Berichte und Beiträge des Arbeitskreises Frauen und Mathematik

Laura Martignon (Hrsg.)

Mathematik und Gender

Herausgebergremium: Andrea Blunck, Helga Jungwirth, Gabriele Kaiser, Laura Martignon, Irene Pieper-Seier, Renate Tobies, Rose Vogel

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

In der Schriftenreihe TRANSFER der Pädagogische Hoschschule Ludwigsburg

Band 1

franzbecker
hildesheim, berlin

„Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erzwingen.“ - Was denken Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse über dieses Zitat von Fermat?

Renate Motzer, Augsburg

Anhand des im Titel genannten Zitates beschreiben Schülerinnen und Schüler, was sie mit Beweisen innerhalb und außerhalb der Mathematik verbinden. Dabei können geschlechtsspezifische Tendenzen beobachtet werden, z.B. dass vielen Mädchen das soziale Miteinander beim Finden und Vermitteln von Beweisen wichtig ist und ihnen die Vorstellung von Zwang missfällt. Manchen Jungen dagegen geht es eher um den Wahrheitsaspekt. Anschließend werden mögliche Konsequenzen aus den Ergebnissen der Befragung für den Unterricht diskutiert.

“The essence of the proving is to force conviction."- What do female and male students of the 8th class think about Fermat’s quotation?

Based on the quotation given in the title, female and male students describe what they associate about proofs within and outside of mathematics. Gender specific tendencies can be observed, e.g. that for girls it is important to find solutions together and to communicate seem to others and many girls dislike the compulsion involved. Some boys only look whether a proof is true or not.

Afterwards possible consequences resulting from the questioning of the students are discussed.

Mathematik ist eine exakte Wissenschaft. Ihre Aussagen basieren auf Beweisen, aus Definitionen und Axiomen werden weitere Eigenschaften hergeleitet und logisch erschlossen. Beweisen ist also eine fundamentale Tätigkeit von Mathematikern. Im Mathematikunterricht allerdings steht gewöhnlich die Anwendung bestimmter (bewiesener) Regeln im Mittelpunkt. Es fragt sich, wie viel Bewusstsein Schülerinnen und Schüler von der Bedeutung des Beweisens besitzen und was sie darüber über das Beweisen denken.

Der Ausgangspunkt zu der im Folgenden geschilderten Befragung von Schülerinnen und Schülern der 8. Klasse über ihre Einstellung zum Beweisen war eine Untersuchung von Schüleraufsätzen mit ähnlicher Fragestellung. Im Jahr 2003 hatten Schüler und Schülerinnen anhand mehrerer Materialien, in denen es um das Beweisen in der Mathematik, vor Gericht und im Alltag ging, einen längeren Aufsatz (eine sog. Themenstudie) erstellt, in denen sie das Wesentliche vom (mathematischen) Beweisen zusammenstellen sollten (vgl. Kuntze 2004, 2005).

Dabei konnte beobachtet werden, dass viele der Schülerinnen und Schüler die Zitate, die sich mit dem Überzeugen durch Beweisen beschäftigten, in ihre Arbeiten aufnahmen und einige diese auch kommentierten. Hierbei konnte ein kleiner geschlechtsspezifischer Unterschied beobachtet werden: Mädchen interpretierten das Überzeugen häufiger so, dass der Sachverhalt anderen verständlich gemacht werden soll. Jungen war es eher wichtig, dass am Ende feststand, sie haben Recht. Für die Interpretation der Jungen sprach ein Zitat der Vorlage („Überzeuge dich selbst, überzeuge deinen Freund, überzeuge deinen Feind - das letztere ist das, was man beim Beweisen machen muss"), das gerne in diesem Zusammenhang zitiert wurde. Über das Verständlich-Machen stand nichts derartig Augenfälliges im Material (vgl. Motzer 2006).

In einer neuen, kurz angelegten Befragung sollten nun im Schuljahr 2005/06 weitere Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse ihre Sicht zum Beweisen schildern. Dabei sollte überprüft werden, ob der zuvor entdeckte Unterschied zwischen Jungen und Mädchen bzgl. des Überzeugens auch in den diesmal befragten Klassen zu finden wäre und welche sonstigen Aspekte des Beweisens Achtklässler nennen würden, wenn ihnen nur wenig Material vorgegeben würde. Genauer gesagt, sollten sie anhand des Zitates „Das Wesen des Beweisen ist es, Überzeugung zu erzwingen" von Fermat ein paar Fragen dazu beantworten:

„Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erzwingen."

Schreibe einen kurzen Aufsatz, in dem du zu dieser Aussage des Mathematikers Fermat Stellung nimmst.

Beziehe dich dabei vor allem auf das Beweisen in der Mathematik. Du kannst aber auch Vergleiche zu Beweisen in anderen Bereichen (z.B. im Alltag oder vor Gericht) anstellen.

Folgende Fragestellungen können Anhaltspunkte für dich sein:

Was heißt für dich „Überzeugen"?

Meinst du, dass es stimmt, was Fermat sagt? Warum könnte es stimmen? Warum nicht?

Was könnte beim Beweisen sonst noch wichtig sein?

Die Fragen waren so formuliert, dass sie nicht unbedingt beantwortet werden mussten, sondern nur als Anhaltspunkt dienten. Viele Schülerinnen und Schüler arbeiteten direkt die Fragen nacheinander ab, viele behandelten aber auch nur einen Aspekt des Beweisens oder nahmen zu anderen Gesichtspunkten des Beweisens oder des Mathematikunterrichts Stellung.

Insgesamt nahmen 155 Jungendliche aus 6 Klassen teil, 36 Jungen und 26 Mädchen aus 2 gemischten Klassen und 93 Mädchen aus 4 reinen Mädchenklassen. Alle Schülerinnen und Schüler hatten sich in diesem Schuljahr schon mit geometrischen Beweisen beschäftigt, bei den meisten lag diese Beschäftigung aber schon ein paar Monate zurück.

Der Schwerpunkt der Befragung galt diesmal dem Zusammenhang von Beweisen und Überzeugen. Dieser Zusammenhang war vermutlich im Unterricht noch nicht thematisiert worden (die meisten Schulbücher tun dies zumindest nicht).

Beim Schreiben der Themenstudien im Jahr 2003 war er zwar durch die Zitate angeregt worden, war aber damals nicht verpflichtend zu behandeln. Diesmal sollten sich alle Schülerinnen und Schüler dazu äußern.

Überzeugung erzwingen

Der auffallendste Unterschied zwischen den Arbeiten der Jungen und Mädchen ist, dass sich nur zwei Jungen an dem Wort „erzwingen" stören, aber viele Mädchen (34). Etwas zu erzwingen, scheint ihnen nicht richtig. Zwar sehen auch einige (7 andere Mädchen und 4 Jungen), dass es beim Beweisen so sein soll, dass dem anderen gar keine andere Möglichkeit bleibt, als das Bewiesene zu akzeptieren. In diesem Sinne ist für sie das „erzwingen" nichts Negatives, sondern eine „logische" Folge. Eine Schülerin, die diesen Zusammenhang durchdenkt, meint hierzu abschließend: „Aber eigentlich, wenn man etwas beweist, erzwingt man schon Überzeugung, aber ich würde es anders ausdrücken."

Etliche Schülerinnen bringen Vorschläge zum Umformulieren von Fermats Zitat:

„Das Wesen des Beweisens ist es Überzeugung zu gewinnen", wird von mehreren Mädchen vorgeschlagen (wobei etliche vielleicht Nachbarinnen sind und sich gegenseitig inspiriert haben). Eine andere Schülerin schlägt vor: „Das Wesen des Beweisens ist es, Überzeugung zu erlangen." Sie denkt dabei an den Beweisenden wie an diejenigen, denen der Beweis vorgeführt wird.

In eine andere Richtung (siehe unten) passt der Vorschlag: „Das Wesen des Beweisens ist es, auf Tatsachen aufzubauen."

Von den 36 Jugendlichen, die sich am Wort „erzwingen" stören, denken einige jedoch, dass es immer noch sein kann, dass jemand eine beweisende Argumentation nicht anerkennen kann oder will, vielleicht weil er sie nicht wirklich versteht. Solch ein Mensch sollte nicht gezwungen werden. Dass in solch einem Fall die Aussage Fermats nicht zutrifft, beschreibt eine andere Schülerin: „Die Aussage von Fermat könnte auch nicht stimmen, wenn man trotz eines Beweises persönlich nicht überzeugt ist."

Weiterhin könnte es sein, dass man von etwas Falschem überzeugt werden soll. Die Gefahr, von etwas Falschem überzeugt zu werden, sehen 6 Jungen und 10 Mädchen. Dass einen jemand im Alltag und manchmal auch in der Mathematik von etwas Falschem überzeugen kann, was einem nur bewiesen erscheint ohne es wirklich zu sein, ist für sie immer mitzubedenken. Als Beispiele werden hier vor allem falsche Gerichtsurteile angeführt, z.B. aufgrund sogenannter Indizienbeweise. Ein konkretes Beispiel aus der Mathematik wird nicht gegeben. Vermutlich ist den Jungendlichen keines bekannt. Dass es so etwas aber auch in der Mathematik geben kann, formuliert eine Schülerin explizit.

Für 2 Schüler und 3 Schülerinnen ist Überzeugen näher am Überreden als am Beweisen.

Eine Schülerin beschreibt ihre Kritik an mathematischen Beweisen (deren Richtigkeit sie nicht in Frage stellt) so: „Beweise lassen dem menschlichen Geist keine Freiheit mehr. Und das ist doch schlecht, oder?“ Ihre Nachbarin ergänzt: „Sie beschränken einen darauf etwas glauben zu müssen.“ Diese Schülerinnen sehen also nicht den Vorteil von sicherem Wissen, auf dem man aufbauen kann, den 2 Jungen und ein anderes Mädchen betonen.

Eine andere Schülerin führt aus: „Meiner Meinung nach ist die ganze Mathematik auf Beweisen aufgebaut und allein dies beweist, dass die meisten Mathematiker vielleicht kluge Köpfe, ja, aber sture und ‚erzwingende‘ Köpfe sind.“ Freilich fügt sie beschwichtigend dazu: „Aber wie auch immer, zumindest in dieser Welt sind Beweise mehr als nur wichtig.“

Im Sicherheitsaspekt sieht ein Junge das eigentliche Wesen des Beweisens: „Es ist das Ziel des Beweisens jemanden zu überzeugen, aber ich glaube nicht, dass es ebenso das Wesen des Beweisens ist. Ich finde, das Wesen des Beweisens ist eine Behauptung 100% richtig und vor allem nachvollziehbar zu begründen. Man beweist ja um etwas sicher zu wissen, warum es so ist und nicht hauptsächlich um eine andere Person davon zu überzeugen.“

Dass es auch für einen selbst gut sein kann zu wissen, dass etwas stimmt, wozu man den anderen überreden will, bemerkt eine Schülerin: „ ‚Überzeugen‘ heißt für mich, einem Menschen klar machen, dass es wirklich stimmt, so dass ich auch kein schlechtes Gewissen dabei haben muss.“

Beweise müssen nachvollziehbar sein

Nachvollziehbar soll ein Beweis zum einen für einen selbst sein, aber auch für andere. Beide Aspekte werden von mehreren Jungen und Mädchen genannt. 7 Jungen und 19 Mädchen erwähnen, dass andere Beweise nachvollziehen können sollten. Dieser Aspekt wird also bei beiden Geschlechtern anteilsmäßig gleich oft genannt. Dass dabei alle Schritte stimmen müssen, betonen 2 Jungen, dass es Schritt für Schritt verständlich sein muss, ist bei 5 Mädchen zu finden. Man sieht bei den Mädchen hier also eine kleine Akzentverschiebung vom Inhalt auf die Personen hin, denen etwas bewiesen werden soll. Dass ein Beweis verständlich dargestellt werden muss und dass Überzeugen Erklären und Deutlich-Machen heißt, erwähnen 4 Jungen und 29 Mädchen. Hier ist also wieder eine etwas stärkere Tendenz zum sozialen Miteinander bei den Mädchen erkennbar.

Beweise dienen dem Rechthaben

Dass Beweisen dazu dient, klar zu machen, dass man Recht hat, erwähnen so wörtlich nur zwei Jungen und ein Mädchen. Dass das Überzeugen dazu da ist, dass der andere seine Meinung (oder sein Verhalten) ändert und sie der eigenen anpasst, wird dagegen sehr häufig genannt, 11-mal von Jungen und 21-mal von Mädchen. Damit wird dies zwar etwas überproportional von Jungen genannt, ist aber auch bei Mädchen ein recht präsenter Aspekt des Überzeugens.

Dass die Argumente „stichhaltig“, „standfest“ und „schlagkräftig“ sein müssen, so dass niemand mehr etwas dagegen sagen kann, kommt (nur) bei 6 Jungen zur Sprache, nicht bei Mädchen. „Beim Beweisen ist auch wichtig, keine Zweifel zuzulassen“, schreibt ein weiterer Junge.

2 Mädchen verwenden das Wort „handfest“. Eine meinte, man müsse „felsenfest“ überzeugt sein, um anderen etwas zu beweisen.

Beweisen mit anderen und für andere

Dass das Bemühen, andere zu überzeugen, auch dazu beiträgt, dass ein Beweis keinen Fehler enthält, denn diesen würde sonst jemand finden, beschreibt eine Schülerin. Eine andere stellt fest, dass es besser sei, mehrere arbeiten zusammen: „Deshalb sind Beweise, die man in einer Gruppe findet, erstens einfacher zu finden, da jeder in eine andere Richtung denkt, und zweitens weil dann kleinste Fehler schneller erkannt werden. Der Beweis ist dann stichhaltiger, da ihn schon die ganze Gruppe überarbeitet hat.“

Sowohl Schülerinnen also auch Schülern ist es wichtig, dass Beweise „gut und ausführlich“ sind und „viele gute Beispiele“ enthalten, damit sie wirklich überzeugen können. Solches betonen 6 Jungen und 12 Mädchen. Wenn Beweise überzeugen sollen, geht es also nicht nur darum, dass sie (mathematisch) korrekt sind; man sollte sich nicht nur auf die in der Mathematik häufig übliche Knappheit beschränken. Auch wenn Skizzen und Beispiele noch keinen Beweis darstellen (was von diesen Schülerinnen und Schülern auch so gesehen wird), sind sie fürs Verständnis sehr wichtig.

Ein Schüler schreibt: „Wenn man jemanden ‚überzeugt‘ hat, reicht das um damit den Beweis zu führen.“ Freilich ergänzt er sodann: „Beim Beweisen geht es aber auch darum, alles Schritt für Schritt zu begründen und logisch (und <u>übersichtlich</u>!) aufzubauen, damit man alles nachvollziehen kann.“ Der Schwerpunkt liegt bei ihm auch in diesem Satz wohl darin, dass ein anderer den Beweis als solchen akzeptieren kann.

Neben diesem Schüler sind es vor allem Mädchen, die dem Zitat Fermats derart zustimmen können, dass sie das Überzeugen für das Wesentliche des Beweisens halten. Hier zwei Beispiele: „Und deshalb beweist man ja auch überhaupt etwas um jemanden zu überzeugen, dass das, was man behauptet, richtig ist.“ und „Fermat wollte wahrscheinlich die Wichtigkeit des Beweisens rüberbringen, und ich finde, dass er genau DAS gesagt hat, was am allerwichtigsten ist. ... Damit man etwas beweisen kann, muss man überzeugen.“

Andere Funktionen des Beweisens: Richtigkeit und Unveränderlichkeit

Manche Jungen halten andere Funktionen des Beweisens für noch wichtiger.

Deutlich schreibt dies einer: „Ich denke, dass man beim Beweisen niemanden überzeugen muss, sondern man sollte zeigen, dass etwas richtig ist.“ Ähnlich sieht es ein anderer Junge, der deswegen auch das Wort Zwingen ablehnt (vgl. oben):

„Man muss für das Beweisen Regeln finden, die für alle Fälle gelten und nicht verändert werden können."

Im Gegensatz zu den unveränderlichen Wahrheiten, die hinter Beweisen stecken, könnten sich Überzeugungen ändern. Daher haben beide für diesen Jungen nichts miteinander zu tun.

Dass es beim Beweisen nicht ums Überzeugen gehe, beschreibt ein weiterer Junge so: „Meiner Meinung nach geht es beim Beweisen darum, einfach einen standfesten Beweis aufzustellen. ... Denn ein guter, richtiger Beweis kann nicht einfach für falsch erklärt werden, ob er nun überzeugt oder nicht." Daher „muss ein Beweis auch nicht einer sein, wenn er überzeugend klingt."

Die beiden zuletzt genannten Jungen sowie einige ihrer männlichen Mitschüler schreiben nur über mathematisches Beweisen. Mädchen bringen immer Beispiele aus dem Alltag oder bei Gericht, um zu erläutern, was sie unter Überzeugen verstehen. In den reinen Mädchenklassen (bei denen der Mathematiklehrer während der Befragung nicht anwesend ist) ist zu beobachten, dass sich einige Mädchen fast gar nicht auf die Mathematik beziehen. Andere Mädchen dieser Klassen hingegen nutzen die Gelegenheit, um ihre Abneigung gegen die Mathematik im Allgemeinen und das mathematische Beweisen im Besonderen zum Ausdruck zu bringen (siehe unten).

In den gemischten Klassen, bei denen die Mathematiklehrerin jeweils im Raum ist und großes Interesse an den Schülerarbeiten bekundet, werden solche negativen Äußerungen nicht getätigt. Nur ein Schüler schreibt, dass er zwar die Bedeutung von Beweisen anerkenne, aber mathematische Beweise trotzdem nicht möge.

Dass es beim Beweisen auch um das Warum gehen kann, wurde schon erwähnt.

Bedeutung von Beweisen für die Zukunft

Auch der Blick in die Zukunft ist bei einem Jungen vorhanden: „Ich finde Beweisen sehr wichtig, weil man im späteren Leben solche Grundlagen benötigt. ... Beweisen ist ebenfalls wichtig, weil man Aufgaben oder Theorien begründen oder widerlegen muss." Dieser Junge gibt auch Fermat mit seinem Zitat recht, freilich mit einem vielleicht zweifelhaften Argument: „Ich denke, er hat recht, weil ich an Mathematikern ihrer Worte nicht zweifle." Dieses Autoritätsargument ist auch bei 4 Mädchen zu finden (wobei nicht ganz ausgeschlossen ist, dass sie es ironisch meinen). Zwei Bsp.: „Aber ich denke, dass es stimmt, denn wenn es falsch wäre, hätte man uns das gesagt." und „Fermat hat recht, weil alle Mathematiker recht ham."

Ein Junge und zwei Mädchen bemängeln allerdings, dass Fermat selbst seine Aussagen nicht immer bewiesen hat. (Dazu sei angemerkt, dass den Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Unterrichtsstunde kurz ein paar Details aus dem Leben Fermats erzählt wurden. Unter anderem wurde die Geschichte um Fermats letzten Satz erwähnt.)

Eine Schülerin sieht sehr optimistisch die Bedeutung eines Beweises für die Zukunft: „Dadurch ist es wichtig, dass man auf das Ergebnis nicht nur in einem Beispiel kommt, sondern dass es auch in anderen Aufgaben wieder nützlich ist, wenn man es anwenden kann. ... Es kann ja auch sein, dass man auf etwas Neues gekommen ist, dass dies vielleicht auch die Lösung sein kann für ganz neue Sachen, die noch nicht gelöst wurden. ... Bei Beweisen sollte man von so vielen Leuten wie möglich Überzeugung bekommen, wie es nur geht. Es wird dann die ganze Welt davon erfahren und andere Mathematiker oder Physiker denken ganz anders und kommen dadurch auch auf Ergebnisse, die wiederum weiter erklärt werden. Somit könnten Dinge erklärt werden, die so nützlich sind. Vielleicht helfen sie auch anderen in der Dritten Welt, wofür ich mich später einsetzen werde."

Jedenfalls geht es beim Beweisen darum „Wissen mit anderen zu teilen", das meint auch eine andere Schülerin.

Weitere Aspekte

Eine Schülerin sieht den Zusammenhang zwischen Überzeugen und Beweisen andersrum: „Um zu beweisen, muss man nicht überzeugen, aber um zu überzeugen, muss man beweisen."

Für einen Schüler hat Beweisen auch etwas mit Schönheit zu tun: „Für mich ist Beweisen nicht nur zum Überzeugen da. Es ist einfach schöner, wenn man etwas nicht einfach nur behauptet, sondern auch beweisen kann. ... Es macht Spaß andere Lösungswege zu finden."

Ähnliche Aspekte, die zunächst nur den Beweisenden selbst betreffen, werden auch von anderen genannt. Zwei Jungen und einige Mädchen betonen, dass man erst einmal selbst von einem Beweis überzeugt sein muss. Ein Junge beschreibt den Prozess von der eigenen Vermutung zum Beweis, der ihm die Sicherheit bringt, dass seine Vermutung stimmt.

Einige Mädchen beschreiben, dann man erst selbst überzeugt sein muss, vor man sich daran machen kann, andere zu überzeugen. Beim Überzeugen von anderen kommt es auch auf die Art und Weise an, wie man seine Argumente vorbringt. Das betonen neben etlichen Mädchen auch ein paar Jungen. Ein Junge beschreibt dies sehr ausführlich. Er führt u.a. aus: „Ein wichtiger Aspekt wäre auch die äußerliche Darbietung und der ganz spezielle ‚Draht' zu der Person, die man überzeugen will." Ein Schüler und eine Schülerin stellen fest, dass Leute, die gut überzeugen können, es im Leben wesentlich leichter haben. Die Wahrheitsfrage wird in diesem Kontext freilich oft nicht mehr gestellt. Dass es „ehrlich klingen" muss, meinen einige Schülerinnen im Kontext von Alltagsbeispielen. Es spielen „nicht nur Fakten, sondern auch Hintergründe und allgemeines Wissen" eine Rolle um „jemand für eine Sache zu gewinnen." Eine Schülerin bemerkt, dass Überzeugung ein Gefühl ist und daher nicht mit Beweisen zu erzwingen ist.

Bedeutung der Logik

Wenn es aber um mathematische Beweise geht, so betonen viele Jungendliche, dass die Argumentation logisch sein muss (6 Jungen und 28 Mädchen). Weiterhin sollte man sich an korrekte Regeln halten (1 Junge und 8 Mädchen) und auch das Grundwissen und Vorwissen spielen eine wichtige Rolle (1 Junge und 6 Mädchen). Die Argumente müssen in der Mathematik wie im Alltag richtig angeordnet werden, so schreibt ein anderer Junge weiter, dem es außerdem wichtig ist „immer das Wahre zu finden".

Im Wort Überzeugen steckt auch das Wort „Zeugen" und so führen ein Junge und 2 Mädchen an, dass es sowohl beim Beweis vor Gericht als auch in der Mathematik Zeugen gibt. In der Mathematik sind dies schon bewiesene Sätze. Dass man alle Sätze, die man zum Thema schon kennt, zusammen schreiben soll, um so eine gute Ausgangsbasis für das Führen des Beweises zu haben, geben ein Schüler und 2 Schülerinnen an. Dass man einen Beweis genau überprüfen muss und dass nur das vorausgesetzt werden darf, was in der Angabe steht, wird von 3 Schülern erwähnt.

Auffallend ist, dass die meisten Schülerinnen und Schüler davon ausgehen, dass sie selbst jemandem etwas beweisen wollen. Etliche Mädchen zweier Mädchenklassen aber schreiben ihre Überlegungen aus der Perspektive derer, denen etwas bewiesen wird.

Beweisen im Unterricht: vom Sinn und Unsinn mathematischer Beweise

Nur wenige Schülerinnen und Schüler nehmen Stellung zum Beweisen im Unterricht.

Eine Schülerin nennt Schulaufgaben als Beweise (für das Können der Schülerinnen und Schüler). Ein Schüler sieht die Rolle des Lehrers darin, dass er der Klasse beweisen muss, was er lehrt. Ein anderer denkt daran, dass er dem Lehrer als „Korrigierer" etwas beweisen muss. Manchmal werden auch außermathematische Beispiele genannt, z.B. dass man dem Lehrer beweisen muss, dass man die Hausaufgabe aus einem berechtigten Grund nicht machen konnte. Eine Schülerin bedauert, dass ihre „Lehrerin nicht gut überzeugen bzw. erklären" könne. Sie nimmt deshalb Nachhilfe bei einer älteren Schülerin, die den Unterrichtsstoff „mit ihren eigenen Worten erklären (mich überzeugen)" könne.

Wie schon erwähnt, nehmen einige der Schülerinnen aus den Mädchenklassen Bezug zum Beweisen im Mathematikunterricht. 8 Mädchen führen aus, dass ihnen mathematische Beweise keinen Spaß machen würden. Eine begründete es damit, dass sie mathematische Beweise kaum verstehe. Auch eine andere Schülerin merkt an, dass Sie mathematische Beweise nicht kapiere und sie deshalb als langweilig empfinde. Insgesamt geben 11 Schülerinnen an, dass sie mathematische Beweise als unsinnig empfinden. Einige meinen, dass Beweise vor Gericht schon wichtig seien, mathematische Beweise aber im Alltag nie gebraucht würden. Einige stören sich daran, offensichtliche Dinge beweisen zu müssen. „Beweisen ist schwer und das meiste muss man gar nicht beweisen, weil es einfach so ist!", drückt diese Haltung aus. 3 Mitschülerinnen, die diese Argumente mitbekommen haben, halten allerdings dagegen, dass es auch optische Täuschungen gäbe.

Eine Schülerin schreibt: „Das Beweisen ist für Nachdenker. Es macht wenig Sinn, etwas zu beweisen, wenn jemand gar keinen Beweis möchte/ braucht." Sich selbst zählt diese Schülerin nicht zu den Nachdenkern.

2 Schülerinnen erwähnen, dass sie zwar auch auf Beweisaufgaben gute Noten bekommen hätten, aber das Beweisen nicht mögen und zum Teil auch nicht wirklich verstehen würden.

2 Schülerinnen berichten jedoch, dass ihnen Beweisen wirklich Spaß macht: „Beweisen in Mathe macht schon Spaß, weil es sonst ja eh voll öde ist!" und „In Mathematik finde ich Beweisen gut, und es macht mir sogar Spaß!" Letztere ist diejenige Schülerin, die dank entsprechender Beweise kein schlechtes Gewissen beim Überzeugen hat.

Eine andere Schülerin merkt an, dass Fermats Aussage vom Überzeugen im Unterricht vielleicht nicht stimmt, „da ja nicht alle Schüler/innen immer verstehen, was sie beweisen und einfach das Schema lernen. (Natürlich geht es nicht ganz ohne Überzeugung)"

Begeisterung weitergeben

Beweise sollen dazu helfen, die eigene Freude und Lust zu übertragen. Jedenfalls liest sich Fermats Zitat für eine Schülerin so: „Es kommt so rüber, als ob Fermat versucht die Freude und Lust an Mathe zu übertragen." Auch 7 Schülerinnen anderer Klassen führen aus, dass Beweisen Spaß machen soll, vor allem dass das Überzeugen der anderen helfen soll, die eigene Begeisterung und den Spaß am Finden der Aussage weiterzugeben.

Zusammenfassung

Die Ausgangsfrage, ob es bei den hier untersuchten Aussagen von 8. Klässlern Unterschiede zwischen den Geschlechtern gibt, könnte folgendermaßen beantwortet werden:

Fast alle Argumente, die sich bei Mädchen finden lassen, werden auch von Jungen vertreten und umgekehrt. Die Ausgangsthese, Mädchen gehe es darum, sich die Aussagen gegenseitig verständlich zu machen, und Jungen gehe es darum, Recht zu haben, lässt sich, wie wohl nicht wirklich anders zu erwarten war, in Reinform so nicht belegen. Ein paar Jungen (4) sprechen sich deutlich fürs Verständlich-Machen aus, ein Mädchen betont das Recht-Haben. Trotzdem gibt es geschlechtsspezifische Tendenzen. Mädchen ist das soziale Miteinander deutlich wichtiger als Jungen. Bei den Jungen gibt es einige, die keinen rechten Zusammenhang zwischen Beweisen und Überzeugen erkennen können und mehr für den Wahrheitsaspekt eines Beweises plädieren. Andere Jungen sehen das Überzeugen darin, dass das Gegenüber nichts mehr dagegen sagen kann. Gerade dieses empfinden einige Mädchen als einschränkend. Sie wünschen sich, dass auch Mathematik lebendiger ist. Dies kann man auch daraus schließen, dass einige Mädchen über eine mögliche Begeisterung beim Beweisen nachdenken.

Ob man mathematische Beweise mag oder nicht, scheint keine geschlechtsspezifische Frage zu sein. Vielleicht könnte ein genaueres Nachfragen, warum jemand sie mag oder nicht, geschlechtsspezifische Unterschiede aufzeigen. In diesen Aufsätzen wurden sie zumindest teilweise angedeutet.

Einig sind sich Jungen und Mädchen, dass mathematische Beweise logisch sein müssen.

Mögliche Folgerungen für den Mathematikunterricht

Aus den Aufsätzen der Jungendlichen wird klar, dass sie zum Teil unterschiedliche Bedürfnisse beim Umgang mit mathematischen Beweisen haben. Denjenigen, die mathematische Beweise prinzipiell ablehnen und die Notwendigkeit nicht einsehen, wird man sie vermutlich nie völlig schmackhaft machen können.

Dennoch scheint mir, dass die hier untersuchten Aufsätze ein paar Anregungen geben können.

So sollten meines Erachtens nicht nur statische Aspekte des Beweisens (der Wahrheitsgehalt des Satzes ist belegt, niemand kann mehr widersprechen) betont werden. Für diese Aspekte würde es wohl auch ausreichen, dass einige namhafte Mathematiker die schon existierenden Beweise verifiziert haben. Der Rest der Welt kann sie dann als Tatsachen übernehmen.

Dieser Aspekt kann in der Schule nur dann wichtig sein, wenn Schülerinnen oder Schüler eigenständig Zusammenhänge entdecken, von denen noch niemand nachgewiesen hat, dass sie wirklich zutreffen. Solche Situationen sind in der Schule freilich selten. Aufgaben, bei denen Jugendliche selbst Verknüpfungen definieren und auf ihre Eigenschaften hin untersuchen sollen, könnten Anlässe dafür sein (Bsp. siehe Anhang I).

Ein weiterer statischer Aspekt des Beweisens könnte sein, Einsicht in das Warum einer Aussage zu gewinnen. Dieser Aspekt wurde nur von einem Schüler angesprochen. Er ist vermutlich diesen Jugendlichen noch nicht deutlich genug gemacht worden. Dass diejenigen, die den Beweis nicht selbst ausführen, sondern ihn gezeigt bekommen, ihn nachvollziehen können sollen, erwähnen viele Jungen und Mädchen. Das Nachvollziehen könnte mit der Warum-Frage in Verbindung gebracht werden.

Es könnte auch ein Aspekt der Selbstständigkeit sein. Eigentlich sollte es ein Vorzug des Mathematikunterrichts sein, dass ein Schüler (eine Schülerin) der Lehrkraft nicht nur glauben muss, was sie sagt, sondern die Ergebnisse eigenständig verifizieren kann. Mathematikunterricht sollte also Selbstständigkeit und Mündigkeit ermöglichen. Wie oft Schülerinnen und Schüler unsicher sind, ob sie eine Aufgabe richtig gelöst haben, und wie sehr sie dabei vom Urteil der Lehrkraft abhängig sind, zeigt, dass die Wirklichkeit dem Ideal nicht unbedingt entspricht.

Die Selbstständigkeit spräche dafür, dass man Beweise selbst führen oder zumindest nachvollziehen können sollte, um nicht nur vom Urteil großer Mathematiker (oder der Lehrkraft) abhängig zu sein.

Zu den dynamischen Aspekten des Beweisens kann die Konsensbildung zählen, die als Grund für das Überzeugen auch vielfach genannt wird. Nun liegt im Mathematikunterricht selten Dissens vor. Vielleicht könnte man Situationen, in den Schüler und Schülerinnen verschiedene (Rechen-)Verfahren zur Lösung einer Aufgabe vorschlagen, als Aufforderung nutzen, man solle seine Strategie beweisen. Freilich sollte solch ein Vorgehen im Unterricht nicht dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler sich nicht mehr trauen, Vorschläge zu machen, weil sie diese sogleich beweisen müssen. Meist können sie die Tragweite ihrer Vorschläge nicht abschätzen und warten daher eher die Einschätzung der Lehrkraft ab, ob ihre Vorschläge tauglich sind. Vermutlich geben viele Lehrende in fragendentwickelnden Unterricht viel zu schnell ihre Prognose bezüglich der Tauglichkeit ab, so dass ein Schüler (eine Schülerin) nur selten gefordert ist, seinen (ihren) Vorschlag zu beweisen. Nur wenn ein Schüler (eine Schülerin) trotz negativer Rückmeldung des Lehrers von seinem (ihrem) Vorschlag nicht einfach ablassen will und für sich durchrechnet, dass auch das gleiche Ergebnis „rauskommt“ wie bei dem Vorgehen, das schließlich an der Tafel ausgeführt wird, erbringt er (sie) vielleicht einen Beweis, mit dem er (sie) die Lehrkraft und seine Mitschüler überzeugen kann, dass auch sein (ihr) Weg richtig ist.

Meine eigenen Unterrichtsbeobachtungen sprechen dafür, dass solche Situationen, selten genug wie sie leider sind, eher mit Schülern, denn mit Schülerinnen eintreten. Andererseits sind auch Schüler eher diejenigen, die nichtdurchdachte Vorschläge bringen, während viele Mädchen sich lieber erst melden, wenn sie sich ihrer Sache schon sicher sind. Sich seiner Überlegung sicher zu werden (sich selbst zu überzeugen), dazu bleibt aber im Unterrichtsgespräch häufig nicht die Zeit (vgl. dazu auch Jungwirth, 1991).

Nur ein Schüler erwähnt in seinem Kurzaufsatz, dass er es spannend findet, wenn es mehrere Lösungswege gibt. Die Gleichwertigkeit der Lösungswege kann häufig dadurch gezeigt werden, dass sie zum gleichen Ergebnis führen. Manchmal könnte man sogar einzelne Schritte vergleichen.

Beweisen als etwas Dynamisches zu sehen, kann auch heißen, nicht nur bei den Aussagen stehen zu bleiben, wie sie sind, sondern mit den gewonnenen Ergebnissen weiterzuarbeiten.

Ein Schüler und eine Schülerin deuten dies an. Andere führen zu dem, was beim Beweisen sonst noch wichtig ist, an, dass man aus den Vorgehensweisen bei früheren Beweisen etwas für das Führen neuer Beweise lernen kann.

Konkret könnte dies durch Variation der Aufgabe geschehen. Wie sieht die Situation aus, wenn eine Voraussetzung sich ändert? Was lässt sich dann noch sagen? Welche neuen Zusammenhänge werden in Spezialfällen erkennbar? (Bsp. siehe Anhang II)

Zur Vielfältigkeit von Beweisen kann neben den vielfältigen Anwendungen der Ergebnisse auch ein vielfältiger Zugang gehören. Viele Jungendliche betonen die Wichtigkeit von Beispielen und Skizzen. Auch wenn Beispiele und Skizzen keinen Beweis ersetzen können, können sie für das Verständnis sehr wichtig sein. Beim Suchen nach Beweisen können Beispiele manchmal zeigen, dass die Vermutung falsch ist oder modifiziert werden muss. Manchmal kann man wesentliche Zusammenhänge auch schon an Beispielen oder Skizzen sehen, die man dann freilich in ihrer Allgemeingültigkeit erst noch verifizieren muss (vgl. Anhang III).

Ein Problem von Beweisen ist, dass sie öfters nichts Neues zu bringen scheinen. Die Aussage klingt glaubhaft, kein Schüler zweifelt daran, warum sollte man sie also beweisen? Die Gefahr, einer optischen Täuschung zu unterliegen, scheint vielen auch nicht allzu groß. Und wenn es denn wirklich einmal so sein sollte, wem bringt es ernsthafte Nachteile? Eine derartige Argumentation kann man bei vielen hören, die Beweise nicht mögen.

Hier kann manchmal die Frage helfen, wie sich der Sachverhalt ändert, wenn man die Voraussetzungen ändert. Warum gilt dann das Ergebnis nicht mehr? Wie trägt also die Voraussetzung zum Ergebnis bei? Manchmal müssen die Schüler eine wichtige Voraussetzung erst noch finden (vgl. Anhang IV).

Vielleicht könnte durch eine gewisse Variation der Aussage auch der Eindruck der Sturköpfigkeit von Mathematikern gemildert werden, freilich ohne die Sicherheit einer bewiesenen Aussage aufzugeben.

Literatur:

Jahnke-Klein, Sylvia (2001). Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen, Hohengehren

Jungwirth, Helga: Die Dimension „Geschlecht“ in den Interaktionen des Mathematikunterrichts, in: Journal für Mathematik-Didaktik, 1991, H. 2/3. S. 133 - 170

Kuntze, Sebastian (2005). Schülerinnen und Schüler reflektieren, beurteilen und präsentieren mathematische Themen - Die Themenstudienmethode im gymnasialen Mathematikunterricht. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen (S. 37-54). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Kuntze, Sebastian (2004). Wissenschaftliches Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Beurteilung gegebener Beweisbeispiele aus der Geometrie - Journal für Mathematik-Didaktik, 25(3/4), 245-268.

Motzer, Renate (2006): Soziale Bezüge beim mathematischen Beweisen sehen - Verschiedene Akzente bei Mädchen und Jungen, in: Laura Martignon, Cornelia Niederdrenk-Felgner und Rose Vogel (Hrsg.), Mathematik und Gender, Hildesheim, Franzbecker Verlag.

Für den Anhang verwendete Schulbücher:

Lambacher Schweizer 5 Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Bayern , Klett Verlag 2003

Lambacher Schweizer 7 Mathematik für Gymnasien, Ausgabe Bayern, Klett Verlag 2005

Anhang I.

In der 5. Klasse werden die wichtigsten Rechengesetze (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und die Distributivgesetze) besprochen und als solche benannt.

Um den Kindern zu verdeutlich, dass solche Gesetze nicht immer gelten, werden Beispiele angegeben, bei denen sie nicht gelten ($5 - 2 \neq 2 - 5$, $(10 - 5)- 2 \neq 10 - (5-2)$, $2+ (10 - 5) \neq$

$(2+10) - (2+5)$). Kinder können das Gelten oder Nichtgelten der Gesetze an diesen Beispielen selbst nachrechnen. Sie können vielleicht auch erkennen, dass das Assoziativgesetz hier mit einer gewissen Modifikation doch gültig wäre: $(10 - 5) -2 = 10 - (5+2)$.

Schon hier lässt sich die Frage nach einer (anschaulichen) Begründung stellen.

Eine weitere Aufgabe könnte sein, dass Kinder ungewöhnlichere Verknüpfungen darauf hin untersuchen, ob sie kommutativ oder assoziativ sind. Beispiele:

a ¤ b = max(a,b),

a ¤ b = a^b,

a ¤ b = ggT(a,b),

a ¤ b = $a^2 - b^2$,

a ¤ b = 2a + b,

a ¤ b = a-b

a ¤ b = (a+b):2, falls Brüche schon bekannt sind oder man sich mit a und b auf gerade Zahlen beschränkt (in diesem Fall kann trotzdem das Problem auftreten, dass das Ergebnis nicht gerade ist und man daher mit dem Assoziativgesetz Probleme bekommt, da dort mit dem Ergebnis weitergerechnet werden muss)

a ¤ b = (a+b):2, falls a+b gerade ist, sonst (a+b-1):2

a ¤ b = $(a \cdot b)$:2, falls $a \cdot b$ gerade ist, sonst $(a \cdot b - 1) : 2$

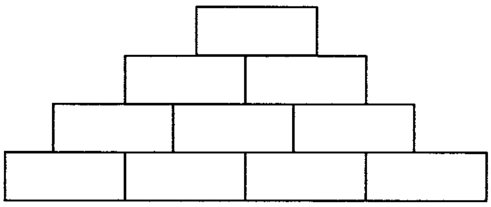
Den Kindern sollte bei dieser Aufgabe schon klar werden: ein Gesetz gilt nicht, wenn ein Gegenbeispiel gefunden wird. Wenn man aber vermutet, es gilt, muss man eine Begründung angeben, dass es für jede Auswahl von a und b gilt. Solch eine Begründung kann von den Kindern dann aber auf anschauliche Weise erbracht werden und muss nicht formal mathematisch sein.

Doch die Kinder sollen nicht nur solche vorgegebenen Verknüpfungen untersuchen, sondern selbst welche definieren (und diese dann untersuchen).

Zur Prüfung des Distributivgesetzes sind zwei (selbst gewählte) Verknüpfungen zu verbinden.

Anhang II:

Schon aus der Grundschule sind Zahlenmauern bekannt. Durch Probieren konnten dort zum Teil schon Aufgaben gelöst werden, die sich ab der 7. Klasse mit Hilfe von Gleichungen bearbeiten lassen. Als Beispiel sei eine Mauer mit 4 Grundsteinen genannt, die mit aufeinander folgenden Zahlen belegt werden soll, so dass die Summe im obersten Stein 100 ergibt.



Belegt man den ersten Grundstein mit a, so erhält man im zweiten a+1, im dritten a+2 und im vierten a+3. In der 2. Reihe hat man dann 2a+1, 2a+3 und 2a+5, in der 3. Reihe 4a+4 und 4a+8 und ganz oben 8a+12. Es lässt sich leicht erkennen, dass a = 11 sein muss, damit 8a+12=100 ist.

Nun kann die Aufgabe in verschiedener Weise variiert werden:

Die Zielzahl kann geändert werden. Warum gibt es für 1000 keine Lösung mit natürlichen Zahlen?

Der Abstand der Zahlen bei den Grundsteinen kann geändert werden.

Die Höhe der Mauer kann verändert werden.

Die Aufgabe kann durchaus schon in der 5. Klasse gestellt werden.

Die Schüler sollen zunächst die Mauer beginnend mit 1,2,3,4 füllend berechnen, dann mit 2,3,4,5 usw. Welche Zusammenhänge zwischen den Zielzahlen können sie erkennen. Kann die Zielzahl 100 (1000) werden?

Gerade, da die Gleichung 8a+12 = 100 nicht zur Verfügung steht, sind die Kinder angehalten selbst Entdeckungen zu machen (z.B. die Zielzahlen wachsen von 20 an in 8er Schritten). Anhand dieser Entdeckungen können sie dann ihre Ergebnisse herleiten und begründen (z.B. warum 1000 nicht als Zielzahl vorkommen kann).

Bei Variation des Abstands d, was dann zu 8a+12d führen würde, sieht man, dass die Aufgabe mit 1000 für gerade d durchaus lösbar wird.

Kinder können zu Zahlenmauern leicht selbst ähnliche Aufgaben finden und dann mit den Mitschülern knobeln, ob es Lösungen gibt (und ggf. wie viele).

Zu beweisen wäre dann, warum bestimmte Aufgaben nicht lösbar sind oder warum man alle Lösungen zu einer Aufgabe gefunden hat.

Anhang III:

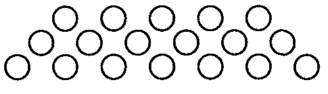
1. Beispiel (siehe Lambacher-Schweizer 7, S.89, Nr. 14):

Karin stellt fest: Wenn ich drei aufeinander folgende Zahlen, wie zum Beispiel 5, 6 und 7 oder 21, 22 und 23, addiere, ist die Summe immer durch drei teilbar.

a) Kontrolliere Karins Behauptung an einigen Zahlenbeispielen. Warum ist damit Karins Behauptung noch nicht begründet?
b) Versuche die Behauptung allgemein zu begründen, indem du einen geeigneten Term aufstellst.

Nennt man die erste Zahl a, so erhält man als Summe $3a+3= 3(a+1)$, also ist die Zahl durch 3 teilbar. Es ergibt sich 3-mal die mittlere Zahl.

Man könnte die Aufgabe aber auch geometrisch versuchen zu lösen:



Man kann man einen Kreis aus der letzten Reihe in die erste legen und sieht, dass alle 3 Reihen dann gleich lang sind.

Diese Argumentation ist schon in der 5. Klasse möglich.

Freilich ist die Zeichnung nur für eine Aufgabe erstellt worden, aber die Begründung, die an dieser Zeichnung vorgenommen wurde, kann auf alle analogen Zeichnungen übertragen werden und ist daher allgemein gültig.

Auch hier könnte die Aufgabe gut variiert werden: Was gilt, wenn man 4 (5) aufeinander folgende Zahlen addiert?

2. Beispiel: Dreieckszahlen und Quadratzahlen

Dreieckzahlen und Quadratzahlen sind besondere figurierte Zahlen. Verbunden mit der Idee von Gauß, die Summe der Zahlen von 1 bis 100 zu ermitteln, findet man sie zum Teil schon in Grundschulbüchern. Für die 5. Klasse vergleiche Lambacher-Schweizer 5, S.41.

Die Aufgabe 6 beschäftigt sich dort mit erweiterten Fragen:

a) Berechne die Summe der geraden Zahlen zwischen 1 und 100, also $2+4+6+...+98+100$.
b) Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 200 bis 400.

Sie könnte ergänzt werden durch die Aufforderung, verschiedene Wege zu finden, wie in den Aufgaben vorher ein Punktebild zu malen und eine Rechnung anhand des Punktebildes zu begründen usw.

Auch bei diesem Themenbereich könnten die Kinder weitere Aufgaben selbst erfinden, z.B. alle Vielfachen von 3 von ... bis ... zu addieren.

3. Beispiel: Hellsehen

Jemand soll sich eine einstellige Zahl aussuchen, sie mal 5 rechnen und noch 5 addieren. Das Ergebnis soll verdoppelt werden, dann sollte eine zweite Ziffer addiert werden, das Ergebnis wieder mal 5 gerechnet werden, ein weiteres Mal 5 addiert werden und zuletzt noch einmal mit 2 multipliziert werden.

Wenn nun das Ergebnis genannt wird, warum kann man sofort wissen, welche Ziffern ursprünglich verwendet wurden?

Man stelle einen Term für die mit den gewählten Ziffern a und b auf und versuche damit die Ablesbarkeit zu begründen.

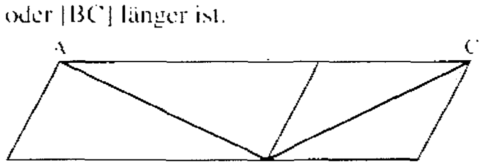
Als Variation können die Schüler selbst Rechenvorschriften bestimmen, ihre Mitschüler mit selbst gewählten Zahlen rechnen lassen und vom Ergebnis auf die gewählten Zahlen zurück schließen.

Anhang IV

In einem Buch zur 5. Klasse (Lambacher-Schweizer 5, S.69) findet sich folgende Aufgabe zum Vergleich zweier Streckenlängen. Sie soll den Kindern bewusst machen, dass die „Optik“ manchmal täuschen kann.

5

Schätze, welche der beiden Strecken [AB] oder [BC] länger ist.



Prüfe durch Nachmessen, ob deine Vermutung richtig war.

Diese Aufgabe könnte ausgeweitet werden:

Zeichne selbst ein Parallelogramm und versuche einen geeigneten Punkt B auf der der Seite [AC] gegenüberliegenden Seite zu finden, für den die gleiche optische Täuschung zutrifft.

Wie kann man den Punkt B finden? Welche Eigenschaft hat er?

Kannst du begründen, dass es in jedem Parallelogramm solch einen Punkt B geben muss?

Der Punkt B hat die Eigenschaft, auf der Mittelsenkrechten zu [AC] zu liegen.

Die Aufgabe kann also gut in der 7. Klasse wieder aufgegriffen werden. Als Hilfe kann diese Gerade eingezeichnet werden, es kann aber auch hergeleitet werden, dass B auf dieser Geraden liegen muss, weil er ja zu den Punkten gehören soll, die von A und C gleich weit entfernt sind. Dadurch, dass ein Parallelogramm eingezeichnet ist, das zu einer optischen Täuschung führt, wird die Notwenigkeit eines Beweises vielleicht deutlicher.

Auch für 5. Klässler kann der Zusammenhang zu dieser Mittelsenkrechten angedeutet werden: Stell dir vor, du würdest das Parallelogramm so falten, dass A und C aufeinander liegen. Wo muss dann B liegen? Warum ist dann [AB] genauso lang wie [BC]?