechnung), bei denen das Wachstum nur zu bestimmten Zeitpunkten geschieht. Manchmal handelt sich auch um Daten, die eine Summe über einen gewissen Zeitraum angeben (Produktionszahlen, Besucherzahl, Fluggäste im Jahr u. ä.).
Bei diesen Vorgängen, die manchmal durch ähnliche Gleichungen beschrieben werden können, aber nur eine diskrete Definitionsmenge haben, ist die Berechnung einer Ableitung eigentlich nicht möglich, auch wenn man den Funktionsterm ableiten könnte. Ehrlicherweise kann man auch bei biologischen Wachstumsvorgängen keine Ableitungen bilden. Auch wenn die Zeit ziemlich kontinuierlich verlaufen mag, gibt es eigentlich nur ganzzahlige y-Werte, keine halben Lebewesen oder halbe nichtzerfallene Atome, wenn wir negatives Wachstum dazunehmen wollen. Von daher ist nicht unbedingt zu rechtfertigen, warum üblicherweise nur der Wachstumskonstanten k und nicht dem Prozentwert p die ganze Aufmerksamkeit gilt.
Schauen wir uns den Zusammenhang zwischen den beiden Werten

$$p = e^k - 1, \quad k = \ln(1 + p)$$

genauer an, so fällt auf, dass sich beide Werte gar nicht allzu sehr unterscheiden, wenn k und p relativ klein sind. Anschaulich ist dies auch verständlich, denn die Tangentensteigung unterscheidet sich kaum von der Sekantensteigung innerhalb einer Einheit.
Auch rechnerisch lässt sich leicht nachweisen, dass

$$p \approx \ln(1 + p).$$

Berechnen wir dazu für

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

die Tangente im Punkt (0/0), so ergibt sich die einfache Gleichung

$$t(x) = x.$$

Für kleine x-Werte ist die Tangente bekanntlich eine gute Näherung für die Funktion. Da die Tangente an

$$f(x) = \ln(1 + x) \quad \text{bei} \quad x = 0$$

oberhalb des Funktionsgraphen verläuft (der Graph ist rechtsgekrümmt), sieht man außerdem, dass

$$x > \ln(1 + x) \quad \text{für alle} \quad x > 0.$$

Also ist der Prozentsatz p immer etwas größer als die Wachstumskonstante k.
Wird k (und damit auch p) größer, so ist auch ein deutlicher Unterschied zu bemerken. Der Mittelwert p über einem Einheitsintervall ist größer als der Anfangswert k, da der Funktionsgraph im Lauf des Intervalls immer steiler wird.

Dr. Renate Motzer, Universität Augsburg, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de, ist Akademische Oberrätin am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik. Sie unterrichtet außerdem im Rahmen eines Lehrauftrags eine Klasse an der Staatlichen FOS/BOS Augsburg.

Lehren und lernen anders – mit CAS Maple

Erich Sirrenberg

»Mit diesem Teufelszeug betreten Sie diese Schule nicht« – die Antwort des Fachleiters Mathematik eines Gymnasiums. Was war damit gemeint? Ich hatte ein Kolloquium zum Thema CAS mit dem Ziel angeboten, Schüler und Lehrer zu neuem Lernen und Lehren zu begeistern. Der Kollege liegt bezüglich der Bezeichnung nicht unbedingt falsch, sind wir damit doch in der Lage, uns mühevoller, fehlerträchtiger, sinnloser, zeitaufwendiger Handarbeiten (Umformungen, Routinen, Zeichnungen usw.) zu entledigen. Wir können uns konzentrieren auf das Wesentliche: Naturwissenschaft und Mathematik tief zu durchdringen, zu erleben, anzuwenden auf mannigfaltige praktische Probleme.

1 Gründe für den Einsatz von CAS

»Geister« dieser Art gab es immer, erinnern wir uns an Tabellen der trigonometrischen Funktionen und Logarithmen, Integraltafeln, Rechenschieber, Taschenrechner. Diese »Geister« haben sich stets durchgesetzt, zur kritischen Auseinandersetzung geführt, wurden allerdings auch von der Zeit und den Anforderungen überholt. Gleiches gilt auch für CAS. Seit 1980 hat uns dieses überrollt, ist in vielen Ländern längst Standard, auch in Schulen.
Schule muss dazu führen, dass Schüler selbständig denken und arbeiten lernen und das im Team. Nicht Frontalunterricht, Lernen als Einzelkämpfer, sondern Projekte erarbeiten in Gruppen muss das Ziel sein. Dieses führt auch zu einem anderen Verständnis der Beziehung Schüler – Schüler und Lehrer – Schüler. Der Lehrer ist gleichberechtigter Partner der Schüler, lernt und lehrt mit diesen, führt pädagogisch diese im Hintergrund. Als didaktische Hilfe sollte der Lehrende –auch Schüler – das Modell von Konfuzius bemühen:

1. Zeige es uns, so werden wir es vergessen – Frontalunterricht,
2. Mache es mit uns, so werden wir es verstehen,
3. Lass es uns machen, so werden wir es können,