Endliche Vektorräume

Renate Motzer

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Motzer, Renate. 1997. "Endliche Vektorräume." Mathematik in der Schule 1997 (9): 473–77.

Endliche Vektorräume

RENATE MOTZER

1 Endliche Strukturen in der Schule

Rechnen mit Restklassenringen oder endlichen Körpern ist bei uns an den Schulen derzeit kaum vorgesehen. Division mit Rest kommt vielleicht in Klasse 5 vor – solange noch keine Bruchzahlen bekannt sind. Danach ist es aber schnell vergessen. Das ist eigentlich sehr bedauerlich, denn dem Rechnen in endlichen Mengen liegt etwas Anschauliches und Spielerisches zugrunde. Außerdem spielt es in der Informatik durchaus eine Rolle, z. B. beim Umrechnen in Hexadezimalzahlen oder in Programmbeispielen wie dem EUKLIDischen Algorithmus. Gerade auch bei Codierungen und sonstigen Verschlüsselungstechniken oder bei der Erzeugung von Zufallszahlen verwendet man die Division mit Rest.

Im bayerischen Lehrplan für den *Leistungskurs Mathematik* findet sich bei der Behandlung der Vektorraumaxiome der Hinweis auf endliche Vektorräume. Dies war für mich zumindest ein Anlaß, einmal eine Doppelstunde dem Rechnen mit Restklassenringen zu widmen. Die Schüler konnten dabei nichtreelle Vektorräume kennenlernen – womit sich gewiß der Begriff *Vektorraum* mit ein bißchen mehr Leben erfüllen ließ. Dieses Rechnen in Restklassen bleibt freilich eine Ausnahmeerscheinung, die zum sonstigen Unterrichtsstoff so gut wie keine Verbindung hat – deswegen werden wohl viele Kollegen aufgrund der allgemeinen Stoffülle eher darauf verzichten. Zu zeigen, daß die reellen Zahlen nicht alles sind, war mir diese Doppelstunde aber trotzdem wert.

Ausgangspunkt war meine Suche nach nichtgeometrischen Vektorräumen. Damit die Schüler den Sinn der Benennung von Axiomen erkennen, ist es sehr wichtig, daß sie über den zwei- bzw. dreidimensionalen Anschauungsraum hinaus weitere Modelle kennenlernen. Sie sollen sehen, daß diese Axiome sehr verschiedene Modelle besitzen, die doch in gewisser Weise ähnlich betrachtet werden können. An Beispielen, die die Axiome nicht erfüllen, sollen sie erkennen, was die Axiome eigentlich verlangen und worin sich Vektorräume grundlegend von „Nichtvektorräumen" unterscheiden. So gehört zu dem, was die Modelle verbindet, z. B. das Vorhandensein einer Basis und damit verbunden einer Dimension.

Zunächst wird man – neben dem R^2 und dem R^3 – weitere reelle Vektorräume untersuchen. Dann kann man jedoch noch einen Schritt weitergehen und auch den zugrundeliegenden Körper hinterfragen, die Körperaxiome erarbeiten und schließlich nach Vektorräumen über anderen Körpern suchen.

2 Beispiele endlicher Vektorräume

Statt deduktiv die Notwendigkeit von Körperaxiomen zu diskutieren, kann man natürlich sein Glück an Beispielen versuchen. Ein Kollege von mir verwendet immer das Beispiel eines „Gemüsevektors" – jede Gemüsesorte stellt ein Basiselement dar. Nun kann ich zwar – wollte ich ehrlich sein - eine Zwiebel noch halbieren, 10 Zwiebeln „vermissen" (–10 Zwiebeln), aber 10^{-100} Zwiebeln oder $\sqrt{2}$ Zwiebeln kenne ich nicht!
Wenn es dann gar um Menschen statt um Gemüsesorten geht, dann funktioniert auch das Teilen nicht mehr. Ja, und da sind mir die Restklassenkörper eingefallen.

Zunächst ein Beispiel aus dem Obst- und Gemüsegarten:

In einem Garten stehen Apfel- und Birnbäume. Die Äpfel und Birnen werden in 3er-Packs verkauft.

Es sind auch beliebig andere Sorten möglich. Die Anzahl der Sorten bestimmt – wie nicht anders zu erwarten – die Dimension des Vektorraumes.

Unsere Aufmerksamkeit richtet sich auf die Zahl der übrigbleibenden Äpfel und Birnen nach einem Erntetag. Wir stellen uns folgende Fragen:

1. Wie viele verschiedene Kombinationen von übriggebliebenen Äpfeln und Birnen sind möglich?
2. Wenn x Äpfel und y Birnen übriggeblieben sind, wie viele müssen wir dann noch pflücken, um ein Äpfel- und ein Birnenpäckchen voll zu bekommen?
3. Am ersten Tag sind x Äpfel und y Birnen übriggeblieben, am nächsten Tag sind es a Äpfel und b Birnen. Wie viele sind es insgesamt? (Man stelle eine Verknüpfungstafel auf!)
4. Mehrere Tage hintereinander bleibt immer die gleiche Menge von Äpfeln und Birnen übrig. Wie viele sind es insgesamt?

Die erste Frage zielt auf die Menge der Elemente. Hier sind es $3^2 = 9$ Elemente. Bei Frage 2 werden inverse Elemente gesucht, die dritte Frage führt zur

Gruppentafel (immerhin 81 Elemente!). Schüler erkennen an dieser Stelle meist recht gut die Unabhängigkeit der Äpfel von den Birnen. Sie begnügen sich daher auch gern mit einer Verknüpfungstafel nur für Äpfel, sie sollten aber zumindest an ein paar Beispielen Äpfel-Birnen-Paare miteinander verknüpfen. Frage 4 wiederum behandelt die S-Multiplikation. Die Schüler sollen erkennen, daß nach drei Tagen jeweils kein Rest bleibt und somit auch die Tage *modulo* 3 gerechnet werden können.

Nun gilt es zu untersuchen, ob die Menge

$$\{0a + 0b;\ 0a + 1b;\ 0a + 2b;\ 1a + 0b;\ 1a + 1b;\ 1a + 2b;\ 2a + 0b;\ 2a + 1b;\ 2a + 2b\}$$

einen Vektorraum darstellt. Bei dieser Untersuchung können erst einmal die Vektorraumaxiome wiederholt werden.
Es reicht wohl aus, ein Beispiel für das Distributivgesetz $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$ explizit nachzurechnen (ein zweites vielleicht als Hausaufgabe). Bei der Angabe der Elemente des Vektorraumes kann auch darüber sinniert werden, wie man sie sinnvoll anordnet, um keines zu vergessen.

Statt Obst sind selbstverständlich viele weitere Beispiele möglich. Die Phantasie des Lehrers und der Schüler soll hier ruhig ein wenig angeregt werden. Möglich ist etwa folgendes Problem:

Schülerinnen und Schüler werden in einem Schullandheim in Dreibettzimmern untergebracht (natürlich Jungen und Mädchen getrennt!). Es werden auch Schüler bzw. Schülerinnen aus verschiedenen Klassen zusammengelegt.

Wieder interessieren wir uns für die Schüler und Schülerinnen, die nach dem Aufteilen in Dreiergruppen übrigbleiben:

1. Wieviel verschiedene Kombinationen können übrigbleiben?
2. Wieviel Schüler und Schülerinnen müssen dazukommen, damit alle in einem vollbelegten Dreierzimmer unterkommen?
3. Bei der ersten Klasse bleiben *x* Schüler und *y* Schülerinnen übrig, bei der zweiten *a* Schüler und *b* Schülerinnen. Wieviel sind es insgesamt?
4. Bei mehreren Klassen bleibt die gleiche Anzahl übrig. Wie viele sind es insgesamt?

Diese Fragen entsprechen denen bei Äpfel und Birnen.

Man kann die Geschichte vielleicht auch noch ein bißchen weiterspinnen, z. B.:

In einer Klasse bleiben zwei Schülerinnen und ein Schüler übrig. Sie werden in einem Extratrakt untergebracht (wo auch die Lehrkräfte schlafen). Der Junge fühlt sich in der Minderheit. Er hofft, daß sich die Verhältnisse ändern, wenn weitere Klassen kommen. In den neu ankommenden Klassen sind die Verhältnisse genauso. Wie viele Klassen müssen ankommen, damit schließlich die Jungen in der Überzahl sind (d. h., zwei Jungen und ein Mädchen übrigbleiben)?
Kann es vorkommen, daß nur Jungen oder nur Mädchen übrigbleiben?

Es ist leicht zu sehen, daß die Jungen dann in der Überzahl sind, wenn insgesamt 2 *modulo* 3 Klassen da sind. Da $\mathbb{Z}_3$ nullteilerfrei ist, ist es nicht möglich, daß nur Jungen oder Mädchen übrigbleiben. Nur (0 *mod* 3) $\cdot$ 1 ist 0, dann ist aber auch (0 *mod* 3) $\cdot 2 = 0$ und umgekehrt.
Anders wäre es, würde man etwa *modulo* 4 oder *modulo* 6 rechnen. Hier ergibt sich bei 2 bzw. 3 Klassen, daß nur Jungen übrigbleiben. Die Jungen sind bei 2 oder 3 bzw. 3 oder 4 oder 5 Klassen in der Mehrheit. Nun befindet man sich in diesen Fällen nicht mehr in einem Vektorraum, sondern in einem Modul. In einem Vektorraum kann ein Vielfaches eines Vektors nie 0 werden.

Dagegen ändert sich nichts an den bisherigen Ergebnissen, wenn man zusätzlich auch Lehrer und Lehrerinnen (getrennt!) in 3er-Zimmern unterbringen würde. Die Schüler sehen meist sofort die 4 Basiselemente und erkennen, daß ansonsten alle bisherigen Ergebnisse erhalten bleiben bzw. übertragbar sind. Der neue Vektorraum hat dann $3^4 = 81$ Elemente.

3 Die Körperaxiome

Der in Abschnitt **2** betrachtete Unterschied zwischen „*modulo* 3“ und „*modulo* 4“ ist eine genauere Untersuchung wert. Anhand der Verknüpfungstafeln stellen wir fest, daß $\mathbb{Z}_4$ zwar eine additive Gruppe darstellt; $\{1; 2; 3\}$ ist aber in $\mathbb{Z}_4$ bezüglich der Multiplikation nicht abgeschlossen. Das kann anregen, sich Gedanken über die Skalarenmenge eines Vektorraumes zu machen.

Die Vektorraumaxiome gelten ja auch bei der veränderten Skalarenmenge $\mathbb{Z}_4$. Wichtig ist wohl, daß die Skalarenmenge wie die Vektorenmenge eine additive Gruppe bildet, daß das Distributivgesetz gilt, wohl ist auch das Assoziativgesetz der Multiplikation wichtig. (Das Kommutativgesetz der Multiplikation ist nicht unbedingt nötig, Schiefkörper kommen in der Schule nicht vor.) Das neutrale Element der Multiplikation ist aufgrund des unitären Gesetzes auch klar – aber wie nötig sind multiplikative Inverse?

Wenn man schaut, wo das multiplikative Inverse bei den Zusammenhängen rund um Vektorräume eine Rolle spielt, findet man wohl vor allem eine Stelle: beim Beweis, daß lineare Unabhängigkeit – d. h., daß man keinen der gegebenen Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen kann – gleichbedeutend ist mit der eindeutigen Darstellung des Nullvektors. Denn gibt es eine zweite Darstellung der Null, kann ich nach einem der verwendeten Vektoren auflösen. Dieser Zusammenhang würde in einem Modul nicht gelten. *Modulo* 4 kann ich das eine Element „2 Jungen" (kurz: $2J$) zwar nicht als Linearkombination des Nullvektors darstellen, also wäre es für sich allein „linear unabhängig" vom Nullvektor, aber zweimal genommen führt es zum Nullvektor; d. h., es gibt eine nichttriviale Darstellung von diesem.
Die beiden Elemente $1J + 1M$ und $1J + 3M$ wären auch jedes für sich „linear unabhängig" vom Nullvektor, mit jedem allein kann man außerdem auch den Nullvektor nur trivial darstellen. Weiterhin ist keines ein Vielfaches des anderen. *Modulo* 5 würden sie miteinander eine Basis liefern:

$$1M = 3 \cdot (1J + 3M) + 2 \cdot (1J + 1M);$$
$$1J = (1J + 1M) + 4 \cdot 1M = 2 \cdot (1J + 3M) + 4 \cdot (1J + 1M)\,.$$

Modulo 4 gilt aber: $2 \cdot (1J + 3M) + 2 \cdot (1J + 1M) = 0$, und die Elemente $1J$ und $1M$ sind nicht als Linearkombination von $1J + 1M$ und $1J + 3M$ darstellbar.

Man sieht also, daß es durchaus wichtig ist, daß die Skalare in einem Vektorraum aus einem Körper stammen und daß *modulo* 4 kein Restklassenkörper vorliegt und damit auch kein Vektorraum der Schülerinnen und Schüler im Schullandheim.

Allgemein läßt sich leicht erkennen, daß $\mathbb{Z}_n$ nur dann einen Körper darstellt, wenn n eine Primzahl ist, und nur dann lassen sich darüber Vektorräume aufbauen.

An diesen Beispielen können Schüler manches über die Bedeutung der Begriffe *lineare Unabhängigkeit* und *Erzeugendensystem* lernen bzw. einüben. Letzteres geschieht vor allem, wenn man sich bemüht, aus ungewöhnlichen Basiselementen andere darzustellen. Dabei übt man natürlich vor allem das Rechnen *modulo* bestimmter Zahlen. Das kann den Schülern durchaus Spaß machen – und man kann derartige Betrachtungen auch gut mit Rechnungen in anderen Zahlensystemen verbinden. Sollten sich die Schüler bereits in Klasse 5 mit diesem m. E. doch recht anspruchsvollen Thema beschäftigt haben, so wäre dies ein Wiederaufgreifen am Ende der Schulzeit durchaus wert. Dabei werden auch Bezüge zu Potenzen und Logarithmen geschaffen. Verbindungen zur Informatik sollten ebenfalls angedeutet werden, um die praktische Relevanz nicht ganz außer acht zu lassen.