THEORIE UND FORSCHUNG
PHILOSOPHIE

Uwe Meixner

Axiomatische Ontologie

S. RODERER VERLAG
REGENSBURG

Uwe Meixner

Axiomatische Ontologie

Theorie und Forschung, Bd. 144
Philosophie und Theologie, Bd. 10

S. Roderer Verlag, Regensburg 1991

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Meixner, Uwe:
Axiomatische Ontologie / Uwe Meixner. - Regensburg :
Roderer 1991
(Theorie und Forschung ; Bd. 144 : Philosophie und Theologie ; Bd. 10)
Zugl.: Regensburg, Univ., Habil.-Schr.
ISBN 3-89073-525-8
NE: Theorie und Forschung / Philosophie und Theologie

1991, S. Roderer Verlag, Regensburg

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Auf den Inhalt dieses Buches wird in der Einleitung ausführlich eingegangen. Hier bleiben einige Worte zu sagen zu seinen eher äußerlichen Merkmalen und zum Rahmen, in den es sich einfügt.

Es wird jedem sofort auffallen, daß es sehr viele Formeln enthält, die in Definitionen, Axiomen und Theoremen, in den zugehörigen Beweisen und in Nebenüberlegungen ausgebreitet werden und die für viele einen wahrhaft abschreckenden Anblick bieten dürften. Warum Formalisierungen? - Sie dienen *in zweiter Linie* der Überschaubarkeit und der Unzweideutigkeit der aufgestellten Lehrsätze, *in erster Linie* aber der Überschaubarkeit und Unzweideutigkeit der Beweise. In der Umgangssprache ist, wenn die Inhalte komplexer werden, jedenfalls in Beweisen nicht beides zugleich zu haben.

Die Funktion von Beweisen ist zweierlei: die Sicherung eines Lehrsatzes relativ zu einer axiomatischen Basis und die detaillierte Erhellung der logischen Beziehungen zwischen ihm und dieser Basis. Die vielen Beweise in diesem Buch bilden zweifellos seinen am schwersten lesbaren Teil. Niemand braucht sich ihre Lektüre zuzumuten, wenn er der logischen Kompetenz des Autors vertraut oder nicht wissen will, wie im Detail sich ein Theorem aus den Axiomen ergibt. - Manch Versierter unter den Lesern wird manche oder gar viele der Beweise unnötig finden: "Alles viel zu breit ausgewalzt!", "Hier hätte ein Literaturhinweis genügt!". Dazu ist zu sagen, daß für *die Mehrheit* der Leser, die überhaupt die Beweise studieren wollen, eine gewisse Breite der Argumentation eine willkommene Erleichterung mit sich bringen dürfte. Im übrigen erhebt der Autor keinerlei Anspruch darauf, immer den elegantesten Beweisweg beschritten zu haben, und hält das auch nicht für sonderlich wichtig. (Die Axiome, Theoreme und Definitionen von Systemen, die über mehrere Kapitel hinweg diskutiert werden, sind zur Erleichterung der Bezugnahme am Schluß des Buches zusammengefaßt.)

Die *primären* Informationen dieses Buches sind in den Axiomen, Theoremen und Definitionen und den sie im Haupttext begleitenden Erläuterungen enthalten, in den Beweisen erst die *tertiären*. Seine *sekundären* Informationen stecken in den Anmerkungen, die jedem Kapitel beigegeben sind. Dort werden Seitenüberlegungen verfolgt und vor allem die relevante Literatur diskutiert, teilweise recht extensiv. Dieses Buch besitzt gleichsam einen inkorporierten Kommentar.

Ein Blick auf die Literaturliste wird dem Leser zeigen, daß die meiste diskutierte Literatur englischsprachig ist. Der Grund hierfür ist einfach der, daß die Ontologie in den angelsächsischen Ländern gegenwärtig eine blühende Wissenschaft ist, während sie diesseits des Ärmelkanals und des Atlantiks (von Skandinavien abgesehen) "darniederliegt". (Ausnahmen gibt es freilich auch bei uns.) Was Engländer und Amerikaner als "ontology" oder "(exact) metaphysics" bezeichnen und der Autor "Ontologie" nennt, ist nicht das, was Kant attackierte, und auch nicht das, was Heidegger betrieb. Ontologie ist nicht die Unternehmung, "welche sich anmaßt, von den Dingen überhaupt synthetische Erkenntnis apriori in einer systematischen Doktrin zu geben" und deren "stolzer Name" dem "bescheidenen einer bloßen Analytik des reinen Verstandes Platz machen" muß (*Kritik der reinen Vernunft*); und sie ist kein "explizites theoretisches Fragen nach dem Sein des Seienden", was dann zur Seinserhellung Antworten findet wie "Verstehen ist das existentiale Sein des eigenen Seinkönnens des Daseins selbst, so zwar, daß dieses Sein an ihm selbst das Woran des mit ihm selbst Seins erschließt" (*Sein und Zeit*). Daß die Ontologie hier "darniederliegt", hat darin seinen Grund, daß man weithin im deutschen Sprachraum fälschlich meint, Ontologie im Verständnis Kants bzw. Heideggers sei die einzige Ausprägung des Theoretisierens, die ein historisches Recht habe, so genannt zu werden, und weiter meint, sie sei durch Kants Kritik endgültig erledigt, bzw. durch Heideggers Philosophie endgültig diskreditiert (oder vollendet - je nach Standpunkt). Wozu sich einer bestenfalls abgeschlossenen, schlimmstenfalls schimpflich untergegangenen Wissenschaft widmen? Man wende sich, wenn man rational vertretbare kreative systematische Arbeit leisten will, anderen Bereichen zu, die möglichst von jeder Assoziierung mit "Ontologie" frei sind! - So denkt das philosophische Man (um einmal heideggersch zu sprechen).

Aber Heideggers und Kants "Ontologie" ist nicht die Wissenschaft die Aristoteles meinte und begründete und am reinsten in den Kategorien entwickelte, zu der vor ihm schon Platon bedeutende Beiträge geliefert hatte und nach ihm Thomas, Scotus, Leibniz und Frege bedeutende Beiträge leisten sollten. Vielmehr ist ein Teil der modernen analytischen Philosophie, die besonders im angelsächsischen Raum gepflegt wird (aber ursprünglich nicht aus ihm stammt!), - nachdem sie sich von ihren empiristischen Fesseln befreit hat - der legitime Erbe dieser großen ontologischen Tradition. Er ist es sowohl den Fragestellungen als auch den Methoden nach, die schlicht im Definieren, Analysieren und Argumentieren bestehen, wobei auf größtmögliche Klarheit der Begriffe und größtmögliche Strenge der Begründungen Wert gelegt wird (Selbstverständlichkeiten, die in der modernen Philosophie nicht selbstverständlich sind). Die genannten bewährten philosophischen Methoden wendet auch der Autor in diesem Buch fortwährend an, und die wissenschaftlichen Werte, die mit ihnen verknüpft sind, hat er, versehen mit den Werkzeugen der modernen symbolischen Logik, nach Kräften zu verwirklichen gesucht.

EINLEITUNG

Jede Wissenschaft hat einen Bezugsbereich und einen Standpunkt, von dem aus sie den Bezugsbereich untersucht. Der Standpunkt bestimmt die Auswahl der Tatsachen, für die sie sich interessiert, aus der Gesamtheit der Tatsachen bzgl. ihres Bezugsbereich. Man kann den Standpunkt einer Wissenschaft identifizieren mit der Menge der sie leitenden Erkenntnisinteressen. Es gibt Erkenntnisinteressen, die allen systematischen Wissenschaften gemeinsam sind, und solche, die spezifisch für bestimmte unter ihnen sind. Jede systematische Wissenschaft zielt ab auf Tatsachen, die sich gut zur deduktiven Systematisierung, d.h. zur Theoriebildung eignen. Zu diesen gehören insbesondere generelle Tatsachen, aber auch wiederum nicht irgendwelche generelle Tatsachen, sondern nur solche, die mit bestimmten ausgewählten Begriffen formulierbar sind. Jede systematische Wissenschaft zielt in der Auswahl ihrer Begriffe darauf ab, solche zu wählen, die sich in ein definitorisches System bringen lassen; vor allem aber wird die Auswahl dieser Begriffe bestimmt von den speziellen Erkenntnisinteressen der jeweiligen Wissenschaft.

Der Bezugsbereich der Ontologie ist das Seiende. Zum Seienden gehört alles, was benannt werden kann, d.h. alles überhaupt, das nur Mögliche ebenso wie das Existierende. Der Bezugsbereich der Ontologie ist also universell. Aber nicht alle Tatsachen bzgl. dieses Bezugsbereich sind Gegenstand der Ontologie. In der Ontologie wird ja nicht der Versuch unternommen, eine Universalgeschichte zu schreiben. Die Ontologie will allein die fundamentalen Tatsachen bzgl. des Seienden erkennen. Sie untersucht das Seiende, insofern es seiend ist, wie Aristoteles sagt.

Es läßt sich gewiß nicht ohne Willkür eindeutig bestimmen, was eine fundamentale Tatsache bzgl. des Seienden ist; aber es läßt sich in natürlicher Weise hinreichend genau bestimmen. Fundamentale Tatsachen bzgl. des Seienden sind Tatsachen, die allein die fundamentalen Unterscheidungen und Verhältnisse bzgl. des Seienden betreffen, und es ist zu erwarten, daß sich die fundamentalen Unterscheidungen und Verhältnisse bzgl. des Seienden, d.h. bzgl. allem, in der Kernstruktur der (deskriptiven) Sprache spiegeln, mit der wir über alles reden. Denn die Sprache[1] ist das Hauptwerkzeug der Erkenntnis, und ein Werkzeug, zumal wenn es ein Werkzeug der Erkenntnis ist, muß der Wirklichkeit (oder besser "Seinsheit", falls man nur Existierendes zur Wirklichkeit zählen möchte) angepaßt sein, wenn es brauchbar sein soll, was die Sprache offenbar ist.[2] Wenn wir also fragen, "Was ist es in der Wirklichkeit, das dieser zentralen sprachlichen Unterscheidung (z.B. Satz – Prädikat), diesem zentralen sprachlichen Verhältnis (z.B. Prädikation) entspricht?", so werden wir auf fundamentale Unterscheidungen und Verhältnisse bzgl. des Seienden geführt. Diese Unterscheidungen sind fundamental, denn die Kernstruktur der Sprache geht aller Begriffs- und Theoriebildung in ihr voraus; sie ist das, was, soweit wir in ihrer Geschichte zurückblicken, immer schon so war, wie es jetzt ist; sie ist das, was das Kind von der Grammatik zuerst erfaßt, wenn es die Sprache erlernt.

Die Existenz der Wissenschaft der Ontologie ist außer Frage. Seit Platon und Aristoteles haben sich immer wieder Philosophen – ausgehend von zentralen sprachlichen Phänomenen – den fundamentalen Tatsachen bzgl. des Seienden zugewandt. Freilich ist die Ontologie nicht rein betrieben worden; ontologische Betrachtungen verbanden sich mit theologischen, kosmologischen und psychologischen zum Konglomerat der abendländischen Metaphysik, eine Wissenschaft, die aufgrund der kantschen Kritik und gewisser Philosopheme, die ihren Namen usurpierten, in neuerer Zeit nicht in hohem Ansehen gestanden ist: "Metaphysik" ist heute vielfach zum abfälligen Epitheton für grund-, ja sinnlose Spekulation geworden, wo der Ausdruck von vagen Gefühlen nur allzu oft wahrheitsfähige Gehalte ersetzt. Diese Herabwürdigung der Metaphysik ist nicht nur großen Teilen ihrer Tradition gegenüber eine nur durch Unkenntnis erklärbare maßlose Ungerechtigkeit, sie hat, da ja Ontologie als Teil der Metaphysik angesehen wurde, auch bei den meisten den Blick für die eigentümlich ontologischen Resultate getrübt, die in ihrer Weise nicht weniger großartig sind als die Resultate anderer Wissenschaften.

In der Ontologie hat es einen wissenschaftlichen Fortschritt gegeben. Ich nenne einige Hauptpunkte: Platon unterschied als erster Attribut und Gegenstand und stellte die erste ontologische Theorie der Prädikation auf; nicht weniger bedeutsam ist seine Analyse der unterschiedlichen Bedeutungen von "sein". Aristoteles entwickelte eine andere ontologische Theorie der Prädikation; ein anderes Paradigma von Attribut und Gegenstand; er schuf das erste umfassende ontologische Begriffssystem; nicht zuletzt ist er der Entdecker des Möglichkeits- und des Relationsbegriffs. Eine Blütezeit der Ontologie war das Mittelalter; neben der Systematisierung und Verfeinerung der überkommenen ontologischen Erkenntnisse brachte es beachtliche, bis heute nicht hinreichend gewürdigte Leistungen auf dem Gebiet der Theorie der Dispositionen (und Potenzen) und auf dem Gebiet der Individuationstheorie hervor; die drei Hauptpositionen im Universalienstreit - Realismus, Konzeptualismus, Nominalismus - wurden im Mittelalter in vielen Varianten und Abstufungen in subtilster Weise diskutiert; mittelalterlichen Ursprungs ist auch ein zentraler methodologischer Grundsatz der Ontologie, bekannt unter der Bezeichnung "Ockhams Rasiermesser" (Ockham ist aber nicht der Urheber dieses Grundsatzes). Leibniz errichtete die erste Begriffslogik, die über die Syllogistik hinausging; er verwendete als erster den Begriff der möglichen W e l t zur semantischen Charakterisierung der Modalbegriffe, und von ihm stammt die erste eingehende Diskussion und formale Formulierung der allgemeinen Identitätsgesetze. Mit Bolzanos "Sätzen an sich" trat die ontologische Kategorie der Sachverhalte ans Licht. Frege teilte zuerst Attribute nach Stufen- und Stellenzahl ein; seine Ontologie von Gegenstand und Funktion, in der Attribute als gewisse Funktionen erscheinen, war die erste Theorie, die einer ganzen Fülle von Erscheinungen der Kernstruktur der Sprache auf einmal gerecht wird; sie ermöglichte allererst den Aufbau der modernen Logik; von grundlegender Bedeutung ist auch Freges semantische Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung (wir sagen heute "Bezug"), woraus sich auf ontologischer Ebene die Unterscheidung zwischen intensionalen und extensionalen Entitäten ergibt. Durch den Aufbau der Mengenlehre, der beginnend mit ihrem Schöpfer Cantor von vielen Forschern betrieben wurde, ist heute eine ontologische Theorie entstanden und weithin akzeptiert, die an Präzision und systematischer Kraft (sowohl in deduktiver als auch in definitorischer Hinsicht) alles bisher dagewesene in den Schatten stellt; in ihr läßt sich die Mathematik entwickeln, lassen sich - wenn man sie um den Begriff der möglichen Welt erweitert - auch intensionale Entitäten darstellen; Zahlen, Eigenschaften, Sachverhalte, Relationen - alles sind nach ihr Mengen. (Die Mengenlehre ist freilich eine Theorie, die sich eher durch ihre Leistungsfähigkeit empfiehlt als durch ihre Natürlichkeit; ihr Grundbegriff "Menge" erscheint gegenüber anderen ontologischen Begriffen, wie dem der Eigenschaft, sekundär; zwar stellt er auch eine fundamentale Unterscheidung bzgl. des Seienden dar, aber es gibt wohl noch grundlegendere im Sinne der Spiegelung in der Kernstruktur der Sprache; darüber später.)

Aus dieser kursorischen Darstellung der Geschichte der Ontologie ist deutlich geworden, daß sie mit zwei anderen Disziplinen eng verschwistert ist: mit formaler Logik und allgemeiner Semantik. Heute wird die Bezeichnung "formale Logik" häufig in einem so weiten Sinn genommen, daß zur formalen Logik sowohl ontologische wie semantische Untersuchungen gerechnet werden. Die formale Logik im eigentlichen Sinn ist aber die Wissenschaft, deren Bezugsbereich die Schlüsse sind; wobei ein *Schluß* eine endliche Folge von Sätzen ist, deren letztes Glied (die Konklusion) mit den vorausgehenden Gliedern (den Prämissen) durch ein Folgerungspartikel ("also", "ergo", "folglich") verbunden ist. Die formale Logik interessiert sich nicht für alle Tatsachen, die Schlüsse betreffen. Sie hat einen definitiven Standpunkt, von dem aus sie Schlüsse betrachtet; sie zielt ab auf die Gesetze der formalen Gültigkeit von Schlüssen; wobei ein Schluß genau dann *formal gültig* ist, wenn es bei jedem Schluß, der dieselbe logische Form wie er hat, im stärksten Sinn unmöglich ist, daß seine Prämissen wahr und seine Konklusion falsch ist. Die *logische Form* eines Schlusses wiederum ist seine (normierte) syntaktische Gestalt unter Absehung von den Bedeutungen der in ihm vorkommenden Wörter, aber ausgenommen die Bedeutungen der in ihm vorkommenden logischen Konstanten.

Aufgrund des genannten Erkenntnisinteresses der formalen Logik und diesen es näher bestimmenden Definitionen ist klar, daß sich die Begriffe der formalen Logik ("Satz", "Prädikat", "Variable", "die Konjunktion", "Satzoperator", etc.) vor allem auf die Beschreibung der logischen Form von Schlüssen beziehen. - Hier ein Beispiel für ein konditionales und ein Beispiel für ein kategorisches Grundgesetz der formalen Gültigkeit von Schlüssen, die in der formalen Logik formuliert werden:

LG1: Ist der Schluß aus irgendwelchen Sätzen Γ und dem Satz A auf den Satz C formal gültig und der Schluß aus Γ und dem Satz B auf C ebenfalls, so ist auch der Schluß aus Γ und der Adjunktion von A und B (deren Verbindung mit nichtausschließendem "oder") auf C formal gültig.

LG2: Der Schluß aus dem Satz A auf seine Adjunktion mit dem Satz B ist formal gültig.

In der formalen Logik (im eigentlichen Sinn) wird keine Begründung für die Richtigkeit ihrer Grundgesetze gesucht; sie wird aufgrund der logischen Intuition konstatiert (die logische Intuition ist keine geheimnisvolle Fähigkeit, sondern ein Sonderfall des Sprachverstehens); aufgrund der gewonnenen einfachen Gesetze lassen sich dann - deduktiv - auch komplexere einsehen, bei denen die logische Intuition versagt. Wie bei jeder Wissenschaft kommt man also auch bei der formalen Logik nicht umhin, von der Logik Gebrauch zu machen. Darin liegt kein Zirkel; die Logik will ihren Gegenstandsbereich ja nicht ex nihilo konstituieren, sondern nur systematisch durchdringen.

Aber es gibt Begründungen für die Richtigkeit der Grundgesetze der formalen Logik. Diese werden im Rahmen der allgemeinen Semantik gegeben. Nach dem allgemein üblichen Verfahren besteht der entscheidende Schritt dazu in der Angabe des folgenden Kriteriums für formale Gültigkeit unter Verwendung des Begriffs der Interpretation: *Ein Schluß ist genau dann formal gültig, wenn es keine Interpretation seiner logischen Form gibt, bei der ihre Prämissen wahr, aber ihre Konklusion falsch ist.* (Die logische Form eines Schlusses läßt sich durch einen *kunstsprachlichen* Schluß repräsentieren; für die logischen Konstanten in ihm verwendet man gewisse Kürzel, z.B. "$\wedge$" für "und"; die übrigen Worte in seiner normierten syntaktischen Gestalt werden in normierter Weise durch in sich bedeutungslose Buchstaben ersetzt.) Welche Schlüsse nach diesem Kriterium formal gültig sind, welche Gesetze der formalen Gültigkeit nach diesem Kriterium bestehen, hängt davon ab, wie der Begriff der Interpretation (bezogen auf die Kunstsprache logischer Formen) definiert wird; es sollen natürlich gerade die Schlüsse nach diesem Kriterium formal gültig sein, die es gemäß der oben angegebenen intuitiven Definition der formalen Gültigkeit sind; und gerade so, daß dies gilt, wird der Begriff der Interpretation auch definiert.

Die Begründung für die Richtigkeit der Grundgesetze der formalen Logik besteht in ihrer Ableitung aus der Definition des Interpretationsbegriffes unter Verwendung des angeführten Kriteriums der formalen Gültigkeit. Auch hier wird also von der Logik Gebrauch gemacht; daneben aber auch von ontologischen, speziell mengentheoretischen Gesetzen, denn die Definition des Interpretationsbegriffs wird allgemein in mengentheoretischen Begriffen angegeben.

Die Grundgesetze der formalen Logik - obwohl sie es im Grunde nicht nötig haben, denn sie sind durch die logische Intuition allein hinreichend gerechtfertigt - lassen sich also im Rahmen der allgemeinen Semantik begründen (ähnlich steht es mit "1+1=2", ein Satz, der keine Begründung nötig hat, sich aber gleichwohl - in der Mengenlehre - begründen läßt). Außerdem lassen sich aber abgeleitete Gesetze der formalen Logik auf dem beschriebenen semantischen Wege häufig sehr viel leichter einsehen als durch direkte Deduktion aus ihren Grundgesetzen. Weiterhin ermöglicht der beschriebene semantische Standpunkt bzgl. der formalen Gültigkeit, durch Angabe alternativer Definitionen des Interpretationsbegriffes gewisse Schwankungen unserer logischen Intuitionen präzise zu erfassen, und er ermöglicht es, auf Fragen wie die folgende eine Antwort zu geben: Erfassen die und die logischen Grundgesetze eine gewisse Subklasse der Gesetze der formalen Gültigkeit von Schlüssen vollständig oder nicht?

Hiermit ist die Verbindung zwischen formaler Logik und allgemeiner Semantik, wie sie sich nach dem üblichen Verfahren darstellt, hinreichend beschrieben. (Genaueres kann man einem Lehrbuch der formalen Logik entnehmen.) Jedoch gibt es auch einen anderen Weg als den beschriebenen, im Rahmen der allgemeinen Semantik eine Begründung für die Grundgesetze der formalen Logik anzugeben. Dieser Weg geht von einem anderen Kriterium für formale Gültigkeit aus: *Ein Schluß ist genau dann formal gültig, wenn die Generalisierung seiner ontologischen Interpretation ein ontologisches Gesetz ist.* Hier fällt der allgemeinen Semantik nur die Aufgabe zu, zu sagen, was die ontologische Interpretation eines Schlusses ist (man geht davon aus, daß jeder Schluß genau eine solche ontologische Interpretation hat), d.h. die Brücke zu schlagen zwischen der sprachlichen und der ontologischen Ebene; nach diesem Ansatz erscheinen die kategorischen Gesetze der formalen Logik als sprachbezogene Bilder von ontologischen Gesetzen, *nicht* als Folgerungen aus der Definition des Interpretationsbegriffes wie beim üblichen Ansatz.

Betrachten wir zu alledem ein Beispiel, nämlich den Schluß

S: Hans fährt nach Spanien oder nach Portugal.
Hans fährt nicht nach Spanien. Also:
Hans fährt nach Portugal.

Von diesem Schluß läßt es sich aufgrund der intuitiven Definition der formalen Gültigkeit von Schlüssen unmittelbar einsehen, daß er formal gültig ist; denn bei jedem Schluß, der dieselbe logische Form wie S hat, ist es evidenterweise im stärksten Sinn unmöglich, daß seine Prämissen wahr und seine Konklusion falsch ist. Wenn wir wollen, können wir aber auch die formale Gültigkeit von S im Rahmen der formalen Logik begründen. Dazu leitet man aus den Grundgesetzen das Gesetz

LG3: Der Schluß aus der Adjunktion von Satz A mit Satz B und der Negation von A auf B ist formal gültig.

her und subsumiert S unter es. Die Herleitung von LG3 sieht z.B. so aus: Der Schluß von Satz B auf B ist formal gültig (trivialer Schluß), also auch der Schluß aus der Negation von Satz A, und B auf B (Prämissenverstärkung); der Schluß aus der Negation von A, und A auf B ist formal gültig (ex contradictione quodlibet); also ist auch der Schluß aus der Adjunktion von A und B, und der Negation von A auf B formal gültig (LG1 und Prämissenvertauschung).

Alternativ können wir die formale Gültigkeit von S nach dem üblichen Verfahren im Rahmen der allgemeinen Semantik begründen: Die logische Form von S ist $R(a,b) \vee R(a,c), \neg R(a,b) \rightarrow R(a,c)$; S ist formal gültig, denn es gibt keine Interpretation seiner logischen Form, bei der ihre Prämissen wahr sind, aber ihre Konklusion falsch ist: angenommen φ ist eine Interpretation der logischen Form von S, bei der $R(a,b) \vee R(a,c)$ und $\neg R(a,b)$ wahre (kunstsprachliche) Sätze sind, aber $R(a,c)$ ein falscher ist; also ist gemäß der Definition des Interpretationsbegriffes $R(a,b)$ oder $R(a,c)$ ein wahrer Satz bei φ; also ist gemäß der Definition des Interpretationsbegriffes $R(a,b)$ ein falscher, also nicht ein wahrer Satz bei φ; folglich ist $R(a,c)$ ein wahrer, also nicht ein falscher Satz bei φ – Widerspruch.

Alternativ können wir die formale Gültigkeit von S nach dem skizzierten *anderen* Weg im Rahmen der allgemeinen Semantik begründen: Die ontologische Interpretation von S ist: die Konjunktion der Adjunktion der Sachverhalte, die "Hans fährt nach Spanien" und "Hans fährt nach Portugal" ausdrücken (oder besser: "intendieren"; siehe dazu unten), mit der Negation des Sachverhalts, den "Hans fährt nach Spanien" ausdrückt, enthält den Sachverhalt, den "Hans fährt nach Portugal" ausdrückt; die Generalisierung der ontologischen Interpretation von S ist: für alle Sachverhalte p und q, die Konjunktion der Adjunktion von p und q mit der Negation von p enthält q; S ist ein formal gültiger Schluß, denn die Generalisierung der ontologischen Interpretation von S ist ein ontologisches Gesetz. - Das kategorische formallogische Gesetz LG2 erscheint nach diesem Ansatz als sprachbezogenes Bild des folgenden ontologischen Gesetzes: Für alle Sachverhalte p und q, p enthält die Adjunktion von p und q.

Mit diesen notwendigerweise knappen Bemerkungen möge die Verbindung, die zwischen formaler Logik und Ontologie (via der allgemeinen Semantik) besteht, vorläufig charakterisiert sein. Ausführlicheres hierzu ist im vierten Teil, Kap. 6 des vorliegenden Buches zu erfahren, wo für eine einfache künstliche Sprache (und damit indirekt für die Umgangssprache, insofern die Sätze der künstlichen Sprache die prädikatenlogischen Formen von Sätzen der Umgangssprache sind) der Begriff der prädikatenlogischen Folgerung (und damit der Begriff der prädikatenlogischen Gültigkeit von Schlüssen) im Sinne des zweiten angeführten Kriteriums für formale Gültigkeit präzise definiert wird. (Prädikatenlogische Gültigkeit ist ein Spezialfall der formalen Gültigkeit; jeder prädikatenlogisch gültige Schluß ist formal gültig, aber nicht jeder formal gültige Schluß ist prädikatenlogisch gültig.)

Voraussetzung dieser Definition ist die Entwicklung der Ontologie, und zwar nicht nur bzgl. der Sachverhalte, sondern auch bzgl. der Gegenstände, Eigenschaften und Relationen; (*Sachverhalt, Eigenschaft, Gegenstand, Relation* sind Kernbegriffe der Ontologie, der Wissenschaft von den fundamentalen Tatsachen bzgl. des Seienden;) dies geschieht sukzessive bis in den vierten Teil dieses Buches hinein. Jede mengentheoretische Begriffsbildung und Argumentation wird dabei strikt vermieden (auch - außer zu heuristischen Zwecken - in der Metasprache). Die Mengenlehre ist daher nicht vorausgesetzt, sondern vielmehr nur die einfache Prädikatenlogik mit Identität und Kennzeichnung; (die Ontologie spricht über alles Seiende in gleicher Weise; insofern gibt es in der Sprache, in der sie formuliert wird, nur einen Typ von Variablen, Namen und Prädikaten; Kategorialunterschiede werden nicht in der syntaktischen Struktur repräsentiert;) aber bemerkenswerter Weise läßt sich im Rahmen der voll entwickelten Ontologie eine Definition des Mengenbegriffs (für jede endliche Stufe) angeben und damit die Mengenlehre aus der Ontologie begründen. Sie erscheint dabei im Gewande der sogenannten *Standardtheorie der Typen*[3], die somit als spezielle Form der Mengenlehre eine philosophisch befriedigende Rechtfertigung erfährt.

So erhält die Mengenlehre in der Darstellung der Ontologie den ihr eigentlich zukommenden Platz; auf ihrer Basis wird nicht die Theorie der Sachverhalte, Eigenschaften und Relationen aufgebaut (wie dies in der intensionalen Semantik unter Verwendung des Begriffs der möglichen Welt geschieht), sondern umgekehrt wird die Mengenlehre auf der Basis der Theorie der Sachverhalte, Eigenschaften und Relationen errichtet; d.h. die Darstellung der Ontologie wird vom Kopf auf die Füße gestellt. (Warum man tatsächlich davon reden kann, daß die Darstellung der Ontologie vom Kopf auf die Füße gestellt wird, dazu findet sich näheres im vierten Teil, Kap. 7; vergl. auch G. Bealer, *Quality and Concept*, Kap. 5.) Übrigens läßt sich auch der Begriff der möglichen Welt in der Ontologie definieren, und zwar schon wesentlich früher (innerhalb der Ontologie der Sachverhalte, die im ersten Teil abgehandelt wird). Aufgrund dessen ist es möglich, die Grundaussagen der Mögliche-Welten-Ontologie durch Deduktion zu rechtfertigen (z.B. daß Eigenschaften - von Gegenständen - identisch sind, wenn sie in allen möglichen Welten auf dieselben Gegenstände zutreffen). Dieses Resultat ist insofern bedeutsam, als in letzter Zeit eine Reaktion gegen die Mögliche-Welten-Ontologie eingesetzt hat; es wurde Kritik erhoben - auch von realistischer Seite - wegen ihrer angeblich problematischen ontologischen Voraussetzungen (Mengen und mögliche Welten betreffend) und wegen ihrer künstlichen Konstruktionen. Aber all diese ontologischen Voraussetzungen lassen sich rechtfertigen; wer Eigenschaften und Sachverhalte akzeptiert, muß auch Mengen und mögliche Welten akzeptieren (oder zumindest Entitäten, die strukturell mit den genannten völlig identisch sind).[4] Der einzige Vorwurf, der gegen die Mögliche-Welten-Ontologie erhoben werden kann ist, daß sie die Ordnung der Darstellung verkehrt und mit dem anfängt, was erkenntnismäßig später ist (daher die Künstlichkeit ihrer Konstruktionen); es ist, recht besehen, doch ein Kuriosum, daß man glaubt, mögliche Welten und Mengen besser zu verstehen als Sachverhalte und Eigenschaften, zumal wenn man bedenkt, wieviel Mühe darauf verwandt wurde und wird, in einer intuitiv befriedigenden Weise, die mengentheoretischen Paradoxien zu vermeiden. Aber die Verkehrung der Ordnung der Darstellung ändert nichts an *der Richtigkeit* der Resultate der Mögliche-Welten-Ontologie; *an sich* ist es nämlich gleichgültig, wie man anfängt, ob mit Mengen und möglichen Welten, oder ob mit Sachverhalten und Eigenschaften. Die Untersuchungen in diesen Buch zeigen die Äquivalenz des intensionalen Ansatzes in der Ontologie und des extensionalen.

In der Mögliche-Welten-Ontologie werden keine Behauptungen dahingehend formuliert, daß die und die Sorte von Entitäten die intuitiv angemessenen Bedeutungen der und der Sorte von sprachlichen Ausdrücken umfasse; solche Behauptungen sind *semantische* Behauptungen; ihre eventuelle Unrichtigkeit fällt nicht auf die Mögliche-Welten-Ontologie zurück. Tatsächlich ist es ja nur eine gute Näherung z.B. zu sagen, daß die Bedeutung eines einstelligen Prädikats eine Eigenschaft (im Sinne der Mögliche-Welten-Ontologie) sei; es ist nur eine gute Näherung, denn die Bedeutung eines Ausdrucks (das was er ausdrückt) wird mitbestimmt durch seine syntaktische Struktur (wie Carnap erkannte, der den Vorschlag machte, Bedeutungsgleichheit über intensionale Isomorphie zu erfassen; siehe *Meaning and Necessity*, S. 56ff); Eigenschaften jedoch sind unabhängig von der syntaktischen Struktur von Prädikaten, mit denen sie per Konvention semantisch korreliert sind; ohne jedwede Einschränkung kann man nur behaupten, daß die Intensionen von einstelligen Prädikaten (das, was sie intendieren) Eigenschaften sind.

Eine Grundfrage der Ontologie, der Wissenschaft von den fundamentalen Tatsachen bzgl. des Seienden, ist, welche fundamentalen Sorten des Seienden es gibt. Diese Frage ist prima facie doppeldeutig. Zum einen kann sie so verstanden werden, daß gefragt wird, welche Sorten des Seienden zu den fundamentalen Sorten des Seienden gehören; oder sie kann so verstanden werden, daß gefragt wird, welche fundamentalen Sorten des Seienden nichtleer sind. Aber fundamentale Sorten des Seienden sind nur nichtleere Sorten des Seienden; insofern ist die Doppeldeutigkeit nur scheinbar.

Um die fundamentalen Sorten des Seienden herauszufinden, muß man sich, wie bereits ausgeführt wurde, der Kernstruktur der (deskriptiven) Sprache zuwenden. Keine anderen sprachlichen Unterscheidungen sind so zentral wie die zwischen (Aussage-) Sätzen, Namen und Prädikaten. Es ist aber ein alter Einwand der Nominalisten, daß der realistische Ontologe naiv (nichtleere) sprachliche Sorten in die Wirklichkeit, nämlich auf (nichtleere) ontologische Sorten projiziere. - Dieser Einwand ist nicht ohne Berechtigung. Allgemein gilt, daß die Sprache die Phänomene enthält, denen die Ontologie gerecht zu werden sucht, so wie unsere alltägliche Erfahrung die Phänomene liefert, die die Physik theoretisch durchdringen will; wie die Erfahrung für die Physik, so ist die Sprache für die Ontologie die wesentliche Begründungsbasis;[5] aber ebensowenig wie die Erfahrung in ihrer Objektivität unkritisierbar ist, ist es die Sprache: in der Erfahrung und in der Sprache treten täuschende Phänomene auf, die die objektiven Fakten verstellen, nicht zeigen. Insbesondere entspricht der sprachlichen Kategorie der Namen keine ontologische Kategorie (analog entspricht der wahrgenommenen Bewegung der Sonne um die Erde keine wirkliche Bewegung); mit einem Namen läßt sich nämlich alles Seiende benennen, gleichgültig welcher ontologischen Kategorie es angehört. Die Kategorie der Namen ist allein durch deren semantische Funktion konstituiert, nämlich der Bezugnahme zum Zwecke der Prädikation.

Es ist der zentrale ontologische Fehler Freges, dies nicht erkannt zu haben; er meinte, alles, was ein Name bezeichnet, sei ein *Gegenstand* (und daher kein "Begriff", d.h. keine *Eigenschaft oder Relation*), was ihn in die Schwierigkeit brachte das, was der Name "der Begriff *Pferd*" bezeichnet, einen Gegenstand nennen zu müssen; "eine freilich unvermeidbare sprachliche Härte", sagt Frege (siehe "Über Begriff und Gegenstand", S.170). Aber schlimmer: es führte ihn dahin, das, was die Namen "1", "2", "3" etc. bezeichnen, d.h. Zahlen in *Grundgesetze der Arithmetik* als Gegenstände aufzufassen, während sie doch seiner sorgfältigen Argumentation in *Die Grundlagen der Arithmetik* nach Eigenschaften (2. Stufe) sind. Wäre Frege in den *Grundgesetzen* diesem letzteren Gedanken gefolgt, so wäre ihm, da er bzgl. Attributen die (von ihm selbst entdeckte) Typenunterscheidung einhielt, Russells Brief vom 16.6.1902 erspart geblieben.

Nominalisten haben freilich nicht die Kategorie der Namen im Auge, sondern vielmehr die Kategorie der Prädikate (Prädikate im logischen Sinn gehen aus Sätzen durch Ersetzung von Namen durch Markierungsvariablen hervor)[6]. Der realistische Ontologe, sagen sie, nehme naiverweise, d.h. unbegründeterweise an, der fundamentalen sprachlichen Kategorie der Prädikate entspreche die fundamentale ontologische Kategorie der *Universalien*[7] oder Attribute; in Wahrheit aber gebe es keine Universalien (die Sorte der Attribute ist demnach keine fundamentale Sorte des Seienden).

Der Nominalist sieht sich aber mit folgender Schwierigkeit konfrontiert: Der Satz "Rot ist eine Farbe" ist unbezweifelbar wahr; folglich muß der in ihm vorkommende Name "Rot" etwas bezeichnen (wie könnte der Satz sonst im Sinne der Korrespondenztheorie der Wahrheit wahr sein?)[8]; was sonst als eine Universalie sollte das aber sein? - Folglich gibt es Universalien.

An diesem Satz hätte übrigens auch Frege einsehen können, daß seine Auffassung, daß jeder Name einen Gegenstand bezeichnet, falsch ist; nach ihr müßte die Farbe Rot - das, was der Name "Rot" bezeichnet - ein Gegenstand sein; aber Farben sind nun einmal keine Gegenstände, sie bedürfen eines Trägers, sind "ungesättigt", wie Frege sagt. Ebenso müßte das, was der Name "Gerechtigkeit" (der z.B. in "Gerechtigkeit ist eine Tugend" vorkommt) bezeichnet: die Tugend der Gerechtigkeit, nach Freges Auffassung ein Gegenstand sein; aber Tugenden sind keine Gegenstände. - Man beachte, daß der Satz "Drei ist eine Primzahl" genau denselben Charakter hat wie "Rot ist eine Farbe" und "Gerechtigkeit ist eine Tugend"; wenn es - gelinde gesagt - nicht selbstverständlich ist, daß Rot und Gerechtigkeit Gegenstände sind, warum sollte dann die Auffassung unvermeidlich sein, daß Drei ein Gegenstand ist? Frege freilich konnte sich von ihr nicht befreien: Wittgenstein fragte ihn einmal, ob er nicht jemals eine Schwierigkeit in seiner Theorie finde, daß Zahlen Gegenstände sind. Frege antwortete: "Manchmal scheint es, daß ich eine Schwierigkeit sehe, - aber dann wiederum sehe ich sie nicht." (Erzählt in *Three Philosophers*, S. 130; Wittgensteins Gründe für seine Frage dürften freilich andere gewesen sein, als sie nach unseren Überlegungen naheliegen.)

Der oben angeführten Schwierigkeit begegnet der Nominalist mit der folgenden Strategie: "Rot ist eine Farbe" sei nur eine mißverständliche Weise, das zu sagen, was "Alles, was rot ist, ist farbig" auch ausdrückt, und so in allen ähnlich liegenden Fällen. Nach der Übersetzungsregel, die dieser Strategie zugrundeliegt, müßte dann aber auch der falsche Satz "Farbigkeit ist eine Farbe" wahr sein, denn der Satz "Alles, was farbig ist, ist farbig" ist wahr.[9] Es handelt sich hier also bei näherem Zusehen gar nicht um eine allgemein anwendbare Strategie, sondern vielmehr um eine bloße Ad-hoc-Konstruktion. Über derartige Ad-hoc-Konstruktionen zur Überwindung von Schwierigkeiten für ihre Position sind die Nominalisten bislang nicht hinausgekommen. Letztlich wird sich ein Nominalist von diesen Schwierigkeiten nur durch die Leugnung der Korrespondenztheorie der Wahrheit befreien können, was aber neue Schwierigkeiten schafft.

Hier wird davon ausgegangen, daß es Universalien gibt und daß Prädikate Universalien ausdrücken (oder besser "intendieren" , falls man das Wort "ausdrücken" so versteht, daß Prädikate nur ihre Bedeutung ausdrücken; die Bedeutung eines Prädikats ist ja mit der Universalie, die ihm semantisch entspricht, noch nicht erschöpft). Der fundamentalen sprachlichen Kategorie der Prädikate entspricht also die fundamentale ontologische Kategorie der Universalien (der Attribute; der Eigenschaften und Relationen).

Für die Existenz von Sachverhalten läßt sich ein ähnliches Argument angeben wie für die Existenz von Universalien: Man betrachte den Satz "Daß es blaue Nelken gibt, ist falsch"; dieser Satz ist wahr; folglich muß der in ihm vorkommende Name "daß es blaue Nelken gibt" etwas bezeichnen (wie könnte der Satz sonst wahr sein?); was sonst als ein Sachverhalt sollte das aber sein? - Folglich gibt es Sachverhalte. (Falls man einwendet, "daß es blaue Nelken gibt" sei kein Name, so ist dazu zu sagen, daß im logischen Sinne alles ein Name ist, das in einem singulären quantorenfreien Satz Subjektsposition einnimmt; zur Auffassung von "daß"-Ausdrücken als Namen vergl. G. Bealer, *Quality and Concept*, S. 24f.)[10] Hier wird davon ausgegangen, daß Sätze Sachverhalte intendieren. Der fundamentalen sprachlichen Kategorie der Sätze entspricht also die fundamentale ontologische Kategorie der Sachverhalte.[11]

Dafür, daß eine Entität ein Gegenstand *im weitesten Sinne* ist, ist nicht hinreichend, daß sie durch einen Namen bezeichnet wird, wie Frege meinte, sondern vielmehr ist es hinreichend (und notwendig), daß sie weder ein Sachverhalt noch eine Universalie ist, wenn wir Gegenstände auf *ontologisch immanente* Entitäten beschränken; daneben mag es noch "ganz andere" *ontologisch transzendente* Entitäten geben (siehe den Epilog), die als solche weder

Sachverhalte noch Universalien noch Gegenstände sind. (Die ontologisch immanenten Entitäten zerfallen in Sachverhalte, Individuen und Universalien.) - Statt "Gegenstand" kann man auch "Individuum" sagen. - Daß es Gegenstände gibt, läßt sich schlecht bezweifeln, denn der Bezweifelnde müßte dann bezweifeln, daß er ein Gegenstand ist. Die Kategorie der Gegenstände ist eine fundamentale Sorte des Seienden, denn weder ein Sachverhalt noch eine Universalie, aber ontologisch immanent zu sein, ist gewiß eine fundamentale (wenn auch weitestgehend negative) Bestimmung, die von einem Seienden ausgesagt werden kann. Man kann aber nicht sagen, daß diese Kategorie sich in der Kernstruktur der Sprache spiegelt, wie wir gesehen haben; es sei denn in dieser Weise: Kein Satz und kein Prädikat intendiert einen Gegenstand; es gibt aber Namen, die Gegenstände bezeichnen (Bezeichnen ist die Weise, in der Gegenstände intendieren); diese Namen sind gewissermaßen die fundamentalen Namen. *Fundamentalnamen* (wie auch immer dieser Begriff rein syntaktisch zu präzisieren wäre; in einer künstlichen Sprache ist es kein Problem) bezeichnen stets Gegenstände (und sind somit die sprachlichen Korrelate von ihnen): das ist der korrekte Kern von Freges Behauptung, daß Namen Gegenstände bezeichnen ("bedeuten" sagt er).

Innerhalb der Gegenstände werden in diesem Buch nur gewisse Distinktionen näher verfolgt (siehe Kap. 11 und Kap. 12 des 2. Teils und Kap. 11 - Kap. 13 des 3. Teils). Viele weitere dort machbaren Unterscheidungen (z.B. *abstraktes Individuum, individuelles Akzidenz, Ereignis*) sind gewiß auch der näheren Untersuchung werte fundamentale Unterscheidungen bzgl. des Seienden. Es wird hier aber keine vollständige Ontologie angestrebt. - Die Universalien werden grundbegrifflich nur nach ihrem Typ unterschieden (danach wieviele Entitäten (maximal) von welchen Sorten in welcher Reihenfolge die jeweilige Universalie "sättigen"), die Sachverhalte grundbegrifflich überhaupt nicht; aber - wie sich zeigen wird - lassen sich eine Fülle weiterer Unterscheidungen bzgl. der Universalien und der Sachverhalte unter Verwendung auch der übrigen Grundbegriffe definitorisch einführen.

Wie die Sättigung (Prädikation) eines Prädikats mit (von) Namen ein Satz ist, so ist die *Sättigung einer Universalie* mit Entitäten in der durch ihren Typ vorgeschriebenen Weise ein Sachverhalt; wie das Resultat der Extraktion von Namen aus einem

Satz ein Prädikat ist, so ist das Resultat der *Extraktion von Entitäten* aus einem Sachverhalt eine Universalie, deren Typ sich aus den Sorten der extrahierten Entitäten und der Weise der Extraktion ergibt. Dies ist - grob gesagt - das Verhältnis zwischen Sachverhalten und Universalien. Universalien sind sozusagen Sachverhaltsschalen (-formen), entkernte Sachverhalte, aus denen man durch Auffüllung der geordneten Leerstellen die Sachverhalte wieder zurückgewinnen kann. - All das ist natürlich nur ein Bild; aber die genetisch-operationale metaphorische Sprechweise läßt sich in präzise ontologische Gesetze vereigentlichen.

Betrachten wir einstellige Universalien von Individuen, d.h. Eigenschaften im engeren Sinn. - Was sind die Bilder, die man sich in der Tradition von diesen Entitäten (den vertrautesten unter allen Universalien) machte? - Nach Platon haben sie ontologischen Vorrang gegenüber den Individuen, welche nur als ihnen ähnliche Schatten gelten; nach Aristoteles haben umgekehrt die Individuen ontologischen Vorrang gegenüber den Eigenschaften, welche nur von den Individuen abgezogene (abstrahierte) "Schatten" sind. (Wie Platon geht aber auch Aristoteles vom *epistemologischen* Vorrang der Eigenschaften gegenüber den Individuen aus.) Auch aus Freges Bild von Eigenschaften als "ungesättigte" (unvollständige) Entitäten gegenüber Individuen als "gesättigte" (vollständige) Entitäten läßt sich eine Theorie des ontologischen Vorrangs von Individuen gegenüber Eigenschaften herauslesen. - Hier aber wird von der fast vollständigen ontologischen Gleichberechtigung von Individuen und Eigenschaften ausgegangen. Die Rolle, die Individuen gegenüber Eigenschaften spielen (eine Eigenschaft "entsteht", indem aus einem Sachverhalt ein Individuum extrahiert wird), spielen Eigenschaften gegenüber anderen Universalien; die Individuen sind gegenüber Eigenschaften und allen anderen Universalien nur insofern ausgezeichnet, als sie - wenn überhaupt die Operation der Extraktion auf sie anwendbar ist - Objekt der Extraktion sind, ohne ihre Produkt zu sein, was für keine Universalie gilt.

Ob die Extraktion eine (sprachlich objektivierte) kreative Leistung des menschlichen Geistes ist, oder nur nachvollzieht, was im Seienden an sich gegeben ist, soll hier offenbleiben. Wenn die These des *schwachen Realismus* in der Behauptung besteht, daß es Universalien gibt (dafür haben wir argumentiert), so entscheidet sich in der Beantwortung der angesprochenen Frage, ob über den schwachen Realismus hinaus ein *Konzeptualismus* anzunehmen ist, oder aber ein *starker Realismus*. Dabei ist zu beachten: Wenn man an sich gegebene Objekte der Extraktion annimmt, wie man es bzgl. gewisser Individuen gewöhnlich tut, so muß man auch objektiv gegebene Produkte der Extraktion annehmen; wenn Eigenschaften keine an sich gegebenen Produkte der Extraktion sind, so sind auch Individuen keine an sich gegebenen Objekte von ihr.

Mit den Individuen haben Sachverhalte gemeinsam, daß sie Objekt der Extraktion sind, ohne ihr Produkt zu sein (aus Sachverhalten sind auch Sachverhalte extrahierbar, aber bei keiner Extraktion entsteht ein Sachverhalt, sondern stets eine Universalie); jedoch allein Sachverhalte sind *Grundlage* der Extraktion. Wir können demnach festhalten: *Sachverhalte sind Grundlage und Objekt der Extraktion, aber nicht Produkt; Gegenstände sind (höchstens) Objekt der Extraktion, aber weder Grundlage noch Produkt; Universalien sind Objekt und Produkt der Extraktion, aber nicht Grundlage.*

Abstraktion ist Extraktion; also sind die abstrakten Entitäten die Produkte der Extraktion, d.h. die Universalien; Sachverhalte und Individuen sind dagegen nicht abstrakte Entitäten, da sie nicht Produkte der Extraktion sind. Im Sinne anderer Bestimmungen von "abstrakt" als der hier gegebenen ("abstrakt ist, was Produkt der Abstraktion, d.h. der Extraktion ist"), können natürlich gewisse Sachverhalte und Individuen "abstrakt" (z.B. im Sinne von "nichtkonkret") sein. Die Beispiele, die man gewöhnlich für abstrakte Individuen angibt: Zahlen und Mengen, sind allerdings unglücklich gewählt, denn Zahlen und Mengen sind keine Individuen, sondern Universalien.[12] (Zu anderen Bestimmungen des Begriffs der Abstraktheit und deren Schwierigkeiten vergl. W. Künne, *Abstrakte Gegenstände*, Kap. 2; Künne gebraucht das Wort "Gegenstand" im Sinne von "Entität".)

Von den Sachverhalten, Gegenständen und Universalien sind einige wichtiger für uns als andere. Das zeigt sich in der Sprache; auf gewisse Entitäten können wir – so wie die Sprache zum gegebenen Zeitpunkt ist – uns mit einfachen Ausdrücken beziehen, auf andere nur mit komplexen, auf wieder andere überhaupt nicht. Entitäten, für die wir einfache Ausdrücke haben, sind gewiß epistemologisch ausgezeichnet; ob die epistemologische Auszeichnung aber auf einer ontologischen gründet, oder sich einfach aus unseren Lebensinteressen und der Organisation unseres kognitiven Apparats ergibt, das sei dahingestellt. (Eine dezidierte Auffassung zugunsten einer ontologischen Fundierung der epistemologischen Auszeichnung von Eigenschaften und Relationen vertritt G. Bealer in *Quality and Concept*, S.177ff.) Ganz gewiß kann man aus der Einfachheit von Ausdrücken nicht auf die ontologische Einfachheit der ihnen entsprechenden Entitäten schließen. - In diesem Buch wird dargelegt werden, in welchem Sinn von "einfach" ("unzusammengesetzt") es einfache Sachverhalte und einfache Universalien gibt; diesen Entitäten entsprechen aber gerade überhaupt keine umgangssprachlichen Ausdrücke, also auch keine einfachen.

Die Ontologie ist eine Fundamentalwissenschaft und also ein Teil der Philosophie - der Gesamtheit aller Wissenschaften, die sich mit fundamentalen Fragen beschäftigen. (Was vielfach als "Grundlagenforschung" bezeichnet wird, ist freilich häufig keine Grundlagenforschung im hier gemeinten Sinn.) Die Natur einer Fundamentalwissenschaft ist anders als die einer Wissenschaft, die keine ist (z.B. einer Naturwissenschaft); sie bedingt eine Erscheinung, die gemeinhin als Übel empfunden wird, nämlich die extreme Vielfalt unversöhnlich konträrer Ansichten bzgl. desselben Gegenstandes, von denen sich keine einzige jemals definitiv durchsetzt. Wie Franz von Kutschera einmal bemerkte, darf man nicht fragen "Was sagt *die* Ethik zur Begründung von Normen?" (so wie man fragt "Was sagt *die* Physik zur Makromechanik?"), denn auf diese Frage gibt es keine vertretbare Antwort; man darf nur fragen "Was sagt der und der Ethiker zur Begründung von Normen?". Entsprechend verhält es sich mit der Ontologie. - Es wäre unberechtigt, daraus den Schluß zu ziehen, daß es bzgl. der Gegenstände, mit denen sich diese Wissenschaften beschäftigen, keine Erkenntnis gibt und darum sie selbst reichlich nutzlose Unternehmungen sind. Legitimerweise kann man nur feststellen, daß es in diesen Wissenschaften sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich ist, zu einem Konsensus zu kommen. Eine historisch bedingte krisenhafte Erscheinung mag es sein, daß es heute in den Fundamentalwissenschaften weder allgemein anerkannte Methoden der Erkenntnisgewinnung noch allgemein anerkannte Maßstäbe zur Beurteilung von Erkenntnisansprüchen gibt; nicht einmal der Kanon der formalen Logik wird allgemein anerkannt. Aber es liegt in der Natur einer Fundamentalwissenschaft, daß sie sich um Erkenntnisse bemüht, die (absolut) "am Anfang stehen", und wie anzufangen ist, läßt sich nicht eindeutig ausmachen, auch dann nicht, wenn man in den Fundamentalwissenschaften über ein methodologisches Paradigma verfügte (was gegenwärtig nicht der Fall ist). Überspitzt formuliert: Am Anfang ist alles offen. Aus diesem Grunde spielt das Moment der theoretischen Entscheidung, wenngleich es auch in den anderen Wissenschaften, die viel mehr unhinterfragt voraussetzen, keineswegs abwesend ist, in den Fundamentalwissenschaften eine unvergleichlich größere Rolle als in allen anderen Wissenschaften. Demnach entscheidet sich der eine Fundamentalwissenschaftler "frei" für diesen Ansatz, der andere für jenen; der eine Ontologe behauptet "Es gibt Universalien", der andere verneint dies; der eine Ethiker behauptet "Es gibt objektive Normen", der andere verneint dies. Proponent und Opponent bringen auch durchaus Argumente für ihre jeweiligen Thesen vor; niemals jedoch werden diese die eine oder die andere These unwidersprechlich auszeichnen (auch nicht, wenn man von einer gemeinsamen methodologischen Basis aus argumentiert), so wie es die einschlägigen Argumente im Rahmen der zugehörigen Wissenschaften bei "2+2=4" oder "Die Erde bewegt sich um die Sonne" tatsächlich tun. Und so halten Opponent und Proponent an ihrer jeweiligen Position fest, weil sie sich eben für sie entschieden haben und diese Entscheidung im Rahmen ihrer Wissenschaft nicht hinreichend als unvernünftig erweisbar ist.

In viel stärkeren Maße als andere wissenschaftliche Theorien sind fundamentalwissenschaftliche nur als ein Ganzes beurteilbar. Bei dieser Beurteilung als ein Ganzes wird man (bei gemeinsamer methodologischer Basis!) immerhin zu der Feststellung kommen können, daß die eine fundamentalwissenschaftliche Theorie *befriedigender* sei als die andere; pragmatische und ästhetische Gesichtspunkte (Einfachheit) sind aber dabei gegenüber rein theoretischen ein weitaus wichtigerer Faktor als bei der Beurteilung anderer Theorien. (Über die Gewichtung außertheoretischer Gesichtspunkte der Beurteilung kann man natürlich methodologisch sehr leicht geteilter Meinung sein.)

Das Prima-facie-Interesse an ihrem Gegenstand vorausgesetzt, *soll* man sich mit Ontologie befassen? Diese Frage kann in verschiedener Weise verstanden werden:

(1) *Ist es intellektuell befriedigend, sich mit Ontologie zu*

befassen? - Ontologische Probleme sind schwierig und komplex und bieten dem menschlichen Geist genügend Stoff zur erkennenden Anstrengung. Zwar sind die Lösungen, die gewonnen werden, gewiß nicht unangreifbar wie in der Mathematik, aber ähnlich wie mathematische Theorien eignen sich ontologische Theorien besonders zur axiomatischen Darstellung. Zweifelsohne ist die Ontologie eine äußerst trockene und abstrakte Wissenschaft, was aber nicht heißt, daß sie phantasielos und mechanisch ist.
(2) *Ist es für das Leben nützlich, sich mit Ontologie zu befassen?* - Die Ontologie betrachtet die Welt (anders als die Mathematik ist sie *welthaltig*), aber sozusagen nur deren Skelett nach. D.h. unsere Lebensprobleme bleiben in ihr ausgeklammert, und bei der Lösung dieser Probleme wird sie uns unmittelbar nicht helfen. Sie hat auch keine Anwendungen im technischen Bereich wie die Naturwissenschaften (was den Vorteil hat, daß sie keinen Schaden anrichten kann). Die Beschäftigung mit Ontologie vermag jedoch intellektuelle Freude zu bereiten, und das kann für das Leben nützlich sein, indem es stärkt.
(3) *Ist es moralisch vertretbar, sich mit Ontologie zu befassen?* - Man könnte argumentieren, daß es moralisch verwerflich sei, seine Kraft und seine Zeit in eine in praktischer Hinsicht nutzlose Wissenschaft zu investieren. Dem ist entgegenzuhalten, daß die Ontologie in praktischer Hinsicht nicht nutzlos ist; ontologische Reflexionen tragen zur Klarheit über gewisse Begriffe in Mathematik, Ethik und Naturwissenschaften (z.B. *Zahl*, *Handlung*, *Kausalität*) bei und so zu besseren Theorien in diesen Gebieten; daß aber Mathematik, Ethik und Naturwissenschaften für die Praxis relevant sind, ist unbestritten. Wenn die ethische Theorie eines Philosophen dadurch besser wird, daß er sich vorher mit Ontologie beschäftigt hat, so ist dies eine hinreichende moralische Rechtfertigung für diese Beschäftigung. Im übrigen ist die Beschäftigung mit Ontologie sicherlich nicht verwerflicher als Sport zu treiben oder Kunst zu machen; auch bzgl. dieser Tätigkeiten könnte man ja moralisieren: "Es gibt doch Wichtigeres!" Jeder, der die Neigung, die Muße und das Auskommen hat, sich den Tätigkeiten zu widmen, die eines freien Menschen würdig sind, muß freilich damit leben, daß er gegenüber den meisten Menschen ein Privileg genießt.
(4) *Ist es wissenschaftlich nützlich, sich mit Ontologie zu befassen?* - Jeder Mensch ist gezwungen zu fundamentalen Fragen,

z.B. aus Ethik und Ontologie, eine Haltung einzunehmen. Gewöhnlich geschieht dies auf eine unreflektierte, heteronome implizite Weise - bzgl. der ontologischen Fragen noch mehr als bzgl. der ethischen. Die Ontologie, mit der sie leben, ist den meisten Menschen ein solche Selbstverständlichkeit, daß sie ihr ganzes Leben lang keinen einzigen Gedanken an sie verschwenden. Die Philosophie aber führt zur geistigen Freiheit, indem die Beschäftigung mit ihr lehrt, nichts unbesehen zu akzeptieren; gerade bei den fundamentalen Fragen neigt man ja dazu, die durch Sprache, Tradition und gesellschaftliche Gruppe gegebene Antwort unbesehen, in Unkenntnis der Alternativen, quasi bewußtlos zu übernehmen. Die Philosophie kann dort keine zwangsläufigen Antworten geben; das Moment der Entscheidung ist unaufhebbar; aber gerade dies macht die Beschäftigung mit ihr bewußt und ermöglicht dadurch die Entscheidung in Freiheit, in Kenntnis dessen, auf das man sich einläßt, in Kenntnis des Für und Wider. Sollte man dann in seiner Entscheidung einmal erschüttert werden, so wird man, durch die Schule der Philosophie gegangen, auch nicht hilf- und orientierungslos dastehen. - Als Teil der Philosophie leistet die Ontologie ihren Beitrag zur geistigen Souveränität des Menschen.

Anmerkungen:

[1]Wenn wir hier von "der Sprache" sprechen, so handelt es sich um den idealisierten deskriptiven Teil der Umgangssprache; idealisiert, da ohne Vorkommnisse von Vagheit, Mehrdeutigkeit und pragmatischer Kontextabhängigkeit.

[2]Die Korrespondenz zwischen Sprachstruktur und Wirklichkeitsstruktur läßt zwei Deutungen zu: *Die Struktur der Wirklichkeit wird in die Sprache projiziert. - Die Struktur der Sprache wird in die Wirklichkeit projiziert.* Die erste Deutung - die "realistische" - wird hier vertreten; die zweite Deutung - die "relativistische" - wird von der linguistischen Relativitätsthese von Sapir und Whorf impliziert: "... the 'linguistic relativity principle', which means, in informal terms, that users of markedly different grammars are pointed by their grammars toward different types of observations and different evaluations of externally similar acts of observation, and hence are not equivalent as observers but must arrive at somewhat different views of the world." (B. L. Whorf, zitiert in F. v. Kutschera, *Sprachphilosophie*, S. 301; dort auf den Seiten 289 bis 344 eine eingehende Behandlung des Themas "Sprache und Wirklichkeit".) - Der Unterschied zwischen beiden Deutungen ist nicht so groß, wie er scheint. Wenn die relativistische Deutung richtig ist, so müssen wir sagen, daß die Struktur, die unsere Sprache - Indoeuropäisch - der Wirklichkeit aufprägt, eine solche ist, daß wir - unbestreitbar - zu weitreichenden Erkenntnissen über die Wirklichkeit (siehe die Physik) kommen können. (Nach der linguistischen Relativitätsthese müßte gelten: die anderen Leute mit in der Kernstruktur anderen Sprachen - aber gibt es wirklich solche Leute mit solchen Sprachen? - gelangen nicht zu solchen Erkenntnissen und können es mit ihren Sprachen auch nicht.) Wie könnte das aber der Fall sein, wenn nicht die aufgeprägte Struktur sich weitgehend deckte mit der *objektiv vorhandenen* (die nach realistischer Auffassung in die Sprache projeziert wird)? - Bei beiden Deutungen kommt also heraus: Die Sprachstruktur spiegelt die objektiv vorhandene Wirklichkeitsstruktur. - Dem kann man nur den Skeptizismus entgegenhalten: Es gibt keine objektive Erkenntnis; jede Mythologie ist so akzeptabel wie die "Erkenntnisse" der Physik.

[3]Vergl. dazu L. Borkowski, *Formale Logik*, S. 435ff (dort Literaturhinweise). Die Bezeichnung stammt ursprünglich von Quine; sie braucht nicht auf mengentheoretische Systeme beschränkt zu werden. Bei einer Standardtheorie der Typen handelt es sich um eine Theorie, bei der Typenunterschiede nicht in die Syntax der Sprache inkorporiert sind (sie ist eine prädikatenlogische Sprache 1. Stufe), sondern explizit durch Prädikate ausgedrückt werden.

[4]Bealers Polemik gegen die Mengenlehre ist erfrischend und substantiell, aber sein Urteil "while this new kind of sum [die Menge im Sinne der Mengenlehre] is formally constructible, it has absolutely no place in nature or in logic, and there is no call to introduce it into mathematics or empirical science" ("Foundations without Sets", S. 335) ist unsinnig in seiner Maßlosigkeit.

[5]D. M. Armstrong schreibt in *Universals and Scientific Realism*, Bd. 1, S. 65: "There is a long but, I think, on the whole discreditable tradition which tries to settle ontological questions on the basis of semantic considerations". Daß es eine solche Tradition gibt, ist kein Zufall; die ontologischen Gegebenheiten spiegeln sich eben in den sprachlichen - wenn auch manchmal verzerrt. Trotz dieser Verzerrungen, warum ist die semantische Tradition "on the whole discreditable"? - Es ist anzuzweifeln, daß die Naturwissenschaft eine bessere Basis für die Ontologie ist als die Semantik, wie Armstrong meint (siehe *Universals and Scientific Realism*, Bd. 1, S. xivf); die Erkenntnisse der Naturwissenschaften - auch der Quantenphysik - dürften in den meisten Fällen schon zu speziell sein, um für die Ontologie relevant zu sein. Natürlich ist auch sie, soweit sie reicht, als ontologische Erkenntnisquelle recht; aber es besteht kein Grund, zu ihren Gunsten die semantische Erkenntnisquelle aufzugeben.

[6]Zu dieser Bestimmung von Prädikaten vergl. A. Breitkopf/F. v. Kutschera, *Einführung in die moderne Logik*, S. 75.

[7]Bealer nennt auch Sachverhalte (*propositions*) "Universalien" (siehe *Quality and Concept*, S. vii). Dieser Sprachgebrauch ist unhistorisch. - D. Lewis dagegen macht in "New Work for a Theory of Universals", S. 344ff einen Unterschied zwischen (*monadic and polyadic*) *universals* und *properties*; letztere sind für ihn Klassen von n-Tupeln - n > 0 - von Possibilia (auch *relations* sind also *properties*); *universals* jedoch die Entitäten, die D. M. Armstrong in seinem Buch *Universals and Scientific Realism* so nennt; ihnen entsprechen nach Lewis *natural properties*. - Die Entitäten, die wir hier "Universalien" nennen, verhalten sich der Instantiierung nach ähnlich wie Armstrongs *universals*, der Häufigkeit aber so wie lewissche *properties* (Lewis unterscheidet zwischen *universals* and *properties* vor allem im Hinblick auf Instantiierung und Häufigkeit).

[8]Nominalisten unterstellen Universalienrealisten gelegentlich die primitive semantische Auffassung, daß jeder sprachliche Ausdruck ein Name sei; fälschlicherweise faßten die Universalienrealisten also Prädikate als Namen auf und kämen so zu der Ansicht, daß es Universalien gibt, denn Namen müssen ja auf etwas referieren (eine weitere primitive semantische Auffassung: die 'Fido'-Fido-Theorie, die Nominalisten Universalienrealisten unterschieben). Der gewandte Universalienrealist braucht demgegenüber nur darauf hinzuweisen , daß er keineswegs jeden sprachlichen Ausdruck als Namen ansieht; Prädikate sind keine Namen; zweifellos aber *gibt es* Namen für Universalien; von einem Namen kann man, wenn er mit einem einfachen Prädikat einen wahren Satz bildet, mit gutem Grund annehmen, daß er auf etwas referiert. Dem Nominalisten obliegt es zu zeigen, daß dies - entgegen dem überwältigenden Anschein - bei den Universaliennamen nicht der Fall ist. - Wenn man aus der Wahrheit von "Rot ist eine Farbe" und "Daß es blaue Nelken gibt, ist falsch" (siehe unten) bei Voraussetzung der Korrespondenztheorie der Wahrheit darauf schließen muß, daß "Rot" und "daß es blaue Nelken gibt" auf etwas referieren, muß man dann auch aus der Wahrheit von "Das runde Quadrat existiert nicht" darauf schließen, daß "das runde Quadrat" auf etwas referiert (auf ein meinongsches unmögliches Objekt)? - Der letzte Beispielsatz hat dadurch einen anderen Charakter als die beiden übrigen,

daß der in ihm vorkommende Name eine Kennzeichnung ist, deren Normalbedingung nicht erfüllt (-bar) ist; daher hat man die Möglichkeit, den Satz im Rahmen einer Kennzeichnungstheorie so zu lesen, daß er wahr ist, ohne daß "das runde Quadrat" auf etwas referiert. "Rot" und "daß es blaue Nelken gibt" sind dagegen eindeutig keine Kennzeichnungen; man kann sie auch nicht als *truncated descriptions* ansehen, wie dies Russell für die Behandlung von "Romulus" in "Romulus did not exist" vorschlägt (siehe "The Philosophy of Logical Atomism", S. 213).

[9]Vergl. hierzu W. Künne, *Abstrakte Gegenstände*, Kap. 3, §6. Siehe auch D. Lewis, "New Work for a Theory of Universals", S. 348f. Das Problem, das sogenannte *abstrakte singuläre Terme* für den Nominalisten darstellen, wird eingehend von M. J. Loux in "The Existence of Universals", S. 16ff diskutiert; ebenso von D. M. Armstrong in *Universals and Scientific Realism*, Bd. 1, S. 58ff.

[10]In "The Philosophy of Logical Atomism", S. 167 behauptet Russell (sich auf Wittgenstein berufend) "propositions are not names for facts". *Propositions* sind dabei für Russell einerseits selbständige (Behauptungs-) Sätze (bzgl. derer hat Russell recht), andererseits "daß"-Sätze (Nebensätze im Sinne der traditionellen Grammatik, die *wir* hier als logische Namen für Sachverhalte - und darum gegebenenfalls für Tatsachen - ansehen); vergl. ebd. S. 165. Auf S. 168 sagt er "You cannot properly name a fact". Russell gibt keinen befriedigenden Grund dafür an: "The only thing you can do is to assert it, or deny it, or desire it, or will it, or wish it, or question it, but all those are things involving the whole proposition. You can never put the sort of thing that makes a proposition to be true or false in the position of a logical subject. You can only have it there as something to be asserted or denied or something of that sort, but not something to be named". Aus diesem Stück konfuser Rhetorik wird jedenfalls klar, daß es ein Pronomen ("it") für Tatsachen gibt; warum dann nicht auch Namen? Auf S. 178 sagt Russell "You cannot name anything you are not acquainted with". - Wenn wir mit überhaupt etwas bekannt sind, dann sind wir es auch mit Tatsachen; anderes kennen wir nur über Tatsachen, in denen es vorkommt. Nach Russels eigener Theorie des Benennens sind Tatsachen also im hervorragenden Sinne benennbar. Weiter sagt Russell (S. 179) "The only words one does use as names in the logical sense are words like `this' or `that'"; aber diese Worte kann man als Namen für Tatsachen verwenden; man sagt doch "This is a fact".

[11]Daß Prädikate und Sätze bedeutungsvoll, oder besser *signifikant* sind, zwingt nicht zu der Auffassung, daß sie *etwas* bedeuten, daß es also Bedeutungen gibt; darauf weist Quine in "On what there is", S. 35 hin. Wir nehmen hier aber jedenfalls an, daß Sätze und Prädikate im Rahmen ihrer Signifikanz *etwas* intendieren (nämlich Sachverhalte im Fall von Sätzen, Attribute im Fall von Prädikaten); aus folgendem Grund: die Sprache bildet in ihrer Kernstruktur die ontologische Struktur der Wirklichkeit ab; anders ist es nicht zu erklären, warum sie für kognitive Zwecke brauchbar ist. - Darüber hinaus gibt es einen sehr guten Grund, *Bedeutungen* anzunehmen; denn mit dieser Annahme wird die Frage möglich, wie sich die Bedeutung eines Satzes aus den Bedeutungen seiner Teilausdrücke ergibt; d.h. der Weg zu einem kompositionellen Verständnis der Sprache wird eröffnet. Dieses Verständnis ist

ihr angemessen, denn sie ist nicht eine Liste von autonomen je für sich signifikanten Signalen, wo das Vorkommen eines Signals in einem anderen keinerlei semantische Relevanz hat, sondern ein "Gliederwerk", ein System. - D. M. Armstrong schreibt: "This argument [von bedeutungsvollem Prädikat zur Universalie als seiner Bedeutung] takes meaning to be a dyadic relation holding between expressions und what is meant, and it is now widely appreciated that this is a crude and unsatisfactory theory of meaning. What is much more difficult is to provide a satisfactory substitute" (*Universals and Scientific Realism*, Bd. 1, S. 64f). Wenn die besagte Theorie wirklich so krude und unbefriedigend ist, warum ist es dann so schwierig, einen Ersatz für sie zu finden?

[12]Aber setzen wir einmal voraus, sie wären abstrakte Individuen; dann kann man sie nicht als Universalien bezeichnen, denn kein Individuum ist eine Universalie. Es hat sich jedoch heute vielfach der Sprachgebrauch eingebürgert, wonach die bloße Abstraktheit hinreichend dafür ist, etwas als "Universalie" zu bezeichnen; danach sind dann natürlich Zahlen und Mengen kraft ihrer Abstraktheit allein Universalien. Siehe z.B. W. Stegmüller, *Das Universalienproblem einst und jetzt*. - Auch dieser Sprachgebrauch ist unhistorisch; D. Lewis nennt ihn in "New Work for a Theory of Universals", S. 343 "the modern terminoloy of Harvard", wonach "classes count as `universals'". Gemeint ist W. V. O. Quine, der in "On what there is", S. 33 schreibt: "Now let us turn to the ontological problem of universals: the question whether there are such entities as attributes, relations, classes, numbers, functions".

I. Sachverhaltsontologie

1. Grundlagen: Die Sprache PT, Zentralaxiome der Teilrelation, T und T^+

(a) Die Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität und Kennzeichnung P erweitern wir um das zweistellige Prädikat T zur Sprache PT, so daß für alle Namen, Variablen und Funktionsausdrücke τ und τ' von PT $(\tau T\tau')$ eine Satzform von PT ist (auch Sätze seien Satzformen).[1] Zur Klammerersparnis legen wir fest, daß die Bindungsstärke der aussagenlogischen Operatoren in der Reihe *non, u., o., imp., äqu.* von links nach rechts abnimmt, daß äußere (kontextfreie) Klammern weggelassen werden können und daß man (A u. B u. C) und (A o. B o. C) schreiben kann statt ((A u. B) u. C) und ((A o. B) o. C), bzw. statt (A u. (B u. C)) und (A o. (B o. C)). Auch schreiben wir $\tau=\tau'$ und $\tau T\tau'$ statt $(\tau=\tau')$ und $(\tau T\tau')$; es sei denn, solche Ausdrücke bilden den Bereich eines Quantors; dann lassen wir die Klammern der besseren Lesbarkeit halber stehen. Statt non $\tau=\tau'$ schreiben wir $\tau\neq\tau'$.

(b) "u." ist eine Abkürzung für "und", "o." eine Abkürzung für "oder" (im nichtausschließenden Sinn), "imp." eine Abkürzung für "impliziert" und "äqu." eine Abkürzung für "äquivalent". "A imp. B" bzw. "A äqu. B" liest man im losen logischen Sprachgebrauch auch als "Wenn A, dann B" bzw. "A genau dann, wenn B"; strenggenommen kann man es nur als "non A o. B" bzw. "(A imp. B) u. (B imp. A)" lesen. $\Lambda\tau$ ist eine Abkürzung für "Für alle τ" (für alle Variablen τ von PT); $V\tau$ ist eine Abkürzung für "Es gibt ein τ" oder "Für mindestens ein τ"; $V!\tau$ ist eine Abkürzung für "Es gibt genau ein τ"; $\iota\tau$ ist eine Abkürzung für "dasjenige τ".

(c) $\tau T\tau'$ liest man als "τ ist ein Teil von τ'"; "Teil" wird dabei nicht im Sinne von "echter Teil" verstanden, sondern so, daß eine Entität Teil von sich selbst ist.

Wir definieren:

DT1 $\tau T^+\tau' := \tau T\tau'$ u. $\tau\neq\tau'$
(τ ist ein echter Teil von τ'; τ,τ' etc. vertreten stets Namen, Funktionsausdrücke oder Variablen von PT)

und legen als Zentralaxiome bzgl. des Begriffs T die folgenden Sätze fest:

AT1 $\wedge x \wedge y \wedge z$(xTy u. yTz imp. xTz)

AT2 $\wedge x$(xTx)

AT3 $\wedge x \wedge y$(xTy u. yTx imp. x=y)

AT1 behauptet die Transitivität der Teilbeziehung, AT2 ihre Reflexivität und AT3 ihre Antisymmetrie: Was Teil von etwas ist, das Teil eines weiteren ist, das ist auch Teil von diesem; jedes ist Teil von sich selbst; was voneinander Teil ist, das ist miteinander identisch. Diese drei Axiome führen den Titel "Zentralaxiome" zurecht, denn ihre Geltung ist unabhängig vom Grundbereich der Sprache PT, so wie es auch die Geltung der logischen Identitätsaxiome ist; ihre Geltung beruht allein auf dem beabsichtigten Sinn des Prädikats T (und der logischen Konstanten), ist also analytisch.[2]

(d) Den Grundbereich der Sprache PT lassen wir freilich nicht unbestimmt. Da wir zunächst die Sachverhaltsontologie als eine Teil-Ganzes-Theorie aufbauen wollen, legen wir als Grundbereich von PT die Gesamtheit aller Sachverhalte fest.[3] Es wird sich zeigen, daß allein hierdurch in PT noch drei weitere Axiome bzw. Axiomenschemata bzgl. T formulierbar werden. *Diese* Sätze bzw. Satzschemata gelten nun aber nicht analytisch, sondern höchstens ihre Entsprechungen, die man aus ihnen erhält, wenn man sie mithilfe des Begriffs "ist ein Sachverhalt" auf Sachverhalte relativiert. Den genannten Begriff führen wir jedoch vorläufig noch nicht ein; wir wollen vielmehr zunächst mit dem Axiomensystem AT1 - AT6 ein System angeben, das mancherlei Deutung fähig ist, wenn auch die primäre Deutung die als *fundamentale* Sachverhaltsontologie sein soll. Dementsprechend wird bereits bei der Auffindung der Axiome häufig von der heuristischen Annahme Gebrauch gemacht, daß der Grundbereich die Menge der Teilmengen einer Menge sei.

(e) Aus den Zentralaxiomen erhält man mit DT1:

TT1 $\wedge x \wedge y \wedge z(xT^{+}y$ u. $yT^{+}z$ imp. $xT^{+}z)$
(abhängig von DT1, AT1 und AT3)

TT2 $\wedge x$ non $xT^{+}x$

TT3 $\wedge x \wedge y(xT^{+}y$ äqu. xTy u. non $yTx)$
(abhängig von DT1, AT3 und AT2)

Hätten wir T^{+} als Grundbegriff gewählt und definiert

$DT^{+}1$ $\tau T \tau' := \tau T^{+} \tau'$ o. $\tau = \tau'$,

so erhielten wir mit TT1 und TT2 *als Zentralaxiome* AT1, AT2 und AT3; AT1 wäre dabei abhängig von TT1 und $DT^{+}1$, AT2 nur von $DT^{+}1$ und AT3 von $DT^{+}1$, TT1 und TT2. Die Systeme AT1,AT2,AT3,DT1 und TT1,TT2,$DT^{+}1$ sind also deduktiv äquivalent.

Anmerkungen:

[1]Die Ausdrücke von PT (als bedeutungsvolle oder unter Absehung von ihrer Bedeutung) verwenden wir in der Metasprache als ihre eigenen Namen; aber der Deutlichkeit halber benutzen wir auch Anführungszeichen. Gelegentlich *gebrauchen* wir Ausdrücke der Objektsprache in der Metasprache (reden *mit* ihnen, nicht *über* sie). Griechische Buchstaben (bzw. andere) verwenden wir als schematische Symbole, die objektsprachliche Terme (bzw. andere Ausdrücke) vertreten, aber auch als bindbare Variablen für objektsprachliche Terme. (Beide Verwendungsweisen sind gelegentlich verquickt.)

[2]Bei AT3 könnte man diesbezüglich Zweifel anmelden. - "gilt (ist) analytisch", "ist analytisch wahr" verwenden wir als Grundprädikat (von Sätzen, und davon abgeleitet von Satzschemata) im Sinne von "ist allein aufgrund seiner Bedeutung wahr". Was gemeint ist, dürfte klar sein. Wahrheit in allen möglichen Welten ist etwas anderes als analytische Wahrheit; von letzterer kann man auch sprechen (ohne zu sagen, daß jeder wahre Satz analytisch wahr sei), wenn man nicht an mögliche Welten außer der wirklichen glaubt; und ein Satz, der analytisch wahr ist, ist in allen möglichen Welten wahr; aber ein Satz mag in allen möglichen Welten wahr sein, ohne daß er analytisch wahr ist, z.B. "Die Welt α ist wirklich" ("α" sei ein starrer Name für eine bestimmte mögliche Welt: *diese* Welt). Im 2. Teil werden wir objektsprachliche Satzoperatoren der Notwendigkeit verwenden, zunächst N, später L. Zu N gehört der metasprachliche Begriff der Wahrheit in allen möglichen Welten (wir werden auch "ontologische Wahrheit" sagen), zu L der der analytischen Wahrheit.

[3]Wir wollen uns der Verwendung mengentheoretischer Begriffe in der Metasprache - außer zu heuristischen Zwecken (inklusive Modellfindung, Mächtigkeitserwägungen) - streng enthalten. Deshalb ist "der Grundbereich von PT ist die Gesamtheit aller Sachverhalte" nur eine den üblichen Gepflogenheiten angepaßte Ausdrucksweise für "in PT wird über alle Sachverhalte und nichts sonst gesprochen".

2. Einige mithilfe von T definierte Begriffe; Theoreme bzgl. ihrer

(a) Mithilfe von T definieren wir zunächst:

DT2 $A(\tau) := \text{non } \vee y(y \neq \tau \text{ u. } yT\tau)$
(τ ist ein Atom)

Nach DT2 wird ein Atom als etwas bestimmt, das keinen echten Teil hat, d.h. nach AT2 als etwas, das nur sich selbst als Teil hat.[1]

DT3 $G(\tau) := \text{non } \vee y(y \neq \tau \text{ u. } \tau Ty)$
(τ ist ein selbständiges Ganzes)

Nach DT3 wird ein selbständiges Ganzes als etwas bestimmt, das von nichts ein echter Teil ist, d.h. nach AT2 als etwas, das nur von sich selbst ein Teil ist.

"Atom" und "selbständiges Ganzes" korrespondieren einander; wir kommen vom Definiens des einen Begriffs zum Definiens des anderen einfach durch Vertauschung von y und τ im Glied $yT\tau$. Im selben Sinn entsprechen einander auch die folgenden beiden definierten Begriffe:

DT4 $M(\tau) := \wedge y(\tau Ty)$
(τ ist ein - absolutes - Minimum)

Ein Minimum ist nach DT4 etwas, das Teil von allem ist.

DT5 $T(\tau) := \wedge y(yT\tau)$
(τ ist eine Totalität; τ ist ein - absolutes - Maximum)[2]

Nach DT5 wird eine Totalität als etwas bestimmt, von dem alles Teil ist.

(b) Mit den Zentralaxiomen und diesen Definitionen erhält man:

TT4 $\wedge x \wedge y(T(x) \text{ u. } T(y) \text{ imp. } x=y)$
(*Es gibt höchstens eine Totalität*; abhängig von AT3 und

DT5)

TT5 $\Lambda x \Lambda y(M(x) \text{ u. } M(y) \text{ imp. } x=y)$
(*Es gibt höchstens ein Minimum*; abhängig von AT3 und DT4)

TT6 $\Lambda x(T(x) \text{ imp. } G(x))$
(*Jede Totalität ist ein selbständiges Ganzes*; abhängig von AT3, DT5 und DT3)

TT7 $\Lambda x(M(x) \text{ imp. } A(x))$
(*Jedes Minimum ist ein Atom*; abhängig von AT3, DT4 und DT2)

TT8 $VxT(x) \text{ imp. } V!xG(x)$
(*Wenn es eine Totalität gibt, dann gibt es genau ein selbständiges Ganzes*; abhängig von TT6, DT5 und DT3)

TT9 $VxM(x) \text{ imp. } V!xA(x)$
(*Wenn es ein Minimum gibt, dann gibt es genau ein Atom*; abhängig von TT7, DT4 und DT2)

Die Umkehrungen von TT8 und TT9 werden bei Heranziehung der weiteren Axiome trivialerweise gelten; mit den Zentralaxiomen und Definitionen allein lassen sie sich nicht beweisen.

TT10 $VxT(x) \text{ imp. } \iota xT(x)=\iota xG(x)$
(*Wenn es eine Totalität gibt, dann ist die Totalität das selbständige Ganze*; abhängig von TT8, TT4, DT3, DT5)

TT11 $VxM(x) \text{ imp. } \iota xM(x)=\iota xA(x)$
(*Wenn es ein Minimum gibt, dann ist das Minimum das Atom*; abhängig von TT9, TT5, DT2, DT4)

TT12 $\Lambda xG(x) \text{ äqu. } \Lambda xA(x)$
(*Genau dann ist alles ein selbständiges Ganzes, wenn alles ein Atom ist*; abhängig von DT2 und DT3)

TT13 $\Lambda y\Lambda x(\Lambda z(zTy \text{ äqu. } zTx) \text{ imp. } y=x)$
(*Was dieselben Teile hat, ist identisch*; abhängig von AT2 und AT3[3])

Nach TT13 ist alles durch seine Teile vollständig bestimmt. Damit diese Konsequenz nicht inadäquat erscheine und so die Zentralaxiome problematisiere, müssen wir uns vor Augen halten, daß hier mit "Teil" dasselbe wie mit "echter oder unechter Teil" gemeint ist, wodurch die Behauptung, daß alles durch seine Teile vollständig bestimmt ist, trivialerweise wahr wird. Bestreiten kann man sie nur, wenn man "Teil" im Sinne von "echter Teil" nimmt; dementsprechend ist $\wedge y \wedge x(\wedge z(zT^{+}y$ äqu. $zT^{+}x)$ imp. $y=x)$ aus den Zentralaxiomen nicht beweisbar. Auch mit den hinzukommenden Axiomen, wenn wir die Festlegung des Grundbereichs von PT auf die Gesamtheit der Sachverhalte in Kraft treten lassen, wird dies nicht beweisbar sein.[4]

(c) Von größter Wichtigkeit für das Folgende sind die beiden Begriffe, deren Definition wir nun angeben:

DT6 QA(τ) := Λy(yTτ imp. y=τ o. M(y))
(τ ist ein Quantum)

Durch DT6 wird ein Quantum als etwas bestimmt, dessen sämtlichen echten Teile Minima sind, woraus im Blick auf TT5 folgt, daß ein Quantum höchstens einen echten Teil hat.[5] Es liegt auf der Hand, daß jedes Atom ein Quantum ist; nach TT7 ist also jedes Minimum ein Quantum.

DT7 TO(τ) := Λy(τTy imp. y=τ o. T(y))
(τ ist ein Totum)

Durch DT7 wird ein Totum als etwas bestimmt, das echter Teil nur von Totalitäten ist, woraus im Blick auf TT4 folgt, daß ein Totum echter Teil von höchstens einem Ganzen[6] ist. Offenbar ist jedes selbständige Ganze ein Totum; nach TT6 ist demnach jede Totalität ein Totum.

(d) Neben den einstelligen Begriffen, die wir definiert haben, definieren wir auch noch drei zweistellige:

DT8 HT(τ,τ') := Vz(zTτ u. zTτ')
(τ und τ' hängen über einen Teil zusammen, "überlappen")

DT9 $HG(\tau,\tau') := Vz(\tau Tz \text{ u. } \tau' Tz)$
(τ und τ' hängen über ein Ganzes zusammen)

$Vz(\tau Tz \text{ u. } zT\tau')$ bzw. $Vz(zT\tau \text{ u. } \tau' Tz)$ dagegen besagt nach AT1 und AT2 dasselbe wie $\tau T\tau'$ bzw. $\tau' T\tau$.

DT10 $H(\tau,\tau') := HT(\tau,\tau') \text{ o. } HG(\tau,\tau')$
(τ und τ' hängen zusammen)[7]

Anmerkungen:

[1]Der Begriff des Atoms ist zu unterscheiden vom Begriff des *Nonkompositums*. Ein *Kompositum* ist ein Ganzes, das mindestens zwei echte Teile hat; ein *Nonkompositum* also ein Ganzes das höchstens einen echten Teil hat. Alle Atome sind laut Definition Nonkomposita, aber alle Nonkomposita sind nicht laut Definition Atome. Wenn man will, kann man Nonkomposita "Atome im weiteren Sinne" nennen. Wir werden im folgenden sehen, daß die Nonkomposita genau die Quanta (siehe DT6) sind.

[2]Im folgenden wird stets klar sein, ob man sich auf das zweistellige Prädikat T bezieht oder auf das einstellige.

[3]AT3 ist in Gegenwart von AT1 und AT2 äquivalent mit TT13.

[4]Wohl aber wird sich dann das Fragliche *eingeschränkt auf Komposita* beweisen lassen. Peter Simons' *Proper Parts Principle* (PPP) (siehe P. Simons, *Parts*, S. 28, S. 115 – S. 117), das spezifisch für die extensionale Mereologie ist, lautet in unserer Schreibweise $\Lambda x\Lambda y(\ Vz(zT^+x)\ \text{u.}\ \Lambda z(zT^+x\ \text{imp.}\ zT^+y)\ \text{imp.}\ xTy)$; es ist in AT1 – AT6 nicht beweisbar und soll es auch nicht sein; beweisbar aber ist $\Lambda x\Lambda y(\ \text{Kompositum}(x) \ldots)$; (im Blick auf AT3 ergibt sich damit das auf Komposita eingeschränkte fragliche Identitätsprinzip;) in der extensionalen Mereologie fallen die beiden Prinzipien zusammen, denn jedes Nichtatom ist dort ein Kompositum (siehe Simons' *Weak Supplementation Principle* in *Parts*, S. 28).

In "A World of Individuals" formuliert N. Goodman ein *Prinzip des Nominalismus*, das den Inhalt hat: "The nominalist denies that two different entities can be made up of the same entities [S. 158] ... In the nominalist's world, if we start from any two distinct entities and break each of them down as far as we like (by taking parts, parts of parts, and so on), we always arrive at some entity that is contained in one but not the other of our two original entities [S. 159]". Das Prinzip kann demzufolge in PT folgendermaßen wiedergegeben werden:
(N_1) $\Lambda x\Lambda y(x \neq y\ \text{imp.}\ Vz(zT^+x\ \text{u. non}\ zT^+y)\ \text{o.}\ Vz(zT^+y\ \text{u. non}\ zT^+x))$, oder äquivalent $\Lambda x\Lambda y(\ \Lambda z(zT^+x\ \text{äqu.}\ zT^+y)\ \text{imp.}\ x=y)$ (kein nominalistisches Prinzip, sondern mit den Zentralaxiomen beweisbar ist $\Lambda x\Lambda y(x \neq y\ \text{imp.}\ Vz(zTx\ \text{u. non}\ zTy)\ \text{o.}\ Vz(zTy\ \text{u. non}\ zTx))$, d.h. TT13). Gemäß (N_1) gibt es höchstens ein Atom; mit höchstens einem Atom kann man aber in dem atomistischen System, von dem Goodman ausgeht, keine Welt von Individuen aufbauen. Goodmans eigene Formalisierung des Prinzips "No distinction of entities without distinction of content" (S. 161) lautet denn auch:
(N_2) $\Lambda y\Lambda z(\ \Lambda x(A(x,y)\ \text{äqu.}\ A(x,z))\ \text{imp.}\ y=z)$, wobei $A(x,y)$ als $A(x)$ u. xTy definiert ist (S. 160); d.h. Goodman interpretiert das besagte Prinzip im Sinne von: "For a nominalistic system, no two distinct things have the same atoms" (S. 161). Mit keinem Wort geht er darauf ein, daß diese Interpretation nicht zu seinen anfänglichen Erläuterungen des nominalistischen Prinzips paßt, und verhüllt damit die Tatsache, daß er gezwungen ist, es in seinem ursprünglichen Sinn aufzugeben: Für *Atome* darf nicht gelten "No distinction of entities without distinction of content", denn Atome haben alle keinen Inhalt (in Goodmans Sinn) und müßten also nach diesem Prinzip alle miteinander identisch sein – was er nicht haben will. – Der Platonist in Goodmans (leicht idiosynkra-

tischen) Sinn, der zwei verschiedene Entitäten a,b sieht, wo der Nominalist in Goodmans Sinn gemäß (N_2) nur eine sieht, kann (N_2) ruhig anerkennen; er braucht nur darüberhinaus behaupten, daß a und b Atome sind, und schon verliert (N_2) jede Kraft gegen ihn. Und warum sollte er das nicht tun können? Goodman selbst sagt: "An atomic element - or atom - of a system is simply an element of the system that contains no lesser elements for the system. Depending on the system, an electron or a molecule or a planet might be taken as an atom" (S. 158, Fußnote).

[5]Jedes Quantum ist also ein Nonkompositum; aber auch jedes Nonkompositum ist ein Quantum, falls es ein Minimum gibt (was unten beweisbar wird): Ang. z ist ein Nonkompositum, d.h. $\Lambda x \Lambda y'(xTz$ u. $x \neq z$ u. $y'Tz$ u. $y' \neq z$ imp. $x = y')$; ang. yTz u. $y \neq z$; also $\Lambda y'(y'Tz$ u. $y' \neq z$ imp. $y = y')$; nun $Vk\Lambda x(kTx)$, also kTz u. $k \neq z$ (letzteres, da aus yTz u. $y \neq z$ mit AT3 non zTy, aber kTy); also $y = k$, also $M(y)$; demnach $\Lambda y(yTz$ imp. $y = z$ o. $M(y))$, d.h. $QA(z)$.

[6]Jedes Objekt ist dadurch, daß es mindestens einen Teil hat, ein *relatives Ganzes.* In dieser Bedeutung verwenden wir des geschmeidigeren Ausdrucks halber, wenn wir uns unspezifisch auf Objekte des Grundbereichs beziehen, im folgenden häufig das Wort "Ganzes" ohne das Adjektiv "selbständig"; es ist *nicht* synonym zu "Totum".

[7]Die in DT8 - DT10 definierten Begriffe werden im folgenden nicht gebraucht. Im System AT1 - AT4 bereits gilt wegen der darin beweisbaren Existenz eines Minimums und eines Maximums: $\Lambda x \Lambda y HT(x,y)$, $\Lambda x \Lambda y HG(x,y)$; d.h. die Begriffe werden trivialisiert. In einem System ohne Minimum z.B. kann man aber HT als Grundbegriff wählen und definieren: $\tau T \tau' := \Lambda x(HT(x,\tau)$ imp. $HT(x,\tau'))$ (vergl. *Parts*, S. 53; LGD1, LGA3, LGD2).

3. Der Sachverhaltsbegriff und T als Beziehung der logischen Folge zwischen Sachverhalten

(a) *Ein Sachverhalt ist die Intension*[1] *eines (sinnvollen) Behauptungssatzes.* - Gegen diese Bestimmung läßt sich einwenden, daß sie zu eng ist, denn als Sachverhalt wird man doch auch Entitäten ansehen wollen, die nicht die Intension eines Behauptungssatzes sind, wohl aber sein können. Außerdem ist es möglicherweise fraglich, ob die Bestimmung nicht auch zu weit ist. Intendieren Behauptungssätze, die weder wahr noch falsch sind (das Vorhandensein von solchen sei nicht von vornherein ausgeschlossen), Sachverhalte?

Will man beiden Bedenken Rechnung tragen, so gelangt man als nächstliegende Bestimmung zu: *Ein Sachverhalt ist, was Intension eines entweder wahren oder falschen Satzes sein kann.* (Jeder entweder wahre oder falsche Satz ist ein - sinnvoller - Behauptungssatz; die Umkehrung ist fraglich.) Will man nur das erste Bedenken berücksichtigen, so kommt man zu der Bestimmung: *Ein Sachverhalt ist, was Intension eines Behauptungssatzes sein kann.* Berücksichtigt man dagegen nur das zweite Bedenken, so erhält man: *Ein Sachverhalt ist die Intension eines entweder wahren oder falschen Satzes.* Über diese letztere Bestimmung des Sachverhaltsbegriffs läßt sich jedenfalls sagen, daß sie die engstmögliche ist.

(b) Unter einem Satz haben wir in (a) einen normalen Satz verstanden, d.h. insbesondere einen endlich langen Satz. Für jede der vier Bestimmungen unter (a) gibt es nun eine gleichlautende alternative Version, in der aber das Wort "Satz" in einem weiteren Sinn genommen wird, nämlich so, daß es auch abzählbar unendlich lange Sätze gibt. Die alternative Version der 3. Bestimmung ist dann die bislang weitest mögliche Bestimmung des Sachverhaltsbegriffs. Wir machen sie uns in dem Sinne zu eigen, daß jedenfalls die Intensionen von Behauptungssätzen (im verallgemeinerten Sinn) definitiv Sachverhalte sein sollen (wir setzen uns also über das zweite in (a) angesprochene Bedenken hinweg). - Mit dieser Bestimmung mag aber der Sachverhaltsbegriff immer noch zu eng umschrieben sein. Läßt sich jeder Sachverhalt durch einen Satz intendieren? Auch wenn wir abzählbar unendlich lange Sätze zulassen, bleibt das zweifelhaft, denn womöglich muß man dazu nicht nur abzählbar unendlich lange Sätze, sondern sogar solche mit überabzählbar vielen Zeichenvorkommnissen ins Auge fassen; damit entfernt man sich aber immer weiter vom Normalbild einer Sprache.

(c) Das legt nahe, eine sprachunabhängige Bestimmung des Sachverhaltsbegriffs zu suchen. Dafür bietet sich an: *Ein Sachverhalt ist eine nichtsprachliche Entität, die entweder wahr oder falsch ist.* Auch diese sprachunabhängige Bestimmung des Sachverhaltsbegriffs kann freilich dessen enge Beziehung zum Satzbegriff nicht verdecken. "Wahr" und "falsch" sind verwendbar als Satzprädikate (genauer als semantische Satzprädikate), oder auch als Sachverhaltsprädikate (d.h. als ontologische Prädikate); sie können darüberhinaus *nur* Sätzen und Sachverhalten zu- oder abgesprochen werden (dagegen kann man weder sinnvoll sagen "der Mond ist wahr (falsch)" noch "der Mond ist nicht wahr (nicht falsch)" - *außer metaphorisch*).

Der Nachteil dieser letzteren Bestimmung ist, daß mit ihr gegenüber der Bestimmung *Ein Sachverhalt ist, was Intension eines (eventuell abzählbar unendlich langen) Behauptungssatzes sein kann* zwar einerseits eine Erweiterung erreicht ist, insofern etwas, was nicht Intension eines Behauptungssatzes sein kann, dennoch als nichtsprachliche Entität entweder wahr oder falsch sein mag; andererseits sich aber auch eine Verengung ergibt, insofern etwas, was Intension eines Behauptungssatzes sein kann, weder wahr noch falsch sein mag (das wollen wir nicht apriori ausschließen).

(d) Gibt es nicht ein anderes Prädikat mit semantischem wie ontologischem Gebrauch, das wir zu einer sprachunabhängigen Bestimmung des Sachverhaltsbegriffs verwenden könnten, zu einer Bestimmung, die den beschriebenen Nachteil des Vorschlags unter (c) vermeidet? - Es gibt in der Tat ein solches Prädikat, nämlich das Prädikat "folgt logisch aus"; man kann "A folgt logisch aus B" sowohl sinnvoll sagen, wenn "A" und "B" Behauptungssätze bezeichnen, als auch, wennn "A" und "B" Sachverhalte bezeichnen; dagegen kann man nicht sinnvoll "A folgt logisch aus B" sagen, wenn "A" und "B" weder beide Behauptungssätze bezeichnen noch beide Sachverhalte.

Mit diesem Prädikat kann man formulieren: *Ein Sachverhalt ist eine nichtsprachliche Entität, aus der etwas logisch folgt* (ebenso gut wäre: *..., die aus etwas logisch folgt*). Diese Bestimmung ist weiter und nicht gleichzeitig enger als die Bestimmung *Ein Sachverhalt ist, was Intension eines Behauptungssatzes sein kann*: Die Welt im Sinne Wittgensteins ist gewiß eine nichtsprachliche Entität, aus der etwas logisch folgt; es ist aber sehr fraglich, ob sie Intension eines Behauptungssatzes sein kann; andererseits ist alles, was Intension eines Behauptungssatzes sein kann, auch notwendig eine nichtsprachliche Entität, aus der etwas (nämlich zumindest sie selbst) logisch folgt. - Aus letzterem ergibt sich, daß auch die Intension eines Behauptungssatzes, der weder wahr noch falsch ist, eine Entität ist, aus der etwas logisch folgt (dafür ist es nicht nötig, daß sie wahr oder falsch ist). Später werden wir sehen, daß es ein ontologisches *Faktum* ist, daß alles Nichtsprachliche, das eine logische Folge hat, entweder wahr oder falsch ist. Aufgrund dieses ontologischen Faktums gibt es in der Tat keine Intensionen von Behauptungssätzen, die weder wahr noch falsch sind, und also auch keine Behauptungssätze, die es sind. Es kommt hier jedoch darauf an, einen Sachverhaltsbegriff zu wählen, bei dem durch sich alle Intensionen von Behauptungssätzen, *aber auch anderes* Sachverhalte sein sollen, *und* der nicht durch sich ausschließt, daß es Sachverhalte gibt, die weder wahr noch falsch sind. Dieser ist mit der letzten Bestimmung gegeben. Wir machen uns also definitiv die Definition zu eigen, daß ein Sachverhalt eine nichtsprachliche Entität ist, aus der etwas logisch folgt.[2]

(e) Eine *Proposition* dagegen ist, was Intension eines *endlich* langen Behauptungssatzes sein kann. Demnach ist jede Proposition ein Sachverhalt, aber nicht jeder Sachverhalt ist eine Proposition. - Der Propositionsbegriff wird aber auch so vom Sachverhaltsbegriff unterschieden, daß keine Proposition ein Sachverhalt ist: Propositionen seien als Bedeutungen bzw. Intensionen von Sätzen abstrakte Entitäten, Sachverhalte dagegen etwas "draußen in der Welt"[3].

Werden in diesem Sinne sowohl Sachverhalte als auch Propositionen angenommen, so wird zwischen der sprachlichen Ebene und der Ebene der Objektivität (der Seinsheit) unnötigerweise eine mittlere Ebene eingezogen; man belastet sich ohne Not mit der Frage, wie denn diese mittlere Ebene zur Objektivität in Beziehung zu setzen sei, denn irgendwo muß es ja schließlich herkommen, daß der eine Behauptungssatz wahr ist, der andere falsch. Die Antwort auf die Frage, was Sätze wahr oder falsch macht, die *hier* gegeben wird, ist dagegen einfach: *Ein Satz ist wahr, wenn seine Intension (der Sachverhalt, den er intendiert) besteht, d.h. Teil der Welt, der Konjunktion aller Tatsachen ist; ein Satz ist falsch, wenn die Intension seiner Negation (die Negation seiner Intension) besteht.*

Es heißt, Propositionen seien generell abstrakte Entitäten (so etwa W. Künne in *Abstrakte Gegenstände*, S. 11 und viele andere). - Das, was der Name "daß Michael an dem und dem Ort, zu dem und dem Zeitpunkt eine Zigarette raucht" bezeichnet, ist sicherlich eine Proposition (nämlich die Intension des Satzes "Michael raucht an dem und dem Ort, zu der und der Zeit eine Zigarette"); aber es ist nicht abstrakt (es mag *nichtexistent* - d.h. nicht wahr - sein, aber das ist etwas anderes als *abstrakt*). Es ist ohne weiteres möglich, daß ich sehe, daß Michael an dem und dem Ort, zu der und der Zeit eine Zigarette raucht.[4] Kann man abstrakte Entitäten *sehen* (wo "sehen" nichtmetaphorisch und nichtanalogisch als eine zweistellige Beziehung ausdrückend zu lesen ist)?[5] Die erwähnte Proposition ist ein Beispiel par excellence für eine konkrete Entität. - Folglich gibt es Propositionen, die keine abstrakten Entitäten sind.

(f) Als Grundbereich von PT haben wir die Gesamtheit der Sachverhalte gewählt; $\tau T \tau'$ ist also zu lesen als "τ ist ein Teilsachverhalt von τ'". Die Teilbeziehung zwischen Sachverhalten identifizieren wir heuristisch mit der Beziehung der nichtsprachlichen logischen Folgerung. Dies ist möglich, denn letztere Beziehung erfüllt die Axiome AT1 - AT3 (gelesen über dem festgelegten Grundbereich). Mit der Identifizierung liegt fest, in welcher Richtung das Axiomensystem der Sachverhaltsontologie auszubauen sein wird, denn über die nichtsprachliche logische Folgerung ist durch ihr Analogon - die sprachliche logische Folgerung - sehr viel bekannt; all diesen bekannten Fakten muß man gerecht werden. Systematisch jedoch identifizieren wir die nichtsprachliche logische Folgerung mit der Teilbeziehung zwischen Sachverhalten[6]. (In der mit dem Teilbegriff aufgebauten Sachverhaltsontologie wird somit das ontologische Äquivalent der Aussagenlogik enthalten sein.)

Wir können daher setzen:

DT11 $\tau' \rightarrow \tau := \tau T \tau'$
(τ *folgt logisch aus* τ'; *aus* τ' *folgt logisch* τ; diese Leseweise müssen wir aufgeben, wenn wir den Grundbereich wechseln!)

Ganz im Einklang mit der Bestimmung des Grundbereichs als Gesamtheit der Sachverhalte, d.h. als Gesamtheit der nichtsprachlichen Entitäten, aus denen etwas logisch folgt, gilt dann:

TT14 $\Lambda x V y (x \rightarrow y)$
(*Aus jedem Sachverhalt folgt logisch etwas*; abhängig von von DT11 und AT2)

Anmerkungen:

[1]Die Intension ist der sprachunabhängige Teil der Bedeutung, also, da die Bedeutung in der Regel nicht vollständig sprachunabhängig ist, in der Regel nicht mit letzterer identisch.

[2]Vergl. A. Reinach in "Zur Theorie des negativen Urteils", S. 222: "So gewinnen wir als eine weitere Bestimmung der Sachverhalte, daß sie und ausschließlich sie in der [logischen] Beziehung von Grund und Folge stehen."

[3]Zu dieser Unterscheidung zwischen Sachverhalten und Propositionen vergl. K. Mulligan et al., "Truth-Makers", S. 287 und §5; siehe auch B. Smith, "Introduction to Adolf Reinach `On the Theory of the Negative Judgment'", S. 293f.

[4]Barwise/Perry machen in *Situations and Attitudes*, S. 179f einen Unterschied zwischen "Sehen"+Nominalphrase (AcI) und "Sehen"+Nebensatz mit "daß"; das erstere besage das epistemisch neutrale Sehen, das letztere das epistemisch positive. - Man kann nicht behaupten: *nur das erstere drücke eigentliches Sehen aus; daß Michael an dem und dem Ort, zu der und der Zeit eine Zigarette raucht, könne also eigentlich nicht gesehen werden, sondern nur die konkrete Situation, der diese Proposition entspricht.* Das kann man schon deshalb nicht, weil es unklar ist, wo die Grenze zwischen epistemisch neutralem Sehen und epistemisch positivem Sehen zu ziehen ist. Gibt es aber überhaupt so etwas wie epistemisch neutrales Sehen? - Der von Barwise/Perry aufgewiesene semantische Unterschied ist übrigens im Deutschen, wenngleich vorhanden, viel weniger ausgeprägt als im Englischen. Ich kann z.B. keinen Bedeutungsunterschied feststellen zwischen "Ich sehe Michael eine Zigarette rauchen" und "Ich sehe, daß Michael eine Zigarette raucht". - Aber von alle dem abgesehen. Es ist offenbar möglich, daß ich *empirisch feststelle*, daß Michael eine Zigarette raucht. Kann man abstrakte (nichtkonkrete) Entitäten empirisch feststellen? Was man empirisch feststellt sind doch die Fakten der empirischen Welt. Was ist konkret, wenn diese Fakten es nicht sind?

[5]Aber Sätze, die als Typen abstrakte Entitäten sind, kann man doch *sehen*? - Hier wird "sehen" zwar nicht metaphorisch, aber doch *analogisch* gebraucht, d.h. in einer nachrangigen Bedeutung, die eindeutig durch eine vorrangige Bedeutung definiert ist: den Satz A sehen_2 heißt ein Vorkommnis von A sehen_1.

[6]P. Simons deutet in *Parts* auf S. 170 die Möglichkeit einer intensionalen Teil-Ganzes-Beziehung zwischen Propositionen an (die er als abstrakte Entitäten auffaßt). Danach ist (Proposition) p Teil von (Proposition) q, wenn alles, was p wahr macht, auch q wahr macht. "Wahrmacher" ("truth-makers") sind dabei im Gegensatz zu Propositionen etwas "draußen in der Welt", z.B. wittgensteinsche Sachverhalte (siehe K. Mulligan et al., "Truth-Makers", §5). Die Teilbeziehung zwischen Propositionen, die Simons mit der obigen Bestimmung einführt, ist intuitiv obskur. In

welchem intuitiven Sinn ist p (intensionaler) Teil von q, wenn alles, was p wahr macht, auch q wahr macht? Interessanter ist es zu definieren: q ist Teil von p (q folgt logisch aus p), wenn alles, was p wahr macht, auch q wahr macht.

4. Mit T definierbare Funktionen

(a) In PT steht uns der Kennzeichnungsoperator zur Verfügung; wir können also in PT Funktionen definieren, z.B.:

DT12 $\quad \tau \wedge \tau' := \iota x(\tau T x \text{ u. } \tau' T x \text{ u. } \Lambda y(\tau T y \text{ u. } \tau' T y \text{ imp. } x T y))$
(die Konjunktion von τ und τ')

Durch DT12 wird die Konjunktion von τ und τ' definiert als das kleinste Ganze, von dem sie beide Teil sind; die Konjunktion der Sachverhalte τ und τ' also als der logisch schwächste Sachverhalt, aus dem sowohl τ wie τ' logisch folgt.

DT13 $\quad \tau \vee \tau' := \iota x(x T \tau \text{ u. } x T \tau' \text{ u. } \Lambda y(y T \tau \text{ u. } y T \tau' \text{ imp. } y T x))$
(die Adjunktion von τ und τ')

Durch DT13 wird die Adjunktion von τ und τ' definiert als der größte gemeinsame Teil von τ und τ'; die Adjunktion der Sachverhalte τ und τ' also als der logisch stärkste Sachverhalt, der sowohl aus τ wie τ' logisch folgt.

DT14 $\quad \neg_1 \tau := \iota y[\Lambda z(z T \tau \text{ u. } z T y \text{ imp. } M(z)) \text{ u. } \Lambda k(\Lambda z(z T \tau \text{ u. } z T k \text{ imp. } M(z)) \text{ imp. } k T y)]$
(die Negation 1. Art von τ)

Durch DT14 wird die Negation 1. Art von τ definiert als das größte Ganze, das mit τ nur Minima gemeinsam hat; also die Negation 1. Art des Sachverhalts τ als der logisch stärkste Sachverhalt, so daß gleichzeitig aus ihm und τ nur Tautologien[1] logisch folgen.

DT15 $\quad \neg_2 \tau := \iota y[\Lambda z(\tau T z \text{ u. } y T z \text{ imp. } T(z)) \text{ u. } \Lambda k(\Lambda z(\tau T z \text{ u. } k T z \text{ imp. } T(z)) \text{ imp. } y T k)]$

Durch DT15 wird die Negation 2. Art von τ definiert als das kleinste Ganze, das zusammen mit τ nur Teil von Totalitäten ist; also die Negation 2. Art des Sachverhalts τ als der logisch schwächste Sachverhalt, so daß er und τ gleichzeitig nur aus

Kontradiktionen[2] logisch folgen.

Für alle Sachverhalte p gilt, daß die Negation 1.Art von p identisch ist mit der Negation 2. Art von p, so daß man einfach von *der Negation von* p reden kann.[3] Die weiteren Axiome werden also so zu wählen sein, daß gilt $\wedge x(\neg_1 x = \neg_2 x)$, wodurch dann

DT16 $\neg\tau := \iota y(y=\neg_1\tau$ u. $y=\neg_2\tau)$
(die Negation von τ)

gerechtfertigt wird.[4]

(b) Für die Satzformenschemata der Definientia von DT12 - DT16 verwenden wir die Abkürzungen $A[x,\tau,\tau']$, $B[x,\tau,\tau']$, $C[y,\tau]$, $D[y,\tau]$, $E[y,\tau]$. - Man sieht leicht, daß gilt:

TT15 (a) $\wedge z \wedge z' \wedge x \wedge y(A[x,z,z']$ u. $A[y,z,z']$ imp. $x=y)$
(b) $\wedge z \wedge z' \wedge x \wedge y(B[x,z,z']$ u. $B[y,z,z']$ imp. $x=y)$
(c) $\wedge z' \wedge x \wedge y(C[x,z']$ u. $C[y,z']$ imp. $x=y)$
(d) $\wedge z' \wedge x \wedge y(D[x,z']$ u. $D[y,z']$ imp. $x=y)$
(e) $\wedge z \wedge x \wedge y(E[x,z]$ u. $E[y,z]$ imp. $x=y)$
(abhängig von AT3)

Zur Rechtfertigung der Definitionen DT12 - DT16 bleibt somit nur noch zu zeigen: $\wedge z \wedge z' \vee x A[x,z,z']$, $\wedge z \wedge z' \vee x B[x,z,z']$, $\wedge z' \vee y C[y,z']$, $\wedge z' \vee y D[y,z']$, $\wedge z \vee y E[y,z]$, denn mit TT15 erhält man hieraus $\wedge z \wedge z' \vee! x A[x,z,z']$, $\wedge z \wedge z' \vee! x B[x,z,z']$, $\wedge z' \vee! y C[y,z']$, $\wedge z' \vee! y D[y,z']$, $\wedge z \vee! y E[y,z]$. Diese Sätze folgen nicht aus den Zentralaxiomen, obwohl ihre Gültigkeit bei Inbetrachtziehung des Grundbereichs (der Gesamtheit der Sachverhalte) auf der Hand liegt. Es ist daher nötig, das Axiomensystem zu erweitern. Dabei zeigt sich, daß man zum Beweis der genannten Sätze mit einem einzigen einfachen Axiomenschema auskommt.

Amerkungen:

[1]Tautologische Sachverhalte. Tatsächlich gibt es nur einen solchen. Siehe unten.

[2]Kontradiktorische Sachverhalte. Tatsächlich gibt es nur einen solchen. Siehe unten.

[3]In der ontologischen Literatur ist umstritten, ob es negative Tatsachen bzw. Sachverhalte gibt. (Siehe dazu z.B. B. Smith, "Introduction to Adolf Reinach 'On the Theory of the Negative Judgment'", S.295f; B. Russell, "The Philosophy of Logical Atomism", S. 187ff.) - Negative Tatsachen sind bestehende negative Sachverhalte; negative Sachverhalte sind Negationen von Sachverhalten; die Negation eines Sachverhaltes ist der größte Sachverhalt, der mit ihm nur den minimalen Sachverhalt gemeinsam hat. Damit ist dem Ausdruck "negativer Sachverhalt" ein klarer topologischer Sinn gegeben. Wenn es Sachverhalte gibt, die voneinander Teile sind, warum sollte es dann keine negativen Sachverhalte in diesem Sinn geben? - Übrigens sind die negativen Sachverhalte *die Sachverhalte*, denn jeder Sachverhalt ist im definierten Sinn ein negativer Sachverhalt, da er die Negation irgendeines Sachverhalts ist.

In "Negation and Generality", S. 296 argumentiert H. Hochberg für die Entbehrlichkeit konjunktiver und adjunktiver Tatsachen (bei ihm "facts"; "negative facts" erkennt er an; derselben Ansichten ist Russell: " ... on the whole I do incline to believe that there are negative facts and that there are no disjunctive facts"; "The Philosophy of Logical Atomism", S. 190). Nun ist es einerseits richtig, daß wahre Sätze der Form *A o. B* bzw. *A u. B* keine bestehenden adjunktiven bzw. konjunktiven Sachverhalte als Wahrmacher erfordern; aber damit sind konjunktive und adjunktive Tatsachen nicht aus der Welt geschafft. Auf was referieren singuläre Terme der Formen *daß A o. B* bzw. *daß A u. B*, wenn nicht auf adjunktive bzw. konjunktive Sachverhalte (die Tatsachen sind, wenn die entsprechenden Sätze wahr sind)? In Hochbergs Sprache kommen offenbar keine Nebensätze vor. - Entsprechend muß eine ontologische Theorie, die negative Sachverhalte ablehnt, sagen können, auf was dann singuläre Terme der Form *daß non A* referieren. (Die *natürliche* Antwort ist, daß es die Negationen der durch die Terme der Form *daß A* bezeichneten Sachverhalte, also gewisse negative Sachverhalte sind.)

[4]Statt $\wedge, \vee, \neg$ schreibt man in der booleschen Algebra gewöhnlich $\cup, \cap, \bar{\ }$. Die der aussagenlogischen Symbolik angepaßte neue Schreibweise ist bei allen intensionalen Deutungen der booleschen Algebra und insbesondere bei der über Sachverhalten intuitiv vorteilhaft. - *Vorsicht*: Man neigt dazu $\wedge$ mit $\cap$ und $\vee$ mit $\cup$ zu assoziieren.

5. Das Konjunktionsaxiom

(a) Wir postulieren

AT4 Vz[Λx(A[x] imp. xTz) u. Λy(Λx(A[x] imp. xTy) imp. zTy)]

AT4 (eigentlich kein Axiom, sondern ein Axiomenschema[1]) stellt fest, daß es zu jeder beliebigen PT-Beschreibung A von Entitäten (aus dem Grundbereich) eine Entität (aus dem Grundbereich) gibt, die alle A als Teile hat und die zudem Teil jeder Entität ist, die alle A als Teile hat.

Sei C[Λx(A[x] ... z)] eine Abkürzung für Λx(A[x] imp. xTz) u. Λy(Λx(A[x] imp. xTy) imp. zTy); man sieht leicht, daß gilt:

TT16 ΛzΛz'(C[Λx(A[x] ... z)] u. C[Λx(A[x] ... z')] imp. z=z')
(abhängig von AT3)

Demnach gilt

TT17 V!zC[Λx(A[x] ... z)]
(abhängig von AT4 und TT16)

und die folgende Definition ist gerechtfertigt:

DT17 UxA[x] := ιz[Λx(A[x] imp. xTz) u. Λy(Λx(A[x] imp. xTy) imp. zTy)]
(die Konjunktion der x, so daß gilt A[x])

Durch DT17 wird die Konjunktion der A definiert als das kleinste Ganze, das alle A als Teile hat. Bezogen auf den Grundbereich bedeutet das, daß die Konjunktion der A-Sachverhalte als der logisch schwächste Sachverhalt definiert wird, aus dem alle A-Sachverhalte logisch folgen.

Man kann beweisen:

TT18 Λx(A[x] imp. xTUzA[z]) u. Λy(Λx(A[x] imp. xTy) imp. UzA[z]Ty)
(abhängig von TT17 und DT17)

(b) Das Konjunktionsaxiom gilt nicht in allen Grundbereichen, wohl aber, wenn man die Gesamtheit der Sachverhalte oder die Gesamtheit aller Teilmengen einer gewissen Menge zugrundelegt. Als Existenzpostulat ist das Konjunktionsaxiom recht schwach, denn es ist damit verträglich, daß der Grundbereich nur eine einzige Entität umfaßt: Nimmt man als Grundbereich die Gesamtheit aller Teilmengen der leeren Menge an, so sind die Axiome AT1 - AT4 erfüllt, ja sogar - wie wir sehen werden - die Axiome AT1 - AT6.

(c) Es gilt nun:

TT19 ΛzΛz'Vx(zTx u. z'Tx u. Λy(zTy u. z'Ty imp. xTy))

Beweis: Nach TT18 gilt Λx(xTz o. xTz' imp. xTUk(kTz o. kTz')) u. Λy(Λx(xTz o. xTz' imp. xTy) imp. Uk(kTz o. kTz')Ty); nun nach AT2 zTz u. z'Tz'; also zTUk(kTz o. kTz') u. z'TUk(kTz o. kTz');
ang. zTy u. z'Ty, also nach AT1 Λx(xTz o. xTz' imp. xTy); also Uk(kTz o. kTz')Ty;
demnach Λy(zTy u. z'Ty imp. Uk(kTz o. kTz')Ty);
aus dem Unterstrichenen folgt TT19.

Mit TT19 ist die Definition DT12 in Anbetracht von TT15 gerechtfertigt, und wir können beweisen:

TT20 ΛzΛz'((z∧z') = Uk(kTz o. kTz'))
(*Die - kleine - Konjunktion von z und z' ist die - große - Konjunktion aller k, die Teil von z oder z' sind; die Konjunktion der Sachverhalte z und z' ist die Konjunktion aller Sachverhalte, die aus z oder z' logisch folgen*; abhängig von TT15, DT12, TT18, AT1 und AT2)

(d) Weiterhin gilt

TT21 ΛzΛz'Vx(xTz u. xTz' u. Λy(yTz u. yTz' imp. yTx))

Beweis: Nach TT18 gilt Λx(xTz u. xTz' imp. xTUk(kTz u. kTz')) u. Λy(Λx(xTz u. xTz' imp. xTy) imp. Uk(kTz u. kTz')Ty); man hat

Λx(xTz u. xTz' imp. xTz) u. Λx(xTz u. xTz' imp. xTz'); also
Uk(kTz u. kTz')Tz u. Uk(kTz u. kTz')Tz';
außerdem Λy(yTz u. yTz' imp. yTUk(kTz u. kTz'));
aus dem Unterstrichenen folgt TT21.

Mit TT21 ist DT13 in Anbetracht von TT15 gerechtfertigt, und man kann beweisen:

TT22 ΛzΛz'((zvz') = Uk(kTz u. kTz'))
(*Die - kleine - Adjunktion von z und z' ist die - große - Konjunktion aller k, die Teil sowohl von z als auch von z' sind; die Adjunktion der Sachverhalte z und z' ist die Konjunktion aller Sachverhalte, die sowohl aus z als auch aus z' logisch folgen*; abhängig von TT15, DT13, TT18)

(e) Bezüglich ∧ und v sind mit TT19 und TT21 die folgenden wichtigen Theoreme beweisbar:

TT23 ΛzΛz'Λy(yT(zvz') äqu. yTz u. yTz'), d.h.
ΛzΛz'Λy((zvz')→y äqu. z→y u. z'→y)

Beweis: Nach TT21, TT15 und DT13 gilt: (zvz')Tz u. (zvz')Tz' u. Λy(yTz u. yTz' imp. yT(zvz')); also wegen AT1 Λy(yT(zvz') imp. yTz u. yTz').

Analog zu TT23 gilt

TT24 ΛzΛz'Λy((z∧z')Ty äqu. zTy u. z'Ty), d.h.
ΛzΛz'Λy(y→(z∧z') äqu. y→z u. y→z')

Beweis: Nach TT19, TT15 und DT12 gilt: zT(z∧z') u. z'T(z∧z') u. Λy(zTy u. z'Ty imp. (z∧z')Ty); also wegen AT1 Λy((z∧z')Ty imp. zTy u. z'Ty).

Der Beweis von TT24 liefert mit AT1 auch den von

TT25 ΛzΛz'Λy(yTz o. yTz' imp. yT(z∧z'))

Und der Beweis von TT23 liefert mit AT1 auch den von

TT26 $\wedge z \wedge z' \wedge y(zTy \text{ o. } z'Ty \text{ imp. } (z \vee z')Ty)$

Die Umkehrungen von TT25 und TT26 gelten nicht.

(f) Das Konjunktionsaxiom erlaubt auch den Beweis von

TT27[2] $\vee y M(y) \text{ u. } \vee y T(y)$

Beweis: (i) Nach TT18 gilt: $\wedge x(x \neq x \text{ imp. } xTUz(z \neq z)) \text{ u. } \wedge y(\wedge x(x \neq x \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } Uz(z \neq z)Ty)$, wegen $\wedge y \wedge x(x \neq x \text{ imp. } xTy)$ also $\wedge y'(Uz(z \neq z)Ty')$, also mit DT4 $\vee y M(y)$;
(ii) nach TT18 $\wedge x(x = x \text{ imp. } xTUz(z = z)) \text{ u. } \wedge y(\wedge x(x = x \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } Uz(z = z)Ty)$, wegen $\wedge x(x = x)$ also $\wedge x(xTUz(z = z))$, also mit DT5 $\vee y T(y)$.

Wegen TT4 und TT5 sind also die folgenden Definitionen gerechtfertigt:

DT18 $\underline{t} := \iota y \wedge x(yTx)$
(das Minimum; der tautologische Sachverhalt)

DT19 $\underline{k} := \iota y \wedge x(xTy)$
(das Maximum; der kontradiktorische Sachverhalt)[3]

(g) Ein sehr nützliches Theorem ist

TT28 $\wedge x(A[x] \text{ imp. } B[x]) \text{ imp. } UzA[z]TUzB[z]$

Beweis: Ang. $\wedge x(A[x] \text{ imp. } B[x])$; nach TT18 $\wedge x(B[x] \text{ imp. } xTUzB[z])$; also $\wedge x(A[x] \text{ imp. } xTUzB[z])$; nach TT18 $\wedge y(\wedge x(A[x] \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } UzA[z]Ty)$; demnach $UzA[z]TUzB[z]$.

Mit TT28 und AT3 erhält man

TT29 $\wedge x(A[x] \text{ äqu. } B[x]) \text{ imp. } UzA[z] = UzB[z]$

Man sieht leicht ein, daß die Umkehrung von TT29 nicht gilt; denn es gilt

I., 5.: Das Konjunktionsaxiom

TT30[4] Λz(z=Uz'(z'Tz))

(Jedes Ganze ist die Konjunktion seiner Teile; jeder Sachverhalt ist die Konjunktion der Sachverhalte, die aus ihm logisch folgen)

Beweis: Nach AT2 zTz, also mit TT18 $\underline{\text{zTUz'(z'Tz)}}$; nach TT18 Λy(Λz'(z'Tz imp. z'Ty) imp. Uz'(z'Tz)Ty), also, wegen Λz'(z'Tz imp. z'Tz), $\underline{\text{Uz'(z'Tz)Tz}}$; aus dem Unterstrichenen nach AT3 z=Uz'(z'Tz).

Aus TT30 folgt $\underline{t}$=Uz'(z'T$\underline{t}$); nach TT27, TT5, DT18 gilt aber auch $\underline{t}$=Uz'(z'≠z'); folglich Uz'(z'T$\underline{t}$)=Uz'(z'≠z'); jedoch non Λx(xT$\underline{t}$ äqu. x≠x). - Auch die Umkehrung von TT28 gilt nicht: $\underline{t}$TUz'(z'≠z'), also Uz'(z'T$\underline{t}$)TUz'(z'≠z'); jedoch non Λx(xT$\underline{t}$ imp. x≠x).

Anmerkungen:

[1]Die Schreibweise A[τ], π[τ] (B[τ], π'[τ] ...) ist so zu verstehen, daß A[ ], π[ ] ein Ausdruck mit gewissen auf irgendeine Weise markierten Leerstellen (mindestens einer) ist und kein Variablenvorkommnis in τ bei Substitution von τ in diese Leerstellen im Bereich eines Quantorvorkommnisses in A[ ], π[ ] steht, das mit dem Variablenvorkommnis gleichvariablig ist, und τ in allen diesen Leerstellen substituiert ist. (A[τ] ist ein offener Satz oder ein Satz; π[τ] ist ein Funktionsausdruck oder ein Name; τ ist ein Name, eine Variable oder ein Funktionsausdruck.)

Verallgemeinerung: Die Schreibweise $A[\tau_1,\ldots,\tau_n]$, $\pi[\tau_1,\ldots,\tau_n]$ ist so zu verstehen, daß A[,...,], π[,...,] ein Ausdruck mit gewissen mit "1" bzw. "2" bzw. ... bzw. der Ziffer für n markierten Leerstellen ist (jeweils mindestens einer) und kein Variablenvorkommnis in τ_i bei Substitution von τ_i in die i-Leerstellen im Bereich eine Quantorvorkommnisses in A[,...,], π[,...,] steht, das mit dem Variablenvorkommnis gleichvariablig ist, und τ_i in allen i-Leerstellen substituiert ist. ($A[\tau_1,\ldots,\tau_n]$ ist ein offener Satz oder ein Satz; $\pi[\tau_1,\ldots,\tau_n]$ ist ein Funktionsausdruck oder ein Name; τ_i ist ein Name, eine Variable oder ein Funktionsausdruck.)

Statt metasprachlicher Zeichen für Variablen verwenden wir in der Angabe von Schemata *exemplarisch* objektsprachliche Variablen. Die Indizierung, die sich gegebenenfalls bei ihnen findet, ist dann ebenfalls eine objektsprachliche. In $Vx_1Vx_2R[x_1,x_2]$ werden also exemplarisch die objektsprachlichen Variablen "x_1" und "x_2" verwendet, in AT4 exemplarisch die objektsprachlichen Variablen "x", "y", "z". (Zur Bildung von Variablen aus gegebenen Variablen - beliebige kleine, nichtunterstrichene Druckbuchstaben - machen wir sowohl von der Indizierung durch rechtshochgestellte Striche als auch durch rechtstiefgestellte arabische Ziffern Gebrauch.) Von Variablen in Schemata nehmen wir generell an, daß sie nur an den angegebenen (inklusive durch Einklammerung [ ] intendierten) Stellen vorkommen.

Axiome und Theoreme mit freien Variablen (die insbesondere nicht per Instantiierung aus einem Allsatz folgen, sondern aufgrund eines Axiomen/Theoremenschemas resultieren) sind als Allsätze zu lesen. Dementsprechend akzeptieren wir die folgende Regel: *Ist A[ν] ein Axiom oder Theorem, so auch ΛνA[ν].* Daneben haben wir natürlich die Regeln: *Wenn Γ ⊨ A[ν] und ν nicht frei in Γ, dann Γ ⊨ ΛνA[ν]; ΛνA[ν] ⊨ A[τ]; wenn Γ,A[ν] ⊨ C und ν nicht frei in Γ,C, dann Γ,VνA[ν] ⊨ C; A[τ] ⊨ VνA[ν].* (Γ ist eine eventuell leere Folge von Satzformen; ⊨ drückt die Beziehung der prädikatenlogischen Folgerung zwischen Satzformen aus.)

[2]Mereologien verfügen gewöhnlich nicht über ein "Null-Element", etwas, das Teil von allem (Besprochenen) ist. Mag ein solches in der Mereologie der Individuen eine "Absurdität" sein, wie P. Simons es in *Parts*, S. 13, Fußnote 5 nennt (siehe aber II., 11., (e) dieses Buches; davon abgesehen gehört es auch nicht zum Sinn von "Individuum" und "Teil", daß es kein Individuum gibt, das Teil aller Individuen ist), es ist sicherlich keine (sondern eine Notwendigkeit) in der Mereologie der Sachverhalte (und Eigenschaften). Man kann natürlich der Ansicht sein, man könne die Theorie der Sachverhalte, die hier entwickelt wird, nicht als "Mereologie" bezeichnen, mit der Begründung, daß man bestenfalls

metaphorisch davon sprechen könne, ein Sachverhalt sei Teil eines anderen. Aber das Wort "Teil" ist so multivok, daß, wie man sich hierzu stellt, eine Sache des Geschmacks ist. Dennoch wird hier unter "Mereologie" stets eine Teil-Ganzes-Theorie verstanden, deren Grundbereich Individuen sind; unter "extensionaler (klassischer) Mereologie" die von Leśniewski entwickelte Theorie bzw. eine äquivalente Formulierung von ihr. - Im Unterschied zu der beschriebenen Haltung gegenüber dem Nullelement wird von Mereologen gewöhnlich ein "Universum" - etwas, von dem alles Teil ist - angenommen (siehe *Parts*, S. 15f).

[3]Suggestiv ist es auch, k als "der Sachverhaltsraum", "die Sachverhaltsmatrix" zu lesen. - Graphisch einfache Konstanten unterstreichen wir, da der *bloße* Buchstabe auch als Variable verwendet wird.

[4]Es gilt auch Λz(non QA(z) o. M(z) imp. z=Uz'(z'T^+z)); dies läßt sich freilich erst mit noch hinzukommenden Axiomen zeigen. Der Beweis sei aber an dieser Stelle angegeben:
Ang. non QA(z) o. M(z); (i) Uz'(z'T^+z)Tz, denn Λz'(z'T^+z imp. z'Tz), also mit TT28 Uz'(z'T^+z)TUz'(z'Tz), also mit TT30 Uz'(z'T^+z)Tz;
(ii) ang. non zTUz'(z'T^+z), also nach AT5 Vy(QA(y) u. yTz u. non yTUz'(z'T^+z)), also Vy(QA(y) u. yTz u. non M(y) u. non yTUz'(z'T^+z)) (nach DT4), also mit TT40 Λk(yTk imp. non kT^+z), also nach DT1 Λk(yTk imp. non kTz o. k=z), also, da nach AT2 yTy, non yTz o. y=z, also wegen yTz y=z; also QA(z) u. non M(z); laut Annahme aber non QA(z) o. M(z); demnach zTUz'(z'T^+z);
mit (i) und (ii) und AT3 z=Uz'(z'T^+z).

Es gilt auch Λz(z=Uz'(z'T^+z) imp. non QA(z) o. M(z)), was sich ohne die weiteren Axiome beweisen läßt:
Ang. QA(z) u. non M(z), also nach DT6 Λy(yTz u. y≠z imp. M(y)), also mit TT28, DT1 Uz'(z'T^+z)TUz'M(z'); nach TT32, TT29, TT33 Uz'M(z')=Uz'(z'=t)=t; also Uz'(z'T^+z)Tt, also mit TT36 Uz'(z'T^+z)=t, also mit TT32 M(Uz'(z'T^+z)); also z≠Uz'(z'T^+z), denn laut Annahme non M(z); mit Kontraposition folgt das Gewünschte.

Gemäß DT20, wonach die Elemente die Quanta sind, die keine Minima sind, ist also bewiesen Λz(z=Uz'(z'T^+z) äqu. non El(z)) - "Die Nichtelemente sind die Ganzen, die Summe ihrer echten Teile sind".

6. Das Erschöpfungsaxiom

(a) Wir postulieren

AT5 ΛzΛz'(Λx(QA(x) u. xTz imp. xTz') imp.zTz')

AT5 besagt, daß es (generell) dafür, daß z Teil von z' ist, hinreichend ist, daß alle Quanta die Teil von z sind, auch Teil von z' sind. Wenn dem so ist, dann muß (generell) z durch seine Quanta erschöpft werden; nähme man sie alle weg, so bliebe von z nichts übrig; es ist die Summe seiner Quanta. Umgekehrt, wenn z durch seine Quanta erschöpft wird, dann muß AT5 folgen. Daher heißt AT5 "das Erschöpfungsaxiom".[1]

AT5 gilt, wenn wir PT die Gesamtheit der Teilmengen einer gewissen Menge zugrundelegen; T steht dann für die Teilmengenbeziehung zwischen diesen Teilmengen, und die Quanta sind die Mengen aus dem Grundbereich mit höchstens einem Element. AT5 gilt auch, wenn die Sachverhalte den Grundbereich bilden; T steht dann für die Teilbeziehung zwischen Sachverhalten: die Beziehung der (nichtsprachlichen) logischen Folgerung, und was in diesem Falle, intuitiv betrachtet, die Quanta sind, wird im folgenden klar werden (vergl. 10., (c)).[2]

(b) Durch AT5 ist im Einklang mit seinem Beinamen beweisbar:

TT31 Λz(z=Uz'(QA(z') u. z'Tz))

Beweis: Nach TT18 gilt Λx(QA(x) u. xTz imp. xTUz'(QA(z') u. z'Tz)), also mit AT5 zTUz'(QA(z') u. z'Tz);
außerdem Λx(QA(x) u. xTz imp. xTz); nach TT18 gilt Λy(Λx(QA(x) u. xTz imp. xTy) imp. Uz'(QA(z') u. z'Tz)Ty); also Uz'(QA(z') u. z'Tz)Tz;
aus dem Unterstrichenen folgt mit AT3 z=Uz'(QA(z') u. z'Tz).

Und umgekehrt folgt aus TT31 AT5 (ohne von AT5 Gebrauch zu machen): Ang. Λx(QA(x) u. xTz imp. xTz'), also mit TT28 Uy(QA(y) u. yTz)TUy(yTz'), also mit TT30 und TT31 zTz'.

Wir werden im folgenden sehen, daß Uz'(QA(z') u. non z'Tz) für alle z die Negation von z ist. Zum Beweis benötigen wir aber ein weiteres Axiom.

I., 6.: Das Erschöpfungsaxiom

Anmerkungen:

[1]Aus AT5 folgt AT2, da trivialerweise ΛzΛx(QA(x) u. xTz imp. xTz) gilt. Wir behalten AT2 aber dennoch als Axiom bei, weil vieles nur von AT2 abhängt und AT2 eine ganz allgemeine Eigenschaft der Teilbeziehung zum Ausdruck bringt, was AT5 nicht tut.

[2]Auf der Hand liegt, daß AT5 ein atomistisches Prinzip ist; die Quanta sind ja die Nonkomposita, "Atome im weiteren Sinn"; AT5 beinhaltet bezogen auf den gewählten Grundbereich, daß jeder Sachverhalt aus im weiteren Sinne atomaren Sachverhalten besteht.

7. Das Verbindungsaxiom

(a) Das Verbindungsaxiom hat die Gestalt

AT6 Λx[xTUyA[y] u. non M(x) imp. Vk'(k'Tx u. non M(k') u. Vz(k'Tz u. A[z]))]

Wenn Ganze, die einer gewissen Beschreibung genügen, konjunktiv zusammengefaßt werden, so braucht weder ihre Konjunktion noch jeder Teil von ihr dieser Beschreibung zu genügen. Zwischen den Teilen der Konjunktion und den Ganzen, die der Beschreibung genügen, muß aber ein gewisser Zusammenhang, eine Verbindung bestehen. Die Frage ist, wie der Zusammenhang aussieht. - Man nähert sich AT6 durch die Betrachtung einer Reihe von Vorschlägen zur Beantwortung dieser Frage.

Die direkteste Antwort ist

(i) Λx(xTUyA[y] imp. A[x])

Mit TT18 erhält man hieraus Λx(xTUyA[y] äqu. A[x]), was an das Abstraktionsprinzip der Mengenlehre erinnert. Dieser Vorschlag ist jedoch grob inadäquat, da man das Gegenteil von Λx(xTUyA[y] äqu. A[x]) beweisen kann: $\underline{t}$=$\underline{t}$ u. $\underline{t}$TUz'(z'≠z'), da

TT32 Λx(M(x) äqu. x=$\underline{t}$)
(Etwas ist genau dann ein Minimum - Teil von allem -, wenn es mit dem Minimum identisch ist; abhängig von TT27, TT5, DT4, DT18)

(ii) Λx(xTUyA[y] u. non M(x) imp. A[x])

Auch dieser Vorschlag ist inadäquat. Mit ihm ergibt sich nämlich, daß der Grundbereich höchstens zwei Ganze umfaßt: Wenn (ii), dann Λx(xTUy(y=$\underline{k}$) u. non M(x) imp. x=$\underline{k}$); nun

TT33 Λz(z=Uz'(z'=z))

Beweis: Nach TT18 zTUz'(z'=z); ebenfalls nach TT18 Λy(Λz'(z'=z imp. z'Ty) imp. Uz'(z'=z)Ty); nach AT2 Λz'(z'=z imp. z'Tz); also Uz'(z'=z)Tz; mit AT3 aus dem Unterstrichenen z=Uz'(z'=z);

und außerdem

TT34 Λx(T(x) äqu. x=$\underline{k}$)
(*Etwas ist genau dann eine Totalität, wenn es mit dem Maximum identisch ist*; abhängig von TT27, TT4, DT5, DT19);

folglich nach TT34 und TT33 Λx(xT$\underline{k}$) und $\underline{k}$=Uy(y=$\underline{k}$), also Λx(xTUy(y=$\underline{k}$)); demnach Λx(M(x) o. x=$\underline{k}$), d.h. mit TT32 Λx(x=$\underline{t}$ o. x=$\underline{k}$).

(iii) Λx(xTUyA[y] imp. Vk'(k'Tx u. A[k']))

Dieser Vorschlag führt zum Widerspruch, da das Gegenteil beweisbar ist: $\underline{t}$TUy(y≠y), aber non Vk'(k'T$\underline{t}$ u. k'≠k').

(iv) Λx(xTUyA[y] u. non M(x) imp. Vk'(k'Tx u. A[k']))

Vorschlag (iv) ist inadäquat, denn man erhält Λx(xTUy(y=$\underline{k}$) u. non M(x) imp. Vk'(k'Tx u. k'=$\underline{k}$)), also Λx(xTUy(y=$\underline{k}$) u. non M(x) imp. $\underline{k}$Tx), also wegen xT$\underline{k}$ (T($\underline{k}$)) und AT3 Λx(xTUy(y=$\underline{k}$) u. non M(x) imp. x=$\underline{k}$), und dazu siehe unter (ii).

(v) Λx(xTUyA[y] imp. Vk'(k'Tx u. Vz(k'Tz u. A[z])))

Dieser Vorschlag scheitert daran, daß $\underline{t}$TUy(y≠y), aber non Vk'(k'T$\underline{t}$ u. Vz(k'Tz u. z≠z)).

(vi) Λx(xTUyA[y] u. non M(x) imp. Vk'(k'Tx u. Vz(k'Tz u. A[z])))

Der das Prädikat "y=$\underline{k}$" verwendende Einwand läßt sich gegen diesen Vorschlag nicht vorbringen;. denn Vk'(k'Tx u. Vz(k'Tz u. z=$\underline{k}$)) reduziert sich nicht auf x=$\underline{k}$, sondern ist äquivalent mit

Vk'(k'Tx), was harmlos ist, da ΛxVk'(k'Tx) beweisbar ist. Aber Vorschlag (vi) ist trivial, denn: falls VzA[z], so folgt ΛxVk'(k'Tx u. Vz(k'Tz u. A[z])) wegen Λx($\underline{t}$Tx u. Vz($\underline{t}$Tz u. A[z])) (M($\underline{t}$)!); falls dagegen non VzA[z], so folgt non Vx(xTUyA[y] u. non M(x)) wegen TT32 und

TT35 non VzA[z] imp. UyA[y]=$\underline{t}$

Beweis: Ang. non VzA[z], also Λz(A[z] äqu. z≠z), also mit TT29 UyA[y]=Uy(y≠y); Uy(y≠y) aber ist $\underline{t}$ (vergl. den Beweis von TT27);

und

T36 non Vx(xT$\underline{t}$ u. x≠$\underline{t}$)

Beweis: Ang. xT$\underline{t}$; wegen M($\underline{t}$) $\underline{t}$Tx; also mit AT3 x=$\underline{t}$.

(vi) ist insofern trivial, als beweisbar ist, daß sein Hinterglied auf jede Entität des Grundbereichs zutrifft, oder sein Vorderglied auf keine. Der Weg die Trivialität von (vi) zu beseitigen ist offensichtlich; er besteht im Übergang von (vi) zu AT6 durch den Einschub von "non M(k')" im Hinterglied der generalisierten Implikation.

(b) AT6 ist in jedem Grundbereich erfüllt, der die Gesamtheit der Teilmengen einer gewissen Menge U ist: Ist x eine nichtleere Teilmenge der Zusammenfassung (Summe) der Teilmengen von U, die eine gewisse Beschreibung erfüllen, dann gibt es eine nichtleere Teilmenge von x, die Teilmenge einer Teilmenge von U ist, die die Beschreibung erfüllt. AT6 gilt auch, wenn in PT über die Gesamtheit der Sachverhalte quantifiziert wird. Im Fall der Sachverhalte verfügen wir freilich über keine andersweitigen einleuchtenden Prinzipien, um dies zu beweisen (es sei denn, wir faßten Sachverhalte als Mengen von möglichen Welten auf, was wir nicht tun wollen), und AT6 ist das Axiom (-schema) der Sachverhaltsontologie, bei dem uns auch unsere Intuitionen ein wenig im Stich lassen. Die Rechtfertigung von AT6 wird in der intuitiven Richtigkeit der Folgerungen bestehen, die sich aus ihm ziehen lassen.

(c) Das Verbindungsaxiom erlaubt den Beweis des

Zuteilungsprinzips:

TT37 ΛzΛz'Λx(xT(z∧z') u. non M(x) imp. Vk'(k'Tx u. non M(k') u. (k'Tz o. k'Tz')))

Beweis: Nach AT6 gilt Λx[xTUy(yTz o. yTz') u. non M(x) imp. Vk'(k'Tx u. non M(k') u. Vm(k'Tm u. (mTz o. mTz')))]; nun Uy(yTz o. yTz')=(z∧z') nach TT20, und aus Vm(k'Tm u. (mTz o. mTz')) folgt mit AT1 (k'Tz o. k'Tz').

Angenommen ein nichttautologischer Sachverhalt x folgt logisch aus der Konjunktion zweier Sachverhalte z und z'. Daraus kann man nicht schließen, daß x aus z oder aus z' logisch folgt. Aber nach TT37 kann man immerhin schließen, daß aus x ein nichttautologischer Sachverhalt logisch folgt, der aus z oder aus z' logisch folgt. TT37 führt den Beinamen "Zuteilungsprinzip", weil es beinhaltet, daß es zu jedem nicht (absolut) minimalen Teil einer Konjunktion (zweier Ganzer) einen nicht (absolut) minimalen Teil von diesem Teil gibt, der dem einen oder dem anderen Glied der Konjunktion (oder beiden Gliedern) *zugeteilt* ist. - Mit dem Zuteilungsprinzip wird ein Theorem beweisbar, das die *bedingte* Umkehrung von TT25 ist:

TT38 ΛzΛz'Λx(QA(x) u. xT(z∧z') imp. xTz o. xTz')

Beweis: Ang. QA(x) u. xT(z∧z'); falls M(x), dann xTz (Λy(xTy)), also xTz o. xTz'; falls non M(x), dann mit TT37 Vk'(k'Tx u. non M(k') u. (k'Tz o. k'Tz')); nun QA(x); also nach DT6 k'=x o. M(k'), wegen non M(k') also k'=x, also xTz o. xTz'.

Quanta, die Teil einer Konjunktion sind, sind dem einen oder dem anderen Glied der Konjunktion (oder beiden) zugeteilt; sie sind gewissermaßen klein genug dazu.

(d) Aus TT38 erhält man mit TT25 und TT20

TT39 Λx(QA(x) imp. ΛzΛz'(xTUy(yTz o. yTz') äqu. xTz o. xTz'))

Man könnte vermuten, daß hier der Spezialfall eines generellen Prinzips vorliegt, nämlich von (i) Λx(QA(x) imp. (xTUyA[y] äqu.

A[x])). Tatsächlich aber gilt dieses Prinzip nicht; es ist leicht widerlegbar: QA($\underline{t}$) u. $\underline{t}$TUy(y≠y), aber $\underline{t}$=$\underline{t}$.

(ii) Λx(QA(x) u. non M(x) imp. (xTUyA[y] äqu. A[x])) wiederum hat untragbare Folgen: $\underline{k}$=Uy(y=$\underline{k}$) (TT33) u. Λx(xT$\underline{k}$) (T($\underline{k}$)), also Λx(QA(x) u. non M(x) imp. xTUy(y=$\underline{k}$)), also mit dem fraglichen Prinzip Λx(QA(x) u. non M(x) imp. x=$\underline{k}$), also mit TT32 (γ) Λx(QA(x) imp. x=$\underline{t}$ o. x=$\underline{k}$). Hieraus ergibt sich abermals, daß der Grundbereich höchstens $\underline{t}$ und $\underline{k}$ umfaßt: Ang. z≠$\underline{t}$, also, da $\underline{t}$Tz, nach AT3 non zT$\underline{t}$, also mit AT5 Vx(QA(x) u. xTz u. non xT$\underline{t}$), also mit (γ) und AT2 Vx(QA(x) u. xTz u. x=$\underline{k}$), also $\underline{k}$Tz, also, da zT$\underline{k}$, mit AT3 z=$\underline{k}$. - (ii) folgt übrigens aus TT18 und dem Vorschlag (iv) unter (a), wenn man in dessen Hinterglied non M(k') ergänzt.

Mit dem Verbindungsaxiom folgt aber:

TT40 Λx[QA(x) u. non M(x) imp. (xTUyA[y] äqu. Vz(xTz u. A[z]))]

Beweis: Ang. QA(x) u. non M(x); (i) ang. Vz(xTz u. A[z]), also mit TT18 Vz(xTz u. zTUyA[y]), also mit AT1 xTUyA[y];
(ii) ang. xTUyA[y], also mit AT6 Vk'(k'Tx u. non M(k') u. Vz(k'Tz u. A[z])), also wegen QA(x), k'Tx, non M(k') mit DT6 k'=x, also Vz(xTz u. A[z]).

(e) Aus TT40 resultiert

TT41 Λx(QA(x) u. non M(x) imp. (xTUy(QA(y) u. A[y]) äqu. A[x]))

Vz(xTz u. QA(z) u. A[z]) ist bei Gegebensein von QA(x) u. non M(x) äquivalent mit A[x].

Weiterhin gilt:

TT42 Uy(QA(y) u. A[y])=Uy(QA(y) u. non M(y) u. A[y])

Beweis: Wegen Λy(QA(y) u. non M(y) u. A[y] imp. QA(y) u. A[y]) gilt nach TT28 Uy(QA(y) u. non M(y) u. A[y])TUy(QA(y) u. A[y]); umgekehrt gilt auch Uy(QA(y) u. A[y])TUy(QA(y) u. non M(y) u. A[y]): aus TT41 folgt mit TT18 Λx(QA(x) u. non M(x) u. xTUy(QA(y) u. A[y]) imp. xTUy(QA(y) u. non M(y) u. A[y])); die Klausel "non M(x)" kann nun im Vorderglied weggelassen werden, da sie unwesentlich ist; also erhält man mit AT5 das Gewünschte; mit AT3 folgt TT42.

I., 7.: Das Verbindungsaxiom

Definieren wir

DT20 El(τ) := QA(τ) u. non M(τ)
(τ ist ein Element)[1],

so gewinnen wir aus DT20, TT41 und TT42

TT43 Λx(El(x) imp. (xTUy(El(y) u. A[y]) äqu. A[x]))

TT43 führt wegen seiner Ähnlichkeit zum mengentheoretischen Abstraktionsprinzip auch den Beinamen "das Abstraktionsprinzip". Diese Ähnlichkeit läßt sich noch steigern, indem man setzt:

DT21 τ∊τ' := El(τ) u. τTτ'
(τ ist Element von τ')

Dann ist TT43 äquivalent mit

TT44 Λx(x∊Uy(El(y) u. A[y]) äqu. El(x) u. A[x])[2]

(f) Betrachten wir nun Uy(QA(y) u. non yTx). *Erstens* gilt:

TT45 Λx[Λz(zTx u. zTUy(QA(y) u. non yTx) imp. M(z)) u.
Λk(Λz(zTx u. zTk imp. M(z)) imp. kTUy(QA(y) u. non yTx))]

Beweis: (i) Ang. zTx u. zTUy(QA(y) u. non yTx); ang. non M(z); also mit TT32 z≠$\underline{t}$, also mit TT36 non zT$\underline{t}$, also mit AT5 Vm(QA(m) u. mTz u. non mT$\underline{t}$), also wegen AT2 und TT32 Vm(QA(m) u. non M(m) u. mTz), also Vm(QA(m) u. non M(m) u. mTx u. mTUy(QA(y) u. non yTx)) mit AT1 und der 1. Annahme, also mit TT41 mTx u. non mTx – Widerspruch; demnach aus der 1. Annahme M(z);
(ii) ang. Λz(zTx u. zTk imp. M(z));
ang. QA(y') u. y'Tk; (x) y'Tx, also mit der 1. Annahme M(y'), also y'TUy(QA(y) u. non yTx);
(xx) non y'Tx, also mit TT18 y'TUy(QA(y) u. non yTx);
demnach Λy'(QA(y') u. y'Tk imp. y'TUy(QA(y) u. non yTx)), also mit AT5 kTUy(QA(y) u. non yTx).

Durch TT45 ist DT14 im Blick auf TT15 gerechtfertigt, und es folgt

TT46 Λx[Λz(zTx u. zT$\neg_1$x imp. M(z)) u. Λk(Λz(zTx u. zTk imp. M(z)) imp. kT$\neg_1$x)]

und

TT47 Λx($\neg_1$x=Uy(QA(y) u. non yTx))

Zweitens gilt

TT48 Λx[Λz(xTz u. Uy(QA(y) u. non yTx)Tz imp. T(z)) u. Λk(Λz(xTz u. kTz imp. T(z)) imp. Uy(QA(y) u. non yTx)Tk)]

Beweis: (i) Ang. xTz u. Uy(QA(y) u. non yTx)Tz; ang. non T(z), also mit TT34 z≠k, also wegen zTk und AT3 non kTz, also mit AT5 Vm(QA(m) u. non mTz);
aber wegen xTz und AT1 Λm(QA(m) u. mTx imp. mTz);
und wegen Uy(QA(y) u. non yTx)Tz, TT18 und AT1 Λm(QA(m) u. non mTx imp. mTz);
also Λm(QA(m) imp. mTz) - Widerspruch;
demnach aus der 1. Annahme T(z);
(ii) ang. Λz(xTz u. kTz imp. T(z));
ang. QA(y') u. y'TUy(QA(y) u. non yTx);
(x) M(y'), also y'Tk;
(xx) non M(y'); also mit TT41 non y'Tx; nun xT(x∧k) u. kT(x∧k) (TT19, TT15, DT12); also mit der 1. Annahme T((x∧k)); also y'T(x∧k); also wegen QA(y') und TT38 y'Tx o. y'Tk, wegen non y'Tx also y'Tk;
demnach ist gezeigt Λy'(QA(y') u. y'TUy(QA(y) u. non yTx) imp. y'Tk), also mit AT5 Uy(QA(y) u. non yTx)Tk.

Durch TT48 ist DT15 im Blick auf TT15 gerechtfertigt, und es folgt

TT49 Λx[Λz(xTz u. $\neg_2$xTz imp. T(z)) u. Λk(Λz(xTz u. kTz imp. T(z)) imp. $\neg_2$xTk)]

und

I., 7.: Das Verbindungsaxiom

TT50 $\wedge x(\neg_2 x = \mathrm{U}y(\mathrm{Q}\lambda(y)$ u. non $y\mathrm{T}x))$

Drittens gilt:

TT51 $\wedge x(\neg_1 x = \neg_2 x)$
(abhängig von TT47 und TT50)

Durch TT51 ist DT16 im Blick auf TT15 gerechtfertigt, und es folgt

TT52 $\wedge x(\neg x = \neg_1 x$ u. $\neg x = \neg_2 x)$[3]

Anmerkungen:

[1]Auf S. 334 von "On the Foundations of Boolean Algebra" gibt Tarski für seinen Begriff des Atoms, der mit unserem Begriff des Elements äquivalent ist, fünf im System der erweiterten booleschen Algebra beweisbare Äquivalenzen an. In unser System umgeschrieben lauten die ersten drei
(i) Λx[El(x) äqu. Λy(non xTy äqu. xT¬y)],
(ii) Λx[El(x) äqu. x≠$\underline{t}$ u. ΛyΛz(x=(y∧z) imp. x=y o. x=z)],
(iii) Λx[El(x) äqu. x≠$\underline{t}$ u. ΛyΛz(xT(y∧z) imp. xTy o. xTz)].
Die übrigen beiden können wir nur halbseitig wiedergeben, da wir uns weder in einem mengentheoretischen System noch in einem System zweiter Stufe bewegen:
(iv^*) Λx(El(x) imp. (x=UyA[y] imp. A[x])),
(v^*) Λx[El(x) imp. (xTUyA[y] imp. Vy(A[y] u. xTy))].

(i) ist TT83 (siehe unten); (iii) folgt von links nach rechts mit DT20 und TT32 aus TT38; (v^*) folgt aus TT40 mit DT20. Das Übrige läßt sich in AT1 - AT6 ebenfalls beweisen; siehe dazu die nächste Anmerkung.

Zum Verhältnis zwischen Element- und (dem hier verwendeten) Atombegriff läßt sich sagen: Aus non VxM(x) folgt mittels der Definitionen Λx(El(x) äqu. A(x)); aus Λx(El(x) äqu. A(x)) folgt mit TT7, das auf AT3 zurückgeht, und den Definitionen non VxM(x). [Dasselbe gilt für Λx(El(x) äqu. QA(x)).] Nimmt man an, daß über mindestens zwei Entitäten gesprochen wird, so folgt in der extensionalen Mereologie non VxM(x) (siehe "On the Foundations of Boolean Algebra", S. 333, Fußnote; dort auch Bemerkungen Tarskis zum Verhältnis von erweiterter boolescher Algebra und Mereologie), demnach Λx(El(x) äqu. A(x)) [bzw. Λx(El(x) äqu. QA(x))]. Das ergibt sich, weil man dort das Prinzip ΛxΛy[xT^+y imp. Vz(zT^+y u. non Vk(kTz u. kTx))] hat (siehe *Parts*, S. 37: SA3; und S. 28: *Weak Supplementation Principle*).

[2]Die engste formale Verwandtschaft besteht aber nicht zwischen ϵ und dem ε der Mengenlehre, sondern zwischen ϵ und dem ε (singuläre Inklusion) von *Leśniewskis Ontologie* (kurz: *Ontologie*$_L$; dabei handelt es sich nicht um Leśniewskis Ansichten zur Ersten Philosophie, sondern um ein formales System mit einer bestimmten Interpretation: die Theorie individueller, allgemeiner und leerer Namen; siehe G. Küng, *Ontologie und logistische Analyse der Sprache*, S. 92ff). In den Prinzipien T1, T5, T17, T18 - T27 in C. Lejewski, "Zu Leśniewskis Ontologie", S. 60ff, ersetzen wir ε durch ϵ und schreiben sie dann um in die hier verwendete logische Notation. Alle diese generellen Äquivalenzen deuten wir als Definitionen; es werden dadurch allein durch ϵ (und logische Symbole) die Prädikate der Ontologie$_L$ definiert (starke Inklusion, schwache Inklusion, partikuläre Inklusion, singuläre Exklusion etc.). Das ursprüngliche einzige Axiom der Ontologie$_L$ (siehe "Zu Leśniewskis Ontologie", S.62: T34) lautet in unsere logische Notation umgeschrieben (mit ϵ statt ε):
ΛxΛy(xϵy äqu. Vz(zϵx) u. Λz(zϵx imp. zϵy) u. ΛzΛz'(zϵx u. z'ϵx imp. zϵz')); d.h. gemäß DT21 nach Elimination von Redundanzen ΛxΛy[El(x) u. xTy äqu. Vz(El(z) u. zTx) u. Λz(El(z) u. zTx imp. zTy) u. ΛzΛz'(El(z) u. zTx u. El(z') u. z'Tx imp. zTz')]. Dieser Satz läßt sich in AT1,AT3,AT5 (+ Definitionen) beweisen:
(i) Ang. El(x) u. xTy; nach AT2 (aus AT5) xTx; also Vz(El(z) u. zTx); nach AT1 aus xTy Λz(El(z) u. zTx imp. zTy); nun ang. El(z) u. zTx u. El(z') u. z'Tx; also wegen El(x) nach DT20, DT6 z=x u. z'=x , also z=z', also mit AT2 zTz';

(ii) ang. Vz(El(z) u. zTx) u. Λz(El(z) u. zTx imp. zTy) u. ΛzΛz'(El(z) u. zTx u. El(z') u. z'Tx imp. zTz'); ang. QA(z) u. zTx; falls M(z), dann zTy (nach DT4); falls non M(z), dann nach DT20 El(z), also laut Annahme zTy; demnach Λz(QA(z) u. zTx imp. zTy), also mit AT5 xTy; laut Annahme Vz(El(z) u. zTx); wäre nun non xTz, dann nach AT5 Vz'(QA(z') u. z'Tx u. non z'Tz), also, da non M(z'), nach DT20 Vz'(El(z') u. z'Tx u. non z'Tz); das aber widerspricht ΛzΛz'(El(z) u. zTx u. El(z') u. z'Tx imp. zTz'); demnach xTz, also mit AT3 x=z, also El(x).

Als formales System ist die Ontologie$_L$ also ein Teilsystem von AT1,AT3,AT5.

Die Ontologie$_L$ läßt sich auf das Prädikat der schwachen Inklusion als einzigem Grundbegriff gründen; diesem Prädikat entspricht T; geben wir es durch T wieder (ε durch ϵ), so erhalten wir als Lejewskis Definition von ε (in unserer Notation)

τετ' := Vy non τTy u. τTτ' u. ΛkΛk'Λk''(kTτ u. k'Tτ imp. kTk' o. k'Tk'')

und als Sobocinskis einziges Axiom der Ontologie$_L$

(S) ΛxΛy[xTy äqu. ΛzΛz'(non zTz' u. zTx u. ΛkΛk'Λk''(kTz u. k'Tz imp. kTk' o. k'Tk'') imp. zTy)]

(siehe "Zu Leśniewskis Ontologie", S. 64f: T54; T57).

(S),AT3 ist (bei DT6,DT4) deduktiv äquivalent mit AT1,AT3,AT5; Lejewskis Definition bzw. DT21 erscheint im jeweils anderen System als Theorem. (AT3 ist eine Möglichkeit, für die Ontologie$_L$ ein Extensionalitätspostulat auszudrücken.)

[3]In "On the Foundations of Boolean Algebra", S. 321ff formuliert Tarski ein mengentheoretisch eingebettetes System der booleschen Algebra ("*extended* (or *complete*) *system of Boolean algebra*"). In unserer - mengentheoretisch erweiterten - Notation lautet

sein Postulat $\mathfrak{X}_1$: (a) Λx(xεB imp. xTx),
(b) ΛxΛyΛz(xεB u. yεB u. zεB u. xTy u. yTz imp. xTz);

sein Postulat $\mathfrak{X}_2$: ΛxΛy(xεB u. yεB imp. (x=y äqu. xTy u. yTx));

sein Postulat $\mathfrak{X}_8$: Λx[x⊆B imp. Uy(yεx)εB u. Λz(zεx imp. zTUy(yεx)) u. Λz'(z'εB u. Λz(zεx imp. zTz') imp. Uy(yεx)Tz')]

(B ist das *universe of discourse*).

Diesen Postulaten entsprechen offenbar AT1 - AT3 und TT18, das wegen AT3 und DT17 mit AT4 äquivalent ist. Die Entsprechungen zu den übrigen Postulaten von Tarskis System $\mathfrak{X}_1$ - $\mathfrak{X}_{10}$ lassen sich sämtlich im System AT1 - AT6 (+ Definitionen) beweisen. Tarski selbst zeigt die Äquivalenz von $\mathfrak{X}_1$ - $\mathfrak{X}_{10}$ mit $\mathfrak{B}_1$ - $\mathfrak{B}_4$ (+ Definitionen; ebd., S. 324ff), in unserer Notation:

$\mathfrak{B}_1$ ΛxΛy(xεB u. yεB u. xTy u. yTx imp. x=y)

$\mathfrak{B}_2$ ΛxΛyΛz(xεB u. yεB u. zεB u. xTy u. yTz imp. xTz)

$\mathfrak{B}_3$ ΛxΛy[xεB u. yεB u. non xTy imp. Vz(zεB u. zTx u. non zTy u. Λk(kεB u. kTy u. kTz imp. Λv(vεB imp. kTv)))]

$\mathfrak{B}_4$ Λx[x⊆B imp. Vx'(x'εB u. Λy(yεx imp. yTx') u. Λz(zεB u. zTx' u. Λy(yεx imp. Λk(kεB u. kTy u. kTz imp. Λv(vεB imp. kTv))) imp. Λv(vεB imp. zTv)))],
übersichtlicher:
Λx[x⊆B imp. Vx'(x'εB u. Λy(yεx imp. yTx') u. Λz(zεB u. zTx' u. Λy(yεx imp. Λk(kεB u. kTy u. kTz imp. M_B(k))) imp. M_B(z)))]

$\mathfrak{B}_4$ entspricht das Theorem Vx'[Λy(A[y] imp. yTx') u. Λz(zTx' u.

Ay(A[y] imp. Ak(kTy u. kTz imp. M(k))) imp. M(z))], das mit AT6 folgt:
Ay(A[y] imp. yTUxA[x]) (nach TT18); ang. zTUxA[x]; ang. non M(z); also mit AT6 Vk(kTz u. non M(k) u. Vy(kTy u. A[y])), also Vy(A[y] u. Vk(kTy u. kTz u. non M(k))); folglich ergibt sich aus zTUxA[x] und der Annahme Ay(A[y] imp. Ak(kTy u. kTz imp. M(k))) M(z).
Daß die Entsprechungen zu $\mathfrak{B}_1$ - $\mathfrak{B}_3$ in AT1 - AT6 beweisbar sind, ist klar. (Bei Tarskis Äquivalenzbeweis entsprechen den Definitionen des Systems $\mathfrak{B}$ (siehe $\mathfrak{B}_5$,$\mathfrak{B}_6$) für +,.,0,1,',Σ,Π genau die hier angegebenen für ∧,∨,$\underline{t}$,$\underline{k}$,¬,U,∩ - bis auf die von ¬, die unwesentlich anders lautet als die von '.)

AT1 - AT6 ist aber stärker als die nichtmengentheoretische Entsprechung von $\mathfrak{A}_1$ - $\mathfrak{A}_{10}$ bzw. $\mathfrak{B}_1$ - $\mathfrak{B}_4$: Auf S. 334 definiert Tarski "x ist ein Atom" (bei ihm "xεAt") genauso, wie wir hier "x ist ein Element" ("El(x)") definieren; seinem ($\mathfrak{B}_1$ - $\mathfrak{B}_4$ verstärkendem) Atomismus-Postulat $\mathfrak{D}$ auf S. 335 entspricht daher das Prinzip Ax(x≠$\underline{t}$ imp. Vy(El(y) u. yTx)), das mit AT5 folgt:
Ang. x≠$\underline{t}$, also mit AT3 non xT$\underline{t}$ o. non $\underline{t}$Tx; $\underline{t}$Tx; also non xT$\underline{t}$, also mit AT5 Vy(QA(y) u. yTx u. non yT$\underline{t}$), also mit AT2, TT32 Vy(QA(y) u. non M(y) u. yTx), also mit DT20 Vy(El(y) u. yTx).
AT1 - AT6 (+ Definitionen) ist also mindestens so stark wie die nichtmengentheoretische Entsprechung zum *atomistic system of Boolean algebra*: $\mathfrak{A}_1$ - $\mathfrak{A}_{10}$, $\mathfrak{D}$ (S. 335). Man darf getrost davon ausgehen, daß es nicht stärker ist.

8. Theoreme für Negation, Konjunktion und Adjunktion

(a) Negation, Konjunktion und Adjunktion sind boolesche Funktionen, denn es gilt:

TT53 Für alle x,y,z:

(i) $(x\wedge\underline{t})=x$	(i') $(x\vee\underline{k})=x$
(ii) $(x\wedge\neg x)=\underline{k}$	(ii') $(x\vee\neg x)=\underline{t}$
(iii) $(x\wedge y)=(y\wedge x)$	(iii') $(x\vee y)=(y\vee x)$
(iv) $(x\wedge(y\vee z))=((x\wedge y)\vee(x\wedge z))$	(iv') $(x\vee(y\wedge z))=((x\vee y)\wedge(x\vee z))$

Beweis: (i) $xT(x\wedge\underline{t})$ u. $\underline{t}T(x\wedge\underline{t})$ u. $\wedge y(xTy$ u. $\underline{t}Ty$ imp. $(x\wedge\underline{t})Ty)$ (TT19, TT15, DT12); wegen AT2 xTx; wegen $M(\underline{t})$ $\underline{t}Tx$; also $(x\wedge\underline{t})Tx$; mit AT3 also $(x\wedge\underline{t})=x$;

(i') $(x\vee\underline{k})Tx$ u. $(x\vee\underline{k})T\underline{k}$ u. $\wedge y(yTx$ u. $yT\underline{k}$ imp. $yT(x\vee\underline{k}))$ (TT21, TT15, DT13); wegen AT2 xTx ; wegen $T(\underline{k})$ $xT\underline{k}$; also $xT(x\vee\underline{k})$; mit AT3 also $(x\vee\underline{k})=x$;

(ii) $\wedge z(xTz$ u. $zT\neg x$ imp. $T(z))$ (TT49, TT52); $xT(x\wedge\neg x)$ u. $\neg xT(x\wedge\neg x)$ (TT25, AT2); also $T((x\wedge\neg x))$, also mit TT34 $(x\wedge\neg x)=\underline{k}$;

(ii') $\wedge z(zTx$ u. $zT\neg x$ imp. $M(z))$ (TT46, TT52); $(x\vee\neg x)Tx$ u. $(x\vee\neg x)T\neg x$ (TT26, AT2); also $M((x\vee\neg x))$, also mit TT32 $(x\vee\neg x)=\underline{t}$;

(iii) $\wedge k(kTx$ o. kTy äqu. kTy o. $kTx)$, also mit TT29 $Uk(kTx$ o. $kTy)=Uk(kTy$ o. $kTx)$, also mit TT20 $(x\wedge y)=(y\wedge x)$;

(iii') $\wedge k(kTx$ u. kTy äqu. kTy u. $kTx)$, also mit TT29 $Uk(kTx$ u. $kTy)=Uk(kTy$ u. $kTx)$, also mit TT22 $(x\vee y)=(y\vee x)$;

(iv) $xT(x\wedge y)$ u. $xT(x\wedge z)$ (TT25, AT2); also mit TT23 $\underline{xT((x\wedge y)\vee(x\wedge z))}$;
$(y\vee z)Ty$ (TT26, AT2); $yT(x\wedge y)$ (TT25, AT2); also mit AT1 $\underline{(y\vee z)T(x\wedge y)}$;
$(y\vee z)Tz$; $zT(x\wedge z)$; also mit AT1 $\underline{(y\vee z)T(x\wedge z)}$;
aus den letzteren beiden Unterstrichenen mit TT23 $\underline{(y\vee z)T((x\wedge y)\vee(x\wedge z))}$; hieraus mit dem ersten Unterstrichenen und

TT24 $(x\wedge(y\vee z))T((x\wedge y)\vee(x\wedge z))$ ($\underline{1}$);
ang. $QA(z')$ u. $z'T((x\wedge y)\vee(x\wedge z))$, also mit TT23 $z'T(x\wedge y)$ u. $z'T(x\wedge z)$, also mit TT38 ($z'Tx$ o. $z'Ty$) u. ($z'Tx$ o. $z'Tz$), also $z'Tx$ o. ($z'Ty$ u. $z'Tz$), also mit TT23 $z'Tx$ o. $z'T(y\vee z)$, also mit TT25 $z'T(x\wedge(y\vee z))$; demnach $\bigwedge z'(QA(z')$ u. $z'T((x\wedge y)\vee(x\wedge z))$ imp. $z'T(x\wedge(y\vee z)))$, also mit AT5 $((x\wedge y)\vee(x\wedge z))T(x\wedge(y\vee z))$ ($\underline{2}$);
aus ($\underline{1}$) und ($\underline{2}$) mit AT3 $(x\wedge(y\vee z))=((x\wedge y)\vee(x\wedge z))$;

(iv') $(x\vee y)Tx$ u. $(x\vee z)Tx$ (TT26, AT2); also mit TT24 $\underline{((x\vee y)\wedge(x\vee z))Tx}$;
$(x\vee y)Ty$ (TT26, AT2); $yT(y\wedge z)$ (TT25, AT2); also mit AT1 $\underline{(x\vee y)T(y\wedge z)}$;
$(x\vee z)Tz$; $zT(y\wedge z)$; also mit AT1 $\underline{(x\vee y)T(y\wedge z)}$;
aus den letzteren beiden Unterstrichenen mit TT24 $\underline{((x\vee y)\wedge(x\vee z))T(y\wedge z)}$; hieraus mit dem 1. Unterstrichenen und TT23 $((x\vee y)\wedge(x\vee z))T(x\vee(y\wedge z))$ ($\underline{1}$);
ang. $QA(z')$ u. $z'T(x\vee(y\wedge z))$, also mit TT23 $z'Tx$ u. $z'T(y\wedge z)$, also mit TT38 $z'Tx$ u. ($z'Ty$ o. $z'Tz$), also $z'Tx$ u. $z'Ty$ o. $z'Tx$ u. $z'Tz$, also mit TT23 $z'T(x\vee y)$ o. $z'T(x\vee z)$, also mit TT25 $z'T((x\vee y)\wedge(x\vee z))$; demnach $\bigwedge z'(QA(z')$ u. $z'T(x\vee(y\wedge z))$ imp. $z'T((x\vee y)\wedge(x\vee z)))$, also mit AT5 $(x\vee(y\wedge z))T((x\vee y)\wedge(x\vee z))$ ($\underline{2}$);
aus ($\underline{1}$) und ($\underline{2}$) mit AT3 $(x\vee(y\wedge z))=((x\vee y)\wedge(x\vee z))$.

(b) Wir legen fest, daß $\neg$ stärker binde als $\wedge$ und $\vee$, und beweisen:

TT54 $\neg\underline{t}=\underline{k}$ u. $\neg\underline{k}=\underline{t}$

Beweis: Nach TT53(ii) $(\underline{t}\wedge\neg\underline{t})=\underline{k}$; nach TT53(i) $(\neg\underline{t}\wedge\underline{t})=\neg\underline{t}$, also nach TT53(iii) $(\underline{t}\wedge\neg\underline{t})=\neg\underline{t}$; also $\neg\underline{t}=\underline{k}$; nach TT53(ii') $(\underline{k}\vee\neg\underline{k})=\underline{t}$; nach TT53(i') $(\neg\underline{k}\vee\underline{k})=\neg\underline{k}$, also nach TT53(iii') $(\underline{k}\vee\neg\underline{k})=\neg\underline{k}$; also $\neg\underline{k}=\underline{t}$.

TT55 $\bigwedge x(x=\neg\neg x)$

Beweis: $x=(x\wedge\underline{t})$ nach TT53(i); $(\neg x\vee\neg\neg x)=\underline{t}$ nach TT53(ii'); also $x=(x\wedge(\neg x\vee\neg\neg x))$, also $x=((x\wedge\neg x)\vee(x\wedge\neg\neg x))$ nach TT53(iv), also $x=(\underline{k}\vee(x\wedge\neg\neg x))$ mit TT53(ii), also $\underline{x=(x\wedge\neg\neg x)}$ mit TT53(i') und TT53(iii');
$\neg\neg x=(\neg\neg x\wedge\underline{t})$ nach TT53(i); $(\neg x\vee x)=\underline{t}$ nach TT53(ii') und TT53(iii'); also $\neg\neg x=(\neg\neg x\wedge(\neg x\vee x))$, also $\neg\neg x=((\neg\neg x\wedge\neg x)\vee(\neg\neg x\wedge x))$ nach TT53(iv),

also $\neg\neg x=(\underline{k}\vee(\neg\neg x\wedge x))$ (denn $(\neg\neg x\wedge\neg x)=\underline{k}$ nach TT53(ii) und TT53(iii)), also $\underline{\neg\neg x=(x\wedge\neg\neg x)}$ nach TT53(i'), TT53(iii') und TT53(iii);
aus dem Unterstrichenen folgt $x=\neg\neg x$.

TT56 $\Lambda x\Lambda y(\neg(x\vee y)=(\neg x\wedge\neg y))$

Beweis: (i) QA(z) u. $zT\neg(x\vee y)$; falls M(z), dann trivialerweise $zT(\neg x\wedge\neg y)$; falls non M(z), dann mit TT41, TT52, TT47 non $zT(x\vee y)$, also mit TT23 non zTx o. non zTy, also mit TT18, wegen QA(z), zTUk(QA(k) u. non kTx) o. zTUk(QA(k) u. non kTy), also mit TT47, TT52 $zT\neg x$ o. $zT\neg y$, also mit TT25 $zT(\neg x\wedge\neg y)$;
(ii) QA(z) u. $zT(\neg x\wedge\neg y)$, also mit TT38 $zT\neg x$ o. $zT\neg y$; wenn M(z), dann trivialerweise $zT\neg(x\vee y)$; wenn non M(z), dann mit TT41, TT52, TT47 non zTx o. non zTy, also mit TT23 non $zT(x\vee y)$, also, wegen QA(z), mit TT18 zTUk(QA(k) u. non $kT(x\vee y)$), also mit TT47, TT52 $zT\neg(x\vee y)$;
mit (i) und (ii) folgt wegen AT5 und AT3 $\neg(x\vee y)=(\neg x\wedge\neg y)$.

TT57 $\Lambda x\Lambda y((x\vee y)=\neg(\neg x\wedge\neg y))$

Beweis: Nach TT56 $\neg(x\vee y)=(\neg x\wedge\neg y)$, also $\neg\neg(x\vee y)=\neg(\neg x\wedge\neg y)$, also mit TT55 $(x\vee y)=\neg(\neg x\wedge\neg y)$.

(c) Für den nächsten Abschnitt benötigen wir

TT58 $\Lambda x\Lambda y\Lambda z$(xTy imp. $(x\vee z)T(y\vee z)$)

Beweis: xTy; nun $(x\vee z)Tx$ u. $(x\vee z)Tz$; also mit AT1 $(x\vee z)Ty$ u. $(x\vee z)Tz$, also mit TT23 $(x\vee z)T(y\vee z)$.

Es gilt das *Kontrapositionstheorem*:

TT59 $\Lambda x\Lambda y$(xTy äqu. $\neg yT\neg x$)

Beweis: (i) xTy; wir zeigen Λz(QA(z) u. $zT\neg y$ imp. $zT\neg x$), woraus mit AT5 $\neg yT\neg x$ folgt; ang. QA(z) u. $zT\neg y$; (x) M(z), also $zT\neg x$; (xx) non M(z); also mit TT41, TT52 und TT47 non zTy, also wegen xTy und AT1 non zTx, also mit TT18 zTUk(QA(k) u. nonkTx), also

mit TT52 und TT47 $zT\neg x$;
(ii) nach dem bereits Bewiesenen folgt aus $\neg yT\neg x$ $\neg\neg xT\neg\neg y$, daraus nach TT55 xTy.

Mit TT55 erhält man aus TT59 leicht

TT60 $\bigwedge x\bigwedge y(xT\neg y$ äqu. $yT\neg x)$ u. $\bigwedge x\bigwedge y(\neg xTy$ äqu. $\neg yTx)$

(d) Wir definieren:

DT22 $\tau\supset\tau' := \neg\tau\vee\tau'$
(die Implikation von τ zu τ')

Durch DT22 wird die Implikation von τ zu τ' in Entsprechung zur Aussagenlogik definiert als die Adjunktion der Negation von τ, und von τ'.

TT61 $\bigwedge x\bigwedge y[x\rightarrow y$ äqu. $M((x\supset y))]$

Nach TT61 folgt in Entsprechung zur klassischen Logik[1] ein Sachverhalt y logisch aus einem Sachverhalt x genau dann, wenn die Implikation von x zu y ein tautologischer Sachverhalt ist.

Beweis: (i) $x\rightarrow y$, also mit DT11 yTx, also mit TT58 $(y\vee\neg x)T(x\vee\neg x)$, also mit TT53(ii') und TT53(iii') $(\neg x\vee y)T\underline{t}$; $\underline{t}T(\neg x\vee y)$, da $M(\underline{t})$; also mit AT3 $(\neg x\vee y)=\underline{t}$, also mit TT32 und DT22 $M((x\supset y))$;
(ii) $M((x\supset y))$, also $(y\vee\neg x)T(x\vee\neg x)$ (durch Umkehrung des Beweisgangs unter (i)), also mit TT23 $(y\vee\neg x)Tx$; ang. $QA(z)$ u. zTy; ($\underline{x}$) ang. non $zT(y\vee\neg x)$; also non zTy o. non $zT\neg x$ nach TT23; also non $zT\neg x$, also non $M(z)$ u. non $zTUk(QA(k)$ u. non $kTx)$ (mit TT52, TT47), also mit TT41 non non zTx, also zTx; ($\underline{xx}$) ang. $zT(y\vee\neg x)$, also mit AT1 wegen $(y\vee\neg x)Tx$ zTx; demnach $\bigwedge z(QA(z)$ u. zTy imp. $zTx)$, also mit AT5 yTx, also mit DT11 $x\rightarrow y$.

Anmerkungen:

[1]Für den (satzbezogenen) Folgerungsbegriff der klassischen Logik und die materiale Implikation (als Satzoperator, nicht als Termoperator) gilt: B folgt logisch aus A gdw. $(A \supset B)$ logisch wahr ist. TT61 ist das ontologische Äquivalent dazu.

9. Die große Adjunktion

(a) Wie der kleinen Konjunktion eine große Konjunktion entspricht, so entspricht der kleinen Adjunktion eine große Adjunktion:

DT23 ⋂xA[x] := ιz[⋀x(A[x] imp. zTx) u. ⋀y(⋀x(A[x] imp. yTx) imp. yTz)]
(die Adjunktion der x, so daß gilt A[x])

Durch DT23 wird die Adjunktion der A definiert als das größte Ganze, das Teil von allen A ist. Bezogen auf den Grundbereich bedeutet das, daß die Adjunktion der A-Sachverhalte definiert wird als der logisch stärkste Sachverhalt, der aus allen A-Sachverhalten logisch folgt.

(b) Nach AT3 gibt es höchstens ein z, das für ein gegebenes A[x] die kennzeichnende Beschreibung in DT23 erfüllt. Daß es auch stets ein z gibt, das für ein gegebenes A[x] die kennzeichnende Beschreibung in DT23 erfüllt, braucht nicht eigens gefordert zu werden, denn es ist bereits beweisbar:

TT62 ⋁z[⋀x(A[x] imp. zTx) u. ⋀y(⋀x(A[x] imp. yTx) imp. yTz)]

Beweis: Man betrachte ⋃k⋀y'(A[y'] imp. kTy'); nun ⋀x(A[x] imp. ⋀k(⋀y'(A[y'] imp. kTy') imp. kTx)), also mit TT28 ⋀x(A[x] imp. ⋃k⋀y'(A[y'] imp. kTy')T⋃k(kTx)), also mit TT30 ⋀x(A[x] imp. ⋃k⋀y'(A[y'] imp. kTy')Tx); nach TT18 gilt ⋀y(⋀x(A[x] imp. yTx) imp. yT⋃k⋀y'(A[y'] imp. kTy')); aus dem Unterstrichenen folgt ⋁z(⋀x(A[x] imp. zTx) u. ⋀y(⋀x(A[x] imp. yTx) imp. yTz)).

Mit dem Beweis von TT62 ist im Blick auf DT23 und AT3 auch gezeigt:

TT63 ⋂xA[x]=⋃y⋀x(A[x] imp. yTx)

(c) Nach TT57 ist die kleine Adjunktion durch die kleine Konjunktion und die Negation definierbar; nach TT63 kann die große Adjunktion *ohne* Verwendung der Negation durch die große Konjunktion definiert werden. Es gilt aber auch in Analogie zu TT57

TT64 ∩xA[x]=¬UyVx(A[x] u. y=¬x)
(Die Adjunktion der x, so daß gilt A[x], ist die Negation der Konjunktion der Negationen der x, so daß gilt A[x])

Beweis: (i) Ang. QA(z) u. zT¬UyVx(A[x] u. y=¬x); für M(z) folgt trivialerweise zT∩xA[x]; für non M(z) folgt gemäß TT41, TT52 und TT47 non zTUyVx(A[x] u. y=¬x), also nach TT40 non Vk(zTk u. Vx(A[x] u. k=¬x));
ang. (γ) Vx(A[x] u. non zTx), also, da QA(z), wegen TT18 zTUk(QA(k) u. non kTx); mit TT52 und TT47 Uk(QA(k) u. non kTx)=¬x; wir haben also aus (γ) Vx(A[x] u. Vk(zTk u. k=¬x)) – was im Widerspruch zum Unterstrichenen steht;
demnach Λx(A[x] imp. zTx), also mit TT18 zTUyΛx(A[x] imp. yTx), also mit TT63 zT∩xA[x];
(ii) ang. QA(z) u. zT∩xA[x], also mit TT63 zTUyΛx(A[x] imp. yTx); für M(z) folgt trivialerweise zT¬UyVx(A[x] u. y=¬x); für non M(z) folgt gemäß TT40 Vk(zTk u. Λx(A[x] imp. kTx)), also mit AT1 Λx(A[x] imp. zTx);
ang. (γ) zTUyVx(A[x] u. y=¬x), also mit TT40 Vk(zTk u. Vx(A[x] u. k=¬x)), also Vx(A[x] u. zT¬x), also mit TT52, TT47 und TT41 (wegen QA(z) u. non M(z)) Vx(A[x] u. non zTx); wir haben also aus (γ) einen Widerspruch zum Unterstrichenen;
demnach non zTUyVx(A[x] u. y=¬x), also wegen QA(z) mit TT18, TT47, TT52 zT¬UyVx(A[x] u. y=¬x);
mit (i) und (ii) folgt nach AT5 und AT3 ∩xA[x]=¬UyVx(A[x] u. y=¬x).

(d) Die große Adjunktion ist ebenso leistungsstark wie die große Konjunktion, und wir hätten ein zum gegebenen deduktiv äquivalentes Axiomensystem der Sachverhaltsontologie in Beziehung auf die große Adjunktion formulieren können. TT62 statt AT4 wäre dann eines der Axiome gewesen. Man beachte, daß aus TT62 – ohne Verwendung von AT1, AT4, AT5 und AT6 – AT4 folgt (so wie umgekehrt aus AT4 – ohne Verwendung von AT1, TT62, AT5 und AT6 – TT62 folgt): Aus TT62 ergibt sich wegen DT23 und AT3

TT65 ⋀x(A[x] imp. ⋂zA[z]Tx) u. ⋀y(⋀x(A[x] imp. yTx) imp. yT⋂zA[z])

Aus TT65 folgt

TT66 ⋀x(A[x] imp. B[x]) imp. ⋂zB[z]T⋂zA[z]

Beweis: Ang. ⋀x(A[x] imp. B[x]), also mit TT65 ⋀x(A[x] imp. ⋂zB[z]Tx), also mit TT65 ⋂zB[z]T⋂zA[z];

und

TT67 ⋀z(z=⋂z'(zTz'))

Beweis: zTz nach AT2, also nach TT65 ⋂z'(zTz')Tz; ⋀x(zTx imp. zTx), also nach TT65 zT⋂z'(zTz'); also mit AT3 z=⋂z'(zTz').

Man betrachte nun ⋂k⋀y'(A[y'] imp. y'Tk); es gilt ⋀x(A[x] imp. ⋀k(⋀y'(A[y'] imp. y'Tk) imp. xTk)), also mit TT66 ⋀x(A[x] imp. ⋂k(xTk)T⋂k⋀y'(A[y'] imp. y'Tk)), also mit TT67 ⋀x(A[x] imp. xT⋂k⋀y'(A[y'] imp. y'Tk)); nach TT65 gilt außerdem ⋀x(⋀y'(A[y'] imp. y'Tx) imp. ⋂k⋀y'(A[y'] imp. y'Tk)Tx);
mit dem Unterstrichenen folgt unmittelbar AT4, und wegen TT15 und TT18, die sich aus AT3, DT17 und AT4 ergeben, folgt

TT68 ⋃xA[x]=⋂y⋀x(A[x] imp. xTy)

Nach TT68 ist in einem Axiomensystem, das TT62 statt AT4, AT2 und AT3 enthält, die große Konjunktion durch die große Adjunktion definierbar. Die große Konjunktion liegt aber intuitiv näher als die große Adjunktion, insofern das Zusammenfassen intuitiv näher liegt als das Schnittbilden; deshalb haben wir das Axiomensystem der Sachverhaltsontologie in Beziehung auf die große Konjunktion formuliert.

10. Mögliche Welten und Elementsachverhalte

(a) Mithilfe der Negation und der Teilbeziehung definieren wir drei Begriffe, deren gleichnamigen Analoga als Eigenschaften von Satzmengen aus der Metamathematik bekannt sind:

DT24 $\quad$ $Kon(\tau) := \text{non } \bigvee x(xT\tau \text{ u. } \neg xT\tau)$
(τ ist konsistent)

DT25 $\quad$ $Max(\tau) := \bigwedge x(xT\tau \text{ o. } \neg xT\tau)$
(τ ist maximal)[1]

DT26 $\quad$ $MK(\tau) := Max(\tau) \text{ u. } Kon(\tau)$
(τ ist maximal-konsistent)

Mit den Definitionen folgt unmittelbar

TT69 $\quad$ $\bigwedge y(MK(y) \text{ äqu. } \bigwedge x(\text{non } xTy \text{ äqu. } \neg xTy))$

Nach TT69 ist ein Ganzes genau dann maximal-konsistent, wenn bzgl. jedes Ganzen *entweder* dieses selbst *oder* dessen Negation Teil von ihm ist. Im Blick auf den Grundbereich von PT sind die maximal-konsistenten Ganzen die maximal-konsistenten Sachverhalte; die maximal-konsistenten Sachverhalte aber - jene Sachverhalte, aus denen bzgl. jedes Sachverhaltes entweder dieser selbst oder dessen Negation logisch folgt - sind die *möglichen Welten*. Dementsprechend lesen wir $MK(\tau)$, solange wir den Grundbereich nicht wechseln, auch als "τ ist eine mögliche Welt".

(b) Es gelten die folgenden drei Theoreme:

TT70 $\quad$ $\bigwedge x(Kon(x) \text{ äqu. } x \neq \underline{k})$

Beweis: (i) Ang. $Kon(x)$, d.h. $\bigwedge y(\text{non } yTx \text{ o. non } \neg yTx)$; aber $\underline{k}T\underline{k}$ u. $\neg\underline{k}T\underline{k}$ (denn $\bigwedge y(yT\underline{k})$, da $T(\underline{k})$); also $x \neq \underline{k}$;
(ii) ang. $x \neq \underline{k}$, also $\bigwedge y(\text{non } yTx \text{ o. non } \neg yTx)$, denn sonst wegen TT49 und TT52 $T(x)$, also mit TT34 $x = \underline{k}$ - Widerspruch; also $Kon(x)$.

TT71 Λx(Max(x) äqu. TO(x))

Beweis: (i) Ang. Max(x); ang. xTy u. non T(y); zu zeigen ist für TO(x) gemäß DT7 y=x; nach Annahme xTy, also bleibt wegen AT3 zu zeigen yTx; ang. non yTx, also, da Max(x), ¬yTx, also wegen xTy mit AT1 ¬yTy; wegen AT2 yTy; also mit TT49 und TT52 T(y) - im Widerspruch zur Annahme;
demnach Λy(xTy imp. y=x o. T(y)), also TO(x);
(ii) ang. TO(x), d.h. Λy(xTy imp. y=x o. T(y)); ang. non yTx u. non ¬yTx; nun xT(x∧y) und xT(x∧¬y) (TT25, AT2); also wegen TO(x) [(x∧y)=x o. T((x∧y))] u. [(x∧¬y)=x o. T((x∧¬y))]; aus non yTx (x∧y)≠x, denn sonst wegen yT(x∧y) yTx; aus non ¬yTx (x∧¬y)≠x, denn sonst wegen ¬yT(x∧¬y) ¬yTx; folglich T((x∧y)) u. T((x∧¬y)), also $\underline{k}$T(x∧y) u. $\underline{k}$T(x∧¬y), also mit TT23 $\underline{k}$T((x∧y)∨(x∧¬y)), also mit TT53 $\underline{k}$T(x∧(y∨¬y)), also mit TT53 $\underline{k}$T(x∧$\underline{t}$), also mit TT53 $\underline{k}$Tx, also mit AT3 x=$\underline{k}$ (denn xT$\underline{k}$); folglich yTx u. ¬yTx - im Widerspruch zur Annahme;
demnach Λy(yTx o. ¬yTx), also Max(x).

TT72 Λx(MK(x) äqu. TO(x) u. x≠$\underline{k}$)
(abhängig von TT70, TT71 und DT26)

(c) Zwischen Tota und Quanta besteht ein Zusammenhang, durch den sich der Zusammenhang zeigt, der zwischen möglichen Welten und Sachverhaltsquanta bzw. Sachverhaltselementen besteht:

TT73 Λx(QA(¬x) äqu. TO(x))

Beweis: (i) Ang. TO(x), also Λy(xTy imp. y=x o. T(y)); ang. yT¬x u. y≠¬x; für QA(¬x) ist zu zeigen M(y); nach TT60 aus yT¬x xT¬y; also ¬y=x o. T(¬y); ¬y≠x, denn sonst ¬¬y=¬x, also mit TT55 y=¬x, aber laut Annahme y≠¬x; also T(¬y), also mit TT34 ¬y=$\underline{k}$, also ¬¬y=¬$\underline{k}$, also mit TT55 und TT54 y=$\underline{t}$, also mit TT32 M(y);
(ii) ang. QA(¬x), also Λy(yT¬x imp. y=¬x o. M(y)); ang. xTy u. y≠x; für TO(x) ist zu zeigen T(y); nach TT59 aus xTy ¬yT¬x; also ¬y=¬x o. M(¬y); ¬y≠¬x, denn sonst ¬¬y=¬¬x, also mit TT55 y=x, aber laut Annahme y≠x; also M(¬y), also mit TT32 ¬y=$\underline{t}$, also ¬¬y=¬$\underline{t}$, also mit TT55 und TT54 y=$\underline{k}$, also mit TT34 T(y).

Aus TT73 folgt mit TT55 unmittelbar

TT74 $\bigwedge x(QA(x) \text{ äqu. } TO(\neg x))$

Weiterhin gilt

TT75 $\bigwedge x(QA(x) \text{ äqu. } \bigvee y(TO(y) \text{ u. } x=\neg y))$
(*Ein Ganzes ist genau dann ein Quantum, wenn es die Negation eines Totums ist*; abhängig von TT74, TT55 TT73)

TT76 $\bigwedge x(QA(x) \text{ äqu. } x=\underline{t} \text{ o. } \bigvee y(MK(y) \text{ u. } x=\neg y))$
(Bezogen auf Sachverhalte: *Ein Sachverhalt ist genau dann ein Sachverhaltsquantum, wenn er der tautologische Sachverhalt oder die Negation einer möglichen Welt ist*; abhängig von TT75, TT54, TT72, TT36, DT6)

TT77 $\bigwedge x(El(x) \text{ äqu. } \bigvee y(MK(y) \text{ u. } x=\neg y))$
(*Ein Sachverhalt ist genau dann ein Elementsachverhalt, wenn er die Negation einer möglichen Welt ist*; abhängig von DT20, TT76, TT32, TT72, TT55, TT54, TT73)

TT78 $\bigwedge x(El(\neg x) \text{ äqu. } MK(x))$

Beweis: (i) $El(\neg x)$, also mit DT20 $QA(\neg x)$ u. non $M(\neg x)$, also $TO(x)$ mit TT73; also mit TT32 $\neg x \neq \underline{t}$, also $\neg\neg x \neq \neg\underline{t}$ (denn sonst mit TT55 aus $\neg\neg\neg x = \neg\neg\underline{t}$ $\neg x = \underline{t}$), also mit TT55, TT54 $x \neq \underline{k}$; demnach mit TT72 $MK(x)$;
(ii) $MK(x)$, also mit TT72 $TO(x)$ u. $x \neq \underline{k}$, also mit TT73, TT55, TT54 $QA(\neg x)$ u. $\neg x \neq \underline{t}$, also mit TT32, DT20 $El(\neg x)$.

TT75 stellt die umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit der Tota auf die Quanta fest, TT77 die umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit der möglichen Welten auf die Elementsachverhalte.

(d) Das Verhältnis der möglichen Welten untereinander betrifft Theorem

TT79 $\bigwedge x \bigwedge y(MK(x) \text{ u. } MK(y) \text{ u. } xTy \text{ imp. } y=x)$

Beweis: Ang. MK(x) u. MK(y) u. xTy, also TO(x) u. TO(y) u. $y \neq \underline{k}$ mit TT72, also nach DT7 y=x o. T(y); nun non T(y) nach TT34, da $y \neq \underline{k}$; also y=x.

Nach TT79 besteht zwischen verschiedenen möglichen Welten keine Beziehung der logischen Folgerung; sie sind voneinander unabhängig.[2] Ebenso besteht zwischen verschiedenen Elementsachverhalten keine Beziehung der logischen Folgerung, denn es gilt:

TT80 $\quad \Lambda x \Lambda y(\mathrm{El}(x)$ u. $\mathrm{El}(y)$ u. xTy imp. $x=y)$
(abhängig von DT20, DT6)

(e) Nach TT69 gilt, daß ein Sachverhalt genau dann eine mögliche Welt ist, wenn bzgl. jedes Sachverhalts entweder dieser selbst oder dessen Negation aus ihm logisch folgt. In Entsprechung hierzu ist ein Sachverhalt genau dann ein Elementsachverhalt, wenn er bzgl. jedes Sachverhalts *entweder* aus diesem *oder* aus dessen Negation logisch folgt; denn es ist beweisbar:

TT83 $\quad \Lambda y(\mathrm{El}(y)$ äqu. $\Lambda x($non yTx äqu. $yT\neg x))$

Wir zeigen TT83, indem wir beweisen:

TT81 $\quad \Lambda y($non $M(y)$ äqu. non $Vx(yTx$ u. $yT\neg x))$

und

TT82 $\quad \Lambda y(QA(y)$ äqu. $\Lambda x(yTx$ o. $yT\neg x))$,

aus denen sich TT83 mit DT20 ergibt.

Beweis von TT81: (i) Ist y ein Minimum, so ist es Teil von allem, also ist es sowohl Teil von sich selbst als auch Teil seiner Negation, also gibt es etwas, so daß y sowohl Teil davon als auch Teil dessen Negation ist;
(ii) aus Vx(yTx u. yT¬x) folgt nach TT46, TT52 M(y).

Beweis von TT82: (i) Ang. QA(y) u. non yTx, also mit TT18 yTUz(QA(z) u. non zTx), also mit TT50, TT52 yT¬x; demnach QA(y)

Aus TT73 folgt mit TT55 unmittelbar

TT74 $\Lambda x(QA(x) \text{ äqu. } TO(\neg x))$

Weiterhin gilt

TT75 $\Lambda x(QA(x) \text{ äqu. } Vy(TO(y) \text{ u. } x=\neg y))$
(*Ein Ganzes ist genau dann ein Quantum, wenn es die Negation eines Totums ist*; abhängig von TT74, TT55 TT73)

TT76 $\Lambda x(QA(x) \text{ äqu. } x=\underline{t} \text{ o. } Vy(MK(y) \text{ u. } x=\neg y))$
(Bezogen auf Sachverhalte: *Ein Sachverhalt ist genau dann ein Sachverhaltsquantum, wenn er der tautologische Sachverhalt oder die Negation einer möglichen Welt ist*; abhängig von TT75, TT54, TT72, TT36, DT6)

TT77 $\Lambda x(El(x) \text{ äqu. } Vy(MK(y) \text{ u. } x=\neg y))$
(*Ein Sachverhalt ist genau dann ein Elementsachverhalt, wenn er die Negation einer möglichen Welt ist*; abhängig von DT20, TT76, TT32, TT72, TT55, TT54, TT73)

TT78 $\Lambda x(El(\neg x) \text{ äqu. } MK(x))$

Beweis: (i) $El(\neg x)$, also mit DT20 $QA(\neg x)$ u. non $M(\neg x)$, also $TO(x)$ mit TT73; also mit TT32 $\neg x \neq \underline{t}$, also $\neg\neg x \neq \neg\underline{t}$ (denn sonst mit TT55 aus $\neg\neg\neg x = \neg\neg\underline{t}$ $\neg x = \underline{t}$), also mit TT55, TT54 $x \neq \underline{k}$; demnach mit TT72 $MK(x)$;
(ii) $MK(x)$, also mit TT72 $TO(x)$ u. $x \neq \underline{k}$, also mit TT73, TT55, TT54 $QA(\neg x)$ u. $\neg x \neq \underline{t}$, also mit TT32, DT20 $El(\neg x)$.

TT75 stellt die umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit der Tota auf die Quanta fest, TT77 die umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit der möglichen Welten auf die Elementsachverhalte.

(d) Das Verhältnis der möglichen Welten untereinander betrifft Theorem

TT79 $\Lambda x \Lambda y(MK(x) \text{ u. } MK(y) \text{ u. } xTy \text{ imp. } y=x)$

Beweis: Ang. MK(x) u. MK(y) u. xTy, also TO(x) u. TO(y) u. y≠**k** mit TT72, also nach DT7 y=x o. T(y); nun non T(y) nach TT34, da y≠**k**; also y=x.

Nach TT79 besteht zwischen verschiedenen möglichen Welten keine Beziehung der logischen Folgerung; sie sind voneinander unabhängig.[2] Ebenso besteht zwischen verschiedenen Elementsachverhalten keine Beziehung der logischen Folgerung, denn es gilt:

TT80 ΛxΛy(El(x) u. El(y) u. xTy imp. x=y)
(abhängig von DT20, DT6)

(e) Nach TT69 gilt, daß ein Sachverhalt genau dann eine mögliche Welt ist, wenn bzgl. jedes Sachverhalts entweder dieser selbst oder dessen Negation aus ihm logisch folgt. In Entsprechung hierzu ist ein Sachverhalt genau dann ein Elementsachverhalt, wenn er bzgl. jedes Sachverhalts *entweder* aus diesem *oder* aus dessen Negation logisch folgt; denn es ist beweisbar:

TT83 Λy(El(y) äqu. Λx(non yTx äqu. yT¬x))

Wir zeigen TT83, indem wir beweisen:

TT81 Λy(non M(y) äqu. non Vx(yTx u. yT¬x))

und

TT82 Λy(QA(y) äqu. Λx(yTx o. yT¬x)),

aus denen sich TT83 mit DT20 ergibt.

Beweis von TT81: (i) Ist y ein Minimum, so ist es Teil von allem, also ist es sowohl Teil von sich selbst als auch Teil seiner Negation, also gibt es etwas, so daß y sowohl Teil davon als auch Teil dessen Negation ist;
(ii) aus Vx(yTx u. yT¬x) folgt nach TT46, TT52 M(y).

Beweis von TT82: (i) Ang. QA(y) u. non yTx, also mit TT18 yTUz(QA(z) u. non zTx), also mit TT50, TT52 yT¬x; demnach QA(y) imp. ⋀x(yTx o. yT¬x);

(ii) ang. ⋀x(yTx o. yT¬x); ang. zTy u. non M(z); für QA(y) ist zu zeigen z=y; nach der 1. Annahme yTz o. yT¬z; wenn yTz, dann nach AT3 wegen zTy z=y; wenn yT¬z, dann nach AT1 wegen zTy zT¬z, woraus mit zTz (AT2) und TT46, TT52 M(z) resultiert - was der Annahme widerspricht; demnach folgt aus den Annahmen z=y.

(f) In Entsprechung zu DT24 und DT25 definieren wir

DT27 Sch(τ) := non ⋁x(τTx u. τT¬x)
(τ ist gehaltvoll)

DT28 Min(τ) := ⋀x(τTx o. τT¬x)
(τ ist minimal)

Mit TT83 erhält man dann

TT84 ⋀y(El(y) äqu. Min(y) u. Sch(y))
(Die Elementsachverhalte sind die minimalen gehaltvollen Sachverhalte)

Anmerkungen:

[1]Das Definiens von DT25 ist äquivalent mit ∧x(non xTτ imp. $\underline{k}$T(τ∧x)) ("τ kann nicht vergrößert werden, ohne daß ein Widerspruch folgt"): (i) Ang. ∧x(xTτ o. ¬xTτ), non xTτ ; also ¬xTτ; nun τT(τ∧x) (TT25); also mit AT1 ¬xT(τ∧x); außerdem xT(τ∧x) (TT25); also mit TT24 (x∧¬x)T(τ∧x), also mit TT53 $\underline{k}$T(τ∧x);
(ii) ang. ∧x(non xTτ imp. $\underline{k}$T(τ∧x)), non xTτ; also $\underline{k}$T(τ∧x), also mit TT59 ¬(τ∧x)T¬$\underline{k}$, also mit TT54 und TT55 ¬(¬¬τ∧¬¬x)T$\underline{t}$, also mit TT57 (¬τ∨¬x)T$\underline{t}$, also mit DT22 (τ⊃¬x)T$\underline{t}$, also mit TT36 und TT32 M((τ⊃¬x)), also mit TT61 und DT11 ¬xTτ.
∧x(non xTτ imp. $\underline{k}$(τ∧x)) steht in enger Analogie zum Begriff der Maximalität einer Satzmenge beim henkinschen Vollständigkeitsbeweis; siehe *Einführung in die Logik*, S. 67.

[2](i) x und y sind *schwach* voneinander unabhängig := non xTy u. non yTx

In diesem Sinne sind verschiedene mögliche Welten voneinander unabhängig.

(ii) x und y sind *stark* voneinander unabhängig := non xTy u. non ¬xTy u. non yTx u. non ¬yTx

In *diesem* Sinne sind verschiedene mögliche Welten *nicht* voneinander unabhängig; wohl aber sind es verschiedene Elementsachverhalte, wenn es mehr als zwei Elementsachverhalte gibt. - (ii) definiert noch nicht den stärksten Unabhängigkeitsbegriff, sondern:

(iii) x und y sind *absolut* voneinander unabhängig := non M(x) u. non M(y) u. ∧z∧z'(non M(z) u. non M(z') u. zTx u. z'Ty imp. z und z' sind stark voneinander unabhängig)

In diesem Sinne voneinander unabhängig sind nur (nicht absolut minimale) Sachverhalte, die "nichts" miteinander gemein haben: Ang. x und y sind absolut voneinander unabhängig; also sind beide nicht absolut minimal; da (x∨y)Tx u. (x∨y)Ty, aber (x∨y) und (x∨y) nicht stark voneinander unabhängig sind, folgt außerdem M((x∨y)). - Für Elementsachverhalte gilt, daß sie absolut voneinander unabhängig sind, wenn sie stark voneinander unabhängig sind.

Mit Atomizität von Sachverhalten wird logische Unabhängigkeit voneinander assoziiert (so bei Wittgenstein; siehe E. Stenius, *Wittgensteins Traktat*, S. 51). Die Sachverhalte, die man gewöhnlich als atomare Sachverhalte ansieht (Russell in "The Philosophy of Logical Atomism", S. 176: "The simplest imaginable facts are those which consist in the possession of a quality by some particular thing. Such facts, say, as 'This is white'"), sind aber im hier verwendeten Sinn alles andere als atomar - auch wenn wir hier "atomar" dasselbe besagen lassen wie "elementar". Sie sind dementsprechend auch nicht stark voneinander unabhängig (aus "dies ist weiß" folgt "dies ist nicht rot"). - Allenthalben wird epistemische und relative Atomizität mit ontologischer verwechselt (sehr gut zu dieser Verwechslung bezogen auf Universalien D. M. Armstrong, *A Theory of Universals*, II, S. 34). (x∨y) ist kein Sachverhalt, der irgendwie aus den Sachverhalten x und y zusammengesetzt ist; er ist vielmehr - als Teil von beiden - in der Regel sowohl einfacher als x, als auch einfacher als y. Unser vorherrschendes epistemisches Interesse an den Sachverhalten x und y (sie sind z.B. elementare Wahrnehmungsinhalte) berechtigt zu der Aussage, daß sie *epistemisch* einfacher sind als (xvy). Zu mehr nicht.

11. Logische Möglichkeit und logische Notwendigkeit

(a) Logisch möglich bzw. notwendig sind primär Sachverhalte. Ein Sachverhalt ist logisch notwendig genau dann, wenn seine Negation nicht logisch möglich ist; in der philosophischen Tradition gibt es aber zwei verschiedene Bestimmungen des Begriffes der logischen Möglichkeit. Die ältere ist, daß ein Sachverhalt genau dann logisch möglich ist, wenn er keinen Widerspruch beinhaltet. Die neuere, auf Leibniz zurückgehende ist, daß ein Sachverhalt genau dann logisch möglich ist, wenn er in einer logisch möglichen Welt besteht.

Die zweite Bestimmung ist im gegebenen System nicht zirkulär, denn logisch mögliche Welten sind, was wir als "mögliche Welten" bezeichnet haben (wir verstanden also "möglich" im Sinne von "logisch möglich"), d.h. maximal-konsistente Sachverhalte, zu deren Definition man den Möglichkeitsbegriff nicht benötigt.[1] Ebensowenig ist die erste Bestimmung zirkulär, denn was ein Widerspruch ist, läßt sich ohne Bezugnahme auf den Möglichkeitsbegriff sagen. Ihr Definiens ist wiederzugeben durch "non $\underline{k}$Tτ" ("non τ→$\underline{k}$"); das Definiens der zweiten Bestimmmung dagegen durch "Vy(MK(y) u. τTy)".

(b) Es liegt nicht auf der Hand, daß die beiden Definitionen äquivalent sind. Sie sind es aber tatsächlich; denn zunächst gilt:

TT85   Λx(Vy(MK(y) u. xTy) imp. non $\underline{k}$Tx)

Beweis: Ang. Vy(MK(y) u. xTy); ang. $\underline{k}$Tx; nun T($\underline{k}$), also xT$\underline{k}$; also mit AT3 x=$\underline{k}$; also Vy(MK(y) u. $\underline{k}$Ty), also, da yT$\underline{k}$, mit AT3 y=$\underline{k}$ – was TT72 widerspricht; demnach non $\underline{k}$Tx.

Man beweist leicht

TT86   Λx(xT$\underline{t}$ imp. Λy(MK(y) imp. xTy))

Aus der Umkehrung von TT86 aber folgt die Umkehrung von TT85:

Ang. ⋀x(⋀y(MK(y) imp. xTy) imp. xT$\underline{t}$), also ⋀y(MK(y) imp. ¬xTy) imp. ¬xT$\underline{t}$, also non ¬xT$\underline{t}$ imp. ⋁y(MK(y) u. non ¬xTy), also mit TT69 non ¬xT$\underline{t}$ imp. ⋁y(MK(y) u. xTy), also non $\underline{k}$Tx imp. ⋁y(MK(y) u. xTy) mit TT60 und TT54. - Mit dem Beweis der Umkehrung von TT86 wäre demnach die Äquivalenz der beiden Möglichkeitsdefinitionen bewiesen.

Nun gelten:

TT87 ⋀x(⋀y(MK(y) imp. xTy) imp. xT$\underline{t}$) äqu. ⋂xMK(x)=$\underline{t}$

Beweis: (i) Ang. ⋂xMK(x)=$\underline{t}$; ang. ⋀y(MK(y) imp. x'Ty), also x'T⋂xMK(x) mit TT63, TT18, also x'T$\underline{t}$;
(ii) ang. ⋀x(⋀y(MK(y) imp. xTy) imp. xT$\underline{t}$); nun ⋀y(MK(y) imp. ⋂xMK(x)Ty) nach TT65; also ⋂xMK(x)T$\underline{t}$, also wegen $\underline{t}$T⋂xMK(x) und AT3 ⋂xMK(x)=$\underline{t}$.

TT88 ⋂xMK(x)=$\underline{t}$ äqu. UxEl(x)=$\underline{k}$

Beweis: ⋂xMK(x)=¬Ux⋁y(MK(y) u. x=¬y) nach TT64, also nach TT77 mit TT29 ⋂xMK(x)=¬UxEl(x); also ⋂xMK(x)=$\underline{t}$ äqu. ¬UxEl(x)=$\underline{t}$ also ⋂xMK(x)=$\underline{t}$ äqu. UxEl(x)=$\underline{k}$ mit TT54, TT55.

TT89 UxEl(x)=$\underline{k}$

Beweis: Ohnehin gilt UxEl(x)T$\underline{k}$; außerdem aber $\underline{k}$TUxEl(x); denn ⋀y(QA(y) imp. yTUxEl(x)), denn nach TT18, DT20 ⋀y(QA(y) u. non M(y) imp. yTUxEl(x)) und ohnehin ⋀y(M(y) imp. yTUxEl(x)), also ⋀y(QA(y) u. yT$\underline{k}$ imp. yTUxEl(x)), also mit AT5 $\underline{k}$TUxEl(x);
mit AT3 folgt demnach UxEl(x)=$\underline{k}$.

Aus TT87, TT88 und TT89 erhält man die Umkehrung von TT86

TT90 ⋀x(⋀y(MK(y) imp. xTy) imp. xT$\underline{t}$)

Aus TT90 aber ergibt sich, wie wir schon gesehen haben, die Umkehrung von TT85

TT91 ⋀x(non $\underline{k}$Tx imp. ⋁y(MK(y) u. xTy))

(c) Wir definieren

DT29 $P(\tau) := \bigvee y(MK(y) \text{ u. } \tau Ty)$
(τ ist logisch möglich)[2]

DT30 $N(\tau) := \text{non } P(\neg\tau)$
(τ ist logisch notwendig)[3]

und können dann beweisen:

TT92 $\bigwedge x(N(x) \text{ äqu. } \bigwedge y(MK(y) \text{ imp. } xTy))$
(*Ein Sachverhalt ist logisch notwendig genau dann, wenn er in jeder möglichen Welt besteht*)[4]

Beweis: $N(x)$, d.h. nach DT30 $\text{non } P(\neg x)$, d.h. nach DT29 $\text{non } \bigvee y(MK(y) \text{ u. } \neg xTy)$, d.h. nach TT85, TT91 $\underline{k}T\neg x$, d.h. nach TT60, TT54 $xT\underline{t}$, d.h. nach TT86, TT90 $\bigwedge y(MK(y) \text{ imp. } xTy)$.

(d) Es gelten folgende Theoreme:

TT93 (i) $\bigwedge x \bigwedge y(N((x \wedge y)) \text{ äqu. } N(x) \text{ u. } N(y))$
(ii) $\bigwedge x \bigwedge y(N(x) \text{ o. } N(y) \text{ imp. } N((x \vee y)))$

TT94 (i) $\bigwedge x \bigwedge y(P((x \vee y)) \text{ äqu. } P(x) \text{ o. } P(y))$
(ii) $\bigwedge x \bigwedge y(P((x \wedge y)) \text{ imp. } P(x) \text{ u. } P(y))$

Beweis von TT93: (i) $N((x \wedge y))$, d.h. $(x \wedge y)\underline{t}$ mit TT92, TT90 und TT86, d.h. $xT\underline{t}$ u. $yT\underline{t}$ mit TT24, d.h. $N(x)$ u. $N(y)$ mit TT92, TT90 und TT86;
(ii) $N(x)$ o. $N(y)$, d.h. nach TT92, TT90 und TT86 $xT\underline{t}$ o. $yT\underline{t}$; nach TT26 also $(x \vee y)T\underline{t}$, d.h. $N((x \vee y))$.

Beweis von TT94: (i) $P((x \vee y))$, d.h. non $\underline{k}T(x \vee y)$ mit DT29, TT91 und TT85, d.h. non $\underline{k}Tx$ o. non $\underline{k}Ty$ mit TT23, d.h. $P(x)$ o. $P(y)$ mit DT29, TT91 und TT85;
(ii) $P((x \wedge y))$, d.h. nach DT29, TT91 und TT85 non $\underline{k}T(x \wedge y))$; nach TT25 also non $\underline{k}Tx$ u. non $\underline{k}Ty$, d.h. $P(x)$ u. $P(y)$.

Hingegen können wir $\bigwedge x(N(x) \text{ imp. non } N(\neg x))$ und $\bigwedge x(\text{non } P(x) \text{ imp.}$

P(¬x)) noch nicht beweisen; denn beide Sätze sind äquivalent mit <u>t≠k</u>, das in AT1 - AT6 nicht beweisbar ist. Aus <u>t≠k</u> folgt, daß es mindestens zwei Ganze gibt; AT1 - AT6 ist aber auch über einem Grundbereich erfüllbar, der genau eine Entität, z.B. die leere Menge umfaßt; demnach ist <u>t≠k</u> in AT1 - AT6 nicht beweisbar. Mit <u>t≠k</u> gehen wir also über AT1 - AT6 hinaus.

(e) Bevor wir das tun, überzeugen wir uns von der Widerspruchsfreiheit von AT1 - AT6, eben indem wir T als Teilmengenbeziehung auffassen und als Grundbereich die Gesamtheit aller Teilmengen der leeren Menge wählen. Die Erfülltheit der Axiome AT1 - AT4 bei dieser Deutung hatten wir schon festgestellt (siehe 5., (b)). Es gilt bei ihr nämlich Λx(x=Ø) ("Ø" sei objektsprachlicher Name der leeren Menge), und AT1 gilt, denn angenommen xTy u. yTz; dann sind x und z Ø, und wegen ØTØ folgt xTz;
AT2 gilt, denn ØTØ und Λx(x=Ø);
AT3 gilt, denn ΛxΛy(x=y);
AT4 gilt, denn Λx(A[x] imp. xTØ) u. Λy(Λx(A[x] imp. xTy) imp. ØTy), da Λx(xTØ) und Λx(ØTx) wegen ØTØ und Λx(x=Ø);
AT5 gilt, denn ΛxΛy(xTy);
AT6 gilt, denn ΛxΛy(xTy), d.h. ΛxM(x), woraus sich AT6 ergibt, da in seinem Antezedenz "non M(x)" steht.

Anmerkungen:

[1]Der Begriff der (logisch) möglichen Welt, den A. Plantinga in *The Nature of Necessity*, S. 44f einführt, läßt sich dagegen zu einer Bestimmung des Begriffs der logischen Möglichkeit nicht gebrauchen, sondern setzt diesen schon voraus: "A possible world, then, is a possible state of affairs - one that is possible in the broadly logical sense. But not every possible state of affairs is a possible world. ... Let us say that a state of affairs S *includes* a state of affairs S' if it is not possible (in the broadly logical sense) that S obtain and S' fail to obtain ... Similarly, a state of affairs S *precludes* a state of affairs S' if it is not possible that both obtain ... a state of affairs S is *complete* or *maximal* if for every state of affairs S', S includes S' or S precludes S'. And a possible world is simply a possible state of affairs that is maximal." Die enge Verwandtschaft von Plantingas Bestimmung des Begriffs der möglichen Welt zu der hier gegebenen (insbesondere in der Auffassung von möglichen Welten als Sachverhalte) ist aber offensichtlich.

Ganz anders - man könnte sagen, nicht wittgensteinisch, sondern leibnizisch (zu Leibniz' Konzeption der möglichen Welt siehe B. Mates, "Leibniz über mögliche Welten", S. 317 und F. v. Kutschera, "Grundbegriffe der Metaphysik von Leibniz ...", S. 102, Fußnote) - ist Reschers Bestimmung dieses Begriffs: "possible worlds simply *are* collections of possible individuals duly combined with one another ... A possible world is thus not just any set of possible individuals. Only a *compossible* set of possible individuals qualifies as a possible world, and any such world must, accordingly, meet not only the logical conditions of L-compossibility among its members, but also the conditions of metaphysical compossibility (M-compossibility) specified above - and perhaps ultimately those of nomic N-compossibility as well" (*A Theory of Possibility*, S. 78 und S. 82). - Wie zu Anfang dieses Kapitels gesagt wurde, sind Sachverhalte das, was im primären Sinn möglich ist (wie der Sprachgebrauch zeigt) - und nicht Individuen bzw. Mengen von Individuen. So betrachtet ist es gegenüber Reschers Vorgehensweise natürlicher (und einfacher), bzgl. Sachverhalte - via mögliche Welten als maximal-konsistente Sachverhalte - zu erklären, was Möglichsein heißt, und mittels dieses Begriffes *dann* zu sagen, was mögliche Individuen und Mengen von kompossiblen Individuen (mögliche Welten in Reschers Sinn) sind. (Bei Rescher dagegen kommen Sachverhalte als Subjekte des Möglichseins überhaupt nicht vor!)

Für D. Lewis im Kontrast zu Plantinga und Rescher sind mögliche Welten weder Sachverhalte noch Mengen von (möglichen) Individuen, sondern sehr umfassende (mögliche) Individuen: "The world we live in is a very inclusive thing. Every stick and every stone you have ever seen is part of it. And so are you and I. And so are the planet Earth, the solar system, the entire Milky Way, the remote galaxies we see through telescopes, and (if there are such things) all the bits of empty space between the stars and galaxies. ... Likewise the world is inclusive in time. ... There are countless other worlds, other very inclusive things. ... The other worlds are of a kind with this world of ours. ... The difference between this and the other worlds is not a categorial difference" (*On the Plurality of Worlds*, S. 1 und S. 2). Lewis unterscheidet zwischen Welten und der jeweiligen Weise, wie sie sind (kurz: ihrer *Weltweise*): "The way things are, at its most inclusive, means the way this entire world is. But things might have been different, in ever so many ways. ... There are ever so many ways that a world might be; and one of these many ways is the way that this world is. Are there other worlds that are other ways? ... There are so many other worlds, in fact, that absolutely *every* way that a world could possibly be is a way that some world *is*" (ebd., S. 1 und S. 2). Interessanterweise verwendet Lewis hier offenbar die *unbestreitbare* Pluralität der Weltweisen (d.h. von allumfassenden konsistenten Sachverhalten) als Plausibilitätsargument für die Pluralität von Welten in seinem Sinn (es handelt sich *bestenfalls* um ein Plausibilitätsargument; macht, daß es viele Weisen gibt, in der ein Apfel sein könnte, es plausibel, daß es viele (mögliche) Äpfel gibt, die in diesen Weisen sind?). Warum nicht gleich die vielen Weltweisen als mögliche Welten ansehen, anstatt ein dickes Buch zur Verteidigung der Pluralität von möglichen Welten aufgefaßt *als Individuen* schreiben? Denn an der Existenz von vielen Weltweisen kann man schwerlich zweifeln; wer wollte bestreiten, daß "this book of mine might have been finished on schedule. ... Or I might not have existed at all ... Or there might never have been any people. Or the physical constants might have had somewhat different values, incompatible with the emergence of life ..." (ebd., S. 1)? Lewis freilich glaubt nicht an Sachverhalte als Grundentitäten, sondern nur an Sachverhalte als Mengen von möglichen Welten *in seinem Sinn* (letztlich glaubt er nur an Mengen und - mögliche - Individuen): "Understand that I am *not* opposed to states of affairs, ways things might be, possibilities, or structures. I believe in all those things. That is to say, I believe in entities that deserve the names because they are well suited to play the roles. The entities I put forward as candidates are the same in every case: sets of worlds. Worlds as *I* understand them: us and all our surroundings, and other things like that" (ebd., S. 185). Weltweisen erscheinen danach als Einermengen von Lewis-Welten. Dann ist aber das Argument von der Vielheit der Weltweisen auf die Vielheit der Lewis-Welten zirkulär. Bzw. dann wird das Prinzip "absolutely every way that a world could possibly be is a way that some world is" trivialisiert, was Lewis auch selbst einsieht (ebd., S. 87), ohne sich sonderlich daran zu stören (obwohl es doch um seine *zentrale* Behauptung: die Vielheit der Welten geht; er geht zu einem Prinzip der Rekombination über).

[2]D. M. Armstrong schreibt in *A Theory of Universals*, Bd. II, S. 14: "In general, a good philosophical methodology for an Empiricist seems to be this: be rather hospitable to claims about logical possibility, reserve one's scepticism for claims about what actually exists". Dazu paßt nicht Armstrongs generelle Ablehnung von Possibilia, inklusive mögliche Welten (siehe ebd., Bd. I, S. 22, S. 35f, S.128). Armstrong hat sich offenbar keinerlei Gedanken über das ontologische Fundament von Möglichkeitsbehauptungen gemacht. Seine Position ist - überspitzt(?) formuliert -: "Als Empiristen sollten wir vieles als reine Möglichkeit gelten lassen, aber es gibt nichts für uns Empiristen, was eine reine Möglichkeit ist".

[3]Bei den mit DT29, DT30 eingeführten Begriffen handelt es sich um Modalprädikate, nicht um (namenbildende) *Modaloperatoren.* Für die P und N entsprechenden Modaloperatoren p, n muß gelten:
Λy(MK(y) imp. Λx(p(x)Ty äqu. Vy'(MK(y') u. xTy'))), Λy(MK(y) imp. Λx(n(x)Ty äqu. Λy'(MK(y') imp. xTy'))); d.h. nach TT85, TT91, TT86 und TT90 Λy(MK(y) imp. Λx(p(x)Ty äqu. non $\underline{k}$Tx)), Λy(MK(y) imp. Λx(n(x)Ty äqu. xT$\underline{t}$)); d.h.:

Λx(n(x)=$\underline{t}$ äqu. x=$\underline{t}$),
Λx(n(x)=$\underline{k}$ äqu. x≠$\underline{t}$),
Λx(p(x)=$\underline{t}$ äqu. x≠$\underline{k}$),
Λx(p(x)=$\underline{k}$ äqu. x=$\underline{k}$), wenn man annimmt: VyMK(y) (woraus sich ergibt: $\underline{t}$≠$\underline{k}$, was seinerseits VyMK(y) impliziert; $\underline{t}$≠$\underline{k}$: das ist der Inhalt der Behauptung, daß es mögliche Welten gibt; siehe dazu 16., (f)). - Man braucht sich nicht auf die P und N entsprechenden Modaloperatoren zu beschränken; für beliebige Modaloperatoren p_i, n_i muß gelten:
Λy(MK(y) imp. Λx(p_i(x)Ty äqu. Vy'(MK(y') u. y'R_iy u. xTy'))),
Λy(MK(y) imp. Λx(n_i(x)Ty äqu. Λy'(MK(y') u. y'R_iy imp. xTy'))).
R_i ist hier die p_i, n_i entsprechende (bei alethischen Modaloperatoren zumindest reflexive) *Zugänglichkeitsrelation*; die beiden Sätze spiegeln die in der intensionalen Semantik übliche Weise, Wahrheitsbedingungen für Sätze mit (satzbildenden) Modaloperatoren anzugeben (vergl. F. v. Kutschera, *Einführung in die intensionale Semantik*, S. 28f). - Allgemein werden Modaloperatoren so definiert:

p_i(τ) := ∩y''(MK(y'') u. Vy'(MK(y') u. y'R_iy'' u. τTy'))

n_i(τ) := ¬p_i(¬τ)

p(τ) insbesondere ist demnach definiert als ∩y''(MK(y'') u. Vy'(MK(y') u. τTy')) (das Glied "y'=y' u. y''=y''" kann ja weggelassen werden). Wir zeigen aufgrund der Definition:

Λy(MK(y) imp. Λx(p_i(x)Ty äqu. Vy'(MK(y') u. y'R_iy u. xTy')))

Ang. MK(y); (i) Vy'(MK(y') u. y'R_iy u. xTy'), also mit TT65 ∩y''(MK(y'') u. Vy'(MK(y') u. y'R_iy'' u. xTy'))Ty, also p_iTy; (ii) p_i(x)Ty, also mit dem Theorem Λy(MK(y) u. ∩zA[z]Ty imp. Vz(A[z] u. zTy)) Vy''(MK(y'') u. Vy'(MK(y') u. y'R_iy'' u. xTy') u. y''Ty), also, da MK(y), mit TT79 y=y'', also Vy'(MK(y') u. y'R_iy u. xTy').

Bleibt, das herangezogene Theorem zu zeigen:

Ang. MK(y) u. ∩zA[z]Ty; ang. non Vz(A[z] u. zTy); also mit TT64 ¬Ux'Vz(A[z] u. x'=¬z)Ty); also wegen MK(y) Λz(A[z] imp. ¬zTy), also Ux'Vz(A[z] u. x'=¬z)Ty mit TT18, denn Λx'(Vz(A[z] u. x'=¬z) imp. x'Ty); das Unterstrichene widerspricht der Annahme MK(y); folglich Vz(A[z] u. zTy) (bei Beibehaltung der übrigen Annahmen).

[4]B. Mates schreibt in *The Philosophy of Leibniz*, S. 73: "Insofar as I am aware, Leibniz never defines a necessary truth as a proposition true of all possible worlds; as definitions he gives, instead, various versions of 'a necessary truth is a proposition the opposite of which implies a contradiction'". In unserem System entspricht der Definition von Leibniz Λx(N(x) äqu. $\underline{k}$T¬x), was ebenfalls beweisbar ist: N(x), d.h. mit DT30 non P(¬x), d.h. mit DT29, TT91, TT85 $\underline{k}$T¬x. - Es gibt aber eine Stelle - wie Mates selbst darlegt -, wo Leibniz wenn nicht der Definition, so doch der Charakterisierung der Notwendigkeit als Wahrheit in allen möglichen Welten sehr nahekommt; siehe *The Philosophy of Leibniz*, S. 107.

12. Die Welt und die Wahrheit

(a) AT1 - AT6 ist eine Axiomatisierung der fundamentalen Sachverhaltsontologie (vergl. 1., (d)). Der Ausbau der fundamentalen Sachverhaltsontologie zur *vollen* Sachverhaltsontologie besteht in der Aufstellung der Axiome AT7 - AT9. Damit sie formulierbar werden, muß die Sprache PT um die Konstante $\underline{w}$ ("die Welt") erweitert werden; AT7 - AT9 stellen Charakterisierungen dieser Konstante im Sinne des Grundbereichs von Sachverhalten dar; ihre Gültigkeit ist weit stärker auf diesen Grundbereich bezogen, als das bei den Axiomen AT4 - AT6 der Fall ist, und selbst bei Deutung über Sachverhalten sind sie problematischer als alle vorausgehenden Axiome. Mindestens eines von ihnen gilt - auch in Relativierung auf Sachverhalte - offenbar nicht analytisch.

(b) "Die Welt ist alles, was der Fall ist", sagt Wittgenstein und gebraucht die Bezeichnung "die Welt" als Name für einen Sachverhalt (in unserem Sinne, nicht im Sinne Wittgensteins!), nämlich als Name für die Konjunktion (oder Summe) aller existierenden (bestehenden) Sachverhalte (aller *Tatsachen*). Wir haben bemerkt, daß nicht generell $\Lambda x(A[x]$ äqu. $xTUyA[y])$ gilt (vergl. 7., (a)); wohl aber gilt es speziell für das Prädikat E(x): "x existiert" bei Inbetrachtziehung des Grundbereichs von Sachverhalten, denn $\Lambda x(E(x)$ äqu. $xTUyE(y))$ besagt dann: "Ein Sachverhalt besteht genau dann, wenn er aus der Konjunktion aller bestehenden Sachverhalte logisch folgt"; d.h. im Sinne Wittgensteins "Ein Sachverhalt besteht genau dann, wenn er Teilsachverhalt der Welt ist".[1] Dies rechtfertigt, indem wir $\underline{w}$ als Grundausdruck wählen, die folgende Definition:

DT31 $E(\tau) := \tau T\underline{w}$
(τ ist ein existierender - bestehender - Sachverhalt; τ ist eine Tatsache; τ ist der Fall)

Die Definition des Existenzprädikats in DT31 ist spezifisch für den Grundbereich; sie kann sich als inadäquat herausstellen, wenn ein anderer Grundbereich gewählt wird, und muß dann aufgegeben werden. Mit DT31 und TT30 folgt sofort:

TT95 $\underline{w}$=UxE(x)
(*Die Welt ist alles, was der Fall ist*)

(c) Der nicht sprachbezogene Wahrheitsbegriff ist ein ontologischer Begriff; er fällt zusammen mit dem Existenzbegriff für Sachverhalte: *Eine Entität ist genau dann wahr, wenn sie ein existierender (bestehender) Sachverhalt ist.* In *diesem* Sinne gilt "Ens et verum convertuntur", und wir definieren:

DT32 W(τ) := E(τ)
(τ ist wahr; diese Leseweise ist aufzugeben, wenn der Grundbereich gewechselt wird)

DT33 F(τ) := W(¬τ)
(τ ist falsch; diese Leseweise ist aufzugeben, wenn der Grundbereich gewechselt wird)

(d) Generell gilt:

TT96 Λx(UzA[z]Tx äqu. Λy(A[y] imp. yTx))

Beweis: (i) Ang. UzA[z]Tx; ang. A[y], also mit TT18 yTUzA[z]; also mit AT1 yTx; demnach Λy(A[y] imp. yTx);
(ii) ang. Λy(A[y] imp. yTx), also mit TT18 UzA[z]Tx.

Aus TT96 folgt mit DT31, DT32

TT97 W(UzA[z]) äqu. Λy(A[y] imp. W(y))
(*Die Konjunktion aller A-Sachverhalte ist genau dann wahr, wenn alle A-Sachverhalte wahr sind*)

TT97 ist das zentrale Gesetz des Wahrseins; aus ihm folgen Wahrheitsgesetze für alle Operatoren, die sich mittels der großen Konjunktion ausdrücken lassen, also auch für ∧, ∨, ¬ und ∩. Die Wahrheitsgesetze, die sich für die genannten Operatoren aus TT97 ergeben, sind freilich - bis auf das für ∧ - nicht die, an die man von der Semantik der Aussagenlogik ausgehend zunächst denkt;

sie sind nämlich die Wahrheitsgesetze, die für diese Operatoren *unabhängig* davon gelten, wie die Welt als Sachverhalt ontologisch charakterisiert wird. Erst wenn man diese so charakterisiert, daß die ontologische Entsprechung zum Postulat der Wahrheitsdefinitheit $\bigwedge x(\text{non } W(x) \text{ äqu. } F(x))$ ("Jeder Sachverhalt ist entweder wahr oder falsch") beweisbar wird, erhält man Wahrheitsgesetze, die in exakter Analogie zu den vertrauten semantischen Festlegungen für die entsprechenden aussagenlogischen Operatoren[2] stehen. Für $\wedge$ jedoch gilt:

TT98 $\bigwedge x \bigwedge y(W((x \wedge y)) \text{ äqu. } W(x) \text{ u. } W(y))$
(*Die Konjunktion der Sachverhalte x und y ist genau dann wahr, wenn beide Sachverhalte wahr sind*)

Beweis: Mit TT97 und TT20 erhält man $\bigwedge x \bigwedge y(W((x \wedge y)) \text{ äqu. } \bigwedge k(kTx \text{ o. } kTy \text{ imp. } W(k)))$; außerdem aber gilt wegen AT1, AT2 und DT31, DT32 $\bigwedge x \bigwedge y(\bigwedge k(kTx \text{ o. } kTy \text{ imp. } W(k)) \text{ äqu. } W(x) \text{ u. } W(y))$.

(e) Man beweist leicht

TT99 $\bigwedge x(F(x) \text{ äqu. } \neg \underline{w}Tx)$
(abhängig von DT33, DT32, DT31, TT60)

Generell gilt

TT100 $\bigwedge x(xT\bigcap zA[z] \text{ äqu. } \bigwedge y(A[y] \text{ imp. } xTy))$

Beweis: (i) Ang. $xT\bigcap zA[z]$; ang. $A[y]$, also mit TT65 $\bigcap zA[z]Ty$; also xTy mit AT1; demnach $\bigwedge y(A[y] \text{ imp. } xTy)$;
(ii) ang. $\bigwedge y(A[y] \text{ imp. } xTy)$, also mit TT65 $xT\bigcap zA[z]$.

Aus TT100 folgt mit TT99

TT101 $F(\bigcap zA[z]) \text{ äqu. } \bigwedge y(A[y] \text{ imp. } F(y))$
(*Die Adjunktion aller A-Sachverhalte ist genau dann falsch, wenn alle A-Sachverhalte falsch sind*)

TT101 ist das zentrale Gesetz des Falschseins. Für es gelten mutatis mutandis genau dieselben Betrachtungen wie für TT97. v ist nun der Operator, für den sich schon mit TT101 das nach der aussagenlogischen Semantik zu erwartende Falschheitsgesetz beweisen läßt, denn es gilt

TT102 $\bigwedge x \bigwedge y((x \vee y) = \bigcap z(z=x \text{ o. } z=y))$

Beweis: Nach TT65 $\bigwedge z'(z'=x \text{ o. } z'=y \text{ imp. } \bigcap z(z=x \text{ o. } z=y)Tz')$ u. $\bigwedge k(\bigwedge z'(z'=x \text{ o. } z'=y \text{ imp. } kTz') \text{ imp. } kT\bigcap z(z=x \text{ o. } z=y))$; also $\bigcap z(z=x \text{ o. } z=y)Tx$ u. $\bigcap z(z=x \text{ o. } z=y)Ty$ u. $\bigwedge k(kTx \text{ u. } kTy \text{ imp. } kT\bigcap z(z=x \text{ o. } z=y))$; wegen TT21, TT15 und DT13 folgt also $(x \vee y) = \bigcap z(z=x \text{ o. } z=y)$.

Hiermit

TT103 $\bigwedge x \bigwedge y(F((x \vee y)) \text{ äqu. } F(x) \text{ u. } F(y))$

Beweis: $\bigwedge x \bigwedge y[(x \vee y) = \bigcap z(z=x \text{ o. } z=y)]$ nach TT102; also mit TT101 $\bigwedge x \bigwedge y(F((x \vee y)) \text{ äqu. } \bigwedge z(z=x \text{ o. } z=y \text{ imp. } F(z)))$; außerdem aber $\bigwedge x \bigwedge y(\bigwedge z(z=x \text{ o. } z=y \text{ imp. } F(z)) \text{ äqu. } F(x) \text{ u. } F(y))$.

Anmerkungen:

[1]Das Prädikat E ist also *kumulativ*: "if a sum exists, the predicate which applies to the parts applies to the whole" (P. Simons, *Parts*, S. 111), und es ist *homomer*: "A property ist homoeomerous if and only if for all particulars, *x*, which have that property, then for all *parts y* of *x*, *y* also has that property" (D. Armstrong, *A Theory of Universals*, II, S. 68; man setze statt "property" "predicate", statt "particular" "entity").

[2]Der großen Adjunktion entspricht der infinitäre Satzoperator der Adjunktion, der aus Satzmengen Sätze bildet. Er ist semantisch so definiert: Die Adjunktion der Sätze aus A ist wahr genau dann, wenn mindestens ein Satz aus A wahr ist. - Die Konjunktion der Sätze aus A ist dagegen gemäß der Semantik infinitärer Sprachen wahr genau dann, wenn jeder Satz aus A wahr ist. Dem entspricht TT97. (Zu infinitären Satzoperatoren/Sprachen vergl. H. D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, S. 177f.)

13. Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch

(a) Die Welt als Sachverhalt ist nicht der kontradiktorische Sachverhalt, denn sonst bestünde nach DT31, $T(\underline{k})$ und DT5 jeder Sachverhalt, was unbezweifelbar nicht der Fall ist. Die Frage ist aber: Ist $\underline{w} \neq \underline{k}$ ein analytischer Satz, wenn von Sachverhalten die Rede ist? - Von der Bedeutung des Ausdrucks "die Welt", gebraucht als Bezeichnung eines gewissen Sachverhaltes, haben wir keine Vorstellung, die über das, was $\wedge x(E(x)$ äqu. $xT\underline{w})$ ("E" hier als Grundausdruck genommen; Quantifikation über Sachverhalte) zum Ausdruck bringt, hinausreicht. Mit diesem Bedeutungspostulat erhält man als analytisch wahren Satz $E(\underline{k})$ äqu. $\underline{k}T\underline{w}$; analytisch wahr ist auch $\underline{k}T\underline{w}$ äqu. $\underline{w}=\underline{k}$, wenn wir die Axiome AT1 - AT6 bezogen auf Sachverhalte als analytisch wahr ansehen; demnach wäre $E(\underline{k})$ äqu. $\underline{w}=\underline{k}$ ein analytisch wahrer Satz, und also $\underline{w} \neq \underline{k}$ genau dann analytisch wahr, wenn es non $E(\underline{k})$ ist. Ist es eine analytische Wahrheit, daß der kontradiktorische Sachverhalt, d.h. der Sachverhalt, aus dem alle Sachverhalte logisch folgen, nicht existiert?

(b) Mit $\underline{w} \neq \underline{k}$ sind außer non $E(\underline{k})$ äquivalent: $\vee x$ non $E(x)$, $Kon(\underline{w})$ (nach TT70), non $\vee x(E(x)$ u. $E(\neg x))$ (nach TT70, DT24, DT31), non $\vee x(W(x)$ u. $F(x))$ (nach TT70, DT24, DT31, DT32, DT33), $\wedge x$ non $W((x\wedge\neg x))$, denn ang. $W((x\wedge\neg x))$, also mit TT53 $W(\underline{k})$, also mit DT32, DT31 $\underline{k}T\underline{w}$, wegen $\underline{w}T\underline{k}$ also mit AT3 $\underline{w}=\underline{k}$; demnach $\underline{w} \neq \underline{k}$ imp. $\wedge x$ non $W((x\wedge\neg x))$; nun ang. $\wedge x$ non $W((x\wedge\neg x))$, also non $W(\underline{k})$ mit TT53, also non $\underline{k}T\underline{w}$, also $\underline{w} \neq \underline{k}$ wegen AT2; demnach $\wedge x$ non $W((x\wedge\neg x))$ imp. $\underline{w} \neq \underline{k}$.

(c) Wir setzen als Axiom

AT7 $\quad \underline{w} \neq \underline{k}$

Alle angeführten äquivalenten Formulierungen erscheinen dann als Theoreme. Aus AT7 folgt außerdem

TT104 $\quad \underline{t} \neq \underline{k}$

Beweis: $\underline{t}T\underline{w}$, da $M(\underline{t})$; wäre $\underline{t}=\underline{k}$, so würde also folgen $\underline{k}T\underline{w}$, also wegen $\underline{w}T\underline{k}$, da $T(\underline{k})$, mit AT3 $\underline{w}=\underline{k}$ – im Widerspruch zu AT7.

Mit TT104 sind $\wedge x(N(x)$ imp. non $N(\neg x))$ und $\wedge x(P(x)$ o. $P(\neg x))$ bewiesen (vergl. 11., (d)). TT104 ist wegen TT54 äquivalent mit $\underline{t}\neq\neg\underline{t}$, was wiederum nur ein Spezialfall von

TT105 $\wedge x(x\neq\neg x)$ ist.

Beweis: Ang. $x=\neg x$; nach TT53 $(x\wedge\neg x)=\underline{k}$ und $(x\vee\neg x)=\underline{t}$; also $(x\wedge x)=\underline{k}$ und $(x\vee x)=\underline{t}$; also $x=\underline{k}$ und $x=\underline{t}$ (denn $x=(x\wedge x)$ nach TT24, AT2, TT25 und AT3; und $x=(x\vee x)$ nach TT23, AT2, TT26 und AT3), also $\underline{t}=\underline{k}$ im Widerspruch zu TT104.

Wie man sieht ist $\underline{t}\neq\underline{k}$, d.h. $\underline{t}\neq\neg\underline{t}$ nicht nur ein Spezialfall von TT105, sondern mit ihm äquivalent.

14. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten

(a) TO($\underline{w}$) ist nach TT71 äquivalent mit Max($\underline{w}$), dies nach DT25 mit $\wedge$x(xT$\underline{w}$ o. $\neg$xT$\underline{w}$), dies nach DT31 mit $\wedge$x(E(x) o. E($\neg$x)), dies nach DT32 und DT33 mit $\wedge$x(W(x) o. F(x)) - "Jeder Sachverhalt ist wahr oder falsch". All diese Äquivalenzen gelten bezogen auf Sachverhalte analytisch, wenn man davon ausgeht, daß AT1 - AT6 bezogen auf Sachverhalte analytisch gelten. Speziell gilt dann TO($\underline{w}$) äqu. $\wedge$x(E(x) o. E($\neg$x)) bezogen auf Sachverhalte analytisch.

(b) Es ist zweifelhaft, ob $\underline{w} \neq \underline{k}$ analytisch gilt, wenn von Sachverhalten die Rede ist; erst recht ist zweifelhaft, ob dann TO($\underline{w}$) analytisch gilt; und es ist auch bezweifelbar (wenn auch nicht zweifelhaft), daß es überhaupt gilt. Ein Anschein der analytischen Gültigkeit von $\wedge$x(E(x) o. E($\neg$x)) bezogen auf Sachverhalte entsteht dadurch, daß man die tatsächliche analytische, weil logische Gültigkeit von $\wedge$x(E(x) o. non E(x)) ("Ein Sachverhalt besteht oder besteht nicht") auf $\wedge$x(E(x) o. E($\neg$x)) überträgt. Dieser Schritt ist aber nur dann legitim, wenn bezogen auf Sachverhalte $\wedge$x(non E(x) imp. E($\neg$x)), d.h. aber $\wedge$x(E(x) o. E($\neg$x)) analytisch gilt, was eben die Frage ist.

(c) Daß TO($\underline{w}$) bezogen auf Sachverhalte gilt, wird sehr fraglich, wenn man eine relativistische Haltung gegenüber Sachverhalten und deren Existenz (der Wahrheit) einnimmt. Wenn selbst sogenannte externe Tatsachen etwas *weitgehend* von uns Abhängiges sind,[1] dann ist das auch die Summe der Tatsachen (die Welt), und es ist kaum glaubhaft, daß diese Summe ein Totum ist; denn es ist unwahrscheinlich, daß bzgl. jedes Sachverhaltes relativ zu uns er selbst oder seine Negation eine Tatsache relativ zu uns ist (im zeitlosen Sinn von "ist"). Die wahrscheinliche Unvollständigkeit unserer Erkenntnis verwandelt sich für den Relativisten in die Unvollständigkeit der Welt! Aber selbst wenn man annimmt, daß externe Tatsachen etwas an sich Gegebenes sind, das Tatsache bleibt, ob es jemand feststellt oder nicht, ob es jemand beschreibt oder nicht, ist es dann gewiß, daß die Summe der Tatsachen ein Totum bildet?[2]

(d) Im Sinne der klassischen Ontologie, die Aristoteles begründete, gilt jedoch

AT8 TO($\underline{w}$)

Hieraus erhält man mit TT71, AT7, TT70 und DT26

TT106 MK($\underline{w}$)
(Die Welt ist ein maximal-konsistenter Sachverhalt; die Welt ist eine mögliche Welt)[3]

Aus TT106 folgt mit TT69, DT31, DT32 und DT33

TT107 $\wedge x(\text{non } W(x) \text{ äqu. } F(x))$
(Jeder Sachverhalt ist entweder wahr oder falsch)

TT107 heißt auch *das Prinzip der (ontologischen) Wahrheitsdefinitheit.*

(e) AT8 bzw. sein Äquivalent $\wedge x(E(x) \text{ o. } E(\neg x))$ steht in keiner besonderen Beziehung zum Satz $\wedge x W((x \vee \neg x))$; letzterer ist vielmehr schon allein mit AT1 - AT6, DT31 und DT32 beweisbar. Überhaupt benötigt man zum Beweis von $W(\alpha)$ für keine klassische aussagenlogische Tautologie α AT7 oder AT8, sondern dies folgt stets allein mit AT1 - AT6, DT31 und DT32. Ihre Identität mit $\underline{t}$, d.h. ihre logische Notwendigkeit und darum mit DT31 und DT32 ihre Wahrheit ergibt sich allein aus dem Sinn der Konstanten $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, zu dessen Festlegung man AT7 und AT8 nicht braucht, sondern allein AT1 - AT6. Der Sinn dieser Konstanten läßt sich also in solcher Weise fassen, daß weder der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch noch der vom ausgeschlossenen Dritten in ihn eingeht und dennoch alle klassischen aussagenlogischen Tautologien beweisbar logisch notwendig sind.

Anmerkungen:

[1]Externe Tatsachen sind schon dann etwas von uns Abhängiges, wenn sie nicht von uns unabhängig sind, wenn sie also nicht an sich sind, sondern nur - sei es in noch so geringem Maße - relativ zu unserer Sprache und unseren epistemischen Haltungen. Von *Relativismus* spricht man, wenn der angenommene Abhängigkeitsgrad ein gewisses Maß überschreitet. Der *extreme* Relativismus beginnt bei der Behauptung: *Tatsache ist, was in unserer Sprache von Sätzen ausgedrückt wird, die wir per Konvention für richtig halten oder die aus Sätzen unserer Sprache logisch folgen, die wir per Konvention für richtig halten.* Relativistische (idealistische, konstruktivistische) Strömungen durchdringen - angefangen bei den Sophisten - die gesamte Geistesgeschichte und sind auch in der Gegenwart einflußreich. M. Dummett stellt eben die Verbindung zwischen Leugnung der Bivalenz und Relativismus (Anti-Realismus) her, die in (c) aufgezeigt wird, und schreibt: "... the topic of bivalence raises very large issues ... they underlie the metaphysical disputes that arise in many different areas of philosophy between a realist and a positivist or idealist, or, in the colourless term I have preferred to use, an anti-realist, interpretation of some large class of statements" (*Truth and other Enigmas*, S. XXX).

[2]Dummetts Formulierung "the realist may, and characteristically will" in seiner Aussage "The anti-realist cannot allow that the law of excluded middle is generally valid: the realist may, and characteristically will" ("Realism", *Truth and other Enigmas*, S. 155) ist demnach *exakt*. Ein Realist - auch ein absoluter - *muß nicht* den Satz vom ausgeschlossenen Dritten (im Sinne des ontologischen oder semantischen Bivalenzprinzips) akzeptieren; dieses Prinzip stellt nämlich für ihn nichts dar, was für ihn gewiß sein muß. Aber er *kann* ihn akzeptieren (das ist für ihn nicht irrational) und tut es gewöhnlich. Der normalen realistischen Position schließen wir uns an. (M. Dummett hat klar erkannt, daß man mit dem Bivalenzprinzip über den Realismus im gewöhnlichen Sinn hinausgeht: "we could not assume bivalence for empirical statements, though not for mathematical ones, ... on the simple ground that the former, but not the latter, concerned an external reality. The question was not whether the reality that rendered our statements true or false was *external*, but whether it was *fully determinate*" (*Truth and other Enigmas*, S. XXIX).

[3]Die Benennung "mögliche Welt" für maximal-konsistente Sachverhalte ist im Sinne der klassischen Ontologie; maximal-konsistente Sachverhalte sind mögliche Welten, *weil* die wirkliche Welt als ein solcher ontologisch charakterisiert ist; die Benennung ist inadäquat, falls MK($\underline{w}$) nicht gilt.

15. Die klassischen Gesetze des Wahrseins und des Falschseins (für einzelne Operatoren)

(a) Das klassische Gesetz des Wahrseins[1] für $\wedge$ haben wir schon bewiesen (TT98). Das klassische Gesetz des Falschseins für $\wedge$ ergibt sich daraus mit TT107:

TT108 $\Lambda x \Lambda y(F((x \wedge y))\ \text{äqu.}\ F(x)\ \text{o.}\ F(y))$

Das klassische Gesetz des Falschseins für $\vee$ haben wir schon bewiesen (TT103). Das klassische Gesetz des Wahrseins für $\vee$ ergibt sich daraus mit TT107:

TT109 $\Lambda x \Lambda y(W((x \vee y))\ \text{äqu.}\ W(x)\ \text{o.}\ W(y))$

Das klassische Gesetz des Wahrseins für $\neg$ resultiert aus der Definition der Falschheit:

TT110 $\Lambda x(W(\neg x)\ \text{äqu.}\ F(x))$

Hätten wir Falschheit nicht, wie in DT33 geschehen, mittels Wahrheit definiert, sondern gesetzt $F(\tau) := \neg \underline{w} T \tau$ (vergl. TT99), so wäre TT110 nicht eine bloße Definitionsfolge: $W(\neg x)$, d.h. nach DT32, DT31 $\neg x T \underline{w}$, d.h. nach TT60 $\neg \underline{w} T x$, d.h. $F(x)$.

Aus TT110 folgt das klassische Gesetz des Falschseins für $\neg$ mit TT55:

TT111 $\Lambda x(F(\neg x)\ \text{äqu.}\ W(x))$

(b) Die klassischen Gesetze des Wahrseins und Falschseins für $\neg$ folgen also schon aus AT1 - AT6. Wir haben gesehen, daß das klassische Gesetz des Falschseins für $\vee$ mit den Definitionen schon allein aus AT1 - AT6 resultiert. Das gilt aber nicht für das klassische Gesetz des Wahrseins für $\vee$. Zwar ist schon allein aufgrund von AT1 - AT6 mit den Definitionen $\Lambda x \Lambda y(W(x)\ \text{o.}\ W(y)\ \text{imp.}\ W((x \vee y)))$ beweisbar; die Umkehrung hiervon ist aber bzgl. AT1 - AT6 und den Definitionen äquivalent mit AT8:

(i) Ang. $\bigwedge x \bigwedge y(W((x \vee y))$ imp. $W(x)$ o. $W(y))$, also $\bigwedge x(W((x \vee \neg x))$ imp. $W(x)$ o. $W(\neg x))$; nun $\bigwedge x W((x \vee \neg x))$, denn $\bigwedge x((x \vee \neg x) = \underline{t})$ nach TT53 und $\underline{t}T\underline{w}$, da $M(\underline{t})$, also $\bigwedge x((x \vee \neg x)T\underline{w})$, daraus mit DT31 und DT32 $\bigwedge x W((x \vee \neg x))$; folglich $\bigwedge x(W(x)$ o. $W(\neg x))$, d.h. $TO(\underline{w})$ (vergl. 14., (a));
(ii) zum Beweis der Umkehrung benötigen wir

TT112 $\bigwedge x \bigwedge y(W(\neg x)$ u. $W((x \vee y))$ imp. $W(y))$

Beweis: Ang. $W(\neg x)$ u. $W((x \vee y))$, also mit TT98 $W((\neg x \wedge (x \vee y)))$, also mit TT53 $W(((\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge y)))$, also mit TT53 $W((\underline{k} \vee (\neg x \wedge y)))$, also mit TT53 $W((\neg x \wedge y))$, also mit TT98 $W(y)$;

nun ang. $TO(\underline{w})$, also $\bigwedge x(W(x)$ o. $W(\neg x))$; ang. $W((x \vee y))$ u. non $W(x)$; also $W(\neg x)$, also mit TT112 $W(y)$; demnach aus $TO(\underline{w})$ $\bigwedge x \bigwedge y(W((x \vee y))$ imp. $W(x)$ o. $W(y))$.

Wir haben außerdem gesehen, daß das klassische Gesetz des Wahrseins für $\wedge$ schon allein mit AT1 - AT6 und den Definitionen beweisbar ist. Das gilt aber nicht für das klassische Gesetz des Falschseins für $\wedge$. Zwar resultiert schon aufgrund von AT1 - AT6 und den Definitionen $\bigwedge x \bigwedge y(F(x)$ o. $F(y)$ imp. $F((x \wedge y)))$ [ang. $F(x)$, also nach TT99 $\neg \underline{w}Tx$; nun $xT(x \wedge y)$ nach TT25, AT2; also mit AT1 $\neg \underline{w}T(x \wedge y)$, also mit TT99 $F((x \wedge y))$; entsprechend folgt aus $F(y)$ $F((x \wedge y))$], die Umkehrung hiervon aber ist wiederum bzgl. AT1 - AT6 und den Definitionen äquivalent mit AT8:
(i) Ang. $\bigwedge x \bigwedge y(F((x \wedge y))$ imp. $F(x)$ o. $F(y))$, also mit DT33 $\bigwedge x \bigwedge y(W(\neg(x \wedge y))$ imp. $W(\neg x)$ o. $W(\neg y))$, also $\bigwedge x(W(\neg(x \wedge \neg x))$ imp. $W(\neg x)$ o. $W(\neg\neg x))$; nun $\bigwedge x W(\neg(x \wedge \neg x))$, denn $W(\underline{t})$ (da $M(\underline{t})$, mit DT31 und DT32) und $\bigwedge x(\neg(x \wedge \neg x) = \underline{t})$ nach TT54 und TT53; also $\bigwedge x(W(\neg x)$ o. $W(\neg\neg x))$, also mit TT55 $\bigwedge x(W(x)$ o. $W(\neg x))$, d.h. $TO(\underline{w})$;
(ii) zum Beweis der Umkehrung benötigen wir

TT113 $\bigwedge x \bigwedge y(F(\neg x)$ u. $F((x \wedge y))$ imp. $F(y))$

Beweis: Ang. $F(\neg x)$ u. $F((x \wedge y))$, also mit TT103 $F((\neg x \vee (x \wedge y)))$, also mit TT53 $F(((\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee y)))$, also mit TT53 $F((\underline{t} \wedge (\neg x \vee y)))$, also mit TT53 $F((\neg x \vee y))$, also mit TT103 $F(y)$;

nun ang. $TO(\underline{w})$, also $\bigwedge x(W(x)$ o. $F(x))$; ang. $F((x \wedge y))$ u. non $F(x)$; also $W(x)$, also mit TT55 $W(\neg\neg x)$, also mit DT33 $F(\neg x)$; also mit

TT113 F(y); demnach aus TO(w) ΛxΛy(F((x∧y)) imp. F(x) o. F(y)).

(c) Aus TT97 und TT101 erhält man mit TT107

TT114 F(UzA[z]) äqu. Vy(A[y] u. F(y))
(Die Konjunktion der A-Sachverhalte ist genau dann falsch, wenn ein A-Sachverhalt falsch ist)

TT115 W(ΠzA[z]) äqu. Vy(A[y] u. W(y))
(Die Adjunktion der A-Sachverhalte ist genau dann wahr, wenn ein A-Sachverhalt wahr ist)

Wir haben gesehen, daß sich das klassische Gesetz des Wahrseins für die große Konjunktion schon durch AT1 - AT6 mittels der Definitionen ergibt (TT97). Dasselbe gilt für Vy(A[y] u. F(y)) imp. F(UzA[z]): Ang. Vy(A[y] u. F(y)), also mit TT99 Vy(A[y] u. ¬wTy), also mit TT18 Vy(A[y] u. ¬wTy u. yTUzA[z]), also mit AT1 ¬wTUzA[z], also mit TT99 F(UzA[z]).

Jedoch F(UzA[z]) imp. Vy(A[y] u. F(y)) ist bzgl AT1 - AT6 und den Definitionen mit MK(w) äquivalent: (i) Ang. MK(w); ang. F(UzA[z]), also mit TT99 *¬wTUzA[z]*; aus MK(w) nach DT26 und TT71 TO(w), also mit TT73 *QA(¬w)*; aus MK(w) nach DT26 und TT70 w≠k, also ¬w≠¬k, also mit TT54 ¬w≠t, also mit TT32 *non M(¬w)*; aus dem kursiv Geschriebenen nach TT40 Vy(A[y] u. ¬wTy), also mit TT99 Vy(A[y] u. F(y));
(ii) ang. F(UzA[z]) imp. Vy(A[y] u. F(y)); ang. w=k, also ¬w=¬k, also mit TT54 ¬w=t, also ¬wTUz(z≠z), also mit TT99 F(Uz(z≠z)); also Vy(y≠y u. F(y)) - letzteres ist aber ein Widerspruch; demnach *w≠k*; ¬wTUzA[z] imp. Vy(A[y] u. ¬wTy) nach TT99 aus der ersten Annahme, also ¬wTUzQA(z) imp. Vy(QA(y) u. ¬wTy); nun ¬wTUzQA(z), denn nach TT18 Λy(QA(y) u. yTk imp. yTUzQA(z)), also nach AT5 kTUzQA(z), also wegen UzQA(z)Tk (T(k)) mit AT3 UzQA(z)=k, also ¬wTUzQA(z), da ¬wTk (T(k)); also Vy(QA(y) u. ¬wTy), also nach DT6 QA(¬w), also mit TT73 *TO(w)*; aus w≠k und TO(w) folgt nach TT70, TT71 und DT26 MK(w).

In F(UzA[z]) imp. Vy(A[y] u. F(y)) stecken also sowohl AT7 wie AT8, so wie umgekehrt sich F(UzA[z]) imp. Vy(A[y] u. F(y)) aus AT7 und AT8 ergibt. In ΛxΛy(F(x∧y)) imp. F(x) o. F(y)) steckt dagegen nur AT8, so wie umgekehrt ΛxΛy(F((x∧y)) imp. F(x) o. F(y)) aus AT8 resultiert. Dasselbe Verhältnis darf für W(ΠzA[z]) imp. ⋁y(A[y] u. W(y)) und ⋀x⋀y(W((x∨y)) imp. W(x) o. W(y)) angenommen werden. ⋁y(A[y] u. W(y)) imp. W(⋂zA[z]) dagegen resultiert wie das Gesetz des Falschseins für die große Adjunktion (TT101) schon mit AT1 - AT6 und den Definitionen: Ang. ⋁y(A[y] u. W(y)), also ⋁y(⋂zA[z]Ty u. yT$\underline{w}$) mit TT65, DT32, DT31, also ⋂zA[z]T$\underline{w}$ mit AT1, also W(⋂zA[z]) mit DT31 und DT32.

Anmerkungen:

[1]Frege bestimmte die Logik als die Wissenschaft von den Gesetzen des Wahrseins. Man wird ihn so verstehen, daß zu den Gesetzen des Wahrseins auch die Gesetze des Falschseins gehören (die aber mit DT33 auf Gesetze des Wahrseins reduzierbar sind). Frege schreibt: "Um jedes Mißverständnis auszuschließen und die Grenze zwischen Psychologie und Logik nicht verwischen zu lassen, weise ich der Logik die Aufgabe zu, die Gesetze des Wahrseins zu finden, nicht die des Fürwahrhaltens oder Denkens. In den Gesetzen des Wahrseins wird die Bedeutung des Wortes "wahr" entwickelt." ("Logische Untersuchungen I: Der Gedanke", S. 343). Aufgrund seiner vorhergehenden Ausführungen ist klar, daß die Rede von Gesetzen nicht im normativen, sondern im deskriptiven Sinn gemeint ist. Träger der Wahrheit (wenn er nicht vom *Gegenstand*: das Wahre spricht) und damit Subjekte der Gesetze des Wahrseins sind bei Frege primär *Gedanken*, erst sekundär Sätze (siehe ebd. S. 344f), und fregesche Gedanken sind unsere endlich ausdrückbaren Sachverhalte: Propositionen. (Frege freilich erachtet Gedanken - unsere Propositionen - durchweg als abstrakte Entitäten, worin wir ihm nicht folgen; außerdem scheint es für ihn - in einem anderen Kontext - Gedanken zu geben, die weder wahr noch falsch sind: "Der Satz 'Odysseus wurde tief schlafend in Ithaka ans Land gesetzt' hat offenbar einen Sinn. Da es aber zweifelhaft ist, ob der darin vorkommende Name 'Odysseus' eine Bedeutung [Bezug] habe, so ist es damit auch zweifelhaft, ob der ganze Satz eine [einen Wahrheitswert] habe. ... Käme es nur auf den Sinn des Satzes, den Gedanken, an, so wäre es unnötig, sich um die Bedeutung eines Satzteils zu kümmern; ... Der Gedanke bleibt derselbe, ob der Name 'Odysseus' eine Bedeutung hat oder nicht."; "Über Sinn und Bedeutung", S.148f.) Soweit entsprechen Freges Vorstellungen von Gesetzen des Wahrseins den in diesem Kapitel exemplifizierten. Die Gesetze des Wahrseins ergeben sich aber gewiß nicht, wie Frege anzunehmen scheint, aus einer bloßen Analyse des Wortes "wahr"; und überhaupt ist es zweifelhaft, ob alle Gesetze des Wahrseins *analytisch* sind. Daß nicht alle Sachverhalte wahr sind, ergibt sich nicht aus einer Analyse des Wortes "wahr" und gilt vermutlich auch nicht analytisch. In unserer Theorie sind nur die Gesetze des Wahrseins mit Sicherheit analytisch, die sich aus AT1 - AT6 mit DT31, DT32 ergeben. Wenn nicht alle Gesetze des Wahrseins analytisch sind und man in der Logik nur analytische Gesetze aufstellt, so kann die Logik nicht *die* Wissenschaft von den Gesetzen des Wahrseins sein. Frege wollte mit seiner berühmten Bestimmung wohl auch nur in einprägsamer Weise die Logik gegenüber der Psychologie abgrenzen.

16. Die Kontingenz der Welt

(a) AT7 und AT8 schließen $\underline{w}=\underline{t}$ nicht aus. Die Welt ist aber nicht der tautologische Sachverhalt, da sonst entgegen unseren Intuitionen nur ein einziger Sachverhalt bestünde, nämlich der tautologische. Denn es gilt:

TT116 $\quad \Lambda x(E(x)$ äqu. $x=\underline{t})$ äqu. $\underline{w}=\underline{t}$

Beweis: (i) $\Lambda x(E(x)$ äqu. $x=\underline{t})$; nach AT2 $\underline{w}T\underline{w}$, also mit DT31 $E(\underline{w})$; also $\underline{w}=\underline{t}$;
(ii) $\underline{w}=\underline{t}$; (x) ang. $E(x)$, also mit DT31 $xT\underline{w}$; also $xT\underline{t}$, also, da $\underline{t}Tx$, mit AT3 $x=\underline{t}$; (xx) nach DT31 $E(\underline{t})$, da $\underline{t}T\underline{w}$; also $\Lambda x(x=\underline{t}$ imp. $E(x))$; aus (x) und (xx) $\Lambda x(E(x)$ äqu. $x=\underline{t})$.

(b) TT116 ergibt sich mit AT1 - AT6 und den Definitionen. Zieht man AT8 heran, so ist die Welt auch deshalb nicht der tautologische Sachverhalt, weil es sonst entgegen unseren Intuitionen überhaupt nur höchstens zwei Sachverhalte, nämlich $\underline{t}$ und $\underline{k}$ gäbe. Es gilt nämlich:

TT117 $\quad \underline{w}=\underline{t}$ imp. $\Lambda x(x=\underline{t}$ o. $x=\underline{k})$

Beweis: Ang. $\underline{w}=\underline{t}$; nach AT8 $TO(\underline{w})$; also $TO(\underline{t})$, d.h. nach DT7 $\Lambda y(\underline{t}Ty$ imp. $y=\underline{t}$ o. $T(y))$; nun $\Lambda y(\underline{t}Ty)$, denn $M(\underline{t})$ nach TT32; also $\Lambda x(x=\underline{t}$ o. $T(x))$, also $\Lambda x(x=\underline{t}$ o. $x=\underline{k})$ mit TT34. (Aus $\Lambda x(x=\underline{t}$ o. $x=\underline{k})$ folgt umgekehrt mit den Definitionen und TT34 $TO(\underline{t})$.)

Mit AT7 folgt auch die Umkehrung von TT117

TT118 $\quad \Lambda x(x=\underline{t}$ o. $x=\underline{k})$ imp. $\underline{w}=\underline{t}$

(c) Wir postulieren

AT9 $\quad \underline{w}\neq\underline{t}$

AT9 kann nicht als analytisch gültig angesehen werden. Es besteht keine Notwendigkeit der Bedeutung von "$\underline{w}$" (*die Konjunktion aller bestehenden Sachverhalte*) und der Bedeutung von "$\underline{t}$" (*der Sachverhalt, der aus allen Sachverhalten logisch folgt*) nach, daß $\underline{w}$ und $\underline{t}$ verschieden sind. So wie die Dinge aber nun einmal stehen, sind sie verschieden. Die exakt gleiche logische Form von AT9 und AT7 verstärkt den Verdacht, daß es sich auch bei AT7 um keinen analytisch gültigen Satz handelt.

(d) Mit AT9 folgt wegen TT118, AT2 und DT31

TT119 $\quad \mathrm{V}x(E(x)$ u. $x \neq \underline{t})$ u. $\mathrm{V}x(x \neq \underline{t}$ u. $x \neq \underline{k})$

AT9 ist nach TT36 und AT2 äquivalent mit non $\underline{w}T\underline{t}$, was nach TT59 und TT54 äquivalent mit non $\underline{k}T\neg\underline{w}$ ist, was nach TT91, TT85 und DT29 äquivalent mit $P(\neg\underline{w})$ ist. Andererseits ist AT7 äquivalent mit non $\underline{k}T\underline{w}$, was nach TT91, TT85 und DT29 äquivalent mit $P(\underline{w})$ ist. Wir definieren:

DT34 $\quad K(\tau) := P(\tau)$ u. $P(\neg\tau)$
(τ ist logisch kontingent),

und erhalten mit DT34, AT7 und AT9

TT120 $\quad K(\underline{w})$
(*Die Welt ist logisch kontingent*)

Aus TT120 folgt mit DT34 sofort

TT121 $\quad \mathrm{V}x(P(x)$ u. $P(\neg x))$

Man hat also $\Lambda x(P(x)$ o. $P(\neg x))$ (siehe TT104), aber andererseits auch $\mathrm{V}x(P(x)$ u. $P(\neg x))$. $P(\underline{w})$ u. $P(\neg\underline{w})$ ist nach TT55 äquivalent mit non (non $P(\neg\neg\underline{w})$ o. non $P(\neg\underline{w})$), d.h. nach DT30 mit non $(N(\neg\underline{w})$ o. $N(\underline{w}))$, d.h. mit non $N(\underline{w})$ u. non $N(\neg\underline{w})$. Aus TT120 folgt also mit DT34

TT122 $\quad$ non $N(\underline{w})$ u. non $N(\neg\underline{w})$,

und daraus sofort

TT123 ⋁x(non N(x) u. non N(¬x))

Man hat also non ⋁x(N(x) u. N(¬x)) (vergl. TT104), aber andererseits auch non ⋀x(N(x) o. N(¬x)). - Wir können demnach folgende Übersichtstafel aufstellen:

W	N	P
non ⋁x(W(x) u. W(¬x))	non ⋁x(N(x) u. N(¬x))	⋁x(P(x) u. P(¬x))
⋀x(W(x) o. W(¬x))	non ⋀x(N(x) o. N(¬x))	⋀x(P(x) o. P(¬x))

Wegen TT121 ist das Gegenteil der Umkehrung von TT94(ii) beweisbar; denn angenommen ⋀x⋀y(P(x) u. P(y) imp. P((x∧y))), also ⋀x(P(x) u. P(¬x) imp. P((x∧¬x))); nun aber ⋀x non P((x∧¬x)); also ⋀x(non P(x) o. non P(¬x)), was TT121 widerspricht. Wegen TT123 ist das Gegenteil der Umkehrung von TT93(ii) beweisbar; denn angenommen ⋀x⋀y(N((x∨y)) imp. N(x) o. N(y)), also ⋀x(N((x∨¬x)) imp. N(x) o. N(¬x)); nun aber ⋀xN((x∨¬x)), also ⋀x(N(x) o. N(¬x)), was TT123 widerspricht. Es resultiert die Tafel:

W	N	P
⋀x⋀y(W((x∧y)) äqu. W(x) u. W(y))	⋀x⋀y(N((x∧y)) äqu. N(x) u. N(y))	⋀x⋀y(P((x∧y)) imp. P(x) u. P(y)) ⋁x⋁y(P(x) u. P(y) u. non P((x∧y)))
⋀x⋀y(W((x∨y)) äqu. W(x) o. W(y))	⋀x⋀y(N(x) o. N(y) imp. N((x∨y))) ⋁x⋁y(N((x∨y)) u. non N(x) u. non N(y))	⋀x⋀y(P((x∨y)) äqu. P(x) o. P(y))

(e) Mit AT1 - AT7 bzw. AT1 - AT6 und den Definitionen können wir

TT124 ⋀x(W(x) imp. P(x)) u. ⋀x(N(x) imp. W(x))

beweisen: Ang. W(x), also xTw (DT32, DT31), also non kTx, denn sonst wegen AT1 kTw, also mit TT85, DT29 non P(w), was AT7 widerspricht; also mit TT91, DT29 P(x);
ang. N(x), also mit DT30 non P(¬x), also mit DT29, TT91 kT¬x, also mit TT60, TT54 xTt, wegen tTw also mit AT1 xTw, d.h. nach

DT31 und DT32 W(x).

Sowohl Vx(W(x) u. non N(x)) als auch Vx(P(x) u. non W(x)) sind jedoch mit w≠t äquivalent; ersteres bzgl. AT1 - AT6, letzteres bzgl. AT1 - AT8: (i) w≠t; wegen AT2 wTw, also mit DT31, DT32 W(w); aus w≠t (siehe 16., (d)) P(¬w), also mit DT30 non N(w); also Vx(W(x) u. non N(x));
(ii) Vx(W(x) u. non N(x)), also Vx(xTw u. non kT¬x) (DT32, DT31, DT30, DT29, TT85), also mit TT60, TT54 Vx(xTw u. non xTt), also w≠t.
(i') w≠t, also P(¬w); nun non ¬wTw, denn sonst wegen wTw (AT2) (w∧¬w)Tw (TT24), also mit TT53 kTw, also w=k, was AT7 widerspricht; also mit DT31, DT32 non W(¬w); also Vx(P(x) u. non W(x));
(ii') Vx(P(x) u. non W(x)), also Vx(non kTx u. non xTw) (DT29, TT85, DT31, DT32), also mit AT8 Vx(non kTx u. ¬xTw), also mit TT59, TT54 Vx(non ¬xTt u. ¬xTw), also w≠t.
Demnach gilt

TT125   Vx(W(x) u. non N(x)) u. Vx(P(x) u. non W(x))

Wegen Λx(N(x) imp. non N(¬x)) (äquivalent mit TT104) gilt nach DT30 und TT54 Λx(N(x) imp. P(x)), was auch aus TT124 folgt. Die Umkehrung hiervon gilt aber nicht, sondern vielmehr Vx(P(x) u. non N(x)), was mit TT121 nach DT30 äquivalent ist.

(f) Nach TT106 gibt es einen maximal-konsistenten Sachverhalt, nämlich w. Die Behauptung, daß es mindestens einen maximal-konsistenten Sachverhalt gibt, ist bzgl. AT1 - AT6 äquivalent mit TT104 t≠k: (i) Ang. t≠k, also non kTt mit TT36, also mit AT5 Vx(QA(x) u. xTk u. non xTt), also Vx(QA(x) u. x≠t) mit AT2, also mit TT76 VyMK(y);
(ii) ang. t=k, also ¬t=¬k, also mit TT54 ¬t=t; nun Λy(tTy), da M(t); also Λy(tTy u. ¬tTy), also ΛyVx(xTy u. ¬xTy), also Λy non Kon(y) nach DT24, also mit DT26 non VyMK(y).
Mit AT9 ist nun bzgl. AT1 - AT8 die Behauptung äquivalent, daß es mindestens zwei maximal-konsistente Sachverhalte gibt: (i) w≠t, also P(¬w) (siehe 16., (d)), also mit DT29 Vy(MK(y) u. ¬wTy); dieses y kann nun nicht mit w identisch sein, denn sonst ¬wTw, was AT7 widerspricht; also wegen TT106 VxVy(MK(x) u. MK(y) u.

x≠y);

(ii) VxVy(MK(x) u. MK(y) u. x≠y); ang. w=t, also mit TT117 Λx(x=t o. x=k); eine von den beiden mögliche Welten x und y muß also k sein, was nach TT72 unmöglich ist; demnach w≠t.

17. Die Axiome AT7 - AT9 im Vergleich und Schlüsse in PT

(a) Aus der Verneinung von AT7 folgt AT8, da TO($\underline{k}$); also folgt aus der Verneinung von AT8 AT7. Gegeben die Nichtmaximalität der Welt, ergibt sich ihre Konsistenz.

(b) Bzgl. AT1 - AT8 läßt sich der Gehalt von AT9, wie wir gesehen haben (16., (b) und (f)), auch so formulieren, daß von der Konstanten "$\underline{w}$" nicht einmal versteckt in einem definierten Ausdruck Gebrauch gemacht werden muß. Der Gehalt des Axioms AT7 bzw. AT8 läßt sich dagegen relativ zu den übrigen Axiomen nicht in einer solchen Weise formulieren. AT7, AT9 und AT1 - AT6 determinieren keine ohne "$\underline{w}$" auskommende Formulierung des Gehalts von AT8; AT8, AT9 und AT1 - AT6 determinieren keine ohne "$\underline{w}$" auskommende Formulierung des Gehalts von AT7.

(c) Auch aus AT9 folgt $\underline{t}\neq\underline{k}$ (TT104), denn wenn $\underline{t}=\underline{k}$, dann $\wedge x(xT\underline{t})$, da T($\underline{k}$); also $\underline{w}T\underline{t}$, also mit $\underline{t}T\underline{w}$ (M($\underline{t}$)) wegen AT3 $\underline{w}=\underline{t}$, was AT9 widerspricht. $\underline{t}\neq\underline{k}$ ist also bgzl. AT1 - AT6 äquivalent mit $\underline{w}\neq\underline{k}$ o. $\underline{w}\neq\underline{t}$. $\underline{t}\neq\underline{k}$ ist aber auch bzgl. AT1 - AT6 äquivalent mit $\vee x\vee y(x\neq y)$, denn wenn $\underline{t}=\underline{k}$, dann $\wedge x(xT\underline{t})$ u. $\wedge y(\underline{t}Ty)$, also mit AT1 $\wedge x\wedge y(xTy)$, also mit AT3 $\wedge x\wedge y(x=y)$.

Im Gegensatz zu AT7 und AT9 beinhaltet AT8 keine (Mindest-) Anzahlaussage über das Universum, die über die logische Anzahlaussage ("Es gibt mindestens eine Entität") hinausreicht.

(d) Ein *Schluß* in PT ist eine Satzform von PT, die die folgende Gestalt hat:
$[O^1(\alpha_1)$ u. ... u. $O^n(\alpha_n)$ imp.$]$ $O^{n+1}(\beta_1)$ o. ... o. $O^{n+k}(\beta_k)$, wobei $O^1,\ldots,O^n,O^{n+1},\ldots,O^{n+k}$ "W", "non W", "P" oder "non P" sind. Die Einklammerung deutet an, daß das Antezedenz auch fehlen kann (bei n=0).
Ein *Wahrheitsschluß* in PT ist eine Satzform von PT, die die obige Gestalt hat, wobei $O^1,\ldots,O^n,O^{n+1},\ldots,O^{n+k}$ aber nur "W" oder "non W" sind. Ein *nichtnegativer Wahrheitsschluß* in PT ist eine Satzform von PT, die die obige Gestalt hat, wobei $O^1,\ldots,O^n,O^{n+1},\ldots,O^{n+k}$ aber sämtlich "W" sind. Entsprechend sind zu definieren "Möglichkeitsschluß in PT" und "nichtnegativer

Möglichkeitsschluß in PT". Für die praktische Anwendung der Sachverhaltsontologie ist es natürlich von zentraler Bedeutung, welche Schlüsse in PT in T: AT1 - AT9 beweisbar sind. Ein großes Interesse knüpft sich auch an die Frage, welche Schlüsse in PT beweisbar bleiben und welche nicht, wenn man eins, zwei oder sämtliche der Axiome AT7 - AT9 wegläßt. Welche Auswirkungen hat es wiederum auf die Beweisbarkeit von Schlüssen in PT, wenn man die Negationen gewisser der Axiome AT7 - AT9 statt ihrer selbst annimmt? - In den vorstehenden Kapiteln haben wir alle diese Fragen eingehend berührt.

(e) Sind T_1, ..., T_k die widerspruchsfreien Systemvarianten von T bzgl. AT7 - AT9 (T_1=T), so heißt die Menge der in T_i (i aus 1,...,k) beweisbaren Schlüsse in PT (der elementaren logischen Gesetze von T_i) "die elementare Logik von T_i". Bei einem in T_i beweisbaren Wahrheitsschluß in PT sprechen wir auch von einem "elementaren Gesetz des Wahrseins von T_i". Die elementare Logik von T_i beinhaltet also die elementaren Gesetze des Wahrseins von T_i, darüberhinaus aber noch viele elementare logische Gesetze mehr.[1]

(f) Wir haben für einzelne Operatoren die klassischen Wahrheits- und Falschheitsgesetze in T bewiesen. Diese lassen sich für $\neg$, $\wedge$, $\vee$ in die Form von Wahrheitsschlüssen in PT bringen; sie beinhalten also und werden erschöpft durch elementare Gesetze des Wahrseins von T. Die klassischen Wahrheits- und Falschheitsgesetze für $\cup$ und $\cap$ lassen sich dagegen nicht in die Form von Wahrheitsschlüssen in PT bringen. Sie beinhalten zwar elementare Gesetze des Wahrseins von T, aber werden nicht durch solche erschöpft. In der Tat wird man sie zur Logik von T rechnen, aber nicht zur elementaren Logik von T.

Die elementaren Gesetze des Wahrseins von T bilden alle semantischen Prinzipien der klassischen Aussagenlogik ab (z.B., daß ein Adjunktionssatz nur dann wahr ist, wenn einer seiner unmittelbaren Teilsätze wahr ist); dasselbe gilt für das System, das aus T hervorgeht, wenn man AT9 wegläßt; das System hingegen, das aus T hervorgeht, wenn man AT8 wegläßt, bildet nicht alle semantischen Prinzipien der klassischen Aussagenlogik ab (z.B. nicht, daß ein Adjunktionssatz nur dann wahr ist, wenn einer seiner unmittelbaren Teilsätze wahr ist).

Anmerkungen:

[1]Die Logik erscheint hier als eine sachverhaltsbezogene Disziplin, nicht - wie üblich - als eine satzbezogene; aber das ist nicht wesentlich. A. Reinach sagt in "Zur Theorie des negativen Urteils", S. 251: "Ein Satz ist wahr, wenn der zugehörige Sachverhalt besteht. Und zwei kontradiktorische Sätze können nicht beide wahr sein, *weil* zwei kontradiktorische Sachverhalte nicht beide bestehen können. So führt auch hier das Satzgesetz auf ein Sachverhaltsgesetz zurück. Zugleich haben wir hier ein Beispiel dafür, in welchem Sinn wir oben gemeint haben, daß große Teile der traditionellen Logik sich ihrem Fundamente nach als allgemeine Sachverhaltslehre herausstellen werden." Auch die letzte Behauptung ist - nicht nur für die traditionelle Logik - richtig. Im IV. Teil, wenn auch die Gliederung der Sachverhalte in Attribute und Gegenstände behandelt worden ist, wird sie für die elementare Prädikatenlogik (als satzbezogene Disziplin) gezeigt werden. Für die (modale oder nichtmodale) Aussagenlogik bestehen jetzt schon die ontologischen Voraussetzungen dafür.

Vergl. nun dazu Frege in "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", S. 31f: "Die Inhaltslogiker bleiben nur zu gerne beim Sinn stehen; denn, was sie Inhalt nennen, ist, wenn nicht gar Vorstellung, so doch Sinn. Sie bedenken nicht, daß es in der Logik nicht darauf ankommt, wie Gedanken aus Gedanken hervorgehen ohne Rücksicht auf den Wahrheitswert, daß der Schritt vom Gedanken zum Wahrheitswert, daß allgemeiner, der Schritt vom Sinne zur Bedeutung [heute sagt man "Bezug"] getan werden muß; daß die logischen Gesetze zunächst Gesetze im Reich der Bedeutungen [Bezüge] sind und sich erst mittelbar auf den Sinn beziehen." Frege ist darin zuzustimmen, daß man nicht beim Sinn stehen bleiben darf. (Dem entspräche hier, daß man auf die Axiome AT7 und AT8 und die Einführung der Konstanten $\underline{w}$ verzichtet und AT9 durch $Vx(x \neq \underline{t}$ u. $x \neq \underline{k})$ ersetzt.) Aber es ist unrichtig, daß die logischen Gesetze zunächst Gesetze im Reich der Bezüge sind und sich erst mittelbar auf den Sinn beziehen. Man kann nämlich die Logik semantisch aufbauen, ohne daß grundbegrifflich von Bezügen, wie Wahrheitswerte und Klassen, die Rede ist. (Die natürliche Auffassung der Wahrheit eines Satzes hat Reinach klar zum Ausdruck gebracht.) Ist es im übrigen überhaupt plausibel anzunehmen, die elementare Aussagenlogik z.B. beziehe sich *zunächst* auf Wahrheitswerte und Wahrheitsfunktionen? Auf solch eine Idee konnte nur ein Mathematiker kommen. Die theoretische *Nützlichkeit* der Auffassung der elementaren Aussagenlogik als Theorie der Wahrheitsfunktionen ist freilich unbestreitbar.

18. Der Aufbau des Sachverhaltuniversums

(a) In der Sprache PT dienen arabische Ziffern (alternativ Strichfolgen) als Indices; i,j,n ... benützen wir als Mitteilungszeichen für diese (objektsprachlichen) Indices; i+1 ist der dem Index i (im Sinne ihrer natürlichen Ordnung) unmittelbar folgende Index; i-1 ist der dem Index i unmittelbar vorausgehende Index. Wir definieren dann:

DT35 $A^{0}(\tau) := A(\tau)$
$A^{n+1}(\tau) := \wedge y(y T \tau \text{ imp. } y=\tau \text{ o. } A^{n}(y))$
($A^{i}(\tau)$: τ hat höchstens den unteren Grad i)

DT36 $G^{0}(\tau) := G(\tau)$
$G^{n+1}(\tau) := \wedge y(\tau T y \text{ imp. } y=\tau \text{ o. } G^{n}(y))$
($G^{i}(\tau)$: τ hat höchstens den oberen Grad i)

DT37 $A^{0}_{+}(\tau) := A^{0}(\tau)$
$A^{n+1}_{+}(\tau) := A^{n+1}(\tau) \text{ u. non } A^{n}(\tau)$
($A^{i}_{+}(\tau)$: τ hat den unteren Grad i)

DT38 $G^{0}_{+}(\tau) := G^{0}(\tau)$
$G^{n+1}_{+}(\tau) := G^{n+1}(\tau) \text{ u. non } G^{n}(\tau)$
($G^{i}_{+}(\tau)$: τ hat den oberen Grad i)

(b) Es gelten:

TT126 $\wedge x(M(x) \text{ äqu. } A^{0}(x))$

Beweis: $\wedge x(M(x) \text{ imp. } A^{0}(x))$ nach TT7 und DT35; ang. $A^{0}(x)$, also nach DT35, DT2 $\wedge y(yTx \text{ imp. } y=x)$; nun $\underline{t}Tx$, da $M(\underline{t})$ nach TT32; also $\underline{t}=x$, also nach TT32 $M(x)$.

TT127 $\wedge x(T(x) \text{ äqu. } G^{0}(x))$

Beweis: $\wedge x(T(x) \text{ imp. } G^{0}(x))$ nach TT6 und DT36; ang. $G^{0}(x)$, also nach DT36, DT3 $\wedge y(xTy \text{ imp. } y=x)$; nun $xT\underline{k}$, da $T(\underline{k})$ nach TT34; also

$\underline{k}$=x, also nach TT34 T(x).

TT128 $\quad \Lambda x(QA(x)$ äqu. $A^{1}(x))$
(abhängig von DT35, TT126, DT6)

TT129 $\quad \Lambda x(TO(x)$ äqu. $G^{1}(x))$
(abhängig von DT36, TT127, DT7)

TT130 $\quad \Lambda x(El(x)$ äqu. $A^{1}_{*}(x))$
(abhängig von DT20, TT128, TT126, DT37)

TT131 $\quad \Lambda x(MK(x)$ äqu. $G^{1}_{*}(x))$
(abhängig von DT26, TT70, TT71, TT34, TT129, TT127, DT38)

Nach TT130 sind die minimal-gehaltvollen Sachverhalte (nach TT84) die Sachverhalte mit dem unteren Grad 1; nach TT131 hingegen sind die maximal-konsistenten Sachverhalte die Sachverhalte mit dem oberen Grad 1.

(c) Weiterhin gilt:

TT132 $\quad \Lambda x(A^{i}(x)$ imp. $A^{i+1}(x))$
$\Lambda x(G^{i}(x)$ imp. $G^{i+1}(x))$

Beweis: Wir beweisen TT132 - das keine zwei Sätze darstellt, sondern vielmehr zwei Satzschemata - für die Einsetzung des ersten Index "0" und zeigen dann, daß, wenn TT132 für alle Einsetzungen von Indices, die dem Index n vorausgehen oder mit ihm identisch sind, beweisbar ist, man TT132 auch für die Einsetzung des Index n+1 beweisen kann;
(α) ang. $A^{0}(x)$, also mit DT35, DT2 Λy(yTx imp. y=x), also Λy(yTx imp. y=x o. $A^{0}(y)$), also mit DT35 $A^{1}(x)$; ang. $G^{0}(x)$, also mit DT36, DT3 Λy(xTy imp. y=x), also Λy(xTy imp. y=x o. $G^{0}(y)$), also mit DT36 $G^{1}(x)$;
(β) sei TT132 für alle Einsetzungen von Indices, die dem Index n vorausgehen oder mit ihm identisch sind, beweisbar; ang. $A^{n+1}(x)$ u. non $A^{(n+1)+1}(x)$, also Λy(yTx imp. y=x o. $A^{n}(y)$) u. Vy(yTx u. y≠x u. non $A^{n+1}(y)$), also $Vy(A^{n}(y)$ u. non $A^{n+1}(y))$; aber nach Voraussetzung ist beweisbar $\Lambda x(A^{n}(x)$ imp. $A^{n+1}(x))$; demnach ist auch $\Lambda x(A^{n+1}(x)$ imp. $A^{(n+1)+1}(x))$ beweisbar; völlig analog zeigt

man, daß unter der gemachten Voraussetzung auch $\Lambda x(G^{m+1}(x)$ imp. $G^{(m+1)+1}(x))$ beweisbar ist.

Aus TT132 folgt

TT133 $\Lambda x(A^i(x)$ imp. $A^j(x))$
$\Lambda x(G^i(x)$ imp. $G^j(x))$, wenn j auf i folgt.

Mit TT133 erhalten wir

TT134 non $Vx(A^i_*(x)$ u. $A^j_*(x))$
non $Vx(G^i_*(x)$ u. $G^j_*(x))$, wenn j auf i folgt.

Beweis: Ang. $A^i_*(x)$ u. $A^j_*(x)$, j folgt auf i; also nach DT37 $A^i(x)$ u. $A^j(x)$ u. non $A^{j-1}(x)$; da j auf i folgt, ist j-1 i oder j-1 folgt auf i; im ersten Fall erhält man $A^i(x)$ u. non $A^i(x)$ - einen Widerspruch; im zweiten Fall erhält man mit TT133 $A^{j-1}(x)$ u. non $A^{j-1}(x)$ - einen Widerspruch; ganz entsprechend zeigt man: non $Vx(G^i_*(x)$ u. $G^j_*(x))$, wenn j auf i folgt.

(d) In der Sprache PT kann man für jede natürliche Zahl $\nu \geq 1$ ausdrücken, daß es mindestens bzw. höchstens bzw. genau ν Entitäten gibt, auf die ein gewisses Prädikat zutrifft. Das mechanische Verfahren, nach dem $V^{\leq n}xA[x]$ ("Es gibt höchstens n A"), $V^{\geq n}xA[x]$ ("Es gibt mindestens n A") für einen beliebigen Index n zu definieren ist, können wir der nachfolgenden Aufstellung entnehmen:

$V^{\leq 1}xA[x]$:= $\Lambda x \Lambda x'(A[x]$ u. $A[x']$ imp. $x=x')$
$V^{\geq 1}xA[x]$:= $VxA[x]$
$V^{\leq 2}xA[x]$:= $\Lambda x \Lambda x' \Lambda x''(A[x]$ u. $A[x']$ u. $A[x'']$ imp. $x=x'$ o. $x=x''$ o. $x'=x'')$
$V^{\geq 2}xA[x]$:= $VxVx'(A[x]$ u. $A[x']$ u. $x \neq x')$
$V^{\leq 3}xA[x]$:= $\Lambda x \Lambda x' \Lambda x'' \Lambda x'''(A[x]$ u. $A[x']$ u. $A[x'']$ u. $A[x''']$ imp. $x=x'$ o. $x=x''$ o. $x=x'''$ o. $x'=x''$ o. $x'=x'''$ o. $x''=x''')$
$V^{\geq 3}xA[x]$:= $VxVx'Vx''(A[x]$ u. $A[x']$ u. $A[x'']$ u. $x \neq x'$ u. $x \neq x''$ u. $x' \neq x'')$

Dann definieren wir:

$V^{=n}xA[x]$:= $V^{\geq n}xA[x]$ u. $V^{\leq n}xA[x]$
("Es gibt genau n A")

Außerdem definieren wir:

$V^{<n}xA[x]$:= non $V^{\geq n}xA[x]$
("Es gibt weniger als n A")

$V^{>n}xA[x]$:= non $V^{\leq n}xA[x]$
("Es gibt mehr als n A")

Zur formalen Vereinfachung setzen wir fest:

$V^{\leq 0}xA[x]$:= non VxA[x]

$V^{\geq 0}xA[x]$:= VxA[x] o. non VxA[x]

Man erhält sofort: non $V^{<0}xA[x]$, $V^{=0}xA[x]$ äqu. non VxA[x], $V^{\geq n+1}xA[x]$ äqu. non $V^{\leq n}xA[x]$.

(e) Mit diesen definitorischen Voraussetzungen sind wir nun in der Lage, in übersichtlicher Weise drei weitere Theoreme zu formulieren:

TT135 $\Lambda x(A^{n}(x)$ imp. $V^{\leq n}y(A^{1}_{+}(y)$ u. yTx))

Beweis: (α) ang. $A^{0}(0)$, also nach TT126 M(x); also non Vy(El(y) u. yTx), denn sonst mit TT32 yT<u>t</u>, also mit TT36 y=<u>t</u>, also nach TT32 M(y), was aber gemäß DT20 El(y) widerspricht; also nach TT130 non Vy(A^{1}_{+}(y) u. yTx), d.h. $V^{\leq 0}y(A^{1}_{+}(y)$ u. yTx);
(β) sei TT135 für alle Einsetzungen von Indices, die dem Index n vorangehen oder mit ihm identisch sind, beweisbar; ang. $A^{n+1}(x)$, also nach DT35 Λy(yTx imp. y=x o. A^{n}(y)), also nach Voraussetzung Λy(yTx imp. y=x o. $V^{\leq n}z(A^{1}_{+}(z)$ u. zTy)); ang. non $V^{\leq n+1}z(A^{1}_{+}(z)$ u. zTx), d.h. $V^{>n+1}z(A^{1}_{+}(z)$ u. zTx), also Vy(yTx u. y$\neq$x u. $V^{=n+1}z(A^{1}_{+}(z)$ u. zTy)); denn man verbinde konjunktiv n+1 von den mehr als n+1 z, von denen gilt A^{1}_{+}(z) u. zTx; diese Konjunktion k ist nach TT24 Teil von x, denn jedes der konjunktiv verbundenen z

ist Teil von x; k ist außerdem von x verschieden, denn k hat *genau* n+1 z, so daß gilt $A^1_*(z)$, als Teile: mindestens n+1 z, so daß gilt $A^1_*(z)$, sind Teil von k, denn n+1 verschiedene z, so daß gilt $A^1_*(z)$, wurden in k verbunden und sind nach TT25 demnach Teil von k; aber auch höchstens n+1 z, so daß gilt $A^1_*(z)$, sind Teil von k, denn jedes z', von dem gilt $A^1_*(z')$ und das Teil von k ist, ist identisch mit einem der Konjunktionsglieder von k, da aus $A^1_*(z')$ nach TT130 El(z'), also QA(z') folgt, daraus mit z'Tk nach TT38: z' ist Teil eines der Konjunktionsglieder von k, daraus mit TT80, da das Konjunktionsglied nach Konstruktion von k und TT130 ein Element ist, z' ist mit einem der Konjunktionsglieder von k identisch;
man erhält also $Vy(V^{\leq n}z(A^1_*(z)$ u. zTy) u. $V^{=n+1}z(A^1_*(z)$ u. zTy)), was ein Widerspruch ist; demnach folgt aus der Voraussetzung, daß
$\Lambda x(A^{n+1}(x)$
imp. $V^{\leq n+1}y(A^1_*(y)$ u. yTx)) beweisbar ist.

TT136 $\Lambda x(V^{\leq n}y(A^1_*(y)$ u. yTx) imp. $A^n(x))$

Beweis: (α) Ang. $V^{\leq 0}y(A^1_*(y)$ u. yTx), d.h. nach TT130 non Vy(El(y) u. yTx); wenn non xTz, dann nach AT5 Vy(QA(y) u. yTx u. non yTz), also mit DT4 Vy(QA(y) u. non M(y) u. yTx), also mit DT20 Vy(El(y) u. yTx); demnach Λz(xTz), also nach DT4 M(x), also nach TT126 $A^0(x)$;
(β) sei TT136 für alle Einsetzungen von Indices, die dem Index n vorangehen oder mit ihm identisch sind, beweisbar; ang. $V^{\leq n+1}y(A^1_*(y)$ u. yTx); ang. yTx u. y≠x; zu zeigen ist nach DT35 $A^n(y)$; dazu zeigen wir $V^{\leq n}z(A^1_*(z)$ u. zTy), woraus nach Voraussetzung folgt $A^n(y)$; ang. non $V^{\leq n}z(A^1_*(z)$ u. zTy), also $V^{\geq n+1}z(A^1_*(z)$ u. zTy), also $V^{\geq n+1}z(A^1_*(z)$ u. zTy u. zTx) wegen yTx mit AT1; da yTx u. y≠x nach AT3 non xTy, also nach AT5 Vz(QA(z) u. zTx u. non zTy), also Vz(El(z) u. zTy u. non zTy) nach DT20 wegen non M(z), also nach TT130 $Vz(A^1_*(z)$ u. zTx u. non zTy); dieses z' muß von den mindestens n+1 z, die Teil von y und Teil von x sind, verschieden sein, da diese alle Teil von y sind; also $V^{\geq (n+1)+1}z(A^1_*(z)$ u. zTx), also non $V^{\leq n+1}z(A^1_*(z)$ u. zTx) - was der 1. Annahme widerspricht; demnach $V^{\leq n}z(A^1_*(z)$ u. zTy); also $A^n(y)$;
demnach aus der 1. Annahme aufgrund der Voraussetzung Λy(yTx imp. y=x o. $A^n(y)$), d.h. nach DT35 $A^{n+1}(x)$;

demnach folgt aus der Voraussetzung, daß $\wedge x(V^{\leq n+1}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$ imp. $A^{n+1}(x))$ beweisbar ist.

TT137 $\wedge x(A_+^n(x)$ äqu. $V^{=n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx))$

Beweis: Für den Index "0":
(i) $A_+^0(x)$, also nach DT37 $A^0(x)$, also nach TT135 $V^{\leq 0}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$, d.h. $V^{=0}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$;
(ii) $V^{=0}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$, d.h. $V^{\leq 0}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$, also nach TT136 $A^0(x)$, also nach DT37 $A_+^0(x)$;
für jeden Index n, der auf "0" folgt:
(i) $A_+^n(x)$, also nach DT37 $A^n(x)$ u. non $A^{n-1}(x)$, also nach TT135 $V^{\leq n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$ und nach TT136 non $V^{\leq n-1}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$, d.h. $V^{\geq n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$; also $V^{=n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$;
(ii) $V^{=n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$, d.h. $V^{\leq n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$ u. $V^{\geq n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$, also $V^{\leq n}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$ u. non $V^{\leq n-1}y(A_+^1(y)$ u. $yTx)$, also mit TT136 und TT135 $A^n(x)$ u. non $A^{n-1}(x)$, also nach DT37 $A_+^n(x)$.

Es gelten auch die Analoga zu TT135 - TT137: $\wedge x(G^n(x)$ imp. $V^{\leq n}y(G_+^1(y)$ u. $xTy))$, $\wedge x(V^{\leq n}y(G_+^1(y)$ u. $xTy)$ imp. $G^n))$, $\wedge x(G_+^n(x)$ äqu. $V^{=n}y(G_+^1(y)$ u. $xTy))$.

(f) An einem endlichen mengentheoretischen Modell läßt sich der Gehalt der in diesem Kapitel aufgestellten Definitionen und bewiesenen Theoreme veranschaulichen. PT liege zugrunde die Gesamtheit der Teilmengen von {a,b,c,d}. Die Elemente dieser Gesamtheit können folgendermaßen angeordnet werden:

-------G^0	G_+^0	{a,b,c,d} [T,G]	[TO]	A_+^4	-------A^4
-----G^1	G_+^1	{a,b,c},{b,c,d},{c,d,a},{d,a,b}	[MK]	A_+^3	-----A^3
---G^2	G_+^2	{a,b},{b,c},{c,d},{d,a},{a,c},{b,d}		A_+^2	---A^2
-G^3	G_+^3	{a},{b},{c},{d} [El]		A_+^1	-A^1
G^4	G_+^4	ø [M,A]	[QA]	A_+^0	A^0

Man überzeugt sich leicht, daß der jeweils angegebene Bereich jedes der im Diagramm vorkommenden Prädikate genau die Teilmengen von {a,b,c,d} umfaßt, auf die es gemäß seiner Definition bei Deutung von "T" durch die Teilmengenbeziehung im gegebenen Modelluniversum zutrifft. Anhand des Diagramms lassen sich alle in diesem Kapitel bewiesenen Theoreme verifizieren. Nur in einem endlichen AT1 - AT6 adäquaten Universum gibt es einen höchsten nichtleeren unteren Grad (im Beispiel A^{+}_{+}), der mit dem niedrigsten oberen Grad koinzidiert, und einen höchsten nichtleeren oberen Grad (im Beispiel G^{+}_{+}), der mit dem niedrigsten unteren Grad zusammenfällt. Nur in einem endlichen AT1 -AT6 adäquaten Universum hat auch, wie im Beispiel, jede Entität einen sowohl unteren wie oberen Grad.

19. Die Diskretheit von T^+

(a) Mithilfe der Kleiner-Beziehung kann man die Beziehung des Nächstkleinerseins definieren: x ist nächstkleiner als y genau dann, wenn x kleiner ist als y und es kein z gibt, so daß x kleiner ist als z und z kleiner als y. Statt "x ist nächstkleiner als y" kann man auch sagen "y ist nächstgrößer als x" oder "y ist ein unmittelbarer Nachfolger (der Größe nach) von x". In Entsprechung hierzu können wir mithilfe der Beziehung, ein echter Teil zu sein, die Beziehung, *ein nächster echter Teil zu sein*, definieren:

DT39 $\tau NC\tau' := \tau T^+\tau'$ u. non $Vz(\tau T^+z$ u. $zT^+\tau')$
(τ ist ein nächster echter Teil von τ'; τ' ist ein unmittelbarer Nachfolger - der Ganzheit nach - von τ)

(b) Es gilt:

TT138 $\Lambda x\Lambda y(xNCy$ äqu. $Vz(El(z)$ u. non zTx u. $y=(x\wedge z)))$

Beweis: (i) xNCy, also nach DT39 xT^+y u. non $Vk(xT^+k$ u. $kT^+y)$, also (aus xT^+y) nach DT1 und AT3 non yTx, also mit AT5 Vz(QA(z) u. zTy u. non zTx), also Vz(El(z) u. zTy u. non zTx) mit DT20, da non M(z) wegen non zTx;
ang. El(z) u. zTy u. non zTx u. El(z') u. z'Ty u. non z'Tx; ang. $z\neq z'$; also <u>$xT(x\wedge z)$ u. non $(x\wedge z)Tx$</u> wegen TT25 und AT2, non zTx und TT24; xTy nach DT1, da xT^+y; also wegen zTy nach TT24 <u>$(x\wedge z)Ty$</u>;
z'Ty u. non $z'T(x\wedge z)$, denn wäre $z'T(x\wedge z)$, dann mit TT38 (QA(z')) z'Tx o. z'Tz, also wegen non z'Tx z'Tz, also mit TT80, da El(z) u. El(z'), z=z' -im Widerspruch zur Annahme $z\neq z'$;
aus z'Ty u. non $z'T(x\wedge z)$ mit AT1 <u>non $yT(x\wedge z)$</u>;
aus dem Unterstrichenen folgt nach AT2 und DT1 $xT^+(x\wedge z)$ u. $(x\wedge z)T^+y$, also $Vk(xT^+k$ u.
$kT^+y)$ - im Widerspruch zur ursprünglichen Annahme; demnach folgt aus der ursprünglichen Annahme $\Lambda z\Lambda z'$(El(z) u. zTy u. non zTx u. El(z') u. z'Ty u. non z'Tx imp. z=z'); wir erhalten also <u>V!z(El(z) u. zTy u. non zTx)</u>;

ϱ := ιz(El(z) u. zTy u. non zTx); also El(ϱ) u. ϱTy u. non ϱTx; es folgt außerdem y=(x∧ϱ); denn <u>(x)</u> xTy u. ϱTy, also mit TT24 (x∧ϱ)Ty; denn <u>(xx)</u> ang. non yT(x∧ϱ), also mit AT5 Vz(QA(z) u. zTy u. non zT(x∧ϱ)), also mit TT25 Vz(QA(z) u. zTy u. non zTx u. non zTϱ), also mit AT2 Vz(El(z) u. zTy u. non zTx u. z≠ϱ) im Widerspruch zu V!z(El(z) u. zTy u. non zTx); demnach yT(x∧ϱ); aus <u>(x)</u> und <u>(xx)</u> erhält man mit AT3 y=(x∧ϱ);
aus El(ϱ) u. non ϱTx u. y=(x∧ϱ): Vz(El(z) u. non zTx u. y=(x∧z));
(ii) Vz(El(z) u. non zTx u. y=(x∧z)), also xT⁺y, denn xTy einerseits, da xT(x∧z) u. y=(x∧z), und andererseits x≠y, da non zTx u. zTy (y=(x∧z) u. zT(x∧z));
ang. xT⁺k u. kT⁺y, also xTk u. non kTx u. kTy u. non yTk (mit DT1 und AT3); ang. El(z) u. non zTx; wir zeigen y≠(x∧z); Vm(QA(m) u. mTk u. non mTx) u. Vm'(QA(m') u. m'Ty u. non m'Tk) (mit AT5 aus non kTx u. non yTk), also VmVm'(QA(m) u. QA(m') u. mTk u. non mTx u. m'Ty u. non m'Tk); nun non m'Tx (denn aus m'Tx mit xTk nach AT1 m'Tk; aber non m'Tk), mTy (nach AT1, denn mTk u. kTy), also <u>mTy u. non mTx, m'Ty u. non m'Tx</u>; außerdem <u>m≠m'</u> (denn mTk u. non m'Tk); damit ergibt sich non yT(x∧z), denn AT1 und Vh(hTy u. non hT(x∧z)), denn mTy u. non mT(x∧z) o. m'Ty u. non m'T(x∧z), denn sonst wegen mTy u. m'Ty mT(x∧z) u. m'T(x∧z), also, da QA(m) u. QA(m'), mit TT38 (mTx o. mTz) u. (m'Tx o. m'Tz), also, da non mTx u. non m'Tx, mTz u. m'Tz, also, da El(m) (QA(m) u. non M(m)) und El(z), mit TT80 m=z; also, da El(m') (QA(m') u. non M(m')) und El(z), mit TT80 m'=z; also m=m' - Widerspruch;
aus non yT(x∧z) folgt nach AT2 y≠(x∧z);
wir haben nun gezeigt Vk(xT⁺k u. kT⁺y) imp. Λz(El(z) u. non zTx imp. y≠(x∧z)); wegen Vz(El(z) u. non zTx u. y=(x∧z)) (laut Annahme) folgt also non Vk(xT⁺k u. kT⁺y), mit xT⁺y nach DT39 xNCy.

TT138 besagt, daß x genau dann ein nächster echter Teil von y ist, wenn y die Konjunktion von x mit einem Element ist, das nicht Teil von x ist.

(c) Weiterhin gilt

TT139 ΛxΛy(xT⁺y imp. Vz'(xNCz') u. Vz'(z'NCy))

Beweis: Ang. xT⁺y, also xTy u. non yTx, also mit AT5 Vz(QA(z) u. zTy u. non zTx); <u>man betrachte (x∧z)</u>; xT(x∧z) u. non (x∧z)Tx

(letzteres Glied mit AT1, denn zT(x∧z) u. non zTx), also mit AT2 xT(x∧z) u. x≠(x∧z), also xT$^+$(x∧z);
ang. Vk(xT$^+$k u. kT$^+$(x∧z)), also Vk(xTk u. non kTx u. kT(x∧z) u. non (x∧z)Tk); wegen non kTx mit AT5 Vr(QA(r) u. rTk u. non rTx), also rT(x∧z) (mit AT1 wegen rTk u. kT(x∧z)), also mit TT38 wegen QA(r) rTx o. rTz, also wegen non rTx rTz, also wegen QA(z) u. non M(r) (non rTx) nach DT6 r=z; also zTk (rTk), also mit xTk nach TT24 (x∧z)Tk - Widerspruch; demnach non Vk(xT$^+$k u. kT$^+$(x∧z)); aus dem Unterstrichenen nach DT39 xNC(x∧z), also Vz'(xNCz');
man betrachte Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z); Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z)Ty:
ang. QA(k') u. k'TUk(QA(k) u. kTy u. k≠z); wenn M(k'), dann trivialerweise k'Ty; wenn non M(k'), dann nach TT41 k'Ty; demnach Λk'(QA(k') u. k'TUk(QA(k) u. kTy u. k≠z) imp. k'Ty), also nach AT5 das Gewünschte;
non yT(Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z) mit AT1, denn zTy, aber non zTUk(QA(k) u.kTy u. k≠z), da non M(z) (non zTx), QA(z), non (zTy u. z≠z) mit TT41;
non Vr(Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z)T$^+$r u. rT$^+$y): ang. das Gegenteil, also mit DT1, AT3 Vr(Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z)Tr u. non rTUk(QA(k) u. kTy u. k≠z) u. rTy u. non yTr), also, da non rTUk(QA(k) u. kTy u. k≠z), mit AT5 Vm(QA(m) u. mTr u. non mTUk(QA(k) u. kTy u. k≠z)), also, da non M(m), mit TT41 non mTy o. m=z; nun mTy, denn mTr u. rTy und AT1; also m=z; also zTr (denn mTr);
es folgt yTr im Widerspruch zu non yTr: ang. QA(r') u. r'Ty; wenn r'=z, dann r'Tr wegen zTr; wenn r'≠z, dann mit TT18 r'TUk(QA(k) u. kTy u. k≠z), also wegen Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z)Tr mit AT1 r'Tr; demnach mit AT5 yTr;
demnach Vz'(z'Ty u. non yTz' u. non Vr(z'T$^+$r u. rT$^+$y)), also mit AT2, DT1 Vz'(z'T$^+$y u. non Vr(z'T$^+$r u. rT$^+$y)), also mit DT39 Vz'(z'NCy).

Man beachte, daß in vorstehendem Beweis aus der Annahme xT$^+$y nur von non yTx Gebrauch gemacht wurde. - TT139 beinhaltet *die Diskretheit* der Beziehung T$^+$. Aus TT139 folgen nämlich unmittelbar Λx(Vy(xT$^+$y) imp. Vz'(xNCz')), Λy(Vx(xT$^+$y) imp. Vz'(z'NCy)). Diese Theoreme besagen bezogen auf den Grundbereich von Sachverhalten: Wenn es überhaupt einen Sachverhalt gibt, aus dem ein Sachverhalt echt logisch folgt, dann gibt es auch einen Sachverhalt, aus dem dieser echt und *unmittelbar* logisch folgt; wenn es überhaupt einen Sachverhalt gibt, der aus einem Sachverhalt echt logisch folgt, dann gibt es auch einen Sachverhalt, der aus diesem echt und *unmittelbar* logisch folgt.

(d) Nähme man für T^+ Dichte an, so drückte man dies aus durch ΛxΛy(xT^+y imp. Vz(xT^+z u. zT^+y)), was äquivalent ist mit (D) ΛxΛy(xT^+y imp. non xNCy) (bzw. non VxVy(xNCy)). (D) ist in einem Grundbereich, der nicht nur Atome umfaßt, unvereinbar mit Λx(Vy(xT^+y) imp. Vz'(xNCz')); denn ang. Vy(xT^+y), also mit dem letztgenannten Prinzip Vz'(xNCz'), also nach DT39 Vz'(xT^+z' u. xNCz'), also mit (D) Vz'(xT^+z' u. xNCz' u. non xNCz') - Widerspruch; demnach Λx non Vy(xT^+y), d.h. nach DT1 ΛxΛy(xTy imp. x=y), d.h. nach DT2 ΛyA(y). [Wie diese Deduktion auch zeigt, ist ΛyA(y) logisch äquivalent mit der Konjunktion von (D) und Λx(Vy(xT^+y) imp. Vz'(xNCz')).]

(e) Jede Instanz der echten logischen Folgerung läßt sich in kleinste Schritte, in Instanzen der echten und unmittelbaren logischen Folgerung einteilen; denn es gilt:

TT140 ΛxΛy(xT^+y äqu. xNCy o. Vz'(z'NCy u. xT^+z'))

Beweis: (i) Von rechts nach links ist TT140 nach der Definition von NC und der Transitivität von T^+ trivial;
(ii) ang. xT^+y u. non xNCy; also non yTx, also nach AT5 Vz(QA(z) u. zTy u. non zTx); man betrachte Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z); nach dem Beweis von TT139 Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z)NCy; außerdem: xTUk(QA(k) u. kTy u. k≠z), denn ang. QA(r) u. rTx, also rTy wegen xTy (xT^+y) und AT1; r≠z, denn rTx, aber non zTx; also nach TT18 rTUk(QA(k) u. kTy u. k≠z); nach AT5 demnach das Gewünschte; Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z)≠x, denn sonst wegen Uk(QA(k) u. kTy u. k≠z)NCy xNCy; aber laut Annahme non xNCy;
aus dem Unterstrichenen Vz'(z'NCy u. xT^+z').

Auflösen in kleinste Schritte, in Instanzen der echten und unmittelbaren logischen Folgerung, läßt sich eine Instanz der echten logischen Folgerung aber nur dann, wenn ihre *Folgerungsdistanz* endlich ist.

(f) Die Diskretheit von T^+ ist unabhängig von der Mächtigkeit des Grundbereichs, denn beim Beweis von TT139 und TT140 haben wir von keinerlei Aussagen über die Mächtigkeit des Grundbereichs Gebrauch gemacht (natürlich ist immer vorausgesetzt, daß er nichtleer ist). Auch wenn wir also die Gesamtheit der Teilmengen der Menge der natürlichen Zahlen zugrundelegten - von diesen gibt es überabzählbar unendlich viele - und T^+ entsprechend deuteten, änderte das nichts an der durch TT139, TT140 festgestellten Diskretheit von T^+. Im endlichen mengentheoretischen Modell läßt sie sich veranschaulichen:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, phantom, "\mathrm{TO}"] & \mathrm{T,G:} & & \{a,b,c\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & :A^3_+,G^0_+ \\
{} & \mathrm{MK:} & \{a,b\} \arrow[d] & \{b,c\} \arrow[d] & \{a,c\} \arrow[d] & :A^2_+,G^1_+ \\
{} \arrow[d, phantom, "\mathrm{QA}"] & \mathrm{El:} & \{b\} \arrow[dr] & \{a\} \arrow[d] & \{c\} \arrow[dl] & :A^1_+,G^2_+ \\
{} & \mathrm{M,A:} & & \emptyset & & :A^0_+,G^3_+
\end{tikzcd}
$$

Jeder Pfeil bzw. jeder Pfad in Pfeilrichtung repräsentiert mit Ausgangsmenge und Abschlußmenge eine Instanz von NC bzw. T^+ bezogen auf das Modell.

20. Die Mächtigkeit des Sachverhaltuniversums

(a) Das Sachverhaltuniversum ist umkehrbar eindeutig abbildbar auf die Potenzmenge der Menge aller Elementsachverhalte; demnach ist seine Mächtigkeit (d.h. Kardinalzahl) gleich der Mächtigkeit der Potenzmenge der Menge aller Elementsachverhalte; also 2^c, wenn die Mächtigkeit der Menge aller Elementsachverhalte c ist.[1]

(b) Das Bestehen der angesprochenen Abbildungsbeziehung zwischen dem Sachverhaltuniversum und der Potenzmenge der Menge aller Elementsachverhalte sieht man so ein:

Jedem Sachverhalt ist die Menge der Elementsachverhalte zugeordnet, die Teilsachverhalte von ihm sind. Verschiedenen Sachverhalten sind verschiedene solche Mengen zugeordnet (nach AT3, AT5). Zu jeder Menge von Elementsachverhalten k gibt es einen Sachverhalt, nämlich die Konjunktion der Elemente aus k, dem sie als Menge der Elementsachverhalte, die Teilsachverhalte von ihm sind, zugeordnet ist: Es gilt für jede Menge k von Elementsachverhalten der Satz von PT ΛX(El(x) u. xTUzK(z) äqu. K(z)), wobei K ein k definierendes Prädikat von PT ist: angenommen k ist eine Menge von Elementsachverhalten, also gilt der Satz von PT Λx(K(x) imp. El(x)), also Λx(K(x) äqu. El(x) u. K(x)), also nach TT29 UzK(z)=Uz(El(z) u. K(z)), also nach TT44 und DT21 das Gewünschte.

Man beachte, daß wir im letzten Teil des vorstehenden Beweises implizit von der Annahme Gebrauch gemacht haben, daß sich jede beliebige Menge von Elementsachverhalten durch ein Prädikat von PT definieren läßt. Diese Annahme ist unverzichtbar für dessen Durchführbarkeit, da wir uns in ihm (abgesehen von der Mengenlehre) nur auf die Charakterisierung des Sachverhaltuniversums durch *AT1 - AT6 in PT* stützen.

(c) Für keine Mächtigkeit c ist 2^c die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen $aleph_0$ (die kleinste transfinite Kardinalzahl): Ist c eine endliche Mächtigkeit, dann ist auch 2^c eine endliche Mächtigkeit, also nicht $aleph_0$; ist c eine unendliche Mächtigkeit, dann ist c $aleph_0$ oder größer als $aleph_0$; wenn c $aleph_0$ ist, dann ist 2^c nicht $aleph_0$, da 2^c größer als c ist (Satz von Cantor)[2]; wenn c größer als $aleph_0$ ist, dann ist 2^c

erst recht größer als $aleph_0$, also nicht $aleph_0$, da 2^c größer als c ist (Satz von Cantor).

Daraus folgt, daß die Mächtigkeit des Sachverhaltuniversums nicht $aleph_0$ ist, denn seine Mächtigkeit ist ja 2^c, wo c die Mächtigkeit der Menge der Elementsachverhalte ist. Das Sachverhaltuniversum ist demnach nicht abzählbar unendlich. Nach dem *Theorem von Löwenheim und Skolem*[3], das für den Satzbegriff einer prädikatenlogischen Sprache 1. Stufe wie PT sicherlich gilt, kann man aber für keine im Unendlichen erfüllbare Menge von Satzformen, also auch nicht für AT1 - AT6 (zur Erfüllbarkeit von AT1 - AT6 vergl. 11., (e); da jede Menge von Teilmengen einer Menge ein AT1 - AT6 adäquates Modell konstituiert, folgt auch die Erfüllbarkeit von AT1 - AT6 im Unendlichen) konsistenterweise beweisen, daß der durch sie beschriebene Grundbereich nicht abzählbar unendlich ist. Woran krankt also unser Beweis in (b)? - Die intendierte Deutung von AT1 - AT6 ist für ihn unwesentlich. Man kann also nicht sagen, es werde einfach von Verschiedenem geredet: bei der Anwendung des Löwenheim-Skolem-Theorems sei AT1 - AT6 eine Menge uninterpretierter Satzformen, beim Beweis, daß das Sachverhaltuniversum nicht abzählbar unendlich groß ist, dagegen eine Menge *interpretierter*. Nein, letzterer Beweis ist nicht nur ein Beweis dafür, daß aufgrund der gegebenen Deutung von AT1 - AT6 das Sachverhaltuniversum nicht abzählbar unendlich groß ist, er ist ein Beweis dafür daß AT1 - AT6 (als Menge uninterpretierter Satzformen) kein abzählbar unendliches Modell hat.

Der wunde Punkt ist die Annahme, daß sich jede Menge von Elementsachverhalten durch ein Prädikat von PT definieren läßt. Diese Annahme läßt sich im Falle, daß es unendlich viele Elementsachverhalte gibt, nicht aufrechterhalten, denn dann gibt es überabzählbar unendlich viele Mengen von Elementsachverhalten; doch die Gesamtmenge der Prädikate von PT ist höchstens abzählbar unendlich

(d) Zwar ist tatsächlich die Mächtigkeit des Sachverhaltuniversums 2^c, wenn c die Mächtigkeit der Menge der Elementsachverhalte ist, und darum ist es nicht abzählbar unendlich (sondern endlich oder überabzählbar unendlich); jedoch läßt sich das nicht allein mithilfe dessen Charakterisierung durch AT1 - AT6 in PT (und Mengenlehre) einsehen. Dazu müssen wir vielmehr von der elementaren Sprache PT übergehen zur Sprache höherer Stufe P^1T, in der nicht nur über Sachverhalte, sondern auch über Mengen (bzw. Eigenschaften) von Sachverhalten quantifiziert wird und in der sich mit einem zusätzlichen Variablentypus AT4 und AT6 stärker formulieren lassen [AT4 z.B. nimmt die Gestalt an ΛfVz(Λx(f(x) imp. xTz) u. Λy(Λx(f(x) imp. xTy) imp. zTy))]. In diesem System könnte man mit den Analoga von TT29 und TT44 direkt den kritischen Satz unter (b) Λf(Λx(f(x) imp. El(x)) imp. Λx(El(x) u. xTUzf(z) äqu. f(x))) beweisen ("Zu jeder Menge f von Elementsachverhalten gibt es einen Sachverhalt, nämlich die Konjunktion der Elemente aus f, dem sie als Menge der Elementsachverhalte, die Teilsachverhalte von ihm sind, zugeordnet ist"). Für die Sachverhaltsontologie liegt also eine ähnliche Situation vor wie für die Arithmetik. Ihre Axiome lassen sich wie die Axiome der Arithmetik (die Peano-Axiome) vollständig adäquat nur in einer Sprache 2. Stufe formulieren.

(e) Nach AT7, TT104 und AT9 umfaßt das Sachverhaltuniversum mindestens drei Sachverhalte; es umfaßt aber auch mindestens vier Sachverhalte, denn: $\neg\underline{w}\neq\underline{t}$, da sonst $\neg\neg\underline{w}=\neg\underline{t}$, also nach TT54 und TT55 $\underline{w}=\underline{k}$, was AT7 widerspricht;
$\neg\underline{w}\neq\underline{k}$, da sonst $\neg\neg\underline{w}=\neg\underline{k}$, also nach TT54 und TT55 $\underline{w}=\underline{t}$, was AT9 widerspricht;
$\neg\underline{w}\neq\underline{w}$ nach TT105.
Es läßt sich aber aufgrund von AT1 - AT6 nicht zeigen, daß das Sachverhaltuniversum noch weitere Sachverhalte umfaßt.[4] Angesichts der ungeheuren Vielgestaltigkeit der wirklichen Welt ist es plausibel anzunehmen, daß es unendlich viele Tatsachen und folglich unendlich viele Sachverhalte gibt. Dies können wir in PT z.B. so ausdrücken:

AT10 VxA$^{n}_{*}$(x)

AT10 ist ein Axiomenschema[5]; für jede Einsetzung eines Index anstelle von "n" erhält man ein Axiom. AT10 besagt, daß es von jedem beliebigen unteren Grad Sachverhalte gibt; wegen TT134 folgt daraus, daß es unendlich viele Sachverhalte gibt.[6] Bei AT10 liegt es auf der Hand, daß es keine analytische Wahrheit darstellt, was ja auch für AT7 - AT9 schon mehr als zweifelhaft gewesen ist.

I., 20.: Mächtigkeit des Sachverhaltuniversums

Anmerkungen:

[1]Zur Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge siehe L. Borkowski, *Formale Logik*, S. 338.

[2]Zu Cantors Theorem siehe *Formale Logik*, S. 338.

[3]Der Satz von Löwenheim und Skolem besagt: *Jede höchstens abzählbare [endliche oder abzählbar unendliche] Menge von Ausdrücken [Satzformen, die bis auf die logischen Zeichen uninterpretiert sind], die erfüllbar ist, ist erfüllbar über einem höchstens abzählbaren Träger [Bereich]* (*Einführung in die mathematische Logik*, S. 110). Aus ihm folgt: *Jede höchstens abzählbare Ausdrucksmenge, die über einem unendlichen Bereich erfüllbar ist, ist auch über einem abzählbaren [abzählbar unendlichen] Bereich erfüllbar* (ebd., S. 112, Aufgabe 1.4). Auf dieses Korollar beziehen wir uns hier.

[4]Das minimale Modell von AT1 - AT9 umfaßt also $\underline{t}$, $\neg\underline{w}$, $\underline{w}$ und $\underline{k}$.

[5]Ohne Beweis sei hier behauptet: Ein Unendlichkeitsaxiom als *Satz*, nicht als Schema kann konsistent mit AT1 - AT6 in PT nicht formuliert werden ($\bigwedge x \bigvee y(yT^{+}x)$ und $\bigwedge x \bigvee y(xT^{+}y)$ z.B. führen sofort zum Widerspruch). Es ist bekannt, daß kein *Unendlichkeitssatz* für den atomistischen Individuenkalkül - Goodmans Mereologie - existiert (siehe W. Hodges, D. Lewis, "Finitude and Infinitude in the Atomic Calculus of Individuals"); das Beweisverfahren hierfür dürfte sich auf die Sachverhaltsontologie übertragen lassen.

[6]Aus AT10 ergibt sich AT9, denn aus der Negation von AT9 folgt ja nach TT117 $\bigwedge x(x=\underline{t}$ o. $x=\underline{k})$, was AT10 widerspricht.

II. Eigenschaftsontologie und Mereologie

1. Die Teilbeziehung zwischen Eigenschaften

(a) Das Axiomensystem AT1 - AT6 läßt sich als Herzstück eines Axiomensystems der Sachverhaltsontologie deuten. Dies ist aber nicht seine einzige intuitiv naheliegende und philosophisch bedeutsame Interpretation. Während es ungewöhnlich ist, von einer Teilbeziehung zwischen Sachverhalten zu sprechen, d.h. die Beziehung der logischen Folgerung als Teilbeziehung aufzufassen, ist die Rede davon, daß eine Eigenschaft[1] f Teil einer Eigenschaft g ist, verhältnismäßig vertraut[2]. Wohlbekannt ist auch die Tatsache, daß eine Eigenschaft f in zweierlei Sinn Teil einer Eigenschaft g sein kann, nämlich *extensional* oder *intensional*; ein Lebewesen zu sein, ist intensional Teil der Eigenschaft, ein Mensch zu sein; aber ein Mensch zu sein, ist extensional Teil der Eigenschaft, ein Lebewesen zu sein. (Wenn man schlicht davon spricht, daß eine Eigenschaft Teil einer anderen ist, so meint man in aller Regel die intensionale Teilbeziehung, und wir halten es immer so.)

Es soll für alle Eigenschaften f, g gelten:

(P) f ist intensional Teil von g genau dann,
wenn g extensional Teil von f ist.[3]

Wenn dies gelten soll, so kann man "g ist extensional Teil von f" nicht einfach wie es intuitiv naheliegt durch "alle g sind f" bestimmen[4]; nähme man nämlich diese Bestimmung vor, so erhielte man, da alle Lebewesen mit Herz Lebewesen mit Nieren sind, mit (P), daß die Eigenschaft, ein Lebewesen mit Niere zu sein, intensional Teil der Eigenschaft ist, ein Lebewesen mit Herz zu sein, was kontra-intuitiv ist. - Es ist aber zu bedenken, daß wir in dieser Überlegung "alle g sind f", im Sinne von "alle *existenten* g sind f" gelesen haben. Die aufgewiesene Schwierigkeit verschwindet, wenn wir stattdessen "alle g sind f" im Sinne von "alle möglichen g sind f" lesen; denn zwar sind alle existenten Lebewesen mit Herz Lebewesen mit Niere, aber nicht alle möglichen Lebewesen mit Herz sind Lebewesen mit Niere. Können wir also bei Geltung von (P) "g ist extensional Teil von f" durch "alle g sind f" im Sinne von "alle möglichen g sind f" bestimmen?

(b) Diese Bestimmung könnte insofern problematisch erscheinen, als bei ihr mögliche, aber nichtexistente Gegenstände ins Spiel kommen. Aber zugestanden, daß es mögliche, nichtexistente Gegenstände gibt! Es bleibt dann: Nach dieser Bestimmung und (P) ist es dafür, daß f intensional Teil von g ist, hinreichend und notwendig, daß (*tatsächlich*) alle möglichen g f sind; aber ist es nicht dafür darüberhinaus erforderlich, daß *notwendigerweise* alle möglichen g f sind? Und hier sehen wir auch sogleich zwei weitere mitkonkurrierende Bestimmungen von "g ist extensional Teil von f" bei Geltung von (P), nämlich die durch "notwendigerweise sind alle existenten g f" und die durch "alle existenten g sind notwendigerweise f", formal: $N\Lambda.x(g(x) \text{ imp. } f(x))$, $\Lambda.xN(g(x) \text{ imp. } f(x))$, wo der Punkt neben Λ die Quantifikation über (relativ zu einer möglichen Welt) existente Objekte andeutet; Λ ohne Punkt werde hier dagegen zum Ausdruck der Quantifikation über (logisch) mögliche Gegenstände verwendet ("N" ist hier ein Satzoperator). Während $N\Lambda x(g(x) \text{ imp. } f(x))$ und $\Lambda xN(g(x) \text{ imp. } f(x))$ äquivalent sind, sind es $N\Lambda.x(g(x) \text{ imp. } f(x))$ und $\Lambda.xN(g(x) \text{ imp. } f(x))$ nicht, denn für $\Lambda.$ ist die *Barcan-Formel*[5] ungültig; daß alle *in unserer Welt* existenten Gegenstände in allen möglichen Welten, in denen sie g sind, auch f sind, verhindert nicht, daß es eine mögliche Welt gibt, in der ein *in ihr existenter* Gegenstand g ist, aber nicht f. (Bezieht sich $\Lambda.$ gleichgültig, wo es steht, auf die in unserer Welt existenten Gegenstände, dann gilt die Barcan-Formel allerdings; das entspricht aber nicht der gewöhnlichen Interpretation von $\Lambda.$)

(c) Eine Entscheidung zwischen den vier gemäß (P) mit einiger Plausibilität in Betracht kommenden Deutungen von "g ist extensional Teil von f" und damit von "f ist intensional Teil von g" wollen wir hier nicht herbeiführen. Im dritten Teil (wo die Teilbeziehung zwischen Eigenschaften definiert wird) wird sich aber zeigen, daß für eine *gewisse* Gegenstandskonzeption (mit gutem Grund kann man sie als die normale ansehen) und die ihr entsprechende Konzeption der Erfüllungsbeziehung die 2. Deutung von den vieren die richtige ist; ein *Theorem* (keine triviale definitorische Äquivalenz!) im Sinne dieser Deutung läßt sich dort beweisen (siehe Anmerkung zu III., 10., (c)). Für eine gewisse *andere* Gegenstandskonzeption (wonach Gegenstände maximal-konsistente Eigenschaften oder auf diese umkehrbar eindeutig abbildbar sind) ist aber die 1. Deutung von den vieren die richtige; ein Theorem im Sinne dieser Deutung läßt sich bereits in diesem Teil beweisen (siehe 6., (a), $TT22^{+}$ und die nachfolgenden Ausführungen). (Statt von unterschiedlichen Gegenstandskonzeptionen kann man natürlich auch von unterschiedlichen Sorten von *Gegenständen im weitesten Sinne* reden.)

Die intensionale Teilbeziehung betrachten wir hier vielmehr als hinreichend verständlichen Grundbegriff, wenn wir nun als Grundbereich von PT die Gesamtheit aller Eigenschaften annehmen und "T" als die intensionale Teilbeziehung zwischen Eigenschaften deuten. Wir wollen annehmen, daß die Axiome AT1 - AT6 in dieser Interpretation gültig sind, und zwar analytisch; damit sind dann auch alle aus AT1 - AT6 ableitbaren Theoreme in ihr gültig.

Es ist von nicht geringem Interesse im einzelnen zu verfolgen, welche Leseweisen die beim Aufbau von AT1 - AT6 eingeführten Begriffe (und damit die aus AT1 - AT6 gefolgerten Theoreme) bei dieser Deutung annehmen; daraus wird sich dann auch ergeben, daß die Annahme von AT1 - AT6 bzgl. der beschriebenen Interpretation gut gesichert ist.

Anmerkungen:

[1]Wir reden hier von Eigenschaften im engen Sinn, d.h. von Eigenschaften von Gegenständen.

[2]So vertraut, daß sie das ursprüngliche Paradigma der booleschen Inklusion ist. An ihr gewann Leibniz seine Intuitionen beim Erstaufbau der booleschen (man sollte sagen "leibnizschen") Algebra. Siehe W. Lenzen, "Leibniz und die Boolesche Algebra", S. 191.

[3](P) steht in engem Zusammenhang mit dem sogenannten "Reziprozitätsgesetz", "demzufolge sich die Extensionen und die Intensionen zweier Terme A und B umgekehrt proportional zueinander verhalten --- (R) $Ext(A) \subset Ext(B) \equiv Int(B) \subset Int(A)$" (W. Lenzen, "Zur extensionalen und 'intensionalen' Interpretation der Leibnizschen Logik", S. 141). (P) kann als nichtsprachbezogene, nichtmengentheoretische Formulierung des Gesetzes *ohne* Bezugnahme auf Extensionen und Intensionen angesehen werden. Vergl. P. Weingartners "Prinzip vom antagonistischen Verhältnis zwischen Extension und Intension":*a ist extensional in b enthalten genau dann, wenn b intensional in a enthalten ist* ("Extension/Intension", S. 222).

[4]Aber sicherlich gilt: *Ist g extensional Teil von f, dann sind alle g f,* und demnach mit (P): *Ist f (intensional) Teil von g, dann sind alle g f.* D. M. Armstrong kritisiert dieses Prinzip auf S. 39 von *Universals and Scientific Realism*, II. Seine weiteren Ausführungen machen deutlich, daß *seine* Teilbeziehung zwischen Eigenschaften eine ganz andere ist als die, an die man - mit Leibniz - gewöhnlich denkt. Armstrong meint aber merkwürdigerweise *seine* Teilbeziehung zwischen Eigenschaften sei nur eine Spezialisierung der allgemeinen Teilbeziehung, die zwischen Klasse und Teilklasse, Provinz und Land, Konjunktion und Konjunktionsglied (!) etc. besteht (ebd., S. 36f). Wenn dem so wäre, so müßte es negative und disjunktive Eigenschaften geben (denn wo Teile im gewöhnlichen Sinn sind, da sind Komplemente und größte gemeinsame Teile), was Armstrong jedoch bemüht ist abzuwehren (ebd., S. 19 - S. 29). Armstrong erwähnt zwar das Wort "Mereologie" (ebd., S. 38), er besitzt aber, wie es scheint, keinerlei Kenntnis von den Inhalten dieser Wissenschaft.

[5]Die Barcan-Formel ist das modallogische Prinzip *Wenn alle notwendigerweise A sind, dann sind notwendigerweise alle A.* Einwände gegen sie beruhen auf der Deutung von "alle" als "alle in der jeweiligen Bezugswelt existenten".

2. Neue Leseweisen eingeführter Begriffe bzgl. der neuen Interpretation von PT und Inhärenz

(a) "$\wedge$", "$\vee$", "$\neg$", "$\bigcup$", "$\bigcap$" werden nun als Eigenschaftsfunktionen verwendet. $(f \wedge g)$ ist die Konjunktion, $(f \vee g)$ die Adjunktion der Eigenschaften f und g; $\neg f$ die Negation der Eigenschaft f; $\bigcup fA[f]$ die Konjunktion aller Eigenschaften f, so daß gilt A[f]; $\bigcap fA[f]$ ist die Adjunktion aller Eigenschaften f, so daß gilt A[f]. Die Eigenschaftsfunktionen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ sind wohlvertraut[1]; $\bigcup$ und $\bigcap$ sind naheliegende Verallgemeinerungen von $\wedge$ und $\vee$.

(b) "$\underline{t}$" bezeichnet nun die Eigenschaft, die (intensionale) Teileigenschaft aller Eigenschaften ist, d.h. die Eigenschaft *Etwassein* (eine-Eigenschaft-zu-haben); "$\underline{k}$" dagegen die Eigenschaft, von der alle Eigenschaften Teileigenschaften sind, d.h. die Eigenschaft *Allessein* (alle-Eigenschaften-zu-haben).

(c) Was sind maximal-konsistente Eigenschaften, d.h. Eigenschaften, von denen bzgl. jeder Eigenschaft entweder diese selbst oder deren Negation Teileigenschaft ist? - Man kann die maximal-konsistenten Eigenschaften als die logisch möglichen Gegenstände auffassen (wie Leibniz das zuerst getan hat)[2] in Analogie zur Auffassung von maximal-konsistenten Sachverhalten als (logisch) mögliche Welten. Diese Auffassung hat eine Reihe von interessanten Konsequenzen. Zunächst erlaubt sie die Definition der Erfüllungsbeziehung durch die Teileigenschaftsbeziehung:

$DT1^{+}$ $\quad \varphi\langle\tau\rangle := MK(\tau)$ u. $\varphi T \tau$
(τ erfüllt φ, φ trifft zu auf τ)

Die Leseweise von $\varphi\langle\tau\rangle$ als "τ erfüllt φ", "φ trifft zu auf τ" ist für den jetzigen Grundbereich spezifisch; legte man dagegen die Gesamtheit aller Sachverhalte zugrunde, so müßte man $\varphi\langle\tau\rangle$ lesen als "φ ist wahr in τ". - Man beachte, daß wir in der Sprache PT nicht zwei Typen von Variablen haben; alle Variablen werden nach der Neufestlegung des Grundbereichs aufgefaßt als Eigenschaftsvariablen. Neben den Variablen "x", "y", "z" etc. verwenden wir nun aber auch "f", "g", "h" etc. der eingängigeren Lesbarkeit halber.

"x<z>" ist genauso sinnvoll wie "f<g>", "f<z>" und "x<g>", und "VxVz(x<z>)" ist gleichbedeutend mit "VfVg(f<g>)", "VfVz(f<z>" und "VxVg(x<g>)"; wir schreiben aber bevorzugt "VfVz(f<z>)".

(d) Für "fTz" sagt Leibniz "f ist in (*inest*) z"[3] (eine Leseweise von "fTz", die für jeden Grundbereich tauglich ist). Traditionell wird aber auch das Bestehen der Erfüllungsbeziehung zwischen f und z ausgedrückt durch "f ist in z". Wir sagen "f ist in z", wenn wir nicht mehr meinen als, daß f Teil von z ist; wir sagen dagegen "f inhäriert z", wenn wir meinen, daß f auf z zutrifft, d.h. nach DT1$^+$, daß f eine Teileigenschaft von z und z ein möglicher Gegenstand (eine maximal-konsistente Eigenschaft) ist. (Statt "f inhäriert z" kann man auch sagen "z trägt f".)

TT1$^+$ Λx(x<x> äqu. MK(x))
(abhängig von AT2)

TT1$^+$ besagt, daß die *Substanzen* - die möglichen Gegenstände - die sich selbst inhärierenden (sich selbst tragenden) Eigenschaften sind. Die *Akzidenzien* sind dann die nicht sich selbst inhärierenden (nicht sich selbst tragenden) Eigenschaften. Nach der gewöhnlichen Auffassung dieses vieldeutigen Wortes sind aber die Akzidenzien schlicht die Eigenschaften, und der Zusatz "nicht sich selbst inhärierend" ist redundant, da jede Eigenschaft nicht sich selbst inhäriert.[4] Diesen Intuitionen kann man gerecht werden, indem man die Entitäten im Grundbereich einfach als "Inhalte" bezeichnet und dann sagt: Mögliche Gegenstände (Substanzen) sind die sich selbst inhärierenden Inhalte, Eigenschaften (Akzidenzien) sind die nicht sich selbst inhärierenden Inhalte.

Freilich gibt es bzgl. des Inhärenzbegriffs auch die Intuition, daß nicht nur Eigenschaften nicht sich selbst inhärieren, sondern auch (mögliche) Gegenstände nicht, also daß überhaupt keine Inhalte sich selbst inhärieren. Will man dieser Intuition folgen, so muß man die Definition des Inhärenzbegriffs abändern und setzen $\varphi\langle\tau\rangle := MK(\tau)$ u. $\varphi T^{+}\tau$, d.h. statt der Teileigenschaftsbeziehung, die *echte* Teileigenschaftsbeziehung verwenden. Damit erhält man sofort ΛfΛx(f<x> imp. non x<f>) und Λx non x<x>. Wir wollen hier aber bei DT1$^+$ bleiben und demzufolge zulassen, daß Inhalte sich selbst inhärieren. Die Selbstinhärenz ist ein Grenzfall, denn es gilt

$TT2^+$ $\quad \Lambda x(x\langle x\rangle \text{ äqu. } \Lambda y(x\langle y\rangle \text{ äqu. } x=y))$,

wonach ein Inhalt genau dann sich selbst inhäriert (eine Substanz ist), wenn für ihn, daß er einem Inhalt inhäriert, bedeutet, daß er mit ihm identisch ist (d.h. wenn er nur sich selbst inhäriert).[5]

Beweis: (i) $\Lambda y(x\langle y\rangle$ äqu. $x=y)$, also $x\langle x\rangle$ äqu. $x=x$, also $x\langle x\rangle$;
(ii) $x\langle x\rangle$, also nach $TT1^+$ $MK(x)$;
(x) ang. $x=y$; also $x\langle y\rangle$;
(xx) ang. $x\langle y\rangle$, also $MK(y)$ u. xTy nach $DT1^+$, also nach TT79[6] $x=y$.

(e) Wenn wir die Entitäten im Grundbereich neutral "Inhalte" nennen, was aus dem in (d) angeführten Grunde vorteilhaft erscheint, aber auch der Störung Abhilfe schafft, daß die Auffassung von Gegenständen als gewisse Eigenschaften sich beständig an der eingeführten Sprachregelung stößt, wonach *Gegenstände* einfach keine *Eigenschaften* sind, dann besagt DT29 gemäß $DT1^+$, daß ein Inhalt genau dann (logisch) möglich ist, wenn es einen (logisch) möglichen Gegenstand gibt, dem er inhäriert (äquivalent: wenn es einen Inhalt gibt, dem er inhäriert); und nach TT85, TT91 etc. ist das genau dann der Fall, wenn er vom *Allessein* (der kontradiktorischen Eigenschaft) verschieden ist. Der einzige (extensional) leere (d.h. nicht erfüllte, d.h. logisch unmögliche) Inhalt ist also die kontradiktorische Eigenschaft. Daraus aber, daß es keine anderen leeren Inhalte gibt, folgt *nicht*, daß z.B. die Eigenschaft *Einhornsein*, in dem starken Sinne erfüllt ist, daß es einen *existenten* Gegenstand gibt, der ein Einhorn ist, was grob kontra-intuitiv wäre; daß diese Eigenschaft gewissen logisch möglichen Gegenständen inhäriert, also in diesem Sinne erfüllt ist, beinhaltet nicht, daß einer von diesen existiert, daß sie also im starken Sinne erfüllt ist.

Anmerkungen:

[1]D. M. Armstrong wendet sich in *Universals and Scientific Realism*, II, S. 19 - S. 29 gegen disjunktive und negative Universalien, also auch gegen disjunktive und negative Eigenschaften. Konjunktive Eigenschaften hingegen läßt er zu (ebd., S. 30ff). (In unserem System sind disjunktive und negative Eigenschaften spezielle konjunktive! Jede Eigenschaftsfunktion läßt sich ja mit der großen Konjunktion definieren.) Demgegenüber ist erstens festzustellen, daß der Gebrauch von "nicht" und "oder" als Eigenschaftsmodifikatoren umgangssprachlich sehr gut verankert ist. Was versucht Hans, wenn der Satz "Hans versucht, nicht zu fallen" wahr ist? - Er versucht eine gewisse Eigenschaft, die er hat, weiterzubehalten. - Welche Eigenschaft? - Die Eigenschaft, *nicht zu fallen*. (Ähnlich: "Hans nimmt sich vor, nicht zu lügen".) - Was bleibt ihnen allein übrig, wenn der Satz "Es bleibt ihnen nichts anderes übrig, als zu siegen oder zu sterben" wahr ist? - Es bleibt ihnen nichts anderes übrig, als eine gewisse Eigenschaft in Zukunft zu haben. - Welche Eigenschaft? - *Zu siegen oder zu sterben*. "oder" und "nicht" bilden zusammen mit "zu"+Infinitiv *Namen* - von was, wenn nicht von negativen und disjunktiven Eigenschaften? Armstrong obliegt es, alle diese Namen, wo auch immer sie vorkommen, ohne Brachialgewalt wegzuanalysieren!

Zweitens werden wir im dritten Teil sehen, daß, da Eigenschaften "Sachverhaltsreste" sind, es negative und disjunktive Eigenschaften schon deshalb gibt, *weil* es negative und disjunktive Sachverhalte gibt. Daß man *deren* Existenz schlecht leugnen kann, haben wir im ersten Teil gesehen.

Drittens, um nun auf zwei Argumente von Armstrong einzugehen: *Negation* darf nicht mit *Privation* verwechselt werden. Armstrong schreibt: "Properties should be such that it at least makes sense to attribute causal powers to objects in virtue of these properties. But how could a mere lack or absence endow anything with causal powers?" (ebd., S.25). Die Negation einer Eigenschaft f ist nicht "a mere lack or absence", sonst müßte ja wohl auch die Negation dieser Negation "a mere lack or absence" sein ("Nothing will come of nothing", wie Armstrong treffend sagt); aber im Gegenteil ist sie mit f identisch. Ob wir f oder seine Negation als Privation ansehen, hat nichts damit zu tun, daß das eine die Negation des anderen ist, sondern hängt von unseren Interessen ab. - Armstrong behauptet "disjunctive properties offend against the principle that a genuine property is identical in its different particulars" (ebd., S. 20). Was haben zwei Individuen gemeinsam, auf die $(f \vee g)$ zutrifft, weil das eine f ist, aber nicht g, das andere g, aber nicht f? - Ganz einfach: die größte Eigenschaft, die sowohl Teil von f als auch Teil von g ist. (Armstrong erlaubt es, von Teilen von Eigenschaften zu reden!) - Welche Eigenschaft ist das? - $(f \vee g)$. (Die beiden diskutierten Argumente sind noch Armstrongs beste.)

Schließlich: Wenn P und Q Eigenschaften ausdrücken, dann drücken nach Armstrong $\neg P$, $\neg Q$ und $(\neg P \vee \neg Q)$ keine Eigenschaften aus, wohl aber $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ (ebd., S. 42). Das ist genauso, als sagte man, daß (ohne zusätzliche Festlegungen) "3:0", "2:0", "(3:0)x(2:0)" keine Zahlen bezeichnen, wohl aber "((3:0)x(2:0)):0".

[2]Vergl. H. Burkhardt, *Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz*, S. 347. - Gegenstände (wir gebrauchen dieses Wort nun im zweiten unter 1., (c) angesprochenen Sinn) als *eigenständige*

ontologische Kategorie sind jedoch unverzichtbar. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung von Gegenständen auf maximal-konsistente Eigenschaften, die eine Identifikation von beiden überhaupt plausibel macht, gibt es nur deshalb, weil sich unter den Eigenschaften *Relationseigenschaften* befinden; das sind aber nur mithilfe von Gegenständen definierbare Eigenschaften. Maximal-konsistente Eigenschaften können nicht Gegenstände *sein*, wohl aber können sie sie (die passende Gegenstandskonzeption vorausgesetzt) wenigstens repräsentieren, als solche *aufgefaßt* werden. - Hat Leibniz mögliche Gegenstände mit maximal-konsistenten Eigenschaften *identifiziert*? B. Mates schreibt in *The Philosophy of Leibniz*, S. 73: "Most of Leibniz's references to possible objects can be rephrased in terms of individual concepts [unsere maximal-konsistenten Eigenschaften] ... This is not to say that it would make sense, in Leibnizian terms, to assert that a possible object *is* an individual concept". Auch nach Burkhardt unterschied Leibniz Individuum und Individuenbegriff: *Logik und Semiotik ...*, S. 169. Siehe dagegen F. v. Kutschera, "Grundbegriffe der Metaphysik von Leibniz ...", S. 94: "Nach Leibniz muß zunächst ein vollständiger Begriff (notio completa) [Mates' *individual concept*] einer Substanz alle Eigenschaften (praedicata) als Merkmale enthalten. Die Substanz ist also genau dann vollständig charakterisiert, wenn alle ihre Eigenschaften festliegen. Und darüberhinaus läßt sich über so etwas wie einen von ihnen verschiedenen Träger der Eigenschaften nichts aussagen. Danach kann man also die Substanz selbst mit der Menge ihrer Eigenschaften identifizieren." (Den Intentionen von Leibniz wäre es zweifellos angemessener, sie mit der Konjunktion ihrer Eigenschaften, der notio completa zu identifizieren.)

[3]Bzw. "z *continet* f"; vergl. W. Lenzen, "Zur extensionalen und 'intensionalen' Interpretation der Leibnizschen Logik", S. 131.

[4]Gemäß dem ontologischen Quadrat des Aristoteles handelt es sich bei Akzidenzien in diesem gewöhnlichen Sinn um diejenigen Entitäten, *die sowohl im Gegenstand sind als auch von ihm ausgesagt werden*; vergl. I. Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, S. 12. D.h. "Akzidenz" wird im Sinne von "universales Akzidenz" gebraucht. (In der traditionellen Deutung des ontologischen Quadrats stehen universale Akzidenzien im Kontrast zu individuellen Akzidenzien und zu universalen und individuellen Substanzen.) Welcher Gebrauch des Wortes im Sinne Aristoteles' wäre, liegt nicht eindeutig fest; siehe ebd., S. 15f. Das Wort "Substanz" wird gewöhnlich gleichbedeutend mit "individuelle Substanz" gebraucht; so verwenden wir es hier nicht, sondern vielmehr im Sinne von "Individuum" (womit hier "Gegenstand" synonym ist). Wenn es keine individuellen Akzidenzien gibt, dann sind gemäß der Deutung des ontologischen Quadrats, wonach Akzidenzien universal oder individuell, Individuen substanziell oder akzidentell sind, die Akzidenzien die universalen Akzidenzien und die Individuen die individuellen Substanzen.

[5]In der ontologischen Tradition gibt es Bestimmungen des Individuums in diesem Sinn; siehe J. J. Gracia, *Introduction to the Problem of Individuation in the Early Middle Ages*, S. 71, lateinisch S. 113f: [Boethius im Kommentar zur *Isagoge* des Porphyrius] "individua vero quoniam sub se nihil habent ubi secari distribuique possint, ad nihil aliud praedicantur nisi ad se ipsa, quae

singula atque una sunt." Aber auch ebd., S. 83, lateinisch S. 116f: [Boethius im Kommentar zu den *Kategorien*] "Simpliciter autem quae sunt individua et numero singularia, de nullo subjecto dicuntur." Letzterem entspricht das Theorem $\bigwedge x(MK(x)$ imp. non $\bigvee y(x\langle y\rangle))$, *wobei* $x\langle y\rangle$ mit der *echten* Teilbeziehung definiert ist.

[6]TT79 besagt in der neuen Deutung, daß Substanzen keine echten Teile voneinander sein können. Damit dies nicht kontra-intuitiv erscheint, muß man im Auge behalten, daß die hier verwendete Teilbeziehung *nicht* die mereologische Teilbeziehung ist.

3. Subsistenz und Existenz

(a) Den Existenzbegriff für Inhalte können wir nicht so definieren, wie wir in DT31 den für Sachverhalte definiert haben. Wir können im Bereich der Inhalte nicht genau einen Zentralinhalt ausmachen, so daß zu existieren für einen Inhalt eben heißt, an diesem Zentralinhalt teilzuhaben. Wohl aber können wir gewisse Zentralinhalte ausgrenzen, so daß zu existieren für einen Inhalt heißt, an einem dieser Zentralinhalte teilzuhaben. Dazu führen wir in die Sprache PT statt der Konstanten $\underline{w}$ das einstellige Prädikat Sub ein; Sub(τ) lesen wir als "τ ist real subsistent". Wir definieren:

$DT2^{+}$ $\quad E(\tau) := Vy(Sub(y)\ u.\ \tau Ty)$

Nach $DT2^{+}$ existiert ein Inhalt genau dann, wenn er Teilinhalt eines real subsistenten Inhaltes ist.

(b) In $DT2^{+}$ wird der allgemeinere Begriff durch den spezielleren definiert. Umgekehrt hätten wir auch, indem wir E als Grundprädikat verwendeten, den spezielleren Begriff durch den allgemeineren definieren können: $Sub(\tau) := E(\tau)\ u.\ MK(\tau)$ (real subsistente Inhalte sind existierende Substanzen). Wir sind den ersten Weg gegangen, da sich Sub bei gleichen Resultaten bündiger und intuitiv durchsichtiger als E axiomatisch charakterisieren läßt. (Auch in der Sachverhaltsontologie hätten wir E als Grundprädikat verwenden und $\underline{w}$ als UyE(y) definieren können; das hätte bei gleichen Resultaten die Axiomatik aber erheblich verkompliziert.) Wir postulieren einfach:

$AT7^{+}$ $\quad \Lambda x(Sub(x)\ imp.\ MK(x))$
(*Jeder real subsistente Inhalt ist eine Substanz*)

$AT7^{+}$ steht in Analogie zu TT106, das sich aus AT7 und AT8 ergibt, so wie sich umgekehrt aus ihm AT7 und AT8 ergeben (relativ zu AT1 - AT6). $AT7^{+}$ gilt aber anders als AT7 und AT8 mit Sicherheit analytisch. Dafür entstehen nun gewisse Zweifel an der Adäquatheit von $DT2^{+}$ (während keine an der Adäquatheit von DT31 bestanden); nähme man "E" als Grundbegriff und definierte $Sub(\tau) := E(\tau)$ u. $MK(\tau)$, wäre dann $\Lambda x(E(x)$ äqu. $\vee y(Sub(y)$ u. $xTy))$ analytisch wahr (eine Bedeutungswahrheit in Anbetracht des Grundbereichs)? Wenn ein Inhalt Teilinhalt eines real subsistenten Inhaltes, d.h. eines wirklichen Gegenstandes ist, so existiert er; dieser Zusammenhang gilt analytisch, da analytisch notwendigerweise mit einem Ganzen auch alle seine Teile existieren. Ist es aber nicht analytisch möglich, daß ein Inhalt existiert, ohne daß es einen wirklichen Gegenstand gibt, dem er inhäriert? Ein solcher Inhalt müßte ein Akzidenz sein (denn wäre er eine Substanz, so gäbe es eben einen wirklichen Gegenstand, dem er inhäriert, da er existiert und sich selbst inhäriert), ein reales Akzidenz ohne einen realen Träger. (Als mögliches Akzidenz hat es aber gewiß einen möglichen Träger.) Könnte man nicht dem Schönsein an sich begegnen, ohne daß es einen einzigen realen schönen Gegenstand gibt?[1]

(c) $DT1^+$ definiert den schwachen Erfüllungsbegriff, hier der Erfüllungsbegriff schlechthin. Den starken Erfüllungsbegriff definiert

$DT3^+$ $\quad \varphi\langle\langle\tau\rangle\rangle := Sub(\tau)$ u. $\varphi T\tau$

Es gelten:

$TT3^+$ $\quad \Lambda f \Lambda x(f\langle\langle x\rangle\rangle$ imp. $f\langle x\rangle)$
(abhängig von $DT3^+$, $AT7^+$, $DT1^+$)

$TT4^+$ $\quad \Lambda x(Sub(x)$ imp. $E(x))$
(abhängig von $DT2^+$, AT2)

$TT5^+$ $\quad \Lambda f \Lambda x(f\langle\langle x\rangle\rangle$ imp. $E(x)$ u. $E(f))$
(abhängig von $DT3^+$, $TT4^+$, $DT2^+$)

$TT6^+$ $\quad \Lambda f \Lambda x(f\langle x\rangle$ u. $E(x)$ imp. $f\langle\langle x\rangle\rangle)$

Beweis: Ang. $f\langle x\rangle$ u. $E(x)$, also nach $DT1^+$, $DT2^+$ $MK(x)$ u. fTx u. $\vee y(Sub(y)$ u. $xTy)$, also mit $AT7^+$ $MK(x)$ u. fTx u. $\vee y(Sub(y)$ u. $MK(y)$ u. $xTy)$, also mit TT79 $x=y$, also $Sub(x)$ u. fTx, also nach $DT3^+$ $f\langle\langle x\rangle\rangle$.

TT7$^+$ Λx(Sub(x) äqu. MK(x) u. E(x))

Beweis: (i) Λx(Sub(x) imp. MK(x) u. E(x)) nach AT7$^+$ und TT4$^+$;
(ii) dieser Teil des Beweises ist im Beweis von TT6$^+$ enthalten.

Hätte man Sub(x) := MK(x) u. E(x), wie erhielte man dann Λx(E(x) äqu. Vy(Sub(y) u. xTy))? - Wie wir in (b) festgestellt haben: für Λx(Vy(Sub(y) u. xTy) imp. E(x)) benötigte man nur das Prinzip ΛyΛx(E(y) u. xTy imp. E(x)); für Λx(E(x) imp. Vy(Sub(y) u. xTy)) dagegen das ein wenig problematische Prinzip Λx(E(x) imp. Vy(MK(y) u. E(y) u. xTy)), d.h. nach DT1$^+$ Λx(E(x) imp. Vy(E(y) u. x⟨y⟩)).

(d) Statt "φ trifft zu auf τ", "τ erfüllt φ" sagt man in der Tradition, wie erwähnt, auch "φ ist in τ". Spinozas 1. Axiom in der *Ethik* lautet: "Alle, die sind, sind entweder in sich oder in einem anderen.": "Omnia, quae sunt, vel in se, vel in alio sunt." Daß es sich bei Spinozas In-sein nicht um simples Teilsein sondern um Inhärenz handelt, erkennt man daran, daß das meiste, was ist, sowohl Teil von sich selbst als auch Teil von einem anderen ist. Die Bedingung "quae sunt" ist notwendig; ohne sie wäre das Axiom inkorrekt; denn ist Spinozas In-sein die starke Inhärenz, so gibt es viele Inhalte, die weder in sich noch in einem anderen sind (Einhornsein z.B); und ist Spinozas In-sein die schwache Inhärenz, so ist immerhin das Allessein weder in sich noch in einem anderen. Das jeweilige Gegenbeispiel wird aber durch die besagte Einschränkung in beiden Fällen ausgeschlossen. - Wir können Spinozas Axiom so formulieren:

TT8$^+$ Λx(E(x) imp. (x⟨x⟩ äqu. non Vy(E(y) u. x≠y u. x⟨y⟩)))
bzw.
Λx(E(x) imp. (x⟨⟨x⟩ äqu. non Vy(E(y) u. x≠y u. x⟨⟨y⟩)))

Beweis: (i) E(x), x⟨x⟩, also nach TT2$^+$ non Vy(x⟨y⟩ u. x≠y), also non Vy(E(y) u. x≠y u. x⟨y⟩);
(ii) E(x), non Vy(E(y) u. x≠y u. x⟨y⟩); also nach DT2$^+$ Vy(Sub(y) u. xTy), also nach TT7$^+$ Vy(MK(y) u. E(y) u. xTy), also nach DT1$^+$ Vy(E(y) u. x⟨y⟩); also Vy(E(y) u. x⟨y⟩ u. x=y), also x⟨x⟩;
die zweite Hälfte von TT8$^+$ folgt aus der ersten (und die erste

aus der zweiten), denn es gilt $\bigwedge x(E(x)$ imp. $(x\langle x\rangle$ äqu. $x\langle\langle x\rangle\rangle))$ und $\bigwedge y(E(y)$ imp. $\bigwedge x(x\langle y\rangle$ äqu. $x\langle\langle y\rangle\rangle))$.

Von der zweiten Hälfte von TT8$^+$ kann man auch die Umkehrung zeigen:

TT9$^+$ $\bigwedge x((x\langle\langle x\rangle$ äqu. non $\bigvee y(E(y)$ u. $x \neq y$ u. $x\langle\langle y\rangle))$ imp. $E(x))$

Beweis: Ang. $(x\langle\langle x\rangle$ äqu. non $\bigvee y(E(y)$ u. $x \neq y$ u. $x\langle\langle y\rangle))$; (x) $x\langle\langle x\rangle$, also nach TT5$^+$ $E(x)$; (xx) non $x\langle\langle x\rangle$; also $\bigvee y(E(y)$ u. $x \neq y$ u. $x\langle\langle y\rangle)$, also nach TT5$^+$ $E(x)$.

Im übrigen ist $\bigvee y(E(y)$ u. $x \neq y$ u. $x\langle\langle y\rangle)$ nach TT5$^+$ gleichwertig mit $\bigvee y(x \neq y$ u. $x\langle\langle y\rangle)$. – Aus TT8$^+$ und TT9$^+$ erhalten wir also:

TT10$^+$ $\bigwedge x(E(x)$ äqu. $(x\langle\langle x\rangle$ äqu. non $\bigvee y(x \neq y$ u. $x\langle\langle y\rangle)))$
(*Zu existieren heißt, im starken Sinne entweder sich selbst oder einem anderen zu inhärieren;* von links nach rechts ist die generelle Äquivalenz TT10$^+$ natürlich ebenfalls eine – mit der 2. Hälfte von TT8$^+$ äquivalente – Formulierung von Spinozas Axiom)

D.h. $\bigwedge x(E(x)$ äqu. $(Sub(x)$ äqu. non $\bigvee y(x \neq y$ u. $Sub(y)$ u. $xTy)))$ (*Zu existieren heißt, entweder selbst real zu subsistieren oder von einem anderen real Subsistierenden getragen zu werden*), denn es gilt $\bigwedge x(x\langle\langle x\rangle$ äqu. $Sub(x))$ (nach AT2, DT3$^+$).

Entsprechend zu TT10$^+$ gilt

TT11$^+$ $\bigwedge x(P(x)$ äqu. $(x\langle x\rangle$ äqu. non $\bigvee y(x \neq y$ u. $x\langle y\rangle)))$
(*Möglichsein heißt, im schwachen Sinne entweder sich selbst oder einem anderen zu inhärieren, d.h. entweder selbst Substanz zu sein oder von einer anderen Substanz getragen zu werden*)

Beweis: (i) Ang. $P(x)$, $x\langle x\rangle$, also nach TT2$^+$ non $\bigvee y(x \neq y$ u. $x\langle y\rangle)$;
(ii) ang. $P(x)$, non $\bigvee y(x \neq y$ u. $x\langle y\rangle)$; aus $P(x)$ folgt nach DT29 $\bigvee y(Mk(y)$ u. $xTy)$, also nach DT1$^+$ $\bigvee y(x\langle y\rangle)$; also $\bigvee y(x\langle y\rangle$ u. $x=y)$, also $x\langle x\rangle$;
(iii) ang. $x\langle x\rangle$ äqu. non $\bigvee y(x \neq y$ u. $x\langle y\rangle)$; (x) $x\langle x\rangle$, also $MK(x)$ u.

xTx (nach $DT1^{+}$), also Vy(MK(y) u. xTy), also nach DT29 P(x); (<u>xx</u>) non x‹x›; also Vy(x≠y u. x‹y›), also nach $DT1^{+}$ Vy(Mk(y) u. xTy), also nach DT29 P(x).

Anmerkungen:

[1]Hier geht es nicht darum, ob Platon Recht hat, denn Platon hätte diese Frage verneint; für ihn ist das Schönsein *sui generis* ein realer schöner Gegenstand. - Aus anderen Gründen verneint sie Thomas von Aquin: "Illi enim proprie convenit esse, quod habet esse; et hoc est subsistens in suo esse. Formae autem et accidentia, et alia huiusmodi, non dicuntur entia quasi ipsa sint, sed quia eis aliquid est; ut albedo ea ratione dicitur ens, quia ea subiectum est album. Unde, secundum Philosophum accidens magis proprie dicitur *entis* quam *ens*" (*Summa Theologiae*, I, 54, 4); in unübertreffbarer scholastischer Konzisität: "accidentis esse est inesse". (Siehe A. Kenny, *Aquinas*, S. 36; Kenny bezieht diese Aussagen von Thomas allerdings auf individuelle Akzidenzien.)

4. Subsistenz als Eigenschaft?

(a) Der jetzige Grundbereich von PT ist, wie wir gesagt haben, die Gesamtheit aller Eigenschaften 1. Stufe. (Später haben wir die Eigenschaften immer "Inhalte" genannt und das Wort "Eigenschaft" als Alternative für "Akzidenz" geführt.) Ist nun nicht Realsubsistenz auch eine Eigenschaft und muß demnach im Grundbereich vorkommen? Lassen wir dies für den Augenblick einmal zu, und benennen wir die im Grundbereich vorkommende Realsubsistenz mit der Konstanten $\underline{s}$. In welchem Verhältnis steht dann $\underline{s}$ zum Prädikat Sub? – Man wird von dem Gedanken ausgehen, daß $\underline{s}$ überall Sub in dessen prädikativer Funktion äquivalent ersetzen kann. Intuitiv naheliegend ist daher $\bigwedge x(\mathrm{Sub}(x)$ äqu. $\underline{s}\langle x\rangle)$. Aber dieses Prinzip hat – *wie es scheint* – untragbare Konsequenzen; es erlaubt zum Beispiel die Durchführung des ontologischen Gottesbeweises im Rahmen der Eigenschaftsontologie:

Bezeichne $\underline{g}$ die Eigenschaft Göttlichsein; $(\underline{g}\wedge\underline{s})$ bezeichnet dann die Eigenschaft Göttlich-und-realsubsistent-sein;

1. $(\underline{g}\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$	intuitiv evident
2. $\bigvee y(\mathrm{MK}(y)$ u. $(\underline{g}\wedge\underline{s})\mathrm{T}y)$	aus 1. mit TT91, da non $\underline{k}\mathrm{T}(\underline{g}\wedge\underline{s})$ aus $(\underline{g}\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$ (wegen AT3 und $\bigwedge y(y\mathrm{T}\underline{k})$)
3. $\bigvee y(\mathrm{MK}(y)$ u. $\underline{g}\mathrm{T}y$ u. $\underline{s}\mathrm{T}y)$	aus 2. und TT24
4. $\bigvee y(\underline{g}\langle y\rangle$ u. $\underline{s}\langle y\rangle)$	aus 3. mit $\mathrm{DT1}^{+}$
5. $\bigvee y(\mathrm{Sub}(y)$ u. $\underline{g}\langle y\rangle)$	aus 4. mit dem fraglichen Prinzip

5. besagt, daß es einen realen Gegenstand gibt, dem Göttlichsein inhäriert ist – ein erstaunliches, aber nur für den Atheisten unwillkommenes Resultat. Jedoch nach demselben Schema kann man offenbar auch beweisen, daß es ein reales Einhorn, eine reale Hexe, einen realen Elfenkönig etc. gibt – Ergebnisse, die nun jedermann unwillkommen sein dürften.

(b) Das Prinzip $\bigwedge x(\mathrm{Sub}(x)$ äqu. $\underline{s}\langle x\rangle)$ ist also – *so scheint es* – nicht haltbar. Wie soll aber dann das Verhältnis zwischen $\underline{s}$ und Sub aussehen? – Die andere Möglichkeit wäre $\bigwedge x(\mathrm{Sub}(x)$ äqu. $\underline{s}\langle\langle x\rangle)$. Wegen $\mathrm{DT3}^{+}$ ist dies äquivalent mit $\bigwedge x(\mathrm{Sub}(x)$ imp. $\underline{s}\mathrm{T}x)$

und dies wegen $AT7^+$ und $DT1^+$ äquivalent mit ⋀x(Sub(x) imp. $\underline{s}$⟨x⟩). Das Prinzip ⋀x(Sub(x) äqu. $\underline{s}$⟨⟨x⟩) besteht also in einer Abschwächung des Prinzips ⋀x(Sub(x) äqu. $\underline{s}$⟨x⟩) auf seine unproblematische Hälfte. Der ontologische Gottesbeweis läßt sich damit nicht mehr durchführen; aber nun kann man (bei Verwendung des schwachen Erfüllungsbegriffs) nicht mehr davon sprechen, daß $\underline{s}$ Sub überall in seiner prädikativen Funktion äquivalent ersetzen kann, denn ⋁y(Sub(y) u. non Sub(y)) ist ausgeschlossen, ⋁y($\underline{s}$⟨y⟩ u. non Sub(y)) aber nicht.

(c) Es ist aus folgendem Grund untunlich generell Prädikate von PT durch Eigenschaften im Grundbereich zu repräsentieren: Der Grundbereich ist die Gesamtheit der Eigenschaften 1. Stufe, d.h. die Gesamtheit der nur auf Gegenstände zutreffenden Eigenschaften (wobei wir hier Gegenstände als spezielle Eigenschaften auffassen). Es gilt mit anderen Worten ⋀f⋀x(f⟨x⟩ imp. MK(x)) [τ⟨τ'⟩ als Grundbegriff genommen]. Viele Prädikate von PT treffen aber nicht nur auf Gegenstände zu; selbst bei minimalen Grundbereich gibt es ein solches Prädikat, nämlich "x=$\underline{k}$"; $\underline{k}$=$\underline{k}$, aber non MK($\underline{k}$). Die diese Prädikate repräsentierenden Eigenschaften können also nicht im Grundbereich vorkommen. Nimmt man entgegen dieser Einsicht dennoch ⋁y⋀x(A[x] äqu. y⟨x⟩) (als Axiomenschema) an, so führt dies - mit den vertrauten Schritten der russellschen Antinomie - zur Katastrophe; denn daraus erhält man ⋁y⋀x(non x⟨x⟩ äqu. y⟨x⟩) und also ⋁y(non y⟨y⟩ äqu. y⟨y⟩) - einen Widerspruch. ⋁y⋀x(A[x] äqu. y⟨x⟩) kann man aber auch folgendermaßen ad absurdum führen: Aus ⋁y⋀x(A[x] äqu. y⟨x⟩) nach $DT1^+$ ⋀x(A[x] imp. MK(x)), also aus diesem Theoremschema ⋀x(non MK(x) imp. MK(x)), also ⋀xMK(x) (und umgekehrt aus ⋀xMK(x) das Theoremschema ⋀x(A[x] imp. MK(x))); ⋁y⋀x(A[x] äqu. y⟨x⟩) beinhaltet also, daß der Grundbereich nur Gegenstände enthält, d.h. daß alle Prädikate nur auf Gegenstände zutreffen; aber das Gegenteil von ⋀xMK(x) ist beweisbar, da non MK($\underline{k}$) beweisbar ist.

(d) Man kann also nicht für alle Prädikate A[x] ⋁y⋀x(A[x] äqu. y⟨x⟩) annehmen. Dann stellt sich die Frage, nach welchem Kriterium man diejenigen Prädikate aussuchen soll, für die man es annehmen kann. Wie es scheint, kann man es auch nicht für alle Prädikate A[x] annehmen, für die gilt ⋀x(A[x] imp. MK(x)); Sub ist nach $AT7^+$ ein solches; aber wir haben gesehen zu welchen

Problemen es führt, wenn man VyΛx(Sub(x) äqu. y<x>) gelten läßt. (Λx(Sub(x) äqu. s<x>) resultiert aus VyΛx(Sub(x) äqu. y<x>) mit s := ιyΛx(Sub(x) äqu. y<x>), da mit AT1 - AT6 [und den Definitionen] ΛxΛy(Λz(x<z> äqu. y<z>) imp. x=y) beweisbar ist [siehe TT19^{+} im übernächsten Kapitel]; und umgekehrt resultiert VyΛx(Sub(x) äqu. y<x>) trivialerweise aus Λx(Sub(x) äqu. s<x>).) *Aber*: Für alle Prädikate A[x] ist Λx(A[x] imp. MK(x)) imp. VyΛx(A[x] äqu. y<x>) beweisbar! (Siehe 8., (b): TT29^{+}.) Wir werden also einen anderen Weg als die Ablehnung von VyΛx(Sub(x) äqu. y<x>) nehmen müssen, um unliebsamen Existenzbeweisen die Kraft zu entziehen; denn diese Ablehnung würde das ganze System erschüttern, da VyΛx(Sub(x) äqu. y<x>) *kein unabhängiges Prinzip* ist.

5. "Es gibt etwas, das es gibt" und andere Existenzgesetze

(a) VySub(y) ("Es gibt real subsistierende Inhalte") ist sicherlich eine richtige Aussage; sie ist wegen TT4$^+$ und DT2$^+$ äquivalent mit VyE(y) ("Es gibt etwas, das es gibt"); sie hat aber auch sicherlich keinen analytischen Charakter.[1]

Setzt man ΛxΛy(Sub(x) u. Sub(y) imp. x=y) und die Definition $\underline{w}$:= ιySub(y) voraus, so sind auf der Basis von AT1 - AT6, VySub(y) die Systeme

AT7$^+$	Λx(Sub(x) imp. MK(x))	$\underline{w}$≠$\underline{k}$	AT7
		TO($\underline{w}$)	AT8
	Λx(E(x) äqu. Vy(Sub(y) u. xTy))	Λx(E(x) äqu. xT$\underline{w}$)	

deduktiv äquivalent, wie man leicht einsieht.

(b) Aufgrund von VySub(y), AT7$^+$ und den Definitionen gilt

Λf(E(f) o. E(¬f)),

denn ang. non E(f), also nach DT2$^+$ non Vy(Sub(y) u. fTy), also Λy(Sub(y) imp. non fTy), also mit VySub(y) Vy(Sub(y) u. non fTy), also mit AT7$^+$ Vy(Sub(y) u. MK(y) u. non fTy), also mit DT26, DT25 Vy(Sub(y) u. ¬fTy), also nach DT2$^+$ E(¬f).

Es ist aber aufgrund dessen nicht beweisbar: non Vf(E(f) u. E(¬f)); dies ergibt sich aufgrund von AT1 - AT6, AT7$^+$ und den Definitionen mit der Annahme ΛxΛy(Sub(x) u. Sub(y) imp. x=y), so wie umgekehrt auf dieser Basis diese Annahme aus non Vf(E(f) u. E(¬f)) resultiert: Ang. Λf(E(f) imp. non E(¬f)), d.h. nach DT2$^+$ Λf(Vy(Sub(y) u. fTy) imp. Λy(Sub(y) imp. non ¬fTy)); ang. Sub(x) u. Sub(y), also mit AT2 Vy'(Sub(y') u. xTy'); also Λy(Sub(y) imp. non ¬xTy), also wegen Sub(y) non ¬xTy, also mit AT7$^+$, DT26, DT25 xTy, also mit TT79 x=y (MK(x), MK(y) gemäß AT7$^+$).

(c) Nun ist VxVy(Sub(x) u. Sub(y) u. x≠y) ("Es gibt mindestens zwei verschiedene real subsistierende Inhalte") ebenso richtig wie VySub(y); wir setzen ersteres als Axiom:

II., 5.: Existenzgesetze

$AT8^{+}$ $\bigvee x \bigvee y(Sub(x) \text{ u. } Sub(y) \text{ u. } x \neq y)$

Da $\bigvee y Sub(y)$ nicht analytisch gilt, gilt auch $AT8^{+}$ nicht analytisch. Nach den vorausgehenden Überlegungen können wir festhalten:

$TT12^{+}$ $\bigwedge f(E(f) \text{ o. } E(\neg f))$

$TT13^{+}$ $\bigvee f(E(f) \text{ u. } E(\neg f))$

Außerdem gilt

$TT14^{+}$ $\bigwedge f \bigwedge g(E((f \vee g)) \text{ äqu. } E(f) \text{ o. } E(g))$

Beweis: (i) $E(f)$ o. $E(g)$, also mit $DT2^{+}$ $\bigvee y(Sub(y) \text{ u. } fTy)$ o. $\bigvee y(Sub(y) \text{ u. } gTy)$; da nach TT26, AT2 $(f \vee g)Tf$, $(f \vee g)Tg$, ergibt sich daraus nach AT1 $\bigvee y(Sub(y) \text{ u. } (f \vee g)Ty)$, also mit $DT2^{+}$ $E((f \vee g))$;
(ii) $E((f \vee g))$, also mit $DT2^{+}$ $\bigvee y(Sub(y) \text{ u. } (f \vee g)Ty)$, also nach $AT7^{+}$ $\bigvee y(Sub(y) \text{ u. } MK(y) \text{ u. } (f \vee g)Ty)$, also $\bigvee y(Sub(y) \text{ u. } (fTy \text{ o. } gTy))$, denn ang. non fTy u. non gTy, also $\neg fTy$ u. $\neg gTy$ (wegen $MK(y)$, spez. $Max(y)$), also $(\neg f \wedge \neg g)Ty$ mit TT24, also non $\neg(\neg f \wedge \neg g)Ty$ (wegen $MK(y)$, spez. $Kon(y)$); aber $\neg(\neg f \wedge \neg g)$ ist nach TT57 $(f \vee g)$ und $(f \vee g)Ty$; demnach mit $DT2^{+}$ $E(f)$ o. $E(g)$.

$TT15^{+}$ $\bigwedge f \bigwedge g(E((f \wedge g)) \text{ imp. } E(f) \text{ u. } E(g))$
(abhängig von $DT2^{+}$ und TT24)

$TT16^{+}$ $\bigvee f \bigvee g(E(f) \text{ u. } E(g) \text{ u. non } E((f \wedge g)))$

Beweis: Nach $TT13^{+}$ $\bigvee f(E(f) \text{ u. } E(\neg f))$; aber non $E((f \wedge \neg f))$, denn sonst $\bigvee y(Sub(y) \text{ u. } (f \wedge \neg f)Ty)$, also nach $AT7^{+}$ $\bigvee y(MK(y) \text{ u. } (f \wedge \neg f)Ty)$, also nach TT53 $\bigvee y(MK(y) \text{ u. } \underline{k}Ty)$, was nach TT72 etc. unmöglich ist.

$TT17^{+}$ $\bigwedge x(Sub(x) \text{ imp. } x \neq \underline{t})$

Beweis: Ang. $Sub(x)$, also nach $AT7^{+}$ $MK(x)$; ang. $x=\underline{t}$; also $TO(\underline{t})$

nach DT26, TT71, also, da $\wedge y(\underline{t}Ty)$, $\wedge y(y=\underline{t}$ o. $y=\underline{k})$ (gemäß DT7, TT34); aber nach AT7$^+$, AT8$^+$ gibt es mindestens drei Inhalte, nämlich zwei realsubsistente und außerdem $\underline{k}$.

TT17$^+$ entspricht AT9. - Definiert man

DT4$^+$ All(φ) := non E($\neg\varphi$)
(φ ist allen realen Gegenständen inhärent),

so folgen komplementär zu TT12$^+$ - TT16$^+$ $\wedge$f(non All(f) o. non All($\neg$f)), $\vee$f(non All(f) u. non All($\neg$f)), $\wedge$f$\wedge$g(All((f$\wedge$g)) äqu. All(f) u. All(g)), $\wedge$f$\wedge$g(All(f) o. All(g) imp. All((f$\vee$g)), $\vee$f$\vee$g(All((f$\vee$g)) u. non All(f) u. non All(g)). In Verallgemeinerung von TT14$^+$ gilt

TT18$^+$ E($\cap$fA[f]) äqu. $\vee$f(A[f] u. E(f))

Beweis: (i) Ang. E($\cap$fA[f]), also $\vee$y(Sub(y) u. $\cap$fA[f]Ty), also nach TT64 $\vee$y(Sub(y) u. $\neg$U f$\vee$g(A[g] u. g=$\neg$f)Ty), also nach AT7$^+$ non U f$\vee$g(A[g] u. g=$\neg$f)Ty, also nach TT96 $\vee$f($\vee$g(A[g] u. g=$\neg$f) u. non fTy), also nach AT7$^+$ $\vee$f($\vee$g(A[g] u. g=$\neg$f) u. $\neg$fTy), also $\vee$g(A[g] u. gTy), also (wegen Sub(y) nach DT2$^+$) $\vee$g(A[g] u. E(g));
(ii) ang. $\vee$f(A[f] u. E(f)); nach TT65 $\wedge$f(A[f] imp. $\cap$f'A[f']Tf); nun $\vee$f(A[f] u. $\vee$y(Sub(y) u. fTy)); also mit AT1 $\vee$y(Sub(y) u. $\cap$f'A[f']Ty), also E($\cap$f'A[f']).

AT8$^+$ ließe sich begründbar ergänzen durch ein mit AT10 gleichlautendes Unendlichkeitsaxiom.

Anmerkungen:

[1]Und damit VyE(y) auch nicht; in der Sachverhaltsontologie dagegen ist VyE(y) - nach AT2 und DT31 - analytisch.

6. Gesetze der Inhärenz und Superessentialismus

(a) ∨y∧x(A[x] äqu. y<x>) entspricht dem mengentheoretischen Komprehensionsprinzip. Wir haben gesehen, daß es nicht postuliert werden kann. Die Entsprechung zum mengentheoretischen Extensionalitätsprinzip ist dagegen mit AT1 – AT6 (und den Definitionen) beweisbar. Es gilt:

TT19^{+} ∧f∧g(∧z(f<z> äqu. g<z>) imp. f=g)

Beweis: Ang. ∧z(f<z> äqu. g<z>), also mit DT1^{+} ∧z(MK(z) imp. (fTz äqu. gTz)); ang. f≠g, also mit AT3 non fTg o. non gTf; (x) ang. non fTg, also mit AT5 ∨m(QA(m) u. mTf u. non mTg), also mit DT20, DT4 ∨m(El(m) u. mTf u. non mTg), also mit TT78, TT55 ∨m(MK(¬m) u. mTf u. non mTg); also (gT¬m imp. fT¬m); nun non fT¬m, denn sonst wegen mTf mit AT1 mT¬m, was unmöglich ist, da nach AT2 ¬mT¬m und da Kon(¬m) (DT26); also non gT¬m; aus non mTg mit TT59 non ¬gT¬m; also aus dem Unterstrichenen non gT¬m u. non ¬gT¬m, was unmöglich ist, da Max(¬m); (xx) ang. non gTf; dies wird völlig analog ad absurdum geführt.

TT19^{+} besagt, daß Inhalte identisch sind, wenn sie denselben logisch möglichen Gegenständen inhärieren. Im Beweis von TT19^{+} steckt der Beweis für

TT20^{+} ∧f∧g(∧z(g<z> imp. f<z>) imp. fTg)

Beweis: Ang. ∧z(g<z> imp. f<z>), also mit DT1^{+} ∧z(MK(z) imp. (gTz imp. fTz)); ang. non fTg; dies führt man wie in (x) des Beweises von TT19^{+} ad absurdum.

Man sieht leicht ein, daß außerdem gilt:

TT21^{+} ∧f∧g(fTg imp. ∧z(g<z> imp. f<z>))
(abhängig von DT1^{+}, AT1)

Wir haben also

$TT22^{+}$ $\quad \Lambda f \Lambda g(\Lambda z(g\langle z\rangle \text{ imp. } f\langle z\rangle) \text{ äqu. } fTg)$

(b) Formulieren wir das Gesetz (P) in 1., (a) über den Zusammenhang zwischen extensionaler und intensionaler Teilbeziehung zwischen Eigenschaften als analytisches Axiom:

$\Lambda f \Lambda g(fTg \text{ äqu. } gT^{e}f)$
(*Eine Eigenschaft f ist intensional Teil einer Eigenschaft g genau dann, wenn g extensional Teil von f ist*),

so ergibt sich mit dem analytischen $TT22^{+}$ (analytisch, da aus analytischen Axiomen deduziert) der analytische Satz $\Lambda f \Lambda g(gT^{e}f$ äqu. $\Lambda z(g\langle z\rangle \text{ imp. } f\langle z\rangle))$. Umgekehrt folgt mit der Definition

$\varphi T^{e}\varphi' := \Lambda z(\varphi\langle z\rangle \text{ imp. } \varphi'\langle z\rangle)$

und dem analytischen $TT22^{+}$ der analytische Satz $\Lambda f \Lambda g(fTg$ äqu. $gT^{e}f)$. - Wir nehmen keinen neuen durch ein neues Axiom charakterisierten Grundbegriff in PT auf, sondern definieren vielmehr

$DT5^{+}$ $\quad \varphi T^{e}\varphi' := \Lambda z(\varphi\langle z\rangle \text{ imp. } \varphi'\langle z\rangle)$
(φ ist extensional Teileigenschaft von φ')

und erhalten damit aus $TT22^{+}$

$TT23^{+}$ $\quad \Lambda f \Lambda g(fTg \text{ äqu. } gT^{e}f)$

Die erste Vorgehensweise zeigt aber im Unterschied zur zweiten, daß die Deutung von "g ist extensional Teil von f" ("$gT^{e}f$") als "alle möglichen g sind f", d.h. als "f ist von allen maximalkonsistenten Eigenschaften (intensional) Teil, von denen g (intensional) Teil ist" bei Geltung von (P) durch die Charakterisierung von "f ist intensional Teil von g" ("fTg") mittels der Axiome AT1 - AT6 determiniert ist. Die Frage ist, ob diese Deutung adäquat ist? Haben wir nicht in 1., (b) Bedenken gegen sie vorgebracht? Wäre sie nicht adäquat, so könnten wir bei Geltung von (P) die intensionale Teilbeziehung zwischen Eigenschaften nicht mehr als durch AT1 - AT6 korrekt beschrieben ansehen.

(c) Wie stellen sich im Rahmen von PT die bei Geltung von (P) mit "alle möglichen g sind f" [(i)] konkurrierenden Bestimmungen von "g ist extensional Teil von f" aus 1., (b) dar? - Zwecks ihrer Darstellung führen wir für den Augenblick in PT den Satzoperator der (analytischen) Notwendigkeit L mit zugehöriger minimaler Logik[1] ein. Wir erhalten dann (ii) L Λz(g<z> imp. f<z>), (iii) L Λz(E(z) u. g<z> imp. f<z>), (iv) Λz(E(z) u. MK(z) imp. L (g<z> imp. f<z>)). (MK(z) wurde im Antezedenz von (ii) und (iii) weggelassen, da es nach $DT1^+$ in g<z> steckt; wegen $TT6^+$, $TT3^+$, $TT5^+$ ist (iii) äquivalent mit L Λz(g<<z> imp. f<<z>).)

(iii) und (iv) kommen nicht in Frage, da sie Vz(g<z> u. non f<z>) nicht ausschließen, da nicht ausgeschlossen ist, daß es mögliche, nichtexistente Gegenstände gibt. (Wir haben nur $AT7^+$, nicht aber dessen Umkehrung; was mögliche, nichtexistente Gegenstände sind, läßt sich, wie wir sahen, in der Eigenschaftsontologie befriedigend erhellen, und es entspräche wohl den Tatsachen zu setzen: Vx(MK(x) u. non E(x)).) Wird man bei Vz(g<z> u. non f<z>) noch sagen wollen "g ist (schlechthin) extensional Teil von f"?

(ii) schließlich ist mit Λz(g<z> imp. f<z>) gleichbedeutend, denn die intensionale Teilbeziehung zwischen Eigenschaften ist eine essentielle Beziehung; d.h. wir haben als analytisches Prinzip ΛfΛg(fTg imp. L fTg) (wenn eine Eigenschaft intensional Teil einer anderen ist, wie könnte das denkbar nicht so sein?), was als Axiom postuliert werden muß, wenn wir PT um L erweiterten. Aus besagtem Prinzip folgt (modallogisch) das analytische Prinzip (TL) ΛfΛg(fTg äqu. L fTg) und damit aus dem analytischen Prinzip $TT22^+$ das Gewünschte:

1. ΛfΛg(Λz(g<z> imp. f<z>) äqu. fTg)	$TT22^+$
2. ΛfΛg(L Λz(g<z> imp. f<z>) äqu. L fTg)	m.l. aus 1.
3. ΛfΛg(L Λz(g<z> imp. f<z>) äqu. fTg)	aus 2. mit (TL)
4. ΛfΛg(L Λz(g<z> imp. f<z>) äqu. Λz(g<z> imp. f<z>))	aus 3. mit 1.

Die Bestimmung von gT^ef durch Λz(g<z> imp. f<z>) bei Geltung von (P) vermag sich also gegenüber ihren Konkurrenten zu behaupten und kann somit als adäquat gelten. *Sieht man von (P) ab,* so liegt freilich auch die Bestimmung von gT^ef durch Λz(g<<z> imp. f<<z>)

(nach TT6$^+$, TT3$^+$, TT5$^+$: "Alle existierenden g sind f") nahe. Dieser Intuition werden wir durch folgende Definition gerecht:

DT6$^+$ $\quad \varphi T^{e}_{+}\varphi'$:= Λz(φ<<z> imp. φ'<<z>)
(φ ist *schwach* extensional Teileigenschaft von φ')

(d) Zur Logik von L ist zu bemerken:
(1) Die Necessitierungsregel A ⊢ L A darf nur angewendet werden auf Satzformen, die unabhängig von AT8$^+$ beweisbar sind; es besteht ja keine Notwendigkeit, daß es mindestens zwei realsubsistente Inhalte gibt.
(2) Man wird für L die Barcan-Formel als Axiomenschema annehmen: Λx L A[x] imp. L ΛxA[x].
(3) Mit (TL) und dem ebenfalls anzunehmenden Prinzip (LT): ΛfΛg(non fTg äqu. L non fTg) ist beweisbar ΛfΛx(f<x> äqu. L f<x>): (i) von rechts nach links trivial; (ii) ang. f<x>, also nach DT1$^+$ MK(x) u. fTx; aus fTx nach (TL) L fTx; aus MK(x) nach (TL) und (LT) ebenfalls L MK(x): MK(x), also nach DT26, DT25 und DT24 Λy(non yTx o. non ¬yTx) u. Λy(yTx o. ¬yTx), also mit (TL), (LT) Λy(L non yTx o. L non ¬yTx) u. Λy(L yTx o. L ¬yTx), also Λy L (non yTx o. non ¬yTx) u. Λy L (yTx o. ¬yTx), also L Λy(non yTx o. non ¬yTx) u. LΛy(yTx o. ¬yTx), also L MK(x);
aus L MK(x) u. L fTx mit DT1$^+$ L f<x>.

ΛfΛx(f<x> imp. L f<x>) besagt, daß für beliebige Inhalte f und x, wenn f auf x zutrifft, dies notwendigerweise so ist. In der modalen Eigenschaftsontologie läßt sich also der *Determinismus* begründen - der Determinismus in Gestalt des *Superessentialismus*, wonach ein Gegenstand jede seiner Eigenschaften mit (analytischer) Notwendigkeit hat.[2] Genauer muß man aber sagen "der Determinismus bzw. Superessentialismus für den schwachen Inhärenzbegriff". Der Determinismus für den starken Inhärenzbegriff, d.h. ΛfΛx(f<<x> imp. L f<<x>), läßt sich *nicht* begründen; denn dazu benötigte man als Prinzip Λx(Sub(x) imp. L Sub(x)) ("Jeder Inhalt, der realsubsistent ist, ist notwendigerweise realsubsistent"), was aber nicht hinreichend intuitiv gesichert ist und daher nicht als Axiom angenommen werden kann.[3]
(4) Vx L non E(x) läßt sich beweisen; denn ang. E(k̲), d.h. nach DT2$^+$ Vy(Sub(y) u. k̲Ty), also mit AT7$^+$ Vy(MK(y) u. k̲Ty), also mit DT26 Vy(Kon(y) u. k̲Ty), also wegen Λy(yTk̲) und AT3 Vy(Kon(y) u.

y=$\underline{k}$), was TT70 widerspricht; da non E($\underline{k}$) nicht von AT8$^+$ abhängt, folgt L non E($\underline{k}$), also Vx L non E(x). Man ersieht hieraus leicht, daß auch L Vx non E(x) beweisbar ist. Hingegen kann man weder Vx L E(x) noch L VxE(x) beweisen; zwar folgt mit AT8$^+$ E($\underline{t}$) und VxE(x), aber die Necessitierungsregel darf nicht angewendet werden, da diese Sätze nicht unabhängig von AT8$^+$ beweisbar sind.

Anmerkungen:

[1]Das ist die Logik, die das prädikatenlogische System LPC+T in Hughes/Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, S. 141 axiomatisiert. Hinzu kommen aufgrund der besonderen Interpretation von PT eine Einschränkung der Necessitierungsregel und einige zusätzliche Prinzipien; siehe Abschnitt (d). L ist übrigens der Bedeutung nach nicht derselbe Satzoperator wie N.

[2]Dies ist der Determinismus, den Leibniz vertreten hat. (Siehe *The Philosophy of Leibniz*, S. 43) Trotz seines Superessentialismus nimmt Leibniz Kontingenz an. Seine Position läßt sich so beschreiben: Alles, was wahr ist (wobei Wahrheit darin besteht, daß der Prädikatbegriff als Teil im Subjektbegriff ist), ist *an sich* notwendig; d.h. es gibt nichts, was wahr, aber nicht an sich notwendig ist; es gibt also nichts, was *an sich* kontingent ist. Aber nicht alles, was wahr ist, ist *für uns* notwendig, wobei etwas für uns notwendig ist, wenn es an sich notwendig und in *endlich* vielen Schritten beweisbar ist; d.h. es gibt etwas, was wahr, aber nicht für uns notwendig ist; es gibt also etwas, was *für uns* kontingent ist (gleichwohl es *an sich* notwendig ist).

Leibniz bestimmt "kontingent" im Sinne von "*für uns* kontingent"; er epistemisiert den Begriff der Kontingenz (siehe dazu B. Mates, *The Philosophy of Leibniz*, S. 108f); und also gibt es "Kontingenz".

Ein anderer Weg, trotz Superessentialismus Kontingenz zu haben, ist der von D. Lewis beschrittene. Lewis hat im Effekt genau dieselbe Gegenstandskonzeption wie Leibniz (siehe ebd., S. 139): Ein Gegenstand kann keine anderen Eigenschaften haben, als er hat; denn hätte er andere Eigenschaften, so wäre er eben ein (numerisch) anderer Gegenstand: "So Humphrey, who is part of this world and here has five fingers on the left hand, is also part of some other world and there has six fingers on his left hand. *Qua* part of this world he has five fingers, *qua* part of that world he has six. He himself - one and the same and altogether self-identical - has five fingers on the left hand, and he has not five but six. How can this be?" (*On the Plurality of Worlds*, S. 199). Lewis sieht aber darin keine Schwierigkeit für die Annahme von Kontingenz, und die Bezeichnung "Superessentialist" würde er gewiß nicht auf sich sitzen lassen. - Der andere Weg sieht so aus: Jede Eigenschaft, die einem Gegenstand zukommt, kommt ihm simpliciter notwendig zu (ohne sie wäre er nicht *dieser* Gegenstand); aber nicht jede Eigenschaft, die einem Gegenstand zukommt, kommt ihm *supernotwendig* zu, wobei eine Eigenschaft einem Gegenstand supernotwendig zukommt, wenn sie ihm und jedem (anderen) seiner "Gegenstücke" ("counterparts"), seinen Vertretern in anderen möglichen Welten zukommt. (Zu Lewis' *counterpart theory* siehe III., 12.) Es gibt also Kontingenz in dem Sinne, daß nicht jede Eigenschaft, die einem Gegenstand zukommt, ihm supernotwendig zukommt; für Lewis ist das Kontingenz im normalen Sinn, denn Supernotwendigkeit ist für ihn Notwendigkeit. (Zu Lewis' Weg zur Kontingenz sehr gut A. Plantinga in *The Nature of Necessity*, S. 103f.)

[3]Leibniz *bestreitet* dieses Prinzip: Nur Gott existiert mit Notwendigkeit, alle anderen existierenden Substanzen existieren (im normalen Sinn) kontingenterweise. (Siehe *The Philosophy of Leibniz*, S. 36.) Die Existenz gehört also nach Leibniz nicht zu den

Eigenschaften; sonst wäre auf sie sein Superessentialismus anwendbar und alles, was existiert, müßte notwendigerweise existieren. B. Mates schreibt: "actualized concepts are [nach Leibniz] not to be differentiated from the non-actualized ones by the presence of a simple or complex property called `existence'" (ebd., S. 75). - Wir werden sehen, daß man nicht umhin kommt, *Existenz im Sinne von Realsubsistenz* als Eigenschaft zu haben. Dies führt dahin, daß das Prinzip Λx(Sub(x) imp. L Sub(x)) beweisbar scheint; siehe aber dazu die letzte Anmerkung zu Kap. 8.

7. Principium identitatis indiscernibilium

(a) Kehren wir nun wieder zur Sprache PT ohne den Operator L zurück! Das *principium identitatis indiscernibilium*, das Leibniz vertreten hat, läßt sich in einer trivialen und in einer nicht-trivialen Fassung formulieren; die triviale Fassung ist sehr leicht zu beweisen (abgesehen davon, daß sie eine triviale Folge von TT19$^+$ ist):

TT24$^+$ ⋀x⋀y(MK(x) u. MK(y) u. ⋀f(f<x> äqu. f<y>) imp. x=y)
(*Substanzen, denen dieselben Inhalte inhärieren, sind identisch*)

Beweis: Ang. MK(x) u. MK(y) u. ⋀f(f<x> äqu. f<y>), also x<x> äqu. x<y>; nun wegen MK(x) nach TT1$^+$ x<x>; also x<y> und nach TT2$^+$ ⋀y(x<y> äqu. x=y); also x=y.

Der Beweis zeigt, daß sogar gilt:

TT25$^+$ ⋀x⋀y(MK(x) u. ⋀f(f<x> imp. f<y>) imp. x=y)

Die nichttriviale Fassung (die Fassung, die Leibniz im Sinn gehabt haben dürfte) ist dagegen nicht so leicht zu beweisen; sie lautet

⋀x⋀y(MK(x) u. MK(y) u. ⋀f(non MK(f) imp. (f<x> äqu. f<y>))
imp. x=y)
(*Substanzen, denen dieselben Akzidenzien inhärieren, sind identisch*)

(b) Nun gilt

TT26$^+$ ⋀x⋀y(MK(x) u. MK(y) u. (non MK(¬x) o. non MK(¬y)) u.
⋀f(non MK(f) imp. (f<x> äqu. f<y>)) imp. x=y)

Beweis: Ang. MK(x) u. MK(y) u. ⋀f(non MK(f) imp. (f<x> äqu. f<y>)); (x) non MK(¬x); also ¬x<x> äqu. ¬x<y>, also nach DT1$^+$

MK(x) u. ¬xTx äqu. MK(y) u. ¬xTy; non (MK(x) u. ¬xTx), denn sonst: wegen AT2 xTx, also Vy(yTx u. ¬yTx), also nach DT24 non Kon(x), was nach DT26 MK(x) widerspricht; also non (MK(y) u. ¬xTy), also wegen MK(y) non ¬xTy, also, da Max(y) (nach DT26 aus MK(y)), xTy (DT25); wegen MK(x) u. MK(y) mit TT79 also x=y; (xx) non MK(¬y); ganz entsprechend zu (x) folgt daraus ebenfalls x=y.

Von der Zusatzbedingung non MK(¬x) o. non MK(¬y) kann man sich aber nicht ohne weiteres befreien. Denn ang. MK(x) u. MK(y) u. MK(¬x) u. MK(¬y) u. Λf(non MK(f) imp. (f<x> äqu. f<y>)); daraus ergibt sich Λz(z=x o. z=¬x o. z=t o. z=k):
Da Max(x) (nach DT26 aus MK(x)) zTx o. ¬zTx (DT25); da Max(¬x) zT¬x o. ¬zT¬x; also zTx u. zT¬x o. zTx u. ¬zT¬x o. ¬zTx u. zT¬x o. ¬zTx u. ¬zT¬x; (α) aus zTx u. zT¬x nach TT23 zT(xv¬x), also nach TT53 zTt, also, da tTz, mit AT3 z=t;
(β) aus zTx u. ¬zT¬x mit TT59 zTx u. xTz, mit AT3 also z=x;
(γ) aus ¬zTx u. zT¬x mit TT60 ¬xTz u. zT¬x, also mit AT3 z=¬x;
(δ) aus ¬zTx u. ¬zT¬x nach TT23 ¬zT(xv¬x), also nach der Argumentation unter (α) ¬z=t, also ¬¬z=¬t, also mit TT54, TT55 z=k.

Wir erhalten also y=x o. y=¬x o. y=t o. y=k. *y≠k* ergibt sich aus MK(y), da Kon(y) (aus MK(y) mit DT26) und TT70. *y≠t*, denn sonst: aus MK(y) mit DT26 Max(y), mit TT71 also TO(y), d.h. nach DT7 Λz(yTz imp. z=y o. T(z)); nun Λz(tTz); also Λz(yTz); also Λz(z=y o. T(z)), also x=y o. T(x); nun non T(x), denn sonst mit TT34 x=k, also nach TT70 non Kon(x), was MK(x) widerspricht; also x=y; also x=t, also ¬x=¬t, also mit TT54 ¬x=k, also non Kon(¬x), was MK(¬x) widerspricht.

Wir können nun aber nicht zeigen *y≠¬x*; auch MK(¬y) u. Λf(non MK(f) imp. (f<x> äqu. f<y>)) (Annahmen, von denen wir bislang keinen Gebrauch gemacht haben) helfen uns nicht weiter. Das zeigt das folgende Modell:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \begin{matrix}[a\neq b]\\ \{a,b\}\ (=k)\end{matrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & & :T \\ (\neg y=x=)\ \{a\} \arrow[dr] & & \{b\}\ (=y=\neg x) \arrow[dl] & :MK \\ & \emptyset & & :M \end{tikzcd}$$

Man überzeugt sich leicht, daß unsere Annahme in diesem Modell vollständig erfüllt ist.

Da wir y=¬x nicht aufgrund der Annahme ausschließen können, können wir auch x≠y nicht aufgrund der Annahme ausschließen, denn letzteres folgt aus ersterem aufgrund der Annahme: Ang. y=¬x u. x=y, also x=¬x, also non Kon(x), was MK(x) widerspricht. (Abgesehen davon zeigt die Nichtausschließbarkeit von x≠y auch das Modell.)

(c) TT26^{+} ist äquivalent mit ΛxΛy(MK(x) u. MK(y) u. non MK(¬x) u. Λf(non MK(f) imp. (f‹x› äqu. f‹y›)) imp. x=y) u. ΛxΛy(MK(x) u. MK(y) u. non MK(¬y) u. Λf(non MK(f) imp. (f‹x› äqu. f‹y›)) imp. x=y): eine Konjunktion, deren Glieder wiederum äquivalent sind; folglich ist TT26^{+} mit jedem der beiden Glieder äquivalent. (TT26^{+} in der Fassung des 1. Gliedes behalten wir im Auge.)

Aus MK(x) u. MK(¬x) ergibt sich, wie wir sahen, Λz(z=x o. z=¬x o. z=$\underline{t}$ o. z=$\underline{k}$); also gilt

TT27^{+} ΛxVz(z≠x u. z≠¬x u. z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$) imp. Λx(MK(x) imp. non MK(¬x))

Aus ΛxVz(z≠x u. z≠¬x u. z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$) ergibt sich Vz(z≠$\underline{t}$ u. z≠¬$\underline{t}$ u. z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$), also mit TT54 Vz(z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$), also Vz(z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$ u. $\underline{t}$≠$\underline{k}$) (denn $\underline{t}$=$\underline{k}$ ist ja äquivalent mit ΛxΛy(x=y)), also VzVz'(z'≠z u. z'≠¬z u. z'≠$\underline{t}$ u. z'≠$\underline{k}$ u. z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$ u. $\underline{t}$≠$\underline{k}$); nun muß auch z von ¬z verschieden sein; denn wäre z=¬z, so wäre $\underline{t}$=$\underline{k}$ (vergl. den Beweis von TT105); außerdem ¬z≠$\underline{t}$, denn sonst z=$\underline{k}$ (TT55, TT54); außerdem ¬z≠$\underline{k}$, denn sonst z=$\underline{t}$;
demnach erhalten wir VzVz'Vz''Vz'''Vz''''(z≠z' u. z≠z''[¬z] u. z≠z'''[$\underline{t}$] u. z≠z''''[$\underline{k}$] u. z'≠z''[¬z] u. z'≠z'''[$\underline{t}$] u. z'≠z''''[$\underline{k}$] u. z''[¬z]≠z'''[$\underline{t}$] u. z''[¬z]≠z''''[$\underline{k}$] u. z'''[$\underline{t}$]≠z''''[$\underline{k}$]), was besagt, daß es mindestens fünf Inhalte gibt. Umgekehrt folgt hieraus ΛxVz(z≠x u. z≠¬x u. z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$); denn das Gegenteil VxΛz(z=x o. z=¬x o. z=$\underline{t}$ o. z=$\underline{k}$) beinhaltet, daß es höchstens vier Inhalte gibt, was damit, daß es mindestens fünf Inhalte gibt, unverträglich ist.

Wenn ΛxVz(z≠x u. z≠¬x u. z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$) ("Es gibt mindestens fünf Inhalte") beweisbar ist, so ist wegen TT27^{+} Λx(MK(x) imp. non MK(¬x)) beweisbar,[1] und mit beweisbarem Λx(MK(x) imp. non MK(¬x)) erhält man aus TT26^{+} das nichttriviale *principium identitatis indiscernibilium*[2]. ΛxVz(z≠x u. z≠¬x u. z≠$\underline{t}$ u. z≠$\underline{k}$) folgt aber nicht mit AT1 – AT8^{+}; es ergibt sich freilich mit dem in 5., (c) als vertretbar angesehenen Unendlichkeitsaxiom AT10.

II., 7.: Principium identitatis

Anmerkungen:

[1]Die Umkehrung von TT27^{+} gilt nicht. Denn ∧x(MK(x) imp. non MK(¬x)) folgt aus non ∨xMK(x); aus non ∨xMK(x) ergibt sich aber non ∨xEl(x), d.h. daß es genau einen Inhalt gibt; ebenso folgt (mit den Axiomen) ∧x(MK(x) imp. non MK(¬x)) aus ∨!xMK(x); aus ∨!xMK(x) ergibt sich aber ∨!xEl(x), d.h. daß es genau zwei Inhalte gibt. Äquivalent ist ∧x(MK(x) imp. non MK(¬x)) aber mit non $\vee^{=2}$xMK(x) (d.h. es gibt nicht genau vier Inhalte, sondern weniger oder mehr).

[2]Mit ∧x(MK(x) imp. non MK(¬x)) folgt nicht nur dieses, sondern sogar ∧x∧y(MK(x) u. MK(y) u. ∧f(non MK(f) imp. (f⟨y⟩ imp. f⟨x⟩)) imp. x=y), wie man aus dem Beweis von TT26^{+} ersieht.

8. Noch einmal: Subsistenz als Eigenschaft?

(a) Aus TT44 Λx(x∈Uy(El(y) u. A[y]) äqu. El(x) u. A[x]) erhält man mit DT21 Λx(El(x) u. xTUy(El(y) u. A[y]) äqu. El(x) u. A[x]). $\underline{A}$[α] sei die Satzform, die aus der Satzform A[α] hervorgeht, indem man vor jedes α an den intendierten Stellen in A[α] ¬ schreibt ($\underline{A}$[α] ist also A[¬α]); demnach Λx(El(x) u. xTUy(El(y) u. $\underline{A}$[y]) äqu. El(x) u. $\underline{A}$[x]), also Λx(El(¬x) u. ¬xTUy(El(y) u. $\underline{A}$[y]) äqu. El(¬x) u. $\underline{A}$[¬x]), also mit TT78, TT60 und da nach TT55 Λx($\underline{A}$[¬x] äqu. A[x]) *Λx(MK(x) u. ¬Uy(El(y) u. $\underline{A}$[y])Tx äqu. MK(x) u. A[x]);* nun nach TT78, TT55 Λy(El(y) u. $\underline{A}$[y] äqu. MK(¬y) u. $\underline{A}$[y]), d.h. Λy(El(y) u. $\underline{A}$[y] äqu. Vx'(MK(x') u. A[x'] u. ¬y=x')), also mit TT55 Λy(El(y) u. $\underline{A}$[y] äqu. Vx'(MK(x') u. A[x'] u. y=¬x')), nach TT29 also ¬Uy(El(y) u. $\underline{A}$[y])=¬UyVx'(MK(x') u. A[x'] u. y=¬x'), also mit TT64 ¬Uy(El(y) u. $\underline{A}$[y])=∩x'(MK(x') u. A[x']); demnach (aufgrund des kursiv Geschriebenen) Λx(MK(x) u. ∩x'(MK(x') u. A[x'])Tx äqu. MK(x) u. A[x]), also mit DT1$^+$

TT28$^+$ Λx(∩x'(MK(x') u. A[x'])<x> äqu. MK(x) u. A[x])

(b) In 4., (c) haben wir gezeigt, daß eine Repräsentation von Prädikaten durch Eigenschaften im Grundbereich nicht generell möglich ist; TT28$^+$ zeigt aber, daß es eine solche Repräsentation gibt, nämlich für alle Prädikate A[x], für die gilt Λx(A[x] imp. MK(x)):

TT29$^+$ Λx(A[x] imp. MK(x)) imp. Λx(∩yA[y]<x> äqu. A[x])

Beweis: Ang. Λx(A[x] imp. MK(x)), also Λx(MK(x) u. A[x] äqu. A[x]), also mit TT66, AT3 ∩y(MK(y) u. A[y])=∩yA[y]; also mit TT28$^+$ Λx(∩yA[y]<x> äqu. A[x]).

Aus TT29$^+$ folgt mit AT7$^+$ unmittelbar

TT30$^+$ Λx(∩ySub(y)<x> äqu. Sub(x))

Wir können definieren

DT7^{+} $\underline{s} := \cap y\mathrm{Sub}(y)$,

und erhalten somit

TT31^{+} $\wedge x(\underline{s}\langle x\rangle$ äqu. $\mathrm{Sub}(x))$,

d.h. gerade das Prinzip, das wir in 4., (a) als mit untragbaren Konsequenzen behaftet angesehen haben. Dem dort angegebenen Gottesbeweis, den dieses Prinzip mitermöglicht, können wir nun – wenn wir nicht das ganze System in Frage stellen wollen – nur dadurch entgehen, daß wir $(\underline{g}\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$, was uns als intuitiv evident galt, problematisieren.

(c) Der besagte Beweis zeigt – unabhängig von $\underline{g}$ – , da nun ja $\wedge x(\underline{s}\langle x\rangle$ äqu. $\mathrm{Sub}(x))$ bewiesen ist, daß gilt:

TT32^{+} $\wedge f((f\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$ imp. $\vee y(\mathrm{Sub}(y)$ u. $f\langle y\rangle))$,

was grob kontra-intuitiv erscheint. Im Beweis von TT32^{+} (siehe 4., (a); anstelle der Konstanten $\underline{g}$ verwende man die Variable f) wird Gebrauch gemacht von TT91, d.h. von $\wedge x($non $\underline{k}Tx$ imp. $\vee y(MK(y)$ u. $xTy))$. Mit diesem Prinzip kann man in der Sachverhaltsontologie ein zu TT32^{+} analoges Resultat beweisen, nämlich

TT141 $\wedge x((x\wedge\underline{w})\neq\underline{k}$ imp. $xT\underline{w})$:

Ang. $(x\wedge\underline{w})\neq\underline{k}$, also non $\underline{k}T(x\wedge\underline{w})$, also mit TT91 $\vee y(MK(y)$ u. $(x\wedge\underline{w})Ty)$, also mit TT24 $\vee y(MK(y)$ u. xTy u. $\underline{w}Ty)$; nun nach TT106 $MK(\underline{w})$; also nach TT79 $\underline{w}=y$, also $xT\underline{w}$.

Die Analogie von TT141 zu TT32^{+} sieht man besonders gut, wenn man bedenkt, daß $\vee y(\mathrm{Sub}(y)$ u. $f\langle y\rangle)$ nach DT1^{+}, DT2^{+} und AT7^{+} nichts anderes besagt als E(f) und daß $xT\underline{w}$ nach DT31 nichts anderes besagt als E(x).[1] Sie hilft uns nun den richtigen Gesichtspunkt für die Beurteilung von TT32^{+} zu gewinnen. TT141 ist kein kontra-intuitiver Satz; es besagt, daß jeder Sachverhalt, der mit der Welt verträglich ist (mit der Welt, nicht mit unseren Theorien über sie), besteht (Teil der Welt ist). Ob aber ein Sachverhalt mit der Wirklichkeit verträglich ist, ist für uns häufig offen.

TT32^{+} besagt, daß jede Eigenschaft, die mit der Realsubsistenz (der das Prädikat Sub repräsentierenden Eigenschaft) verträglich ist, existiert (einer realen Substanz inhäriert). Der Schein der Kontra-intuitivität von TT32^{+} kommt dadurch zustande, daß man in vielen Fällen (im Fall des Einhornseins, des Elfenkönigseins etc.) meint, die Verträglichkeit einer Eigenschaft mit der Realsubsistenz sei doch offenbar gegeben; daß es keine reale Substanz mit dieser Eigenschaft gibt, sei aber ebenso offenbar der Fall. Ob jedoch eine Eigenschaft mit der Realsubsistenz verträglich ist, ist eine Frage, mit der es sich ganz analog verhält wie mit der Frage, ob ein Sachverhalt mit der Welt verträglich ist. Um in *jedem* Fall entscheiden zu können, ob ein Sachverhalt mit der Welt verträglich ist oder nicht, müssen wir die Welt vollständig kennen; um in *jedem* Fall entscheiden zu können, ob eine Eigenschaft mit der Realsubsistenz verträglich ist oder nicht, müssen wir die Realsubsistenz vollständig kennen, d.h. müssen wir vollständig wissen, welche Substanzen real subsistent sind, denn $\underline{s}$ ist ja $\bigcap y Sub(y)$ - die intensional größte Eigenschaft, die *allen* realsubsistenten Inhalten gemeinsam ist. Wir kennen die Welt nicht vollständig, und daraus ergibt sich, daß es häufig offen für uns sein muß, ob ein Sachverhalt mit der Wirklichkeit verträglich ist; wir kennen die Realsubsistenz ebenfalls nicht vollständig, denn wir wissen nicht vollständig, welche Inhalte real subistent sind; und daraus ergibt sich, daß es häufig offen für uns sein muß, ob eine Eigenschaft mit der Realsubsistenz verträglich ist.

(d) Über die Realsubsistenz können wir uns zudem ebenso leicht im Irrtum befinden wie über die Welt. Wenn wir meinen, daß ein Sachverhalt besteht, der in Wahrheit nicht besteht, so halten wir $\bigcup y E(y)$ (bezogen auf Sachverhalte), d.h. $\underline{w}$ für einen anderen Sachverhalt, als $\underline{w}$ tatsächlich ist; wenn wir meinen, daß ein Inhalt nicht real subsistent ist, der es in Wahrheit ist, so halten wir $\bigcap y Sub(y)$, d.h. $\underline{s}$ für eine andere Eigenschaft, als $\underline{s}$ tatsächlich ist.[2] *Und damit* werden auch einige unserer Urteile bzgl. der Verträglichkeit mit $\underline{s}$ bzw. $\underline{w}$ fehlerhaft. Fragen der Verträglichkeit mit $\underline{s}$ bzw. $\underline{w}$ sind nicht generell Fragen, die apriori mit entsprechender Gewißheit beantwortet werden können. Gewöhnlich freilich hängt die Beantwortung der Frage, ob ein Satz der Gestalt $(\tau\wedge\tau')\neq\underline{k}$ wahr ist, nicht von kontingenten Gegebenheiten ab, von denen wir kein apriorisches Wissen haben; nämlich dann, wenn τ und τ' - gleichgültig, welche die kontingenten Gegebenheiten sein mögen - stets jeweils dieselbe Eigenschaft bzw. denselben Sachverhalt bezeichnen;[3] für $\underline{s}$ bzw. $\underline{w}$ gilt das aber nicht; je nachdem, was kontingenterweise real subsistiert bzw. der Fall ist - und jedenfalls nicht alles davon können wir apriori wissen -, bezeichnet $\underline{s}$ bzw. $\underline{w}$ eine andere Eigenschaft bzw. einen anderen Sachverhalt. Schon deshalb reicht zur Beantwortung der Frage, ob $(\tau\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$ bzw. $(\tau\wedge\underline{w})\neq\underline{k}$ wahr ist, in der Regel unsere apriorische Kenntnis von den Eigenschaften bzw. Sachverhalten nicht hin. Sätze der Gestalt $(\tau\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$, $(\tau\wedge\underline{w})\neq\underline{k}$ sind in der Regel (von uninteressanten Fällen - wenn τ "$\underline{k}$" ist - abgesehen) nicht apriori entscheidbar.

(e) Aus alle dem ergibt sich, daß Aussagen der Form $(\varphi\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$ denselben Status haben wie Aussagen der Form $(\tau\wedge\underline{w})\neq\underline{k}$. Woher wollen wir wissen, daß Göttlichsein mit Realsubsistentsein verträglich ist, wenn wir doch die letztere Eigenschaft nicht vollständig kennen? Die Aussage $(\underline{g}\wedge\underline{s})\neq\underline{k}$ kann also nicht als unproblematisch gelten, und damit entgehen wir dem Gottesbeweis in 4., (a) trotz der Gültigkeit von $TT32^{+}$. Und es zeigt sich, daß die Verträglichkeit von Einhornsein z.B. mit Realsubsistentsein nicht so unproblematisch gewiß ist, wie wir zunächst meinten; so daß es uns im Einklang mit $TT32^{+}$ und unserer Überzeugung, daß es keine realsubsistenten Einhörner gibt, keine Schwierigkeiten mehr bereitet zu akzeptieren, daß Einhornsein mit der Realsubsistenz unverträglich ist.[4]

Anmerkungen:

[1]In der Eigenschaftsontologie bzw. in der Sachverhaltsontologie gilt sogar Λf((f∧s)≠k äqu. E(f)) bzw. Λx((x∧w)≠k äqu. E(x)):
(x) E(f), also nach DT2$^+$ Vy(Sub(y) u. fTy), also nach TT31$^+$ Vy(s<y> u. fTy), also mit DT1$^+$ Vy(MK(y) u. sTy u. fTy), also mit TT24 Vy(MK(y) u. (f∧s)Ty), also mit TT85 non kT(f∧s), also (f∧s)≠k.
(xx) E(x), also xTw, also, da nach AT2 wTw, mit TT24 (x∧w)Tw; außerdem mit TT25 wT(x∧w); also mit AT3 (x∧w)=w, also (x∧w)≠k, denn w≠k (nach AT7).
In der Eigenschaftsontologie gilt aber nicht Λf(E(f) äqu. sTf), was Λx(E(x) äqu. xTw) in der Sachverhaltsontologie korrespondierte: sT(s∧¬s), aber non E((s∧¬s)); demnach Vf(sTf u. non E(f)); geht man davon aus, daß Λf(E(f) imp. sTf) beweisbar ist, so ist auch Λy(Sub(y) äqu. MK(y)) beweisbar: denn E(t) ist beweisbar (AT8$^+$, Λy(tTy), DT2$^+$), also ist nach Annahme sTt beweisbar, also s=t, also ist wegen TT31$^+$ Λy(Sub(y) äqu. t<y>) beweisbar, also nach DT1$^+$ Λy(Sub(y) äqu. MK(y) u. tTy), d.h. wegen Λy(tTy) Λy(Sub(y) äqu. MK(y)); nun können wir aber annehmen, daß letzteres nicht beweisbar ist.
Die vorstehende Überlegung zeigt, daß gilt:

TT33$^+$ s=t imp. Λy(Sub(y) äqu. MK(y))

Auch die Umkehrung hiervon ist beweisbar: Aus Λy(Sub(y) äqu. MK(y)) nach TT66, AT3 ⋂ySub(y)=⋂yMK(y); nun mit TT89, TT88 ⋂yMK(y)=t; also mit DT7$^+$ s=t. - Desweiteren gilt

TT34$^+$ s≠k äqu. VySub(y)

Beweis: (i) VySub(y), also mit TT31$^+$ Vy(s<y>), also mit DT1$^+$ Vy(MK(y) u. sTy), also s≠k, denn non kTy, da MK(y), also mit DT26 Kon(y), also mit TT70 y≠k, also wegen yTk und AT3 das Fragliche; (ii) s≠k, also wegen (s∧s)=s und TT32$^+$ VySub(y).

Natürlich gilt auch nicht Λf(E(f) äqu. fTs). Aus Λf(E(f) imp. fTs) erhält man nämlich Λy(Sub(y) imp. y=s), was AT8$^+$ widerspricht: Sub(y), also mit TT4$^+$ E(y), also mit Λf(E(f) imp. fTs) yTs; nach TT65 aus Sub(y) aber ⋂zSub(z)Ty, d.h. nach DT7$^+$ sTy; nach AT3 also y=s. - Dagegen ist beweisbar:

TT35$^+$ Λf(fTs imp. E(f))

Beweis: Ang. fTs; nach AT8$^+$ VySub(y), also nach TT31$^+$, DT1$^+$ Vy(Sub(y) u. sTy); also mit AT1 Vy(Sub(y) u. fTy), also nach DT2$^+$ E(f).

[2]Angenommen wir irrten uns bzgl. x, indem wir meinen, es sei nicht real subsistent, obwohl es in Wahrheit real subsistent ist; für alle anderen Inhalte dagegen mögen wir korrekt entschieden haben. Wir halten dann also ⋂y(Sub(y) u. y≠x) für s. Es gilt

Λx(Sub(x) imp. ⋂ySub(y)T$^+$⋂y(Sub(y) u. y≠x))

Beweis: Ang. Sub(x); Λy(Sub(y) u. y≠x imp. Sub(y)), also nach TT66 ⋂ySub(y)T⋂y(Sub(y) u. y≠x); außerdem gilt ⋂ySub(y)≠⋂y(Sub(y) u. y≠x); denn aus TT65 folgt wegen Sub(x) ⋂ySub(y)Tx; aber non ⋂y(Sub(y) u.y≠x)Tx; denn *sonst* mit TT63 UzΛy(Sub(y) u. y≠x imp.

zTy)Tx, also mit TT96 Λz(Λy(Sub(y) u. y≠x imp. zTy) imp. zTx); nun Λy(Sub(y) u. y≠x imp. ¬xTy), denn sonst Vy(Sub(y) u. y≠x u. non ¬xTy), also mit $AT7^+$ Vy(MK(y) u. y≠x u. non ¬xTy); also, da Max(y), Vy(MK(y) u. y≠x u. xTy), also, da MK(x) (aus Sub(x) mit $AT7^+$), mit TT79 x=y - Widerspruch; demnach ¬xTx - was im Widerspruch steht zu MK(x);
da ∩ySub(y)Tx, aber non ∩y(Sub(y) u. y≠x)Tx, folgt ∩ySub(y)≠∩y(Sub(y) u. y≠x); folglich nach DT1 und dem Unterstrichenen ∩ySub(y)T^+∩y(Sub(y) u. y≠x).

Unter den angegebenen Bedingungen halten wir also $\underline{s}$ für eine intensional größere Eigenschaft, als $\underline{s}$ tatsächlich ist.

[3]Selbst dann kann aber natürlich die apriorische Beantwortung der angesprochenen Frage nicht möglich sein; die involvierten Eigenschaften können für unseren Verstand zu groß sein.

[4]In einem gewissen Sinn sind Einhornsein und Realsubsistentsein allerdings verträglich; dieser Sinn läßt sich freilich nur ausdrücken, wenn man wieder den Operator L zur Sprache PT hinzunimmt. - Bezeichne $\underline{h}$ das Einhornsein, so haben wir zwar ($\underline{h}$∧$\underline{s}$)=$\underline{k}$, aber daraus können wir nicht folgern L ($\underline{h}$∧$\underline{s}$)=$\underline{k}$, da der Bezug von $\underline{s}$ nach den kontingenten Gegebenheiten variieren kann. Vielmehr wird man annehmen non L ($\underline{h}$∧$\underline{s}$)=$\underline{k}$; in diesem Sinn sind Einhornsein und Realsubsistentsein verträglich. Für starre Eigenschaftsbezeichnungen α, Eigenschaftsbezeichnungen, deren Bezug nicht nach den kontingenten Gegebenheiten variieren kann - $\underline{h}$ ist selbst eine solche - gilt dagegen (α∧$\underline{h}$)=$\underline{k}$ äqu. L (α∧$\underline{h}$)=$\underline{k}$ [und (α∧$\underline{h}$)≠$\underline{k}$ äqu. L (α∧$\underline{h}$)≠$\underline{k}$].

Kann man, wenn man den Operator L in PT hat, Λx(Sub(x) imp. L Sub(x)) beweisen (was gewiß unerwünscht wäre)? - Man könnte an folgende Argumentation denken:

1. Λx(Sub(x) imp. $\underline{s}$<x>)	$TT31^+$
2. ΛfΛx(f<x> imp. L f<x>)	Theorem; siehe 6., (d)
3. Λx($\underline{s}$<x> imp. L $\underline{s}$<x>)	aus 2., prädikatenlogisch
4. Λx($\underline{s}$<x> imp. Sub(x))	$TT31^+$
5. L Λx($\underline{s}$<x> imp. Sub(x))	aus 4. (Necessitierung)
6. Λx(L $\underline{s}$<x> imp. L Sub(x))	aus 5., modallogisch
7. Λx(Sub(x) imp. L Sub(x))	aus 1., 3. und 6., p.l.

Der problematische Schritt in dieser Deduktion ist der von 2. auf 3.; dort wird nämlich ein Kennzeichnungsausdruck - $\underline{s}$, d.h. ∩ySub(y) - in einen modalen Kontext substituiert; solche Substitutionen sind aber nur für starre Designatoren zulässig. Es ist nicht garantiert, daß $\underline{s}$ ein solcher ist; dazu müßte gerade 7. gelten - was aber zu beweisen ist. - Analog verhält es sich in der Sachverhaltsontologie, wo man mit dem korrekten Prinzipien Λx(W(x) äqu. xT$\underline{w}$), ΛyΛx(xTy imp. L xTy) analog zu obiger Argumentation Λx(W(x) imp. L W(x)) - "Was wahr ist, ist notwendigerweise wahr" - herleiten könnte. Hier darf man von ΛyΛx(xTy imp. L xTy) nicht übergehen zu Λx(xT$\underline{w}$ imp. L xT$\underline{w}$), denn es ist nicht garantiert, daß $\underline{w}$ - obwohl kein Kennzeichnungsausdruck - ein starrer Designator ist.

9. Leibnizinterpretation in der Eigenschaftsontologie

(a) Mit PT in der nun verwendeten Deutung, die AT1 - AT6 validiert, können in hervorragender Weise logisch-ontologische Ideen von Leibniz dargestellt werden. Wir haben angesprochen: Individuen als maximal-konsistente Eigenschaften, Prädikation als Begriffsinklusion (→ leibnizscher Determinismus), intensionale boolesche Algebra, principium identitatis indiscernibilium. Aber damit nicht genug. - Es war eine der Lieblingsideen von Leibniz, daß jeder Begriff aus kleinsten atomaren Begriffen rein konjunktiv ("additiv") zusammengesetzt werden kann. Nun, so ist es; gemäß AT1 - AT6 gilt ja: $\wedge x(x = \cup y(El(y) \text{ u. } yTx))$ (gemäß TT42, DT20 und TT31).[1]

(b) H. Burkhardt bezeichnet "das Problem der ursprünglichen oder primitiven Begriffe" als ein sehr grundlegendes Problem der leibnizschen Philosophie, im Zusammenhang mit dem sich drei Fragen stellen: "Zunächst die Frage nach der *Existenz*, d.h. ob es sie wirklich gibt oder ob man es mit einem Scheinproblem zu tun hat, dann die Frage nach ihrer *Erkennbarkeit*, d.h. nach einem *Kriterium*, das anzeigt, wann man es mit einem solchen einfachen Begriff zu tun hat, und als dritte Frage die nach der *Anzahl* dieser Begriffe, nämlich vor allem, ob es endlich oder unendlich viele solcher Begriffe gibt." (*Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz*, S. 170).

Diese drei Fragen lassen sich wie folgt beantworten, wenn wir primitive Begriffe mit Elementinhalten identifizieren: Da es maximal-konsistente Inhalte gibt, gibt es Elementinhalte (letztere sind die Negationen der ersteren gemäß TT78) und zwar *genauso* viele, also unendlich viele, wenn es unendlich viele maximal-konsistente Inhalte gibt. Wenn man es mit der Negation eines maximal-konsistenten Inhalts zu tun hat, dann hat man es mit einem Elementinhalt zu tun, beispielsweise mit *nicht-U.M.-sein*. Zwar ist jeder Inhalt aus Elementinhalten konjunktiv zusammengesetzt, das heißt aber nicht, daß *wir* ihn vollständig in diese analysieren könnten, da er aus unendlich vielen Elementinhalten bestehen mag. Außerdem: wie sich der maximal-konsistente Inhalt aufgrund der ontologischen Fakten der vollständigen Erfassung durch den menschlichen Geist entzieht, so entzieht sich ihr auch der minimal-gehaltvolle (der Elementinhalt nach TT84): Der eine ist dafür zu groß, der andere zu klein; beim einen müßte man eine wenn nicht unendliche, so doch ungeheuer lange Konjunktion von (jeweils) *wohlverstandenen* Begriffen (das sind für uns mittlere Wesen Begriffe mittlerer Größe) erfassen, beim anderen - dem Elementinhalt - eine unendliche Adjunktion von solchen. Die *notiones absolutae primae* sind somit nicht die *notiones secundum nos primae*; letztere sind erfaßbar, erstere nicht; bzgl. der letzteren ist es unhaltbar, daß jeder Inhalt konjunktiv aus ihnen zusammengesetzt ist, bzgl. der ersteren ist es gewiß.[2] H. Burkhardt resümiert: "Betrachtet man die Leibnizsche Begriffslehre, dann kann man konstatieren, daß ihre beiden wichtigsten Ingredienzien, nämlich der *primitive* als auch der *vollständige* Begriff, dem menschlichen Denken nicht verfügbar sind." (ebd., S. 172f).

(c) Wie läßt sich Leibnizens Mögliche-Welten-Theorie darstellen? - Wir erweitern die Sprache PT um das zweistellige Prädikat $=^W$; die Interpretation von PT wird beibehalten; $\tau =^W \tau'$ ist zu lesen als "τ ist weltgleich (kompossibel) mit τ'". Zu AT1 - AT6 kommen hinzu die Axiome

AC1 $\wedge x \wedge y(x =^W y$ imp. MK(x) u. MK(y))
(Weltgleich sind Substanzen)

AC2 $\wedge x($MK(x) imp. $x =^W x)$
(Jede Substanz ist weltgleich mit sich selbst)

AC3 $\wedge x \wedge y(x =^W y$ imp. $y =^W x)$
(Symmetrie)

AC4 $\wedge x \wedge y \wedge z(x =^W y$ u. $y =^W z$ imp. $x =^W z)$
(Transitivität)[3]

AC5 $\wedge x \wedge y($Sub(x) u. Sub(y) imp. $x =^W y)$
(Die real subsistierenden Inhalte sind weltgleich)

AC6 $\wedge x \wedge y($Sub(x) u. $y =^W x$ imp. Sub(y))
(Mit einem real subsistierenden Inhalt ist auch jeder

mit ihm weltgleiche Inhalt real subsistierend)

$AT7^+$ ergibt sich aus AC1 und AC5; man braucht also nur mehr $AT8^+$ postulieren. Und es kommen hinzu die Definitionen:

DC1 $\underline{w}(\tau) := \bigcap y(y{=}^{W}\tau)$

Nach DC1 ist *die Welt von* τ der größte Inhalt, den alle mit τ weltgleichen Inhalte gemeinsam haben.

DC2 $Wl(\tau) := Vy(MK(y)$ u. $\tau{=}\underline{w}(y))$

Nach DC2 ist τ *eine mögliche Welt* genau dann, wenn τ die Welt eines möglichen Gegenstandes ist.

Wie zuvor Gegenstände werden mögliche Welten durch gewisse Eigenschaften (=Inhalte) *repräsentiert.* Leibniz selbst tut das nicht; er repräsentiert mögliche Welten *extensional* durch gewisse Mengen von Substanzen (die er ihrerseits durch maximal-konsistente Eigenschaft repräsentiert): maximale Mengen kompossibler Substanzen (vergl. *Logik und Semiotik ...,* S. 255). Nach unserem Ansatz erscheint die Welt einer Substanz als Teil von ihr; man ist freilich gewohnt, das Verhältnis gerade umgekehrt zu sehen. Nach Leibniz spiegelt aber jede Substanz ihr gesamtes Universum wider (insbesondere spiegelt jede realsubsistierende Entität: jede *Monade* das gesamte Universum wider); mit internalisierten Welten sollte man also im Rahmen der leibnizschen Metaphysik keine Adäquatheitsprobleme haben. H. Burkhardt schreibt in *Logik und Semiotik ...,* S. 168: "Insofern die individuelle Substanz oder die Monade das ganze Universum `widerspiegelt', wie Leibniz das etwas poetisch ausdrückt, gibt der Individuenbegriff auch eine Darstellung des Universums."[4]

(d) Es gelten die folgenden drei zentralen Sätze:

TC1 $\Lambda x \Lambda y(MK(x)$ u. $MK(y)$ imp. $(x{=}^{W}y$ äqu. $\underline{w}(x){=}\underline{w}(y)))$

TC2 $\Lambda y \Lambda x(MK(y)$ u. $MK(x)$ u. $\underline{w}(y)Tx$ imp. $\underline{w}(y){=}\underline{w}(x))$

TC3 $\Lambda x(MK(x)$ imp. $V!y(Wl(y)$ u. $yTx))$
(Jede Substanz gehört zu ("existiert in") genau

einer Welt, bzw. spiegelt genau eine Welt wider; jeder Substanz inhäriert genau eine Welt)[5]

Beweis von TC1: (i) Ang. $x=^{W}y$; wegen AC3 und AC4 folgt $\Lambda z(z=^{W}x$ äqu. $z=^{W}y)$, also nach TT66 und AT3 $\cap z(z=^{W}x)=\cap z(z=^{W}y)$, also mit DC1 $\underline{w}(x)=\underline{w}(y)$;
(ii) ang. $MK(x)$ u. $MK(y)$ u. $\underline{w}(x)=\underline{w}(y)$; also mit DC1 $\cap z(z=^{W}x)=\cap z(z=^{W}y)$; mit AC2 und TT65 $\cap z(z=^{W}x)Tx$; also $\cap z(z=^{W}y)Tx$, also mit TT64 $\neg Uy'Vz(z=^{W}y$ u. $y'=\neg z)Tx$, also mit TT60 $\underline{\neg xTUy'Vz(z=^{W}y \text{ u. } y'=\neg z)}$; aus $MK(x)$ nach TT78 $El(\neg x)$, d.h. nach DT20 $\underline{QA(\neg x) \text{ u. non } M(\neg x)}$; aus dem Unterstrichenen mit TT40 $Vk(\neg xTk$ u. $Vz(z=^{W}y$ u. $k=\neg z))$, also $Vz(z=^{W}y$ u. $\neg xT\neg z)$, also mit TT59 $Vz(z=^{W}y$ u. $zTx)$, also mit AC1 $Vz(z=^{W}y$ u. zTx u. $MK(z)$ u. $MK(x))$, also mit TT79 $x=z$, also $x=^{W}y$.

Beweis von TC2: Ang. $MK(y)$ u. $MK(x)$ u. $\underline{w}(y)Tx$, also mit DC1 $\cap z(z=^{W}y)Tx$; ab da siehe Beweis von TC1, (ii) bis $x=^{W}y$, daraus mit TC1 $\underline{w}(y)=\underline{w}(x)$.

Beweis von TC3: Ang. $MK(x)$; $Wl(\underline{w}(x))$ u. $\underline{w}(x)Tx$ nach DC2, DC1, AC2, TT65; also $Vy(Wl(y)$ u. $yTx)$; ang. $Wl(z)$ u. $Wl(z')$ u. zTx u. $z'Tx$, also mit DC2 $Vy(MK(y)$ u. $z=\underline{w}(y))$ u. $Vy'(MK(y')$ u. $z'=\underline{w}(y'))$, also $VyVy'(MK(y)$ u. $MK(y')$ u. $z=\underline{w}(y)$ u. $z'=\underline{w}(y')$ u. $\underline{w}(y)Tx$ u. $\underline{w}(y')Tx)$, also mit TC2 $\underline{w}(y)=\underline{w}(x)$ u. $\underline{w}(y')=\underline{w}(x)$, also $\underline{w}(y)=\underline{w}(y')$, also $z=z'$; damit ist gezeigt $V!y(Wl(y)$ u. $yTx)$.

(e) Mit AC5 und AC6 folgt, daß zur wirklichen Welt nur Substanzen gehören, die existieren; daß alle existierenden Substanzen zur wirklichen Welt gehören; daß die wirkliche Welt das größte Gemeinsame aller existierenden Substanzen ist:

DC3 $\underline{w} := \iota xVy(Sub(y)$ u. $x=\underline{w}(y))$
(die wirkliche Welt)

TC4 $V!xVy(Sub(y)$ u. $x=\underline{w}(y))$

Beweis: $VySub(y)$ mit $AT8^{+}$; also $VxVy(Sub(y)$ u. $x=\underline{w}(y))$; ang. $Vy(Sub(y)$ u. $x=\underline{w}(y))$ u. $Vy'(Sub(y')$ u. $x'=\underline{w}(y'))$; also $VyVy'(Sub(y)$ u. $Sub(y')$ u. $x=\underline{w}(y)$ u. $x'=\underline{w}(y'))$, also mit AC5 y=^{w}y', also mit TC1, AT7^{+} $\underline{w}$(y)=$\underline{w}$(y'), also x=x'.

TC5 Λx(MK(x) u. $\underline{w}$Tx imp. E(x))

Beweis: Gemäß TC4, DC3 Vy(Sub(y) u. $\underline{w}$=$\underline{w}$(y)); ang. MK(x) u. $\underline{w}$Tx; also Vy(Sub(y) u. MK(x) u. $\underline{w}$(y)Tx), also mit TC2, AT7^{+} $\underline{w}$(y)=$\underline{w}$(x), also mit TC1 x=^{w}y, also mit AC6 Sub(x), also mit TT4^{+} E(x).

TC6 Λx(MK(x) u. E(x) imp. $\underline{w}$Tx)

Beweis: Ang. MK(x) u. E(x), also mit TT7^{+} Sub(x); nun Vy(Sub(y) u. $\underline{w}$=$\underline{w}$(y)) (TC4, DC3); also mit AC5 x=^{w}y, also mit TC1, AT7^{+} $\underline{w}$(x)=$\underline{w}$(y); $\underline{w}$(x)Tx (TT65, DC1, AC2); also $\underline{w}$Tx.

TC7 $\underline{w}$=∩x(MK(x) u. E(x))

Beweis: Λx(MK(x) u. E(x) äqu. MK(x) u. $\underline{w}$Tx) (TC5, TC6), also mit TT66, AT3 ∩x(MK(x) u. E(x))=∩x(MK(x) u. $\underline{w}$Tx); ∩x(MK(x) u. $\underline{w}$Tx) ist aber $\underline{w}$; das ergibt sich mit dem Pendant zu Λy(y=Ux(El(x) u. xTy)): Λy(y=∩x(MK(x) u. yTx)) (der Beweis sei dem Leser überlassen).

Anmerkungen:

[1]Kneales Kritik "Leibniz's failure to produce a convincing example of his method [der Begriffsanalyse] was due mainly to his obsession with the idea that all complexity must arise from the conjunction of attributes" (*The Development of Logic*, S. 326) geht ins Leere. *Jede* Komplexität ist konjunktiv.

[2]Zu Positionen von Leibniz in diesen Fragen siehe *Logik und Semiotik ...*, S. 170ff.)

[3]Zu AC1 - AC4 siehe B. Mates, *The Philosophy of Leibniz*, S. 77.

[4]Außerdem existieren im Vollsinn nach Leibniz nur Substanzen; alles übrige "Existierende" muß also wohl (intuitiv genommen) in ihnen sein ... . (Siehe *The Philosophy of Leibniz*, S. 47: "*Reality* in the most fundamental sense of that term, is regarded as consisting exclusively of individual substances - the so-called monads." Nun kann man sicherlich auch sagen: Nach Leibniz sind im Vollsinn nur Substanzen möglich (möglicherweise existent); alles übrige "Mögliche" (inklusive mögliche Welten) muß also wohl in ihnen sein ... oder kann ohne Verletzung seiner Philosophie so konstruiert werden.

[5]Zu TC3 siehe *The Philosophy of Leibniz*, S. 78 und S. 137. Derselben Ansicht wie Leibniz ist D. Lewis: *On the Plurality of Worlds*, S. 213.

10. Meinongsche Objekttheorie in der Eigenschaftsontologie

(a) In der Eigenschaftsontologie haben wir Gegenstände durch maximal-konsistente Eigenschaften repräsentiert - was man kann, wenn man davon ausgeht, daß Gegenstände (und nicht etwa Gegenstand-Welt-Paare) umkehrbar eindeutig auf maximal-konsistente Eigenschaften abbildbar sind. Wie wäre es nun, wenn die Gegenstände nach dieser Konzeption eine Subspecies einer größeren Kategorie (von Gegenständen im *weitesten* Sinn), nämlich der Kategorie der *Objekte* darstellen, und Objekte umkehrbar eindeutig auf Eigenschaften abbildbar sind (wobei spezielle Objekte - Gegenstände [im Sinne der angesprochenen Konzeption] - auf spezielle Eigenschaften - maximal-konsistente - abgebildet werden)? Wie wäre es, wenn die Abbildungsfunktion, die solches leistet "die Konjunktion der Eigenschaften von" ist? *Jede* Eigenschaft f ist danach die Konjunktion der Eigenschaften eines Objekts x, *genau* eines Objekts x, denn die Konjunktionen der Eigenschaften verschiedenen Objekte sind verschieden. x hat genau die Eigenschaften die Teileigenschaften von f sind. - Dies ist im Effekt die Lehre von A. Meinong.

(b) Wenn Objekte umkehrbar eindeutig auf Eigenschaften abbildbar sind, dann können wir Objekte durch Eigenschaften repräsentieren. - Es erweist sich wieder als günstig, von den Entitäten im "Grundbereich" nicht als "Eigenschaften" zu sprechen, sondern sie neutral als "Inhalte" zu bezeichnen. *Jeder* dieser Inhalte kann *objektiv* (als Objekt) aufgefaßt werden: Reden wir von einem Inhalt τ *als Objekt* (objektiv), so sagen wir statt "τ" (bzw. "τ zu sein", "τ-sein", "ein-τ-sein") "der (die, das) τ". Stehen Inhalte in einem Teilverhältnis zueinander, so kann man dies prädikativ deuten, und von den Relata wird dann eines (das Ganze) *objektiv*, das andere (der Teil) *attributiv* gesehen; d.h. $\tau T\tau'$ kann man lesen als "der (die, das) τ' hat (bzw. ist) τ". Was etwas hat (ist), ist ein Objekt (Ob); was von etwas gehabt wird, ist eine Eigenschaft (Ei).

(c) Es gilt natürlich wegen AT2 $\wedge x Ob(x)$ und $\wedge x Ei(x)$ und folglich $\wedge x(Ob(x)$ äqu. $Ei(x))$. Die Prädikate Ob und Ei sind logisch gesehen redundant. *Aber* sie haben die Funktion, meinongsche Begriffsbildungen explizit wiedergebbar zu machen:

$Pos^{Ob}(\tau) := Ob(\tau)$ u. non $\bigvee x(Ei(x)$ u. $xT\tau$ u. $\neg xT\tau)$
(τ ist ein mögliches Objekt)

$Uos^{Ob}(\tau) := Ob(\tau)$ u. non $Pos^{Ob}(\tau)$
(τ ist ein unmögliches Objekt)

$Vol^{Ob}(\tau) := Ob(\tau)$ u. $\bigwedge x(Ei(x)$ imp. $xT\tau$ o. $\neg xT\tau)$
(τ ist ein vollständiges Objekt)

$Uol^{Ob}(\tau) := Ob(\tau)$ u. non $Vol^{Ob}(\tau)$
(τ ist ein unvollständiges Objekt)

$Geg(\tau) := Vol^{Ob}(\tau)$ u. $Pos^{Ob}(\tau)$
(τ ist ein - möglicher - Gegenstand, Individuum)

Wir betrachten das Existenzprädikat nun als gleichbedeutend mit Sub; aus $AT7^{+}$ ergibt sich demnach wegen $\bigwedge x(MK(x)$ äqu. $Geg(x))$
(M) $\bigwedge x(E(x)$ imp. $Geg(x))$ (*Nur Gegenstände existieren*).

(d) Betrachten wir einige Anwendungen (im Einklang mit (M)) dieser meinongschen Begriffe:
Der goldene Berg (d.h. der objektiv aufgefaßte Inhalt, ein goldener Berg zu sein) ist ein mögliches, aber unvollständiges und darum nicht existierendes Objekt;
das runde Quadrat ist ein unmögliches und darum nicht existierendes, aber vollständiges Objekt;[1]
ich (d.h. die objektiv aufgefaßte Konjunktion aller meiner Eigenschaften) bin ein existierendes und darum mögliches und vollständiges Objekt;
ich-in-der-Welt-w-in-der-ich-braune-Augen-habe ist ein mögliches und vollständiges, aber nicht existierendes Objekt.

Die meinongsche Objekttheorie (Meinong selbst spricht von "Gegenstandstheorie"; wir verwenden das Wort "Gegenstand" *hier* für spezielle Objekte, nicht wie Meinong für Objekte überhaupt; Objekte wiederum sind nur spezielle *Gegenstände im weitesten Sinn*, d.h. spezielle immanente Entitäten, die weder Sachverhalte noch Attribute sind; siehe die Einleitung, S.20) ist von besonderer Bedeutung für die Ontologie fiktiver Personen (Sherlock Holmes, Odysseus, Anna Karenina). Ein gewichtiger Grund spricht dafür, daß fiktive Personen unvollständige Objekte sind: Sähe man fiktive Personen als (nicht existierende) leibniz-lewissche Gegenstände an, so wäre es unmöglich, sie zu individuieren. Die Eigenschaften, die Odysseus in der Odyssee zugeschrieben werden, lassen sich in unzähligen sich ausschließenden Weisen mit unzähligen weiteren Eigenschaften konsistent vervollständigen. Jede dieser Weisen entspricht ein anderer Gegenstand. Welcher davon ist Odysseus? - Es ist absolut unmöglich, darauf eine begründete Antwort zu geben. In der meinongschen Objekttheorie ist die Individuation von Odysseus sehr einfach: Odysseus ist die objektiv aufgefaßte Konjunktion aller Eigenschaften, die ihm in der Odyssee (explizit oder erschließbar) zugeschrieben werden.[2]

(e) Da gilt $\wedge x(Geg(x)$ äqu. $MK(x))$, folgt aus (M) $\wedge x(E(x)$ imp. $MK(x))$, mit $TT29^{+}$ also $\wedge x(\cap yE(y)\langle x\rangle$ äqu. $E(x))$. Es gibt also eine (Gegenstands-) Eigenschaft *Existenz*: $\cap yE(y)$; wir bezeichnen sie kurz mit $\underline{e}$. Betrachten wir den Inhalt *ein-existenter-goldener-Berg-sein*: $(\underline{e}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))$; offenbar $\underline{e}T(\underline{e}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))$ u. $\underline{a}T(\underline{e}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))$ u. $\underline{b}T(\underline{e}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))$: "Der existente goldene Berg ist existent, golden und ein Berg"; also $\vee y(\underline{e}Ty$ u. $\underline{a}Ty$ u. $\underline{b}Ty)$, d.h. $\vee y(Ob(y)$ u. $\underline{e}Ty$ u. $\underline{a}Ty$ u. $\underline{b}Ty)$: "Es gibt ein Objekt, das existent, golden und ein Berg ist". - "Aber es gibt doch keinen existenten, goldenen Berg!"[3] - Nun, das wird ja auch gar nicht behauptet. "Es gibt einen existenten, goldenen Berg" in dem im Einwurf intendierten Sinn ist durch $\vee y(\underline{e}\langle y\rangle$ u. $\underline{a}\langle y\rangle$ u. $\underline{b}\langle y\rangle)$, d.h. durch $\vee y(Geg(y)$ u. $\underline{e}Ty$ u. $\underline{a}Ty$ u. $\underline{b}Ty)$ wiederzugeben, was stärker ist als $\vee y(Ob(y)$ u. $\underline{e}Ty$ u. $\underline{a}Ty$ u. $\underline{b}Ty)$; denn um $\vee y(Geg(y)$ u. $\underline{e}Ty$ u. $\underline{a}Ty$ u. $\underline{b}Ty)$ zu bekommen, muß man $(\underline{e}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))\neq\underline{k}$ annehmen, was nicht so unproblematisch ist, wie es auf den ersten Blick aussieht (siehe Abschnitt (e) des vorletzten Kapitels; $\underline{e}$ ist dieselbe Eigenschaft wie $\underline{s}$).

Wir lösen das Problem des existenten, goldenen Berges also durch Unterscheidung von zwei Weisen der Prädikation: $\tau T\tau'$ und $\tau\langle\tau'\rangle$ (d.h. $Geg(\tau')$ u. $\tau T\tau'$). "Es gibt einen existenten, goldenen Berg" im Sinne von $\vee y((\underline{e}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))Ty)$ (äqu. $\vee y(\underline{e}Ty$ u. $\underline{a}Ty$ u. $\underline{b}Ty)$) ist eine wahre Behauptung und in der meinongschen Objekttheorie beweisbar; "Es gibt einen existenten, goldenen Berg" im Sinne von $\vee y((\underline{e}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))\langle y\rangle)$ (äqu. $\vee y(\underline{e}\langle y\rangle$ u. $\underline{a}\langle y\rangle$ u. $\underline{b}\langle y\rangle)$) ist eine (höchstwahrscheinlich) falsche Behauptung und - wie erwünscht -

in der meinongschen Objekttheorie nicht beweisbar.[4]

Anmerkungen:

[1]Zu diesen Beispielen vergl. J. N. Findlay, *Meinong's Theory of Objects and Values*, S. 57.

[2]Vergl. dazu T. Parsons, *Nonexistent Objects*, S. 54. Parsons' Ansatz zur Rekonstruktion meinongscher Ideen unterscheidet sich von unserem. Er geht von einer umkehrbar eindeutigen Abbildbarkeit von Objekten auf *Mengen von "nuclear properties"* aus (wobei er die Objekte *nicht* durch diese Mengen repräsentiert; siehe ebd., S. 18, Fußnote):
"(1) No two objects (real *or* unreal) have exactly the same nuclear properties.
(2) For any set of nuclear properties, some object has all the properties in that set and no other nuclear properties."
(ebd., S. 19; warum von "nuclear properties" statt von "properties" die Rede ist, dazu siehe die nächste Anmerkung). - Nach diesem Ansatz gibt es *logisch nicht geschlossene* Objekte: Objekte, die mit den Eigenschaften in ihrer Eigenschaftsmenge nicht auch alle Teileigenschaften der Konjunktion aller dieser Eigenschaften haben; es gibt danach unmögliche *und* unvollständige Objekte und *mehrere* unmögliche Objekte, was nach unserem Ansatz beides ausgeschlossen ist. Für manche Anwendungen mögen die genannten Konsequenzen von Parsons' Ansatz von Vorteil sein, die übrigen Konsequenzen davon sind aber geradezu widersinnig: Das Objekt x, das der Menge {Goldensein, Bergsein} entspricht, hat gemäß (2) die Eigenschaft Goldensein und die Eigenschaft Bergsein, aber es hat nicht die Eigenschaft Goldensein-und-Bergsein; das Objekt y, das der Menge {Goldensein-und-Bergsein} entspricht, hat gemäß (2) die Eigenschaft Goldensein-und-Bergsein, aber es hat weder die Eigenschaft Goldensein noch die Eigenschaft Bergsein; also ist nach (1) x verschieden von y; intuitiv würde man aber sagen, daß x dasselbe Objekt wie y ist, da beide *der goldene Berg* sind. (Fiktionale Personen behandeln wir im übrigen - als Leser - als logisch und anderweitig geschlossene Objekte; angenommen, es wird in einem Roman nie behauptet, daß der Held einen Kopf hat, aber auch nichts, aus dem man das Gegenteil erschließen könnte; nach Parsons hat der Held weder die Eigenschaft, bekopft zu sein, noch die Eigenschaft, unbekopft zu sein; für den Leser aber besteht kein Zweifel, daß der Held einen Kopf hat: "Jeder (lebendige) Mensch hat doch einen!")

[3]T. Parsons löst dieses Problem dadurch, daß der Eigenschaftsmenge {$\underline{e}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$} kein Objekt zu entsprechen braucht, das die Eigenschaften aus dieser Menge und keine anderen hat. $\underline{e}$ ist zwar eine Eigenschaft, aber eine *extranukleare* (d.h. nichtnukleare), und (2) ist auf Mengen von nuklearen Eigenschaften eingeschränkt (siehe *Nonexistent Objects*, S. 19 und S. 22f). Dazu ist zu sagen: Parsons gibt kein allgemeines Kriterium für die Unterscheidung von nuklearen und extranuklearen Eigenschaften an. Er sagt, sie sei eine Sache der Intuition (ebd., S. 24). *Meine* Intuition geht dahin, daß Existenz eine nukleare Eigenschaft ist. - Zudem ist man in anderen Kontexten gezwungen, Existenz als eine nukleare Eigenschaft anzusehen. Man kann sicherlich sagen, daß Odysseus in der Odyssee die Eigenschaft der Existenz zugeschrieben wird (gemäß der Odyssee hat Odysseus ja einmal gelebt). Nun fügen wir der Odyssee einen weiteren Satz hinzu: "Odysseus existiert nicht (d.h. hat niemals gelebt, lebt nicht und wird niemals leben)".

Wir haben dann zwei Geschichten: die Odyssee und die Odyssee^{+}. Die intuitiv unausweichliche Auffassung ist, daß in diesen beiden Geschichten das "Odysseus" genannte Objekt jeweils ein anderes ist: der Odysseus der Odyssee (der "richtige" Odysseus) und der Odysseus der Odyssee^{+} sind verschieden (letzterer ist ein unmögliches Objekt, da die Eigenschaft, einmal Polyphem zu blenden, und die Eigenschaft, nicht zu existieren, unverträglich sind). Wenn aber Existenz eine nichtnukleare Eigenschaft ist, so haben der Odysseus der Odyssee und der Odysseus der Odyssee^{+} dieselben nuklearen Eigenschaften und sind also gemäß (1) identisch! (Eine ähnliche Kritik bringt Kit Fine in "Critical Review of Parsons' *Nonexistent Objects*", S. 103 vor; er kritisiert auch Parsons' Ausweg, jeder extranuklearen Eigenschaft eine nukleare Abschwächung zuzuordnen.)

[4]K. Fine spricht in "Critical Review ...", S. 97 vom *dual copula approach* gegenüber dem *dual property approach*. Unsere Lösung ist im Sinne des ersteren, Parsons' im Sinne des letzteren.

11. Materielle permanente Gegenstände, materielle Momentangegenstände, Mereologie

(a) Nach gewöhnlichem Verständnis ist eine Mereologie weder eine Theorie von Sachverhalten noch von Eigenschaften, sondern eine Theorie von Gegenständen; und in diesem Sinn soll auch hier das Wort "Mereologie" verstanden werden. - Läßt sich das Axiomensystem AT1 - AT6 als eine Mereologie auffassen? Können wir einen Grundbereich von Gegenständen angeben und T als die Teilbeziehung zwischen diesen Gegenständen deuten, so daß AT1 - AT6 erfüllt sind? Offenbar ist dies möglich, wenn wir die Teilmengen einer Menge als Gegenstände ansehen. Ist es aber auch noch möglich, wenn wir von Mengen als Gegenstände absehen? Insbesondere interessiert die Frage, ob, wenn wir als Grundbereich von PT die Gesamtheit aller materiellen Gegenstände wählen und T als die Teilbeziehung zwischen materiellen Gegenständen interpretieren, die Axiome AT1 - AT6 als erfüllt resultieren.

(b) Bei materiellen Gegenständen denkt man gewöhnlich an *Permanentia*, Gegenstände, die nicht zeitlich dimensioniert sind. Die *räumliche* Teilbeziehung[1] zwischen Permanentia ist zeitabhängig; zum Zeitpunkt t ist das materielle permanente Individuum a Teil des materiellen permanenten Individuums b, zum Zeitpunkt t' aber nicht mehr. Wenn man PT (ohne $\underline{w}$ bzw. Sub) die materiellen permanenten Gegenstände zugrundelegte, so müßte man also entweder T einen temporalen Index anhängen oder aber T als die besagte Teilbeziehung *in einem bestimmten Zeitpunkt genommen* deuten. Im ersten Fall steht man dann vor der Frage, soll man auch dem Identitätsprädikat einen temporalen Index geben oder nicht?; im zweiten Fall vor der Frage, soll man analog zu T das Identitätsprädikat als *eine Art* von Identitätsbeziehung ("Ununterscheidbarkeit") *in einem bestimmten Zeitpunkt genommen* (demselben wie für die Teilbeziehung) deuten oder nicht?[2]

Wir wollen bei der ursprünglichen Sprache PT ohne temporale Indices bleiben und gehen also vom zweiten Fall aus. Die Relativierung der Bedeutung von = auf einen gewissen Zeitpunkt und die damit verbundene Abweichung von seinem normalen Sinn hat erhebliche Folgen: V!xA[x], d.h. VxA[x] u. ΛxΛy(A[x] u. A[y] imp. x=y), kann man nun nicht mehr ohne weiteres lesen als "Es gibt genau ein x (d.h. einen materiellen permanenten Gegenstand x), so daß gilt A[x]", ιxA[x] nicht mehr als "dasjenige x, so daß gilt A[x]". Andererseits erscheint sie, wenn man das zentrale Axiom AT3 erhalten will, unvermeidlich: Daraus, daß die materiellen permanenten Gegenstände a und b zu einem gewissen Zeitpunkt Teile voneinander sind, folgt doch nicht, daß sie miteinander identisch sind, sondern nur, daß sie zu diesem Zeitpunkt voneinander ununterscheidbar[3] sind. - Aus diesem Dilemma bietet sich der Ausweg an, aTb, "a ist Teil von b" zeitunabhängig im Sinne von "a ist zu jedem Zeitpunkt Teil von b" zu lesen und a=b entsprechend im Sinne von "a ist zu jedem Zeitpunkt ununterscheidbar von b", was man als gleichbedeutend mit "a ist identisch mit b" ansehen kann. Diesen Ausweg wollen wir aber nicht weiter verfolgen, sondern stattdessen einen anderen einschlagen.[4]

(c) *Materielle Momentangegenstände* sind materielle zeitlich dimensionierte Gegenstände ohne zeitliche Ausdehnung.[5] Jedem materiellen permanenten Gegenstand entspricht zu jedem Zeitpunkt genau ein materieller Momentangegenstand, zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene solche Gegenstände. Es mag vorkommen, daß *zwei* permanenten materiellen Gegenständen zu einem Zeitpunkt t genau derselbe materielle Momentangegenstand entspricht; in diesem Fall heißen sie "ununterscheidbar zum Zeitpunkt t"; gleichwohl sind sie verschieden. Die Teilbeziehung zwischen materiellen Momentangegenständen besteht nur zwischen *gleichzeitigen* materiellen Momentangegenständen, der Mont Blanc zum Zeitpunkt t ist nicht Teil des Mont Blanc zum Zeitpunkt t', wenn t von t' verschieden ist. Anders als die Teilbeziehung zwischen materiellen permanenten Gegenständen ist die Teilbeziehung zwischen materiellen Momentangegenständen nicht zeitabhängig; damit entfällt das Problem, daß sich im vorigen Abschnitt stellte. Legt man PT die Gesamtheit der materiellen Momentangegenstände bzgl. eines bestimmten Zeitpunkts zugrunde und deutet T als die (zeitunabhängig) Teilbeziehung zwischen diesen, so stellt sich nicht die Situation ein, daß AT3 eine Abweichung vom normalen Sinn von = (der Identität) fordert, wir bei Erfüllung dieser Forderung aber Aussagen in PT, die wir als Anzahlaussagen lesen konnten, nicht mehr als solche lesen können.

(d) Seien nun PT die materiellen Momentangegenstände bzgl. eines bestimmten gewählten Zeitpunkts zugrundegelegt und T entsprechend gedeutet. Sind die Axiome AT1 - AT6 erfüllt? - a und b seien im folgenden beliebige materielle Momentangegenstände bzgl. des gewählten Zeitpunkts. - Jeder materielle Momentangegenstand hat eine bestimmte (räumlich lokalisierte) Gestalt[6] (das von ihm okkupierte Raumgebiet[7], d.h. eine gewisse Summe von Raumpunkten). Es gilt:

(i) a ist Teil von b genau dann, wenn die Gestalt von a Teil* der Gestalt von b ist.[8]

(ii) a ist identisch mit b genau dann, wenn die Gestalt von a identisch ist mit der Gestalt von b.[9]

Für die Gültigkeit dieser Prinzipien ist wesentlich, daß a und b materielle Momentangegenstände *bzgl. desselben Zeitpunkts* sind. Wenn sie materielle Momentangegenstände bzgl. verschiedener Zeitpunkte sind, so ist schon allein deswegen weder a Teil von b noch b Teil von a, mag auch die Gestalt von a Teil* der Gestalt von b sein, oder die Gestalt von b Teil* der Gestalt von a; so sind sie schon deswegen allein verschieden, mag auch die Gestalt von a identisch sein mit der Gestalt von b.

Gegen (ii) könnte man den folgenden Einwand konstruieren: Materiellen permanenten Gegenständen entsprechen bzgl. des gewählten Zeitpunkts materielle Momentangegenstände; Personen sind materielle permanente Gegenstände; also sind die Momentanpersonen bzgl. des gewählten Zeitpunkts materielle Momentangegenstände bzgl. dieses Zeitpunkts; nun könnte es doch vorkommen, daß c und d verschieden sind, obwohl die Gestalt von c identisch ist mit der Gestalt von d und obwohl sie Momentanpersonen bzgl. desselben gewählten Zeitpunkts sind. Ist so etwas nicht im Fall einer Persönlichkeitsspaltung zum gewählten Zeitpunkt gegeben? - Die Auflösung dieses Einwands ist: Indem man zuläßt, daß c und d verschieden sind, obwohl ihre Gestalten identisch und sie Momentanpersonen bzgl. desselben Zeitpunkts sind, weicht man von der Voraussetzung ab, unter der allein dies ein Einwand gegen (ii) ist, nämlich davon, daß Personen *materielle* permanente Gegenstände sind und also Momentanpersonen *materielle* Momentangegenstände.

(e) Aufgrund der Prinzipien (i), (ii) lassen sich die Axiome AT1 - AT3 für materielle Momentangegenstände bzgl. des gewählten Zeitpunkts rechtfertigen. Wir betrachten dabei zwei Deutungen von PT nebeneinander; die eine über den materiellen Momentangegenständen zum gewählten Zeitpunkt; die andere über Summen von Raumpunkten: Gestalten - darunter die Gestalten der materiellen Momentangegenstände -, wobei die Raumpunkte die Elemente (El) ausmachen. Daß AT1 - AT6 bei letzterer Deutung erfüllt sind, ist evident. Die (Übersetzungs-) Prinzipien (i), (ii) liefern die Handhabe, von den gesicherten Aussagen in der letzteren Deutung zu gesicherten Aussagen in der ersteren zu kommen und damit u. a. Axiome in PT für diese Deutung zu begründen. Aber dieses Verfahren reicht nicht sehr weit, denn es kann schon AT4 für materielle Momentangegenstände bzgl. des gewählten Zeitpunkts nicht rechtfertigen. Davon abgesehen bereitet dieses Axiom überhaupt Schwierigkeiten:

(α) AT4 mitbeinhaltet in der jetzigen Interpretation, daß es einen materiellen Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts t gibt, von dem sowohl ein Sinneshaar-eines-gewissen-Insekts-zu-t als auch der Mond-zu-t Teile sind.[10] Gibt es einen solchen materiellen Momentangegenstand? - Nur, wenn man zuläßt, daß die Gestalt eines materiellen Momentangegenstandes nicht zusammenzuhängen braucht. Wir wollen das zulassen.[11]

(β) Angenommen das Prädikat A[x] von PT trifft auf unendlich viele materielle Momentangegenstände bzgl. des gewählten Zeitpunkts zu, die sich nicht überlappen; nach AT4 gibt es dann einen materiellen Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts, von dem sie alle Teil sind. Kann es einen solchen unendlich großen materiellen Momentangegenstand geben? - Wir wollen dies nicht ausschließen.

(γ) Nach AT4 und AT3 gibt es genau einen materiellen Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts, der Teil ist von allen materiellen Momentangegenständen bzgl. des gewählten Zeitpunkts. Gibt es einen solchen materiellen Momentangegenstand? - Man kann davon ausgehen, daß es für jeden Zeitpunkt materielle permanente Gegenstände gibt, die zu diesem Zeitpunkt nicht existieren; also gibt es auch materielle permanente Gegenstände, die zum gewählten Zeitpunkt nicht existieren. Welche sind die materiellen Momentangegenstände bzgl. des gewählten Zeitpunkts, die diesen zum gewählten Zeitpunkt nicht existenten materiellen permanenten Gegenständen entsprechen? - Es ist genau einer, nämlich eben der materielle Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts, der Teil von allen materiellen Momentangegenständen bzgl. des gewählten Zeitpunkts ist.[12] Materielle permanente Gegenstände, die zum gewählten Zeitpunkt nicht existieren, sind also zum gewählten Zeitpunkt ununterscheidbar. - $\underline{t}$, d.h. $\iota x \Lambda y(xTy)$, lesen wir auch als "das momentane Nichts". Das momentane Nichts bzgl. des gewählten Zeitpunkts ist der einzige materielle Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts, der nicht existiert; dementsprechend legen wir fest:

$DT1^m \quad E(\tau) := \tau \neq \underline{t}$

$DT1^m$ besagt, daß ein materieller Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts genau dann existiert, wenn er vom momentanen Nichts bzgl. des gewählten Zeitpunkts verschieden ist. Sokrates (ein materieller permanenter Gegenstand) existiert gegenwärtig nicht; d.h. der gegenwärtige Sokrates (ein materieller Momentangegenstand bzgl. des gegenwärtigen Zeitpunkts) ist identisch mit dem momentanen Nichts bzgl. des gegenwärtigen Zeitpunkts; er existiert also nicht (ohne jeden Zeitbezug).

($\underline{\delta}$) Aus AT1 - AT6 folgt ein Satz, der in der nun angenommenen Interpretation von PT besagt, daß jeder nichtelementare materielle Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts die Summe seiner echten Teile ist: $\Lambda z(\text{non } El(z) \text{ imp. } Ux(xT^+z)=z)$ (siehe I., 5., Anmerkung 4); aber materielle Momentangegenstände sind doch nicht einfach die Summen ihrer Teile; es kommt doch auf deren Organisation an. - Die Summenbildung über die Teile eines materiellen Momentangegenstandes besteht nicht darin, daß man ihn (in Gedanken) zerstückt und den entstehenden Haufen (der offensichtlich von ihm verschieden ist) die Summe seiner Teil nennt; eben diese falsche Vorstellung liegt dem Einwand zugrunde. Bei der besagten Summenbildung werden die Teile des materiellen Momentangegenstandes vielmehr "an Ort und Stelle" im materiellen Momentangegenstand aufsummiert.

(f) AT4 läßt sich annehmen, wenn auch mit einer gewissen Mühe. Wie steht es aber mit AT5 und AT6, zu deren Betrachtung Einwand ($\underline{\delta}$) überleitet? - AT6 besagt in der jetzigen Interpretation: Zu jedem existierenden materiellen t-Momentangegenstand (t ist der gewählte Zeitpunkt), der Teil der Summe der der Beschreibung A genügenden materiellen t-Momentangegenstände ist, gibt es einen existierenden materiellen t-Momentangegenstand, der Teil von ihm und Teil eines A genügenden materiellen t-Momentangegenstandes ist. - Wir können davon ausgehen, daß dies gilt. Ein existierender materieller t-Momentangegenstand a, der Teil eines Aggregates materieller t-Momentangegenstände ist, *muß* mit einem Glied dieses Aggregates einen Teil gemeinsam haben: einen Teil, der ein existierender t-Momentangegenstand ist. Denn die Gestalt von a (ein Behältnis; siehe die Anmerkung zu (i)) ist nach (i) Teil* der Gestalt des Aggregates (eines Behältnisses); zweifelsohne ist dann ein gewisses Behältnis x Teil* der Gestalt von a, das auch Teil* der Gestalt (des Behältnisses) eines Gliedes z des Aggregates ist. Bis hierher zunächst.

Wir nehmen nun an:

(iii) Ist x ein Behältnis und Teil* der Gestalt von a, so gibt es einen mit a gleichzeitigen materiellen Momentangegenstand y, so daß x die Gestalt von y ist.

(iv) Existiert a nicht, so ist seine Gestalt die Summe der Raumpunkte, die von sich selbst verschieden sind. (Existiert a, so ist seine Gestalt ein Behältnis.)

(v) Die Summe der Raumpunkte, die von sich selbst verschieden sind, ist kein Behältnis.

Daraus folgt:

(iii*) Ist x ein Behältnis und Teil* der Gestalt von a, so gibt es einen mit a gleichzeitigen *existierenden* materiellen Momentangegenstand y, so daß x die Gestalt von y ist.

Mit (iii*) erhalten wir dann in Fortsetzung unseres Argumentes: Es gibt einen existierenden materiellen t-Momentangegenstand y, so daß x die Gestalt von y ist; also die Gestalt von y ist Teil* von a und Teil* von z, also mit (i) y ist Teil von a und Teil von z.

(g) Das problematischte Axiom ist AT5. Es ist äquivalent mit

$\wedge y \wedge z(\wedge x(QA(x)$ u. non $M(x)$ u. xTy imp. $xTz)$ imp. $yTz)$, d.h. gemäß DT6, TT32, $DT1^m$ mit $\wedge y \wedge z(\wedge x(\wedge k(kTx$ u. $E(k)$ imp. $k=x)$ u. $E(x)$ u. xTy imp. $xTz)$ imp. $yTz)$. Einen existierenden materiellen t-Momentangegenstand, so daß jeder existierende Teil von ihm mit ihm identisch ist, nennen wir ein *echtes t-Atom*; AT5 besagt dann in der jetzigen Interpretation: Ist jedes echte t-Atom, das Teil des materiellen t-Momentangegenstandes y ist, auch Teil des materiellen t-Momentangegenstandes z, so ist y Teil von z. Aber die *große* Frage ist: Gibt es echte t-Atome? (Eine Frage, die durch die moderne Physik nicht beantwortet ist: Physikalische Atome-zu-t haben existierende Teile, die nicht mit ihnen identisch sind.) Wenn es keine echten t-Atome gibt, so folgt mit AT5 $\wedge x \wedge y(xTy)$, also $\wedge y(y=\underline{t})$, also mit $DT1^m$ non $\vee yE(y)$ – "Es gibt keinen materiellen t-Momentangegenstand, der existiert": ein groteskes Resultat. AT5 zwingt also praktisch zu der Annahme, daß es echte t-Atome gibt, obwohl das problematisch ist. – Dies ist ein Grund, AT5 aufzugeben (was etwas anderes ist, als das Gegenteil anzunehmen).

Daß es nun aber tatsächlich keine echten t-Atome gibt (obwohl es existierende t-Momentangegenstände gibt), scheint das folgende Argument zu zeigen: Es ist äußerst plausibel zu akzeptieren:

(vi) Ist x ein Behältnis, dann gibt es ein Behältnis y, das echter Teil* von x ist.[13]

Jetzt angenommen: a ist ein existierender materieller t-Momentangegenstand; die Gestalt von a ist ein Behältnis; also gilt gemäß (vi): es gibt ein Behältnis x, das echter Teil* der Gestalt von a ist; daraus aber folgt mit (iii*): es gibt einen mit a gleichzeitigen existierenden materiellen Momentangegenstand y, so daß x die Gestalt von y ist; es gibt also einen existierenden materiellen t-Momentangegenstand y, so daß die Gestalt von y echter Teil* der Gestalt von a ist; also mit (i): es gibt einen existierenden materiellen t-Momentangegenstand y, der echter Teil von a ist. Demnach: Es gibt keine echten t-Atome. – Wenn man dies abwehren will, so muß man (iii) in Zweifel ziehen; dann gerät aber die Sicherung von AT6 ins Wanken.

Wir verbleiben bei dem System AT1 – AT4, AT6 (dem man ein Existenz-Axiom, z.B. $\vee xE(x)$ hinzufügen kann). Dieses System deckt sich – bis auf die Annahme eines Nullelements – mit der klassischen Mereologie. Denn AT1 - AT4, AT6 ist eine vollständige boolesche Algebra, die klassische Mereologie aber eine vollständige boolesche Algebra ohne Nullelement (siehe *Parts*, S. 127).

Anmerkungen:

[1]Es gibt auch noch eine andere Teilbeziehung zwischen Permanentia; siehe dazu das nächste Kapitel.

[2]Zeitlich abhängige Identität (im vollen Wortsinn, *nicht* Ununterscheidbarkeit) ist ein inkohärenter Begriff. R. Cartwright sagt: "No object can be identical with something for a while and then become identical with something else. Once identical with one thing, never identical with another." ("Scattered Objects", S. 165).

[3]Besser als "ununterscheidbar" wäre vielleicht "deckungsgleich"; "ununterscheidbar" ist im folgenden stets im Sinne von "räumlich ununterscheidbar" zu nehmen. - Hier ein Beispiel für materielle permanente Gegenstände, die verschieden, aber zu einem Zeitpunkt ununterscheidbar sind: Betrachten wir die Katze Tibbles, ihren Schwanz: Tail und was übrig ist: Tib. Offenbar ist Tib verschieden von Tibbles, da von ihr jetzt unterscheidbar. Aber eines Tages verliert Tibbles ihren Schwanz (lebt aber weiter). Nach dem Unglück ist Tibbles ununterscheidbar von Tib. Dafür ist (Tib∧Tail), die Summe von Tib und Tail (siehe dazu das nächste Kapitel) dann nicht mehr von Tibbles ununterscheidbar; sie ist dann ja - im Unterschied zu Tibbles - verstreut. Also ist auch (Tib∧Tail) von Tibbles verschieden. - P. Simons diskutiert dieses Beispiel in *Parts*, S. 118ff im Zusammenhang mit dem sogenannten *Flux Argument*. Angesichts der Vielzahl von Lösungsversuchen, die für dieses (paradoxe) Argument vorgeschlagen wurden, muß man konstatieren, daß die korrekte Beschreibung der Wechselfälle in Tibbles', Tibs und Tails Schicksal offenbar erhebliche konzeptuelle Schwierigkeiten bereitet. Das Flux Argument beruht aber einfach auf der Konfundierung von materiellen permanenten Gegenständen und materiellen Momentangegenständen (zu diesen siehe den nächsten Abschnitt)

[4]Aber *sind* materielle permanente Gegenstände, die zu allen Zeitpunkten ununterscheidbar ("koinzident") sind, identisch? Angenommen Tibbles verliert niemals ihren Schwanz; ist also (Tib∧Tail) identisch mit Tibbles? - Simons schreibt: "Even if Tibbles fortunately never parts company with Tail, the essential possibility that she could do so is enough to distinguish her from the sum. ... Two distinct material objects can then coincide spatially for their whole lives, yet not be identical." (*Parts*, S. 115). Zwei Kommentare hierzu: (1) Kann nicht auch (Tib∧Tail) Tail verlieren? - Ja, aber nur wenn Tail aufhört zu existieren. - Hört dann nicht auch (Tib∧Tail) auf zu existieren (wie Simons meint)? - Vielleicht. Eine andere Möglichkeit wäre, daß dann (Tib∧Tail) von Tib ununterscheidbar wird.
(2) Wenn wir wie Simons an *modale* Eigenschaften denken (F-zu-können), so wird es sogar unsicher, ob materielle Momentangegenstände, die wir als identisch ansehen werden, es wirklich sind. Kann Tib-zu-t' (t' nach dem Unglück, in dem Tibbles ihren Schwanz verliert) nicht etwas, was Tibbles-zu-t' nicht kann, oder vice versa? Wenn ja, dann sind sie verschieden.- Im folgenden wird ein Identitätsprinzip für materielle Momentangegenstände angegeben, aus dem folgt, daß Tib-zu-t' identisch ist mit Tibbles-zu-t'; es ist eine Rekonstruktion des alten metaphysischen Prinzips, daß

zwei Körper nicht zum selben Zeitpunkt am selben Ort sein können. Zu leugnen, daß Tib-zu-t' identisch ist mit Tibbles-zu-t', heißt dieses Identitätsprinzip zu leugnen. - Und doch wäre dies notwendig, wenn wir "a-zu-t" nicht im Sinne von "a-*in dieser Welt*-zu-t" verständen. Wenn Tib-zu-t' und Tibbles-zu-t' *nicht* modal fixiert wären, so wären sie verschieden, denn in einer anderen Welt - in der Tibbles zu t' seinen Schwanz nicht verloren hat - hätten sie verschiedene Gestalt.

[5]In unserer Ontologie haben sowohl zeitlich dimensionierte Gegenstände wie Gegenstände ohne zeitliche Dimension Platz. Unsere Ontologie ist nicht reduktionistisch; sie zielt nicht darauf ab, das Erfülltsein einer ontologischen Sorte zu leugnen und deren Aufgabe - Funktion - eine andere ontologische Sorte übernehmen zu lassen. Ich sage dies im Hinblick auf die Intentionen mancher Ontologen (Quine z.B.), materielle Permanentia "abzuschaffen", anderer (Geach z.B.), materielle zeitlich dimensionierte Gegenstände zu leugnen. Der Ontologie als Wissenschaft wäre in vielen Fragen sehr gedient, wenn man sich - statt vorschnell reduktionistische Ziele zu verfolgen - den Leitspruch zu eigen machte: "Distinktion statt Reduktion". Erst wenn erstere weit genug getrieben ist, kann man an letztere denken. - Im einzelnen kommt man zu folgender Einteilung der Gegenstände (d.h. der Individuen) *in (relativ zu) dieser Welt*:

1. *Weder zeitlich noch räumlich dimensionierte Gegenstände*: abstrakte Individuen; *Beispiel*: Beethovens 5. Sinfonie.

2. *Räumlich, aber nicht zeitlich dimensionierte Gegenstände*: räumlich dimensionierte Permanentia; *Beispiele*: (a) materielle Permanentia: Karajan (in der englischsprachigen Literatur ist für materielle Permanentia das Wort "continuants" üblich; siehe z.B. *Parts*, S. 118; sie sind die Paradigmen aristotelischer Substanzen, wenn man davon absieht, daß diese auch keine modale Dimension haben); (b) räumlich dimensionierte, aber nicht räumlich ausgedehnte Permanentia: Kantenenden; (c) nur längsausgedehnte Permanentia: Kanten; (d) nur flächig ausgedehnte Permanentia: Schatten an der Wand, Spiegelbilder. (Die genannten Beispiele sind alles *Mutabilia*; es gibt auch räumlich dimensionierte Permanentia, die *Immutabilia* sind: Punkte, Längen, Flächen, Behältnisse - allgemein: Gestalten im Raum.)

3. *Räumlich und zeitlich dimensionierte Gegenstände*; *Beispiele*: räumlich und zeitlich dimensionierte, aber nicht zeitlich ausgedehnte Gegenstände: Karajan-zu-t (ein materieller Momentangegenstand), das Kantenende a-zu-t, die Kante b-zu-t, das Spiegelbild c-zu-t. (Das Spiegelbild c-zu-t ist - im eigentlichen Sinn - keine Fläche, aber seine Gestalt im Raum ist eine Fläche; das Kantenende a-zu-t ist kein Punkt, aber seine Gestalt im Raum ist ein Punkt; etc.)

4. *Zeitlich, aber nicht räumlich dimensionierte Gegenstände*; *Beispiele*: die letzte von Karajan geleitete Aufführung von Beethovens 5. Sinfonie; deren erster Ton; dessen Beginn (ein zeitlich, aber nicht räumlich dimensioniertes, nicht zeitlich ausgedehntes Individuum); seine zeitliche Gestalt (ein Zeitpunkt).

Ereignisse - wenn sie Gegenstände sind - fallen in die 3. Kategorie, Prozesse - wenn sie Gegenstände sind - in die 3. oder 4. (je nach dem, ob sie vierdimensional konzipiert werden oder nicht). -

Diese vierfältige Klassifikation weist viele Berührungspunkte mit der Unterscheidung von vier alternativen Ontologien in E. Zemachs Aufsatz "Four Ontologies" auf: "An ontology carves its entities as either bound or continuous in time and space. Hence, four kinds of ontology: an ontology whose entities are bound in space and in time [→ 3.], an ontology whose entities are bound in space and continuous in time [→ 2.], an ontology whose entities are bound in time and continuous in space [→ 4.], and an ontology whose entities are continuous in space and in time [→ 1.]." (ebd., S. 233). Zemach behauptet "that each one of these ontologies is complete and self-sufficient and that it *need* not be used in conjunction with any other." (ebd., S. 231). Daß diese Behauptung von einem nichtnominalistischen Standpunkt aus falsch ist, ist klar: Jede der genannten Ontologien impliziert ja (Zemachs Intention nach), daß es (im Grunde) nur Individuen gibt. (Zemach bekennt sich sogar ausdrücklich zum Nominalismus im Sinne von "Alles ist ein nichtabstraktes Individuum" [ebd., S. 231]; aber die Entitäten in Zemachs vierter Ontologie - "types" - wird man wohl - entgegen Zemachs Behauptung, sie wären "material objects" [ebd., S. 241] - als abstrakte Individuen ansehen müssen.) Wenn es also aber auch (irreduzible) Universalien und Sachverhalte gibt, dann ist keine von ihnen allein hinreichend. Und selbst wenn man sie bescheidener als bloße *Gegenstands*ontologien auffaßt, ist es reichlich unplausibel, daß jede von ihnen als Gegenstandsontologie allein hinreichend ist; allenfalls *könnten vielleicht* Zemachs erste und zweite Ontologie dies sein. Zemach versucht zu zeigen, daß die Typenontologie allein hinreichend ist (ebd., S.244f). Er redet dabei aber beständig von *places, spatial locations,* an denen Typen vorkommen; *spatial locations* sind keine Typen, sondern räumlich dimensionierte Permanentia (zudem Immutabilia). Dasselbe gilt für seinen Versuch, die dritte seiner Ontologien als allein hinreichend zu erweisen.

[6]Im Sinne von "räumlich lokalisierter Gestalt" wollen wir das Wort "Gestalt" hier stets verstehen. Damit weichen wir von seinem üblichen Sinn allerdings ab (aber wir benötigen ein kurzes Wort für das Gemeinte): Zwei nebeneinander liegende vollkommen gleiche Billiardkugeln haben im üblichen Sinne identische Gestalt, nicht aber in unserem Sinne, denn ihre räumlich lokalisierten Gestalten sind verschieden.

[7]Verstehen wir, was es heißt, daß ein materieller Gegenstand (als Ganzer) ein Raumgebiet *okkupiert* (erfüllt)? Intuitiv ist hinreichend klar, was gemeint ist, und dabei sollte man es vielleicht besser belassen. Jeder Versuch, diesen Begriff zu analysieren, dürfte mehr Fragen aufwerfen, als er beantwortet. Auch R. Cartwright unterläßt es in "Scattered Objects", ihn näher zu bestimmen. (Er spricht - mit Hobbes - von der Koinzidenz oder Koextension eines materiellen Gegenstandes mit einem Raumgebiet; ebd., S. 153; Raumgebiete [=Gestalten] sind für ihn [beliebige] *Mengen* von Raumpunkten.)

[8]Die Gestalt eines materiellen Momentangegenstandes - sofern er existiert - ist ein *Behältnis,* englisch: *receptacle.* Ein Behältnis ist eine dreidimensionale (räumlich lokalisierte) Gestalt, die noch einigen weiteren Bedingungen genügt. Siehe dazu R. Cartwright, "Scattered Objects", S. 153ff.

9(ii) von rechts nach links - wenn wir a und b beliebige *gleichzeitige* materielle Momentangegenstände sein lassen - ist eine Rekonstruktion des alten Prinzips, daß nicht *zwei* Körper zu ein und demselben Zeitpunkt an ein und demselben Ort sein können: "Nam locus cuiuslibet corporis est alius a loco alterius corporis: nec est possibile, secundum naturam, duo corpora esse simul in eodem loco, qualiacumque corpora sint" (*Summa Theologiae*, I, 67, 2). Die Rede vom "an einem Ort sein" ist im Sinne von "ein Raumgebiet erfüllen" zu nehmen. Dann lautet das Prinzip: "Zwei Körper können nicht zum selben Zeitpunkt dasselbe Raumgebiet erfüllen", d.h. "Zwei Körper können nicht zum selben Zeitpunkt dieselbe (lokalisierte) Gestalt haben". Nimmt man nun "Körper" im Sinne von "materielle permanente Gegenstände", so ist das Prinzip falsch: Zwei materielle permanente Gegenstände können sehr wohl zum selben Zeitpunkt dieselbe Gestalt haben (siehe Tib und Tibbles); sie sind dann zu diesem Zeitpunkt zwar ununterscheidbar, aber deshalb noch nicht identisch. "Körper" ist also im Sinne von "materieller Momentangegenstand" zu nehmen. Dann lautet das Prinzip: "Zwei materielle Momentangegenstände können nicht zum selben Zeitpunkt dieselbe Gestalt haben", was nichts anderes besagt als "Zwei materielle Momentangegenstände bzgl. desselben Zeitpunkts können nicht dieselbe Gestalt haben". (Ein materieller Momentangegenstand a "hat zu t die Gestalt f", wenn t der Zeitpunkt von a ist und f die Gestalt von a.)

10Mit dem Zusatz "zu-t" bildet man aus einem Ausdruck für einen materiellen permanenten Gegenstand einen Ausdruck für den ihm zu t entsprechenden materiellen Momentangegenstand. -P. T. Geach fragt in *Logic Matters*, S. 308: "What *is* (say) the England of 1984? Is there really such an object *in rerum natura*, distinct from the England of 1965?" Diese Fragen beziehen sich allgemein auf zeitlich dimensionierte materielle Gegenstände und damit auf materielle Momentangegenstände, die spezielle zeitlich dimensionierte materielle Gegenstände sind (solche, deren zeitliche Ausdehnung 0 ist). Geach kommt zu dem Resultat: "I conclude that temporal slices are merely \`dreams of our language'. It is no less a mistake to treat \`McTaggart in 1901' and \`McTaggart in 1921' as designating individuals than it would be so to treat \`nobody' or \`somebody'." (ebd., S. 311). Sein Grund hierfür ist die angebliche Absurdität von einfachen prädizierenden Sätzen wie "Tabby at t is eating mice": "for a cat can eat mice at time t, but a temporal slice of a cat, Tabby-at-t, cannot eat mice anyhow." (ebd., S. 310). Was Geach hier attackiert ist aber nicht die Theorie zeitlich dimensionierter Gegenstände *selbst*, sondern deren (verbale) Illustration, die solche Vokabeln wie "temporal slice", "space-time worm" etc. verwendet. Für Prädikationen bzgl. materieller Momentangegenstände jedenfalls gibt keinerlei nicht in bildhaften Vorstellungen begründete Probleme; denn es gilt schlicht: a-zu-t ist F gdw. a ist F-zu-t (z.B. Hans-zu-t ist blond gdw. Hans ist blond-zu-t). Geht man von einer atemporalen Kopula (atemporalen Prädikationsbeziehung) aus, so kann man den temporalen Index - sofern er überhaupt anbringbar ist (was nicht immer - ohne Gewaltsamkeit - der Fall ist, z.B. nicht beim Identitätsprädikat in seinem normalen Sinn und bei Zahlennamen) - beim Prädikat anbringen, *oder auch* beim Subjekt. Beide Sprechweisen sind gleichberechtigt. Warum die weniger übliche für absurd erklären? Geht man von der Umgangssprache aus, so ist die temporale Indizierung des Prädikats in keinster Weise gegenüber einer solchen des Subjekts ausgezeichnet. Auch der ersteren kann man den Anstrich der Absurdität geben: "An SA [Strawsono-Aristotelian] object thus does not have purely three-dimensional properties, such as being spherical or ellipsoidal: it has more complex properties, such as being *spherical at such and such a time*. (For if it had the simpler properties, it would have incompatible ones, such as being both spherical and ellipsoidal.) On the Minkowskian view objects (such as temporal parts or "time-slices" of oranges) can have the simpler properties, such as being spherical." (J. J. C. Smart, "Space-Time and Individuals", S. 4) - Beide Sprechweisen kommen vor, und wie Geach richtig sagt: "Predicates of this sort in which dates are mentioned, are a long way above the most fundamental level of temporal discourse." (ebd., S. 311). *Jede* temporale Indizierung ist "a long way above the most fundamental level of temporal discourse". Von der Umgangssprache aus ist man also frei bzgl. der Frage, welche Sprechweise man bevorzugen soll.

Um nun einen "champion" zeitlich dimensionierter materieller Gegenstände zu Wort kommen zu lassen: Ein anderes Beispiel für verschiedene materielle permanente Gegenstände, die zu einem Zeitpunkt ununterscheidbar sind, konstruiert R. Cartwright in "Scattered Objects", S. 164ff; dort geht es nicht um Tibbles, die Katze, sondern um ein Streichholzbüchlein namens "Charlie". Cartwright bringt - sinngemäß - die folgende Variante des *Flux Arguments*:

Charlie=(die Charliestreichhölzer ∧ die Verpackung).
Nun wird ein Streichholz a herausgenommen und neben Charlie gelegt.
Also: Charlie=(die Charliestreichhölzer ohne a ∧ die Verpackung).
Aber offenbar (die Charliestreichhölzer ∧ die Verpackung)≠(die Charliestreichhölzer ohne a ∧ die Verpackung).

Man könnte meinen, man bräuchte nur die Identitätsaussagen zeitlich - mit "zu t" bzw. "zu t'" - relativieren, dann verschwände die Paradoxie. Aber Cartwright sagt zurecht: Einmal identisch, immer identisch! - Die korrekte Analyse ist, daß keine der beiden Identitätsaussagen wahr ist; daß sie wahr *scheinen* beruht auf der Konfundierung von materiellen permanenten Gegenständen und materiellen Momentangegenständen; denn *in der Tat* gilt: Charlie-zu-t=(die Charliestreichhölzer ∧ die Verpackung)-zu-t, Charlie-zu-t'=(die Charliestreichhölzer ohne a ∧ die Verpackung)-zu-t' [Charlie ist zu t ununterscheidbar von (die Charliestreichhölzer ∧ die Verpackung) und zu t' ununterscheidbar von (die Charliestreichhölzer ohne a ∧ die Verpackung)]; *jedoch* Charlie≠(die Charliestreichhölzer ∧ die Verpackung), denn Charlie-zu-t'≠(die Charliestreichhölzer ∧ die Verpackung)-zu-t' (letzterer Gegenstand ist *verstreut*, Charlie-zu-t' nicht); und Charlie≠(die Charliestreichhölzer ohne a ∧ die Verpackung), denn (die Charliestreichhölzer ohne a ∧ die Verpackung)-zu-t ist ein echter Teil von Charlie-zu-t.

Cartwrights Auflösung der Arguments ist im Effekt die unsrige (siehe "Scattered Objects", S. 169). Er geht allerdings einen Schritt weiter: "Charlie, Harry and Sam thus come to be conceived as distinct four-dimensional objects, which happen on occasion to share a common temporal part." Dies ist nicht erforderlich. Wir können Charlie, Harry und Sam - wie natürlich - weiterhin als materielle Permanentia (Gegenstände ohne zeitliche Dimension) ansehen. Nichts zwingt zu der Annahme, daß Charlie-zu-t ein *temporaler Teil* von Charlie ist. Allerdings gibt es einen Gegenstand, von dem Charlie-zu-t ein temporaler Teil ist: der (vierdimensionale) Charlie-Prozeß (ein "Raum-Zeit-Wurm"). Aber dieser

Gegenstand ist - entgegen allen Advokaten vierdimensionaler *Dinge*, d.h. von Tischen, Stühlen, Menschen *als* vierdimensionale Gegenstände (Whitehead, McTaggart, Russell, Carnap, Quine, Smart u. a.; zur Kritik siehe *Parts*, S. 123ff) - doch offensichtlich nicht Charlie. Oder?

[11] Siehe auch R. Cartwright, "Scattered Objects", S.157: "That there are scattered material objects seems to me beyond reasonable doubt. If natural scientists are to be taken at their word, all the familiar objects of everyday life are scattered."

[12] Warum ist das so? - Alle materiellen Gegenstände, die zum gewählten Zeitpunkt nicht existieren, haben zum gewählten Zeitpunkt dieselbe Gestalt: die Summe der Raumpunkte, die von sich selbst verschieden sind (sie befinden sich ja nirgends), d.h. die Gestalt, die Teil* jeder Gestalt ist; also sind gemäß (ii) (die Gestalt von x zu t ist die Gestalt von x-zu-t) die ihnen entsprechenden materiellen Momentangegenstände bzgl. des gewählten Zeitpunkts alle miteinander identisch, und gemäß (i) sind diese Teil jedes materiellen Momentangegenstandes bzgl. des gewählten Zeitpunkts. Es gibt also einen materiellen Momentangegenstand bzgl. des gewählten Zeitpunkts, der Teil von allen materiellen Momentangegenständen bzgl. des gewählten Zeitpunkts ist. Da AT3 gilt, gibt es aber auch nur höchstens einen solchen.

[13] In Tarskis Aufsatz "Foundations of the Geometry of Solids" wird das Wort "solid" im Sinne von "Behältnis" verwendet. Tarski schreibt: "The specific character of such a geometry of solids [einer Geometrie, deren Grundbereich die Behältnisse sind] - in contrast to all point geometries - is shown in particular in the law according to which each figure contains another figure as a proper part." (ebd., S. 24). In der Punktgeometrie, da die Geometrie der Behältnisse in ihr modellierbar ist (ebd., S. 29), gilt also jedenfalls "Jedes Behältnis hat ein Behältnis als echten Teil*", wenn auch nicht "Jede Gestalt hat eine Gestalt als echten Teil*" (Gegenbeispiel: die Summe aller Raumpunkte, die von sich selbst verschieden sind), bzw. relevanter "Jede *nichtleere* Gestalt (Tarskis "figures") hat eine nichtleere Gestalt als echten Teil*" (Gegenbeispiel: jeder Raumpunkt).

12. Gruppenmereologie

(a) Man kann eine Interpretation von PT (ohne w bzw. Sub) angeben, die AT1 - AT6 (einschließlich AT5) erfüllt, in der sämtliche zugrundegelegten Entitäten - bis auf eine einzige - materielle permanente Gegenstände sind; die Teilbeziehung, als die T dabei gedeutet wird, ist nicht zeitabhängig, woraus erhellt, daß sie *nicht* die räumliche Teilbeziehung zwischen materiellen Permanentia ist. Dazu wählen wir *geeignete* (wir können nicht beliebige wählen; siehe dazu Abschnitt (e)) materielle Permanentia X als Elemente (sie sind die Entitäten auf die bei unserer Interpretation El zutrifft) und sagen, daß die Entitäten, über die mit PT gesprochen wird, sämtliche *Gruppen* (die Wahl dieses Wortes für das Gemeinte ist mehr oder weniger willkürlich) von X, die X und *das Nichts* seien. (Geduld! Wir werden den Versuch unternehmen, den notorisch dunkelsten aller metaphysischen Begriffe zu erhellen.) Die Gruppen von X zusammen mit den X und dem Nichts und die Teilbeziehung zwischen ihnen sind isomorph zu den Teilmengen der Menge der X und der Teilbeziehung zwischen diesen. Da die Teilmengen der Menge der X und die Teilbeziehung zwischen ihnen AT1 - AT6 erfüllen, erfüllen also auch die Gruppen von X zusammen mit den X und dem Nichts und die Teilbeziehung zwischen diesen AT1 - AT6.

(b) Die Gruppen von X sind, anders als die Teilmengen der Menge der X, materielle permanente Gegenstände. Da Tib und Tail (die zu den X gehören mögen) materielle permanente Gegenstände sind, ist auch die Gruppe aus Tib und Tail: (Tib∧Tail) (die eine Gruppe von X ist, wenn Tib und Tail zu den X gehören) ein materieller permanenter Gegenstand: Wie Tib und wie Tail hat (Tib∧Tail) zu jedem Zeitpunkt eine gewisse räumlich lokalisierte Gestalt, eine gewisse Masse etc. ((Tib∧Tail) ist aber, wie wir gesehen haben, nicht die Katze Tibbles, obwohl (Tib∧Tail) zu einem gewissen Zeitpunkt [oder sogar jedem Zeitpunkt] von Tibbles räumlich ununterscheidbar sein mag; Gruppen von Katzenteilen sind niemals Katzen.)

(c) Der Begriff der Gruppe ist ein nützlicher Begriff.- In der Umgangssprache kommen neben singulären Termen *plurale Terme* vor:

"die Benelux-Staaten", "die Fischer von England", "diese Bücher", "wir", "Tom, Dick und Harry", "Jason und die Argonauten".[1] Es scheint zunächst offensichtlich so, als ließe sich nicht jede Verwendung eines pluralen Terms analytisch äquivalent durch eine Verwendung ausschließlich singulärer Terme paraphrasieren. Dies ist zwar ohne weiteres möglich bei einem Satz wie "Tom, Dick und Harry sind krank": "Tom ist krank, Dick ist krank und Harry ist krank"; der Satz "Tom, Dick und Harry heben ohne fremde Hilfe den 200 kg schweren Balken hoch" kann aber nicht so behandelt werden. *Dennoch* läßt sich auch hier in einfacher Weise die Verwendung des pluralen Terms eliminieren: "*Die Gruppe aus Tom, Dick und Harry* [ausführlich: die Gruppe, die Tom als Mitglied hat und Dick als Mitglied und Harry als Mitglied und sonst kein Mitglied] hebt ohne fremde Hilfe den 200 kg schweren Balken hoch." - Aber es gibt andere Schwierigkeiten: Es gibt Prädikate, die mit keinem singulären Term einen sinnvollen Satz bilden; z.B. "kämpfen miteinander", "lieben sich gegenseitig", "sind zusammen 100 Jahre alt".[2] Die analytisch äquivalenten Paraphrasierungen von Sätzen mit *diesen* Beispielprädikaten sind klar: "Hans und Fritz kämpfen miteinander": "Hans kämpft mit Fritz"; "Hans und Anna lieben sich gegenseitig": "Hans liebt Anna, und Anna liebt Hans"; "Georg und Monika sind zusammen 100 Jahre alt": "Georg ist kein Jahr alt und Monika 100 Jahre, oder Georg ist ein Jahr alt und Monika 99 Jahre, oder ..., oder Georg ist 100 Jahre alt und Monika kein Jahr". Ob jedoch die analytisch äquivalente singuläre Paraphrasierung von Sätzen mit *pluralen* Prädikaten immer möglich ist, sei dahingestellt.

P. Simons schreibt demgegenüber: "It may be that plural reference is eliminable in these cases. In the case of number properties I am not so sure."[3] Aber gerade in diesem letzteren Fall ist die Verwendung des pluralen Terms zugunsten der Verwendung eines singulären ohne weiteres eliminierbar: Simons hat solche Sätze im Sinn wie "Die Männer im Auto sind zu viert", "Die Männer im Auto sind vier"; diese Beispiele sind analytisch äquivalent mit "Die Gruppe, die jeden Mann im Auto als Mitglied (Element) hat und sonst kein Mitglied [kurz: *die Gruppe aus jedem Mann im Auto*] hat vier Mitglieder (ist viergliedrig)". Aus den Beispielen ersieht man das allgemeine Eliminationsverfahren.[4]

Wir halten fest: Wenn die Verwendung pluraler Terme immer durch eine Verwendung ausschließlich singulärer Terme analytisch äquivalent paraphrasiert werden kann - was nun nicht mehr so offensichtlich unmöglich erscheint -, so nur unter Benützung des Gruppenbegriffs.

(d) Eine Gruppe ist keine plurale Entität (solche Entitäten gibt es nicht), aber man könnte sie charakterisieren als *mehrere kategorialgleiche Entitäten als eine mit ihnen kategorialgleiche Entität* (z.B. mehrere materielle Permanentia als ein materielles Permanens). Sie sind bis auf das Ingredienz der Kategorialgleichheit Simons' "manifolds", wenn man zudem von deren unhaltbaren Charakterisierung als plurale Entitäten absieht.[5] Eine Gruppe ist demnach keine Menge (im technischen Sinn dieses Wortes): Sie kann nicht völlig heterogen sein, und sie kann nicht abstrakt sein, während ihre Elemente konkret sind.[6] Das Verhältnis zwischen Element und Gruppe ist ein grundsätzlich anderes als das Verhältnis von Element und Menge; ein Element einer Gruppe ist stets Teil der Gruppe, aber ein Element einer Menge ist gewöhnlich (bei nichttransitiven Mengen) nicht Teil der Menge. Jeder Teil einer Menge von Y ist wieder eine Menge von Y, aber nicht jeder Teil einer Gruppe von Y ist wieder eine Gruppe von Y; jeder Mensch ist Teil der Gruppe der Menschen, aber kein Mensch ist eine Gruppe von Menschen. Gruppen sind stets die Summen ihrer echten Teile; es gibt aber Mengen, die nicht die Summen ihrer echten Teile sind: die Einermengen. Es gibt eine leere Menge; es gibt keine leere Gruppe.

(e) Gruppen sind zudem anders als Mengen ontologisch relative Entitäten. Die Spezifikation einer Gruppe hängt wie die einer Menge immer ab von einer Spezifikation ihrer Elemente: entweder durch Auflistung oder durch Beschreibung von Elementen, aus denen dann durch eine weitere Beschreibung die Elemente der Gruppe ausgewählt werden. (Die beiden Beschreibungen fallen häufig zusammen; die Gruppe wird dann als die maximale Gruppe bzgl. gewisser Elemente spezifiziert.) Aber anders als bei Mengen kann ein und dieselbe Entität relativ zu unterschiedlichen Elementbasen einmal als Gruppe erscheinen, das andere Mal nicht. Wenn Tib und Tail - wie angenommen - unter den als Elemente angesehenen geeigneten materiellen permanenten Gegenständen X sind, so gibt es relativ zu dieser Elementbasis eine Entität - nämlich einen materiellen permanenten Gegenstand -, die gerade die Gruppe aus ihnen beiden ist: *Tibtail*=(Tib∧Tail). Aber *diese* Entität können wir natürlich *neben anderen* Entitäten als Element ansehen, und dann ist sie relativ zur neuen Elementbasis keine Gruppe. – Doch was geschieht, wenn wir sie *neben Tib und Tail* als Element betrachten? – *Dies ist bei Gültigkeit von AT1 – AT6 unmöglich.* Beschreiben wir die Situation mit den Mitteln von PT: El(Tib), El(Tail), El(Tibtail); da Tib≠Tail, folgt non El((Tib∧Tail)); aber offenbar nach wie vor Tibtail=(Tib∧Tail); also non El(Tibtail) – Widerspruch. – Es ist also Vorsicht geboten, daß nicht ein und dieselbe Entität bzgl. ein und derselben Elementbasis als Gruppe erscheint und nicht als Gruppe. Daher ist es z.B. unmöglich, sämtliche materiellen permanenten Gegenstände als Elemente anzusehen (denn dann würden Tib, Tail, Tibtail zu den Elementen gehören – mit den gerade beschriebene Konsequenzen). Aber z.B. kann man wählen: die jetzt existierenden Menschen, die Zweiergruppen von jetzt existierenden Menschen etc.

Man könnte versucht sein, das angegebene zum Widerspruch führende Argument dadurch aufzulösen, daß man Tibtail=(Tib∧Tail) bestreitet. Wenn jedoch, bevor Tibtail auch als Element galt, Tibtail=(Tib∧Tail) richtig war, warum dann jetzt plötzlich nicht mehr? Es bleibt nur, daß Tibtail=(Tib∧Tail) auch damals schon falsch war. Dann muß man aber sagen, daß (Tib∧Tail) kein materieller permanenter Gegenstand ist, denn wenn es einer ist, welcher sonst als Tibtail? Dann ist aber (Tib∧Tail) keine Gruppe, denn als solche müßte es kategorialgleich mit Tib und mit Tail – materiellen permanenten Gegenständen – sein. – Man wird also (Tib∧Tail) kaum von der Menge {Tib, Tail} unterscheiden können.

(f) Betrachten wir nun ausführlich ein Beispiel. Wir legen PT die jetzt existierenden Menschen, die Gruppen von jetzt existierenden Menschen und das Nichts zugrunde. El(τ) kann man nun lesen als "τ ist ein jetzt existierender Mensch", $\underline{t}$ als "das Nichts", non El(τ) u. non M(τ) als "τ ist eine Gruppe von jetzt existierenden Menschen". Eine dieser Gruppen ist (Gorbatschow∧Bush), eine andere (Gorbatschow∧Kohl). Beide Gruppen sind – momentan (am 29. 10. 1989) verstreute – materielle permanente Gegenstände; jeder von ihnen hat *qua aus jetzt existierenden Menschen elementar zusammengesetzt* genau zwei echte von Nichts verschiedene Teile, wir sagen kurz: genau zwei *nichttriviale Teile*, und beide haben sie *qua aus jetzt existierenden Menschen elementar zusammenge-*

setzt genau einen nichttrivialen Teil gemeinsam: Gorbatschow.[7] Betrachten wir insbesondere (Gorbatschow∧Bush): (G∧B). Jeden *räumlichen Teil*, den G –, und jeden *räumlichen Teil*, den B zu einem Zeitpunkt hat, hat auch (G∧B) zu diesem Zeitpunkt, darüberhinaus aber noch räumliche Teile, die weder G noch B zu diesem Zeitpunkt haben (z.B. jetzt die Summe ihrer beiden Köpfe). Wie G und B kann – bei Erhaltung der Existenz – auch (G∧B) *räumliche Teile* verlieren; verliert B oder G einen Teil, so verliert ihn auch (G∧B). Wenn einem materiellen permanenten Ganzen ein räumlicher Teil verlorengeht, so braucht der verlorengegangene Teil nicht aufgehört haben zu existieren; er mag einfach nur abgetrennt sein. Aber auf *diese Weise* kann (G∧B) der räumliche Teil B nicht abhanden kommen (andere räumliche Teile durchaus), mag sich B auch zum Mond oder noch weiter fort begeben; (G∧B) wird dadurch nur immer weiter verstreut, aber B bleibt räumlicher Teil von ihm.

Aber wenn B zu t aufgehört hat zu existieren, während G noch existiert?[8] – Die Gestalt, die B zu t hat, ist dann die Summe der Raumpunkte, die von sich selbst verschieden sind; sein Ort ist dann nirgendwo. Die Gestalt, die das Nichts zu *jedem* Zeitpunkt hat, ist die Summe der Raumpunkte, die von sich selbst verschieden sind. B und das Nichts haben also zu t dieselbe Gestalt; sie sind zu t räumlich ununterscheidbar.[9] Aber was ist dann mit (G∧B)? – Wenn man davon ausgeht, daß die Gestalt, die (G∧B) zu t hat, die Konjunktion der Gestalt, die G zu t hat, und der Gestalt, die B zu t hat, ist, dann ist die Gestalt, die (G∧B) zu t hat, identisch mit der Gestalt, die G zu t hat: G und (G∧B) sind zu t räumlich ununterscheidbar geworden. Im übrigen ist B dann nach wie vor räumlicher Teil von (G∧B), aber nur weil er zu t räumlicher Teil aller materiellen permanenten Gegenstände ist: B ist zwar räumlicher Teil von (G∧B), aber nicht *nichttrivialer* räumlicher Teil; und insofern kann man sagen, daß (G∧B) zu t B als räumlichen Teil *verloren* hat.

(g) Die *Existenz* einer Gruppe läßt sich prima facie auf mancherlei Weise bestimmen:

(i) g ist eine zu t existierende Gruppe genau dann, wenn jedes ihrer Elemente zu t existiert.

(ii) g ist eine zu t existierende Gruppe genau dann, wenn eines ihrer Elemente zu t existiert.

(iii) g ist eine zu t existierende Gruppe genau dann, wenn mindestens zwei ihrer Elemente zu t existieren.

Gemäß (ii) ist (G∧B) eine zu t existierende Gruppe (denn G existiert ja noch zu t), was reichlich kontra-intuitiv ist. Dagegen ist sowohl gemäß (i) als auch gemäß (iii) (G∧B) keine zu t existierende Gruppe. (iii) ist aber gegenüber (i) der Vorzug zu geben, wie man leicht sieht, wenn man die Totalität aller jetzt existierenden Menschen (in PT: k) betrachtet (den Bezug von "jetzt" halten wir im folgenden starr). Diese Totalität ist eine jetzt existierende Gruppe. Nun hat zu einem späteren Zeitpunkt einer von den jetzt existierenden Menschen aufgehört zu existieren. Ist die Totalität der jetzt existierenden Menschen damit keine existierende Gruppe mehr (wie das nach (i) der Fall sein müßte)? - Nein, sie ist nach wie vor eine existierende Gruppe; sie ist nur räumlich kleiner geworden (nach wie vor hat sie aber dieselben Elemente und also dieselben Teile im zeitlosen nicht-räumlichen Sinn). Und sie wird eine existierende Gruppe bleiben, solange noch mindestens zwei von den jetzt existierenden Menschen existieren. Wenn dann aber nur noch einer übrig ist, so ist die Totalität der jetzt existierenden Menschen keine existierende Gruppe mehr, obwohl sie als einzelner permanenter materieller Gegenstand immer noch existiert - bis auch den letzten unserer Zeitgenossen das Zeitliche segnet und die Totalität der jetzt existierenden Menschen vom Nichts - räumlich - ununterscheidbar wird.

Anmerkungen:

[1]Diese Beispiele sind - bis auf das vierte - Beispiele aus P. Simons, "Number and Manifolds", S. 165.

[2]Wir sehen Singular und Plural als zwei grammatische Formen ein und desselben Prädikats an; die angeführten Beispielprädikate haben keinen Singular.

[3]"Number and Manifolds", S. 174. P. Simons nimmt die folgende schwierige Position ein: "I take number to be a property of manifolds, and manifolds to stand to plural terms as individuals stand to singular. ... For an expression to designate a manifold is simply for it to designate each of a number of individuals. There is no difference between the manifold, and the several individuals, despite the fact that we can talk about *a* manifold, and indeed can count manifolds to some extent as though they were individuals." (ebd., S. 165f). Jeder plurale Term designiert (benennt) nach Simons, wenn er nicht leer ist, eine Mannigfaltigkeit. Aber Simons behandelt dann die Rede von einer Bezugnahme auf Mannigfaltigkeiten so wie ein bloßes compendium loquendi: eine Bezugnahme auf "eine Mannigfaltigkeit" (durch einen pluralen Term) ist nach ihm nichts anderes als eine Bezugnahme auf jedes von *mehreren* Individuen (die keine Mannigfaltigkeiten sind). Wie kann dann "eine Mannigfaltigkeit" *doch* gewisse Eigenschaften haben, z.B. eine Anzahl? - In Abwandlung eines Dictums von Quine kann man sagen "No Entity without Unity" - ein ontologischer Grundsatz, der eine sehr lange Tradition hat: "unum enim nihil aliud significat quam ens indivisum. Et ex hoc ipso apparet quod unum convertitur cum ente. Nam omne ens aut est simplex, aut compositum. Quod autem est simplex, est indivisum et actu et potentia. Quod autem est compositum, non habet esse quandiu partes eius sunt divisae, sed postquam constituunt et componunt ipsum compositum. Unde manifestum est quod esse cuiuslibet rei consistit in indivisione." (*Summa Theologiae*, I, 11, 1). Simons' Mannigfaltigkeiten - so wie er sie charakterisiert - sind keine Einheiten, also keine Entitäten und also keine Träger von Eigenschaften. Da Mannigfaltigkeiten in Simons' Sinn keine Entitäten sind, aber alles eine Entität ist, gibt es sie also schlicht nicht. Daran ändert auch die folgende Bemerkung von Simons nichts: "This is an aspect of the prejudice in favour of the singular: it is deemed that whatever has a property must be *one* thing, so whatever has number-properties must also, in some sense, be one thing. It seems to me, on the contrary, that some properties of their very nature are borne by more than one thing." ("Number and Manifolds", S. 173). Es ist unklar, was hier mit "borne by more than one thing" gemeint sein soll. (Mit "thing" meint Simons *Entität*, und wir verstehen "Ding" im folgenden so.) - "trifft auf mehr als ein Ding zu"? - Daß es *solche* Eigenschaften gibt, ist unbestritten, aber die sind alle Eigenschaften von jeweils *einem* Ding. - "ist mehrstellig"? - Mehrstellige Eigenschaften gibt es nicht; mehrstellige Attribute sind Relationen. - Aber sei es so; in einem gewissen relevanten vertretbaren Sinn gelte: "some properties of their very nature are borne by more than one thing". *Irreduzible* (einstellige) Prädikate, die mit keinem singulären Term einen sinnvollen Satz bilden, müßte man wohl als Prädikate ansehen, die *solche* Eigenschaften intendieren. Nennen wir diese Eigenschaften "plurale

Eigenschaften". Es sei also so, daß das, was eine Eigenschaft hat, nicht *ein Ding* sein muß. - Aber wenn es nicht *ein Ding* ist, dann ist es überhaupt kein Ding, sondern *mehrere Dinge*. Aus dem Vorhandensein pluraler Eigenschaften kann man nicht auf das Vorhandensein gewisser pluraler Dinge - Simons' "manifolds" - schließen.

In *Parts*, S. 144 sagt Simons: "a more difficult question is whether there are plural *objects*, objects that are essentially not one thing but many things." Die Antwort auf die angesprochene Frage ist: "There is not one thing that is many things".

[4] In *Parts*, S. 146 behauptet Simons: "`if there are 10 *as*, there are 1023 classes [=manifolds≙Gruppen] of *as*' ... such examples strongly suggest the ineliminability of plural reference." Tatsächlich? - "Wenn die Gruppe aus jedem *a* 10 Elemente hat, dann gibt es 1023 Gruppen, so daß gilt: jedes Element von jeder ist ein *a*." (Die Pluralwörter, die in Anzahlaussagen auftauchen, sind keine pluralen Terme!)

[5] Siehe die vorletzte Anmerkung. Simons selbst unterscheidet "groups" und "manifolds". In "Plural Reference and Set Theory", S. 211 schreibt er: "So we may regard manifolds as limiting cases of groups: those whose identity is exhausted by that of their members. In such circumstances the `foundation relation' [zwischen den Mitgliedern] is the purely formal one of being just these several individuals and no others". Was Simon meint, wird aus seinen Beispielen klar: "in the days of the Empire, three of the orchestras of Vienna had the same personnel: when they played in the Court Chapel they were the Orchestra of the Court Chapel, when they played in the pit at the opera they were the Court Opera Orchestra, and when they played symphony concerts in the Musikverein they were the Vienna Philharmonic. Similarly two committees may have exactly the same members, yet not be one committee." (ebd., S. 210). Hier haben wir es mit Gruppen in Simons' Sinn zu tun, die keine Mannigfaltigkeiten in Simons' Sinn (Gruppen in unserem Sinn) sind.

[6] Von Zahlen lassen sich keine Gruppen bilden (aber Mengen): Wegen der erforderlichen Kategorialgleichheit müßte eine Gruppe von Zahlen eine Zahl sein!

[7] $((\text{Gorbatschow} \wedge \text{Bush}) \wedge \text{Kohl})$ ist ein permanenter materieller Gegenstand, der qua aus jetzt existierenden Menschen elementar zusammengesetzt genau sechs nichttriviale Teile hat; *räumliche* nichttriviale Teile hat er unzählige.

[8] Wann ein materieller permanenter Gegenstand aufgehört hat zu existieren, hängt davon ab, welche seine *existenzessentiellen* räumlichen Teile sind. (Diese Teile können im Verhältnis zum Ganzen z.T. auch klein sein, wie bei Personen; wenn einer dieser Teile zerstört ist, hat die Person aufgehört zu existieren, mag auch alles übrige an ihr intakt, ja sogar lebendig sein. Sollten Personen keine existenzessentiellen räumlichen Teile haben, so wären Personen keine materiellen permanenten Gegenstände.) Wir können definieren (indem wir uns auf materielle permanente Gegenstände und die durch T bzw. T^+ ausgedrückten zeitabhängigen

räumlichen Teilbeziehungen zwischen ihnen beziehen):

x ist zu t existenzessentieller Teil von y := xT_ty u. $E_t(y)$ u. $E_t(x)$ u. $N\wedge t'(E_{t'}(y)$ imp. $E_{t'}(x)$ u. $xT_{t'}y)$

x ist zu t existenzessentieller Teil$^+$ von y := xT^+_ty u. $E_t(y)$ u. $E_t(x)$ u. $N\wedge t'(E_{t'}(y)$ imp. $E_{t'}(x)$ u. $xT^+_{t'}y)$

Chisholms *mereologischer Essentialismus* besteht in der Behauptung: $\wedge x\wedge y(\vee t(E_t(x)$ u. $E_t(y)$ u. $xT^+_ty)$ imp. $N\wedge t'(E_{t'}(y)$ imp. $E_{t'}(x)$ u. $xT^+_{t'}y))$ (siehe "Mereological Essentialism", S. 149; mit "x is part of y at t" meint Chisholm "der zu t existierende materielle permanente Gegenstand x ist zu t echter räumlicher Teil des zu t existierenden materiellen permanenten Gegenstandes y"; dieses letztere nimmt – als er daran geht, das angegebene Prinzip zu verteidigen – einen von seinem üblichen Sinn – Chisholm nennt ihn "the loose and popular sense" – völlig abweichenden Sinn an.) Sie ist logisch äquivalent mit $\wedge x\wedge y\wedge t(E_t(x)$ u. $E_t(y)$ u. xT^+_ty imp. x ist zu t existenzessentieller Teil$^+$ von y) – ein grotesk falsches Prinzip; z.B. existiere ich jetzt und auch ein gewisses Haar von mir, das nun echter Teil von mir ist; aber *ganz gewiß* ist es möglich, daß ich zu einem Zeitpunkt existiere, an dem dieses Haar nicht existiert oder nicht echter Teil von mir ist (ich habe es mir gerade ausgerupft).

Auf Chisholms Position paßt die Bezeichnung "mereologischer Essentialismus" schlecht; man sollte eher von "mereologischem Superessentialismus" sprechen. Es gibt aber andere mereologische Essentialismen. Mereologischen Essentialismus in einem intuitiv nachvollziehbaren Sinn verkörpert das Prinzip $\wedge y\wedge t(E_t(y)$ imp. $\vee x$(x ist zu t existenzessentieller Teil$^+$ von y)). Einen spezifischen Inhalt erhält diese Prinzip erst, wenn man den Notwendigkeitsbegriff spezifiziert, der in "x ist zu t existenzessentieller Teil$^+$ von y" steckt; man kann den Begriff der analytischen Notwendigkeit wählen oder einen schwächeren. *Gegen* es – gleichgültig mit welchem Notwendigkeitsbegriff – spricht aber das sogenannte "Schiff des Theseus". Angenommen dieses Schiff y existiert zu einem Zeitpunkt t, zu dem jede Planke, jeder Mast etc., die ursprünglich Teile von ihm waren, durch neue ersetzt sind. Offenbar gilt dann non $\vee x(xT^+_ty$ u. $E_t(y)$ u. $E_t(x)$ u. $N\wedge t'(E_{t'}(y)$ imp. $E_{t'}(x)$ u. $xT^+_{t'}y))$, d.h. non $\vee x$(x ist zu t existenzessentieller Teil$^+$ von y), denn es gilt ja $\wedge x(xT^+_ty$ u. $E_t(x)$ imp. $\vee t'(E_{t'}(y)$ u. $E_{t'}(x)$ u. non $xT^+_{t'}y))$. Angesichts dessen kann man, wenn man das obige Prinzip erhalten will, folgendermaßen reagieren:

(1) Man leugnet, daß das Schiff des Theseus ein materieller permanenter Gegenstand ist: Jeder Gegenstand, der seine ursprünglichen räumlichen Teile völlig austauschen und trotzdem existieren kann, ist kein materieller permanenter Gegenstand, sondern ein *ens successivum*, wie Chisholm sagt; man könnte auch sagen: ein *materiell inkarnierter abstrakter Gegenstand*; nichtmythologische Beispiele für entia successiva wären die Altstadt von Warschau, die Semper-Oper von Dresden und eventuell: Personen. (Zu *entia successiva* bzw. *entia per alio* [sic!] siehe *Person and Object*, S. 96ff; nach Chisholm sind sie logische Konstruktionen aus (genuinen) materiellen permanenten Gegenständen; d.h. abstrakte Gegenstände; die meisten Gegenstände, die wir naiv als materielle Permanentia ansehen, sind nach ihm in Wahrheit – wie das Schiff des Theseus – entia successiva.)

(2) Man leugnet, daß das Schiff des Theseus (bzw. die Altstadt von Warschau, die Semper-Oper von Dresden) zum Zeitpunkt t (bzw. jetzt) existiert: Mit "das Schiff des Theseus" bezieht man sich auf das *alte* Schiff des Theseus und dieses existiert spätestens

zum Zeitpunkt t nicht mehr; (aber angenommen, jemand hat die Planken und Maste etc. des alten Schiffes aufgehoben und baut sie wieder zusammen; dann existiert dieses Schiff zu t wieder, aber es liefert kein Gegenbeispiel zum diskutierten mereologischen Essentialismus;) freilich ist man unsicher, wann genau das alte Schiff des Theseus aufgehört hat zu existieren, da ja seine Planken, Maste etc. nach und nach durch andere ersetzt wurden und man nicht exakt weiß, welche die existenzessentiellen Teile dieses Schiffes sind. (Bei der Altstadt von Warschau und der Semper-Oper - d.h. der *alten* Altstadt von Warschau und der *alten* Semper-Oper - unterliegt man keiner solchen Unsicherheit, obwohl man auch bei ihnen nicht exakt weiß, welche ihre existenzessentiellen Teile sind.)

[9]B-zu-t (der B entsprechende materielle t-Momentangegenstand) ist dann identisch mit dem momentanen Nichts bzgl. t; letzteres ist aber nicht etwa das Nichts-zu-t; das Nichts hat keinen ihm entsprechenden t-Momentangegenstand, und wenn, dann jedenfalls keinen materiellen. - Wir haben hier das Nichts nicht als *materiellen* permanenten Gegenstand angesehen, im vorausgehenden Kapitel aber das momentane Nichts bzgl. t als *materiellen* Momentangegenstand. Während jeder materielle permanente Gegenstand vom Nichts verschieden ist (selbst wenn er niemals existiert), sind doch stets gewisse materielle Momentangegenstände mit dem mit ihnen gleichzeitigen momentanen Nichts identisch, z.B. der jetzige Sokrates mit dem jetzigen momentanen Nichts; also ist das jetzige momentane Nichts ein materieller Momentangegenstand (oder soll man sagen, der jetzige Sokrates sei *kein* materieller Momentangegenstand?) - Man ist nie in der Verlegenheit, von der Definition abgesehen nicht sagen zu können, was das momentane Nichts bzgl. eines gewissen Zeitpunkts t ist; es ist die t-Momentanisierung irgendeines zu diesem Zeitpunkt nicht existierenden materiellen permanenten Gegenstandes. Aber was ist *das Nichts*? - Meinong hat einen natürlichen Kandidaten hierfür, nämlich *das unmögliche Objekt* (siehe 10.). Glaubt man nicht an Meinongs Objekte, so bleibt nur die reine Festlegung: das Nichts ist irgendein frei gewählter *abstrakter* Gegenstand. Die Rechtfertigung einer solchen Festlegung liegt allein darin, die Gruppenmereologie durch AT1 - AT6 axiomatisierbar zu machen.

III. Volle Ontologie bis zu monadischen Attributen 1. Stufe

1. Kategorialprädikate, die Sprache PTZ_1, das System TZ_1

(a) An der Sprache PT, so wie sie in ihrer Anwendung auf Sachverhalte schließlich bestand (also mit dem Namen "$\underline{w}$"), werden nun ganz wesentliche Veränderungen vorgenommen, so daß aus ihr eine andere Sprache wird mit einem anderen Namen:

(α)(i) Die Indices "$_0$" und "$_1$" sind Typen.
(ii) Sind $\nu_1,\ldots,\nu_n$ Typen, so ist auch $\langle\nu_1,\ldots,\nu_n\rangle$ ein Typ.
(iii) Typen sind nur Ausdrücke gemäß (i) und (ii).
(β)(i) Wenn τ ein Typ ist, so ist Z^τ ein Kategorialprädikat.
(ii) Kategorialprädikate sind nur Ausdrücke gemäß (i).
(γ) Die Sprache PT (Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Kennzeichnung + T + $\underline{w}$) erweitert um die (einstelligen) Kategorialprädikate Z^0, Z^1 und $Z^{\langle 0\rangle}$ ist die Sprache PTZ_1 (weitere Ergänzungen folgen).

(b) $Z^0(\tau)$ liest man als "τ ist ein Gegenstand (Individuum)", $Z^1(\tau)$ als "τ ist ein Sachverhalt", $Z^{\langle 0\rangle}(\tau)$ als "τ ist ein monadisches Attribut 1. Stufe (eine Eigenschaft von Individuen, d.h. eine Eigenschaft im engen - gewöhnlichen - Sinn)". Der Grundbereich von PTZ_1 umfasse sowohl die *Gegenstände*, als auch die Sachverhalte, als auch die *Eigenschaften* (die gemeinten *Gegenstände* sind ein Teil der *Gegenstände im weitesten Sinn*; unter einer *Eigenschaft* verstehen wir bis auf weiteres stets ein monadisches Attribut 1. Stufe). Man könnte nun T als die Teilbeziehung zwischen beliebigen Entitäten aus diesem Grundbereich deuten. Dies ist aber nicht ratsam, denn Sachverhalte sind in einem völlig anderen Sinn als Gegenstände Teil voneinander; dasselbe gilt für Eigenschaften. Und in einem völlig anderen Sinn, als er Teil eines Gegenstandes ist, ist ein Gegenstand Teil eines Sachverhalts usw. Das hat zur Folge, daß sich die Teilbeziehung zwischen beliebigen Entitäten aus diesem Grundbereich nicht einfach und bündig spezifizieren läßt, sondern zunächst überhaupt nicht; umfangreiche Untersuchungen sind zuvor durchzuführen, bis man versteht, was mit der Disjunktion "(x und y sind Sachverhalte und x ist Teil von y) oder (x ist ein Gegenstand, y ein Sachverhalt und x ist Teil von y) oder (x ist ein Gegenstand, y eine Eigenschaft und x ist Teil von y) oder ..." gemeint ist. Dann steht es aber immer noch dahin, ob die endlich spezifizierte Beziehung interessante formale Eigenschaften hat. Das Konjunktionsaxiom AT4 z.B. wird man sicherlich nicht mehr annehmen können, denn die Konjunktion aller Entitäten im Grundbereich müßte ein Gegenstand, ein Sachverhalt oder eine Eigenschaft sein (gemäß unserer Bestimmung des Grundbereichs); sie ist aber sicherlich weder Gegenstand, noch Sachverhalt, noch Eigenschaft.

(c) Stattdessen deuten wir T wie im 1. Teil als die Teilbeziehung zwischen Sachverhalten. Wir übernehmen die Axiome AT1 - AT9. Diese Axiome müssen nun aber angesichts des dreisortigen Grundbereichs umgeschrieben werden. Der Reformulierung von AT1 - AT9 geht voraus das Axiom

AT_Z0 $\quad \wedge x \wedge y(xTy \text{ imp. } Z^1(x) \text{ u. } Z^1(y))$

AT_Z0 besagt, daß T - wie festgelegt - für eine Beziehung zwischen Sachverhalten steht. - AT1 kann unverändert übernommen werden:

AT_Z1 $\quad \wedge x \wedge y \wedge z(xTy \text{ u. } yTz \text{ imp. } xTz)$

AT2 aber geht über in

AT_Z2 $\quad \wedge x(Z^1(x) \text{ imp. } xTx)$

AT3 kann unverändert übernommen werden:

AT_Z3 $\quad \wedge x \wedge y(xTy \text{ u. } yTx \text{ imp. } x=y)$

AT4 aber geht über in

AT_Z4 $\quad \vee z(Z^1(z) \text{ u. } \wedge x(Z^1(x) \text{ u. } A[x] \text{ imp. } xTz) \text{ u.}$
$\quad\quad \wedge y(Z^1(y) \text{ u. } \wedge x(Z^1(x) \text{ u. } A[x] \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } zTy))$

In den Axiomen AT5 und AT6 kommen definierte Ausdrücke vor; die Definitionen für diese Ausdrücke und allgemein DT1 - DT39 sind ebenfalls umzuschreiben. Dabei folge man diesem allgemeinen Verfahren:

(i) $V\nu$ im Definiens geht über in $V\nu(Z^1(\nu)$ *u.*; $\Lambda\nu$ im Definiens geht über in $\Lambda\nu(Z^1(\nu)$ *imp.*; $\iota\nu$ im Definiens geht über in $\iota\nu(Z^1(\nu)$ *u.*;

(ii) für Designatorsymbole "τ", "τ'" ... im Definiens einer Prädikatsdefinition füge man ans Definiens *u.* $Z^1(\tau)$ *u.* $Z^1(\tau')$ ... an.

(Häufig werden die entstehenden Definitionen sich wegen AT_Z0 etc. vereinfachen lassen.)

Die ursprüngliche Definition für M: DT4 lautet

$$M(\tau) := \Lambda y(\tau T y)$$

DT_Z4 aber lautet

$$M(\tau) := \Lambda y(Z^1(y) \text{ imp. } \tau T y) \text{ u. } Z^1(\tau)$$

Die ursprüngliche Definition für QA: DT6 lautet

$$QA(\tau) := \Lambda y(yT\tau \text{ imp. } y=\tau \text{ o. } M(y))$$

DT_Z6 aber lautet

$$QA(\tau) := \Lambda y(Z^1(y) \text{ imp. } (yT\tau \text{ imp. } y=\tau \text{ o. } M(y))) \text{ u. } Z^1(\tau),$$

was sich wegen AT_Z0 vereinfachen läßt zu

$$QA(\tau) := \Lambda y(yT\tau \text{ imp. } y=\tau \text{ o. } M(y)) \text{ u. } Z^1(\tau)$$

Die ursprüngliche Definition für U: DT17 lautet

$$UxA[x] := \iota z[\Lambda x(A[x] \text{ imp. } xTz) \text{ u. } \Lambda y(\Lambda x(A[x] \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } zTy)]$$

DT_Z17 aber lautet nach klammersparender Umformung

$$\begin{aligned} UxA[x] := \iota z[&Z^1(z) \text{ u. } \Lambda x(Z^1(x) \text{ u. } A[x] \text{ imp. } xTz) \text{ u.} \\ &\Lambda y(Z^1(y) \text{ u. } \Lambda x(Z^1(x) \text{ u. } A[x] \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } zTy)] \end{aligned}$$

Das Axiom AT5 geht über in

AT_Z5 $\Lambda z\Lambda z'(Z^1(z)$ u. $Z^1(z')$ u. $\Lambda x(QA(x)$ u. xTz imp. $xTz')$ imp. $zTz')$

AT6 kann unverändert übernommen werden:

AT_Z6 $\Lambda x[xTUyA[y]$ u. non $M(x)$ imp. $Vk'(k'Tx$ u. non $M(k')$ u. $Vz(k'Tz$ u. $A[z])))]$

AT7 kann unverändert übernommen werden:

AT_Z7 $\underline{w}\neq\underline{k}$

[Die umgeschriebene Definition von $\underline{k}$: DT_Z19 lautet $\underline{k} := \iota y(Z^1(y)$ u. $\Lambda x(Z^1(x)$ imp. $xTy))$.] AT8 kann unverändert übernommen werden:

AT_Z8 $TO(\underline{w})$

[Die umgeschriebene Definition von TO: DT_Z7 lautet $TO(\tau) := \Lambda y(\tau Ty$ imp. $y=\tau$ o. $T(y))$ u. $Z^1(\tau)$; demnach ergibt sich aus $TO(\underline{w})$ sofort $Z^1(\underline{w})$.] AT9 kann unverändert übernommen werden:

AT_Z9 $\underline{w}\neq\underline{t}$

[Die umgeschriebene Definition von $\underline{t}$: DT_Z18 lautet $\underline{t} := \iota y(Z^1(y)$ u. $\Lambda x(Z^1(x)$ imp. $yTx))$.]

Die Theoreme TT1 - TT141 sind entsprechend dem Verfahren für Definitionen umzuschreiben in die Theoreme TT_Z1 - TT_Z141; die Umschrift von TT18: TT_Z18 beispielsweise sieht so aus: $\Lambda x(Z^1(x)$ u. $A[x]$ imp. $xTUzA[z])$ u. $\Lambda y(Z^1(y)$ u. $\Lambda x(Z^1(x)$ u. $A[x]$ imp. $xTy)$ imp. $UzA[z]Ty))$ u. $Z^1(UzA[z])$. Häufig wird es möglich sein, Theoreme aus TT1 - TT141 unverändert zu übernehmen, oder aber ihre unmittelbaren Umschriften erheblich zu vereinfachen.

(d) Zu den Axiomen AT_Z1 - AT_Z9 kommen hinzu die Axiome

AT_Z10 $\Lambda x(Z^1(x)$ imp. non $Z^0(x))$
(Ein Sachverhalt ist kein Gegenstand)

AT_Z11 $\Lambda x(Z^1(x)$ imp. non $Z^{\langle 0\rangle}(x))$

III., 1.: Kategorialprädikate

(Ein Sachverhalt ist keine Eigenschaft)

AT_Z12 $\Lambda x(Z^0(x)$ imp. non $Z^{\langle 0 \rangle}(x))$
(Ein Gegenstand ist keine Eigenschaft)

AT_Z13 $\vee xZ^0(x)$
(Es gibt Gegenstände)

AT_Z0 - AT_Z13 bilden einen Teil des Axiomensystems TZ_1. Weitere Axiome folgen.

2. Sättigungs- und Extraktionsoperator; erste Theoreme

(a) Zur Sprache PTZ_1 gehört auch der zweistellige *Sättigungsoperator* (,). Für alle Namen, Variablen und Funktionsausdrücke τ und τ' von PTZ_1 liest man (τ,τ') als "die Sättigung von τ mit τ'". (Bei dem Wort "Sättigung" denke man nicht an den *Sättigungsprozeß*, sondern ausschließlich an das *Sättigungsresultat*; dieselbe Bemerkung ist auch einschlägig für die weniger suggestiven Worte "Verbindung", "Verkettung", "Verknüpfung", die man statt des Wortes "Sättigung" hier auch verwenden könnte.) Man beachte, daß die Sättigung von a mit b etwas anderes ist als das geordnete Paar mit a an erster Stelle und b an zweiter; es kann nämlich vorkommen, daß die Sättigung von a mit b identisch ist mit der Sättigung von c mit b, obwohl c von a verschieden ist. - Den Sättigungsoperator (die Sättigungsfunktion) charakterisieren zunächst die folgenden Axiome:

AT_Z14 $\quad \Lambda x \Lambda y[Z^{\langle 0 \rangle}(x)$ u. $Z^0(y)$ imp. $Z^1((x,y))]$
(Wenn x eine Eigenschaft ist und y ein Gegenstand, dann ist die Sättigung von x mit y ein Sachverhalt)

AT_Z15 $\quad \Lambda x \Lambda y($non $Z^{\langle 0 \rangle}(x)$ o. non $Z^0(y)$ imp. $(x,y)=\underline{k})$
(Wenn x keine Eigenschaft ist oder y kein Gegenstand, dann ist die Sättigung von x mit y der kontradiktorische Sachverhalt)

Ähnlich wie Frege konzipieren wir Eigenschaften als (einfach) ungesättigte Entitäten. Was bei ihrer Sättigung mit Gegenständen "entsteht" sind Sachverhalte;[1] dies besagt AT_Z14. AT_Z15 macht deutlich, daß die Sättigungsfunktion eigentlich nur für Eigenschaften (in ihrer 1. Stelle) und Gegenstände (in ihrer 2. Stelle) erklärt ist; denn AT_Z15 trifft eine bloße Festlegung darüber, was ihr Wert ist, wenn ihr erstes Argument keine Eigenschaft oder ihr zweites kein Gegenstand ist.

(b) Zu PTZ_1 gehören spezielle Variablen: $o, o', o'', \ldots, o_1, o_2, \ldots$; sie heißen "*Extraktionsvariablen*"; ebenso gehört zu PTZ_1 λ - der *Extraktionsoperator*. Extraktionsvariablen kommen nur durch den

Extraktionsoperator gebunden vor. In vielen logischen Systemen fungiert λ unter dem Namen "Abstraktionsoperator"; der Name "Extraktionsoperator" ist für es im Blick auf das, was es im System TZ_1 leistet, aber weit suggestiver. - Der Extraktionsoperator bildet aus geeigneten Ausdrücken *Extraktionsausdrücke*:

(i) Geht der komplexe Ausdruck $\Pi[\tau]$ bei Ersetzung aller freien Variablen in ihm durch Namen von PTZ_1 in einen Namen von PTZ_1 über und ist τ eine (gewöhnliche) Variable von PTZ_1, die in $\Pi[\tau]$ an den Stellen [ ] frei vorkommt, so ist $\lambda\nu\Pi[\nu]$ ein Extraktionsausdruck von PTZ_1, wo ν eine Extraktionsvariable ist, die in $\Pi[\tau]$ noch nicht vorkommt.
(ii) Extraktionsausdrücke von PTZ_1 sind nur Ausdrücke, die sich gemäß (i) gewinnen lassen.

Den Extraktionsoperator charakterisieren die folgenden Axiome: (Wir verwenden die Extraktionsvariable "o" stellvertretend für eine jeweils angemessene Extraktionsvariable, so wie wir beispielsweise "x" stellvertretend für eine jeweils angemessene gewöhnliche Variable verwenden und verwendet haben.)

AT_Z16 $\quad \Lambda x(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ imp. $(\lambda o\Pi[o],x)=\Pi[x])$

AT_Z17 $\quad \Lambda x($ non $Z^1(\Pi[x])$ imp. $(\lambda o\Pi[o],x)=\underline{k})$

AT_Z18 $\quad$ non $Vx(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ u. $\Pi[x]\neq\underline{k})$ imp. $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\Pi[o])$

AT_Z16 besagt: Ist x ein Gegenstand und $\Pi[x]$ ein Sachverhalt, so ist die Sättigung des auf x bezogenen Extraktionsrestes von $\Pi[x]$ mit x identisch mit $\Pi[x]$. - Was ist der auf x bezogene Extraktionsrest von $\Pi[x]$, d.h. $\lambda o\Pi[o]$? - Wir können zunächst beweisen:

TT_Z142 $\quad Vx(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ u. $\Pi[x]\neq\underline{k})$ imp. $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\Pi[o])$
(Wenn es einen Gegenstand x gibt, so daß $\Pi[x]$ ein nichtkontradiktorischer Sachverhalt ist, dann ist der auf x bezogene Extraktionsrest von $\Pi[x]$ eine Eigenschaft)

Beweis: Ang. $Vx(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ u. $\Pi[x]\neq\underline{k})$, also mit AT_Z16 $(\lambda o\Pi[o],x)=\Pi[x]$, also $(\lambda o\Pi[o],x)\neq\underline{k}$, also mit AT_Z15 $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\Pi[o])$.

Aus TT_Z142 ergibt sich zusammen mit AT_Z18

TT_Z143 $\quad Z^{\langle o \rangle}(\lambda o \mathbf{I}[o])$

(Der auf x bezogene Extraktionsrest von $\mathbf{I}[x]$ ist eine Eigenschaft)

AT_Z18 mitbeinhaltet bloße Festlegungen; etwa für den Fall non $Vx(Z^0(x)$ u. $Z^1(\mathbf{I}[x]))$. Auch dann soll der auf x bezogenen Extraktionsrest von $\mathbf{I}[x]$ eine Eigenschaft sein. Keine bloße Festlegung liegt für den Fall $Vx(Z^0(x)$ u. $Z^1(\mathbf{I}[x]))$ u. non $Vx(\mathbf{I}[x] \neq \underline{k})$ vor; hier, wird man sagen, *ist* der auf x bezogene Extraktionsrest von $\mathbf{I}[x]$ die kontradiktorische Eigenschaft. - Für jeden unter non $Vx(Z^0(x)$ u. $Z^1(\mathbf{I}[x])$ u. $\mathbf{I}[x] \neq \underline{k})$ befaßten Fall läßt sich mithilfe von AT_Z15 und AT_Z17 feststellen, daß die Sättigung des auf x bezogenen Extraktionsrestes von $\mathbf{I}[x]$ mit jeder beliebigen Entität des Grundbereichs der kontradiktorische Sachverhalt ist:

TT_Z144 $\quad$ non $Vx(Z^0(x)$ u. $Z^1(\mathbf{I}[x])$ u. $\mathbf{I}[x] \neq \underline{k})$ imp.
$\Lambda x((\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k})$

Beweis: $\Lambda x($non $Z^1(\mathbf{I}[x])$ imp. $(\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k})$ gemäß AT_Z17;
$\Lambda x($non $Z^0(x)$ imp. $(\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k})$ gemäß AT_Z15;
ang. $\mathbf{I}[x] = \underline{k}$, also $Z^1(\mathbf{I}[x])$, denn $Z^1(\underline{k})$;
($\underline{x}$) non $Z^0(x)$, also $(\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k}$ gemäß AT_Z15;
($\underline{xx}$) $Z^0(x)$; also gemäß AT_Z16 $(\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \mathbf{I}[x]$; also $(\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k}$;
demnach $\Lambda x(\mathbf{I}[x] = \underline{k}$ imp. $(\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k})$;
folglich $\Lambda x($non $Z^0(x)$ o. non $Z^1(\mathbf{I}[x])$ o. $\mathbf{I}[x] = \underline{k}$ imp. $(\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k})$, also $\Lambda x($non $Z^0(x)$ o. non $Z^1(\mathbf{I}[x])$ o. $\mathbf{I}[x] = \underline{k})$ imp. $\Lambda x((\lambda o \mathbf{I}[o], x) = \underline{k})$, d.h. TT_Z144.

Gegeben das Antezedenz von AT_Z18, ist also nach TT_Z144, AT_Z18 der auf x bezogene Extraktionsrest von $\mathbf{I}[x]$ eine Eigenschaft, deren Sättigung mit jeder beliebigen Entität des Grundbereichs der kontradiktorische Sachverhalt ist; eine solche Eigenschaft heißt "kontradiktorische Eigenschaft":

DT_Z40 $\quad Z_K^{\langle o \rangle}(\varphi) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $\Lambda x((\varphi, x) = \underline{k})$
(φ ist eine kontradiktorische Eigenschaft)

Wir werden später sehen, daß es genau eine kontradiktorische Eigenschaft gibt.

(c) Entsprechend zu TT_Z143 gilt

TT_Z145 $\quad \Lambda x \Lambda y Z^1((x,y))$
(abhängig von AT_Z14, AT_Z15, $Z^1(\underline{k})$)

Ein nützliches Theorem für das Weitere ist

TT_Z146 $\quad \Lambda x \Lambda y[\Lambda z(Z^0(z) \text{ imp. } (x,z)T(y,z)) \text{ imp. } \Lambda z((x,z)T(y,z))]$
u. $\Lambda x \Lambda y[\Lambda z(Z^0(z) \text{ imp. } (x,z)=(y,z)) \text{ imp. } \Lambda z((x,z)=(y,z))]$
(Wenn für jeden Gegenstand z die Sättigung von x mit z Teilsachverhalt der Sättigung von y mit z ist, dann ist für jedes z die Sättigung von x mit z Teilsachverhalt der Sättigung von y mit z etc.)

Beweis: Ang. $\Lambda z(Z^0(z) \text{ imp. } (x,z)T(y,z))$; ang. non $Z^0(z)$, also gemäß AT_Z15 $(x,z)=\underline{k}$ u. $(y,z)=\underline{k}$; nun $Z^1(\underline{k})$, also gemäß AT_Z2 $\underline{k}T\underline{k}$; also $(x,z)T(y,z)$; demnach $\Lambda z(\text{non } Z^0(z) \text{ imp. } (x,z)T(y,z))$; folglich $\Lambda z((x,z)T(y,z))$; der Beweis für den zweiten Teil von TT_Z146 liegt auf der Hand.

Außerdem:

TT_Z147 $\quad \Lambda x((\lambda o \Pi[o],x)=\Pi[x] \text{ o. } (\lambda o \Pi[o],x)=\underline{k})$
(Die Sättigung des auf x bezogenen Extraktionsrestes von $\Pi[x]$ mit x ist $\Pi[x]$ oder aber der kontradiktorische Sachverhalt)

Beweis: Ang. $Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$, also gemäß AT_Z16 $(\lambda o \Pi[o],x)=\Pi[x]$; andererseits ang. non $Z^0(x)$ o. non $Z^1(\Pi[x])$, also gemäß AT_Z15 bzw. AT_Z17 $(\lambda o \Pi[o],x)=\underline{k}$.

TT_Z148 $\quad \Lambda x \Lambda y((x,y)=(\lambda o(x,o),y))$
(Die Sättigung von x mit y ist die Sättigung mit y des auf y bezogenen Extraktionsrestes der Sättigung von x mit y)

Beweis: Gemäß TT_Z145 $Z^1((x,y))$; also, falls $Z^0(y)$, gemäß AT_Z16

$(\lambda o(x,o),y)=(x,y)$; falls aber non $Z^{0}(y)$, dann gemäß $AT_{Z}15$ $(\lambda o(x,o),y)=(x,y)$.

$TT_{Z}149$ $\quad \wedge x \wedge y((\lambda o(o,y),x)=\underline{k})$

Beweis: Ang. $(\lambda o(o,y),x)\neq\underline{k}$, also gemäß $AT_{Z}15$ $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o(o,y))$ u. $Z^{0}(x)$; gemäß $TT_{Z}145$ $Z^{1}((x,y))$; also gemäß $AT_{Z}16$ $(\lambda o(o,y),x)=(x,y)$; demnach $(x,y)\neq\underline{k}$; aber es ergibt sich, da $Z^{0}(x)$, nach $AT_{Z}12$ non $Z^{\langle 0\rangle}(x)$, also nach $AT_{Z}15$ $(x,y)=\underline{k}$ – Widerspruch.

$TT_{Z}150$ $\quad \wedge x((\lambda o'\lambda o\Pi[o,o'],x)=\underline{k})$

Beweis: Gemäß $TT_{Z}147$ $\wedge x((\lambda o'\lambda o\Pi[o,o'],x)=\lambda o\Pi[o,x]$ o. $(\lambda o'\lambda o\Pi[o,o'],x)=\underline{k})$; nun $\wedge x((\lambda o'\lambda o\Pi[o,o'],x)\neq\lambda o\Pi[o,x])$, denn gemäß $TT_{Z}145$ $Z^{1}((\lambda o'\lambda o\Pi[o,o'],x))$, aber gemäß $TT_{Z}143$ $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\Pi[o,x])$, also gemäß $AT_{Z}11$ non $Z^{1}(\lambda o\Pi[o,x])$; demnach $\wedge x((\lambda o'\lambda o\Pi[o,o'],x)=\underline{k})$.

Nach $TT_{Z}150$ und $TT_{Z}143$ ergibt eine (unmittelbar) iterierte Anwendung des Extraktionsoperators eine kontradiktorische Eigenschaft.

Anmerkungen:

[1]Freges *Bild* von den Universalien (bei ihm "Begriffe") als ein- oder mehrfach "ungesättigte" Entitäten (wobei die Sättigung durch Gegenstände nur ein Spezialfall ist) hat mehr für sich als das *traditionelle* Bild, selbst wenn man bei Universalien ausschließlich an Eigenschaften von Gegenständen denkt: In "New Work for a Theory of Universals" schreibt D. Lewis auf S. 343 (Fußnote): "In this paper, I follow Armstrong's traditional terminology: `universals' are repeatable entities, wholly present wherever a particular instantiates them"; und in *On the Plurality of Worlds*, S. 2: "Nor do they [possible worlds] overlap; they have no parts in common, with the exception, perhaps, of immanent universals exercising their characteristic privilege of repeated occurrence." - Von einem Privileg des wiederholten Vorkommens für Universalien kann keine Rede sein. Lewis bezieht sich auf das schlichte Phänomen, daß Gegenstände a_1, a_2, ... ein und dieselbe Universalie F exemplifizieren: die Universalie F *kommt wiederholt vor*: beim Gegenstand a_1, beim Gegenstand a_2, ... Aber natürlich gibt es auch die Erscheinung, daß Universalien F_1, F_2, ... durch ein und denselben Gegenstand a exemplifiziert werden; warum soll man also nicht auch sagen, daß der Gegenstand a wiederholt vorkommt: bei der Universalie F_1, bei der Universalie F_2, ...? - Die Fähigkeit zum wiederholten Vorkommen ist demnach nicht dazu geeignet, Gegenstände von Universalien zu unterscheiden.

Die terminologische Anlehnung an Frege darf aber nicht darüber hinwegtäuschen , daß die Theorie, die hier entwickelt wird, wesentlich von Frege abweicht. Universalien sind *hier* keine Funktionen wie bei Frege; ihre Sättigungen sind Sachverhalte, und nicht etwa Wahrheitswerte wie bei Frege. (Zu Freges Lehre siehe F. v. Kutschera, *Gottlob Frege*, S. 90f.) Unsere Konzeption berührt sich vielmehr stärker mit der von Wittgenstein (was insbesondere später deutlich werden wird, wenn der Sättigungsoperator jede beliebige endliche Stellenzahl annehmen kann): "Der Sachverhalt ist eine Verbindung von Gegenständen (Sachen, Dingen)." (*Tractatus logico-philosophicus*, 2.01), "Im Sachverhalt hängen die Gegenstände ineinander, wie die Glieder einer Kette." (ebd., 2.03). Hierbei ist das Ergebnis zu beachten, zu dem E. Stenius in *Wittgensteins Traktat*, S. 86 kommt: "Wittgenstein zählt als `Dinge' nicht nur individuelle Gegenstände, sondern auch Prädikate mit verschiedenen Stellenzahlen." (wobei "Prädikat" für Stenius nicht eine sprachliche, sondern eine ontologische Kategorie ist, nämlich die der Eigenschaften und Relationen von Individuen; siehe ebd., S. 37).

3. Die Teilbeziehung zwischen monadischen Attributen 1. Stufe; Eigenschaftsprinzipien

(a) Die Teilbeziehung zwischen Eigenschaften läßt sich wie folgt definieren:

DT_Z41 $\varphi T^{\langle 0 \rangle} \varphi' := Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$ u. $Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi')$ u. $\wedge x((\varphi,x)T(\varphi',x))$

Nach DT_Z41 ist φ Teileigenschaft von φ' genau dann, wenn φ und φ' Eigenschaften sind, so daß für alle Entitäten x des Grundbereichs gilt, daß die Sättigung von φ mit x Teilsachverhalt der Sättigung von φ' mit x ist. Statt $\wedge x((\varphi,x)T(\varphi',x))$ kann man gemäß TT_Z146 im Definiens auch $\wedge x(Z^0(x)$ imp. $(\varphi,x)T(\varphi',x))$ setzen.

Mit DT_Z41 folgen drei Theoreme, die AT_Z0 - AT_Z2 entsprechen:

TT_Z151 $\wedge f \wedge g(fT^{\langle 0 \rangle}g$ imp. $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0 \rangle}(g))$
(abhängig von DT_Z41)

TT_Z152 $\wedge f \wedge g \wedge h(fT^{\langle 0 \rangle}g$ u. $gT^{\langle 0 \rangle}h$ imp. $fT^{\langle 0 \rangle}h)$

Beweis: Ang. $fT^{\langle 0 \rangle}g$ u. $gT^{\langle 0 \rangle}h$, also nach DT_Z41 $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0 \rangle}(h)$ u. $\wedge x((f,x)T(g,x))$ u. $\wedge x((g,x)T(h,x))$, also $\wedge x((f,x)T(g,x)$ u. $(g,x)T(h,x))$, also gemäß AT_Z1 $\wedge x((f,x)T(h,x))$; also nach DT_Z41 $fT^{\langle 0 \rangle}h$.

TT_Z153 $\wedge f(Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ imp. $fT^{\langle 0 \rangle}f)$

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$; gemäß TT_Z145 $Z^1((f,x))$, also gemäß AT_Z2 $(f,x)T(f,x)$; demnach $\wedge x((f,x)T(f,x))$, also gemäß DT_Z41 $fT^{\langle 0 \rangle}f$.

(b) Das AT_Z3 entsprechende Eigenschaftsprinzip läßt sich mithilfe von DT_Z41 beweisen: aufgrund des *Identitätsaxioms für Eigenschaften*:

AT_Z19 $\wedge f \wedge g(Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0 \rangle}(g)$ u. $\wedge x((f,x)=(g,x))$ imp. $f=g)$

Nach AT_Z19 sind Eigenschaften f und g identisch, wenn für jede

Entität x des Grundbereichs gilt, daß die Sättigung von f mit x identisch ist mit der Sättigung von g mit x; mit anderen Worten, Eigenschaften sind identisch, wenn sie zu denselben Sachverhalten ergänzt werden.[1] - Das AT_Z3 entsprechende Eigenschaftsprinzip

TT_Z154 $\quad \Lambda f \Lambda g(fT^{\langle o \rangle}g$ u. $gT^{\langle o \rangle}f$ imp. $f=g)$

zeigt man nun wie folgt: Ang. $fT^{\langle o \rangle}g$ u. $gT^{\langle o \rangle}f$, also nach DT_Z41 $Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\Lambda x((f,x)T(g,x))$ u. $\Lambda x((g,x)T(f,x))$, also nach AT_Z3 $\Lambda x((f,x)=(g,x))$, also nach AT_Z19 f=g.

Umgekehrt ergibt sich AT_Z19 aus TT_Z154: Ang. $Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\Lambda x((f,x)=(g,x))$; also, da $\Lambda x((f,x)T(f,x))$ gemäß TT_Z145 und AT_Z2, $\Lambda x((f,x)T(g,x))$ u. $\Lambda x((g,x)T(f,x))$, also nach DT_Z41 $fT^{\langle o \rangle}g$ u. $gT^{\langle o \rangle}f$, also nach TT_Z154 f=g.

(c) Auch das AT_Z4 entsprechende Eigenschaftsprinzip

TT_Z155 $\quad Vh(Z^{\langle o \rangle}(h)$ u. $\Lambda f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. A[f] imp. $fT^{\langle o \rangle}h)$ u.
$\Lambda g(Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\Lambda f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. A[f] imp. $fT^{\langle o \rangle}g)$ imp.
$hT^{\langle o \rangle}g))$

läßt sich beweisen: (i) Ang. $Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. A[f]; ang. $Z^{0}(z)$; also $Vk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. (f,z)=(k,z)); $Z^{1}((f,z))$ gemäß AT_Z14; also $(f,z)TUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,z)) gemäß

TT_Z18: $\Lambda x(Z^{1}(x)$ u. A[x] imp. xTUzA[z]) u. $\Lambda y(Z^{1}(y)$ u. $\Lambda x(Z^{1}(x)$ u. A[x] imp. xTy) imp. UzA[z]Ty) u. $Z^{1}(UzA[z])$;

$Z^{1}(UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,z))); also, da $Z^{0}(z)$, gemäß AT_Z16 $(\lambda oUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,o)),z)=$UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,z)); demnach aus der 1. Annahme $\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)T(\lambda oUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,o)),z)); gemäß TT_Z143 $Z^{\langle o \rangle}(\lambda oUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,o))); also nach TT_Z146, DT_Z41 wegen $Z^{\langle o \rangle}(f)$ $fT^{\langle o \rangle}\lambda oUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,o));
mit (i) ist gezeigt $\Lambda f[Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. A[f] imp. $fT^{\langle o \rangle}\lambda oUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,o))] u. $Z^{\langle o \rangle}(\lambda oUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. y=(k,o)));
(ii) ang. *$Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\Lambda f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. A[f] imp. $fT^{\langle o \rangle}g)$*; zu zeigen ist $\lambda oUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. A[k] u. $y=(k,o))T^{\langle o \rangle}g$; dazu ist gemäß DT_Z41

nur noch zu zeigen $\Lambda z((\iota o UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o)),z)T(g,z))$; ang. $Z^{0}(z)$;
nach TT_Z18 gilt (x) $\Lambda y'(Z^{1}(y')$ u. $\Lambda x(Z^{1}(x)$ u. $Vk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $x=(k,z))$ imp. $xTy')$ imp. $UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))Ty')$;
nun (xx) $Z^{1}((g,z))$ nach AT_Z14;
und ang. $Z^{1}(x)$ u. $Vk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $x=(k,z))$; folglich $kT^{\langle o \rangle}g$ nach der *1. Annahme*, also nach DT_Z41 $(k,z)T(g,z)$; also $xT(g,z)$; demnach (xxx) $\Lambda x(Z^{1}(x)$ u. $Vk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $x=(k,z))$ imp. $xT(g,z))$;
aus (x), (xx), (xxx) $UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))T(g,z)$; also nach AT_Z16 $\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(\iota o UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o)),z)T(g,z))$, daraus nach TT_Z146 das Gewünschte;
mit (ii) ist gezeigt $\Lambda g(Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\Lambda f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle o \rangle}g)$ imp. $\iota o UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o))T^{\langle o \rangle}g)$;
mit (i) und (ii) ist TT_Z155 gezeigt.

(d) Aus TT_Z155 und TT_Z154 ergibt sich die Verschärfung von TT_Z155 zu V!h(...), wodurch die DT_Z17 entsprechende Definition

DT_Z42 $\quad U^{\langle o \rangle}fA[f] := \iota h(Z^{\langle o \rangle}(h)$ u. $\Lambda f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle o \rangle}h)$ u. $\Lambda g(Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\Lambda f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle o \rangle}g)$ imp. $hT^{\langle o \rangle}g))$

gerechtfertigt ist. Es folgt gemäß des Beweises von TT_Z155 sofort

TT_Z156 $\quad U^{\langle o \rangle}fA[f]=\iota o UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o))$

Die Konjunktion der A-Eigenschaften wird gewonnen, indem man für einen gewissen Gegenstand die Konjunktion der mit ihm und den A-Eigenschaften bildbaren Sachverhalte bildet und dann aus dieser Konjunktion den Gegenstand extrahiert.

TT_Z157 $\quad \Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(U^{\langle o \rangle}fA[f],z)=UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z)))$

Beweis: Gemäß TT_Z156 gilt
$(U^{\langle o \rangle}fA[f],z)=(\iota o UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o)),z)$; also, falls $Z^{0}(z)$, nach AT_Z16
$(U^{\langle o \rangle}fA[f],z)=UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))$.

(Falls non $Z^{0}(z)$, nach $AT_{Z}15$ ($U^{\langle 0 \rangle}fA[f],z)=\underline{k}$; man kann aber nicht zeigen, daß dann auch $UyVk(Z^{\langle 0 \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))=\underline{k}$; dazu benötigt man die Zusatzannahme $Vk(Z^{\langle 0 \rangle}(k)$ u. $A[k]$).)

III., 3.: Teile von Eigenschaften

Anmerkungen:

[1]D. M. Armstrong schreibt in *Universals and Scientific Realism*, I, S.29: "Quine says the identity-conditions for classes are 'crystal-clear' while the identity-conditions for properties are 'obscure'." Man fragt sich: Was macht das mengentheoretische Extensionalitätsprinzip "kristallklar" und was $AT_{7}19$ z.B. "obskur"? Beide Prinzipien sind in präziser Weise mit Begriffen formuliert, von denen man nur das völlig präzise weiß, was in anderen sie betreffenden Axiomen in präziser Weise festgehalten ist. In dieser Hinsicht ist das eine so kristallklar (bzw. obskur) wie das andere. - Die Identitätsbedingungen für Klassen sind so klar wie die Identitätsbedingungen für ihre Elemente, die Identitätsbedingungen für Eigenschaften so klar wie die für Sachverhalte: Weder für Klassen noch für Eigenschaften ergibt sich aus ihren jeweiligen Identitätsprinzipien *absolute* Klarheit bzgl. ihrer Identität.

4. Spezielle Eigenschaften und Eigenschaftsfunktionen

(a) Mit TT_Z151 - TT_Z155 läßt sich im Gebiet der Eigenschaften dasselbe erreichen wie mit AT_Z0 - AT_Z4 im Gebiet der Sachverhalte. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß sich auch die AT_Z5 und AT_Z6 entsprechenden Eigenschaftsprinzipien beweisen lassen. Der Vorbereitung der Beweise dient dieses Kapitel.

Die Definitionen DT1 - DT39, wenn in ihren Definientia weder $\underline{w}$ noch durch $\underline{w}$ definierte Ausdrücke vorkommen, lassen sich für Eigenschaften systematisch umschreiben; nach folgendem Verfahren:

(i) Für "T" ist überall zu setzen "$T^{\langle o \rangle}$".
(ii) Die Definienda sind mit $\langle o \rangle$ zu indizieren.
(iii) Für $V\nu$, $\Lambda\nu$, $\iota\nu$ ist überall zu setzen $V\nu(Z^{\langle o \rangle}(\nu)$ *u. ...,* $\Lambda\nu(Z^{\langle o \rangle}(\nu)$ *imp. ...,* $\iota\nu(Z^{\langle o \rangle}(\nu)$ *u. ...*
(iv) Für Designatorsymbole "τ", "τ'" ... im Definiens einer Prädikatsdefinition füge man *u.* $Z^{\langle o \rangle}(\tau)$ *u.* $Z^{\langle o \rangle}(\tau')$ ... ans Definiens an.
(Die Wahl anderer Variablen und Designatorsymbole sowie Vereinfachungen stehen frei.)

Von diesem Verfahren haben wir im Fall von DT_Z42 schon Gebrauch gemacht und werden wir bei Bedarf Gebrauch machen, z.B. jetzt:

DT_Z43 $\quad \underline{k}^{\langle o \rangle} := \iota y(Z^{\langle o \rangle}(y)$ u. $\Lambda x(Z^{\langle o \rangle}(x)$ imp. $xT^{\langle o \rangle}y))$

In vollkommener Analogie dazu, wie man $\underline{k}=Ux(x=x)$ zeigt, zeigt man $\underline{k}^{\langle o \rangle}=U^{\langle o \rangle}f(f=f)$ ("Die absolut maximale Eigenschaft ist die Konjunktion aller Eigenschaften"). - Es gilt

TT_Z158 $\quad Z_K^{\langle o \rangle}(\underline{k}^{\langle o \rangle})$
(*Das Eigenschaftsmaximum ist eine kontradiktorische Eigenschaft*)

Aber bevor wir das beweisen, führen wir einen neuen Begriff ein:

DT_Z44 $\quad b(\tau) := \iota o Ux(x=\tau$ u. $o=o)$
(der Eigenbegriff von τ)

Es gilt

TT_Z159 $\quad \Lambda x(Z^1(x) \text{ imp. } \Lambda z(Z^0(z) \text{ imp. } (b(x),z)=x))$
(Ist x ein Sachverhalt, so ist die Sättigung des Eigenbegriffs von x mit irgendeinem Gegenstand x)

Beweis: Ang. $Z^1(x)$, $Z^0(z)$; $Z^1(Uy(y=x \text{ u. } z=z))$; also nach AT_Z16 $(\lambda o Uy(y=x \text{ u. } o=o),z)=Uy(y=x \text{ u. } z=z)$; nun gilt aber $Uy(y=x \text{ u. } z=z)$ $=Uy(y=x)=x$ gemäß TT_Z29, TT_Z33 $[Z^1(x)]$; demnach mit DT_Z44 $(b(x),z)=x$.

Mit TT_Z159 folgt

TT_Z160 $\quad \Lambda z((b(\underline{k}),z)=\underline{k})$

Beweis: Da $Z^1(\underline{k})$, ergibt sich aus TT_Z159 $\Lambda z(Z^0(z) \text{ imp. } (b(\underline{k}),z)=\underline{k})$; wegen AT_Z15 gilt auch $\Lambda z(\text{non } Z^0(z) \text{ imp. } (b(\underline{k}),z)=\underline{k})$; demnach $\Lambda z((b(\underline{k}),z)=\underline{k})$.

Mit TT_Z160 folgt gemäß DT_Z40, da $Z^{\langle 0 \rangle}(b(\underline{k}))$ gemäß DT_Z44 und TT_Z143,

TT_Z161 $\quad Z_K^{\langle 0 \rangle}(b(\underline{k}))$
(Der Eigenbegriff des kontradiktorischen Sachverhaltes ist eine kontradiktorische Eigenschaft)

Weiterhin gilt

TT_Z162 $\quad b(\underline{k})=\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$

Beweis: Da $Z^{\langle 0 \rangle}(b(\underline{k}))$, gilt $b(\underline{k})T^{\langle 0 \rangle}\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$ (nach der Definition von $\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$); es gilt aber auch $\underline{k}^{\langle 0 \rangle}T^{\langle 0 \rangle}b(\underline{k})$ nach DT_Z41, denn $Z^{\langle 0 \rangle}(\underline{k}^{\langle 0 \rangle})$ u. $Z^{\langle 0 \rangle}(b(\underline{k}))$ u. $\Lambda z((\underline{k}^{\langle 0 \rangle},z)T(b(\underline{k}),z))$, denn $\Lambda z((\underline{k}^{\langle 0 \rangle},z)T\underline{k})$ nach TT_Z145 und $T(\underline{k})$, und $\Lambda z((b(\underline{k}),z)=\underline{k})$ (TT_Z160); aus $b(\underline{k})T^{\langle 0 \rangle}\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$ und $\underline{k}^{\langle 0 \rangle}T^{\langle 0 \rangle}b(\underline{k})$ folgt gemäß TT_Z154 $b(\underline{k})=\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$.

Aus TT_Z161 und TT_Z162 ergibt sich endlich TT_Z158. – Es gibt höchstens eine kontradiktorische Eigenschaft:

$TT_Z163 \quad \wedge f \wedge g(Z_K^{\langle o \rangle}(f) \text{ u. } Z_K^{\langle o \rangle}(g) \text{ imp. } f=g)$

Beweis: Ang. $Z_K^{\langle o \rangle}(f)$ u. $Z_K^{\langle o \rangle}(g)$, also $Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $\wedge z((f,z)=\underline{k})$ u. $Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\wedge z((g,z)=\underline{k})$ nach DT_Z40, also $\wedge z((f,z)=(g,z))$, also nach AT_Z19 f=g.

TT_Z158 und TT_Z163 besagen zusammen, daß es genau eine kontradiktorische Eigenschaft gibt und daß das Eigenschaftsmaximum diese ist.

(c) Das Pendant zu DT_Z40 ist

$DT_Z45 \quad Z_L^{\langle o \rangle}(\varphi) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi) \text{ u. } \wedge z(Z^0(z) \text{ imp. } (\varphi,z)=\underline{t})$

Gemäß DT_Z45 ist eine tautologische Eigenschaft eine Eigenschaft, deren Sättigung mit jedem beliebigen Gegenstand der tautologische Sachverhalt ist. Aus TT_Z159 folgt wegen $Z^1(\underline{t})$ und $Z^{\langle o \rangle}(b(\underline{t}))$ nach DT_Z45

$TT_Z164 \quad Z_L^{\langle o \rangle}(b(\underline{t}))$

(Der Eigenbegriff des tautologischen Sachverhaltes ist eine tautologische Eigenschaft)

Weiterhin gilt

$TT_Z165 \quad b(\underline{t})=\underline{t}^{\langle o \rangle}$

$\underline{t}^{\langle o \rangle}$ ist die absolut minimale Eigenschaft, das Eigenschaftsminimum, das wie folgt definiert ist:

$DT_Z46 \quad \underline{t}^{\langle o \rangle} := \iota y(Z^{\langle o \rangle}(y) \text{ u. } \wedge x(Z^{\langle o \rangle}(x) \text{ imp. } yT^{\langle o \rangle}x))$

Man beweist in Analogie zu $\underline{t}=Ux(x\neq x)$ leicht $\underline{t}^{\langle o \rangle}=U^{\langle o \rangle}f(f\neq f)$. – Der Beweis von TT_Z165 sieht so aus:

Wegen $Z^{\langle o \rangle}(b(\underline{t}))$ gilt $\underline{t}^{\langle o \rangle}T^{\langle o \rangle}b(\underline{t})$ (denn $\wedge x(Z^{\langle o \rangle}(x)$ imp. $\underline{t}^{\langle o \rangle}T^{\langle o \rangle}x))$; es gilt aber auch $b(\underline{t})T^{\langle o \rangle}\underline{t}^{\langle o \rangle}$ nach DT_Z41, denn $Z^{\langle o \rangle}(b(\underline{t}))$ u. $Z^{\langle o \rangle}(\underline{t}^{\langle o \rangle})$ u. $\wedge z((b(\underline{t}),z)T(\underline{t}^{\langle o \rangle},z))$, denn wenn $Z^0(z)$, dann nach TT_Z164, DT_Z45 $(b(\underline{t}),z)=\underline{t}$, also, da nach TT_Z145 $Z^1((\underline{t}^{\langle o \rangle},z))$, wegen $M(\underline{t})$ $(b(\underline{t}),z)T(\underline{t}^{\langle o \rangle},z)$;

demnach $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(b(\underline{t}),z)T(\underline{t}^{\langle 0\rangle},z))$, also nach $TT_{Z}146$
$\wedge z((b(\underline{t}),z)T(\underline{t}^{\langle 0\rangle},z))$;
aus $b(\underline{t})T^{\langle 0\rangle}\underline{t}^{\langle 0\rangle}$ u. $\underline{t}^{\langle 0\rangle}Tb(\underline{t})$ folgt gemäß $TT_{Z}154$ $b(\underline{t})=\underline{t}^{\langle 0\rangle}$.

Aus $TT_{Z}164$ und $TT_{Z}165$ ergibt sich

$TT_{Z}166$ $\quad Z_{L}^{\langle 0\rangle}(\underline{t}^{\langle 0\rangle})$
(Das Eigenschaftsminimum ist eine tautologische Eigenschaft)

Es gibt höchstens eine tautologische Eigenschaft:

$TT_{Z}167$ $\quad \wedge f\wedge g(Z_{L}^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z_{L}^{\langle 0\rangle}(g)$ imp. $f=g)$

Beweis: Ang. $Z_{L}^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z_{L}^{\langle 0\rangle}(g)$, also nach $DT_{Z}45$ $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t})$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(g,z)=\underline{t})$, also $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=(g,z))$, also nach $TT_{Z}146$ $\wedge z((f,z)=(g,z))$, also mit $AT_{Z}19$ $f=g$.

$TT_{Z}166$ und $TT_{Z}167$ besagen zusammen, daß es genau eine tautologische Eigenschaft gibt und daß das Eigenschaftsminimum diese ist.

(d) Es gilt

$TT_{Z}168$ $\quad$ (i) $\wedge x\wedge x'(x=x'$ imp. $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=\underline{k})$
(i') $\wedge x\wedge x'(x\neq x'$ imp. $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=\underline{t})$
(ii) $\wedge x\wedge x'(Uy(x=x'$u. $y=\underline{k})=\underline{k}$ imp. $x=x')$
(ii') $\wedge x\wedge x'(Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=\underline{t}$ imp. $x\neq x')$

Beweis: <u>Zu (i)</u>: ang. $x=x'$; nun $Z^{1}(\underline{k})$ u. $\underline{k}=\underline{k}$; also nach $TT_{Z}18$ $\underline{k}TUy(x=x'$ u. $y=\underline{k})$; wegen $T(\underline{k})$ $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})T\underline{k}$; also mit $AT_{Z}3$ $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=\underline{k}$;
<u>zu (i')</u>: ang. $x\neq x'$; also $\wedge y(x=x'$ u. $y=\underline{k}$ äqu. $y\neq y)$, also mit $TT_{Z}29$ $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=Uy(y\neq y)=\underline{t}$;
<u>zu (ii)</u>: ang. $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=\underline{k}$; ang. $x\neq x'$; also gemäß (i') $Uy(x=x'$u. $y=\underline{k})=\underline{t}$; also $\underline{t}=\underline{k}$, was im Widerspruch steht zu $TT_{Z}104$.
<u>zu (ii')</u>: ang. $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=\underline{t}$; ang. $x=x'$; also gemäß (i) $Uy(x=x'$ u. $y=\underline{k})=\underline{k}$; also $\underline{t}=\underline{k}$, was im Widerspruch steht zu $TT_{Z}104$.

Wir definieren:

$DT_Z 47$ $\quad v(\tau) := \lambda o Uy(o=\tau \text{ u. } y=\underline{k})$
(das Von-τ-verschieden-sein)

Mit $TT_Z 168$ und $DT_Z 47$ erhält man

$TT_Z 169$ $\quad$ (a) $\Lambda x \Lambda z'(Z^0(z') \text{ imp. } ((v(x),z')=\underline{t} \text{ äqu. } z' \neq x))$
(b) $\Lambda x \Lambda z'(Z^0(z') \text{ imp. } ((v(x),z')=\underline{k} \text{ äqu. } z'=x))$

Beweis: Ang. $Z^0(z')$; $Z^1(Uy(z'=x \text{ u. } y=\underline{k}))$ (nach $TT_Z 18$); also mit $AT_Z 16$ $(\lambda o Uy(o=x \text{ u. } y=\underline{k}),z')=Uy(z'=x \text{ u. } y=\underline{k})$, d.h. nach $DT_Z 47$ $(v(x),z')=Uy(z'=x \text{ u. } y=\underline{k})$; folglich: falls $z' \neq x$, nach (i') von $TT_Z 168$ $(v(x),z')=\underline{t}$; falls $(v(x),z')=\underline{t}$, nach (ii') von $TT_Z 168$ $z' \neq x$; falls $z'=x$, nach (i) von $TT_Z 168$ $(v(x),z')=\underline{k}$; falls $(v(x),z')=\underline{k}$, nach (ii) von $TT_Z 168$ $z'=x$.

(e) In Entsprechung zu $TT_Z 168$, $DT_Z 47$, $TT_Z 169$ haben wir

$TT_Z 170$ $\quad$ (i) $\Lambda x \Lambda x'(x=x' \text{ imp. } Uy(x \neq x' \text{ u. } y=\underline{k})=\underline{t})$
(i') $\Lambda x \Lambda x'(x \neq x' \text{ imp. } Uy(x \neq x' \text{ u. } y=\underline{k})=\underline{k})$
(ii) $\Lambda x \Lambda x'(Uy(x \neq x' \text{ u. } y=\underline{k})=\underline{t} \text{ imp. } x=x')$
(ii') $\Lambda x \Lambda x'(Uy(x \neq x' \text{ u. } y=\underline{k})=\underline{k} \text{ imp. } x \neq x')$

$DT_Z 48$ $\quad i(\tau) := \lambda o Uy(o \neq \tau \text{ u. } y=\underline{k})$
(das Mit-τ-identisch-sein)

$TT_Z 171$ $\quad$ (a) $\Lambda x \Lambda z'(Z^0(z') \text{ imp. } ((i(x),z')=\underline{t} \text{ äqu. } z'=x))$
(b) $\Lambda x \Lambda z'(Z^0(z') \text{ imp. } ((i(x),z')=\underline{k} \text{ äqu. } z' \neq x))$

5. Das Axiom der Eigenschaftsquanta; der Beweis des Erschöpfungs- und Verbindungsprinzips für Eigenschaften

(a) Zum Beweis der Erschöpfungsprinzips für Eigenschaften reichen die bisherigen Axiome zwar hin. Dennoch führen wir in diesem Zusammenhang das *Axiom der Eigenschaftsquanta* ein:

AT_Z20 $\quad \Lambda f(QA^{\langle 0\rangle}(f) \text{ imp. non } VzVz'(Z^0(z) \text{ u. } Z^0(z') \text{ u. } (f,z)\neq\underline{t} \text{ u. } (f,z')\neq\underline{t} \text{ u. } z\neq z'))$

Nach AT_Z20 ist f nur dann ein Eigenschaftsquantum, wenn für höchstens einen Gegenstand x die Sättigung von f mit x vom tautologischen Sachverhalt verschieden ist. Ein Eigenschaftsquantum ist eben eine weitgehend (aber - mit einer Ausnahme - nicht ganz) gehaltleere Eigenschaft. Dieser intuitive Hintergrund von AT_Z20 tritt deutlicher hervor in dem Theorem TT_Z174, das mit AT_Z20 beweisbar ist:

TT_Z174 $\quad \Lambda f[QA^{\langle 0\rangle}(f) \text{ imp. } \Lambda z(Z^0(z) \text{ imp. } (f,z)=\underline{t}) \text{ o. } Vz(Z^0(z) \text{ u. } (f,z)\neq\underline{t} \text{ u. } QA((f,z)) \text{ u. } \Lambda z'(Z^0(z') \text{ u. } z'\neq z \text{ imp. } (f,z')=\underline{t}))]$

(Für jedes Eigenschaftsquantum f gilt, daß entweder seine Sättigung mit einem beliebigen Gegenstand der tautologische Sachverhalt ist, oder aber es einen einzigen Gegenstand z gibt, so daß die Sättigung von f mit z nicht der tautologische Sachverhalt ist, wohl aber ein Sachverhaltsquantum)

Bevor wir TT_Z174 beweisen, beweisen wir:

TT_Z172 $\quad \Lambda f\Lambda z\Lambda y(Z^{\langle 0\rangle}(f) \text{ u. } Z^0(z) \text{ u. } yT(f,z) \text{ imp. } Vh(hT^{\langle 0\rangle}f \text{ u. } y=(h,z)))$

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^0(z)$ u. $yT(f,z)$, also nach AT_Z0 $Z^1((f,z))$ u. $Z^1(y)$, also nach AT_Z2 yTy; also nach TT_Z23 $yT((f,z)vy)$; also nach TT_Z26 $((f,z)vy)Ty$; also nach AT_Z3 $y=((f,z)vy)$; also nach AT_Z16 $\underline{y=(\lambda o((f,o)vy),z)}$; $\underline{\lambda o((f,o)vy)T^{\langle 0\rangle}f}$ nach DT_Z41 und TT_Z146, denn $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o((f,o)vy))$

u. $Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $\Lambda z'(Z^0(z')$ imp. $(\imath o((f,o)vy),z')T(f,z'))$:
ang. $Z^0(z')$, also, da $Z^1(((f,z')vy))$, nach AT_Z16
$(\imath o((f,o)vy),z')=((f,z')vy)$; nun $((f,z')vy)T(f,z')$ nach TT_Z26
$[Z^1((f,z'))$, also nach AT_Z2 $(f,z')T(f,z')]$; also
$(\imath o((f,o)vy),z')T(f,z')$.

TT_Z172 besagt, daß wenn y Teilsachverhalt der Sättigung einer Eigenschaft f mit einem Gegenstand z ist, es eine Teileigenschaft h von f gibt, so daß y die Sättigung von h mit z ist.

TT_Z173 $\Lambda f(QA^{\langle o \rangle}(f)$ imp. $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $QA((f,z))))$
(Die Sättigung eines Eigenschaftsquantums mit einem beliebigen Gegenstand ist ein Sachverhaltsquantum)

Beweis: Ang. $QA^{\langle o \rangle}(f)$, $Z^0(z)$; zu zeigen ist $QA((f,z))$, d.h. nach DT_Z6 $\Lambda y(yT(f,z)$ imp. $y=(f,z)$ o. $M(y))$ u. $Z^1((f,z))$; $Z^1((f,z))$ gemäß Annahme und AT_Z14; ang. $yT(f,z)$ u. non $M(y)$, also nach TT_Z172 $Vh(hT^{\langle o \rangle}f$ u. $y=(h,z))$; nach der zu DT_Z6 parallelen Definition für Eigenschaften besagt $QA^{\langle o \rangle}(f)$
$\Lambda h(hT^{\langle o \rangle}f$ imp. $h=f$ o. $M^{\langle o \rangle}(h))$ u. $Z^{\langle o \rangle}$; demnach $h=f$ o. $M^{\langle o \rangle}(h)$;
wenn $M^{\langle o \rangle}(h)$, dann $h=\underline{t}^{\langle o \rangle}$ nach dem zu TT_Z32 parallelen Theorem für Eigenschaften (von dem wir bereits Gebrauch machen dürfen), also nach TT_Z166 $Z_L^{\langle o \rangle}(h)$, also gemäß DT_Z45 $(h,z)=\underline{t}$, also $y=\underline{t}$, also gemäß TT_Z32 $M(y)$ - was der Annahme widerspricht; also non $M^{\langle o \rangle}(h)$; also $h=f$, also $(h,z)=(f,z)$; also $y=(f,z)$.

TT_Z174 ergibt sich jetzt aus AT_Z20 und TT_Z173:

Ang. $QA^{\langle o \rangle}(f)$, also nach AT_Z20 $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t})$ o. $Vz(Z^0(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{t}$ u. $\Lambda z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{t}))$, also nach TT_Z173 $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t})$ o. $Vz(Z^0(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{t}$ u. $QA((f,z))$ u. $\Lambda z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{t}))$.

Aus TT_Z174 ergibt sich umgekehrt AT_Z20.

(b) Die Gültigkeit von AT_Z20 zeigt klar die folgende Überlegung, die sich auf die Voraussetzung stützt, daß man zu einer gegebenen Eigenschaft die Eigenschaft bilden kann, die mit ihr bis auf die Sättigung mit einem gewissen Gegenstand übereinstimmt, deren Sättigung mit diesem Gegenstand aber ein bestimmter anderer Sachverhalt ist:

Angenommen $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $\vee z \vee z'(Z^{0}(z)$ u. $Z^{0}(z')$ u. $(f,z)\neq\underline{t}$ u. $(f,z')\neq\underline{t}$ u. $z\neq z')$; man betrachte g, von dem gelte: $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $\wedge y(Z^{0}(y)$ u. $y\neq z$ imp. $(g,y)=(f,y))$ u. $(g,z)=\underline{t}$;
es folgt: *$gT^{\langle 0\rangle}f$* nach DT_Z41 und TT_Z146, denn $\wedge y(Z^{0}(y)$ imp. $(g,y)T(f,y))$: ang. $Z^{0}(y)$; wenn $y\neq z$, dann $(g,y)=(f,y)$, also $(g,y)T(f,y)$ wegen $Z^{1}((f,y))$ (AT_Z14) und AT_Z2; wenn $y=z$, dann $(g,y)=\underline{t}$, also $(g,y)T(f,y)$ wegen $Z^{1}((f,y))$ und $M(\underline{t})$ (nach DT_Z4);
$g\neq f$, denn $(g,z)\neq(f,z)$;
non $M^{\langle 0\rangle}(g)$, denn sonst nach dem zu TT_Z32 parallelen Theorem für Eigenschaften $g=\underline{t}^{\langle 0\rangle}$, also nach TT_Z166 $Z_L^{\langle 0\rangle}(g)$, also gemäß DT_Z45 $(g,z')=\underline{t}$; da $Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$, $(g,z')=(f,z')$; also $(f,z')=\underline{t}$ – im Widerspruch zur Annahme;
aus dem kursiv Geschriebenen geht nach der zu DT_Z6 parallelen Definition für Eigenschaften non $QA^{\langle 0\rangle}(f)$ hervor; durch Kontraposition erhält man AT_Z20 (da $QA^{\langle 0\rangle}(f)$ $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ beinhaltet).

(c) Die (auf Eigenschaften eingeschränkte) Umkehrung von TT_Z174 läßt sich schon aufgrund von AT_Z19 beweisen:

TT_Z175 $\wedge f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $(\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t})$ o. $\vee z(Z^{0}(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{t}$ u. $QA((f,z))$ u. $\wedge z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{t})))$ imp. $QA^{\langle 0\rangle}(f))$
(Eine Eigenschaft, deren Sättigung mit einem beliebigen Gegenstand der tautologische Sachverhalt ist, oder aber mit einem einzigen Gegenstand nicht der tautologische Sachverhalt ist, wohl aber ein Sachverhaltsquantum, ist ein Eigenschaftsquantum)

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$; ang. $gT^{\langle 0\rangle}f$;
($\underline{x}$) $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t})$, also $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)T(g,z))$, denn $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $\underline{t}T(g,z))$ wegen TT_Z151, AT_Z14, $\wedge y(Z^{1}(y)$ imp. $\underline{t}Ty)$; also nach TT_Z146 $\wedge z((f,z)T(g,z))$; wegen $gT^{\langle 0\rangle}f$ nach DT_Z41 $\wedge z((g,z)T(f,z))$; also nach AT_Z3 $\wedge z((g,z)=(f,z))$, also nach AT_Z19 $g=f$, also $g=f$ o. $M^{\langle 0\rangle}(g)$;
($\underline{xx}$) $\vee z(Z^{0}(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{t}$ u. $QA((f,z))$ u. $\wedge z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{t}))$; ang. $g\neq f$, also nach AT_Z19 $\vee x((g,x)\neq(f,x))$, also nach TT_Z146 $\vee x(Z^{0}(x)$ u. $(g,x)\neq(f,x))$, also nach AT_Z3 $\vee x(Z^{0}(x)$ u. (non $(g,x)T(f,x)$ o. non $(f,x)T(g,x)))$, also wegen $gT^{\langle 0\rangle}f$ nach DT_Z41 $\vee x(Z^{0}(x)$ u. non $(f,x)T(g,x))$; nun

x=z o. x≠z; falls x≠z, dann (f,x)=$\underline{t}$, also (f,x)T(g,x) gemäß TT_Z145, $\wedge$y(Z^1(y) imp. $\underline{t}$Ty) – Widerspruch; demnach x=z; also non (f,z)T(g,z); wegen QA((f,z)) u. (g,z)T(f,z) [g$T^{\langle o\rangle}$f] nach DT_Z6 (g,z)=(f,z) o. M((g,z)); wegen AT_Z2 und non (f,z)T(g,z) (g,z)≠(f,z); also M((g,z)), also nach TT_Z32 (g,z)=$\underline{t}$; außerdem $\wedge$z'(Z^0(z') u. z'≠z imp. (g,z')=$\underline{t}$): $\wedge$z'(Z^0(z') u. z'≠z imp. (f,z')=$\underline{t}$) u. $\wedge$z'((g,z')T(f,z')); demnach $\wedge$z'(Z^0(z') imp. (g,z')=$\underline{t}$), also $Z_L^{\langle o\rangle}$(g) nach DT_Z45, also nach TT_Z166, TT_Z167 g=$\underline{t}^{\langle o\rangle}$, also $M^{\langle o\rangle}$(g) nach dem zu TT_Z32 parallelen Theorem für Eigenschaften.

(d) Das Erschöpfungsprinzip für Eigenschaften

TT_Z176 $\wedge$f$\wedge$g($Z^{\langle o\rangle}$(f) u. $Z^{\langle o\rangle}$(g) u. $\wedge$h($QA^{\langle o\rangle}$(h) u. h$T^{\langle o\rangle}$f imp. h$T^{\langle o\rangle}$g) imp. f$T^{\langle o\rangle}$g)

beweist man unter Verwendung von TT_Z175 wie folgt: Ang. $Z^{\langle o\rangle}$(f), $Z^{\langle o\rangle}$(g), $\wedge$h($QA^{\langle o\rangle}$(h) u. h$T^{\langle o\rangle}$f imp. h$T^{\langle o\rangle}$g); ang. Z^0(z); zu zeigen ist (f,z)T(g,z), denn, wenn dies gezeigt ist, folgt aus den ersten Annahmen $\wedge$z(Z^0(z) imp. (f,z)T(g,z)), also nach TT_Z146, DT_Z41 f$T^{\langle o\rangle}$g;
ang. non (f,z)T(g,z), also nach AT_Z5 (da nach TT_Z145 sowohl (f,z) wie (g,z) Sachverhalte sind) $\vee$y(QA(y) u. yT(f,z) u. non yT(g,z)), also mit TT_Z159 (Z^1(y), Z^0(z))
$\vee$y(QA((b(y),z)) u. (b(y),z)T(f,z) u. non (b(y),z)T(g,z));
man betrachte λo'((b(y),o')v(v(z),o'));
es gilt:
($\underline{i}$) QA((λo'((b(y),o')v(v(z),o')),z)), denn wegen QA((b(y),z)) QA(((b(y),z)v$\underline{k}$)) gemäß TT_Z53, also QA(((b(y),z)v(v(z),z))), da (v(z),z)=$\underline{k}$ gemäß TT_Z169(b); nach AT_Z16 $\wedge$x'[Z^0(x') u. Z^1(((b(y),x')v(v(z),x'))) imp. (λo'((b(y),o')v(v(z),o')),x')= ((b(y),x')v(v(z),x'))]; also (λo'((b(y),o')v(v(z),o')),z)= ((b(y),z)v(v(z),z)); demnach das Gewünschte;
($\underline{ii}$) (λo'((b(y),o')v(v(z),o')),z)≠$\underline{t}$, denn wegen non (b(y),z)T(g,z) (b(y),z)≠$\underline{t}$ [Z^1((g,z)), $\wedge$k(Z^1(k) imp. $\underline{t}$Tk)], also ((b(y),z)v$\underline{k}$)≠$\underline{t}$ etc.;
($\underline{iii}$) $\wedge$z'(Z^0(z') u. z'≠z imp. (λo'((b(y),o')v(v(z),o')),z')=$\underline{t}$), denn ang. Z^0(z') u. z'≠z, also nach TT_Z169(a) (v(z),z')=$\underline{t}$, also ((b(y),z')v(v(z),z'))=$\underline{t}$ [((b(y),z')v(v(z),z'))T(v(z),z') nach

TT_Z26, AT_Z2; also ((b(y),z')v(v(z),z'))T$\underline{t}$; umgekehrt
$\underline{t}$T((b(y),z')v(v(z),z')); also nach AT_Z3 das Fragliche], also
nach AT_Z16 (℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')=$\underline{t}$;
da $Z^{\langle o\rangle}$(℩o'((b(y),o')v(v(z),o'))) gemäß TT_Z143, folgt aus
($\underline{i}$) - ($\underline{iii}$) nach TT_Z175 $\underline{QA^{\langle o\rangle}(\iota o'((b(y),o')v(v(z),o')))}$;
außerdem gilt $\underline{\iota o'((b(y),o')v(v(z),o'))T^{\langle o\rangle}f}$:
ang. Z^0(z'); gilt z'≠z, dann nach ($\underline{iii}$)
(℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')=$\underline{t}$, also
(℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')T(f,z');
gilt z'=z, dann
(℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')=(℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z)=
((b(y),z)v(v(z),z))=((b(y),z)v$\underline{k}$)=(b(y),z);
(b(y),z)T(f,z); also (℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')T(f,z');
demnach Λz'(Z^0(z') imp. (℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')T(f,z')),
also nach TT_Z146, DT_Z41 das Fragliche;
aus dem Unterstrichenen folgt gemäß Annahme
℩o'((b(y),o')v(v(z),o'))$T^{\langle o\rangle}$g, also nach DT_Z41
(℩o'((b(y),o')v(v(z),o')),z)T(g,z), also
(b(y),z)T(g,z) - Widerspruch;
folglich (f,z)T(g,z).

(e) Schließlich beweisen wir das Verbindungsprinzip für Eigenschaften

TT_Z177 Λf[f$T^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}$gA[g] u. non $M^{\langle o\rangle}$(f) imp.
Vh(h$T^{\langle o\rangle}$f u. non $M^{\langle o\rangle}$(h) u. Vk'(h$T^{\langle o\rangle}$k' u. A[k']))]

Beweis: Ang. f$T^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}$gA[g] u. non $M^{\langle o\rangle}$(f), also
Λz((f,z)T($U^{\langle o\rangle}$gA[g],z)) u. non $Z_L^{\langle o\rangle}$(f) nach DT_Z41, TT_Z166,
TT_Z167, $M^{\langle o\rangle}$($\underline{t}^{\langle o\rangle}$); also nach DT_Z45 [$Z^{\langle o\rangle}$(f) laut
Annahme und TT_Z151] Vz(Z^0(z) u. (f,z)T($U^{\langle o\rangle}$gA[g],z) u. (f,z)≠$\underline{t}$),
also nach TT_Z32 und TT_Z157
Vz($Z^{\langle o\rangle}$(z) u. (f,z)TUyVk'($Z^{\langle o\rangle}$(k') u. A[k'] u. y=(k',z)) u.
non M((f,z))), also mit AT_Z6
Vr(rT(f,z) u. non M(r) u. Vp(rTp u. Vk'($Z^{\langle o\rangle}$(k') u. A[k'] u.
p=(k',z)))), also
Vr(rT(f,z) u. non M(r) u. Vk'($Z^{\langle o\rangle}$(k') u. A[k'] u. rT(k',z)));
man betrachte ℩o'((b(r),o')v(v(z),o'));
es gilt:

($\underline{i}$) $\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o'))T^{\langle 0\rangle}f$, denn ang. $Z^{0}(z')$;
falls $z'\neq z$, so gilt nach der Argumentation im Beweis von TT_Z176, ($\underline{iii}$) $(\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o')),z')=\underline{t}$, also $(\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o')),z')T(f,z')$;
falls $z'=z$, so gilt wegen $r=(b(r),z)$ (nach TT_Z159, AT_Z0), $(b(r),z)=((b(r),z)v\underline{k})$ (TT_Z53), $((b(r),z)v\underline{k})=((b(r),z)v(v(z),z))$ [$T_Z169(b)$], $((b(r),z)v(v(z),z))=(\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o')),z)$ [AT_Z16] und wegen $\underline{rT(f,z)}$: $(\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o')),z')T(f,z')$;
nach TT_Z146, TT_Z143, DT_Z41, $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ ergibt sich das Fragliche;
($\underline{ii}$) $\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o'))T^{\langle 0\rangle}k'$; um dies zu zeigen, geht man wie unter ($\underline{i}$) vor, nur daß man statt $\underline{rT(f,z)}$ $\underline{rT(k',z)}$ verwendet und statt $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ $Z^{\langle 0\rangle}(k')$;
($\underline{iii}$) non $M^{\langle 0\rangle}(\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o')))$:
$(\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o')),z)\neq\underline{t}$, denn $r\neq\underline{t}$ nach TT_Z32, da non $M(r)$; also $\lambda o'((b(r),o')v(v(z),o'))\neq\underline{t}^{\langle 0\rangle}$, denn nach TT_Z166 $Z_L^{\langle 0\rangle}(\underline{t}^{\langle 0\rangle})$, also nach DT_Z45 $(\underline{t}^{\langle 0\rangle},z)=\underline{t}$; also nach dem zu TT_Z32 parallelen Theorem für Eigenschaften das Fragliche;
aus ($\underline{i}$), ($\underline{ii}$) und ($\underline{iii}$) ergibt sich
$Vh(hT^{\langle 0\rangle}f$ u. non $M^{\langle 0\rangle}(h)$ u. $Vk'(hT^{\langle 0\rangle}k'$ u. $A[k']))$.

(f) TT_Z151 - TT_Z155, TT_Z176, TT_Z177 sind die zu AT_Z0 - AT_Z6 parallelen Eigenschaftsprinzipien; damit ergibt sich, daß jedes Theorem, das allein aus AT_Z0 - AT_Z6 folgt (z.B. TT_Z1 - TT_Z94), eine Parallele für Eigenschaften hat. In Beweisen beziehen wir uns auf dieses Paralleltheorem mittels der Wendung "... das zu TT_Zn.n. parallele Theorem für Eigenschaften", kurz "ParTT_Zn.n."; wir brauchen es dann nicht mehr explizit anzuführen. Wie das Paralleltheorem für Eigenschaften aus dem Ausgangstheorem für Sachverhalte zu konstruieren ist, ist klar: "$Z^{\langle 0\rangle}$" statt "Z^{1}", "$T^{\langle 0\rangle}$" statt "T"; definierte Ausdrücke sind mit $\langle 0\rangle$ zu indizieren.

Die Umschreibung der Definitionen DT1 - DT39 (sofern nicht auf $\underline{w}$ Bezug nehmend) für Eigenschaften soll (bis auf die Wahl von Variablen und Designatorsymbolen) parallel zur Umschreibung von DT1 - DT39 in DT_Z1 - DT_Z39 erfolgen; statt von der Umschrift für Eigenschaften von DTn.n zu reden, können wir dann auch von der zu DT_Zn.n. parallelen Definition für Eigenschaften sprechen, kurz von ParDT_Zn.n.; meistens werden wir diese nicht explizit anführen.

6. Konjunktions- und extraktionsgebildete Eigenschaften

(a) In diesem Kapitel geht es um das Verhältnis zwischen $\neg^{\langle 0\rangle}f$ und $\lambda o\neg(f,o)$, $(f\wedge^{\langle 0\rangle}g)$ und $\lambda o((f,o)\wedge(g,o))$, $(f\vee^{\langle 0\rangle}g)$ und $\lambda o((f,o)\vee(g,o))$. Das jeweils erste Glied dieser drei Paare ist eine *konjunktionsgebildete* Eigenschaft, das jeweils zweite eine *extraktionsgebildete*. Ist das jeweils erste Glied vom jeweils zweiten verschieden? Oder sind die jeweiligen Glieder identisch (zumindest wenn f und g Eigenschaften sind)? – Vom intuitiven Standpunkt aus sollte letzteres der Fall sein.

(b)

TT_Z178 $\quad \Lambda f\Lambda g[Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ imp. $(f\wedge^{\langle 0\rangle}g)=\lambda o((f,o)\wedge(g,o))]$

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$; ang. $Z^{0}(z)$; zu zeigen ist
$((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z)=(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)),z)$; dann ergibt sich
$(f\wedge^{\langle 0\rangle}g)=\lambda o((f,o)\wedge(g,o))$ nach TT_Z146 und AT_Z19,
da $Z^{\langle 0\rangle}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)))$ nach $ParTT_Z18$, $ParTT_Z20$ und TT_Z143;
nach $ParTT_Z20$ $(f\wedge^{\langle 0\rangle}g)=U^{\langle 0\rangle}k(kT^{\langle 0\rangle}f$ o. $kT^{\langle 0\rangle}g)$, also nach TT_Z157
$((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z)=UyVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $(kT^{\langle 0\rangle}f$ o. $kT^{\langle 0\rangle}g)$ u. $y=(k,z))$;
nach TT_Z20 $[Z^{1}((f,z)),\ Z^{1}((g,z))]$
$((f,z)\wedge(g,z))=Uy(yT(f,z)$ o. $yT(g,z))$; also nach AT_Z16
$(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)),z)=Uy(yT(f,z)$ o. $yT(g,z))$;
wir zeigen
$UyVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $(kT^{\langle 0\rangle}f$ o. $kT^{\langle 0\rangle}g)$ u. $y=(k,z))=$
$Uy(yT(f,z)$ o. $yT(g,z))$;
(<u>i</u>) ang. $Vk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $(kT^{\langle 0\rangle}f$ o. $kT^{\langle 0\rangle}g)$ u. $y=(k,z))$, also gemäß DT_Z41 $yT(f,z)$ o. $yT(g,z)$;
(<u>ii</u>) ang. $yT(f,z)$ o. $yT(g,z)$; im ersten Fall folgt gemäß TT_Z172 $[Z^{\langle 0\rangle}(f),\ Z^{0}(z)]$ $Vk(kT^{\langle 0\rangle}f$ u. $y=(k,z))$; im zweiten Fall folgt $Vk(kT^{\langle 0\rangle}g$ u. $y=(k,z))$ gemäß TT_Z172 $[Z^{\langle 0\rangle}(g)]$; also aus der Annahme $Vk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $(kT^{\langle 0\rangle}f$ o. $kT^{\langle 0\rangle}g)$ u. $y=(k,z))$ (mit TT_Z151);
aus (<u>i</u>) und (<u>ii</u>) ergibt sich nach TT_Z29 das Gewünschte;
aus dem kursiv Geschriebenen folgt, was zu zeigen war.

(c)

TT_Z179 $\Lambda f \Lambda g[Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ imp. $(f v^{\langle 0\rangle} g)=\lambda o((f,o)v(g,o))]$

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$; ang. $Z^{0}(z)$; zu zeigen ist
$((fv^{\langle 0\rangle}g),z)=(\lambda o((f,o)v(g,o)),z)$;
nach ParTT_Z22 $(fv^{\langle 0\rangle}g)=U^{\langle 0\rangle}k(kT^{\langle 0\rangle}f$ u. $kT^{\langle 0\rangle}g)$; also nach TT_Z157
$((fv^{\langle 0\rangle}g),z)=UyVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $kT^{\langle 0\rangle}f$ u. $kT^{\langle 0\rangle}g$ u. $y=(k,z))$;
nach TT_Z22 $((f,z)v(g,z))=Uy(yT(f,z)$ u. $yT(g,z))$; also nach AT_Z16
$(\lambda o((f,o)v(g,o)),z)=Uy(yT(f,z)$ u. $yT(g,z))$;
wir zeigen
$UyVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $kT^{\langle 0\rangle}f$ u. $kT^{\langle 0\rangle}g$ u. $y=(k,z))=$
$Uy(yT(f,z)$ u. $yT(g,z))$;
(<u>i</u>) ang. $Vk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $kT^{\langle 0\rangle}f$ u. $kT^{\langle 0\rangle}g$ u. $y=(k,z))$, also
gemäß DT_Z41 $yT(f,z)$ u. $yT(g,z)$;
(<u>ii</u>) ang. $yT(f,z)$ u. $yT(g,z)$; man betrachte
$\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o'))$;
(<u>x</u>) $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')))$ nach TT_Z143;
(<u>xx</u>) $\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o'))T^{\langle 0\rangle}f$: ang. $Z^{0}(z')$;
<u>falls</u> <u>$z'=z$</u>, dann $(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')=$
$(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')),z)=((b(y),z)v(v(z),z))=((b(y),z)v\underline{k})=$
$(b(y),z)=y$ [AT_Z16, TT_Z169(b), TT_Z53, TT_Z159 - $Z^{1}(y)$ nach AT_Z0,
da $yT(f,z)$]; also wegen $yT(f,z)$
$(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')T(f,z')$;
<u>falls</u> <u>$z'\neq z$</u>, dann $(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')=$
$((b(y),z')v(v(z),z'))=((b(y),z')v\underline{t})=\underline{t}$ [AT_Z16, TT_Z169(a) etc.],
also wegen $\underline{t}T(f,z')$ $(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')),z')T(f,z'))$;
nach TT_Z146, DT_Z41 das Fragliche;
(<u>xxx</u>) $\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o'))T^{\langle 0\rangle}g$: um dies zu zeigen geht man
wie unter (<u>xx</u>) vor;
(<u>xxxx</u>) $y=(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')),z)$: dazu siehe unter (<u>xx</u>);
demnach $Vk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $kT^{\langle 0\rangle}f$ u. $kT^{\langle 0\rangle}g$ u. $y=(k,z))$;
aus (<u>i</u>) und (<u>ii</u>) ergibt sich nach TT_Z29 das Gewünschte;
aus dem kursiv Geschriebenen folgt, was zu zeigen war.

(d)

TT_Z180 $\Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ imp. $\neg^{\langle 0\rangle}f=\lambda o\neg(f,o))$

Beweis: Ang. $Z^{\langle o \rangle}(f)$; ang. $Z^{o}(z)$; zu zeigen ist
$(\neg^{\langle o \rangle} f,z)=(\lambda o \neg(f,o),z)$;
nach ParTT$_Z$50, ParTT$_Z$52 $\neg^{\langle o \rangle} f=U^{\langle o \rangle} k(QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. non $kT^{\langle o \rangle} f)$;
also nach TT$_Z$157
$(\neg^{\langle o \rangle} f,z)=UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. non $kT^{\langle o \rangle} f$ u. $y=(k,z))$;
nach TT$_Z$50, TT$_Z$52 $\neg(f,z)=Uy(QA(y)$ u. non $yT(f,z))$; also nach
AT$_Z$16 *$(\lambda o \neg(f,o),z)=Uy(QA(y)$ u. non $yT(f,z))$;*
wir zeigen
$UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. non $kT^{\langle o \rangle} f$ u. $y=(k,z))=$
$Uy(QA(y)$ u. non $yT(f,z))$
(i) wir operieren mit AT$_Z$5 und TT$_Z$40; ang. $QA(p)$ u.
$pTUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. non $kT^{\langle o \rangle} f$ u. $y=(k,z))$;
falls $M(p)$, dann $pTUy(QA(y)$ u. non $yT(f,z))$;
falls non $M(p)$, dann nach TT$_Z$40
$Vr(pTr$ u. $Vk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. non $kT^{\langle o \rangle} f$ u. $r=(k,z)))$,
also $VrVk(pTr$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. $Vz'(Z^{o}(z')$ u. non $(k,z')T(f,z'))$ u.
$r=(k,z))$ gemäß DT$_Z$41 und TT$_Z$146, also gemäß TT$_Z$174
$VrVkVz'(pTr$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. $Z^{o}(z')$ u. non $(k,z')T(f,z')$ u.
$QA((k,z'))$ u. $\Lambda z''(Z^{o}(z'')$ u. $z'' \neq z'$ imp. $(k,z'')=\underline{t})$ u. $r=(k,z))$
[aus non $(k,z')T(f,z')$ folgt $(k,z') \neq \underline{t}$];
falls $z \neq z'$, dann $(k,z)=\underline{t}$, also $r=\underline{t}$ [da $r=(k,z)$], also $p=\underline{t}$
[da pTr, $\underline{t}Tp$, AT$_Z$3], also $M(p)$ [nach TT$_Z$32] – im Widerspruch
zur Annahme;
demnach $z=z'$, also $QA((k,z))$ u. non $(k,z)T(f,z)$, also
$QA(r)$ u. non $rT(f,z)$, also mit TT$_Z$18 $rTUy(QA(y)$ u. non $yT(f,z))$,
also $pTUy(QA(y)$ u. non $yT(f,z))$ wegen pTr mit AT$_Z$1;
es folgt also wegen AT$_Z$5
$UyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. non $kT^{\langle o \rangle} f$ u. $y=(k,z))TUy(QA(y)$ u.
non $yT(f,z))$;
(ii) ang. $QA(y)$ u. non $yT(f,z)$; man betrachte
$\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o'))$;
man erhält (vergl. den Beweis von TT$_Z$176)
$\underline{Z^{\langle o \rangle}(\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o')))}$ u. $Z^{o}(z)$ u.
$(\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o')),z) \neq \underline{t}$ u.
$QA((\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o')),z))$ u. $\Lambda z'(Z^{o}(z')$ u. $z' \neq z$ imp.
$(\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o')),z')=\underline{t})$; also ergibt sich mit TT$_Z$175
$\underline{QA^{\langle o \rangle}(\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o')))}$;
außerdem non $\underline{\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o'))T^{\langle o \rangle} f}$, denn
non $(\lambda o'((b(y),o') v (v(z),o')),z)T(f,z)$, denn

$\underline{y=(\lambda o'((b(y),o')v(v(z),o')),z)}$ und non $yT(f,z)$;
nach dem Unterstrichenen folgt also
$Vk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u. non $kT^{\langle o \rangle}f$ u. $y=(k,z))$;
nach TT_Z28 hat man also
$Uy(QA(y)$ u. non $yT(f,z))TUyVk(Z^{\langle o \rangle}(k)$ u. $QA^{\langle o \rangle}(k)$ u.
non $kT^{\langle o \rangle}f$ u. $y=(k,z))$;
aus ($\underline{i}$) und ($\underline{ii}$) ergibt sich mit AT_Z3 das Gewünschte;
was zu zeigen war, ist damit gezeigt.

7. Essentielle und akzidentelle Eigenschaften

(a) Essentielle und akzidentelle Eigenschaften lassen sich folgendermaßen unterscheiden:

DT_Z49 $Z_E^{\langle 0 \rangle}(\varphi) := Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(\varphi,z)=\underline{t}$ o. $(\varphi,z)=\underline{k})$
(φ ist eine essentielle Eigenschaft)

DT_Z50 $Z_A^{\langle 0 \rangle}(\varphi) := Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(\varphi,z)\neq\underline{t}$ u. $(\varphi,z)\neq\underline{k})$
(φ ist eine akzidentelle Eigenschaft)

Nach DT_Z49 ist eine essentielle Eigenschaft eine Eigenschaft, deren Sättigung mit einem beliebigen Gegenstand entweder der kontradiktorische oder der tautologische Sachverhalt ist. In diesem Sinne sind $\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$, $\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$, v(x) und i(x) (x sei irgendein Gegenstand) essentielle Eigenschaften. - Nach DT_Z50 ist eine akzidentelle Eigenschaft eine Eigenschaft, deren Sättigung mit einem beliebigen Gegenstand weder der kontradiktorische noch der tautologische Sachverhalt ist. Eine akzidentelle Eigenschaft gibt es genau dann, wenn es einen kontingenten Sachverhalt gibt:

TT_Z181 $\vee f Z_A^{\langle 0 \rangle}(f)$ äqu. $\vee y(Z^1(y)$ u. $y\neq\underline{t}$ u. $y\neq\underline{k})$

Beweis: (i) Ang. $\vee f Z_A^{\langle 0 \rangle}(f)$, also gemäß DT_Z50
$\vee f(Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)\neq\underline{t}$ u. $(f,z)\neq\underline{k}))$,
also mit AT_Z13 $\vee f \vee z((f,z)\neq\underline{t}$ u. $(f,z)\neq\underline{k})$, also mit TT_Z145
$\vee y(Z^1(y)$ u. $y\neq\underline{t}$ u. $y\neq\underline{k})$,
(ii) ang. $\vee y(Z^1(y)$ u. $y\neq\underline{t}$ u. $y\neq\underline{k})$, also mit TT_Z159
$\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(b(y),z)=y)$, also
$\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(b(y),z)\neq\underline{t}$ u. $(b(y),z)\neq\underline{k})$, also mit TT_Z143, DT_Z44
$Z^{\langle 0 \rangle}(b(y))$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(b(y),z)\neq\underline{t}$ u. $(b(y),z)\neq\underline{k})$, also mit
DT_Z50 $Z_A^{\langle 0 \rangle}(b(y))$, also $\vee f Z_A^{\langle 0 \rangle}(f)$.

Gemäß der Argumentation unter (ii) im vorausgehenden Beweis ergibt sich wegen $Z^1(\underline{w})$ u. $\underline{w}\neq\underline{t}$ u. $\underline{w}\neq\underline{k}$ (AT_Z7, AT_Z8, AT_Z9)

TT_Z182 $Z_A^{\langle 0 \rangle}(b(\underline{w}))$
(*Der Eigenbegriff der Welt ist eine akzidentelle*

Eigenschaft)

(b) Weiterhin gilt:

TT_Z183 $\wedge f(Z^{\langle o \rangle}(f))$ imp. $Z_E^{\langle o \rangle}(f)$ äqu. $\wedge y(Z^1(y)$ imp. $y=\underline{t}$ o. $y=\underline{k})$
(Jede Eigenschaft ist eine essentielle Eigenschaft genau dann, wenn es keine kontingenten Sachverhalte gibt)

Beweis: (i) Ang. $\wedge f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ imp. $Z_E^{\langle o \rangle}(f))$,
ang. $Z^1(y)$; $Z^{\langle o \rangle}(b(y))$ nach TT_Z143, DT_Z44; also $Z_E^{\langle o \rangle}(b(y))$,
also gemäß DT_Z49 $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(b(y),z)=\underline{t}$ o. $(b(y),z)=\underline{k})$, also
mit AT_Z13 $\vee z(Z^0(z)$ u. $((b(y),z)=\underline{t}$ o. $(b(y),z)=\underline{k}))$, also mit
TT_Z159 $y=\underline{t}$ o. $y=\underline{k}$;
(ii) ang. $\wedge y(Z^1(y)$ imp. $y=\underline{t}$ o. $y=\underline{k})$, ang. $Z^{\langle o \rangle}(f)$, ang. $Z^0(z)$;
zu zeigen ist gemäß DT_Z49 $(f,z)=\underline{t}$ o. $(f,z)=\underline{k}$; das ergibt sich
aus $Z^{\langle o \rangle}(f)$, $Z^0(z)$, AT_Z14 und der 1. Annahme.

TT_Z184 $\wedge f(Z^{\langle o \rangle}(f)$ imp. $Z_E^{\langle o \rangle}(f))$ äqu. non $\vee f Z_A^{\langle o \rangle}(f)$
(abhängig von TT_Z181, TT_Z183)

Nach TT_Z184 sind genau dann alle Eigenschaften essentielle Eigenschaften, wenn es keine akzidentellen Eigenschaften gibt. Das bedeutet aber nicht, daß alle Eigenschaften entweder essentiell oder akzidentell sind, was nicht der Fall ist, wie wir sehen werden. Denn es gilt:

TT_Z185 $\wedge f \wedge g[Z_E^{\langle o \rangle}(f)$ u. non $Z_K^{\langle o \rangle}(f)$ u. non $Z_L^{\langle o \rangle}(f)$ u. $Z_A^{\langle o \rangle}(g)$
imp. non $Z_E^{\langle o \rangle}((f\wedge^{\langle o \rangle}g))$ u. non $Z_A^{\langle o \rangle}((f\wedge^{\langle o \rangle}g))]$
(Die Konjunktion einer essentiellen, aber weder kontradiktorischen noch tautologischen Eigenschaft und einer akzidentellen Eigenschaft ist eine weder essentielle noch akzidentelle Eigenschaft)

Beweis: Ang. $Z_E^{\langle o \rangle}(f)$ u. non $Z_K^{\langle o \rangle}(f)$ u. non $Z_L^{\langle o \rangle}(f)$ u. $Z_A^{\langle o \rangle}(g)$,
also $Z^{\langle o \rangle}(f)$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t}$ o. $(f,z)=\underline{k})$ u.
$\vee z'(Z^0(z')$ u. $(f,z')\neq\underline{t})$ u. $\vee z''(Z^0(z'')$ u. $(f,z'')\neq\underline{k})$ u.
$Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(g,z)\neq\underline{t}$ u. $(g,z)\neq\underline{k})$ mit DT_Z49, DT_Z45,
DT_Z40, AT_Z15, DT_Z50; man betrachte z' und z'';
$(f,z')\neq\underline{t}$, also $(f,z')=\underline{k}$, also $((f,z')\wedge(g,z'))=\underline{k}$

[denn $(\underline{k}\wedge(g,z'))=\underline{k}$, denn AT_Z3, $(\underline{k}\wedge(g,z'))T\underline{k}$ und $\underline{k}T(\underline{k}\wedge(g,z'))$ gemäß TT_Z25, AT_Z2, TT_Z145], also gemäß AT_Z16 $(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)),z')=\underline{k}$, also mit TT_Z178 $((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z')=\underline{k}$; demnach $Vz'(Z^0(z')$ u. $((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z')=\underline{k})$, also nach DT_Z50 *non* $Z_A^{\langle 0\rangle}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))$;
$(f,z'')\neq\underline{k}$, also $(f,z'')=\underline{t}$, also $((f,z'')\wedge(g,z''))=(g,z'')$ [gemäß TT_Z53, TT_Z145], also $((f,z'')\wedge(g,z''))\neq\underline{t}$ u. $((f,z'')\wedge(g,z''))\neq\underline{k}$ [denn $(g,z'')\neq\underline{t}$ u. $(g,z'')\neq\underline{k}$], also mit AT_Z16 $(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)),z'')\neq\underline{t}$ u. $(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)),z'')\neq\underline{k}$, also mit TT_Z178 $((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z'')\neq\underline{t}$ u. $((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z'')\neq\underline{k}$; demnach $Vz''(Z^0(z'')$ u. $((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z'')\neq\underline{t}$ u. $((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z'')\neq\underline{k})$, also nach DT_Z49 *non* $Z_E^{\langle 0\rangle}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))$.

Nimmt man statt AT_Z13 das stärkere aber den Tatsachen entsprechende $VzVz'(Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ u. $z'\neq z)$ – "Es gibt mindestens zwei Gegenstände" – an, so kann man zeigen, daß es eine essentielle Eigenschaft gibt, die weder kontradiktorisch noch tautologisch ist. Mit TT_Z182 und TT_Z185 ergibt sich dann, daß es eine Eigenschaft gibt, die weder essentiell noch akzidentell ist.[1] – Es gilt

TT_Z186 $\quad \Lambda z[Z^0(z)$ u. $Vz'(Z^0(z')$ u. $z\neq z')$ imp. $Z_E^{\langle 0\rangle}(i(z))$ u. non $Z_K^{\langle 0\rangle}(i(z))$ u. non $Z_L^{\langle 0\rangle}(i(z))]$
(Wenn es neben einem Gegenstand z einen anderen gibt, dann ist die Eigenschaft, mit z identisch zu sein, eine essentielle Eigenschaft, aber weder eine kontradiktorische noch eine tautologische)

Beweis: Ang. $Z^0(z)$ u. $Vz'(Z^0(z')$ u. $z\neq z')$, also $Z_E^{\langle 0\rangle}(i(z))$ gemäß TT_Z171, DT_Z49, DT_Z48, TT_Z143;
non $Z_K^{\langle 0\rangle}(i(z))$ nach DT_Z40, denn $(i(z),z)\neq\underline{k}$ nach TT_Z171;
non $Z_L^{\langle 0\rangle}(i(z))$ nach DT_Z45, denn $Vz'(Z^0(z')$ u. $(i(z),z')\neq\underline{t})$ nach TT_Z171.

(c) Zwar ist nicht jede Eigenschaft entweder essentiell oder akzidentell, aber jede Eigenschaft ist *bzgl. jedes gegebenen Gegenstandes entweder essentiell oder akzidentell*:

DT_Z51 $\quad Z_E^{\langle 0\rangle}(\varphi,\tau) := Z^{\langle 0\rangle}(\varphi)$ u. $Z^0(\tau)$ u. $((\varphi,\tau)=\underline{t}$ o. $(\varphi,\tau)=\underline{k})$

(φ ist eine essentielle Eigenschaft bzgl. des Gegenstandes τ)

DT$_Z$52 $Z_A^{\langle o \rangle}(\varphi,\tau)$:= $Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $Z^o(\tau)$ u. $(\varphi,\tau) \neq \underline{t}$ u. $(\varphi,\tau) \neq \underline{k}$
(φ ist eine akzidentelle Eigenschaft bzgl. des Gegenstandes τ)

Naheliegend ist dann auch die Relativierung der Prädikate $Z_K^{\langle o \rangle}$ und $Z_L^{\langle o \rangle}$:

DT$_Z$53 $Z_K^{\langle o \rangle}(\varphi,\tau)$: $Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $Z^o(\tau)$ u. $(\varphi,\tau) = \underline{k}$
(φ ist eine kontradiktorische Eigenschaft bzgl. des Gegenstandes τ)

DT$_Z$54 $Z_L^{\langle o \rangle}(\varphi,\tau)$:= $Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $Z^o(\tau)$ u. $(\varphi,\tau) = \underline{t}$
(φ ist eine tautologische Eigenschaft bzgl. des Gegenstandes τ)[2]

Anmerkungen:

[1]G. H. von Wright schreibt in *An Essay in Modal Logic*, S. 27: "If a property can be significantly predicated of the individuals of a certain Universe of Discourse, then either the property is necessarily present in some or all individuals and necessarily absent in the rest, or else the property is possibly but not necessarily (i.e. contingently) present in some or all individuals and possibly but not necessarily (i.e. contingently) absent in the rest." G. H. von Wrights *Prinzip der Prädikation* können wir so wiedergeben:

P1 $\wedge f[Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ imp. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $N((f,z))$ o. $N((\neg^{\langle 0 \rangle} f,z)))$ o. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $P((f,z))$ u. non $N((f,z))$ o. $P((\neg^{\langle 0 \rangle} f,z))$ u. non $N((\neg^{\langle 0 \rangle} f,z)))]$

Dieses Prinzip ist äquivalent mit

P2 $\wedge f[Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ imp. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t}$ o. $(\neg^{\langle 0 \rangle} f,z)=\underline{t})$ o. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)\neq\underline{k}$ u. $(f,z)\neq\underline{t}$ o. $(\neg^{\langle 0 \rangle} f,z)\neq\underline{k}$ u. $(\neg^{\langle 0 \rangle} f,z)\neq\underline{t})]$,

denn $\wedge y(Z^{1}(y)$ imp. $(N(y)$ äqu. $y=\underline{t}))$ u. $\wedge y(Z^{1}(y)$ imp. $(P(y)$ äqu. $y\neq\underline{k}))$ (siehe TT_Z86, TT_Z90, TT_Z85, TT_Z91). P2 aber ist seinerseits äquivalent mit

P3 $\wedge f[Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ imp. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t}$ o. $(f,z)=\underline{k})$ o. $\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)\neq\underline{k}$ u. $(f,z)\neq\underline{t})]$,

denn $\wedge f \wedge z(Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ u. $Z^{0}(z)$ imp. $[(f,z)=\underline{k}$ äqu. $(\neg^{\langle 0 \rangle} f,z)=\underline{t}]$ u. $[(f,z)=\underline{t}$ äqu. $(\neg^{\langle 0 \rangle} f,z)=\underline{k}])$. P3 aber ist seinerseits wegen DT_Z49 und DT_Z50 äquivalent mit

P4 $\wedge f(Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ imp. $Z_E^{\langle 0 \rangle}(f)$ o. $Z_A^{\langle 0 \rangle}(f))$
(*Jede Eigenschaft ist eine essentielle Eigenschaft oder eine akzidentelle*)

P4 haben wir als falsch erkannt; von Wrights Prinzip der Prädikation ist demnach ebenfalls falsch. (Kritik an diesem Prinzip übt auch A. Plantinga in *The Nature of Necessity*, S. 68, und F. v. Kutschera in *Einführung in die intensionale Semantik*, S. 37 (Fußnote).)

[2]Stattdessen sagt man auch "φ ist eine essentielle Eigenschaft *von* τ", denn aus $(\varphi,\tau)=\underline{t}$ ergibt sich $E((\varphi,\tau))$, was bedeutet, daß φ auf τ *zutrifft* (siehe das übernächste Kapitel; "φ ist eine akzidentelle Eigenschaft von τ" wird entsprechend durch $Z_A^{\langle 0 \rangle}(\varphi,\tau)$ u. $E((\varphi,\tau))$ wiedergegeben). *Die Essenz von* τ ist die Konjunktion aller essentiellen Eigenschaften *von* τ: $U^{\langle 0 \rangle} f Z_L^{\langle 0 \rangle}(f,\tau)$; gleichwertig ist die Definition $ess(\tau) := U^{\langle 0 \rangle} f((f,\tau)=\underline{t})$ (wegen DT_Z54,

AT_Z15, TT_Z104, $ParTT_Z29$). Die wesentlichen Fakten bzgl. Essenzen drücken die folgenden drei beweisbaren Prinzipien aus:

$\wedge z[Z^0(z) \text{ imp. } \wedge f(fT^{\langle 0\rangle}ess(z) \text{ äqu. } Z_L^{\langle 0\rangle}(f,z))]$
(*Die Teileigenschaften der Essenz eines Gegenstandes sind die essentiellen Eigenschaften von diesem Gegenstand*)

$\wedge y \wedge z[MK(y) \text{ u. } Z^0(z) \text{ imp. } (ess(z) \text{ in } y)(z) \text{ u.}$
$\wedge z'((ess(z) \text{ in } y)(z') \text{ imp. } z'=z)]$
(*Die Essenz eines Gegenstandes trifft in jeder möglichen Welt auf ihn und nur auf ihn zu;* zu $(\varphi \text{ in } \tau')(\tau)$ siehe DT_Z56 in 10.)

$\wedge z(Z^0(z) \text{ imp. } ess(z)=i(z))$
(*Die Essenz eines Gegenstandes ist die Eigenschaft, mit ihm identisch zu sein*)

8. Maximal-konsistente Eigenschaften und die für einen Gegenstand spezifische Eigenschaft

(a) Nach TT_Z174 und TT_Z175 ist ein Eigenschaftsquantum eine Eigenschaft, die höchstens bzgl. eines Gegenstandes nichttautologisch ist, aber durch diesen gesättigt doch nur ein Sachverhaltsquantum ergibt. Gibt es abgesehen von $\underline{t}^{\langle o \rangle}$ ein Eigenschaftsquantum? - Daß dies der Fall ist, sieht man wie folgt ein:

Es gilt

TT_Z187 $\quad \Lambda z(Z^0(z) \text{ imp. } TO^{\langle o \rangle}((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z))))$

(Die Konjunktion des Eigenbegriffs der Welt mit der Eigenschaft, mit dem Gegenstand z identisch zu sein, ist ein Eigenschaftstotum)

Beweis: Ang. $Z^0(z)$; ang. $(b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z))T^{\langle o \rangle}f$; gemäß $ParDT_Z7$ ist für $TO^{\langle o \rangle}((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z)))$ zu zeigen $f = (b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z))$ o. $T^{\langle o \rangle}(f)$;
ang. non $T^{\langle o \rangle}(f)$, d.h. nach $ParDT_Z5$, da $Z^{\langle o \rangle}(f)$,
$Vg(Z^{\langle o \rangle}(g)$ u. non $gT^{\langle o \rangle}f)$;
zu zeigen bleibt $fT^{\langle o \rangle}(b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z))$ wegen der 2. Annahme und TT_Z154; ang. $Z^0(z')$; $((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z)), z') =$
$(\lambda o((b(\underline{w}), o) \wedge (i(z), o)), z') = ((b(\underline{w}), z') \wedge (i(z), z'))$ [gemäß TT_Z178 und AT_Z16] $= (\underline{w} \wedge (i(z), z'))$ [gemäß TT_Z159, $Z^1(\underline{w})$];
nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:
($\underline{x}$) $z' \neq z$, dann gilt gemäß TT_Z171 $(i(z), z') = \underline{k}$; also
$(\underline{w} \wedge (i(z), z')) = (\underline{w} \wedge \underline{k}) = \underline{k}$;
demnach $(f, z')T((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z)), z')$;
($\underline{xx}$) $z' = z$, dann gilt gemäß TT_Z171 $(i(z), z') = \underline{t}$, also
$(\underline{w} \wedge (i(z), z')) = (\underline{w} \wedge \underline{t}) = \underline{w}$; wegen $(b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z))T^{\langle o \rangle}f$ gilt nach DT_Z41 $\Lambda z''(Z^0(z'')$ imp. $((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z)), z'')T(f, z''))$; also, wie wir gesehen haben, $\Lambda z''(Z^0(z'')$ u. $z'' \neq z$ imp. $\underline{k}T(f, z''))$,
also $\Lambda z''(Z^0(z'')$ u. $z'' \neq z$ imp. $(f, z'') = \underline{k})$; also
$((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z)), z')T(f, z')$; also $\underline{w}T(f, z')$; nun $TO(\underline{w})$ nach AT_Z8;
also mit DT_Z7 $(f, z') = \underline{w}$ o. $T((f, z'))$;
im ersteren Fall ergibt sich wegen $\underline{w}T\underline{w}$ und
$((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z)), z') = \underline{w}$ $\quad (f, z')T((b(\underline{w}) \wedge^{\langle o \rangle} i(z)), z')$;
der letztere Fall ist ausgeschlossen, denn aus $T((f, z'))$ folgt mit TT_Z34 $(f, z') = \underline{k}$, d.h. $(f, z) = \underline{k}$; es ergäbe sich also

$\wedge z''(Z^0(z''))$ imp. $(f,z'')=\underline{k})$, also mit AT_Z15
$\wedge z''((f,z'')=\underline{k})$; dies befindet sich aber im Widerspruch zu $\vee g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. non $gT^{\langle 0\rangle}f)$, wie man unter Verwendung von DT_Z41, TT_Z145, $\wedge y(Z^1(y)$ imp. $yT\underline{k})$ sieht;
wir haben also gezeigt $\wedge z'(Z^0(z')$ imp. $(f,z')T((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)),z'))$, also folgt mit TT_Z146, DT_Z41 $[Z^{\langle 0\rangle}(f),\ Z^{\langle 0\rangle}((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)))]\ fT^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))$, was zu zeigen war.

Außerdem gilt

TT_Z188 $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))\neq\underline{k}^{\langle 0\rangle})$

Beweis: Ang. $Z^0(z)$; ang. $(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))=\underline{k}^{\langle 0\rangle}$, also $((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)),z)=(\underline{k}^{\langle 0\rangle},z)$; nach dem Beweis des vorhergehenden Theorems also $\underline{w}=(\underline{k}^{\langle 0\rangle},z)$, also mit TT_Z158, DT_Z40 $\underline{w}=\underline{k}$ - was AT_Z7 widerspricht.

Aus TT_Z187 und TT_Z188 ergibt sich mit $ParTT_Z72$

TT_Z189 $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $MK^{\langle 0\rangle}((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))))$
(Die Konjunktion des Eigenbegriffs der Welt und der Eigenschaft, mit dem Gegenstand z identisch zu sein, ist eine maximal-konsistente Eigenschaft)

Aus TT_Z189 folgt mit $ParTT_Z78$

TT_Z190 $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $El^{\langle 0\rangle}(\neg^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))))$

Mit AT_Z13 und $ParDT_Z20$, $ParTT_Z32$ ergibt sich

TT_Z191 $\vee z(Z^0(z)$ u. $QA^{\langle 0\rangle}(\neg^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)))$ u. $\neg^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))\neq\underline{t}^{\langle 0\rangle})$

(b) Wenn z ein Gegenstand ist, so ist $(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))$ *die für z spezifische Eigenschaft*. Die spezifischen Eigenschaften für verschiedene Gegenstände sind verschieden:

TT_Z192 $\wedge z\wedge z'(Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ u. $z\neq z'$ imp.

$$(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z))\neq(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z')))$$

Beweis: Ang. $Z^{o}(z)$ u. $Z^{o}(z')$ u. $z\neq z'$; es gilt $((b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z)),z)=\underline{w}$, aber $((b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z')),z)=\underline{k}$ nach dem Beweis von TT_Z187; folglich nach AT_Z7 $(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z))\neq((b(\underline{w})\wedge i(z'))$.

Es ist nun die Frage, ob jede maximal-konsistente Eigenschaft die spezifische Eigenschaft für einen Gegenstand ist. Aufgrund von TT_Z189 und TT_Z192 ergäbe sich daraus die umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit von Gegenständen auf maximal-konsistente Eigenschaften.

9. Die Erfüllungsbeziehung

(a) Die Erfüllungsbeziehung wird durch folgende Definition eingeführt:

DT_Z55 $\quad \tau(\tau') := E((\tau,\tau'))$

Nach DT_Z55 erfüllt τ' τ bzw. trifft τ auf τ' zu, wenn und nur wenn die Sättigung von τ mit τ' ein existierender Sachverhalt ist. Mit DT_Z55 ergeben sich bzgl. der Erfüllungsbeziehung:

TT_Z193 $\quad \Lambda x \Lambda f(f(x) \text{ imp. } Z^{\langle 0\rangle}(f) \text{ u. } Z^{0}(x))$
(Die Erfüllungsbeziehung ist eine Beziehung zwischen Eigenschaften und Gegenständen)

Beweis: Ang. $f(x)$, also mit DT_Z55 $E((f,x))$, also $(f,x)T\underline{w}$ gemäß DT_Z31, also $(f,x)\neq\underline{k}$ (denn sonst wegen $\underline{w}T\underline{k}$ $\underline{w}=\underline{k}$, was AT_Z7 widerspricht), also nach AT_Z15 $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{0}(x)$.

TT_Z194 $\quad \Lambda f \Lambda x(f(x) \text{ imp. non } x(f))$
(Die Erfüllungsbeziehung ist asymmetrisch)

Beweis: Ang. $f(x)$ u. $x(f)$, also $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{0}(x)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(x)$ gemäß TT_Z193, was aber AT_Z12 widerspricht.

Ein Korollar von TT_Z194 ist die Irreflexivität der Erfüllungsbeziehung.

(b) Es gilt das Generaltheorem

TT_Z195 $\quad \Lambda z(Z^{0}(z) \text{ imp.}$
$[U^{\langle 0\rangle}gA[g](z) \text{ äqu. } \Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f) \text{ u. } A[f] \text{ imp. } f(z))])$
(Die Konjunktion der A-Eigenschaften trifft auf den Gegenstand z genau dann zu, wenn jede A-Eigenschaft auf z zutrifft)

Beweis: (i) $U^{\langle 0\rangle}gA[g](z)$; ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $A[f]$, also nach $ParTT_Z18$ $fT^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}gA[g]$, also mit DT_Z41 $(f,z)T(U^{\langle 0\rangle}gA[g],z)$; mit

DT_Z55, DT_Z31 $(U^{\langle 0\rangle}gA[g],z)T\underline{w}$; also mit AT_Z1 $(f,z)T\underline{w}$, also mit DT_Z31, DT_Z55 $f(z)$;
(ii) $Z^0(z)$ u. $\wedge f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $f(z))$; man zeigt $UyVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))T\underline{w}$, denn daraus ergibt sich mit TT_Z157 $(U^{\langle 0\rangle}gA[g],z)T\underline{w}$, also mit DT_Z31, DT_Z55 $U^{\langle 0\rangle}gA[g](z)$;
ang. $Vk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))$; also $k(z)$, also mit DT_Z55, DT_Z31 $(k,z)T\underline{w}$, also $yT\underline{w}$;
folglich $UyVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))TUy(yT\underline{w})$ mit TT_Z28, also mit TT_Z30 $UyVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z))T\underline{w}$.

(c) Außerdem gilt das wichtige Theorem

TT_Z196 $\wedge z\wedge f\wedge g[Z^0(z)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ imp.
$[\neg^{\langle 0\rangle}f(z)$ äqu. non $f(z)]$ u.
$[(f\wedge^{\langle 0\rangle}g)(z)$ äqu. $f(z)$ u. $g(z)]$ u.
$[(f\vee^{\langle 0\rangle}g)(z)$ äqu. $f(z)$ o. $g(z)]]$

Beweis: Ang. $Z^0(z)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$;
(i_1) $\neg^{\langle 0\rangle}f(z)$, also mit DT_Z55, DT_Z31 $(\neg^{\langle 0\rangle}f,z)T\underline{w}$, also mit TT_Z180 $(\lambda o\neg(f,o),z)T\underline{w}$, also mit AT_Z16 $[Z^1(\neg(f,z))$, $Z^0(z)]$ $\neg(f,z)T\underline{w}$, also mit TT_Z106, DT_Z26, DT_Z24 non $(f,z)T\underline{w}$, also mit DT_Z31, DT_Z55 non $f(z)$;
(ii_1) non $f(z)$, also mit DT_Z31, DT_Z55 non $(f,z)T\underline{w}$, also mit TT_Z106, DT_Z26, DT_Z25 $\neg(f,z)T\underline{w}$ $[Z^1((f,z))]$, also mit AT_Z16 $(\lambda o\neg(f,o),z)T\underline{w}$, also mit TT_Z180 $(\neg^{\langle 0\rangle}f,z)T\underline{w}$, also mit DT_Z31, DT_Z55 $\neg^{\langle 0\rangle}f(z)$;
(i_2) $(f\wedge^{\langle 0\rangle}g)(z)$, also $((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z)T\underline{w}$, also mit TT_Z178 $(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)),z)T\underline{w}$, also mit AT_Z16 $((f,z)\wedge(g,z))T\underline{w}$, also mit TT_Z24 $(f,z)T\underline{w}$ u. $(g,z)T\underline{w}$, also $f(z)$ u. $g(z)$;
(ii_2) man kehre (i_2) einfach um;
(i_3) $(f\vee^{\langle 0\rangle}g)(z)$, also $((f\vee^{\langle 0\rangle}g),z)T\underline{w}$, also mit TT_Z179 $(\lambda o((f,o)\vee(g,o)),z)T\underline{w}$, also mit AT_Z16 $((f,z)\vee(g,z))T\underline{w}$, also mit TT_Z109, DT_Z32, DT_Z31 $(f,z)T\underline{w}$ o. $(g,z)T\underline{w}$, also $f(z)$ o. $g(z)$;
(ii_3) man kehre (i_3) einfach um.

(d) Die Konjunktion aller Eigenschaften, die auf einen Gegenstand zutreffen, ist eine maximal-konsistente Eigenschaft. Dies folgt wegen TT_Z189, denn es gilt:

TT_Z197 $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]=(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)))$

(Die Konjunktion aller Eigenschaften, die auf einen Gegenstand zutreffen, ist die für den Gegenstand spezifische Eigenschaft)

Beweis: Ang. $Z^0(z)$;

(i) $b(\underline{w})(z)$, denn $(b(\underline{w}),z)T\underline{w}$, denn $\underline{w}T\underline{w}$ und TT_Z159 $[Z^1(\underline{w})$, $AT_Z2]$;
$i(z)(z)$, denn $(i(z),z)T\underline{w}$, denn $\underline{t}T\underline{w}$ und TT_Z171;
also wegen $Z^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w}))$, $Z^{\langle 0\rangle}(i(z))$ mit $ParTT_Z18$
$b(\underline{w})T^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]$ u. $i(z)T^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]$, also mit $ParTT_Z24$
$(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))T^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]$;
(ii) ang. $f(z)$; wir zeigen $fT^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))$; ang. $Z^0(z')$;
($\underline{x}$) $z'\neq z$, also nach dem Beweis von TT_Z187 $((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)),z')=\underline{k}$,
also $(f,z')T((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)),z')$;
($\underline{xx}$) $z'=z$, also nach dem Beweis von TT_Z187
$((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)),z')=\underline{w}$; nun $f(z)$, also $(f,z)T\underline{w}$, also
$(f,z')T((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)),z')$;
es gilt also $\Lambda z'(Z^0(z')$ imp. $(f,z')T((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)),z'))$, also gemäß TT_Z146 und DT_Z41 $fT^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))$ $[Z^{\langle 0\rangle}(f)$ nach TT_Z193 wegen $f(z)]$;
es gilt also $\Lambda f(f(z)$ imp. $fT^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z)))$, also nach $ParTT_Z28$ $U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]T^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}f[fT^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))]$, also nach $ParTT_Z30$ $U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]T^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))$;
aus (i) und (ii) folgt mit TT_Z154 $U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]=(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle}i(z))$.

Aus TT_Z197 ergibt sich

TT_Z198 $\Lambda z\Lambda z'[Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ imp.
$(z'=z$ imp. $(U^{\langle 0\rangle}f[f(z)],z')=\underline{w}$ u. $U^{\langle 0\rangle}f[f(z)](z'))$ u.
$(z'\neq z$ imp. $(U^{\langle 0\rangle}f[f(z)],z')=\underline{k}$ u. non $U^{\langle 0\rangle}f[f(z)](z'))]$

aufgrund bekannter Beweisschritte. Aus TT_Z198 ersieht man, daß die Sättigung der Konjunktion aller Eigenschaften, die ein Gegenstand hat, *mit diesem Gegenstand* die Welt ist; und man ersieht, daß die Konjunktion aller Eigenschaften, die ein Gegenstand hat, einzig und allein auf diesen Gegenstand zutrifft.

10. Das Verhältnis zwischen maximal-konsistenten Eigenschaften, Gegenständen und möglichen Welten

(a) Aus TT_Z175 erhält man

TT_Z199 $\Lambda f[Z^{\langle o\rangle}(f)$ u. $(\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{k})$ o.
$Vz(Z^{0}(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{k}$ u. $TO((f,z))$ u.
$\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k})))$ imp. $TO^{\langle o\rangle}(f)]$

Beweis: Ang. $Z^{\langle o\rangle}(f)$; ($\underline{x}$) $\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{k})$, also
$\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $\neg(f,z)=\neg\underline{k})$, also mit AT_Z16, TT_Z54
$\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(\lambda o\neg(f,o),z)=\underline{t})$, also mit TT_Z180
$\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(\neg^{\langle o\rangle}f,z)=\underline{t})$, also mit TT_Z175 $QA^{\langle o\rangle}(\neg^{\langle o\rangle}f)$, also mit $ParTT_Z73$ $TO^{\langle o\rangle}(f)$;
($\underline{xx}$) $Vz(Z^{0}(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{k}$ u. $TO((f,z))$ u. $\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k}))$;
aus $(f,z)\neq\underline{k}$ ergibt sich *$(\neg^{\langle o\rangle}f,z)\neq\underline{t}$*, denn aus $(f,z)\neq\underline{k}$ $\neg(f,z)\neq\underline{t}$ [TT_Z54, TT_Z55] etc.; aus $TO((f,z))$ ergibt sich *$QA((\neg^{\langle o\rangle}f,z))$*, denn aus $TO((f,z))$ $QA(\neg(f,z))$ [TT_Z73] etc.;
aus $\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k})$ ergibt sich
$\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(\neg^{\langle o\rangle}f,z')=\underline{t})$, denn aus $\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k})$ $\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $\neg(f,z')=\neg\underline{k})$ etc.;
es wird also TT_Z175 anwendbar, und man erhält $QA^{\langle o\rangle}(\neg^{\langle o\rangle}f)$, also mit $ParTT_Z73$ $TO^{\langle o\rangle}(f)$.

Und aus TT_Z174 erhält man entsprechend

TT_Z200 $\Lambda f[TO^{\langle o\rangle}(f)$ imp. $\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\underline{k})$ o.
$Vz(Z^{0}(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{k}$ u. $TO((f,z))$ u.
$\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k}))]$

Aus TT_Z199 und TT_Z200 kann man entnehmen, was maximal-konsistente Eigenschaften bzgl. ihrer Sättigung sind:

TT_Z201 $\Lambda f[MK^{\langle o\rangle}(f)$ äqu. $Vz(Z^{0}(z)$ u. $MK((f,z))$ u.
$\Lambda z'(Z^{0}(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k}))]$
(Die maximal-konsistenten Eigenschaften sind genau die Eigenschaften, deren Sättigung mit __einem__ Gegenstand

ein maximal-konsistenter Sachverhalt ist, mit allen anderen Gegenständen aber der kontradiktorische Sachverhalt)

Beweis: (i) Ang. $\mathrm{MK}^{\langle o\rangle}(f)$, also nach $\mathrm{ParTT_Z72}$ $\mathrm{TO}^{\langle o\rangle}(f)$ u. $f \neq \underline{k}^{\langle o\rangle}$, also mit $\mathrm{AT_Z19}$ $\mathrm{V}z((f,z) \neq (\underline{k}^{\langle o\rangle},z))$, also, da $(\underline{k}^{\langle o\rangle},z)=\underline{k}$ wegen $Z_K^{\langle o\rangle}(\underline{k}^{\langle o\rangle})$ [$\mathrm{TT_Z158}$] und $\mathrm{DT_Z40}$, $\mathrm{V}z((f,z)\neq\underline{k})$, also mit $\mathrm{AT_Z15}$ $\mathrm{V}z(Z^0(z)$ u. $(f,z)\neq\underline{k})$; also mit $\mathrm{TT_Z200}$ und $\mathrm{TT_Z72}$ $\mathrm{V}z(Z^0(z)$ u. $\mathrm{MK}((f,z))$ u. $\Lambda z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k}))$;
(ii) ang. $\mathrm{V}z(Z^0(z)$ u. $\mathrm{MK}((f,z))$ u. $\Lambda z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $(f,z')=\underline{k}))$; $Z^{\langle o\rangle}(f)$, denn sonst $(f,z)=\underline{k}$ gemäß $\mathrm{AT_Z15}$, aber $(f,z)\neq\underline{k}$ gemäß $\mathrm{TT_Z72}$, da $\mathrm{MK}((f,z))$; folglich wegen $\mathrm{TT_Z72}$, $\mathrm{TT_Z199}$ *$\mathrm{TO}^{\langle o\rangle}(f)$*; außerdem *$f\neq\underline{k}^{\langle o\rangle}$*, denn $\mathrm{V}z((f,z)\neq\underline{k})$, aber $\Lambda z((\underline{k}^{\langle o\rangle},z)=\underline{k})$; aus dem kursiv Geschriebenen gemäß $\mathrm{ParTT_Z72}$ $\mathrm{MK}^{\langle o\rangle}(f)$.

(b) Am Ende des vorletzten Kapitels warfen wir die Frage auf, ob eine umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit von Gegenständen auf maximal-konsistente Eigenschaften besteht. Daß eine solche besteht, läßt sich nicht beweisen. Was sich aber zeigen läßt, ist, daß die Paare von Gegenständen und möglichen Welten umkehrbar eindeutig abbildbar sind auf die maximal-konsistenten Eigenschaften. Dazu braucht man nur einen Begriff zu verallgemeinern: $(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z))$ – "die für z spezifische Eigenschaft" – zu $(b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z))$ – "die für z *in y* spezifische Eigenschaft". – Es gilt dann:

$\mathrm{TT_Z202}$ $\quad \Lambda z\Lambda y[Z^0(z)$ u. $\mathrm{MK}(y)$ imp. $\mathrm{MK}^{\langle o\rangle}((b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))]$

Das beweist man ebenso wie $\mathrm{TT_Z189}$. Im Beweis der Theoreme $\mathrm{TT_Z187}$ und $\mathrm{TT_Z188}$, aus denen sich $\mathrm{TT_Z189}$ mit $\mathrm{ParTT_Z72}$ ergibt, macht man Gebrauch von $\mathrm{TO}(\underline{w})$ und $\underline{w}\neq\underline{k}$ und sonst von keinen weiteren Annahmen über $\underline{w}$; $\mathrm{TO}(y)$ und $y\neq\underline{k}$ ergibt sich aus $\mathrm{MK}(y)$ mit $\mathrm{TT_Z72}$.

$\mathrm{TT_Z203}$ $\quad \Lambda z\Lambda z'\Lambda y\Lambda y'[Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ u. $\mathrm{MK}(y)$ u. $\mathrm{MK}(y')$ u. $(z'\neq z$ o. $y'\neq y)$ imp. $(b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z))\neq(b(y')\wedge^{\langle o\rangle}i(z'))]$

Beweis: Ang. $Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ u. $\mathrm{MK}(y)$ u. $\mathrm{MK}(y')$;
($\underline{\alpha}$) $z'\neq z$, also $((b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z)),z')=\underline{k}$ (vergl. die Argumentation im Beweis von $\mathrm{TT_Z187}$), aber $((b(y')\wedge^{\langle o\rangle}i(z')),z')=y'$; wegen

$MK(y')$ $y' \neq \underline{k}$; also $(b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)) \neq (b(y') \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z'))$;
($\underline{xx}$) $y' \neq y$ u. $z' = z$; also $(b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)) \neq (b(y') \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z'))$, denn
$((b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)), z) \neq ((b(y') \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z')), z)$, denn
$((b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)), z) = y$ u. $((b(y') \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z')), z) = y'$.

TT_Z204 $\quad \Lambda f[MK^{\langle 0 \rangle}(f)$ imp. $\vee z \vee y(Z^0(z)$ u. $MK(y)$ u.
$f = (b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)))]$

Beweis: Ang. $MK^{\langle 0 \rangle}(f)$, also nach TT_Z201
$\vee z(Z^0(z)$ u. $MK((f,z))$ u. $\Lambda z'(Z^0(z')$ u. $z' \neq z$ imp. $(f,z') = \underline{k}))$;
es gilt $f = (b((f,z)) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z))$: ang. $Z^0(z'')$; ($\underline{x}$) $z'' \neq z$; also
$(f,z'') = \underline{k}$; also $((b((f,z)) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)), z'') = \underline{k}$; also
$(f,z'') = ((b((f,z)) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)), z'')$; ($\underline{xx}$) $z'' = z$, also $(f,z'') = (f,z)$;
also $((b((f,z)) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)), z'') = (f,z)$; also
$(f,z'') = ((b((f,z)) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)), z'')$;
demnach $\Lambda z''(Z^0(z'')$ imp. $(f,z'') = ((b((f,z)) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)), z''))$,
also mit TT_Z146, DT_Z41 $\underline{f = (b((f,z)) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z))}$;
folglich $\vee z \vee y(Z^0(z)$ u. $MK(y)$ u. $f = (b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)))$.

Mit TT_Z202, TT_Z203 und TT_Z204 ist gezeigt, daß die Paare von Gegenständen und möglichen Welten umkehrbar eindeutig abbildbar sind auf die maximal-konsistenten Eigenschaften.

(c) Dasselbe Resultat wie mit $(b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z))$ stellt sich mit $U^{\langle 0 \rangle} f[(f \text{ in } y)(z)]$ ein, wobei "$(f$ in $y)(z)$" definiert ist durch

DT_Z56 $\quad (\varphi \text{ in } \tau)(\tau') := (\varphi, \tau')T\tau$ u. $MK(\tau)$
(φ trifft in τ auf τ' zu)[1]

Es gilt nämlich in Verallgemeinerung von TT_Z197

TT_Z205 $\quad \Lambda z \Lambda y(Z^0(z)$ u. $MK(y)$ imp.
$U^{\langle 0 \rangle} f[(f \text{ in } y)(z)] = (b(y) \wedge^{\langle 0 \rangle} i(z)))$
(*Die Konjunktion der Eigenschaften, die in der möglichen Welt y auf den Gegenstand z zutreffen, ist die für z in y spezifische Eigenschaft*)

Beweis: Ang. $Z^0(z)$ u. $MK(y)$;
(i) *$(b(y)$ in $y)(z)$*, denn $(b(y),z)Ty$ u. $MK(y)$, denn yTy und TT_Z159 [$Z^1(y)$, AT_Z2]; *$(i(z)$ in $y)(z)$*, denn $(i(z),z)Ty$ u. $MK(y)$,

denn $\underline{t}$Ty und TT_Z171; also wegen $Z^{\langle o\rangle}$(b(y)), $Z^{\langle o\rangle}$(i(z)) mit ParTT_Z18 b(y)$T^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}$f[(f in y)(z)] u. i(z)$T^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}$f[(f in y)(z)], also mit ParTT_Z24 (b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z))$T^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}$f[(f in y)(z)];
(ii) ang. (f in y)(z); wir zeigen f$T^{\langle o\rangle}$(b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z)); dies geschieht mutatis mutandis wie in (ii) des Beweises von TT_Z197; es gilt also Λf[(f in y)(z) imp. f$T^{\langle o\rangle}$(b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z))], also nach Par$TT_Z$28 $U^{\langle o\rangle}$f[(f in y)(z)]$T^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}$f(f$T^{\langle o\rangle}$(b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z))), also nach Par$TT_Z$30 $U^{\langle o\rangle}$f[(f in y)(z)]$T^{\langle o\rangle}$(b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z));
aus (i) und (ii) folgt mit TT_Z154
$U^{\langle o\rangle}$f[(f in y)(z)]=(b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z)).

Für das mit DT_Z56 eingeführte Prädikat ergibt sich außerdem

TT_Z206 Λf[$Z^{\langle o\rangle}$(f) u. f≠$\underline{k}^{\langle o\rangle}$ äqu.
VzVy(Z^{o}(z) u. MK(y) u. (f in y)(z))]
(Die nichtkontradiktorischen Eigenschaften sind die Entitäten, die auf einen Gegenstand in einer möglichen Welt zutreffen)

Beweis: (i) $Z^{\langle o\rangle}$(f) u. f≠$\underline{k}^{\langle o\rangle}$, also Vg($MK^{\langle o\rangle}$(g) u. f$T^{\langle o\rangle}$g) mit Par$TT_Z$91 [aus f≠$\underline{k}^{\langle o\rangle}$ non $\underline{k}^{\langle o\rangle}T^{\langle o\rangle}$f mit TT_Z154, denn f$T^{\langle o\rangle}\underline{k}^{\langle o\rangle}$], also mit TT_Z204 Vg($MK^{\langle o\rangle}$(g) u. VzVy(Z^{o}(z) u. MK(y) u. g=(b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z))) u. f$T^{\langle o\rangle}$g), also VzVy[$Z^{o}$(z) u. MK(y) u. f$T^{\langle o\rangle}$(b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z))], also mit DT_Z41 VzVy[Z^{o}(z) u. MK(y) u. (f,z)T((b(y)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z)),z)], also nach der Argumentation im Beweis von TT_Z187 (dort "$\underline{w}$" statt "y") VzVy(Z^{o}(z) u. MK(y) u. (f,z)Ty), also mit DT_Z56 VzVy(Z^{o}(z) u. MK(y) u. (f in y)(z));
(ii) VzVy(Z^{o}(z) u. MK(y) u. (f in y)(z)), also mit DT_Z56 VzVy(Z^{o}(z) u. MK(y) u. (f,z)Ty), also (f,z)≠$\underline{k}$, denn sonst $\underline{k}$Ty, also (da yT$\underline{k}$ und AT_Z3) y=$\underline{k}$ - was aber wegen TT_Z72 MK(y) widerspricht; also wegen AT_Z15 $\underline{Z^{\langle o\rangle}(f)}$; also Vz((f,z)≠$\underline{k}$), also non $Z_K^{\langle o\rangle}$(f) nach DT_Z40, also f≠$\underline{k}^{\langle o\rangle}$ wegen TT_Z158.

Für VzVy(Z^{o}(z) u. MK(y) u. (f in y)(z)) kann man kurz schreiben VzVy[(f in y)(z)], denn:

TT_Z207 ΛzΛyΛf[(f in y)(z) imp. $Z^{\langle o\rangle}$(f) u. MK(y) u. Z^{o}(z)]

Beweis: Ang. (f in y)(z), also (f,z)Ty u. MK(y) mit DT_Z56, also (f,z)≠$\underline{k}$, denn sonst y=$\underline{k}$ (siehe vorausgehenden Beweis), was MK(y) wegen TT_Z72 widerspricht; also nach AT_Z15 $Z^{\langle o \rangle}$(f) u. Z^{o}(z).

(d) Im 2. Teil haben wir mögliche Gegenstände durch maximal-konsistente Eigenschaften repräsentiert. Es ist *hier* fraglich, ob die Voraussetzung dafür: eine umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit von (möglichen) Gegenständen auf maximal-konsistente Eigenschaften vorliegt (und dies zeigt, daß wir in *diesem Teil* Gegenstände in einem anderen Sinn meinen als im zweiten). Wie wir gesehen haben, gibt es ebensoviele maximal-konsistente Eigenschaften wie es Paare von Gegenständen und möglichen Welten gibt. Gäbe es genau eine mögliche Welt, so gäbe es also ebensoviele maximal-konsistente Eigenschaften, wie es Gegenstände gibt, und es gäbe eine umkehrbar eindeutige Abbildung von letzteren auf erstere. Aber wegen AT_Z9 (siehe die Überlegung in I., 16., (f)) gibt es nicht nur eine mögliche Welt. Solange die Anzahl der Gegenstände endlich ist, die Zahl der möglichen Welten aber größer als 1, gibt es stets mehr Paare von Gegenständen und möglichen Welten als Gegenstände, also mehr maximal-konsistente Eigenschaften als Gegenstände; es gibt dann also keine Abbildung von Gegenständen auf maximal-konsistente Eigenschaften. Wenn die Anzahl der Gegenstände abzählbar unendlich ist, die Zahl der möglichen Welten höchstens abzählbar unendlich, so gibt es genausoviele Paare von Gegenständen und möglichen Welten wie Gegenstände, wie sich nach dem 1. Cantorschen Diagonalverfahren zeigen läßt; es gibt dann also eine Abbildung von Gegenständen auf maximal-konsistente Eigenschaften.

(e) Was sich ohne zusätzliche Annahmen beweisen läßt, ist, daß es eine umkehrbar eindeutige Abbildung von Gegenständen auf die *$\underline{w}$-maximal-konsistenten* Eigenschaften gibt:

DT_Z57 $\quad MK_{\underline{w}}^{\langle o \rangle}(\varphi) := MK^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $b(\underline{w})T^{\langle o \rangle}\varphi$
(φ ist eine $\underline{w}$-maximal-konsistente Eigenschaft)

Nach DT_Z57 ist eine $\underline{w}$-maximal-konsistente Eigenschaft eine maximal-konsistente Eigenschaft, die den Eigenbegriff der Welt als Teileigenschaft hat. – Wegen $b(\underline{w})T^{\langle o \rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle o \rangle} i(z))$ ergibt sich aus TT_Z189

TT_Z208 $\Lambda z[Z^0(z) \text{ imp. } MK_{\underline{w}}^{\langle 0\rangle}((b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)))]$

Wegen TT_Z192 bleibt zur Existenz der fraglichen Abbildung nur noch zu zeigen:

TT_Z209 $\Lambda f[MK_{\underline{w}}^{\langle 0\rangle}(f) \text{ imp. } \mathrm{V}z(Z^0(z) \text{ u. } f=(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)))]$

Beweis: Ang. $MK_{\underline{w}}^{\langle 0\rangle}(f)$, also $MK^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $b(\underline{w})T^{\langle 0\rangle} f$; also mit TT_Z204 $\mathrm{V}z\mathrm{V}y(Z^0(z)$ u. $MK(y)$ u. $f=(b(y)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)))$, also $b(\underline{w})T^{\langle 0\rangle}(b(y)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z))$, also mit DT_Z41 $(b(\underline{w}),z)T((b(y)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)),z)$, also mit TT_Z159 $[Z^0(z),\ Z^1(\underline{w})]$ und $((b(y)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)),z)=(\lambda o((b(y),o)\wedge(i(z),o)),z)=((b(y),z)\wedge(i(z),z))$ [gemäß TT_Z178 und AT_Z16] $=(y\wedge(i(z),z))$ [gemäß TT_Z159, $Z^1(y)$, $Z^0(z)$] $=(y\wedge\underline{t})$ [gemäß TT_Z171] $=y$: $\underline{w}Ty$, also, da $MK(\underline{w})$ nach TT_Z106 und da $MK(y)$, $y=\underline{w}$ mit TT_Z79;
demnach $\mathrm{V}z(Z^0(z)$ u. $f=(b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)))$.

Aus TT_Z208 und TT_Z209 sehen wir mit TT_Z197, daß eine $\underline{w}$-maximal-konsistente Eigenschaft die Gesamtheit aller Eigenschaften ist, die ein Gegenstand *tatsächlich* hat, und daß die Gesamtheit aller Eigenschaften, die ein Gegenstand tatsächlich hat, eine $\underline{w}$-maximal-konsistente Eigenschaft ist:

TT_Z210 $\Lambda f[MK_{\underline{w}}^{\langle 0\rangle}(f) \text{ äqu.} \mathrm{V}z(Z^0(z) \text{ u. } f=U^{\langle 0\rangle} g[g(z)])]$

Aus TT_Z202 und TT_Z204 sehen wir dagegen mit TT_Z205

TT_Z211 $\Lambda f[MK^{\langle 0\rangle}(f) \text{ äqu. } \mathrm{V}z\mathrm{V}y(Z^0(z) \text{ u. } MK(y) \text{ u. } f=U^{\langle 0\rangle} g[(g \text{ in } y)(z)])]$

Eine maximal-konsistente Eigenschaft ist die Gesamtheit aller Eigenschaften, die ein Gegenstand in einer möglichen Welt hat, und die Gesamtheit aller Eigenschaften, die ein Gegenstand in einer möglichen Welt hat, ist eine maximal-konsistente Eigenschaft.

Anmerkungen:

[1]Es gilt

∧f∧g($Z^{\langle 0\rangle}$(f) u. $Z^{\langle 0\rangle}$(g) imp.

[f$T^{\langle 0\rangle}$g äqu. ∧y∧z(MK(y) u. Z^{0}(z) u.
(g in y)(z) imp. (f in y)(z))])

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}$(f), $Z^{\langle 0\rangle}$(g);

(i) ang. f$T^{\langle 0\rangle}$g; ang. MK(y), Z^{0}(z), (g in y)(z); also gemäß DT_Z56 (g,z)Ty; also gemäß DT_Z41 (f,z)T(g,z); also mit AT_Z1 (f,z)Ty; also mit DT_Z56 (f in y)(z);

(ii) ang. ∧y∧z(MK(y) u. Z^{0}(z) u. (g in y)(z) imp. (f in y)(z));

ang. Z^{0}(z); zu zeigen ist (f,z)T(g,z); also
∧y(MK(y) u. (g,z)Ty imp. (f,z)Ty) mit DT_Z56; also
∧y(TO(y) u. (g,z)Ty imp. (f,z)Ty) mit TT_Z72, also mit TT_Z73,

TT_Z59 ∧y(Z^{1}(y) u. QA(¬y) u. ¬yT¬(g,z) imp. ¬yT¬(f,z)), also wegen TT_Z55 ∧y(QA(y) u. yT¬(g,z) imp. yT¬(f,z)), also mit AT_Z5 ¬(g,z)T¬(f,z), also mit TT_Z59 (f,z)T(g,z).

Wir geben dieses Theorem an im Hinblick auf die zu Anfang des 2. Teils erhobene Frage, wann eine Eigenschaft Teil einer anderen ist (wenn man dies durch die Erfüllungsbeziehung ausdrücken will).

11. Gegenstände und Leibniz-Gegenstände

(a) Die im 2. Teil zugrundegelegte Gegenstandskonzeption ist eine andere als die, von der bei den gegenwärtigen Untersuchungen ausgegangen wird. Dort wurden die Gegenstände durch die maximal-konsistenten Eigenschaften repräsentiert, was nun nicht mehr ohne weiteres möglich ist. Aus der Sicht der hier verwendeten Gegenstandskonzeption lassen sich aber die Gegenstände *im Sinne des 2. Teils* durch die Paare von Gegenständen und möglichen Welten modellieren. Diese Paare sind ja durch die maximal-konsistenten Eigenschaften repäsentierbar, da, wie wir gesehen haben, die Paare von Gegenständen und möglichen Welten umkehrbar eindeutig auf die maximal-konsistenten Eigenschaften abbildbar sind.

(b) Die beiden unterschiedlichen Gegenstandskonzeptionen lassen sich an einem Beispiel illustrieren: "Hans studiert niemals Geographie, aber es hätte auch das Gegenteil der Fall sein können." Die ontologische Beschreibung dessen, was dieser Satz aussagt - wobei wir die ontologisch schwächste Lesart von "können" annehmen -, sieht nach der hier verwendeten Gegenstandskonzeption so aus:

Die Eigenschaft, niemals Geographie zu studieren, trifft$_1$ *auf Hans*$_1$ *(in* $\underline{w}$*) zu, aber in einer anderen möglichen Welt, z.B.* $\underline{m}$*, trifft*$_1$ *die Eigenschaft, einmal Geographie zu studieren, auf Hans*$_1$ *zu.*

Nach der im 2. Teil verwendeten - leibnizschen - Gegenstandskonzeption[1] sieht die Beschreibung dessen, was der angeführte Satz aussagt, stattdessen so aus:

Die Eigenschaft, niemals Geographie zu studieren, trifft$_2$ *auf Hans*$_2$ *(≙Hans*$_1$*-in-*$\underline{w}$*) zu, aber es gibt eine Variante*[2] *von Hans*$_2$*, z.B. Hans*$_2^*$ *(≙Hans*$_1$*-in-*$\underline{y}$*), auf die die Eigenschaft, einmal Geographie zu studieren, zutrifft*$_2$.

Die Erfüllungsbeziehung wird je nach Gegenstandsauffassung ebenfalls unterschiedlich aufgefaßt. Die Eigenschaften aber sind für beide Konzeptionen dieselben: *niemals Geographie zu studieren, einmal Geographie zu studieren* (kurz: $\neg^{\langle 0 \rangle}\underline{f}$ und $\underline{f}$). Nach der 1. Gegenstandskonzeption haben wir es mit einem Gegenstand und zwei möglichen Welten zu tun: Hans$_1$ (kurz: $\underline{h}_1$), $\underline{w}$ und (z.B) $\underline{m}$;

gemäß der 2. Gegenstandskonzeption haben wir es mit zwei Gegenständen zu tun: Hans_2 und (z.B.) Hans_2^* (kurz: $\underline{h}_2$ und $\underline{h}_2^*$, die sich aus der Sicht der 1. Gegenstandskonzeption durch $\underline{h}_1$-in-$\underline{w}$ – $\langle \underline{h}_1, \underline{w}\rangle$ –, bzw. $\underline{h}_1$-in-$\underline{m}$ – $\langle \underline{h}_1, \underline{m}\rangle$ – modellieren lassen).

(c) Es gilt:

(L') Für alle Eigenschaften g:
g trifft_2 auf $\underline{h}_2$ zu gdw. g trifft_1 auf $\underline{h}_1$ zu;
g trifft_2 auf $\underline{h}_2^*$ zu gdw. g trifft_1 in $\underline{m}$ auf $\underline{h}_1$ zu.

Dieses Prinzip läßt sich beweisen, wenn wir folgende Deutungen treffen:

(L_1') g trifft_1 auf $\underline{h}_1$ zu : $g(\underline{h}_1)$ $(=(g \text{ in } \underline{w})(\underline{h}_1))$
g trifft_1 in $\underline{m}$ auf $\underline{h}_1$ zu : $(g \text{ in } \underline{m})(\underline{h}_1)$
g trifft_2 auf $\underline{h}_2$ zu : $g\langle \underline{h}_2\rangle$
g trifft_2 auf $\underline{h}_2^*$ zu : $g\langle \underline{h}_2^*\rangle$
$\underline{h}_2$: $U^{\langle o\rangle} g'[g'(\underline{h}_1)]$
$\underline{h}_2^*$: $U^{\langle o\rangle} g'[(g' \text{ in } \underline{m})(\underline{h}_1)]$

$\varphi\langle\tau\rangle$ ist dabei gemäß $DT1^+$ in II., 2., (c) und der erforderlichen Umschreibung definiert als $MK^{\langle o\rangle}$ u. $\varphi T^{\langle o\rangle}\tau$.

Beweis von (L'):

(i) g trifft_2 auf $\underline{h}_2$ zu, also $g\langle \underline{h}_2\rangle$, also $MK^{\langle o\rangle}(\underline{h}_2)$ u. $gT^{\langle o\rangle}\underline{h}_2$, also $gT^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}g'[g'(\underline{h}_1)]$, also nach DT_Z41 $(g,\underline{h}_1)T(U^{\langle o\rangle}g'[g'(\underline{h}_1)],\underline{h}_1)$; gemäß TT_Z198 $(U^{\langle o\rangle}g'[g'(\underline{h}_1),\underline{h}_1)=\underline{w}$; also $(g,\underline{h}_1)T\underline{w}$, also $g(\underline{h}_1)$ gemäß DT_Z55, DT_Z31, also g trifft_1 auf $\underline{h}_1$ zu;
(ii) g trifft_1 auf $\underline{h}_1$ zu, also $g(\underline{h}_1)$, also mit ParTT_Z18 $gT^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}g'[g'(\underline{h}_1)]$; $MK^{\langle o\rangle}(U^{\langle o\rangle}g'[g'(\underline{h}_1)])$ gemäß TT_Z189, TT_Z197; also $gT^{\langle o\rangle}\underline{h}_2$ u. $MK^{\langle o\rangle}(\underline{h}_2)$, also $g\langle \underline{h}_2\rangle$, also g trifft_2 auf $\underline{h}_2$ zu;
(i') g trifft_2 auf h_2^* zu, also $g\langle \underline{h}_2^*\rangle$, also $gT^{\langle o\rangle}\underline{h}_2^*$, also $gT^{\langle o\rangle}U^{\langle o\rangle}g'[(g' \text{ in } \underline{m})(\underline{h}_1)]$, also nach DT_Z41 $(g,\underline{h}_1)T(U^{\langle o\rangle}g'[(g' \text{ in } \underline{m})(\underline{h}_1)],\underline{h}_1)$; nun $(U^{\langle o\rangle}g'[(g' \text{ in } \underline{m})(\underline{h}_1)],\underline{h}_1)=\underline{m}$ – dies ergibt sich mit TT_Z205 etc.; also $(g,\underline{h}_1)T\underline{m}$, also mit DT_Z56 $(g \text{ in } \underline{m})(\underline{h}_1)$, also g trifft_1 in $\underline{m}$ auf $\underline{h}_1$ zu;

(ii') g trifft_1 in $\underline{m}$ auf $\underline{h}_1$ zu, also (g in $\underline{m}$)($\underline{h}_1$), also mit ParTT_Z18 $gT^{\langle o \rangle}U^{\langle o \rangle}g'[(g'$ in $\underline{m})(\underline{h}_1)]$, also $gT^{\langle o \rangle}\underline{h}_2^*$; $MK^{\langle o \rangle}(U^{\langle o \rangle}g'[(g'$ in $\underline{m})(\underline{h}_1)])$ gemäß TT_Z202, TT_Z205; also $MK^{\langle o \rangle}(\underline{h}_2^*)$ u. $gT^{\langle o \rangle}\underline{h}_2^*$, also $g\langle \underline{h}_2^* \rangle$, also g trifft_2 auf $\underline{h}_2^*$ zu.

(L') läßt sich auch beweisen, wenn man setzt:

(L_2') g trifft_1 auf $\underline{h}_1$ zu : g trifft_1 in $\underline{w}$ auf $\underline{h}_1$ zu
g trifft_2 auf $\underline{h}_2$ zu : g trifft_1 in $2(\underline{h}_2)$ auf $1(\underline{h}_2)$ zu
g trifft_2 auf $\underline{h}_2^*$ zu : g trifft_1 in $2(\underline{h}_2^*)$ auf $1(\underline{h}_2^*)$ zu
$\underline{h}_2 : \langle \underline{h}_1, \underline{w} \rangle$
$\underline{h}_2^* : \langle \underline{h}_1, \underline{m} \rangle$

Demnach sind "$\neg^{\langle o \rangle}$ $\underline{f}$ trifft_1 auf $\underline{h}_1$ zu, und $\underline{f}$ trifft_1 in $\underline{m}$ auf $\underline{h}_1$ zu" und "$\neg^{\langle o \rangle}$ $\underline{f}$ trifft_2 auf $\underline{h}_2$ zu, und $\underline{f}$ trifft_2 auf $\underline{h}_2^*$ zu" äquivalente Aussagen.

(d) Diese Resultate lassen sich verallgemeinern: Die *Leibniz-Gegenstände* sind repräsentierbar durch die maximal-konsistenten Eigenschaften, oder alternativ durch die Paare von Gegenständen *im hier verwendeten Sinn* und möglichen Welten.[3] Der einem Gegenstand z bzgl. der wirklichen Welt entsprechende Leibniz-Gegenstand ist z_L [$\hat{=} U^{\langle o \rangle}f[f(z)]$ bzw. $\langle z, \underline{w} \rangle$], der einem Gegenstand z bzgl. einer möglichen Welt y entsprechende Leibniz-Gegenstand ist z_L^y [$\hat{=} U^{\langle o \rangle}f[(f$ in $y)(z)]$ bzw. $\langle z, y \rangle$][4]. Dann gilt für alle Gegenstände z, Eigenschaften f, g und mögliche Welten y: f trifft auf z zu und g trifft in y auf z zu genau dann, wenn: f trifft_L auf z_L zu und g trifft_L auf z_L^y zu; denn es gilt:

(L) Für alle Gegenstände z, Eigenschaften g, mögliche Welten y:
g trifft_L auf z_L zu gdw. g trifft auf z zu;
g trifft_L auf z_L^y zu gdw. g trifft in y auf z zu.

Die spezielleren Prinzipien ergeben sich aus den allgemeinen durch Partikularisierung; dabei ist zu beachten "trifft_1" := "trifft", "trifft_2" := "trifft_L"; $\underline{h}_2 := (\underline{h}_1)_L$, $\underline{h}_2^* := (\underline{h}_1)_L^{\underline{m}}$ (und natürlich $Z^o(\underline{h}_1)$: "$\underline{h}_1$ ist ein Gegenstand"). – (L) läßt sich beweisen, wenn wir die entsprechenden Deutungen vornehmen, die mutatis mutandis aus den Deutungen (L_1') bzw. (L_2') ablesbar sind.

(e) Ein Leibniz-Gegenstand kann keine anderen Eigenschaften haben, als er hat; hätte er nämlich andere Eigenschaften, wäre er nicht mehr (numerisch) derselbe Gegenstand. Ein Gegenstand im hier verwendeten Sinn, kurz: *ein Gegenstand* kann sehr wohl andere Eigenschaften haben, als er hat. Von demselben Hans$_1$, der tatsächlich niemals Geographie studiert, hätte es auch der Fall sein können, daß er einmal Geographie studiert; aber es hätte nicht von demselben Hans$_2$ (dem Hans$_1$ bzgl. der wirklichen Welt entsprechenden Leibniz-Gegenstand), der tatsächlich niemals Geographie studiert, auch der Fall sein können, daß er einmal Geographie studiert. Ausschließlich dadurch "hätte es der Fall sein können, daß er einmal Geographie studiert", daß stellvertretend für ihn ein anderer Leibniz-Gegenstand, z.B. Hans$^*_2$, einmal Geographie studiert.

Wer ist nun Hans? Hans$_1$ oder Hans$_2$? - Die Umgangssprache, wortwörtlich genommen, legt nahe, daß Hans Hans$_1$ ist: "Hans studiert niemals Geographie, aber es hätte auch im Gegenteil der Fall sein können, daß *er* (d.h. doch wohl *derselbe* Hans) einmal Geographie studiert." Was der angeführte Satz aussagt, kann man aber *äquivalent* unter Verwendung der leibnizschen Gegenstandskonzeption beschreiben; die beiden in (b) angegebenen ontologischen Beschreibungen lassen sich ineinander überführen: "$\neg^{\langle o \rangle}$ $\underline{f}$ trifft auf $\underline{h}_1$ zu u. Vy(MK(y) u. $\underline{f}$ trifft in y auf $\underline{h}_1$ zu)" ist äquivalent mit "$\neg^{\langle o \rangle}$ $\underline{f}$ trifft$_L$ auf $\underline{h}_2$ zu u. Vy'(y' ist eine Variante von $\underline{h}_2$ u. f trifft$_L$ auf y' zu)":

Aus (L) ergibt sich mit $\underline{h}_2 := (\underline{h}_1)_L$: $\neg^{\langle o \rangle}$ $\underline{f}$ trifft$_L$ auf $\underline{h}_2$ zu gdw. $\neg^{\langle o \rangle}$ $\underline{f}$ trifft auf $\underline{h}_1$ zu;

($\underline{i}$) ang. *Vy(MK(y) u. f trifft in y auf h_1 zu)*, also mit (L) $\underline{f}$ trifft$_L$ auf $(\underline{h}_1)^y_L$ zu; wir sagen "h ist eine Variante von h'", falls VzVyVy'(Z^0(z) u. MK(y) u. MK(y') u. h=z^y_L u. h'=$z^{y'}_L$); also $(\underline{h}_1)^y_L$ ist eine Variante von $\underline{h}_2$, denn $\underline{h}_2=(\underline{h}_1)^{\underline{w}}_L$; demnach *Vy'(y'ist eine Variante von $\underline{h}_2$ u. $\underline{f}$ trifft$_L$ auf y' zu)*;

($\underline{ii}$) *Vy'(y' ist eine Variante von $\underline{h}_2$ u. $\underline{f}$ trifft$_L$ auf y' zu)*, also Vy'VzVyVy''(Z^0(z) u. MK(y) u. MK(y'') u. y'=z^y_L u. $\underline{h}_2$=$z^{y''}_L$ u. $\underline{f}$ trifft$_L$ auf y' zu); nun $\underline{h}_2=(\underline{h}_1)^{\underline{w}}_L$; also $(\underline{h}_1)^{\underline{w}}_L=z^{y''}_L$, also z=$\underline{h}_1$ u. y''=$\underline{w}$ (Leibniz-Gegenstände entsprechen ja *Gegenständen bzgl. möglichen Welten* umkehrbar eindeutig), also Vy(MK(y) u. $\underline{f}$ trifft$_L$ auf $(\underline{h}_1)^y_L$ zu), also mit (L)
Vy(MK(y) u. $\underline{f}$ trifft in y auf $\underline{h}_1$ zu).

Anmerkungen:

[1]Leibniz ist ihr Urheber; D. Lewis aber hat sie zur Grundlage einer vollentwickelten Theorie gemacht: der *Counterpart Theory.*

[2]Lewis sagt "counterpart": "Gegenstück".

[3]Wenn im 2. Teil im Kapitel 11 (und 12) von "Gegenständen" die Rede ist, so meint dieses Wort dort *Gegenstände (im hier gebrauchten Sinn)-in-der-wirklichen-Welt,* also gewisse Leibniz-Gegenstände (die durch die w-maximal-konsistenten Eigenschaften repräsentierbaren). Modale Erwägungen spielen ja im genannten Kapitel keine Rolle (man findet solche aber in Anmerkung 4). Die Gegenstände *in diesem Sinn* haben wir in Anmerkung 5 eingeteilt nach dem Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer zeitlichen oder einer räumlichen Dimension an ihnen. Neben der zeitlichen und der räumlichen gibt es nun auch die *modale* Dimension. Ein Gegenstand (Individuum, nun im weitesten Sinn genommen), der keine modale Dimension hat, ist ein *modaler Kontinuent;* er ist auf keine mögliche Welt bezogen. Leibniz-Gegenstände sind Gegenstände mit modaler Dimension, aber ohne modale Ausdehnung; sie sind modal punktuell: auf genau eine mögliche Welt bezogen. Gegenstände mit modaler Ausdehnung (und also mit modaler Dimension) sind sogenannte "Trans-Welt-Individuen"; D. Lewis diskutiert diese in *On the Plurality of Worlds,* S. 210 - S. 220. Wenn in diesem 3. Teil von "Gegenständen" die Rede ist, so meint dieses Wort (bzw. das Prädikat Z° in der formalen Sprache PTZ_1) modale Kontinuenten. (Zeitliche und räumliche Erwägungen spielen im 3. Teil keine Rolle.)

Was für ein Ding ist dieser Tisch? - Nach aristotelischer Auffassung ist er ein räumlich (in allen drei Richtungen) ausgedehnter (daher räumlich dimensionierter) Gegenstand ohne zeitliche und modale Dimension; nach der Auffassung von D. Lewis (z.B.) ist er ein räumlich und zeitlich ausgedehnter Gegenstand mit modaler Dimension, aber ohne modale Ausdehnung. Wer hat Recht? Für die aristotelische Auffassung spricht, daß sie die natürlichere ist; aber das heißt vielleicht nur: sie ist die vertrautere. Vielleicht ist sie auch die einfachere. Womöglich lassen sich aber aus der lewisschen Auffassung insgesamt doch größere theoretische Vorteile ziehen. - Eine knappe begründete Antwort ist unmöglich. Man muß aufs Ganze sehen.

[4]Wenn τ eine Variable ohne Index ist, so schreiben wir τ_ι bzw. τ_ι^σ; sonst $(\tau)_\iota$ bzw. $(\tau)_\iota^\sigma$.

12. Counterpart Theory

(a) Für Lewis' *Counterpart Theory* läßt sich das folgende Modell angeben. Wir repräsentieren die Gegenstände *in Lewis' Sinn* durch die maximal-konsistenten Eigenschaften (≙die Paare von Gegenständen und möglichen Welten) und definieren:

D1 x ist in z counterpart von y in z' := $MK^{\langle 0\rangle}(x)$ u. MK(z) u. MK(z') u. $MK^{\langle 0\rangle}(y)$ u. $Vk[Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } z)(k)]$ u. $y=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } z')(k)]]$

Die zu definierenden Begriffe der Counterpart Theory und ihre zu beweisenden Postulate findet man in "Counterpart Theory and Quantified Modal Logic" auf S. 27 von *Philosophical Papers I*:

D2 x ist counterpart von y := VzVz'(x ist in z counterpart von y in z')
Lewis: Cxy

D3 x ist in y := $MK^{\langle 0\rangle}(x)$ u. MK(y) u. $Vk[Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]]$
Lewis: Ixy

D4 x ist eine mögliche Welt := MK(x)
Lewis: Wx

D5 x ist aktual := x ist in w
Lewis: Ax

P1 ΛxΛy(I(x,y) imp. W(y))

Unmittelbar aus D3 und D4; das Prädikat W(τ) ist schon "besetzt" - siehe DT_Z32 -; davon sehen wir hier ab.)

P2 ΛxΛyΛz(I(x,y) u. I(x,z) imp. y=z)

Beweis: Ang. I(x,y) u. I(x,z), also mit D3 $MK^{\langle 0\rangle}(x)$ u. MK(y) u. $Vk[Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]]$ u. MK(z) u. $Vk'[Z^0(k')$ u. $x=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } z)(k')]]$, also $VkVk'[Z^0(k)$ u. $Z^0(k')$ u. MK(y) u. MK(z) u. $U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } z)(k')]]$, also mit

TT_Z205 $(b(y)\wedge^{\langle o \rangle} i(k))=(b(z)\wedge^{\langle o \rangle} i(k'))$, also mit TT_Z203 k=k' u. y=z.

P3 $\Lambda x \Lambda y$(C(x,y) imp. VzI(x,z))

Beweis: Ang. C(x,y), also mit D2 VzVz'(x ist in z counterpart von y in z'), also mit D1 VzVz'{$MK^{\langle o \rangle}(x)$ u. MK(z) u. MK(z') u. $MK^{\langle o \rangle}(y)$ u. Vk[$Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } z)(k)]$ u. $y=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } z')(k)]$]}, also Vz($MK^{\langle o \rangle}(x)$ u. MK(z) u. Vk[$Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } z)(k)]$]), also mit D3 VzI(x,z).

P4 $\Lambda x \Lambda y$(C(x,y) imp. VzI(y,z))

Siehe Beweis von P3.

P5 $\Lambda x \Lambda y \Lambda z$(I(x,y) u. I(z,y) u. C(x,z) imp. x=z)

Beweis: Ang. I(x,y) u. I(z,y) u. C(x,z), also nach D3, D2, D1 $MK^{\langle o \rangle}(x)$ u. MK(y) u. Vk[$Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]$] u. $MK^{\langle o \rangle}(z)$ u. Vk'[$Z^0(k')$ u. $z=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k')]$] u. VhVh'{MK(h) u. MK(h') u. Vk''($Z^0(k'')$ u. $x=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } h)(k'')]$ u. $z=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } h')(k'')]$)}, also $U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } h)(k'')]$ u. $U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k')]=U^{\langle o \rangle}[(f \text{ in } h')(k'')]$, also mit TT_Z205 $(b(y)\wedge^{\langle o \rangle} i(k))=(b(h)\wedge^{\langle o \rangle} i(k''))$ u. $(b(y)\wedge^{\langle o \rangle} i(k'))=(b(h')\wedge^{\langle o \rangle} i(k''))$, also mit TT_Z203 k=k'' u. y=h u. y=h' u. k'=k'', also k=k', also $U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k')]$, also x=z.

P6 $\Lambda x \Lambda y$(I(x,y) imp. C(x,x))

Beweis: x ist in y counterpart von x in y nach D1 genau dann, wenn $MK^{\langle o \rangle}(x)$ u. MK(y) u. Vk[$Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]$]; aus x ist in y counterpart von x in y folgt mit D2 x ist counterpart von x; nun ang. I(x,y), also mit D3 $MK^{\langle o \rangle}(x)$ u. MK(y) u. Vk[$Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle o \rangle}f[(f \text{ in } y)(k)]$]; also x ist in y counterpart von x in y; also x ist counterpart von x, d.h. C(x,x).

P7 Vx(W(x) u. Λy(I(y,x) äqu. A(y)))

Beweis: $MK(\underline{w})$ nach TT_Z106; also mit D4 $W(\underline{w})$;
$\wedge y(I(y,\underline{w})$ äqu. $A(y))$ gilt aufgrund von D5.

P8 $\quad \vee xA(x)$

Beweis: Gemäß AT_Z13 $\vee kZ^0(k)$; gemäß TT_Z106 $MK(\underline{w})$; also mit TT_Z211 $\vee k[Z^0(k)$ u. $MK^{\langle 0\rangle}(U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } \underline{w})(k)])$ u. $MK(\underline{w})$ u. $U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } \underline{w})(k)]=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } \underline{w})(k)]]$, also $\vee k[Z^0(k)$ u. $\vee x(MK^{\langle 0\rangle}(x)$ u. $MK(\underline{w})$ u. $x=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } \underline{w})(k)])]$, also $\vee x[MK^{\langle 0\rangle}(x)$ u. $MK(\underline{w})$ u. $\vee k(Z^0(k)$ u. $x=U^{\langle 0\rangle}f[(f \text{ in } \underline{w})(k)])]$, also mit D3 $\vee x(x$ ist in $\underline{w})$, also mit D5 $\vee xA(x)$.

Damit sind sämtliche Postulate von Lewis' *Counterpart Theory* bewiesen. Die counterpart-Beziehung in unserer Deutung ist darüberhinaus u. a. symmetrisch, wie man aus D1 sofort sieht. In "Counterpart Theory and Quantified Modal Logic" erachtet Lewis Symmetrie der counterpart-Beziehung als unplausibel (*Philosophical Papers I*, S. 28f); in *On the Plurality of Worlds* (S. 214) ist seine Einschätzung wesentlich moderater.

(b) Lewis antizipiert den Gedanken, auf dem unsere Deutung der counterpart-Beziehung beruht, wenn er in "Counterpart Theory etc." schreibt: "Carnap, Kanger, Hintikka, Kripke, Montague, and others have proposed interpretations of quantified modal logic on which one thing is allowed to be in several worlds. A reader of this persuasion might suspect that he and I differ only verbally: that what I call a thing in a world is just what he would call a <thing,world> pair, and that what he calls the same thing in several worlds is just what I would call a class of mutual counterparts. But beware. Our difference is not just verbal, for I enjoy a generality he cannot match. The counterpart relation will not, in general, be an equivalence relation. So it will not hold just between those of his <thing,world> pairs with the same first term, no matter how he may choose to identify things between worlds." (*Philosophical Papers I*, S. 28). Lewis sieht demgemäß neben der Symmetrie von C weitere über P1 - P8 hinausgehende Postulate (die wir bei unserer Deutung der counterpart-Beziehung sämtlich beweisen können) als unplausibel an (siehe ebd., 28f), so auch die Transitivität von C.

(c) Er selbst deutet die counterpart-Beziehung als eine Ähnlichkeitsrelation. Warum aber sollte eigentlich *ich-in-einer-anderen-Welt mir-in-dieser-Welt*, d.h. für Lewis: *mir* ähnlich sein, oder vielmehr ähnlicher als alle anderen Leibniz-Gegenstände dieser anderen Welt? ("Your counterparts resemble you closely in content and context in important respects. They resemble you more closely than do the other things in their worlds."; ebd., S. 28). In dieser anderen Welt entspricht mir vielleicht ein wahnsinniger Wissenschaftler wie Frankenstein und eben nicht der halbwegs vernünftige Mensch, der dort *genau dasselbe* Leben führt wie ich hier.[1] Darüberhinaus ist sich Lewis selbst wohl bewußt, wie inhaltlich vage die counterpart-Beziehung *als Ähnlichkeitsrelation* ist (für ihn ist das allerdings eine Tugend): "Like any relation of comparative overall similarity, it is subject to a great deal of indeterminacy (1) as to which respects of similarity and difference are to count at all, (2) as to the relative weights of the respects that do count, (3) as to the minimum standard of similarity that is required, and (4) as to the extent to which we eliminate candidates that are similar enough when they are beaten by competitors with stronger claims." (ebd., S. 42). Weiter: "... the counterpart relation ... may be subject to pragmatic pressures". Kann man also Lewis' counterpart-Beziehung überhaupt noch als eine *ontologische* Beziehung ansehen?[2] – Zwar genießt Lewis' Ansatz zur Deutung der counterpart-Beziehung größere Allgemeinheit als der unsrige; dafür wissen wir aber wenigstens, von welcher ontologischen Beziehung wir reden. Lewis freilich könnte sich unserer Deutung gar nicht anschließen, denn diese setzt das Vorhandensein von *Gegenständen* (Z°) voraus, während Lewis nur an *Leibniz-Gegenstände* ($\hat{=}MK^{(\circ)}$) glaubt.

Anmerkungen:

[1]Daß ich-in-einer-anderen-Welt mir-in-dieser-Welt nicht ähnlich zu sein brauche, bedeutet nicht, daß ich-in-einer-anderen-Welt vielleicht Beliebiges bin: ein Stein, ein Elektron, eine Teekanne etc. Was ich (als *Gegenstand*) sein kann, hängt von meinen essentiellen Eigenschaften ab. Diese sind Eigenschaften von jedem mir (als *Gegenstand*) entsprechenden *Leibniz-Gegenstand*, z.B. die Eigenschaft, kein Stein zu sein; also bin ich-in-einer-anderen-Welt kein Stein.

Zweifellos hat Plantinga recht, wenn er in *The Nature of Necessity*, S. 110 schreibt: "Socrates and Xenophon could have been such that the latter should have resembled Socrates as he was in the actual world more than the former". *Counterpart Theory* in der Deutung von Lewis - mit der counterpart-Beziehung als Ähnlichkeitsrelation - falsifiziert aber diesen Satz.

[2]Vergl. hierzu F. v. Kutschera, *Einführung in die intensionale Semantik*, S. 144f.

13. Die Existenz von Gegenständen und Leibniz-Gegenständen

(a) Ob wir von Gegenständen oder von Leibniz-Gegenständen redeten, gemeint waren in beiden Fällen mögliche Entitäten. Von diesen existieren gewisse, andere existieren nicht.[1] Bei Gegenständen spricht man statt von Existenz auch von *Subsistenz*; die Eigenschaft (das monadische Attribut 1. Stufe) der Subsistenz[2] bezeichnen wir mit $\underline{sub}$ (der Ausdruck ist unterstrichen, um ihn in seinem häufigsten Vorkommen von einer Funktionskonstante zu unterscheiden) und charakterisieren sie durch das Axiom

$AT_Z 21$ $\quad \mathrm{VzVz'}(\underline{sub}(z) \text{ u. } \underline{sub}(z') \text{ u. } z \neq z')$

Nach $TT_Z 193$ ist $AT_Z 21$ äquivalent mit $\mathrm{VzVz'}(Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ u. } z \neq z' \text{ u. } Z^{\langle 0 \rangle}(\underline{sub}) \text{ u. } \underline{sub}(z) \text{ u. } \underline{sub}(z'))$ – "Es gibt mindestens zwei Gegenstände, auf die die Eigenschaft der Subsistenz zutrifft" – eine wahre, aber gewiß nicht analytisch wahre Aussage.[3] Es schließen sich zwei Definitionen an:

$DT_Z 58$ $\quad E^{0}(\tau) := \underline{sub}(\tau)$
(τ ist ein existierender Gegenstand)

$DT_Z 59$ $\quad E^{\langle 0 \rangle}(\varphi) := \mathrm{Vz}(E^{0}(z) \text{ u. } \varphi(z))$
(φ ist eine existierende Eigenschaft)

Nach $DT_Z 58$ ist ein existierender Gegenstand etwas, auf das die Subsistenz zutrifft; und nach $DT_Z 59$ ist eine existierende Eigenschaft etwas, das auf einen existierenden Gegenstand zutrifft.

(b) Mit dem Prinzip (L) aus dem vorletzten Kapitel erhält man:

Für alle Gegenstände z, mögliche Welten y:
$\underline{sub}$ trifft_L auf z_L zu gdw. $\underline{sub}$ trifft auf z zu;
$\underline{sub}$ trifft_L auf z_L^{y} zu gdw. $\underline{sub}$ trifft in y auf z zu.

In welchem Verhältnis steht $\underline{sub}$ zum Prädikat Sub bzw. zum Namen $\underline{s}$ aus dem 2. Teil? – Die Prinzipien, die diese beiden Ausdrücke regieren, und ihre Umschriften sind:

AT7^{+} $\Lambda x(\mathrm{Sub}(x)$ imp. $\mathrm{MK}(x))$: $\Lambda f(\mathrm{Sub}(f)$ imp. $\mathrm{MK}^{\langle 0\rangle}(f))$
DT7^{+} $\underline{s} := \cap y\mathrm{Sub}(y)$: $\underline{s} := \cap^{\langle 0\rangle} f\mathrm{Sub}(f)$
TT31^{+} $\Lambda x(\underline{s}\langle x\rangle$ äqu. $\mathrm{Sub}(x))$: unverändert
AT8^{+} $\mathrm{V}x\mathrm{V}y(\mathrm{Sub}(x)$ u. $\mathrm{Sub}(y)$ u. $x\neq y)$: unverändert

Wir repräsentieren Leibniz-Gegenstände durch maximal-konsistente Eigenschaften, wobei $z_L := \cup^{\langle 0\rangle} f[f(z)]$, $z_L^y := \cup^{\langle 0\rangle} f[(f \text{ in } y)(z)]$ und "φ trifft$_L$ auf τ zu" := $\varphi\langle\tau\rangle$ (:= $\mathrm{MK}^{\langle 0\rangle}(\tau)$ u. $\varphi T^{\langle 0\rangle}\tau$). Sub ist das Prädikat, das für Leibniz-Gegenstände dieselbe Funktion erfüllt wie E^0 für Gegenstände; d.h. die Extensionen der beiden Prädikate müssen aufeinander abbildbar sein. Das gewährleistet folgende Definition:

(D) $\mathrm{Sub}(\varphi) := \mathrm{V}z(E^0(z)$ u. $\varphi = z_L)$[4]

Man sieht unschwer, daß damit AT7^{+} und AT8^{+} (wegen AT$_Z$21) resultieren. Demnach gilt auch $\Lambda f(\mathrm{Sub}(f)$ imp. $\underline{\mathrm{sub}}\langle f\rangle)$:

Ang. $\mathrm{Sub}(f)$, also mit (D) und DT$_Z$58 $\mathrm{V}z(\underline{\mathrm{sub}}(z)$ u. $f=z_L)$, also mit (L) $\underline{\mathrm{sub}}$ trifft$_L$ auf f zu, also $\underline{\mathrm{sub}}\langle f\rangle$.

Die Umkehrung hiervon gilt aber nicht. Man kann vielmehr sogar zeigen, daß ihr Gegenteil gilt: $\mathrm{V}f(\underline{\mathrm{sub}}\langle f\rangle$ u. non $\mathrm{Sub}(f))$, wenn man annimmt, daß irgendein existierender Gegenstand auch ohne eine gewisse Eigenschaft, die tatsächlich auf ihn zutrifft, hätte existieren können:

$\mathrm{V}z\mathrm{V}g(\underline{\mathrm{sub}}(z)$ u. $g(z)$ u. $\mathrm{V}y(\mathrm{MK}(y)$ u. $(\underline{\mathrm{sub}}$ in $y)(z)$ u. non $(g$ in $y)(z)))$, also mit (L) $\mathrm{V}z\mathrm{V}g\mathrm{V}y(\underline{\mathrm{sub}}(z)$ u. $g(z)$ u. $\mathrm{MK}(y)$ u. $\underline{\mathrm{sub}}\langle z_L^y\rangle$ u. non $g\langle z_L^y\rangle)$; ang. $\mathrm{Sub}(z_L^y)$, also nach (D) $\mathrm{V}z'(E^0(z')$ u. $z_L^y=(z')_L)$; also $z=z'$ u. $y=\underline{w}$ (denn $z_L^y = \cup^{\langle 0\rangle} f[(f \text{ in } y)(z)]$ u. $(z')_L = \cup^{\langle 0\rangle} f[f(z')]$, also nach TT$_Z$197 und TT$_Z$205 $z_L^y = (b(y)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z))$ u. $(z')_L = (b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle} i(z'))$; also $(b(y)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)) = (b(\underline{w})\wedge^{\langle 0\rangle} i(z'))$, also mit TT$_Z$203 – da $\mathrm{MK}(\underline{w})$ – $z=z'$ u. $y=\underline{w})$, also non $g\langle z_L^{\underline{w}}\rangle$, also mit (L) non $(g$ in $\underline{w})(z)$, also mit DT$_Z$56 und $\mathrm{MK}(\underline{w})$ non $(g,z)T\underline{w}$, also mit DT$_Z$31, DT$_Z$55 non $g(z)$ – Widerspruch; demnach non $\mathrm{Sub}(z_L^y)$; folglich $\mathrm{V}f(\underline{\mathrm{sub}}\langle f\rangle$ u. non $\mathrm{Sub}(f))$.

(c) Die Eigenschaft $\underline{sub}$ ist also von der Eigenschaft $\underline{s}$ ($=\cap^{\langle o\rangle}f\mathrm{Sub}(f)$) verschieden (denn für $\underline{s}$ gilt ja TT31^{+}). Das zeigt sich auch daran, daß es schwierig sein kann festzustellen, ob $(\underline{s}\wedge^{\langle o\rangle}f)\neq\underline{k}^{\langle o\rangle}$ (f ist irgendeine Eigenschaft), wie wir in II., 8., (e) ausgeführt haben; es ist dagegen nie schwierig festzustellen, ob $(\underline{sub}\wedge^{\langle o\rangle}f)\neq\underline{k}^{\langle o\rangle}$. So ist ohne Zweifel die Eigenschaft, zu subsistieren$_1$ ($=\underline{sub}$) und ein göttliches Wesen zu sein, eine Eigenschaft, die von der kontradiktorischen Eigenschaft verschieden ist, die also die kontradiktorische Eigenschaft nicht als Teil hat; folglich gibt es nach ParTT$_Z$91 eine maximal-konsistente Eigenschaft, von der zu subsistieren$_1$ und ein göttliches Wesen zu sein Teileigenschaften sind, also auf sie zutreffen$_L$. Eine solche Eigenschaft ist nach TT$_Z$204 und TT$_Z$205 der einem gewissen Gegenstand bzgl. einer gewissen möglichen Welt entsprechende Leibniz-Gegenstand. Also folgt nach (L), daß es einen Gegenstand gibt und eine mögliche Welt, so daß auf ihn in ihr zu subsistieren$_1$ und ein göttliches Wesen zu sein zutreffen - ein harmloses Ergebnis. Anders aber ist es, wenn man statt von Subsistieren$_1$ von Subsistieren$_2$ ($=\underline{s}$) ausgeht:

Ang. $(\underline{s}\wedge^{\langle o\rangle}\underline{g})\neq\underline{k}^{\langle o\rangle}$, also non $\underline{k}^{\langle o\rangle}T^{\langle o\rangle}(\underline{s}\wedge^{\langle o\rangle}\underline{g})$, also gemäß ParTT$_Z$91 $\mathrm{V}f(\mathrm{MK}^{\langle o\rangle}(f)$ u. $(\underline{s}\wedge^{\langle o\rangle}\underline{g})T^{\langle o\rangle}f)$, also $\mathrm{V}f(\mathrm{MK}^{\langle o\rangle}(f)$ u. $\underline{s}\langle f\rangle$ u. $\underline{g}\langle f\rangle)$ (ParTT$_Z$24), also nach TT$_Z$204, TT$_Z$205 $\mathrm{V}f(\mathrm{V}z\mathrm{V}y(Z^{0}(z)$ u. $\mathrm{MK}(y)$ u. $f=U^{\langle o\rangle}h[(h \text{ in } y)(z)])$ u. $\underline{s}\langle f\rangle$ u. $\underline{g}\langle f\rangle)$, also $\mathrm{V}z\mathrm{V}y(Z^{0}(z)$ u. $\mathrm{MK}(y)$ u. $\underline{s}\langle z^{y}_{\iota}\rangle$ u. $\underline{g}\langle z^{y}_{\iota}\rangle)$, also nach TT31^{+} $\mathrm{V}z\mathrm{V}y(Z^{0}(z)$ u. $\mathrm{MK}(y)$ u. $\mathrm{Sub}(z^{y}_{\iota})$ u. $\underline{g}\langle z^{y}_{\iota}\rangle)$, also mit (D) $\mathrm{V}z\mathrm{V}y(Z^{0}(z)$ u. $\mathrm{MK}(y)$ u. $\mathrm{V}z'(E^{0}(z')$ u. $z^{y}_{\iota}=(z')_{\iota})$ u. $\underline{g}\langle z^{y}_{\iota}\rangle)$, also mit (L) etc. $z=z'$ u. $y=\underline{w}$ u. $E^{0}(z')$ u. $(\underline{g} \text{ in } y)(z)$, also $\mathrm{V}z(E^{0}(z)$ u. $(\underline{g} \text{ in } \underline{w})(z))$, also mit DT$_Z$58, DT$_Z$56, DT$_Z$31, DT$_Z$55 $\mathrm{V}z(\underline{sub}(z)$ u. $\underline{g}(z))$ - "Es gibt einen Gegenstand, auf den zu subsistieren$_1$ und ein göttliches Wesen zu sein zutreffen". (Mit DT$_Z$58 und DT$_Z$59 $E^{\langle o\rangle}(\underline{g})$: "Göttlich zu sein ist eine existierende Eigenschaft".)

Bei der letzteren Deduktion ist freilich gegenüber der ersteren die Ausgangsannahme problematisch: Die Wahrheit von $(\underline{s}\wedge^{\langle o\rangle}\underline{g})\neq\underline{k}^{\langle o\rangle}$ liegt im Gegensatz zu der von $(\underline{sub}\wedge^{\langle o\rangle}\underline{g})\neq\underline{k}^{\langle o\rangle}$ nicht auf der Hand.

(d) Den Zusammenhang zwischen $\underline{s}$ und $\underline{sub}$ zeigen die folgenden Sätze:

(A) $\Lambda z(\underline{s}(z)$ äqu. $\underline{sub}(z))$

(i) Ang. $\underline{s}(z)$, also $\cap^{\langle 0\rangle}f\mathrm{Sub}(f)(z)$, also mit ParTT$_Z$63
$U^{\langle 0\rangle}f\Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. Sub(g) imp. $fT^{\langle 0\rangle}g)(z)$, also mit TT$_Z$195
($Z^0(z)$ aus $\underline{s}(z)$) $\Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $\Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. Sub(g) imp.
$fT^{\langle 0\rangle}g)$ imp. f(z)); nun *$Z^{\langle 0\rangle}(\underline{sub})$* (AT$_Z$21) und
$\Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. Sub(g) imp. $\underline{sub}T^{\langle 0\rangle}g)$, denn ang. Sub(g), also mit
(D) $Vz'(E^0(z')$ u. $g=(z')_L)$, also mit DT$_Z$58
$Vz'(\underline{sub}(z')$ u. $g=U^{\langle 0\rangle}f[f(z')])$, also mit ParTT$_Z$18
$\underline{sub}T^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}f[f(z')]$, also $\underline{sub}T^{\langle 0\rangle}g$;
folglich aus dem kursiv Geschriebenen $\underline{sub}(z)$;
(ii) ang. $\underline{sub}(z)$; ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $\Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. Sub(g) imp.
$fT^{\langle 0\rangle}g)$; zu zeigen ist f(z); nach (D), DT$_Z$58 gilt Sub(z_L);
da $z_L=U^{\langle 0\rangle}h[h(z)]$, $Z^{\langle 0\rangle}(z_L)$; also $fT^{\langle 0\rangle}z_L$, also mit DT$_Z$41
$(f,z)T(U^{\langle 0\rangle}h[h(z)],z)$, also mit TT$_Z$198 $(f,z)T\underline{w}$, also mit DT$_Z$31,
DT$_Z$55 f(z); wir haben also gezeigt
$\Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $\Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. Sub(g) imp. $fT^{\langle 0\rangle}g)$ imp. f(z)),
also mit TT$_Z$195 $U^{\langle 0\rangle}f\Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. Sub(g) imp. $fT^{\langle 0\rangle}g)(z)$,
also mit ParTT$_Z$63 $\cap^{\langle 0\rangle}f\mathrm{Sub}(f)(z)$, also $\underline{s}(z)$.

Die beiden Eigenschaften treffen also auf dieselben Gegenstände zu. Dagegen gilt nicht: $\Lambda x(\underline{s}\langle x\rangle$ äqu. $\underline{sub}\langle x\rangle)$ – daß die beiden Eigenschaften auf dieselben Leibniz-Gegenstände zutreffen$_L$. Es gilt nur $\Lambda x(\underline{s}\langle x\rangle$ imp. $\underline{sub}\langle x\rangle)$. (Wir haben Λf(Sub(f) imp. $\underline{sub}\langle f\rangle)$ gezeigt, woraus sich $\Lambda x(\underline{s}\langle x\rangle$ imp. $\underline{sub}\langle x\rangle)$ mit TT31$^+$ ergibt.) Zeigen läßt sich aber

(B) $\Lambda x(\underline{s}\langle x\rangle$ äqu. $Vz(Z^0(z)$ u. $x=z_L)$ u. $\underline{sub}\langle x\rangle)$

(i) Ang. $\underline{s}\langle x\rangle$, also $\underline{sub}\langle x\rangle$ – wie eben bewiesen worden ist;
also auch mit TT31$^+$ Sub(x), also mit (D) $Vz(E^0(z)$ u. $x=z_L)$,
also $Vz(Z^0(z)$ u. $x=z_L)$;
(ii) ang. $Vz(Z^0(z)$ u. $x=z_L)$ u. $\underline{sub}\langle x\rangle$, also $\underline{sub}T^{\langle 0\rangle}x$, also
$\underline{sub}T^{\langle 0\rangle}z_L$, also $\underline{sub}T^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}f[f(z)]$, also
$(\underline{sub},z)T(U^{\langle 0\rangle}f[f(z)],z)$, also mit TT$_Z$198 $(\underline{sub},z)T\underline{w}$ $[Z^0(z)]$,
also mit DT$_Z$31, DT$_Z$55 $\underline{sub}(z)$, also $E^0(z)$ mit DT$_Z$58, also
$Vz(E^0(z)$ u. $x=z_L)$, also Sub(x) mit (D), also mit TT31$^+$ $\underline{s}\langle x\rangle$.

Außerdem

(C_1) $\wedge z(Z^0(z) \text{ imp. } (\underline{s}\langle z_L\rangle \text{ äqu. } \underline{sub}(z)))$

(i) Ang. $Z^0(z)$, $s\langle z_L\rangle$; also nach (B) $\underline{sub}\langle z_L\rangle$, also mit (L) $\underline{sub}(z)$;
(ii) ang. $\underline{sub}(z)$, also $\underline{s}(z)$ nach (A), also mit (L) $\underline{s}\langle z_L\rangle$.

(C_2) $\wedge z(Z^0(z) \text{ imp. } (\underline{sub}\langle z_L\rangle \text{ äqu. } \underline{s}(z)))$

(i) Ang. $Z^0(z)$, $\underline{sub}\langle z_L\rangle$: also mit (L) $\underline{sub}(z)$, also $\underline{s}(z)$ nach (A);
(ii) ang. $\underline{s}(z)$, also $\underline{sub}(z)$ nach (A), also $\underline{sub}\langle z_L\rangle$ mit (L).

(e) Der einem Gegenstand bzgl. einer möglichen Welt, die von $\underline{w}$ verschieden ist, entsprechende Leibniz-Gegenstand subsistiert$_L$ nicht. Die Variante von Hans$_L$ (d.h. von Hans-in-$\underline{w}$), die einmal Geographie studiert, während Hans$_L$ niemals Geographie studiert, subsistiert$_L$ nicht. Dieses Resultat folgt aus (B):

(E) $\wedge x(\vee z \vee y(Z^0(z) \text{ u. } MK(y) \text{ u. } y \neq \underline{w} \text{ u. } x = z_L^y) \text{ imp. non } Sub(x))$

Ang. $\vee z \vee y(Z^0(z) \text{ u. } MK(y) \text{ u. } y \neq \underline{w} \text{ u. } x = z_L^y)$, also
non $\vee z'(Z^0(z') \text{ u. } x = (z')_L)$, denn aus der Annahme des Gegenteils würde sich ergeben $y = \underline{w}$; also mit (B) non $\underline{s}\langle x\rangle$, also mit $TT31^+$ non $Sub(x)$.

Der einem nichtexistenten Gegenstand bzgl. der wirklichen Welt entsprechende Leibniz-Gegenstand subsistiert$_L$ nicht:

(F) $\wedge x(\vee z(Z^0(z) \text{ u. non } E^0(z) \text{ u. } x = z_L) \text{ imp. non } Sub(x))$

Ang. $\vee z(Z^0(z) \text{ u. non } E^0(z) \text{ u. } x = z_L)$, also nach DT_Z58 non $\underline{sub}(z)$, also mit (C_1) non $\underline{s}\langle z_L\rangle$, also non $\underline{s}\langle x\rangle$, also mit $TT31^+$ non $Sub(x)$.

Pegasus$_L$ subsistiert$_L$ also nicht.

Umgekehrt gilt: Ein Leibniz-Gegenstand, der weder der einem Gegenstand bzgl. einer von $\underline{w}$ verschiedenen möglichen Welt entsprechende Leibniz-Gegenstand ist, noch der einem nichtexistenten

Gegenstand bzgl. der wirklichen Welt entsprechende Leibniz-Gegenstand, subsistiert$_L$:

(G) $\Lambda x(MK^{\langle o \rangle}(x)$ u. non $VzVy(Z^0(z)$ u. $MK(y)$ u. $y \neq \underline{w}$ u. $x = z_L^y)$ u. non $Vz(Z^0(z)$ u. non $E^0(z)$ u. $x = z_L)$ imp. $Sub(x))$

Ang. $MK^{\langle o \rangle}(x)$, also mit TT_Z204, TT_Z205 $VzVy(Z^0(z)$ u. $MK(y)$ u. $x = z_L^y)$; ang. non $VzVy(Z^0(z)$ u. $MK(y)$ u. $y \neq \underline{w}$ u. $x = z_L^y)$; also $Vz(Z^0(z)$ u. $x = z_L^{\underline{w}})$; ang. non $Vz(Z^0(z)$ u. non $E^0(z)$ u. $x = z_L)$; also, da $z_L = z_L^{\underline{w}}$, $Vz(E^0(z)$ u. $x = z_L)$, also mit (D) $Sub(x)$.

Anmerkungen:

[1]Plantinga argumentiert in *The Nature of Necessity* mit großem Aufwand (S. 121 - S. 152) dagegen, daß es mögliche, aber nichtexistente Gegenstände gibt. Er macht dabei bzgl. Sachverhalte einen Unterschied zwischen "nonexistent" und "unactual": "So a possible but unactual state of affairs is not a *nonexistent* state of affairs; it exists just as serenely as your most solidly actual state of affairs." (ebd., S. 132). Sonderbarerweise kommt ihm nicht der Gedanke, denselben Unterschied bzgl. Gegenstände zu machen; für ihn sind vielmehr die Behauptungen "Es gibt nichtexistente Gegenstände" und "Es gibt nichtaktuale Gegenstände" äquivalent - wie sich wiederholt zeigt (siehe ebd. S. 121, S. 136 und S. 153) -, obwohl er mit *keinem* Wort dafür argumentiert. Aber ist es demgegenüber nicht vielmehr so, daß es zwar - es sei einmal zugestanden - keine nichtexistenten Gegenstände gibt - in dem speziellen Sinn, in dem Plantinga das Wort "nichtexistent" (bzw. seine englische Entsprechung) versteht -, wohl aber nichtaktuale, ebenso wie es in diesem Sinn zwar keine nichtexistenten Sachverhalte, wohl aber nichtaktuale gibt? *Für uns* ist die Bedeutung von "nichtexistent" in allen Anwendungen analog zur Bedeutung von "nichtaktual" in Anwendung auf Sachverhalte (zu der Bedeutung von "unactual", die Plantinga erläutert), und darum gilt "that such [nonexistent] objects are no more to be boggled at than possible but unactual worlds or states of affairs" (*The Nature of Necessity,* S. 131).

[2]Diese Eigenschaft wird atemporal genommen. Sokrates subsistiert in diesem Sinn genauso wie George Bush und Julius Cäsar. Bellerophon aber subsistiert nicht.

[3]Aus AT_Z21 folgt AT_Z13. Wir behalten letzteres aber dennoch als Axiom bei, da für vieles nur AT_Z13 erforderlich ist. - AT_Z21 braucht nicht das einzige Axiom zur Charakterisierung von sub zu bleiben; ein weiteres wäre Λz(Z^0(z) imp. Vy[(sub in y)(z)]) - "Jeder Gegenstand existiert in einer möglichen Welt; jeder Gegenstand ist ein möglicher Gegenstand". Erwägenswert ist auch Λx(MK(x) imp. Vy[(sub in x)(y)]) - "In jeder möglichen Welt existiert mindestens ein Gegenstand".

[4]D.h. Vz(sub(z) u. $\varphi=z_L$). Der absolute Begriff der Subsistenz ist verallgemeinerbar zum relativen Begriff der Subsistenz in einer Welt: (D') Sub(τ,τ') := Vz((sub in τ')(z) u. $\tau=z_L^{\tau'}$). - Für D. Lewis fällt zusammen *x ist in (einer Welt) y* und *x existiert in y*, und daher *x ist in w* und *x existiert in w* (*x ist aktual*). Was in einer Welt existiert, ist in ihr; aber existiert in einer Welt alles, was in ihr ist? - Für Lewis, ja. Hier dagegen existieren (in der Regel) von den Leibniz-Gegenständen in einer Welt y manche in y, andere nicht. Wie im vorhergehenden Kapitel definiert: I(x,y) ("x ist in y") := $MK^{\langle 0\rangle}$(x) u. MK(y) u. Vk[Z^0(k) u. x=$U^{\langle 0\rangle}$f[(f in y)(k)]]; Lewis setzt (implizit) E(x,y) (" x existiert in y") := I(x,y); wir aber setzen E(x,y) := I(x,y) u. $subT^{\langle 0\rangle}$x. Es läßt sich zeigen, daß ΛxΛy(E(x,y) äqu. Sub(x,y))

gilt. Die Unterscheidung zwischen "x ist in y" und "x existiert in y" entkräftet *für uns* - auch bei Lewis' eigener Deutung der counterpart-Beziehung - einen Einwand, den Lewis gegen das Prinzip $\bigwedge x \bigwedge y[W(x)$ u. $W(y)$ u. $x \neq y$ imp. $\bigwedge z(I(z,x)$ imp. $\bigvee k(I(k,y)$ u. $C(z,k)))]$ vorbringt: "It would not have been plausible to postulate that, for any two worlds, anything in one was a counterpart of something in the other. Suppose there is something x_5 in world w_5 - say, Batman -which does not much resemble anything actual. If so, x_5 is not a counterpart of anything in the actual world." ("Counterpart Theory and Quantified Modal Logic", S. 29). - Daraus, daß Batman (als Leibniz-Gegenstand) keinem aktualen Leibniz-Gegenstand (keinem in der wirklichen Welt existierenden Leibniz-Gegenstand) ähnlich ist, folgt *für uns* nicht, daß er keinem Leibniz-Gegenstand in der wirklichen Welt ähnlich ist: daß er nicht Gegenstück von etwas in der wirklichen Welt ist.

14. Die Modellierung von Mengen

(a) Zwischen Eigenschaften und essentiellen Eigenschaften besteht ein Zusammenhang, der essentielle Eigenschaften geeignet macht, als Modelle von Mengen (von Gegenständen) zu fungieren. Zunächst:

TT_Z212 $\quad \Lambda f[Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ imp. } Vg(Z_E^{\langle o\rangle}(g) \text{ u. } \Lambda z(g(z) \text{ äqu. } f(z)))]$
(Zu jeder Eigenschaft gibt es eine essentielle Eigenschaft, die auf genau dieselben Gegenstände zutrifft)

Beweis: Ang. $Z^{\langle o\rangle}(f)$; man betrachte $\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k})$;
es gilt *Lemma*:
$\Lambda z(Z^{o}(z) \text{ imp. } (f(z) \text{ äqu. } (\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)=\underline{t}))$,
$\Lambda z(Z^{o}(z) \text{ imp. } (\text{non } f(z) \text{ äqu. } (\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)=\underline{k}))$;
Beweis von *Lemma*:

(i_1) ang. $Z^{o}(z)$, $f(z)$; also $Uy(\text{non } f(z) \text{ u. } y=\underline{k})=\underline{t}$ (nach TT_Z35, denn non $Vy(\text{non } f(z) \text{ u. } y=\underline{k})$), also nach AT_Z16 $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)=\underline{t}$;
(i_2) ang. $Z^{o}(z)$, non $f(z)$; also $Uy(\text{non } f(z) \text{ u. } y=\underline{k})=\underline{k}$ (nach TT_Z29 und TT_Z33, denn $\Lambda y(\text{non } f(z) \text{ u. } y=\underline{k} \text{ äqu. } y=\underline{k})$), also nach AT_Z16 $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)=\underline{k}$;
(ii_1) ang. $Z^{o}(z)$, $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)=\underline{t}$; also $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)\neq\underline{k}$ (TT_Z104), also mit (i_2) $f(z)$;
(ii_2) ang. $Z^{o}(z)$, $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)=\underline{k}$; also $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)\neq\underline{t}$ (TT_Z104), also mit (i_1) non $f(z)$;

Aus *Lemma* folgt sofort mit DT_Z49 und TT_Z143
$Z_E^{\langle o\rangle}(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}))$;
$\Lambda z(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k})(z) \text{ äqu. } f(z))$ sieht man wie folgt ein:
$(\underline{x})$ ang. $\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k})(z)$; also mit DT_Z55, DT_Z31 $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)T\underline{w}$; also auch nach TT_Z193 $Z^{o}(z)$; also $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)\neq\underline{k}$, denn sonst $\underline{k}T\underline{w}$, also, da $\underline{w}T\underline{k}$, mit AT_Z3 $\underline{w}=\underline{k}$, was AT_Z7 widerspricht; also mit *Lemma* $f(z)$;
$(\underline{xx})$ ang. $f(z)$, also mit TT_Z193 $Z^{o}(z)$; also mit *Lemma* $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)=\underline{t}$, also $(\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k}),z)T\underline{w}$, denn $\underline{t}T\underline{w}$; also mit DT_Z31, DT_Z55 $\lambda oUy(\text{non } f(o) \text{ u. } y=\underline{k})(z)$;

man erhält also $\mathrm{V}g(Z_E^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $\wedge z(g(z)$ äqu. $f(z)))$.

Die Verwandtschaft von TT_Z212 mit dem mengentheoretischen Komprehensionsaxiom ist augenfällig. Bei seinem Beweis wurde übrigens von der Annahme $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ nicht Gebrauch gemacht, so daß TT_Z212 auch ohne die Bedingung $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ formuliert werden kann.

Weiterhin gilt ein Theorem, das das Äquivalent zum mengentheoretischen Extensionalitätsaxiom ist:

TT_Z213 $\wedge g \wedge g'(Z_E^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $Z_E^{\langle 0\rangle}(g')$ u. $\wedge z(g(z)$ äqu. $g'(z))$ imp. $g=g')$
(*Essentielle Eigenschaften, die auf dieselben Gegenstände zutreffen, sind identisch*)

Beweis: Ang. $Z_E^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $Z_E^{\langle 0\rangle}(g')$ u. $\wedge z(g(z)$ äqu. $g'(z))$; also nach DT_Z49 $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g')$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(g,z)=\underline{t}$ o. $(g,z)=\underline{k})$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(g',z)=\underline{t}$ o. $(g',z)=\underline{k})$;
ang. $Z^0(z)$; also $((g,z)=\underline{t}$ o. $(g,z)=\underline{k})$ u. $((g',z)=\underline{t}$ o. $(g',z)=\underline{k})$,
also $(g,z)=\underline{t}$ u. $(g',z)=\underline{t}$ o. $(g,z)=\underline{t}$ u. $(g',z)=\underline{k}$ o. $(g,z)=\underline{k}$ u. $(g',z)=\underline{t}$ o. $(g,z)=\underline{k}$ u. $(g',z)=\underline{k}$;
im 1. und im 4. Fall folgt $(g,z)=(g',z)$, der 2. und 3. Fall ist dagegen ausgeschlossen: ang. $(g,z)=\underline{t}$ u. $(g',z)=\underline{k}$, also $g(z)$ u. non $g'(z)$ (denn $\underline{t}T\underline{w}$, aber non $\underline{k}T\underline{w}$ nach AT_Z7; DT_Z31, DT_Z55), was der 1. Annahme widerspricht;
ang. $(g,z)=\underline{k}$ u. $(g',z)=\underline{t}$, also non $g(z)$ u. $g'(z)$, was der 1. Annahme widerspricht;
wir haben also gezeigt $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(g,z)=(g',z))$, also mit TT_Z146 $\wedge z((g,z)=(g',z))$; also folgt mit AT_Z19 $g=g'$.

Aus TT_Z212 (ohne die weglaßbare Bedingung $Z^{\langle 0\rangle}(f)$) und TT_Z213 ergibt sich

TT_Z214 $\wedge f \mathrm{V}!g(Z_E^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $\wedge z(g(z)$ äqu. $f(z)))$

Man definiert:

DT_Z60 $rep(\varphi) := \iota g(Z_E^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $\wedge z(g(z)$ äqu. $\varphi(z)))$
(der essentielle Repräsentant von φ)

Der essentielle Repräsentant von f ist die Entsprechung zur Menge der z, auf die f zutrifft; wir sagen daher auch statt "der essentielle Repräsentant von φ": "die Extension von φ".[1]

(b) TT_Z212 und TT_Z213 sind verstärkbar. Über TT_Z213 hinaus gilt

TT_Z215 $\Lambda g \Lambda g'(Z_E^{<o>}(g)$ u. $Z_E^{<o>}(g')$ u. $Vy(MK(y)$ u. $\Lambda z[(g \text{ in } y)(z)$ äqu. $(g' \text{ in } y)(z)])$ imp. $g=g')$
(*Essentielle Eigenschaften, die in einer möglichen Welt auf dieselben Gegenstände zutreffen, sind identisch*)

Der Beweis von TT_Z215 ist völlig analog zu dem von TT_Z213; an der kritische Stelle heißt es nun: ang. $(g,z)=\underline{t}$ u. $(g',z)=\underline{k}$, also $(g \text{ in } y)(z)$ u. non $(g' \text{ in } y)(z)$ (denn $\underline{t}Ty$ u. $MK(y)$, aber non $\underline{k}Ty$ gemäß $MK(y)$; DT_Z56), was der 1. Annahme widerspricht. - Über TT_Z212 hinaus gilt

TT_Z216 $\Lambda f \Lambda y[Z^{<o>}(f)$ u. $MK(y)$ imp. $Vg(Z_E^{<o>}(g)$ u. $\Lambda z[(g \text{ in } y)(z)$ äqu. $(f \text{ in } y)(z)]])$
Zu jeder Eigenschaft und jeder möglichen Welt gibt es eine essentielle Eigenschaft, die in der möglichen Welt auf genau dieselben Gegenstände zutrifft)

Beweis: Ang. $Z^{<o>}(f)$ u. $MK(y)$; man betrachte $\lambda o Ux(\text{non } (f \text{ in } y)(o)$ u. $x=\underline{k})$; der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis von TT_Z212; es wird weder von der Annahme $Z^{o}(f)$ noch von der Annahme $MK(y)$ Gebrauch gemacht; statt DT_Z31, DT_Z55 kommt DT_Z56 zur Anwendung; $y \neq \underline{k}$, denn $MK(y)$ [gemäß TT_Z207] und TT_Z72; auch aus $(f \text{ in } y)(z)$ ergibt sich $Z^{o}(z)$ [wegen TT_Z207].

Aus TT_Z216 (ohne die weglaßbare Bedingung $Z^{<o>}(f)$) und TT_Z215 ergibt sich

TT_Z217 $\Lambda f \Lambda y[MK(y)$ imp. $V!g(Z_E^{<o>}(g)$ u. $\Lambda z[(g \text{ in } y)(z)$ äqu. $(f \text{ in } y)(z)]])$

In Verallgemeinerung von DT_Z60 definiert man:

DT_Z61 $rep(\varphi,\tau) := \iota g(Z_E^{<o>}(g)$ u. $\Lambda z[(g \text{ in } \tau)(z)$ äqu. $(\varphi \text{ in } \tau)(z)])$

(der essentielle Repräsentant von φ in τ)

Der essentielle Repräsentant von f in y ist die Entsprechung zur Menge der z, auf die f in y zutrifft; deshalb sagen wir auch statt "der essentielle Repräsentant von φ in τ": "die Extension von φ in τ".

(c) Gemäß der intensionalen Semantik sind zwei Eigenschaften identisch, wenn sie in jeder möglichen Welt dieselbe Extension haben. Wir können beweisen:

TT_Z218 $\quad \Lambda f \Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u.
$\Lambda y(MK(y)$ imp. $rep(f,y)=rep(g,y))$ imp. $f=g)$

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u.
$\Lambda y(MK(y)$ imp. $rep(f,y)=rep(g,y))$; ang. $f\neq g$; also nach AT_Z19
$Vz((f,z)\neq(g,z))$, also nach TT_Z146 $Vz(Z^0(z)$ u. $(f,z)\neq(g,z))$,
also mit AT_Z3 $Vz(Z^0(z)$ u. (non $(f,z)T(g,z)$ o. non $(g,z)T(f,z)))$,
also $Vz(Z^0(z)$ u. non $(f,z)T(g,z))$ o.
$Vz(Z^0(z)$ u. non $(g,z)T(f,z))$;
(x) ang. $Vz(Z^0(z)$ u. non $(f,z)T(g,z))$, also mit AT_Z5, da
$Z^1((f,z))$ und $Z^1((g,z))$ nach TT_Z145,
$Vx(QA(x)$ u. $xT(f,z)$ u. non $xT(g,z))$, also
$Vx(QA(x)$ u. non $M(x)$ u. $xT(f,z)$ u. non $xT(g,z))$, also mit DT_Z20
$Vx(El(x)$ u. $xT(f,z)$ u. non $xT(g,z))$, also mit TT_Z78, TT_Z55,
TT_Z59 $Vx(MK(\neg x)$ u. $\neg(f,z)T\neg x$ u. non $\neg(g,z)T\neg x)$, also
$Vy(MK(y)$ u. $\neg(f,z)Ty$ u. non $\neg(g,z)Ty)$, also
$Vy(MK(y)$ u. non $(f,z)Ty$ u. $(g,z)Ty)$ nach DT_Z24, DT_Z25 und DT_Z26
$[Z^1((f,z)), Z^1((g,z))]$, also
$Vy(MK(y)$ u. $(g$ in $y)(z)$ u. non $(f$ in $y)(z))$ mit DT_Z56; aus TT_Z217
folgt mit DT_Z61 $\Lambda f'\Lambda y(MK(y)$ imp. $Z_E^{\langle 0\rangle}(rep(f',y))$ u.
$\Lambda z[(rep(f',y)$ in $y)(z)$ äqu. $(f'$ in $y)(z)])$; demnach
$Vy(MK(y)$ u. $(rep(g,y)$ in $y)(z)$ u. non $(rep(f,y)$ in $y)(z))$, also
$Vy(MK(y)$ u. $rep(f,y)\neq rep(g,y))$, was der Annahme widerspricht;
(xx) ang. $Vz(Z^0(z)$ u. non $(g,z)T(f,z))$; man geht wie unter
(x) vor;
aus den ursprünglichen Annahmen ist also ein Widerspruch ableitbar; demnach ergibt sich das Gewünschte.

Anmerkungen:

[1] In "Towards a Generalized Mereology of Leśniewski" macht J. Słupecki auf S. 152f den Vorschlag, Mengen als Eigenschaften aufzufassen, die Konjunktionen sämtlicher Eigenschaften sind, die mit einer gewissen Eigenschaft extensionsgleich sind. Mit anderen Worten:

$\mathrm{Menge}_S(f) := \mathrm{V}g[Z^{\langle 0 \rangle}(g) \text{ u. } f=U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda x(h(x) \text{ äqu. } g(x))]$

Für Słupecki-Mengen gilt analog zu $TT_Z 212$

$\Lambda f[Z^{\langle 0 \rangle}(f) \text{ imp. } \mathrm{V}g(\mathrm{Menge}_S(g) \text{ u. } \Lambda z'(g(z') \text{ äqu. } f(z')))]$

Und analog zu $TT_Z 213$

$\Lambda g \Lambda g'(\mathrm{Menge}_S(g) \text{ u. } \mathrm{Menge}_S(g') \text{ u. } \Lambda z'(g(z') \text{ äqu. } g'(z')) \text{ imp. } g=g')$

Beweis: (1) Ang. $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$; man betrachte $U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))$;

offensichtlich $\mathrm{Menge}_S(U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z)))$; außerdem

$\Lambda z'(U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))(z') \text{ äqu. } f(z'))$:

(i) ang. $f(z')$; also $Z^{0}(z')$; also

$\Lambda h(Z^{\langle 0 \rangle}(h) \text{ u. } \Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z)) \text{ imp. } h(z'))$; also mit $TT_Z 195$

$U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))(z')$;

(ii) ang. $U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))(z')$; da $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ u.

$\Lambda z(f(z) \text{ äqu. } f(z))$, $fT^{\langle 0 \rangle}U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))$; also $f(z')$;

(2) ang. $\mathrm{Menge}_S(g)$ und $\mathrm{Menge}_S(g')$ u. $\Lambda z'(g(z') \text{ äqu. } g'(z'))$; also

$\mathrm{V}f[Z^{\langle 0 \rangle}(f) \text{ u. } g=U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))]$ u.

$\mathrm{V}f'[Z^{\langle 0 \rangle}(f') \text{ u. } g'=U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f'(z))]$; wie unter (1)

gezeigt: $\Lambda z'(U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))(z') \text{ äqu. } f(z'))$; also $\Lambda z'(g(z') \text{ äqu. } f(z'))$; also $\Lambda z'(g'(z') \text{ äqu. } f(z'))$, also, da

$Z^{\langle 0 \rangle}(g')$, $g'T^{\langle 0 \rangle}U^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))$; also $g'T^{\langle 0 \rangle}g$; analog

erhält man $gT^{\langle 0 \rangle}g'$; demnach $g=g'$.

Es gibt also mehr als eine Weise, Mengen (von Individuen) als Eigenschaften zu modellieren. - Man könnte auch definieren

$\mathrm{Menge}^{+}(f) := \mathrm{V}g[Z^{\langle 0 \rangle}(g) \text{ u. } f=\cap^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } g(z))]$

Auch hierbei gelten die entsprechenden Analoga von $TT_Z 212$ und $TT_Z 213$. (Man verwendet den $TT_Z 195$ entsprechenden Satz

$\Lambda z(Z^{0}(z) \text{ imp. } [\cap^{\langle 0 \rangle}hA[h](z') \text{ äqu. } \mathrm{V}h(Z^{\langle 0 \rangle}(h) \text{ u. } A[h] \text{ u. } h(z'))])$

und betrachtet $\cap^{\langle 0 \rangle}h\Lambda z(h(z) \text{ äqu. } f(z))$.)

15. Prädikate und Eigenschaften

(a) Einstelligen Prädikaten von PTZ_1, sofern sie sich auf Gegenstände allein beziehen, sind essentielle Eigenschaften im folgenden Sinne zugeordnet:

TT_Z219 ⋀z(A[z] imp. Z^0(z)) imp.
⋀z(λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$)(z) äqu. A[z])[1]

Beweis: Ang. ⋀z(A[z] imp. Z^0(z));
(i) ang. λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$)(z); also mit DT_Z55, DT_Z31 (λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$),z)T$\underline{w}$; also mit TT_Z193 Z^0(z); also mit AT_Z16 Uy(non A[z] u. y=$\underline{k}$)T$\underline{w}$, also Uy(non A[z] u. y=$\underline{k}$)≠$\underline{k}$ wegen $\underline{w}$≠$\underline{k}$ (AT_Z7); also A[z];
(ii) ang. A[z]; also Z^0(z) (gemäß Hauptannahme); also Uy(non A[z] u. y=$\underline{k}$)=$\underline{t}$, also Uy(non A[z] u. y=$\underline{k}$)T$\underline{w}$, also mit AT_Z16 (λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$),z)T$\underline{w}$, also mit DT_Z31, DT_Z55 λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$)(z).

TT_Z219 ist nur ein Spezialfall eines allgemeineren Theorems:

TT_Z220 ⋀z(A[z] imp. Z^0(z)) imp. ⋀x(MK(x) imp.
⋀z[(λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$) in x)(z) äqu. A[z]])

Der Beweis von TT_Z220 ist dem von TT_Z219 analog. - Hierbei gilt

TT_Z221 $Z_E^{\langle o\rangle}$(λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$))[2]

Damit erhält man aus TT_Z219 ⋀z(f(z) imp. Z^0(z)) imp.
$Z_E^{\langle o\rangle}$(λoUy(non f(o) u. y=$\underline{k}$)) u.
⋀z(λoUy(non f(o) u. y=$\underline{k}$)(z) äqu. f(z)), also wegen
⋀f⋀z(f(z) imp. Z^0(z)) *TT_Z212*. Und damit erhält man aus TT_Z220
⋀z((f in y')(z) imp. Z^0(z)) imp.
$Z_E^{\langle o\rangle}$(λoUy(non (f in y')(o) u. y=$\underline{k}$)) u.
⋀x(MK(x) imp. ⋀z[(λoUy(non (f in y')(o) u. y=$\underline{k}$) in x)(z) äqu. (f in y')(z)]), also wegen ⋀z((f in y')(z) imp. Z^0(z))
Vg($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u. ⋀x(MK(x) imp. ⋀z[(g in x)(z) äqu. (f in y')(z)])),
also Vg($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u. ⋀z[(g in y')(z) äqu. (f in y')(z)]) (wenn

non MK(y'), dann trivialerweise Λz[(g in y')(z) äqu. (f in y')(z)]); demnach *TT_Z216*.

(b) Wenn A[z] ein einstelliges Prädikat von PTZ_1 ist, das sich ausschließlich auf Gegenstände bezieht, welche Eigenschaft ($Z^{\langle o \rangle}$) intendiert es dann? Man wird nicht generell annehmen, daß es λoUy(non A[o] u. y=k) ist.

Nach DT_Z58 besagt $E^0(\tau)$ dasselbe wie sub(τ): ist also sub die von $E^0(\tau)$ intendierte Eigenschaft? ($E^0(\tau)$ ist ein Prädikat, das sich ausschließlich auf Gegenstände bezieht.) Wäre dem so, dann wäre gemäß DT_Z55, DT_Z31 sub die Eigenschaft, die (sub,τ)Tw intendiert; welche Eigenschaft intendiert dann aber (sub,τ)Tm (wo "m" ein Name für eine von w verschiedene mögliche Welt ist)? – sub ist entweder die Eigenschaft, die beide Prädikate intendieren, oder aber eine Eigenschaft, die von keinem der beiden intendiert wird; da ersteres gewiß nicht der Fall ist, gilt letzteres. – Welche ist aber dann die Eigenschaft, die $E^0(\tau)$, d.h. (sub,τ)Tw intendiert? Einen besseren Kandidaten als sub werden wir schwerlich finden. Oder doch?

In Frage kommt speziell s, d.h. $\cap^{\langle o \rangle}$fSub(f), d.h. nach Definition (D) in 13., (b) $\cap^{\langle o \rangle}$fVz(E^0(z) u. f=z_L).[3] Als Eigenschaft, die (sub,τ)Tm intendiert, empfiehlt sich dementsprechend $\cap^{\langle o \rangle}$fVz((sub,z)Tm u. f=z_L^m).

(c) Welche Eigenschaft ein monadisches Prädikat, das sich ausschließlich auf Gegenstände bezieht, intendiert, läßt sich allgemein schwerlich sagen. Es kommt auf das jeweilige Prädikat an. Bezeichnet a einen Gegenstand, so gilt nach TT_Z219 Λz(λoUy(o≠a u. y=k)(z) äqu. z=a). In diesem Fall sieht man einfach die essentielle Eigenschaft λoUy(o≠a u. y=k), d.h. i(a) als die von τ=a intendierte Eigenschaft an. Nicht immer wird man aber die zugehörige essentielle Eigenschaft als die Eigenschaft nehmen, die das Prädikat intendiert. Nach TT_Z219 gilt auch Λz(λoUy(non E^0(o) u. y=k)(z) äqu. E^0(z)), aber in diesem Fall sagt man eben nicht, $E^0(\tau)$ intendiere λoUy(non E^0(o) u. y=k), sondern vielmehr, daß es s intendiere.

Anmerkungen:

[1]Es gilt ohne einschränkende Bedingung:
E(Uy(non A u. y=k)) äqu. A. Jedem Satz von PTZ$_1$ ist also ein Sachverhalt zugeordnet, der genau dann besteht, wenn er wahr ist; nämlich jedem wahren Satz t und jedem falschen Satz k. Nur in gewissen Fällen wird man sagen, daß Uy(non A u. y=k) der Sachverhalt ist, den A intendiert.

[2]Wir können λoUy(non A[o] u. y=k) als "die Menge der Gegenstände z, so daß A[z]" lesen.

[3]Man beachte, daß gilt Λz(s(z) äqu. sub(z)) (siehe 13., (d)) und daher Λz(s(z) äqu. E (z)).

16. Modale Eigenschaften

(a) Unter *modalen Eigenschaften* versteht man Eigenschaften wie Notwendig-rot-sein, Möglicherweise-rot-sein etc.[1] Wie bildet man zu einer Eigenschaft eine zugehörige Modaleigenschaft?

DT_Z62 $\quad pos(\varphi) := \neg^{\langle o \rangle} nec(\neg^{\langle o \rangle} \varphi)$
(das Möglicherweise-φ-sein)

Nach DT_Z62 ist das Möglicherweise-f-sein die Negation des Notwendigerweise-nicht-f-seins. Was aber ist das Notwendigerweise-f-sein? - Folgendes muß (gegeben eine gewisse Auffassung von "notwendigerweise") sicherlich gelten:

$$\wedge f[Z^{\langle o \rangle}(f) \text{ imp. } \wedge z(nec(f)(z) \text{ äqu. } \wedge y(MK(y) \text{ imp. } (f \text{ in } y)(z)))]$$

Oder allgemeiner

TT_Z222 $\quad \wedge f \wedge x[Z^{\langle o \rangle}(f) \text{ u. } MK(x) \text{ imp.}$
$\wedge z[(nec(f) \text{ in } x)(z) \text{ äqu. } \wedge y(MK(y) \text{ imp. } (f \text{ in } y)(z))]]$

Das Notwendigerweise-f-sein trifft in der mögliche Welt x auf z genau dann zu, wenn die Eigenschaft f auf z in allen möglichen Welten zutrifft. Wegen DT_Z56 besagt $\wedge y(MK(y)$ imp. $(f$ in $y)(z))$ dasselbe wie $\wedge y(MK(y)$ imp. $(f,z)Ty)$, was nach TT_Z86, TT_Z90 äquivalent ist mit $(f,z)T\underline{t}$, d.h. mit $(f,z)=\underline{t}$. Wir haben also

TT_Z223 $\quad \wedge f \wedge x(Z^{\langle o \rangle}(f) \text{ u. } MK(x) \text{ imp.}$
$\wedge z[(nec(f) \text{ in } x)(z) \text{ äqu. } (f,z)=\underline{t}])$

Sei nun f irgendeine Eigenschaft;
($\underline{i}$) ang. $(nec(f),z)=\underline{t}$, also $(nec(f)$ in $\underline{w})(z)$, also mit TT_Z223 $(f,z)=\underline{t}$;
($\underline{ii}$) ang. $(f,z)=\underline{t}$, also mit TT_Z223
$\wedge x(MK(x)$ imp. $(nec(f)$ in $x)(z))$, also nach der zu TT_Z223 führenden Argumentation $(nec(f),z)=\underline{t}$;
($\underline{iii}$) $(nec(f),z)=\underline{k}$, also non $(nec(f)$ in $\underline{w})(z)$, also mit TT_Z223 $(f,z)\neq\underline{t}$;

($\underline{iv}$) $(f,z)\neq\underline{t}$, also mit TT_Z223
$\wedge x(MK(x)$ imp. non $(nec(f)$ in $x)(z))$, also nach DT_Z56
$\wedge x(MK(x)$ imp. non $(nec(f),z)Tx)$, also mit TT_Z91 $\underline{k}T(nec(f),z)$,
also $(nec(f),z)=\underline{k}$.
Demnach gilt

TT_Z224 $\wedge f[Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ imp. $\wedge z(((nec(f),z)=\underline{t}$ äqu. $(f,z)=\underline{t})$ u. $((nec(f),z)=\underline{k}$ äqu. $(f,z)\neq\underline{t}))]$

Das Notwendigerweise-f-sein ist also eine essentielle Eigenschaft.

(b)

DT_Z63 $nec(\varphi) := \lambda o U y((\varphi,o)\neq\underline{t}$ u. $y=\underline{k})$

Aufgrund dieser Definition[2] beweisen wir nun TT_Z222 (aus TT_Z222 ergeben sich, wie wir gesehen haben, die übrigen Theoreme in (a)):

Ang. $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$, $MK(x)$;
(i) $(nec(f)$ in $x)(z)$, also nach DT_Z56 und TT_Z207 $(nec(f),z)Tx$ u. $Z^0(z)$; also nach AT_Z16 und DT_Z63 $Uy((f,z)\neq\underline{t}$ u. $y=\underline{k})Tx$, also $Uy((f,z)\neq\underline{t}$ u. $y=\underline{k})\neq\underline{k}$ (wegen $MK(x)$), also $(f,z)=\underline{t}$, also $\wedge y(MK(y)$ imp. $(f,z)Ty$ u. $MK(y))$, also mit DT_Z56 $\wedge y(MK(y)$ imp. $(f$ in $y)(z))$;
(ii) $\wedge y(MK(y)$ imp. $(f$ in $y)(z))$, also $(f,z)=\underline{t}$ mit TT_Z90, also $Uy((f,z)\neq\underline{t}$ u. $y=\underline{k})=\underline{t}$, also mit AT_Z16, DT_Z63 $(nec(f),z)=\underline{t}$ ($Z^0(z)$, denn sonst $(f,z)=\underline{k}$ nach AT_Z15; aber $(f,z)=\underline{t}$), also wegen $MK(x)$ $(nec(f)$ in $x)(z)$. (Bei diesem Beweis wurde von der Annahme $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ kein Gebrauch gemacht; die Bedingung $Z^{\langle 0 \rangle}(f)$ in TT_Z222 kann also weggelassen werden.)

(c) Weiterhin gilt

TT_Z225 Für alle Eigenschaften f,g:
(i) $fT^{\langle 0 \rangle}nec(f)$,
(ii) $nec(f)=nec(nec(f))$,
(iii) $pos(nec(f))=nec(f)$,

(iv) $(nec(f)\supset^{\langle 0\rangle}nec(g))T^{\langle 0\rangle}nec((f\supset^{\langle 0\rangle}g))$,
(v) $Z_E^{\langle 0\rangle}(f)$ äqu. $nec(f)T^{\langle 0\rangle}f$.

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$, $Z^{\langle 0\rangle}(g)$;
($\underline{i}$) entweder $(f,z)=\underline{t}$ oder $(f,z)\neq\underline{t}$; im ersten Fall ist nach TT_Z224 $(nec(f),z)=\underline{t}$, also, da $\underline{t}T\underline{t}$, $(f,z)T(nec(f),z)$; im letzteren Fall ist nach TT_Z224 $(nec(f),z)=\underline{k}$, also $(f,z)T(nec(f),z)$, denn $\wedge y(Z^1(y)$ imp. $yT\underline{k})$; demnach $\wedge z((f,z)T(nec(f),z))$, also nach DT_Z41, da $Z^{\langle 0\rangle}(nec(f))$, $fT^{\langle 0\rangle}nec(f)$;
($\underline{ii}$) $\underline{nec(f)T^{\langle 0\rangle}nec(nec(f))}$ gemäß (i);
außerdem $\underline{nec(nec(f))T^{\langle 0\rangle}nec(f)}$: entweder $(nec(f),z)=\underline{t}$ oder $(nec(f),z)=\underline{k}$ – das folgt aus TT_Z224; im ersteren Fall ergibt sich mit TT_Z224 $(nec(nec(f)),z)=\underline{t}$; im letzteren Fall ergibt sich mit TT_Z224 wegen $\underline{k}\neq\underline{t}$ $(nec(nec(f)),z)=\underline{k}$; man erhält also in beiden Fällen $(nec(nec(f)),z)T(nec(f),z)$; etc.;
aus dem Unterstrichenen ergibt sich das Gewünschte mit TT_Z154;[3]
($\underline{iii}$) entweder $(nec(f),z)=\underline{t}$ oder $(nec(f),z)=\underline{k}$; im ersteren Fall $\neg(nec(f),z)=\neg\underline{t}$, also mit TT_Z54 $\neg(nec(f),z)=\underline{k}$, also mit AT_Z16 $[Z^0(z)$, denn $(nec(f),z)\neq\underline{k}]$ $(\lambda o\neg(nec(f),o),z)=\underline{k}$, also mit TT_Z180 $(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f),z)=\underline{k}$, also mit TT_Z224 $(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\underline{k}$ $(\underline{k}\neq\underline{t})$, also $\neg(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\neg\underline{k}$, also mit TT_Z54 $\neg(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\underline{t}$, also mit AT_Z16 $(\lambda o\neg(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),o),z)=\underline{t}$, also mit TT_Z180 $(\neg^{\langle 0\rangle}nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\underline{t}$, also mit DT_Z62 $(pos(nec(f)),z)=\underline{t}$;
demnach $\underline{(pos(nec(f)),z)=(nec(f),z)}$;
im letzteren Fall treffen wir die Zusatzannahme $Z^0(z)$ und schließen: also $\neg(nec(f),z)=\neg\underline{k}$, also mit TT_Z54 $\neg(nec(f),z)=\underline{t}$, also mit AT_Z16 $(\lambda o\neg(nec(f),o),z)=\underline{t}$, also mit TT_Z180 $(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f),z)=\underline{t}$, also mit TT_Z224 $(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\underline{t}$, also $\neg(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\neg\underline{t}$, also mit TT_Z54 $\neg(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\underline{k}$, also mit AT_Z16 $(\lambda o\neg(nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),o),z)=\underline{k}$, also mit TT_Z180 $(\neg^{\langle 0\rangle}nec(\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)),z)=\underline{k}$, also mit DT_Z62 $(pos(nec(f)),z)=\underline{k}$;
demnach $(pos(nec(f)),z)=(nec(f),z)$;
gezeigt ist folglich $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(pos(nec(f)),z)=(nec(f),z))$, also nach TT_Z146 $\wedge z((pos(nec(f)),z)=(nec(f),z))$, also mit AT_Z19 $pos(nec(f))=nec(f)$;
($\underline{iv}$) ang. $Z^0(z)$; zu zeigen ist
$((nec(f)\supset^{\langle 0\rangle}nec(g)),z)T(nec((f\supset^{\langle 0\rangle}g)),z)$, d.h. nach $ParDT_Z22$
$((\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)\vee^{\langle 0\rangle}nec(g)),z)T(nec((\neg^{\langle 0\rangle}f\vee^{\langle 0\rangle}g)),z)$;

$((\neg^{\langle 0\rangle}nec(f)\vee^{\langle 0\rangle}nec(g)),z)=(\lambda o((\neg^{\langle 0\rangle}nec(f),o)\vee(nec(g),o)),z)$
[mit TT_Z179] $=((\neg^{\langle 0\rangle}nec(f),z)\vee(nec(g),z))$ [mit AT_Z16]
$=((\lambda o\neg(nec(f),o),z)\vee(nec(g),z))$ [mit T_Z180]
$=(\neg(nec(f),z)\vee(nec(g),z))$ mit AT_Z16;
$(nec((\neg^{\langle 0\rangle}f\vee^{\langle 0\rangle}g)),z)=\underline{t}$ o. $(nec((\neg^{\langle 0\rangle}f\vee^{\langle 0\rangle}g)),z)=\underline{k}$ gemäß TT_Z224;
im letzteren Fall sind wir am Ziel; im ersteren Fall mit TT_Z224
$((\neg^{\langle 0\rangle}f\vee^{\langle 0\rangle}g),z)=\underline{t}$, also mit TT_Z179 $(\lambda o((\neg^{\langle 0\rangle}f,o)\vee(g,o)),z)=\underline{t}$,
also mit AT_Z16 $((\neg^{\langle 0\rangle}f,z)\vee(g,z))=\underline{t}$, also mit TT_Z180
$((\lambda o\neg(f,o),z)\vee(g,z))=\underline{t}$, also mit AT_Z16 $(\neg(f,z)\vee(g,z))=\underline{t}$
$[=(nec((\neg^{\langle 0\rangle}f\vee^{\langle 0\rangle}g)),z)]$;
wenn $(f,z)\neq\underline{t}$, dann nach TT_Z224 $(nec(f),z)=\underline{k}$, also
$\neg(nec(f),z)=\neg\underline{k}$, also mit TT_Z54 $\neg(nec(f),z)=\underline{t}$, also
$(\neg(nec(f),z)\vee(nec(g),z))=\underline{t}$;
wenn $(f,z)=\underline{t}$, dann $\neg(f,z)=\underline{k}$ (mit TT_Z54), also mit TT_Z53
$(\neg(f,z)\vee(g,z))=(g,z)$; also, da $(\neg(f,z)\vee(g,z))=\underline{t}$, $(g,z)=\underline{t}$, also
$(nec(g),z)=\underline{t}$ nach TT_Z224, also $(\neg(nec(f),z)\vee(nec(g),z))=\underline{t}$;
es gilt also $(\neg(nec(f),z)\vee(nec(g),z))=\underline{t}$, also
$(\neg(nec(f),z)\vee(nec(g),z))T(nec((\neg^{\langle 0\rangle}f\vee^{\langle 0\rangle}g)),z)$;
das Fragliche ist nun gezeigt; man wendet TT_Z146 an und DT_Z41
und erhält $(nec(f)\supset^{\langle 0\rangle}nec(g))T^{\langle 0\rangle}nec((f\supset^{\langle 0\rangle}g))$;
($\underline{y}$) ($\underline{x}$) $Z_E^{\langle 0\rangle}(f)$, also nach DT_Z49 $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t}$ o.
$(f,z)=\underline{k})$; ang. $Z^0(z)$; gemäß TT_Z224 $(nec(f),z)=\underline{t}$ o. $(nec(f),z)=\underline{k}$;
falls $(nec(f),z)=\underline{t}$, dann nach TT_Z224 $(f,z)=\underline{t}$; also
$\underline{(nec(f),z)T(f,z)}$; *falls* $(nec(f),z)=\underline{k}$, dann nach TT_Z224 $(f,z)\neq\underline{t}$,
also, da $Z^0(z)$, $(f,z)=\underline{k}$; also $\underline{(nec(f),z)T(f,z)}$; demnach
$\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(nec(f),z)T(f,z))$, also mit TT_Z146
$\wedge z((nec(f),z)T(f,z))$, also mit DT_Z41 $nec(f)T^{\langle 0\rangle}f$;
($\underline{xx}$) $nec(f)T^{\langle 0\rangle}f$; ang. $Z^0(z)$; $(nec(f),z)=\underline{t}$ o. $(nec(f),z)=\underline{k}$
gemäß TT_Z224; *falls* $(nec(f),z)=\underline{t}$, dann nach TT_Z224 $(f,z)=\underline{t}$;
falls $(nec(f),z)=\underline{k}$, dann wegen $(nec(f),z)T(f,z)$ $\underline{k}T(f,z)$, also
$(f,z)=\underline{k}$; demnach $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)=\underline{t}$ o. $(f,z)=\underline{k})$, also
$Z_E^{\langle 0\rangle}(f)$.

III., 16.: Modale Eigenschaften

Anmerkungen:

[1]Der Disput, ob neben Modalitäten *de dicto* [z.B MVxF(x)] Modalitäten *de re* [gegeben durch Quantifikation in modale Kontexte, z.B. VxMF(x)] sinnvoll sind (siehe W. V. Quine, *From a Logical Point of View*, S. 147ff; A. Plantinga, *The Nature of Necessity*, S. 222 - S. 251), reduziert sich auf die ontologische Frage, ob es modale Eigenschaften (von Gegenständen) gibt. Wem schon negative und disjunktive Eigenschaften suspekt sind (Armstrong z.B.; siehe II., 2., Anmerkung 1), dem werden es modale Eigenschaften erst recht sein. Wer aber Eigenschaften auf der hier angenommenen axiomatischen Basis akzeptiert, der muß auch modale Eigenschaften akzeptieren. Sie sind keine neuartigen Eigenschaften *neben* den gewöhnlichen Eigenschaften, sondern sie gehören schon zu den letzteren dazu.

[2]nec wie durch DT_Z63 definiert ist nur *eine* Notwendigkeitsfunktion für Eigenschaften. In Anmerkung 3 in I., 11. haben wir gezeigt, wie man verschiedene Notwendigkeitsfunktionen für Sachverhalte in PT definieren kann. Das können wir natürlich mutatis mutandis auch in PTZ_1. Wir haben also $n(\tau)$, $n_i(\tau)$ (wobei R_i die in die Definition von n_i eingehende Zugänglichkeitsrelation ist); dann können wir definieren $nec^*(\varphi) := \lambda on((\varphi,o))$, $nec_i(\varphi) := \lambda on_i((\varphi,o))$.

[3]Bei nec(nec(f)) haben wir den Fall einer iterierten Extraktion: nec(nec(f)) ist ja nur eine Abkürzung für $\lambda o'Uy'((\lambda oUy((f,o)\neq\underline{t}$ u. $y=\underline{k}),o')\neq\underline{t}$ u. $y'=\underline{k})$ (ein gutes Beispiel, um den Nutzen von Definitionen vorzuführen). Die Extraktion ist zwar iteriert, aber nicht *unmittelbar* iteriert, da ein sachverhaltsbildender Operator dazwischen geschoben ist. Zu unmittelbar iterierter Extraktion siehe TT_Z150.

17. Quantoren: Existenz- und Allquantor

(a) Quantoren sind Funktionen, die auf andere Weise als die Sättigungsfunktion aus einer Eigenschaft einen Sachverhalt bilden. Sie lassen sich in PTZ$_1$ problemlos definieren. Zunächst der Allquantor:

DT$_Z$64 𝐚(φ) := UxVz(Z^0(z) u. xT(φ,z))
(der Allsachverhalt von φ)

Der Allsachverhalt von f ist nach DT$_Z$64 die Konjunktion aller Sachverhalte, die Teilsachverhalt irgendeiner Sättigung von f mit einem Gegenstand sind. Alternativ hätte man auch definieren können 𝐚(φ) := UxVz(Z^0(z) u. x=(φ,z)). Nach der Alternativdefinition ist der Allsachverhalt von f die Konjunktion aller Sättigungen von f mit einem Gegenstand. Die beiden Definitionen sind gleichwertig, denn es gilt:

TT$_Z$226 UxVz(A[z] u. xT𝐈[z])=UxVz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z])

Beweis: Λx(Vz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z]) imp.
Vz(A[z] u. xT𝐈[z])): ang. Vz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z]),
also mit AT$_Z$2 𝐈[z]T𝐈[z], also Vz(A[z] u. xT𝐈[z]); demnach mit
TT$_Z$28 *UxVz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z])TUxVz(A[z] u. xT𝐈[z])*;
die Umkehrung hiervon wird mithilfe von AT$_Z$5 und TT$_Z$40 bewiesen:
ang. QA(x') u. x'TUxVz(A[z] u. xT𝐈[z]); falls M(x'), dann
x'TUxVz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z]); falls non M(x'), dann mit
TT$_Z$40 Vz'(x'Tz' u. Vz(A[z] u. z'T𝐈[z])), also mit AT$_Z$0
Vz'Vz(x'Tz' u. A[z] u. z'T𝐈[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. 𝐈[z]=𝐈[z]), also
mit AT$_Z$1 Vz(x'T𝐈[z] u. A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. 𝐈[z]=𝐈[z]), also
VxVz(x'Tx u. A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z]), also
Vx(x'Tx u. Vz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z])), also mit TT$_Z$40
x'TUxVz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z]); demnach
Λx'(QA(x') u. x'TUxVz(A[z] u. xT𝐈[z]) imp.
x'TUxVz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z])); also mit AT$_Z$5
UxVz(A[z] u. xT𝐈[z])TUxVz(A[z] u. Z^1(𝐈[z]) u. x=𝐈[z]);
aus dem kursiv Geschriebenen folgt mit AT$_Z$3 das Gewünschte.

(b) Für den Allquantor resultiert das folgende Gesetz des Wahrseins:

TT_Z227 $\Lambda f[W(\mathfrak{a}(f))$ äqu. $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $f(z))]$
Der Allsachverhalt von f ist genau dann wahr, wenn f auf alle Gegenstände zutrifft)

Beweis: (i) Ang. $W(\mathfrak{a}(f))$, also mit DT_Z32 und DT_Z31 $\mathfrak{a}(f)T\underline{w}$; ang. $Z^0(z)$; $Z^1((f,z))$, also mit AT_Z2 $(f,z)T(f,z)$; also $Vz'(Z^0(z')$ u. $(f,z)T(f,z'))$; also mit TT_Z18 $(f,z)TUxVz'(Z^0(z')$ u. $xT(f,z'))$, also mit DT_Z64 $(f,z)T\mathfrak{a}(f)$; demnach mit AT_Z1 $(f,z)T\underline{w}$, also mit DT_Z31, DT_Z55 $f(z)$; demnach $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $f(z))$;
(ii) $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $f(z))$; ang. $Vz(Z^0(z)$ u. $xT(f,z))$; also $xT\underline{w}$ mit der 1. Annahme, DT_Z55, DT_Z31, AT_Z1; also $\Lambda x(Vz(Z^0(z)$ u. $xT(f,z))$ imp. $xT\underline{w})$, also mit TT_Z18 $[Z^1(\underline{w})]$ $UxVz(Z^0(z)$ u. $xT(f,z))T\underline{w}$, also mit DT_Z64, DT_Z31, DT_Z32 $W(\mathfrak{a}(f))$.

Im Beweis von TT_Z227 steckt der Beweis für

TT_Z228 $\Lambda f\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)T\mathfrak{a}(f))$

Und TT_Z227 ist verallgemeinerungsfähig, da in seinem Beweis bzgl. $\underline{w}$ nur von $Z^1(\underline{w})$ Gebrauch gemacht wurde:

TT_Z229 $\Lambda y[Z^1(y)$ imp. $\Lambda f(\mathfrak{a}(f)Ty$ äqu. $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)Ty))]$

Wegen AT_Z0 und AT_Z13 – mit beiden ergibt sich aus $\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)Ty)$ $Z^1(y)$ – kann die Bedingung $Z^1(y)$ auch weggelassen werden.

(c) Nun zum (schwachen) Existenzquantor[1]:

DT_Z65 $\mathfrak{e}(\varphi) := Ux\Lambda z(Z^0(z)$ imp. $xT(\varphi,z))$
(der [schwache] Existenzsachverhalt von φ)

Nach DT_Z65 ist der Existenzsachverhalt von f die Konjunktion aller Sachverhalte, die Teil jeder Sättigung von f mit einem Gegenstand sind. Stattdessen hätte man auch definieren können $\mathfrak{e}(\varphi) := \cap xVz(Z^0(z)$ u. $x=(\varphi,z))$; hiernach ist der Existenzsachverhalt von f die Adjunktion aller Sättigungen von f mit einem Gegenstand. Die beiden Definitionen sind äquivalent:

TT_Z230 ∧f[U x∧z(Z^0(z) imp. xT(f,z))=∩x∨z(Z^0(z) u. x=(f,z))]

Beweis: ∧z(Z^0(z) imp. xT(f,z)), d.h.
∧y(∨z(Z^0(z) u. y=(f,z)) imp. xTy):
(i) ∧z(Z^0(z) imp. xT(f,z)); ∨z(Z^0(z) u. y=(f,z)); also
∨z(Z^0(z) u. xT(f,z) u. y=(f,z)), also xTy;
(ii) ∧y(∨z(Z^0(z) u. y=(f,z)) imp. xTy); Z^0(z); also
∨z'(Z^0(z') u. (f,z)=(f,z')); also xT(f,z);
folglich mit TT_Z28
U x∧z(Z^0(z) imp. xT(f,z))=U x∧y(∨z(Z^0(z) u. y=(f,z)) imp. xTy)=
U x∧y(Z^1(y) u. ∨z(Z^0(z) u. y=(f,z)) imp. xTy); letzteres
bezeichnet gemäß TT_Z63 dasselbe wie ∩x∨z(Z^0(z) u. x=(f,z)).

(d) Für den Existenzquantor gilt allgemein:

TT_Z231 ∧y∧f(∨z(Z^0(z) u. (f,z)Ty) imp. $\mathcal{E}$(f)Ty)

Beweis: ∨z(Z^0(z) u. (f,z)Ty), also
∨z∨x'(Z^0(z) u. Z^1(x') u. x'=(f,z) u. x'Ty), also
∨x'(Z^1(x') u. ∨z(Z^0(z) u. x'=(f,z)) u. x'Ty), also mit TT_Z65
∨x'(∩x∨z(Z^0(z) u. x=(f,z))Tx' u. x'Ty), also mit AT_Z1
∩x∨z(Z^0(z) u. x=(f,z))Ty, also $\mathcal{E}$(f)Ty gemäß TT_Z230 und DT_Z65.

Aus TT_Z231 ergibt sich insbesondere

TT_Z232 ∧f(∨z(Z^0(z) u. f(z)) imp. W($\mathcal{E}$(f)))
(*Wenn f auf einen Gegenstand zutrifft, dann ist der Existenzsachverhalt von f wahr*; abhängig von TT_Z231, DT_Z31, DT_Z55, DT_Z32)

Die Umkehrung von TT_Z231 läßt sich nicht zeigen. Es kann sein, daß der Existenzsachverhalt von f aus einem Sachverhalt y logisch folgt, ohne daß doch für irgendeinen Gegenstand z die Sättigung von f mit z aus y folgt. Dem entspricht: In der Praxis des Beweisens kommt es vor, daß man aus gewissen Axiomen einen Existenzsatz (Es-gibt-Satz) bewiesen hat, ohne doch in der Lage zu sein, aus diesen Axiomen eine seiner Instanzen zu beweisen; das kann daran liegen, daß es einen solchen Beweis gar nicht gibt (selbst wenn man - unter Beibehaltung der Axiome - die logischen Mittel auch noch so verstärkte). - Allerdings gilt die Umkehrung von TT$_Z$231, wenn man die Bedingung MK(y) hinzufügt:

TT$_Z$233 $\quad$ Λy(MK(y) imp. Λf(ε(f)Ty imp. Vz(Z^0(z) u. (f,z)Ty)))

Beweis: Ang. MK(y), ε(f)Ty; also mit DT$_Z$26, DT$_Z$25, DT$_Z$65
Λx(Z^1(x) imp. xTy o. ¬xTy) [Max(y)] u.
UxΛz(Z^0(z) imp. xT(f,z))Ty, also mit TT$_Z$96
Λy'(Z^1(y') u. Λz(Z^0(z) imp. y'T(f,z)) imp. y'Ty);
ang. Λz(Z^0(z) imp. non (f,z)Ty), also mit Max(y)
Λz(Z^0(z) imp. ¬(f,z)Ty) [Z^1((f,z))], also mit TT$_Z$60
Λz(Z^0(z) imp. ¬yT(f,z)); Z^1(¬y); also mit dem kursiv
Geschriebenen ¬yTy, also $\underline{k}$Ty, also y=$\underline{k}$ (yT$\underline{k}$, AT$_Z$3);
aber nach TT$_Z$72 folgt aus MK(y) y≠$\underline{k}$ - Widerspruch;
demnach Vz(Z^0(z) u. (f,z)Ty).

Aus TT$_Z$233 ergibt sich insbesondere wegen MK($\underline{w}$)

TT$_Z$234 $\quad$ Λf(W(ε(f)) imp. Vz(Z^0(z) u. f(z)))
(Wenn der Existenzsachverhalt von f wahr ist, dann gibt es einen Gegenstand, auf den f zutrifft)

(e) Wenn die auf Sachverhalte eingeschränkte Umkehrung von TT$_Z$233 gilt, dann ergibt sich, daß es für jeden nicht maximal-konsistenten Sachverhalt y ein f gibt, so daß der Existenzsachverhalt von f aus y logisch folgt, aber für keinen Gegenstand z die Sättigung von f mit z. Die auf Sachverhalte eingeschränkte Umkehrung von TT$_Z$233 gilt jedoch nicht; denn Z^1($\underline{k}$) und Λf(ε(f)T$\underline{k}$ imp. Vz(Z^0 u. (f,z)T$\underline{k}$)) (eine Konsequenz von AT$_Z$13, TT$_Z$145 und Λy(Z^1(y) imp. yT$\underline{k}$)); aber nicht MK($\underline{k}$). Was sich freilich zeigen läßt, ist

TT$_Z$235 $\quad$ Λy(Kon(y) u. Λf(ε(f)Ty imp. Vz$_3$(Z^0(z$_3$) u. (f,z$_3$)Ty)) imp. MK(y))

Beweis: Ang. Kon(y) u. Λf(ε(f)Ty imp. Vz$_3$(Z^0(z$_3$) u. (f,z$_3$)Ty));
zu zeigen bleibt nach DT$_Z$26 Max(y), d.h. nach DT$_Z$25

$\wedge x(Z^1(x)$ imp. xTy o. $\neg xTy)$;
ang. $Z^1(x)$; *Beweisstrategie*: es ist eine Eigenschaft zu finden, deren Sättigung mit einem gewissen Gegenstand x ist, mit einem gewissen anderen Gegenstand und allen weiteren Gegenständen $\neg x$; dann folgt $\vartheta(f)=\underline{t}$ und also $\vartheta(f)Ty$; demnach
$\vee z_3(Z^0(z_3)$ u. $(f,z_3)Ty)$; nun $(f,z_3)=x$ o. $(f,z_3)=\neg x$;
also xTy o. $\neg xTy$;

Lemma 1: $\wedge f[\vee y'(Z^1(y')$ u. $\vee z_1(Z^0(z_1)$ u. $(f,z_1)=y')$ u.
$\vee z_2(Z^0(z_2)$ u. $(f,z_2)=\neg y'))$ imp.
$\cap x' \vee z_0(Z^0(z_0)$ u. $x'=(f,z_0))=\underline{t}]$

Beweis von Lemma 1: ang. $Z^1(y')$ u. $\vee z_1(Z^0(z_1)$ u. $(f,z_1)=y')$ u.
$\vee z_2(Z^0(z_2)$ u. $(f,z_2)=\neg y')$; also mit TT_Z65
$\cap x' \vee z_0(Z^0(z_0)$ u. $x'=(f,z_0))Ty'$ u.
$\cap x' \vee z_0(Z^0(z_0)$ u. $x'=(f,z_0))T\neg y'$; also mit TT_Z23
$\cap x' \vee z_0(Z^0(z_0)$ u. $x'=(f,z_0))T(y' \vee \neg y')$, also mit TT_Z53
$\cap x' \vee z_0(Z^0(z_0)$ u. $x'=(f,z_0))T\underline{t}$, also
$\cap x' \vee z_0(Z^0(z_0)$ u. $x'=(f,z_0))=\underline{t}$;

Lemma 2:
$\wedge f \wedge z(Z^0(z)$ u. $f=[(b(x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z))\vee^{\langle 0\rangle} \cap^{\langle 0\rangle} g \vee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u.
$g=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))]$ imp. $(f,z)=x$ u. $\wedge z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ imp.
$(f,z')=\neg x))$

Beweis von Lemma 2: ang. $Z^0(z)$ u. $f=[\ \dots\ ]$;

$(\underline{X})$ $([\ \dots\ ],z)=\{((b(x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)),z)\vee(\cap^{\langle 0\rangle} g \vee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u.
$g=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z'))),z)\}$ (mit TT_Z179, AT_Z16);
in Entsprechung zu TT_Z156 gilt
$\cap^{\langle 0\rangle} gA[g]=\lambda o \cap y \vee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o))$;
also $([\ \dots\ ],z)=\{((b(x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z)),z)\vee(\lambda o \cap y \vee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u.
$\vee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $k=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))$ u. $y=(k,o)),z)\}$, also
$([\ \dots\ ],z)=\{((b(x),z)\wedge(i(z),z))\vee \cap y \vee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u.
$\vee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $k=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))$ u. $y=(k,z))\}$
(mit TT_Z178, AT_Z16); das Designatum des ersten Gliedes der Adjunktion ist gemäß TT_Z159 und TT_Z171 identisch mit dem Designatum von $(x\wedge\underline{t})$, d.h. mit dem Designatum von x; das Designatum des zweiten Gliedes der Adjunktion ist identisch mit dem Designatum von $\underline{k}$, <u>denn</u>:

$\bigvee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $k=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))$ u.
$y=(k,z))$ äqu. $\bigvee z'[Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=((b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')),z)]$
äqu. $\bigvee z'[Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=((b(\neg x),z)\wedge(i(z'),z))]$ (TT_Z178, AT_Z16) äqu. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=(\neg x\wedge \underline{k}))$ (mit TT_Z159, TT_Z171) äqu. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=\underline{k})$, demnach
$\bigcap y\bigvee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $k=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))$ u.
$y=(k,z))=\bigcap y\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=\underline{k})$; *und*
$\bigcap y\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=\underline{k})=\underline{k}$, denn
$\underline{k}T\bigcap y\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=\underline{k})$: $Z^1(\underline{k})$ u.
$\bigwedge x'(Z^1(x')$ u. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $x'=\underline{k})$ imp. $\underline{k}Tx')$; also mit TT_Z65 $\underline{k}T\bigcap y\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=\underline{k})$;
demnach:
$([\ \dots\ ],z)=\{x\vee\underline{k}\}$, also $([\ \dots\ ],z)=x$, also $(f,z)=x$;

($\underline{XX}$) ang. $Z^0(z_1)$ u. $z_1\neq z$; man erhält analog zu ($\underline{X}$)
$([\ \dots\ ],z_1)=\{((b(x),z_1)\wedge(i(z),z_1))\vee\bigcap y\bigvee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u.
$\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $k=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))$ u. $y=(k,z_1))\}$;
das Designatum des 1. Gliedes der Adjunktion ist gemäß TT_Z159 und TT_Z171 identisch mit dem Designatum von $(x\wedge\underline{k})$, d.h. mit dem Designatum von $\underline{k}$; das Designatum des 2. Gliedes der Adjunktion ist identisch mit dem Designatum von $\neg x$, <u>denn</u>:
$\bigvee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $k=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))$ u.
$y=(k,z_1))$ äqu. $\bigvee z'[Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=((b(\neg x),z_1)\wedge(i(z'),z_1))]$
äqu. $\bigvee z'[Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=(\neg x\wedge(i(z'),z_1))]$; demnach
$\bigcap y\bigvee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $k=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))$ u.
$y=(k,z_1))=\bigcap y\bigvee z'[Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=(\neg x\wedge(i(z'),z_1))]$; *und*
$\bigcap y\bigvee z'[Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=(\neg x\wedge(i(z'),z_1))]=\neg x$:
($\underline{i}$) $\neg x=(\neg x\wedge\underline{t})=(\neg x\wedge(i(z_1),z_1))$ (gemäß TT_Z171); $Z^0(z_1)$ u. $z_1\neq z$ u. $(\neg x\wedge(i(z_1),z_1))=(\neg x\wedge(i(z_1),z_1))$, also
$\bigvee z'[Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $(\neg x\wedge(i(z_1),z_1))=(\neg x\wedge(i(z'),z_1))]$; also mit TT_Z65 $\bigcap y\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=(\neg x\wedge(i(z'),z_1)))T\neg x$;
($\underline{ii}$) $Z^1(\neg x)$ u. $\bigwedge x'(Z^1(x')$ u. $\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u.
$x'=(\neg x\wedge(i(z'),z_1)))$ imp. $\neg xTx')$, also mit TT_Z65
$\neg xT\bigcap y\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u. $y=(\neg x\wedge(i(z'),z_1)))$;
demnach:
$([\ \dots\ ],z_1)=\{\underline{k}\vee\neg x\}$, also $([\ \dots\ ],z_1)=\neg x$, also $(f,z_1)=\neg x$;

gemäß AT_Z21 gilt $\bigvee z\bigvee z''(Z^0(z)$ u. $Z^0(z'')$ u. $z''\neq z)$; man betrachte die Eigenschaft
$[(b(x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z))\vee^{\langle 0\rangle}\bigcap^{\langle 0\rangle} g\bigvee z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ u.

$g=(b(\neg x)\wedge^{\langle 0\rangle} i(z')))]$, kurz: $[\ \ldots\ ]$;
gemäß Lemma 2 $([\ \ldots\ ],z)=x$ u. $\bigwedge z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ imp.
$([\ \ldots\ ],z')=\neg x)$;
also $([\ \ldots\ ],z'')=\neg x$;
also $Z^1(x)$ u. $\bigvee z_1(Z^0(z_1)$ u. $([\ \ldots\ ],z_1)=x)$ u.
$\bigvee z_2(Z^0(z_2)$ u. $([\ \ldots\ ],z_2)=\neg x)$, also mit Lemma 1
$\cap x'\bigvee z_0(Z^0(z_0)$ u. $x'=([\ \ldots\ ],z_0))=\underline{t}$, also mit TT_Z230, DT_Z65
$\vartheta([\ \ldots\ ])=\underline{t}$;
also $\vartheta([\ \ldots\ ])Ty$, demnach (laut Erstannahme) $\bigvee z_3(Z^0(z_3)$ u.
$([\ \ldots\ ],z_3)Ty)$;
$([\ \ldots\ ],z_3)=x$ o. $([\ \ldots\ ],z_3)=\neg x$, denn $([\ \ldots\ ],z)=x$ u.
$\bigwedge z'(Z^0(z')$ u. $z'\neq z$ imp. $([\ \ldots\ ],z')=\neg x)$ u. $(z_3=z$ o. $z_3\neq z)$;
also xTy o. $\neg xTy$.

(f) Gemäß TT_Z235[1] gibt es zu jedem konsistenten, aber nicht maximalen Sachverhalt (kurz: zu jedem nichtmaximalen Sachverhalt, denn ein nichtmaximaler Sachverhalt ist konsistent) ein f, so daß der Existenzsachverhalt von f aus ihm folgt, für keinen Gegenstand x aber die Sättigung von f mit x. (Ein solches f ist eine Eigenschaft; denn wenn der Existenzsachverhalt von f aus einem konsistenten Sachverhalt folgt, so ist f eine Eigenschaft; wäre f keine Eigenschaft: non $Z^{\langle 0\rangle}(f)$, so erhält man mit AT_Z15 $\bigwedge z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)=\underline{k})$, also $\bigwedge z(Z^0(z)$ imp. $\underline{k}T(f,z))$, also mit TT_Z18 $\underline{k}TUx\bigwedge z(Z^0(z)$ imp. $xT(f,z))$, also $\underline{k}T\vartheta(f)$; also folgt der Existenzsachverhalt von f nicht aus einem konsistenten Sachverhalt, denn sonst würde auch $\underline{k}$ aus diesem folgen und er wäre mithin nicht konsistent.)

Gemäß TT_Z235 ist es zu erwarten, daß man im Rahmen von gewissen Axiomensystemen (die über einen gewissen Reichtum der Sprache und der Beweismittel verfügen) auf *nichtersetzbare beispielfreie Existenzbeweise* stößt. Ein *beispielfreier* Existenzbeweis ist ein Beweis eines Es-gibt-Satzes, in dem keine von dessen Instanzen mitbewiesen wird; er ist *nichtersetzbar*, wenn es keinen beispielvollen Existenzbeweis für seinen Endsatz gibt. Beispielfreie nichtersetzbare Existenzbeweise heißen auch "nichtkonstruktive (nichteffektive) Existenzbeweise". Nichtkonstruktive Existenzbeweise werden von den Intuitionisten abgelehnt, und sie schränken die Beweismittel generell derart ein, daß solche Beweise nicht mehr durchführbar sind.[3] Dies erscheint von unserem Standpunkt aus verfehlt. Schuld am Auftreten eines nichtkonstruktiven Existenzbeweises - wenn man schon etwas gegen solche hat - sind gemäß TT_Z235 recht besehen nicht die Beweismittel, sondern vielmehr bloß die Tatsache, daß das Axiomensystem (über Gegenstände) keinen maximalen Sachverhalt intendiert; was bei (konsistenten) Axiomensystemen die Regel ist (selbst wenn man den logischen Raum ihrer intendierten Interpretation nach einschränkt, also $\underline{k}$ als kleiner annimmt, als es wirklich ist). Ein Intuitionist wird freilich den vorausgesetzten semantisch-ontologischen Rahmen bestreiten: daß Sätze von ihnen unabhängige Sachverhalte intendieren, die gewissen ontologischen Gesetzen gehorchen (denen die klassischen logischen Gesetze korrespondieren).[4]

III., 17.: Quantoren

Anmerkungen:

[1] Den starken Existenzquantor definiert man so:
$\mathfrak{E}^{*}(\varphi) := \mathrm{U}x\Lambda z(E^{0}(z)\text{ imp. }xT(\varphi,z))$.

[2] Der Beweis von TT_Z235 zeigt auch

$\Lambda y(Z^{1}(y)\text{ u. }\Lambda f(\mathfrak{E}(f)Ty\text{ imp. }\mathrm{V}z(Z^{0}(z)\text{ u. }(f,z)Ty))\text{ imp. }Max(y))$;

und es gilt auch $\Lambda y[Max(y)\text{ imp. }Z^{1}(y)\text{ u. }\Lambda f(\mathfrak{E}(f)Ty\text{ imp.}$

$\mathrm{V}z(Z^{0}(z)\text{ u. }(f,z)Ty))]$ wegen TT_Z233 und $Z^{1}(\underline{k})$ u.

$\Lambda f(\mathfrak{E}(f)T\underline{k}\text{ imp. }\mathrm{V}z(Z^{0}(z)\text{ imp. }(f,z)T\underline{k}))$. Wir haben also eine neue Weise gefunden, die Maximalität eines Sachverhaltes zu beschreiben.

[3] Siehe dazu E. W. Beth, *Mathematical Thought*, S. 82f, und L. Borkowski, *Formale Logik*, S. 372ff.

[4] Die Intuitionisten lehnen auch nichtkonstruktive Disjunktionsbeweise ab. Ein nichtkonstruktiver Disjunktionsbeweis ist ein Beweis für einen Oder-Satz, bei dem keine von dessen Alternativen mitbewiesen wird und bzgl. dem es keinen Beweis für seinen Endsatz gibt, bei dem eine von dessen Alternativen mitbewiesen wird. Die Ablehnung nichtkonstruktiver Disjunktionsbeweise bedingt wie die Ablehnung nichtkonstruktiver Existenzbeweise (beide gehören inhaltlich zusammen: Es-gibt-Sätze lassen sich denken als unendlich lange Oder-Sätze) die Elimination von logischen Gesetzen. Das prominenteste Beispiel ist das Tertium-non-datur. Wieder erscheint dies von unserem Standpunkt aus verfehlt. Axiomensysteme intendieren in der Regel keine maximalen Sachverhalte; damit ist das Auftreten von nichtkonstruktiven Disjunktionsbeweisen vorprogrammiert, denn für jeden nichtmaximalen Sachverhalt x gibt es (verschiedene) Sachverhalte y und z, so daß weder y noch z aus x logisch folgt, wohl aber (yvz). Die Beweismittel sind am Auftreten nichtkonstruktiver Disjunktionsbeweise eigentlich unschuldig, *obwohl* man sie natürlich dafür verantwortlich machen kann; was die Intuitionisten tun. Ihre Vorgehensweise erinnert mithin von fern an die des wahnsinnigen Weltherrschers, der um der allseits akzeptierten prima facie Tatsache zu entgehen, daß noch lange Zeit Menschen leben werden, die einmal sterben müssen, sämtliche Menschen töten läßt.

18. Anzahlsachverhalte und Anzahlquantoren

(a) Ein (endlicher) Anzahlsachverhalt bzgl. der Eigenschaft f ist ein Sachverhalt, für den gilt, daß er für eine natürliche Zahl $0 \leq n$ in einer möglichen Welt genau dann wahr, d.h. Teil von ihr ist, wenn f auf genau n Gegenstände in ihr zutrifft. Als Beispiel für eine mögliche Welt werden wir in diesem Kapitel $\underline{w}$ verwenden. Die gewonnenen Resultate können mutatis mutandis auf alle möglichen Welten verallgemeinert werden. Für jede Eigenschaft f lassen sich mithilfe von *Anzahlquantoren* Anzahlsachverhalte bzgl. f bilden. Anzahlquantoren werden definiert, indem man zunächst Mindestanzahlquantoren definiert, dann mit deren Hilfe Höchstanzahlquantoren; durch Mindest- und Höchstanzahlquantoren lassen sich Anzahlquantoren ausdrücken.

(b) Dementsprechend resultiert das folgende dreistufige Definitionsschema:

$\mathrm{DT_Z66}$ (i) ($\underline{x}$) $8^{\geq 1}(\varphi) := \cap y \vee z_1 (Z^0(z_1) \text{ u. } y=(\varphi, z_1))$

($\underline{xx}$) $8^{\geq 2}(\varphi) := \cap y \vee z_1 \vee z_2 [Z^0(z_1) \text{ u. } Z^0(z_2) \text{ u. } z_1 \neq z_2 \text{ u. } y=((\varphi, z_1) \wedge (\varphi, z_2))]$

$8^{\geq 3}(\varphi) := \cap y \vee z_1 \vee z_2 \vee z_3 [Z^0(z_1) \text{ u. } Z^0(z_2) \text{ u. } Z^0(z_3) \text{ u. } z_1 \neq z_2 \text{ u. } z_1 \neq z_3 \text{ u. } z_2 \neq z_3 \text{ u. } y=((\varphi, z_1) \wedge (\varphi, z_2) \wedge (\varphi, z_3))]$

.
.
.

$8^{\geq n}(\varphi) := \cap y \vee z_1 \ldots \vee z_n [Z^0(z_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } Z^0(z_n) \text{ u. } Ver(z_1, \ldots, z_n) \text{ u. } y=((\varphi, z_1) \wedge \ldots \wedge (\varphi, z_n))]$

(n ist eine arabische Ziffer nach "1"; $Ver(z_1, \ldots, z_n)$ besagt dasselbe wie "$z_1, \ldots, z_n$ sind paarweise voneinander verschieden")

(ii) $8^{\leq 1}(\varphi) := \neg 8^{\geq 2}(\varphi)$

$8^{\leq 2}(\varphi) := \neg 8^{\geq 3}(\varphi)$

.
.
.

$\mathfrak{s}^{\leq n}(\varphi) := \neg\mathfrak{s}^{\geq n+1}(\varphi)$

(n ist eine arabische Ziffer nach "0"; n+1 ist die auf n folgende arabische Ziffer)

(iii) ($\underline{x}$) $\mathfrak{s}^{0}(\varphi) := \neg\mathfrak{s}^{\geq 1}(\varphi)$

($\underline{xx}$) $\mathfrak{s}^{1}(\varphi) := (\mathfrak{s}^{\geq 1}(\varphi)\wedge\mathfrak{s}^{\leq 1}(\varphi))$

$\mathfrak{s}^{2}(\varphi) := (\mathfrak{s}^{\geq 2}(\varphi)\wedge\mathfrak{s}^{\leq 2}(\varphi))$

.
.
.

$\mathfrak{s}^{n}(\varphi) := (\mathfrak{s}^{\geq n}(\varphi)\wedge\mathfrak{s}^{\leq n}(\varphi))$

(n ist eine arabische Ziffer nach "0")

(c) Es gilt nun:

TT_Z236 Für jede arabische Ziffer n nach "0":
$\wedge f(W(\mathfrak{s}^{\geq n}(f))$ äqu. $V^{\geq n}z(Z^{0}(z)$ u. $f(z)))$

Beweis: ($\underline{xx}$) Für n nach "1":
($\underline{i}$) Ang. $V^{\geq n}z(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$, also $Vz_1\ldots Vz_n(Z^{0}(z_1)$ u. ... u. $Z^{0}(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $f(z_1)$ u. ... u. $f(z_n))$ (zu "$Ver(z_1,\ldots,z_n)$" siehe DT_Z66(i)), also $Vz_1\ldots Vz_n(Z^{0}(z_1)$ u. ... u. $Z^{0}(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $(f,z_1)T\underline{w}$ u. ... u. $(f,z_n)T\underline{w}))$ mit DT_Z55, DT_Z31, also mit TT_Z24 $Vz_1\ldots Vz_n(Z^{0}(z_1)$ u. ... u. $Z^{0}(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))T\underline{w})$, also $Vz_1\ldots Vz_n(Z^{0}(z_1)$ u. ... u. $Z^{0}(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $Vx_1\ldots Vx_n[Z^{0}(x_1)$ u. ... u. $Z^{0}(x_n)$ u. $Ver(x_1,\ldots,x_n)$ u. $((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))=((f,x_1)\wedge\ldots\wedge(f,x_n))]$ u. $((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))T\underline{w})$, also mit TT_Z65 $Vz_1\ldots Vz_n($ ... u. $\cap yVx_1\ldots Vx_n[Z^{0}(x_1)$ u. ... u. $Z^{0}(x_n)$ u. $Ver(x_1,\ldots,x_n)$ u. $y=((f,x_1)\wedge\ldots\wedge(f,x_n))]T((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))$ u. $((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))T\underline{w})$, also mit DT_Z66(i) und AT_Z1 $\mathfrak{s}^{\geq n}(f)T\underline{w}$, also mit DT_Z31, DT_Z32 $W(\mathfrak{s}^{\geq n}(f))$; (dieser Teilbeweis ist unabhängig

von irgendwelchen axiomatischen Annahmen über $\underline{w}$;)
($\underline{ii}$) ang. $W(\mathfrak{s}^{\geq n}(f))$, also $\mathfrak{s}^{\geq n}(f)T\underline{w}$, also mit $DT_Z66(i)$
$\bigcap y \vee z_1 \ldots \vee z_n [Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $y=((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))]T\underline{w}$;
ang. non $V^{\geq n}z(Z^0(z)$ u. $f(z))$, also non $\vee z_1 \ldots \vee z_n (Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $f(z_1)$ u. ... u. $f(z_n))$, also mit DT_Z55, DT_Z31 non $\vee z_1 \ldots \vee z_n (Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $(f,z_1)T\underline{w}$ u. ... u. $(f,z_n)T\underline{w})$, also mit TT_Z24 non $\vee z_1 \ldots \vee z_n (Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))T\underline{w})$, also *non $\vee y(Z^1(y)$ u. $\vee z_1 \ldots \vee z_n [Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u. $y=((f,z_1)\wedge\ldots\wedge(f,z_n))]$ u. $yT\underline{w})$;*
es gilt nun $\bigcap yA[y]T\underline{w}$ imp. $\vee y(Z^1(y)$ u. $A[y]$ u. $yT\underline{w})$ gemäß TT_Z115, so daß sich also das kursiv Geschriebene widerspricht; demnach $V^{\geq n}(Z^0(z)$ u. $f(z))$.

($\underline{x}$) Für n gleich "1":
Gemäß $DT_Z66(i)$, TT_Z230, DT_Z65 $\mathfrak{s}^{\geq 1}(f)=\mathfrak{s}(f)$; außerdem $V^{\geq 1} := V$; also mit TT_Z232, TT_Z234 das Gewünschte.

(d) Aus TT_Z236 folgt mit $DT_Z66(ii)$

TT_Z237 $\quad \wedge f(W(\mathfrak{s}^{\leq n}(f))$ äqu. $V^{\leq n}z(Z^0(z)$ u. $f(z)))$
(n nach "0")

Beweis: (i) Ang. $W(\mathfrak{s}^{\leq n}(f))$, also mit $DT_Z66(ii)$ $W(\neg\mathfrak{s}^{\geq n+1}(f))$, also non $W(\mathfrak{s}^{\geq n+1}(f))$ (wegen $MK(\underline{w})$), also mit TT_Z236 non $V^{\geq n+1}z(Z^0(z)$ u. $f(z))$, also $V^{\leq n}z(Z^0(z)$ u. $f(z))$;
(ii) ang. $V^{\leq n}z(Z^0(z)$ u. $f(z))$, also non $V^{\geq n+1}z(Z^0(z)$ u. $f(z))$, also mit TT_Z236 non $W(\mathfrak{s}^{\geq n+1}(f))$, also $W(\neg\mathfrak{s}^{\geq n+1}(f))$ (wegen $MK(\underline{w})$), also mit $DT_Z66(ii)$ $W(\mathfrak{s}^{\leq n}(f))$.

Mit TT_Z236, TT_Z237 und $DT_Z66(iii)$ erhält man

TT_Z238 $\quad \wedge f(W(\mathfrak{s}^{n}(f))$ äqu. $V^{=n}z(Z^0(z)$ u. $f(z)))$
(für jede arabische Ziffer n)

Beweis: ($\underline{xx}$) n nach "0":
(i) Ang. $W(\mathfrak{s}^{n}(f))$, also mit $DT_Z66(iii)$ $W((\mathfrak{s}^{\geq n}(f)\wedge\mathfrak{s}^{\leq n}(f)))$,

also mit TT_Z98 $W(\beta^{\geq n}(f))$ u. $W(\beta^{\leq n}(f))$, also mit TT_Z236 und TT_Z237 $V^{\geq n}z(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$ u. $V^{\leq n}z(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$, also $V^{=n}z(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$;

(ii) man lese (i) in umgekehrter Richtung.

($\underline{x}$) n gleich "0":

(i) Ang. $W(\beta^{0}(f))$, also mit DT_Z66(iii) $W(\neg\beta^{\geq 1}(f))$, also, da $\beta^{\geq 1}(f)=\beta(f)$, $W(\neg\beta(f))$, also wegen MK($\underline{w}$) non $W(\beta(f))$, also mit TT_Z232 non $Vz(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$, also $V^{=0}z(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$;

(ii) $V^{=0}z(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$, also non $Vz(Z^{0}(z)$ u. $f(z))$, also mit TT_Z234 non $W(\beta(f))$, also wegen MK($\underline{w}$) $W(\neg\beta(f))$, also $W(\neg\beta^{\geq 1}(f))$, also mit DT_Z66(iii) $W(\beta^{0}(f))$.

19. Quantorengesetze

(a) In diesem Kapitel werden u. a. einige ontologische Gesetze bewiesen, die in vollkommener Analogie zu prädikatenlogischen Gesetzen stehen.

TT_Z239 $\wedge f \wedge g[Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ imp. $\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))=(\mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{a}(g))]$
(Der Allsachverhalt der Konjunktion der Eigenschaften f und g ist die Konjunktion des Allsachverhalts von f und des Allsachverhalts von g)

Beweis: Ang. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$, $Z^{\langle 0\rangle}(g)$;
$\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))=UxVz(Z^0(z)$ u. $xT((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z))$ (DT_Z64);
$Vz(Z^0(z)$ u. $xT((f\wedge^{\langle 0\rangle}g),z))$ äqu. [TT_Z178]
$Vz(Z^0(z)$ u. $xT(\lambda o((f,o)\wedge(g,o)),z))$ äqu. [AT_Z16]
$Vz(Z^0(z)$ u. $xT((f,z)\wedge(g,z)))$; demnach mit TT_Z29
$\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))=UxVz(Z^0(z)$ u. $xT((f,z)\wedge(g,z)))$;
$\mathfrak{a}(f)=UxVz(Z^0(z)$ u. $xT(f,z))$, $\mathfrak{a}(g)=UxVz(Z^0(z)$ u. $xT(g,z))$ (DT_Z64);
(i) $Vz(Z^0(z)$ u. $xT(f,z))$ imp. $Vz(Z^0(z)$ u. $xT((f,z)\wedge(g,z)))$, $Vz(Z^0(z)$ u. $xT(g,z))$ imp. $Vz(Z^0(z)$ u. $xT((f,z)\wedge(g,z)))$ [gemäß TT_Z25, AT_Z2, AT_Z1]; also $\mathfrak{a}(f)T\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))$ u. $\mathfrak{a}(g)T\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))$ gemäß TT_Z28, also *$(\mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{a}(g))T\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))$* gemäß TT_Z24;
(ii) ang. $QA(r)$ u. $rTUxVz(Z^0(z)$ u. $xT((f,z)\wedge(g,z)))$;
(x) $M(r)$; also $rT(\mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{a}(g))$;
(xx) non $M(r)$; also mit TT_Z40 $Vy(rTy$ u. $Vz(Z^0(z)$ u. $yT((f,z)\wedge(g,z))))$, also mit AT_Z1 $Vz(Z^0(z)$ u. $rT((f,z)\wedge(g,z)))$; also, da $QA(r)$, mit TT_Z38 $Vz(Z^0(z)$ u. $(rT(f,z)$ o. $rT(g,z)))$, also $Vz(Z^0(z)$ u. $rT(f,z))$ o. $Vz(Z^0(z)$ u. $rT(g,z))$, also mit TT_Z18 $rTUxVz(Z^0(z)$ u. $xT(f,z))$ o. $rTUxVz(Z^0(z)$ u. $xT(g,z))$, also $rT\mathfrak{a}(f)$ o. $rT\mathfrak{a}(g)$, also $rT(\mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{a}(g))$ [TT_Z25]; demnach $\wedge r(QA(r)$ u. $rT\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))$ imp. $rT(\mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{a}(g)))$, also mit AT_Z5
$\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))T(\mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{a}(g))$;
aus dem kursiv Geschriebenen in (i) und (ii) mit AT_Z3
$\mathfrak{a}((f\wedge^{\langle 0\rangle}g))=(\mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{a}(g))$.

TT_Z240 $\wedge f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ imp. $\mathfrak{e}(f)=\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle 0\rangle}f))$
(Der Existenzsachverhalt der Eigenschaft f ist die

Negation des Allsachverhalts der Negation von f)

Beweis: Ang. $Z^{\langle o\rangle}(f)$; $\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)=\neg\bigcup x\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } x=(\neg^{\langle o\rangle}f,z))$ [nach der Alternative zu DT$_Z$64]; $\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } x=(\neg^{\langle o\rangle}f,z))$ äqu. [TT$_Z$180] $\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } x=(\lambda o\neg(f,o),z))$ äqu. [AT$_Z$16] $\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } x=\neg(f,z))$; demnach mit TT$_Z$29 $\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)=\neg\bigcup x\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } x=\neg(f,z))$; $\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } x=\neg(f,z))$ äqu. $\bigvee y(Z^{1}(y) \text{ u. } \bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } y=(f,z)) \text{ u. } x=\neg y)$; demnach mit TT$_Z$29 $\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)=\neg\bigcup x\bigvee y(Z^{1}(y) \text{ u. } \bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } y=(f,z)) \text{ u. } x=\neg y)$, also mit TT$_Z$64 $\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)=\bigcap x\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } x=(f,z))$, also mit TT$_Z$230, DT$_Z$65 $\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)=\mathfrak{e}(f)$.

TT$_Z$241 $\bigwedge f\bigwedge g(Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } Z^{\langle o\rangle}(g) \text{ imp. } \mathfrak{e}((f\vee^{\langle o\rangle}g))=(\mathfrak{e}(f)\vee\mathfrak{e}(g)))$

(Der Existenzsachverhalt der Adjunktion der Eigenschaften f und g ist die Adjunktion des Existenzsachverhalts von f und des Existenzsachverhalts von g)

Beweis: Ang. $Z^{\langle o\rangle}(f)$, $Z^{\langle o\rangle}(g)$; mit TT$_Z$239 $\mathfrak{a}((\neg^{\langle o\rangle}f\wedge^{\langle o\rangle}\neg^{\langle o\rangle}g))=(\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)\wedge\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}g))$; nun $(\neg^{\langle o\rangle}f\wedge^{\langle o\rangle}\neg^{\langle o\rangle}g)=\neg^{\langle o\rangle}(f\vee^{\langle o\rangle}g)$ gemäß ParTT$_Z$56; also $\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}(f\vee^{\langle o\rangle}g))=(\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)\wedge\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}g))$, also $\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}(f\vee^{\langle o\rangle}g))=\neg(\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)\wedge\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}g))$, also $\mathfrak{e}((f\vee^{\langle o\rangle}g))=(\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}f)\vee\neg\mathfrak{a}(\neg^{\langle o\rangle}g))$ mit TT$_Z$240 und TT$_Z$57, TT$_Z$55, also mit TT$_Z$240 $\mathfrak{e}((f\vee^{\langle o\rangle}g))=(\mathfrak{e}(f)\vee\mathfrak{e}(g))$.

(b)

TT$_Z$242 $\bigwedge f(Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ imp. } \mathfrak{e}(f)T\mathfrak{a}(f))$

(Der Existenzsachverhalt einer Eigenschaft folgt aus dem Allsachverhalt dieser Eigenschaft)

Beweis: Ang. $Z^{\langle o\rangle}(f)$; gemäß TT$_Z$228 $\bigwedge z(Z^{0}(z) \text{ imp. } (f,z)T\mathfrak{a}(f))$; gemäß AT$_Z$13 $\bigvee zZ^{0}(z)$; also $\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } (f,z)T\mathfrak{a}(f))$, also mit TT$_Z$231 $\mathfrak{e}(f)T\mathfrak{a}(f)$; von der Annahme $Z^{\langle o\rangle}(f)$ wurde kein Gebrauch gemacht; die Bedingung $Z^{\langle o\rangle}(f)$ in TT$_Z$242 kann daher weggelassen werden.

Im Beweis von TT_Z242 wird von AT_Z13, das besagt, daß es Gegenstände gibt, Gebrauch gemacht. Im System ohne AT_Z13 (und darum ohne AT_Z21, aus dem AT_Z13 folgt) ist also nichttrivial beweisbar: $\vee zZ^0(z) \text{ imp. } \wedge f(\mathfrak{b}(f)T\mathfrak{a}(f))$; und im System ohne AT_Z13 ist auch die Umkehrung hiervon: $\wedge f(\mathfrak{b}(f)T\mathfrak{a}(f)) \text{ imp. } \vee zZ^0(z)$ nichttrivial beweisbar: Ang. $\wedge f(\mathfrak{b}(f)T\mathfrak{a}(f))$, also $\mathfrak{b}(f)T\mathfrak{a}(f)$; gäbe es keine Gegenstände, so würde gelten: $\mathfrak{a}(f)=Ux\vee z(Z^0(z) \text{ u. } xT(f,z))=\underline{t}$,
$\mathfrak{b}(f)=Ux\wedge z(Z^0(z) \text{ imp. } xT(f,z))=\underline{k}$; also $\underline{k}T\underline{t}$, also $\underline{k}=\underline{t}$, was TT_Z104 widerspricht; demnach $\vee zZ^0(z)$.

Außerdem läßt sich im System ohne AT_Z13
$\wedge f(\mathfrak{a}(f)T\mathfrak{b}(f)) \text{ äqu. } \wedge z\wedge z'(Z^0(z) \text{ u. } Z^0(z') \text{ imp. } z=z')$ zeigen:
($\underline{i}$) Ang. $\wedge z\wedge z'(Z^0(z) \text{ u. } Z^0(z') \text{ imp. } z=z')$, also
$\wedge x[\vee z(Z^0(z) \text{ u. } xT(f,z)) \text{ imp. } \wedge z(Z^0(z) \text{ imp. } xT(f,z))]$, also
mit TT_Z28 $Ux\vee z(Z^0(z) \text{ u. } xT(f,z))TUx\wedge z(Z^0(z) \text{ imp. } xT(f,z))$, also
$\mathfrak{a}(f)T\mathfrak{b}(f)$;
($\underline{ii}$) $\wedge f(\mathfrak{a}(f)T\mathfrak{b}(f))$; ang. $Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$; also $\mathfrak{a}(i(z))T\mathfrak{b}(i(z))$,
also $Ux\vee z_1(Z^0(z_1) \text{ u. } xT(i(z),z_1))TUx\wedge z_1(Z^0(z_1) \text{ imp. }$
$xT(i(z),z_1))$;
$Ux\wedge z_1(Z^0(z_1) \text{ imp. } xT(i(z),z_1))T\underline{t}$, denn
$\wedge x(\wedge z_1(Z^0(z_1) \text{ imp. } xT(i(z),z_1)) \text{ imp. } xT\underline{t})$:
ang. $\wedge z_1(Z^0(z_1) \text{ imp. } xT(i(z),z_1))$, also mit $Z^0(z)$ $xT(i(z),z)$,
also mit TT_Z171 $xT\underline{t}$;
aus dem kursiv Geschriebenen mit TT_Z28
$Ux\wedge z_1(Z^0(z_1) \text{ imp. } xT(i(z),z_1))TUx(xT\underline{t})$; und außerdem $Ux(xT\underline{t})=\underline{t}$;
demnach mit AT_Z1 $Ux\vee z_1(Z^0(z_1) \text{ u. } xT(i(z),z_1))T\underline{t}$;
ist $z\neq z'$, so gilt $(i(z),z')=\underline{k}$ mit TT_Z171; $\vee z_1(Z^0(z_1) \text{ u. }$
$(i(z),z')T(i(z),z_1))$ [mit AT_Z2], also mit TT_Z18
$(i(z),z')TUx\vee z_1(Z^0(z_1) \text{ u. } xT(i(z),z'))$; also mit AT_Z1 $\underline{k}T\underline{t}$, also
$\underline{t}=\underline{k}$ im Widerspruch zu TT_Z104; demnach $z=z'$.

Mit den beiden bewiesenen Äquivalenzen folgt im System ohne AT_Z13 $\wedge f(\mathfrak{a}(f)=\mathfrak{b}(f)) \text{ äqu. } \vee!zZ^0(z)$.

(c) Die Entsprechungen zu den interessantesten Quantorenverschiebungsgesetzen der Prädikatenlogik sind diese beiden Gleichungen:

TT_Z243 Für alle x und f: $Z^1(x)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ imp.
($\underline{a}$) $\mathfrak{a}(\lambda o((f,o)\supset x))=(\mathfrak{b}(f)\supset x)$,
($\underline{b}$) $\mathfrak{b}(\lambda o((f,o)\supset x))=(\mathfrak{a}(f)\supset x)$

Beweis: Ang. $Z^1(x)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$;

zu (a): $\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))=Ux'Vz(Z^0(z) u. x'T(λo((f,o)⊃x),z))
[DT_Z64]; Vz(Z^0(z) u. x'T(λo((f,o)⊃x),z)) äqu.
Vz(Z^0(z) u. x'T((f,z)⊃x)) [AT_Z16] äqu. Vz(Z^0(z) u.
x'T(¬(f,z)vx)) [DT_Z22] äqu. Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z) u. x'Tx)
[TT_Z23] äqu. Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx; also
mit TT_Z29 $\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))=Ux'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
Λx'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx imp.
Vz(Z^0(z) u. x'T($\neg^{\langle o\rangle}$f,z))) [TT_Z180, AT_Z16]; also mit TT_Z28
Ux'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx)TUx'Vz(Z^0(z) u. x'T($\neg^{\langle o\rangle}$f,z));
also *$\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))T$\mathfrak{a}$($\neg^{\langle o\rangle}$f);*
trivialerweise mit TT_Z28
Ux'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx)TUx'(x'Tx); also
$\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))Tx [TT_Z30]; aus dem kursiv Geschriebenen mit
TT_Z23 $\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))T($\mathfrak{a}$($\neg^{\langle o\rangle}$f)vx), also wegen DT_Z22, TT_Z55
$\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))T(¬$\mathfrak{a}$($\neg^{\langle o\rangle}$f)⊃x), also mit TT_Z240
$\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))T($\mathfrak{b}$(f)⊃x);
($\mathfrak{b}$(f)⊃x)T$\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x)):
wie oben gezeigt
$\mathfrak{a}$(λo((f,o)⊃x))=Ux'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
($\mathfrak{b}$(f)⊃x)=(¬$\mathfrak{a}$($\neg^{\langle o\rangle}$f)⊃x) [*TT_Z240*] =($\mathfrak{a}$($\neg^{\langle o\rangle}$f)vx) [*DT_Z22, TT_Z55*]
=(Ux'Vz(Z^0(z) u. x'T($\neg^{\langle o\rangle}$f,z))vx) [*DT_Z64*] =
(Ux'Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z))vx) [*AT_Z16, TT_Z180, TT_Z29*];
es ist also noch zu zeigen:

(Ux'Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z))vx)TUx'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx)

ang. QA(r) u. rT(Ux'Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z))vx), also mit TT_Z23
rTUx'Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. rTx;
(x) M(r), dann rTUx'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
(xx) non M(r); dann mit TT_Z40 Vk(rTk u. Vz(Z^0(z) u. kT¬(f,z))),
also mit AT_Z1 Vz(Z^0(z) u. rT¬(f,z)); also Vz(Z^0(z) u. rT¬(f,z))
u. rTx, also mit TT_Z18 rTUx'(Vz(Z^0(z) u. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
aufgrund dieser Argumentation folgt mit AT_Z5 das Gewünschte;
aus dem Unterstrichenen ergibt sich (a) mit AT_Z3;

zu (b): $\mathfrak{b}$(λo((f,o)⊃x))=Ux'Λz(Z^0(z) imp. x'T(λo((f,o)⊃x),z))
(DT_Z65);
Λz(Z^0(z) imp. x'T(λo((f,o)⊃x),z)) äqu.
Λz(Z^0(z) imp. x'T((f,z)⊃x)) [AT_Z16] äqu.
Λz(Z^0(z) imp. x'T(¬(f,z)vx)) [DT_Z22] äqu.

Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z) u. x'Tx) [TT$_Z$23] äqu.
Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u.Λz(Z^0(z) imp. x'Tx) äqu.
Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. x'Tx [AT$_Z$13];
demnach mit TT$_Z$29
β(℩o((f,o)⊃x))=Ux'(Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
Λx'(Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. x'Tx imp.
Λz(Z^0(z) imp. x'T(¬$^{\langle 0\rangle}$f,z))) mit AT$_Z$16, TT$_Z$180; also mit
TT$_Z$28, DT$_Z$65 β(℩o((f,o)⊃x))Tβ(¬$^{\langle 0\rangle}$f);
Λx'(Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. x'Tx imp. x'Tx), also mit TT$_Z$28,
TT$_Z$30 β(℩o((f,o)⊃x))Tx;
also mit TT$_Z$23 β(℩o((f,o)⊃x))T(β(¬$^{\langle 0\rangle}$f)vx),also mit DT$_Z$22,
TT$_Z$55 β(℩o((f,o)⊃x))T(¬β(¬$^{\langle 0\rangle}$f)⊃x);
¬β(¬$^{\langle 0\rangle}$f)=¬¬α(¬$^{\langle 0\rangle}$¬$^{\langle 0\rangle}$f) [TT$_Z$240] =α(f) [TT$_Z$55, ParTT$_Z$55];
also $\underline{\text{β(℩o((f,o)⊃x))T(α(f)⊃x)}}$;
$\underline{\text{(α(f)⊃x)Tβ(℩o((f,o)⊃x))}}$:
β(℩o((f,o)⊃x))=Ux'(Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
(α(f)⊃x)=(¬β(¬$^{\langle 0\rangle}$f)⊃x)=(β(¬$^{\langle 0\rangle}$f)vx)=
(Ux'Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z))vx);
es ist also noch zu zeigen:

(Ux'Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z))vx)TUx'(Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z))
u. x'Tx)

ang. QA(r) u. rT(Ux'Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z))vx), also mit
TT$_Z$23 rTUx'Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. $\underline{\text{rTx}}$;
($\underline{\text{x}}$) M(r), dann rTUx'(Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
($\underline{\text{xx}}$) non M(r), dann mit TT$_Z$40 Vk(rTk u. Λz(Z^0(z) imp. kT¬(f,z))),
also mit AT$_Z$1 Λz(Z^0(z) imp. rT¬(f,z)) u. rTx, also mit TT$_Z$18
rTUx'(Λz(Z^0(z) imp. x'T¬(f,z)) u. x'Tx);
aufgrund dieser Argumentation folgt mit AT$_Z$5 das Gewünschte;
aus dem Unterstrichenen ergibt sich ($\underline{\text{b}}$) mit AT$_Z$3.

(d) Aus f≠g (Z$^{\langle 0\rangle}$(f), Z$^{\langle 0\rangle}$(g)) ergibt sich nicht α(f)≠α(g); man
betrachte z.B. i(z) [Z^0(z)] und $\underline{k}^{\langle 0\rangle}$; i(z)≠$\underline{k}^{\langle 0\rangle}$, denn (i(z),z)=$\underline{t}$
[TT$_Z$171], ($\underline{k}^{\langle 0\rangle}$,z)=$\underline{k}$ [TT$_Z$162, TT$_Z$160] und $\underline{t}$≠$\underline{k}$ [TT$_Z$104], also
(i(z),z)≠($\underline{k}^{\langle 0\rangle}$,z), also i(z)≠$\underline{k}^{\langle 0\rangle}$; $\underline{\text{aber}}$ α(i(z))=α($\underline{k}^{\langle 0\rangle}$):
α(i(z))=Ux'Vz'(Z^0(z') u. x'T(i(z),z'))=$\underline{k}$:
aus AT$_Z$21 folgt Vz$_1$Vz$_2$(Z^0(z$_1$) u. Z^0(z$_2$) u. z$_1$≠z$_2$), also
z≠z$_1$ o. z≠z$_2$, also mit TT$_Z$171 (i(z),z$_1$)=$\underline{k}$ o. (i(z),z$_2$)=$\underline{k}$, also

Vz'(Z^0(z') u. $\underline{k}$T(i(z),z')) [mit AT_Z2], also
$\underline{k}$TUx'Vz'(Z^0(z') u. x'T(i(z),z')) [mit TT_Z18], also $\underline{k}$=$\mathfrak{a}$(i(z));
$\mathfrak{a}$($\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$)=Ux'Vz'($Z^0$(z') u. x'T($\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$,z'))=$\underline{k}$:
($\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$,z)=$\underline{k}$, also Vz'($Z^0$(z') u. $\underline{k}$T($\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$,z')) [mit AT_Z2], also
$\underline{k}$TUx'Vz'(Z^0(z') u. x'T($\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$,z')), also $\underline{k}$=$\mathfrak{a}$($\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$).

Aus f≠g ergibt sich auch nicht $\mathfrak{s}$(f)≠$\mathfrak{s}$(g); um dies einzusehen, betrachte man i(z) [Z^0(z)] und $\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$; aus AT_Z21 folgt
Vz_1Vz_2(Z^0(z_1) u. Z^0(z_2) u. z_1≠z_2), also z≠z_1 o. z≠z_2, also mit
TT_Z171 (i(z),z_1)=$\underline{k}$ o. (i(z),z_2)=$\underline{k}$; aber ($\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$,$z_1$)=$\underline{t}$ u.
($\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$,$z_2$)=$\underline{t}$ u. $\underline{k}$≠$\underline{t}$ [TT_Z166, DT_Z45];
also (i(z),z_1)≠($\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$,$z_1$) o. (i(z),$z_2$)≠($\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$,$z_2$), also i(z)≠$\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$;
<u>aber</u> $\mathfrak{s}$(i(z))=$\mathfrak{s}$($\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$): $\mathfrak{s}$(i(z))=Ux'Λz'(Z^0(z') imp. x'T(i(z),z'))=$\underline{t}$:
Λx'(Λz'(Z^0(z') imp. x'T(i(z),z')) imp. x'T$\underline{t}$): mit Z^0(z) aus
Λz'(Z^0(z') imp. x'T(i(z),z')) x'T(i(z),z), also mit TT_Z171 x'T$\underline{t}$;
also mit TT_Z28, TT_Z30 Ux'Λz'(Z^0(z') imp. x'T(i(z),z'))T$\underline{t}$;
also $\mathfrak{s}$(i(z))=$\underline{t}$; entsprechend zeigt man
$\mathfrak{s}$($\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$)=Ux'Λz'($Z^0$(z') imp. x'T($\underline{t}^{\langle 0 \rangle}$,z'))=$\underline{t}$.

(e) Zum Abschluß dieses Kapitels beweisen wir:

TT_Z244 Λf($QA^{\langle 0 \rangle}$(f) imp. QA($\mathfrak{a}$(f)))
(Wenn f ein Eigenschaftsquantum ist, dann ist der Allsachverhalt von f ein Sachverhaltsquantum)

Beweis: (i) Ang. $QA^{\langle 0 \rangle}$(f), also gemäß TT_Z174
Λz(Z^0(z) imp. (f,z)=$\underline{t}$) o. Vz(Z^0(z) u. (f,z)≠$\underline{t}$ u. QA((f,z)) u.
Λz'(Z^0(z') u. z'≠z imp. (f,z')=$\underline{t}$));
im ersteren Fall: Ux'Vz'(Z^0(z') u. x'=(f,z'))=$\underline{t}$, also QA($\mathfrak{a}$(f)), da QA($\underline{t}$) und $\mathfrak{a}$(f)=Ux'Vz'(Z^0(z') u. x'=(f,z')) [Variante von DT_Z64];
im letzteren Fall folgt $\mathfrak{a}$(f)=(f,z), also QA($\mathfrak{a}$(f)), da QA((f,z));
$\mathfrak{a}$(f)=(f,z) mit AT_Z3, denn (f,z)T$\mathfrak{a}$(f) [TT_Z228] und $\mathfrak{a}$(f)T(f,z) mit TT_Z28, TT_Z30, denn Λx'(Vz'(Z^0(z') u. x'=(f,z')) imp. x'T(f,z)):
ang. Vz'(Z^0(z') u. x'=(f,z')); z'=z o. z'≠z;
($\underline{x}$) z'=z; also x'=(f,z), also x'T(f,z);
($\underline{xx}$) z'≠z; also (f,z')=$\underline{t}$, also (f,z')T(f,z), also x'T(f,z).

TT_Z245 Λf(QA($\mathfrak{a}$(f)) imp. Λz(Z^0(z) imp. (f,z)=$\mathfrak{a}$(f) o. (f,z)=$\underline{t}$))

Beweis: Ang. QA($\mathfrak{a}$(f)); also mit TT_Z228

$\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)T\mathbf{a}(f))$; also mit $DT_{Z}6$
$\wedge z[Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\mathbf{a}(f)$ o. $M((f,z))]$, also mit $TT_{Z}32$
$\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\mathbf{a}(f)$ o. $(f,z)=\underline{t})$.

Die auf Eigenschaften eingeschränkte Umkehrung von $TT_{Z}244$ gilt nicht; denn aus $QA(\mathbf{a}(f))$ ergibt sich zwar nach $TT_{Z}245$
$\wedge z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)=\mathbf{a}(f)$ o. $(f,z)=\underline{t})$, was aber
$\vee z\vee z'(Z^{0}(z)$ u. $Z^{0}(z')$ u. $(f,z)\neq\underline{t}$ u. $(f,z')\neq\underline{t}$ u. $z\neq z')$ nicht ausschließt, woraus nach $AT_{Z}20$ non $QA^{\langle 0\rangle}(f)$ folgt.

20. Die Anzahl der Eigenschaften und die extensionalistischen Bestimmungen des Eigenschaftsbegriffs

(a) Es gibt (u. a.) zwei Wege, die Anzahl der Eigenschaften zu bestimmen. Wir werden sehen, daß sie beide zu demselben Ergebnis führen. Der erste Weg ist durch die gewonnenen Einsichten schon vorgezeichnet; daß der zweite Weg zum selben Resultat führt, ist eine Gegenprobe für deren Richtigkeit.

(b) Sei W die Kardinalzahl der möglichen Welten, S die Kardinalzahl der Sachverhalte, G die Kardinalzahl der Gegenstände, M die Kardinalzahl der maximal-konsistenten Eigenschaften, F die Kardinalzahl der Eigenschaften. Aus dem 1. Teil wissen wir (1) $S=2^W$. AT_Z0 - AT_Z6 entsprechen TT_Z151 - TT_Z155, TT_Z176, TT_Z177; daher gilt entsprechend zu (1): (2) $F=2^M$. Wegen TT_Z202, TT_Z203, TT_Z204 gilt (3) M=(GxW). Wir erhalten also aus (2) und (3): (4) $F=2^{(GxW)}$. Wenn wir z.B. zwei Gegenstände haben und 2 mögliche Welten - die kleinsten Anzahlen, die mit den Axiomen verträglich sind -, so gibt es demnach 16 Eigenschaften (4 maximal-konsistente Eigenschaften, 4 Sachverhalte).

(c) Jeder Eigenschaft ist eine Sättigungsfunktion zugeordnet, der zu entnehmen ist, welcher Sachverhalt die Sättigung der Eigenschaft mit welchem Gegenstand ist. Nach AT_Z19 sind verschiedenen Eigenschaften verschiedene Sättigungsfunktionen zugeordnet. Wenn nun jede Funktion von Gegenständen in Sachverhalte die Sättigungsfunktion einer Eigenschaft ist, so gibt es genausoviele Eigenschaften, wie es Funktionen von Gegenständen in Sachverhalte gibt; d.h. (5) $F=S^G$. Die folgende Argumentation zeigt, daß tatsächlich jede Funktion von Gegenständen in Sachverhalte die Sättigungsfunktion einer Eigenschaft ist - was zunächst unplausibel erscheint:

Sei γ eine Funktion von Gegenständen in Sachverhalte:
$\wedge z(Z^0(z)$ imp. $Z^1(\gamma[z]))$; man betrachte
$\cap^{\langle 0\rangle}g\vee z(Z^0(z)$ u. $g=(i(z)\wedge^{\langle 0\rangle}b(\gamma[z])))$; γ ist die Sättigungsfunktion dieser Eigenschaft, d.h. es gilt:
$\wedge z'[Z^0(z')$ imp.
$\gamma[z']=(\cap^{\langle 0\rangle}g\vee z(Z^0(z)$ u. $g=(i(z)\wedge^{\langle 0\rangle}b(\gamma[z]))),z')]$:

Ang. $Z^0(z')$; $(\cap^{\langle 0\rangle} gVz(Z^0(z)$ u. $g=(i(z)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\gamma[z]))),z')=$
$(\iota o\cap yVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $Vz(Z^0(z)$ u. $k=(i(z)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\gamma[z])))$ u.
$y=(k,o)),z')$ [siehe den Beweis von Lemma 2, ($\underline{X}$) im Beweis von
TT_Z235] $=\cap yVk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $Vz(Z^0(z)$ u. $k=(i(z)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\gamma[z])))$ u.
$y=(k,z'))$ [mit AT_Z16];
$Vk(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $Vz(Z^0(z)$ u. $k=(i(z)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\gamma[z])))$ u. $y=(k,z'))$ äqu.
$Vz(Z^0(z)$ u. $y=((i(z)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\gamma[z])),z'))$ äqu.
$Vz[Z^0(z)$ u. $y=((i(z),z')\wedge(b(\gamma[z]),z'))]$ (TT_Z178, AT_Z16) äqu.
$Vz[Z^0(z)$ u. $y=((i(z),z')\wedge\gamma[z])]$ (TT_Z159; $Z^1(\gamma[z])$, da $Z^0(z)$;
$Z^0(z')$) äqu. $y=\underline{k}$ o. $y=\gamma[z']$ [denn $z=z'$ o. $z\neq z'$; im ersteren Fall
mit TT_Z171 $(i(z),z')=\underline{t}$ u. $\gamma[z]=\gamma[z']$; also $y=(\underline{t}\wedge\gamma[z'])$, also
$y=\gamma[z']$; im letzteren Fall $(i(z),z')=\underline{k}$, also $y=(\underline{k}\wedge\gamma[z])$, also
$y=\underline{k}$; *umgekehrt*, ang. $y=\underline{k}$ o. $y=\gamma[z']$; im ersteren Fall gilt
gemäß AT_Z21, TT_Z171 $Vz(Z^0(z)$ u. $(i(z),z')=\underline{k})$, also
$Vz(Z^0(z)$ u. $y=((i(z),z')\wedge\gamma[z]))$; im letzteren Fall $Z^0(z')$ u.
$y=((i(z'),z')\wedge\gamma[z'])$ wegen TT_Z171, also
$Vz(Z^0(z)$ u. $y=((i(z),z')\wedge\gamma[z]))$];
die Reihe der Identitätsaussagen kann also gemäß TT_Z66, AT_Z3
fortgesetzt werden mit $=\cap y(y=\underline{k}$ o. $y=\gamma[z'])=\gamma[z']$ [wegen TT_Z100
und TT_Z65; denn zum einen
$\Lambda y(Z^1(y)$ u. $(y=\underline{k}$ o. $y=\gamma[z'])$ imp. $\gamma[z']Ty)$, also mit TT_Z100
$\gamma[z']T\cap y(y=\underline{k}$ o. $y=\gamma[z'])$; denn zum anderen $Z^1(\gamma[z'])$ u.
$(\gamma[z']=\underline{k}$ o. $\gamma[z']=\gamma[z'])$, also mit TT_Z65
$\cap y(y=\underline{k}$ o. $y=\gamma[z'])T\gamma[z']$; demnach mit AT_Z3 das Gewünschte].

(d) Die Argumentation in (c) kann man sich auch so *veranschaulichen*:

(i) Die Funktion γ von Gegenstände in Sachverhalte:

$\underline{z}_1$ $\underline{z}_2$ $\underline{z}_3$ ...
$\underline{m}_1$ $\underline{m}_2$ $\underline{m}_3$ ...

In der oberen Zeile seien sämtliche Gegenstände aufgelistet;
$\underline{z}_i\neq\underline{z}_j$, falls $i\neq j$; $\underline{m}_i$ ist der Wert von γ für $\underline{z}_i$: ein Sachverhalt;
es kann sein, daß $\underline{m}_i=\underline{m}_j$, obwohl $i\neq j$.

(ii) Die Eigenschaft $f(\gamma)$, deren Sättigungsfunktion γ ist:

$(i(\underline{z}_1)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\underline{m}_1))\vee^{\langle 0\rangle}(i(\underline{z}_2)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\underline{m}_2))\vee^{\langle 0\rangle}(i(\underline{z}_3)\wedge^{\langle 0\rangle} b(\underline{m}_3))\vee^{\langle 0\rangle}$ ...

Es gilt $(f(\gamma),\underline{z}_r)=\underline{m}_r=\gamma[\underline{z}_r]$, denn
$(f(\gamma),\underline{z}_r)=((i(\underline{z}_1),\underline{z}_r)\wedge(b(\underline{m}_1),\underline{z}_r))\vee((i(\underline{z}_2),\underline{z}_r)\wedge(b(\underline{m}_2),\underline{z}_r))\vee$
$((i(\underline{z}_3),\underline{z}_r)\wedge(b(\underline{m}_3),\underline{z}_r))\vee\ \ldots$ [TT_Z179, TT_Z178, AT_Z16] und für alle
$j\neq r$: $((i(\underline{z}_j),\underline{z}_r)\wedge(b(\underline{m}_j),\underline{z}_r))=\underline{k}$, $((i(\underline{z}_r),\underline{z}_r)\wedge(b(\underline{m}_r),\underline{z}_r))=\underline{m}_r$,
$\wedge y(Z^1(y)$ imp. $(\underline{k}\vee y)=y)$.

Es ist klar, daß jede Eigenschaft über ihre Sättigungsfunktion wie in (ii) illustriert durch Identitätseigenschaften (von denen es soviele sind, wie es Gegenstände gibt) und Eigenbegriffe (von denen es soviele gibt, wie es Sachverhalte sind) infinitär darstellbar ist. – Es bleibt festzuhalten: (5): $F=S^G$ und (4): $F=2^{(G\times W)}$ widersprechen einander nicht, denn $S^G=2^{(G\times W)}$: $S^G=(2^W)^G$ [gemäß (1)] $=2^{(W\times G)}=2^{(G\times W)}$.

(e) Die Kardinalzahl der Eigenschaften F läßt sich, wie wir sahen, in unterschiedlicher Weise angeben. Jeder Weise korrespondiert eine andere Isomorphie der Eigenschaften zu gewissen Funktionen bzw. Mengen:

(i) $F=2^{(G\times W)}$: Eigenschaften sind isomorph zu Funktionen, die jedem Gegenstand in jeder möglichen Welt einen Wahrheitswert zuordnen (Eigenschaften sind isomorph zu Mengen von Paaren von 1. Gegenständen und 2. möglichen Welten).

(ii) $F=(2^G)^W$: Eigenschaften sind isomorph zu Funktionen, die jeder möglichen Welt eine Menge von Gegenständen (eine Funktion von Gegenständen in Wahrheitswerte) zuordnen.

(iii) $F=(2^W)^G$: Eigenschaften sind isomorph zu Funktionen, die jedem Gegenstand eine Menge von möglichen Welten (eine Funktion von Welten in Wahrheitswerte) zuordnen.

(iv) $F=S^G$: Eigenschaften sind isomorph zu Funktionen, die jedem Gegenstand einen Sachverhalt zuordnen.

(v) $F=2^M$: Eigenschaften sind isomorph zu Mengen von

Leibniz-Gegenständen (zu Funktionen von Leibniz-Gegenständen in Wahrheitswerte).

Jede der Isomorphiebehauptungen (i) - (v) ist wahr; (iv) haben wir in (c) bewiesen, und auch die übrigen lassen sich beweisen, was wir hier aber nicht durchführen wollen. (Man wird sich die Tatsache zunutze machen, daß Wahrheitswerte, Mengen von Gegenständen, Leibniz-Gegenstände durch t, k, essentielle Eigenschaften und maximal-konsistente Eigenschaften repräsentierbar sind, und auf bewiesene Theoreme zurückgreifen.)

(f) Geht man anders als hier von einem rein extensionalistischen Rahmen von Mengen bzw. (extensionalen) Funktionen (+ Gegenstände [oder Leibniz-Gegenstände], Wahrheitswerte, mögliche Welten) aus, so wird man in jeder der Behauptungen (i) - (v) "sind isomorph zu" abändern zu "sind". Die entstehenden Behauptungen (i') - (v') können dann natürlich nicht alle wahr sein, und aus unserer Sicht sind sie sämtlich falsch; (i) - (v) erklären aber, warum man sie für wahr halten kann. - Die Behauptungen (iii') und (iv') sieht man dann als äquivalent an, denn Sachverhalte sind "nichts anderes" als Mengen von möglichen Welten (Funktionen von möglichen Welten in Wahrheitswerte). Besonders (ii') ist eine beliebte Bestimmung der Eigenschaften seitens extensionalistischer "intensionaler" Semantiker. (v') ist die Bestimmung der Eigenschaften durch D. Lewis (vergl. *On the Plurality of Worlds*, S. 50ff), der freilich nicht von "Leibniz-Gegenständen" bzw. "Lewis-individuals" spricht, sondern schlicht von "possible individuals" (hier verstanden unter Ausschluß von möglichen Welten, die für Lewis eigentlich auch zu den möglichen Individuen zählen; uns geht es ja nur um Eigenschaften von Entitäten, die nicht mögliche Welten sind).

IV. Stärkere Systeme der vollen Ontologie

1. Volle Ontologie bis zu Attributen der Typen $\langle o \rangle$, $\langle\langle o \rangle\rangle$, $\langle\langle\langle o \rangle\rangle\rangle$, ...: die Sprache PTZ_1^+ und das System TZ_1^+

(a) Die Sprache PTZ_1^+ geht aus der Sprache PTZ_1 hervor, indem man die Kategorialprädikate $Z^{\langle\langle o \rangle\rangle}$, $Z^{\langle\langle\langle o \rangle\rangle\rangle}$, $Z^{\langle\langle\langle\langle o \rangle\rangle\rangle\rangle}$, ..., aber keine weiteren hinzunimmt und den Funktionsausdruck (τ,τ') sowie λ mit arabischen Ziffern ($_1$, $_2$, $_3$, ...) indiziert. Für $Z^{\langle\langle \ldots o \ldots \rangle\rangle}$ schreiben wir auch $Z^{(o,n)}$, wo n die arabische Ziffer ist, die die Anzahl der Vorkommnisse der geöffneten spitzen Klammern in $\langle\langle \ldots o \ldots \rangle\rangle$ bezeichnet; im Grenzfall, bei o, sind es null. $Z^{(o,0)}$ bzw. $Z^{(o,1)}$ sind also Varianten von Z^o bzw. $Z^{\langle o \rangle}$, und für $Z^{\langle\langle o \rangle\rangle}$, $Z^{\langle\langle\langle o \rangle\rangle\rangle}$, $Z^{\langle\langle\langle\langle o \rangle\rangle\rangle\rangle}$ ... schreiben wir kurz $Z^{(o,2)}$, $Z^{(o,3)}$, $Z^{(o,4)}$ ... . Zum Grundbereich von PTZ_1^+ zählen die Sachverhalte, die Gegenstände, die Eigenschaften (die monadischen Attribute von Gegenständen: die monadischen Attribute 1. Stufe), die monadischen Attribute von Eigenschaften, die monadischen Attribute von monadischen Attributen von Eigenschaften, etc. Ist $Z^{(o,n)}$ (n ist "1" oder folgt auf "1") ein Kategorialprädikat von PTZ_1^+, so ist $Z^{(o,n)}(\tau)$ zu lesen als "τ ist ein monadisches Attribut$_{(n)}$ von ... von monadischen Attributen$_{(1)}$ von Gegenständen".

(b) Das System TZ_1^+ ist eine Verallgemeinerung des Systems TZ_1. Die Axiome AT_Z0 - AT_Z9 werden unverändert übernommen; die Axiome AT_Z10 - AT_Z12 werden ersetzt durch

AT_Z^+10 $\quad \Lambda x(Z^m(x) \text{ imp. non } Z^n(x))$

(wo n und m *verschiedene* der eingeführten *undefinierten* Kategorialindices vertreten);
AT_Z13 wird beibehalten;
AT_Z14 wird ersetzt durch

AT_Z^+14 $\quad \Lambda x \Lambda y(Z^{(o,n+1)}(x) \text{ u. } Z^{(o,n)} \text{ imp. } Z^1((x,y)^n))$

(n vertritt ab jetzt irgendeine arabische Ziffer), und AT_Z15 durch

AT_Z^+15 $\Lambda x \Lambda y(\text{non } Z^{(0,n+1)}(x) \text{ o. non } Z^{(0,n)}(y) \text{ imp. } (x,y)^n = \underline{k})$

(für $(\tau,\tau')^0$ schreiben wir auch (τ,τ'));
an die Stelle von AT_Z16 tritt

AT_Z^+16 $\Lambda x(Z^{(0,n)}(x) \text{ u. } Z^1(\pi[x]) \text{ imp. } (\lambda^n o\pi[o],x)^n = \pi[x])$

(für $\lambda^0 o\pi[o]$ schreiben wir auch $\lambda o\pi[o]$);
AT_Z17 wird verallgemeinert zu

AT_Z^+17 $\Lambda x(\text{non } Z^1(\pi[x]) \text{ imp. } (\lambda^n o\pi[o],x)^n = \underline{k})$

und AT_Z18 zu

AT_Z^+18 $\text{non } Vx(Z^{(0,n)}(x) \text{ u. } Z^1(\pi[x]) \text{ u. } \pi[x] \neq \underline{k}) \text{ imp. }$
$Z^{(0,n+1)}(\lambda^n o\pi[o])$

AT_Z19 nimmt die Gestalt an:

AT_Z^+19 $\Lambda f \Lambda g(Z^{(0,n+1)}(f) \text{ u. } Z^{(0,n+1)}(g) \text{ u. } \Lambda x((f,x)^n = (g,x)^n) \text{ imp. }$
$f=g)$

und AT_Z20 die Gestalt

AT_Z^+20 $\Lambda f(QA^{(0,n+1)}(f) \text{ imp. non } VzVz'(Z^{(0,n)}(z) \text{ u. } Z^{(0,n)}(z') \text{ u. }$
$(f,z)^n \neq \underline{t} \text{ u. } (f,z')^n \neq \underline{t} \text{ u. } z \neq z'))$

AT_Z21 schließlich bleibt unverändert.

(c) Das Axiomensystem TZ_1 (AT_Z0 - AT_Z21) ist ein Teil des Axiomensystems TZ_1^+; AT_Z10 - AT_Z12 sind Spezialfälle von AT_Z^+10, und AT_Z14 - AT_Z20 sind Spezialfälle von AT_Z^+14 - AT_Z^+20; man erhält sie, wenn man für "n" "o" setzt und die Konventionen bzgl. der Abkürzung der Kategorialindices beachtet. Alles, was in TZ_1 bewiesen wurde, läßt sich also auch in TZ_1^+ beweisen. Die Definitionen und Theoreme des dritten Teils lassen sich, sofern der Ausdruck <u>sub</u> nicht in ihnen vorkommt (auch nicht versteckt in einem definierten Ausdruck), verallgemeinern. Dabei ist der Index ‹o› überall durch ‹o,n+1› zu ersetzen, und der Index o überall durch ‹o,n› (außer natürlich, wenn er als Variablenindex vorkommt oder in Anzahlquantoren etc.); für λ ist zu setzen λ^{n} und für (τ,τ') $(\tau,\tau')^{n}$; die Definienda sind in geeigneter Weise mit n zu indizieren, wenn sie noch keinen (Typen -) Index tragen. Aus $DT_{Z}55$ $\tau(\tau') := E((\tau,\tau'))$, z.B., wird allgemein

$DT^{+}_{Z}55 \quad \tau({}^{n}\tau') := E((\tau,\tau')^{n})$

(wobei wir für $\tau({}^{0}\tau')$ $\tau(\tau')$ schreiben).
Aus $DT_{Z}64$ $\alpha(\varphi) := U x \bigvee z(Z^{0}(z)$ u. $xT(\varphi,z))$ wird allgemein

$DT^{+}_{Z}64 \quad {}^{n}\alpha(\varphi) := U x \bigvee z(Z^{(0,n)}(z)$ u. $xT(\varphi,z)^{n})$

(wobei wir für ${}^{0}\alpha(\varphi)$ $\alpha(\varphi)$ schreiben).
Aus $TT_{Z}179$ $\bigwedge f \bigwedge g(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g)$ imp. $(f \vee^{\langle 0\rangle} g) = \lambda o((f,o) \vee (g,o)))$ wird allgemein

$TT^{+}_{Z}179 \quad \bigwedge f \bigwedge g(Z^{(0,n+1)}(f)$ u. $Z^{(0,n+1)}(g)$ imp.
$(f \vee^{(0,n+1)} g) = \lambda^{n} o((f,o)^{n} \vee (g,o)^{n}))$

(In allgemeinen Beweisen, die spezielle Beweise spiegeln, in denen von $AT_{Z}13$: $\bigvee z Z^{0}(z)$ Gebrauch gemacht wird oder von seiner aus $AT_{Z}21$ folgenden Verstärkung $\bigvee z \bigvee z'(Z^{0}(z)$ u. $Z^{0}(z')$ u. $z \neq z')$, kann man stets die Verallgemeinerungen $\bigvee z Z^{(0,n)}(z)$ bzw. $\bigvee z \bigvee z'(Z^{(0,n)}(z)$ u. $Z^{(0,n)}(z')$ u. $z \neq z')$, die in TZ^{+}_{1} beweisbar sind, verwenden.)

(d) Das System TZ^{+}_{1} ist nicht eine bloße unendliche Reduplikation des Systems TZ_{1}. TZ^{+}_{1} ist *leistungsstärker* als die Typentheorie in Standardform (d.h. ohne Variablen mit Typenindex) bzgl. der Hierarchie: die Individuen, die Mengen von Individuen, die Mengen von Mengen von Individuen etc. In TZ^{+}_{1} ist ja beweisbar, aber TZ^{+}_{1} ist nicht deduktiv äquivalent mit:

$\bigwedge z(A[z]$ imp. $Z^{(0,n)}(z))$ imp. $\bigwedge z(\lambda^{n} o U y(\text{non } A[o]$ u. $y=\underline{k})({}^{n}z)$ äqu. $A[z])$ [siehe $TT^{+}_{Z}219$]

$Z_{E}^{(0,n+1)}(\lambda^{0} o U y(\text{non } A[o]$ u. $y=\underline{k}))$ [siehe $TT^{+}_{Z}221$]

$\bigwedge g \bigwedge g'(Z_{E}^{(0,n+1)}(g)$ u. $Z_{E}^{(0,n+1)}(g')$ u. $\bigwedge z(g({}^{n}z)$ äqu. $g'({}^{n}z))$ imp. $g=g')$ [siehe $TT^{+}_{Z}213$]

$Z_E^{(0,n+1)}(\tau)$ kann man lesen als "τ ist eine Menge von: Entitäten der Stufe n", $\lambda^n o \cup y$(non A[o] u. y=$\underline{k}$) als "die Menge der: Entitäten der Stufe n, auf die A[x] zutrifft" (vergl. III., 14.).

TZ_1^+ kann man im wesentlichen *ebenso leistungsstark* wie die Typentheorie bzgl. der genannten Hierarchie machen, indem man es extensionalisiert. D.h. man ersetzt AT_Z9 (*das Intensionalitätsaxiom*) durch seine Negation. Dann gilt:
(i) $\wedge y(Z^1(y)$ äqu. $y=\underline{t}$ o. $y=\underline{k})$ [siehe TT_Z117] und
(ii) $\wedge f(Z^{(0,n+1)}(f)$ äqu. $Z_E^{(0,n+1)}(f))$. *Beweis* für (ii): von rechts nach links trivial wegen DT_Z^+49; von links nach rechts: ang. $Z^{(0,n+1)}(f)$, $Z^{(0,n)}(z)$; also gemäß AT_Z^+14 $Z^1((f,z)^n)$, also mit (i) $(f,z)^n=\underline{t}$ o. $(f,z)^n=\underline{k}$; demnach gemäß DT_Z^+49 $Z_E^{(0,n+1)}(f)$. Die Entitäten jeder Stufe n+1 sind also genau die Mengen der Entitäten der Stufe n, wobei die Entitäten der Stufe 0 die Individuen sind.- Nun kann man $\tau(^n\tau')$ stets lesen als "die Entität τ' der Stufe n *ist Element* der Entität τ der Stufe n+1".

Nach der *rein vertikalen* Verstärkung von TZ_1, die wir in diesem Kapitel betrachtet haben, wenden wir uns im nächsten Kapitel seiner *rein horizontalen* Verstärkung zu.

2. Volle Ontologie bis zu den n-stelligen Attributen 1. Stufe: die Sprache PTZ_n und das System TZ_n

(a) Die Sprache PTZ_n geht aus der Sprache PTZ_1 hervor, indem man die Kategorialprädikate $Z^{\langle o,o\rangle}$, $Z^{\langle o,o,o\rangle}$, $Z^{\langle o,o,o,o\rangle}$, ..., aber keine weiteren, hinzunimmt und neben der Funktionskonstante (,) auch die Funktionskonstanten (, ,), (, , ,), ... zuläßt. λ kann außerdem in PTZ_n von mehreren Extraktionsvariablen gefolgt werden. Statt $\langle o,....o\rangle$ schreiben wir auch $\langle n\rangle$, wo n die arabische Ziffer ist, die die Anzahl der Vorkommnisse von o in $\langle o,....,o\rangle$ bezeichnet. $Z^{\langle 1\rangle}$ ist also eine Variante von $Z^{\langle o\rangle}$, und für $Z^{\langle o,o\rangle}$, $Z^{\langle o,o,o\rangle}$, $Z^{\langle o,o,o,o\rangle}$ schreiben wir kurz $Z^{\langle 2\rangle}$, $Z^{\langle 3\rangle}$, $Z^{\langle 4\rangle}$, ... Zum Grundbereich von PTZ_n zählen die Sachverhalte, die Gegenstände, die monadischen Attribute von Gegenständen, die dyadischen Attribute von Gegenständen, die triadischen Attribute von Gegenständen etc. Ist $Z^{\langle k\rangle}$ (k ist "1" oder folgt auf "1") ein Kategorialprädikat von PTZ_n, so ist $Z^{\langle k\rangle}(\tau)$ zu lesen als "τ ist ein k-stelliges Attribut von Gegenständen".

(b) Das System TZ_n ist eine Verallgemeinerung des Systems TZ_1. Die Axiome AT_Z0 - AT_Z9, AT_Z13 und AT_Z21 werden unverändert übernommen; die Axiome AT_Z10 - AT_Z12 werden ersetzt durch

AT^n_Z10 $\quad \Lambda x(Z^{n}(x) \text{ imp. non } Z^{m}(x))$

(wo n und m verschiedene der eingeführten undefinierten Kategorialindices vertreten);
AT_Z14 wird ersetzt durch

AT^n_Z14 $\quad \Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n \Lambda f[Z^{\langle n\rangle}(f) \text{ u. } Z^{o}(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } Z^{o}(x_n) \text{ imp.}$
$Z^{1}((f,x_1,\ldots,x_n))]$

(n vertritt ab jetzt "1" oder eine auf "1" folgende arabische Ziffer) und AT_Z15 durch

AT^n_Z15 $\quad \Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n \Lambda f(\text{non } Z^{\langle n\rangle}(f) \text{ o. non } Z^{o}(x_1) \text{ o. } \ldots \text{ o.}$
$\text{non } Z^{o}(x_n) \text{ imp. } (f,x_1,\ldots,x_n)=\underline{k});$

an die Stelle von AT_Z16 tritt

AT^n_Z16 $\quad \wedge x_1 \ldots \wedge x_n [Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $Z^1(\Pi[x_1,\ldots,x_n])$ imp. $(\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n],x_1,\ldots,x_n)=\Pi[x_1,\ldots,x_n]]$

(AT^n_Z16 mitbeinhaltet die Konvention, daß sich die erste Extraktionsvariable nach dem λ auf den Designator nach dem 1. Komma in (, ,...,) bezieht, die zweite Extraktionsvariable nach dem λ auf den Designator nach dem 2. Komma etc.; $x_1,\ldots,x_n$, $o_1,\ldots,o_n$ vertreten wie x und o in AT_Z16 jeweils angemessene - die syntaktische Wohlgeformtheit wahrende - Variablen; die Indizierung macht nur deutlich, daß es n verschiedene sein sollen;)[1]
AT_Z17 wird verallgemeinert zu

AT^n_Z17 $\quad \wedge x_1 \ldots \wedge x_n(\text{non } Z^1(\Pi[x_1,\ldots,x_n])$ imp. $(\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n],x_1,\ldots,x_n)=\underline{k})$

und AT_Z18 zu

AT^n_Z18 $\quad$ non $\vee x_1 \ldots \vee x_n(Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $Z^1(\Pi[x_1,\ldots,x_n])$ u. $\Pi[x_1,\ldots,x_n]\neq\underline{k})$ imp. $Z^{\langle n\rangle}(\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n])$

AT_Z19 nimmt die Gestalt an

AT^n_Z19 $\quad \wedge f \wedge g(Z^{\langle n\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(g)$ u. $\wedge x_1 \ldots \wedge x_n((f,x_1,\ldots,x_n)=(g,x_1,\ldots x_n))$ imp. $f=g)$

und AT_Z20 die Gestalt

AT^n_Z20 $\quad \wedge f[QA^{\langle n\rangle}(f)$ imp. non $\vee z_1 \ldots \vee z_n \vee x_1 \ldots \vee x_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $(f,z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t}$ u. $(f,x_1,\ldots,x_n)\neq\underline{t}$ u. $(z_1\neq x_1$ o. ... o. $z_n\neq x_n))]$

(c) Das Axiomensystem TZ_1 ist ein Teil des Axiomensystems TZ_n. AT_Z10 - AT_Z12 sind Spezialfälle von AT^n_Z10, und AT_Z14 - AT_Z20 sind Spezialfälle von AT^n_Z14 - AT^n_Z20; man erhält sie, wenn man für "$_n$" "$_1$" setzt und beachtet, daß $Z^{\langle 1\rangle}$ eine andere Schreibweise für $Z^{\langle 0\rangle}$ ist. Alles, was in TZ_1 bewiesen wurde, läßt sich also auch in TZ_n beweisen. - Statt nun sogleich auf das System TZ_n näher einzugehen, betrachten wir zunächst ein Alternativsytem zu TZ_n.

Anmerkungen:

[1]Bei $AT^{n}_{Z}16$ ist zu beachten, daß durch die Schreibweise $\Pi[x_1,\ldots,x_n]$, $\lambda o_1\ldots o_n\Pi[o_1,\ldots,o_n]$ *nichts* über die Reihenfolge der Variablen $x_1,\ldots,x_n$ bzw. $o_1,\ldots,o_n$ in $\Pi[x_1,\ldots,x_n]$ bzw. $\Pi[o_1,\ldots,o_n]$ ausgesagt ist. - Die Quantoren $\wedge x_1\ldots\wedge x_n$ am Anfang sind natürlich beliebig permutierbar. - Einige Beispiele: $\wedge x(Z^0(x)$ u. $Z^1((f,x))$ imp. $(\lambda o(f,o),x)=(f,x))$ ist ein Fall von $AT^{n}_{Z}16$; $\wedge x(Z^0(x)$ u. $Z^1((f,x,x))$ imp. $(\lambda o(f,x,o),x)=(f,x,x))$ ist *kein* Fall (aber eine Folge) von $AT^{n}_{Z}16$, denn dieser Satz läßt sich nicht unter dieses Schema subsumieren, da gebundene Variablen nach unseren Festlegungen in Satzschemata nur an den angegebenen oder durch Einklammerung intendierten Stellen vorkommen. $\Pi[\ ]$ ist hier aber offenbar (f,x,_), so daß die gebundene Variable x in $\Pi[x]$ nicht nur an den durch Einklammerung intendierten Stellen vorkommt. Dagegen ist $\wedge x(Z^0(x)$ u. $Z^1((f,z,x))$ imp. $(\lambda o(f,z,o),x)=(f,z,x))$ ein Fall von $AT^{n}_{Z}16$, und aus ihm, da er ja als Allsatz zu lesen ist, *folgt* der zuletzt angegebene Satz. (1) $\wedge y\wedge x(Z^0(y)$ u. $Z^0(x)$ u. $Z^1((f,y,x))$ imp. $(\lambda oo'(f,o,o'),y,x)=(f,y,x))$ ist ein Fall von $AT^{n}_{Z}16$; ebenso aber auch (2) $\wedge x\wedge y(Z^0(x)$ u. $Z^0(y)$ u. $Z^1((f,y,x))$ imp. $(\lambda o'o(f,o,o'),x,y)=(f,y,x))$. Dieser Satz ergibt sich aus dem generellen Schema wie folgt: Für n="2": $\wedge x_1\wedge x_2(Z^0(x_1)$ u. $Z^0(x_2)$ u. $Z^1(\Pi[x_1,x_2])$ imp. $(\lambda o_1o_2\Pi[o_1,o_2],x_1,x_2)=\Pi[x_1,x_2])$; man setze: x_1 : x; x_2 : y; $\Pi[\ ,\ ]$: (f,<u>2</u>,<u>1</u>) ["<u>2</u>" markiert die Stelle - bzw. Stellen in anderen Ausdrücken -, wo der 2. Designator in der eckigen Klammer zu setzen ist; "<u>1</u>" entsprechend; siehe hierzu I., 5., Anmerkung 1]; o_1 : o'; o_2 : o. Damit erhält man zunächst $\wedge x\wedge y(Z^0(x)$ u. $Z^0(y)$ u. $Z^1(\Pi[x,y])$ imp. $(\lambda o'o\Pi[o',o],x,y)=\Pi[x,y])$; *da* $\Pi[\ ,\ ]$ *: (f,<u>2</u>,<u>1</u>),* $\Pi[x,y]$: (f,y,x) und $\Pi[o',o]$: (f,o,o'); man erhält also schließlich $\wedge x\wedge y(Z^0(x)$ u. $Z^0(y)$ u. $Z^1((f,y,x))$ imp. $(\lambda o'o(f,o,o'),x,y)=(f,y,x))$, d.h. (2). - Der (2) vorhergehende Satz dagegen ergibt sich aus dem generellen Schema wie folgt: Für n="2": $\wedge x_1\wedge x_2(Z^0(x_1)$ u. $Z^0(x_2)$ u. $Z^1(\Pi[x_1,x_2])$ imp. $(\lambda o_1o_2\Pi[o_1,o_2],x_1,x_2)=\Pi[x_1,x_2])$; man setze: x_1 : y; x_2 : x; $\Pi[\ ,\ ]$: (f,<u>1</u>,<u>2</u>); o_1 : o; o_2 : o'. Damit erhält man: $\wedge y\wedge x(Z^0(y)$ u. $Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[y,x])$ imp. $(\lambda oo'\Pi[o,o'],y,x)=\Pi[y,x])$; *da* $\Pi[\ ,\ ]$ *: (f,<u>1</u>,<u>2</u>),* $\Pi[y,x]$: (f,y,x) und $\Pi[o,o']$: (f,o,o'); man

erhält also schließlich: $\Lambda y \Lambda x(Z^{0}(y)$ u. $Z^{0}(x)$ u. $Z^{1}((f,y,x))$ imp. $(\lambda oo'(f,o,o'),y,x)=(f,y,x))$, d.h. (1).

Die Relationen $\lambda oo'(f,o,o')$ und $\lambda o'o(f,o,o')$ sind im übrigen Konversen voneinander; d.h es gilt
$\Lambda z_{1} \Lambda z_{2}((\lambda oo'(f,o,o'),z_{1},z_{2})=(\lambda o'o(f,o,o'),z_{2},z_{1})$: Wenn z_{1} oder z_{2} kein Gegenstand ist, dann nach $AT^{n}_{Z}15$ $(\lambda oo'(f,o,o'),z_{1},z_{2})=(\lambda o'o(f,o,o'),z_{1},z_{2})$; wenn z_{1} und z_{2} beide Gegenstände sind, dann nach den Sätzen (1) und (2), die gerade als Fälle von $AT^{n}_{Z}16$ erwiesen wurden, da $Z^{1}((f,z_{1},z_{2}))$, $(\lambda oo'(f,o,o'),z_{1},z_{2})=(f,z_{1},z_{2})$ und $(\lambda o'o(f,o,o'),z_{2},z_{1})=(f,z_{1},z_{2})$; also $(\lambda oo'(f,o,o'),z_{1},z_{2})=(\lambda o'o(f,o,o'),z_{2},z_{1})$.

3. Volle Ontologie bis zu n-stelligen Attributen 1. Stufe: die Sprache PTZ'_n und das System TZ'_n

(a) Wie die Sprache PTZ_n geht die Sprache PTZ'_n aus PTZ_1 durch Hinzunahme der Kategorialprädikate $Z^{\langle 0,0\rangle}$, $Z^{\langle 0,0,0\rangle}$, ... und keiner weiteren hervor; die Konventionen zur Abkürzung der Typen werden übernommen; ansonsten ist sie aber wie PTZ_1; d.h. λ kann nur von einer Extraktionsvariablen gefolgt werden, und zum Grundvokabular gehört nur die Funktionskonstante (,).

(b) Wir haben in TZ_1 keine Iterationen dieser Konstante betrachtet, die in Ausdrücken der Formen $(\tau,(\tau',\tau''))$, $((\tau,\tau'),\tau'')$ vorkommen, denn in TZ_1 läßt sich beweisen
$\wedge x \wedge y \wedge z(((x,(y,z))=\underline{k}$ u. $((x,y),z)=\underline{k})$: $Z^1((y,z))$ u. $Z^1((x,y))$ mit TT_Z145; also mit AT_Z10 non $Z^0((y,z))$ und mit AT_Z11 non $Z^{\langle 0\rangle}((x,y))$; also mit AT_Z15 $(x,(y,z))=\underline{k}$ u. $((x,y),z)=\underline{k}$.
[Entsprechend läßt sich in TZ_n beweisen:
$\wedge x_1 \ldots \wedge x_n \wedge y_1 \ldots \wedge y_k((x_1,\ldots,x_n,(y_1,\ldots,y_k))=\underline{k}$ u.
$((y_1,\ldots,y_k),x_1,\ldots,x_n)=\underline{k}$ u.
$(x_1,\ldots,x_r,(y_1,\ldots,y_k),x_{r+1},\ldots,x_n)=\underline{k})$.]
Im System TZ'_n trivialisieren Iterationen von (,) dagegen nicht immer einen Ausdruck der Form (τ,τ') (kurz: einen Klammerausdruck), in dem sie vorkommen.

(c) TZ'_n übernimmt von TZ_1 die Axiome AT_Z0 - AT_Z9 und AT_Z13. AT_Z10 - AT_Z12 werden wie in TZ_n ersetzt durch $\wedge x(Z^{\ast}(x)$ imp. non $Z^{\bullet}(x))$ (wo $\ast$ und $\bullet$ verschiedene der eingeführten undefinierten Kategorialindices vertreten), d.h. durch AT'_Z10. Die weitere Formulierung des Systems TZ'_n ist von dem Gedanken geleitet, daß in ihm Iterationen von (,) nicht generell trivialisierend (im beschriebenen Sinn) sein sollen:

AT'_Z14 (a) $\wedge x \wedge y[Z^{\langle n+1\rangle}(x)$ u. $Z^0(y)$ äqu. $Z^{\langle n\rangle}((x,y))]$
(b) $\wedge x \wedge y[Z^{\langle 1\rangle}(x)$ u. $Z^0(y)$ imp. $Z^1((x,y))]$
$\wedge x \wedge y[Z^1((x,y))$ u. $(x,y)\neq\underline{k}$ imp. $Z^{\langle 1\rangle}(x)$ u. $Z^0(y))$

(n vertritt hier und im Folgenden eine arabische Ziffer, die "1" ist oder auf "1" folgt.) Nach AT'_Z14 (das noch nicht seine endgültige Gestalt hat, sondern noch durch eine Stufe (c) ergänzt werden wird) ist die Sättigung eines n+1-stelligen ($1\leq n$) Attributs (1. Stufe) mit einem Gegenstand ein n-stelliges Attribut; die Sättigung eines 1-stelligen Attributs mit einem Gegenstand dagegen ein Sachverhalt. Offenbar ergibt sich aus $AT_Z'14$ sofort

$TT_Z'1$ $\quad \wedge x_1 \ldots \wedge x_n \wedge f[Z^{\langle n \rangle}(f)$ u. $Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ imp. $Z^1(((\ldots((f,x_1),x_2),\ldots),x_n))]$

$\wedge x_1 \ldots \wedge x_n \wedge f[Z^1(((\ldots((f,x_1),x_2),\ldots),x_n))$ u. $((\ldots((f,x_1),x_2),\ldots),x_n) \neq \underline{k}$ imp. $Z^{\langle n \rangle}(f)$ u. $Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)]$

(d) Wir können nicht an Stelle von AT_Z15 $\wedge x \wedge y$(non $Z^{\langle n \rangle}(x)$ o. non $Z^0(y)$ imp. $(x,y)=\underline{k}$) setzen, was offensichtlich inadäquat ist. Die korrekte Analogie zu AT_Z15 wäre die infinitäre Formulierung $\wedge x \wedge y$(non $Z^{\langle 1 \rangle}(x)$ u. non $Z^{\langle 2 \rangle}(x)$ u. ... o. non $Z^0(y)$ imp. $(x,y)=\underline{k}$); wir wollen aber bei einer finitären Sprache bleiben. Eine zur gerade erwogenen äquivalente Möglichkeit ist es, eine substitutionelle Indexquantifikation einzuführen; $AT_Z'15$ sähe dann so aus: $\wedge x \wedge y(\wedge i$ non $Z^{\langle i \rangle}(x)$ o. non $Z^0(y)$ imp. $(x,y)=\underline{k}$); aber auch in diesem Sinne wollen wir die Sprache nicht erweitern. Es bleibt dann, anstelle von AT_Z15 in TZ_n' einen Satz zu verwenden, der aus ihm im System TZ_1 folgt, nämlich $\wedge x \wedge y(Z^0(x)$ o. $Z^1(x)$ o. non $Z^0(y)$ imp. $(x,y)=\underline{k}$); oder aber ein Prädikat "Att" einzuführen, wobei Att(τ) im Blick auf die Interpretation der Sprache PTZ_n' zu lesen wäre als "τ ist ein Attribut 1. Stufe", und zu setzen

$AT_Z'15$ $\quad \wedge x \wedge y$(non Att(x) o. non $Z^0(y)$ imp. $(x,y)=\underline{k}$)

Diesen letzteren Weg wollen wir einschlagen. - Das Prädikat Att wird charakterisiert durch die Axiome

$AT_Z'11$ $\quad \wedge x$(Att(x) imp. non $Z^0(x)$ u. non $Z^1(x)$)

und

$AT_Z'12$ $\quad \wedge x(Z^{\langle n \rangle}(x)$ imp. Att(x))

(In jedem System, in dem Att verwendet wird, erscheint $AT'_Z 11$ und eine Entsprechung zu $AT'_Z 12$: $\Lambda x(Z^c(x)$ imp. $Att(x))$, wobei für c jeder im System betrachtete *eingeklammerte* Typ eingesetzt werden kann.) Zu $AT'_Z 14$ fügen wir ergänzend hinzu:

(c) $\Lambda x[Att(x)$ u. non $Z^{\langle 1\rangle}(x)$ u. $Z^0(y)$ imp. $Att((x,y))]$ (*Die Sättigung eines Attributs 1. Stufe, das kein einstelliges Attribut 1. Stufe ist, mit einem Gegenstand ist wieder ein Attribut 1. Stufe*; die Umkehrung hiervon ist mit den übrigen Axiomen beweisbar)

(e) Wir können nun zeigen:

$TT'_Z 2$ $\quad \Lambda x \Lambda y \Lambda z[(x,(y,z))=\underline{k}]$

Beweis: Att(y) o. non Att(y);
(x) Att(y); $Z^{\langle 1\rangle}(y)$; $Z^0(z)$; also mit $AT'_Z 14$(b) $Z^1((y,z))$, also non $Z^0((y,z))$ mit $AT'_Z 10$, also $(x,(y,z))=\underline{k}$ mit $AT'_Z 15$;
(xx) Att(y); $Z^{\langle 1\rangle}(y)$; non $Z^0(z)$; also mit $AT'_Z 15$ $(y,z)=\underline{k}$; also $Z^1((y,z))$ [da $Z^1(\underline{k})$], also wie unter (x) $(x,(y,z))=\underline{k}$;
(xxx) Att(y); non $Z^{\langle 1\rangle}(y)$; $Z^0(z)$; also mit $AT'_Z 14$(c) $Att((y,z))$, also mit $AT'_Z 11$ non $Z^0((y,z))$, also wie unter (x) $(x,(y,z))=\underline{k}$;
(xxxx) Att(y); non $Z^{\langle 1\rangle}(y)$; non $Z^0(z)$; man erreicht wie unter (xx) $(x,(y,z))=\underline{k}$;
(x') non Att(y), also mit $AT'_Z 15$ $(y,z)=\underline{k}$, also $Z^1((y,z))$, also non $Z^0((y,z))$ mit $AT'_Z 10$, also $(x,(y,z))=\underline{k}$ mit $AT'_Z 15$.

$TT'_Z 3$ $\quad \Lambda x \Lambda y[Att((x,y))$ o. $Z^1((x,y))]$

Beweis: (x) Att(x) u. $Z^0(y)$; falls $Z^{\langle 1\rangle}(x)$, dann mit $AT'_Z 14$(b) $Z^1((x,y))$; falls non $Z^{\langle 1\rangle}(x)$, dann mit $AT'_Z 14$(c) $Att((x,y))$;
(xx) non Att(x) o. non $Z^0(y)$; also mit $AT'_Z 15$ $(x,y)=\underline{k}$, also $Z^1((x,y))$.

Der Beweis von $TT'_Z 2$ ist einfacher, wenn man zunächst $TT'_Z 3$ beweist.

$TT'_Z 4$ $\quad \Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n[((\ldots((f,x_1),x_2),\ldots),x_n)\neq\underline{k}$ imp.

$$\mathrm{Att}(f) \text{ u. } Z^0(x_1) \text{ u. } \dots \text{ u. } Z^0(x_n))$$

Beweis: Ang. $((\dots((f,x_1),x_2),\dots),x_n) \neq \underline{k}$; $Z^0(x_n)$, denn sonst mit AT'_Z15 sofort ein Widerspruch zur Annahme; falls non $Z^0(x_i)$ ($_i$ ein Index vor $_n$ und nach "$_0$"), so bezeichnet nach AT'_Z15 ein Segment von $((\dots((f,x_1),x_2),\dots),x_n)$ dasselbe wie $\underline{k}$, also bezeichnet ein Segment von $((\dots((f,x_1),x_2),\dots),x_n)$ kein Attribut; dann bezeichnet nach AT'_Z15 aber auch jedes nachfolgende Segment von $((\dots((f,x_1),x_2),\dots),x_n)$ (wenn vorhanden) dasselbe wie $\underline{k}$, also auch $((\dots((f,x_1),x_2),\dots),x_n)$, was der Annahme widerspricht;
[die Segmente von $((((a,b),c),d),e)$ z.B. sind der Reihe nach:
(a,b) $((a,b),c)$ $(((a,b),c),d)$;]
demnach $Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$;
$\mathrm{Att}(f)$, denn sonst $(f,x_1)=\underline{k}$ gemäß AT'_Z15, also non $\mathrm{Att}((f,x_1))$, also mit AT'_Z15 $((f,x_1),x_2)=\underline{k}$, also non $\mathrm{Att}(((f,x_1),x_2))$ etc. bis man gelangt zu $((\dots((f,x_1),x_2),\dots),x_n)=\underline{k}$ – was der Annahme widerspricht.

In TZ'_n sind gewisse Iterationen von (,) nicht trivialisierend, aber keineswegs *alle*. Nicht trivialisierend sind nur solche, bei denen sämtliche geöffneten Klammern am Anfang stehen; das folgt aus TT'_Z2 und AT'_Z15. Denn kommt in einem Klammerausdruck $(\tau,(\tau',\tau''))$ vor (was genau dann der Fall ist, wenn in ihm nicht sämtliche geöffnete Klammern am Anfang stehen), dann darf $(\tau,(\tau',\tau''))$ gemäß TT'_Z2 durch $\underline{k}$ ersetzt werden; nun gilt aber non $\mathrm{Att}(\underline{k})$ u. non $Z^0(\underline{k})$ [da $Z^1(\underline{k})$, AT'_Z10, AT'_Z11]; also reduziert sich der gesamte Klammerausdruck gemäß AT'_Z15 auf $\underline{k}$.

Wir definieren schließlich:

DT'_Z1 $\quad (\varphi,\tau_1,\dots,\tau_n) := ((\dots((\varphi,\tau_1),\tau_2),\dots),\tau_n)$

(Wie x_2 in $((\dots(f,x_1),x_2),\dots),x_n)$ wird τ_2 in $((\dots((\varphi,\tau_1),\tau_2),\dots),\tau_n)$ nur hingeschrieben, um den Aufbau des Ausdrucks zu verdeutlichen, nicht etwa, weil $2 \leq n$; die Indices in DT'_Z1 sind metasprachlich, nicht objektsprachlich wie bisher.)

(f) Die Reformulierung von AT_Z16 hat die *vorläufige* Gestalt

AT'_Z16 (a) $\bigwedge x(Z^0(x)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(\Pi[x])$ imp. $(\lambda o\Pi[o],x)=\Pi[x])$
(b) $\bigwedge x(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ imp. $(\lambda o\Pi[o],x)=\Pi[x])$

Man kann zeigen:

TT'_Z5 $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(\Pi[x]))$ imp. $Z^{\langle n+1\rangle}(\lambda o\Pi[o])$

Beweis: Ang. $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(\Pi[x]))$, also mit AT'_Z16(a) $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(\Pi[x])$ u. $(\lambda o\Pi[o],x)=\Pi[x])$, also $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^{\langle n\rangle}((\lambda o\Pi[o],x)))$, also mit AT'_Z14(a) $Z^{\langle n+1\rangle}(\lambda o\Pi[o])$.

Und außerdem gilt wie in TZ_1 (siehe TT_Z142)

TT'_Z6 $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ u. $\Pi[x]\neq \underline{k})$ imp. $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\Pi[o])$

Beweis: Ang. $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ u. $\Pi[x]\neq \underline{k})$, also mit AT'_Z16(b) $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^1(\Pi[x])$ u. $\Pi[x]\neq \underline{k}$ u. $(\lambda o\Pi[o],x)=\Pi[x])$, also $Z^1((\lambda o\Pi[o],x))$ u. $(\lambda o\Pi[o],x)\neq \underline{k}$, also mit AT'_Z14(b) $Z^{\langle 1\rangle}(\lambda o\Pi[o])$, also $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\Pi[o])$.

Zu AT'_Z16 ist nun eine wichtige einschränkende Bedingung hinzuzufügen. Das zeigt sich wie folgt. Es könnte etwa für einen Funktionsausdruck $\Pi[x]$ der Fall eintreten, daß man $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^{\langle r\rangle}(\Pi[x]))$ und $\bigvee x'(Z^0(x')$ u. $Z^{\langle r'\rangle}(\Pi[x']))$ hat, wobei $\langle r\rangle$ und $\langle r'\rangle$ verschiedene Indices aus $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, ... sind; dann folgt aber mit TT'_Z5 $Z^{\langle r+1\rangle}(\lambda o\Pi[o])$ und $Z^{\langle r'+1\rangle}(\lambda o\Pi[o])$, was AT'_Z10 widerspricht. Deshalb darf AT'_Z16 nur angewendet werden, wenn $\bigwedge x(Z^0(x)$ imp. $Z^{\langle n\rangle}(\Pi[x]))$ bzw. $\bigwedge x(Z^0(x)$ imp. $Z^1(\Pi[x]))$ gilt. (In TZ_1 ist diese Einschränkung unnötig, da dort alle λ-Ausdrücke Entitäten derselben Kategorie $Z^{\langle 0\rangle}$ bezeichnen; aber auch für die Systeme TZ_1^+ und TZ_n braucht sie nicht getroffen zu werden.) Im Axiom AT'_Z16 sind also diese Bedingungen subjunktiv (a) bzw. (b) voranzustellen; Entsprechendes gilt für die Theoreme TT'_Z5 und TT'_Z6.

Die Axiome AT_Z17 und AT_Z18 entfallen ersatzlos.

(g) Die Teilbeziehungen zwischen gleichstelligen Attributen werden so definiert:

DT'_Z2 $\varphi T^{\langle 1\rangle}\varphi' := Z^{\langle 1\rangle}(\varphi)$ u. $Z^{\langle 1\rangle}(\varphi')$ u.
$\bigwedge z(Z^0(z)$ imp. $(\varphi,z)T(\varphi',z))$

$$\varphi T^{\langle n+1\rangle}\varphi' := Z^{\langle n+1\rangle}(\varphi) \text{ u. } Z^{\langle n+1\rangle}(\varphi') \text{ u. } \Lambda z(Z^{0}(z) \text{ imp. } (\varphi,z)T^{\langle n\rangle}(\varphi',z))$$

Es gilt

TT'_Z7 $\Lambda f\Lambda g(fT^{\langle m\rangle}g$ äqu. $Z^{\langle m\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle m\rangle}(g)$ u.
$\Lambda z_1\ldots\Lambda z_m[((\ldots(f,z_1),\ldots),z_m)T((\ldots(g,z_1),\ldots),z_m)])$

Beweis: durch metasprachliche Induktion;
(i) zu zeigen ist $\Lambda f\Lambda g(fT^{\langle 1\rangle}g$ äqu. $\Lambda z[(f,z)T(g,z)])$;
($\underline{x}$) ang. $fT^{\langle 1\rangle}g$, also nach DT'_Z2 $Z^{\langle 1\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 1\rangle}(g)$ u.
$\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)T(g,z))$; aber auch $\Lambda z($non $Z^{0}(z)$ imp.
$(f,z)T(g,z))$, denn falls non $Z^{0}(z)$ nach AT'_Z15 $(f,z)=(g,z)=\underline{k}$,
also $(f,z)T(g,z)$ ($\underline{k}T\underline{k}$);
demnach $Z^{\langle 1\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 1\rangle}(g)$ u. $\Lambda z((f,z)T(g,z))$;
($\underline{xx}$) ang. $Z^{\langle 1\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 1\rangle}(g)$ u. $\Lambda z((f,z)T(g,z))$, also
$\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)T(g,z))$, also mit DT'_Z2 $fT^{\langle 1\rangle}g$;
(ii) es sei für m bewiesen $\Lambda f\Lambda g(fT^{\langle m\rangle}g$ äqu. $Z^{\langle m\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle m\rangle}(g)$ u.
$\Lambda z_1\ldots\Lambda z_m[((\ldots(f,z_1),\ldots),z_m)T((\ldots(g,z_1),\ldots),z_m)])$;
zu zeigen ist $\Lambda f\Lambda g(fT^{\langle m+1\rangle}g$ äqu. $Z^{\langle m+1\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle m+1\rangle}(g)$ u.
$\Lambda z_1\ldots\Lambda z_{m+1}[((\ldots(f,z_1),\ldots),z_{m+1})T((\ldots(g,z_1),\ldots),z_{m+1})])$;
($\underline{x}$) ang. $fT^{\langle m+1\rangle}g$, also mit DT'_Z2 $Z^{\langle m+1\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle m+1\rangle}(g)$ u.
$\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)T^{\langle m\rangle}(g,z))$; ang. $Z^{0}(z)$; also $(f,z)T^{\langle m\rangle}(g,z)$,
also nach I.V.
$\Lambda z_1\ldots\Lambda z_m[((\ldots((f,z),z_1),\ldots),z_m)T((\ldots((g,z),z_1),\ldots),z_m)]$;
ang. *non* $Z^{0}(z)$, also mit AT'_Z15 $(f,z)=\underline{k}$ u. $(g,z)=\underline{k}$, also mit
AT'_Z15, da non Att$((f,z))$ u. non Att$((g,z))$ [nach AT'_Z11],
$((f,z),z_1)=\underline{k}$ u. $((g,z),z_1)=\underline{k}$ etc.; demnach schließlich
$((\ldots((f,z),z_1),\ldots),z_m)=\underline{k}$ u. $((\ldots((g,z),z_1),\ldots),z_m)=\underline{k}$, also
$((\ldots((f,z),z_1),\ldots),z_m)T((\ldots((g,z),z_1),\ldots),z_m)$;
man erhält also sowohl aus der Annahme $Z^{0}(z)$ als auch aus der
Annahme non $Z^{0}(z)$
$\Lambda z_1\ldots\Lambda z_m[((\ldots((f,z),z_1),\ldots),z_m)T((\ldots(g,z),z_1),\ldots),z_m)]$;
demnach (nach Umnumerierung der Variablen)
$\Lambda z_1\ldots\Lambda z_{m+1}[((\ldots(f,z_1),\ldots),z_{m+1})T((\ldots(g,z_1),\ldots),z_{m+1})]$;
($\underline{xx}$) ang. $Z^{\langle m+1\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle m+1\rangle}(g)$ u.
(α) $\Lambda z_1\ldots\Lambda z_{m+1}[((\ldots(f,z_1),\ldots),z_{m+1})T((\ldots(g,z_1),\ldots),z_{m+1})]$;
zu zeigen bleibt gemäß DT'_Z2 $\Lambda z(Z^{0}(z)$ imp. $(f,z)T^{\langle m\rangle}(g,z))$;
ang. $Z^{0}(z)$; gemäß I.V. ergibt sich $(f,z)T^{\langle m\rangle}(g,z)$ aus
$Z^{\langle m\rangle}((f,z))$ u. $Z^{\langle m\rangle}((g,z))$ u.

(β) $\wedge z_1 \ldots \wedge z_m[((\ldots((f,z),z_1),\ldots),z_m)T((\ldots((g,z),z_1),\ldots),z_m)]$;
nun *$Z^{\langle m\rangle}((f,z))$ u. $Z^{\langle m\rangle}((g,z))$* nach $AT_Z'14(\underline{a})$, da $Z^{\langle m+1\rangle}(f)$,
$Z^{\langle m+1\rangle}(g)$, $Z^0(z)$;
(β) aber folgt aus (α), indem man (α) mit z für z_1 partikularisiert und $z_2,\ldots,z_{m+1}$ umnumeriert.

$TT_Z'7$ kann man gemäß $DT_Z'1$ auch so schreiben:
$\wedge f \wedge g[fT^{\langle m\rangle}g$ äqu. $Z^{\langle m\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle m\rangle}(g)$ u.
$\wedge z_1 \ldots \wedge z_m((f,z_1,\ldots,z_m)T(g,z_1,\ldots,z_m))]$

(h) An die Stelle von AT_Z19 schließlich tritt

$AT_Z'19$ $\wedge f \wedge g(Z^{\langle m\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle m\rangle}(g)$ u. $\wedge z((f,z)=(g,z))$ imp. $f=g)$

[Nach wie vor gilt $\wedge z((f,z)=(g,z))$ äqu. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(f,z)=(g,z))$.] – Wir brechen die Darstellung von TZ_n' hier ab und entwickeln TZ_n weiter. Die Entscheidung für TZ_n beruht auf rein praktischen Gründen. In TZ_n ist es möglich, auf schon gewonnene Resultate ohne weiteres zurückzugreifen; TZ_n ist ja eine Verallgemeinerung von TZ_1 und beinhaltet es. In TZ_n' aber, gleichwohl es im wesentlichen auch eine Verallgemeinerung von TZ_1 ist, muß in vielen Fällen erst überprüft werden, ob ein Resultat aus TZ_1 übernommen werden kann.

4. TZ_n in Parallele zu TZ_1

(a) Viele Theoreme und Definitionen von TZ_n sind einfach Verallgemeinerungen von Theoremen und Definitionen von TZ_1:

TT_Z142 entspricht

$\vee x_1 \ldots \vee x_n (Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $Z^1(\pi[x_1,\ldots,x_n])$ u. $\pi[x_1,\ldots,x_n] \neq \underline{k})$ imp. $Z^{\langle n \rangle}(\lambda o_1 \ldots o_n \pi[o_1,\ldots,o_n])$

TT_Z143 entspricht

$Z^{\langle n \rangle}(\lambda o_1 \ldots o_n \pi[o_1,\ldots,o_n])$

TT_Z144 entspricht

non $\vee x_1 \ldots \vee x_n (Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $Z^1(\pi[x_1,\ldots,x_n])$ u. $\pi[x_1,\ldots,x_n] \neq \underline{k})$ imp. $\wedge x_1 \ldots \wedge x_n ((\lambda o_1 \ldots o_n \pi[o_1,\ldots,o_n], x_1,\ldots,x_n) = \underline{k})$

Beweis: $\wedge x_1 \ldots \wedge x_n$ (non $Z^1(\pi[x_1,\ldots,x_n])$ imp. $(\lambda o_1 \ldots o_n \pi[o_1,\ldots,o_n], x_1,\ldots,x_n) = \underline{k}$ [AT_Z^n17];
$\wedge x_1 \ldots \wedge x_n$ (non $Z^0(x_1)$ o. ... o. non $Z^0(x_n)$ imp. $(\lambda o_1 \ldots o_n \pi[o_1,\ldots,o_n], x_1,\ldots,x_n) = \underline{k})$ [AT_Z^n15];
ang. $\pi[x_1,\ldots,x_n] = \underline{k}$; also $Z^1(\pi[x_1,\ldots,x_n])$, denn $Z^1(\underline{k})$;
($\underline{x}$) non $Z^0(x_1)$ o. ... o. non $Z^0(x_n)$, also $(\lambda o_1 \ldots o_n \pi[o_1,\ldots,o_n], x_1,\ldots,x_n) = \underline{k}$ gemäß AT_Z^n15;
($\underline{xx}$) $Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$; also gemäß AT_Z^n16 $(\lambda o_1 \ldots o_n \pi[o_1,\ldots,o_n], x_1,\ldots,x_n) = \pi[x_1,\ldots,x_n] = \underline{k}$;
für den Rest des Beweises vergleiche man den Beweis von TT_Z144.

DT_Z40 entspricht

$Z_K^{\langle n \rangle}(\varphi) := Z^{\langle n \rangle}(\varphi)$ u. $\wedge x_1 \ldots \wedge x_n ((\varphi, x_1,\ldots,x_n) = \underline{k})$
(φ ist ein n-stelliges kontradiktorisches Attribut; n aus "1", "2", ...)

TT_Z145 entspricht

IV., 4.: TZ_n parallel zu TZ_1

$\Lambda x \Lambda y_1 \ldots \Lambda y_n Z^1((x,y_1,\ldots,y_n))$

TT_Z146 entspricht

$\Lambda x \Lambda y[\Lambda z_1 \ldots \Lambda z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.
$(x,z_1,\ldots,z_n)T(y,z_1,\ldots,z_n))$ imp.
$\Lambda z_1 \ldots \Lambda z_n((x,z_1,\ldots,z_n)T(y,z_1,\ldots,z_n))]$ u. [derselbe Ausdruck mit "=" statt "T"]

TT_Z147 entspricht

$\Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n((\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n],x_1,\ldots,x_n)=\Pi[x_1,\ldots,x_n]$ o.
$(\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n],x_1,\ldots,x_n)=\underline{k})$

TT_Z148 entspricht

$\Lambda x \Lambda y_1 \ldots \Lambda y_n((x,y_1,\ldots,y_n)=(\lambda o_1 \ldots o_n(x,o_1,\ldots,o_n),y_1,\ldots,y_n))$

TT_Z149 entspricht

$\Lambda x \Lambda y_1 \ldots \Lambda y_n((\lambda o(o,y_1,\ldots,y_n),x)=\underline{k})$

Beweis: Ang. $(\lambda o(o,y_1,\ldots,y_n),x)\neq\underline{k}$, also gemäß AT^n_Z15
$Z^{\langle 1\rangle}(\lambda o(o,y_1,\ldots,y_n))$ u. $Z^0(x)$; gemäß TT^n_Z145 $Z^1((x,y_1,\ldots,y_n))$;
also gemäß AT^n_Z16 $(\lambda o(o,y_1,\ldots,y_n),x)=(x,y_1,\ldots,y_n)$; also
$(x,y_1,\ldots,y_n)\neq\underline{k}$; aber es ergibt sich, da $Z^0(x)$, mit AT^n_Z10
non $Z^{\langle n\rangle}(x)$, also nach AT^n_Z15 $(x,y_1,\ldots,y_n)=\underline{k}$ – Widerspruch.

TT_Z150 entspricht

$\Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n[(\lambda o'_1 \ldots o'_n \lambda o_1 \ldots o_k \Pi[o_1,\ldots,o_k,o'_1,\ldots,o'_n],x_1,\ldots,x_n)=\underline{k}]$

(b) DT_Z41 entspricht

$\varphi T^{\langle n\rangle}\varphi' := Z^{\langle n\rangle}(\varphi)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(\varphi')$ u.
$\Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n((\varphi,x_1,\ldots,x_n)T(\varphi',x_1,\ldots,x_n))$

TT_Z151 entspricht

$\wedge f \wedge g(fT^{\langle n \rangle}g$ imp. $Z^{\langle n \rangle}(f)$ u. $Z^{\langle n \rangle}(g))$

TT_Z152 entspricht

$\wedge f \wedge g \wedge h(fT^{\langle n \rangle}g$ u. $gT^{\langle n \rangle}h$ imp. $fT^{\langle n \rangle}h)$

TT_Z153 entspricht

$\wedge f(Z^{\langle n \rangle}(f)$ imp. $fT^{\langle n \rangle}f)$

TT_Z154 entspricht

$\wedge f \wedge g(fT^{\langle n \rangle}g$ u. $gT^{\langle n \rangle}f$ imp. $f=g)$

TT_Z155 entspricht

$\vee h(Z^{\langle n \rangle}(h)$ u. $\wedge f(Z^{\langle n \rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle n \rangle}h)$ u.
$\wedge g(Z^{\langle n \rangle}(g)$ u. $\wedge f(Z^{\langle n \rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle n \rangle}g)$ imp. $hT^{\langle n \rangle}g))$

Beweis: (i) Ang. $Z^{\langle n \rangle}(f)$ u. $A[f]$; $Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$;
also $\vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $(f,z_1,\ldots,z_n)=(k,z_1,\ldots,z_n))$;
$Z^1((f,z_1,\ldots,z_n))$ gemäß AT_Z^n14; also
$(f,z_1,\ldots,z_n)T\cup y \vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z_1,\ldots,z_n))$ gemäß
TT_Z18 [$=TT_Z^n18$]; $Z^1(\cup y \vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z_1,\ldots,z_n)))$;
also, da $Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$, gemäß AT_Z^n16
$(\lambda o_1\ldots o_n \cup y \vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o_1,\ldots,o_n)),z_1,\ldots,z_n)=$
$\cup y \vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z_1,\ldots,z_n))$;
demnach aus der 1. Annahme $\wedge z_1\ldots\wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$
imp. $(f,z_1,\ldots,z_n)T(\lambda o_1\ldots o_n \cup y \vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u.
$y=(k,o_1,\ldots,o_n)),z_1,\ldots,z_n))$;
gemäß der Entsprechung zu TT_Z143
$Z^{\langle n \rangle}(\lambda o_1\ldots o_n \cup y \vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o_1,\ldots,o_n)))$;
also gemäß den Entsprechungen zu TT_Z146 und DT_Z41 wegen $Z^{\langle n \rangle}(f)$
$fT^{\langle n \rangle}\lambda o_1\ldots o_n \cup y \vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o_1,\ldots,o_n))$;
(ii) ang. $Z^{\langle n \rangle}(g)$ u. $\wedge f(Z^{\langle n \rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle n \rangle}g)$; ang.
$Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$; also (x) $Z^1((g,z_1,\ldots,z_n))$ mit AT_Z^n14;
ang. $Z^1(x)$ u. $\vee k(Z^{\langle n \rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $x=(k,z_1,\ldots,z_n))$; folglich
$kT^{\langle n \rangle}g$ nach der 1. Annahme, also $(k,z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n)$
gemäß der Entsprechung zu DT_Z41; also $xT(g,z_1,\ldots,z_n)$;

IV., 4.: TZ_n parallel zu TZ_1

demnach (xx) $\wedge x(Z^1(x)$ u. $Vk(Z^{\langle n\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $x=(k,z_1,\ldots,z_n))$ imp. $xT(g,z_1,\ldots,z_n))$;
aus (x) und (xx) mit TT_Z18
$UyVk(Z^{\langle n\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z_1,\ldots,z_n))T(g,z_1,\ldots,z_n)$; also nach AT_Z^n16 $(\lambda o_1\ldots o_n UyVk(Z^{\langle n\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o_1,\ldots,o_n)),$ $z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n)$; nach Allgeneralisierung folgt mit der Entsprechung zu TT_Z146 und der Entsprechung zu DT_Z41 $\lambda o_1\ldots o_n UyVk(Z^{\langle n\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o_1,\ldots,o_n))T^{\langle n\rangle}g$, da $Z^{\langle n\rangle}(g)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(\lambda o_1\ldots o_n UyVk(Z^{\langle n\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o_1,\ldots,o_n)))$;
aus (i) und (ii) ergibt sich das Gewünschte.

DT_Z42 entspricht

$U^{\langle n\rangle}fA[f] := \iota h(Z^{\langle n\rangle}(h)$ u. $\wedge f(Z^{\langle n\rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle n\rangle}h)$ u.
$\wedge g(Z^{\langle n\rangle}(g)$ u. $\wedge f(Z^{\langle n\rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle n\rangle}g)$ imp.
$hT^{\langle n\rangle}g))$

TT_Z156 entspricht

$U^{\langle n\rangle}fA[f]=\lambda o_1\ldots o_n UyVk(Z^{\langle n\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o_1,\ldots,o_n))$

TT_Z157 entspricht

$\wedge z_1\ldots\wedge z_n[Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.
$(U^{\langle n\rangle}fA[f],z_1,\ldots,z_n)=UyVk(Z^{\langle n\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z_1,\ldots,z_n))]$

(c) DT_Z43 entspricht

$\underline{k}^{\langle n\rangle} := \iota y(Z^{\langle n\rangle}(y)$ u. $\wedge x(Z^{\langle n\rangle}(x)$ imp. $xT^{\langle n\rangle}y))$ $[=U^{\langle n\rangle}f(f=f)]$
(das n-stellige absolut maximale Attribut; die Spezifizierung "1. Stufe" lassen wir der Kürze halber weg)

TT_Z158 entspricht

$Z_K^{\langle n\rangle}(\underline{k}^{\langle n\rangle})$

DT_Z42 entspricht

$b^{\langle n\rangle}(\tau) := \lambda o_1\ldots o_n Ux(x=\tau$ u. $o_1=o_1$ u. ... u. $o_n=o_n)$

IV., 4.: TZ_n parallel zu TZ_1

(das n-stellige Eigenattribut von τ)

$(b^{\langle 1\rangle}(\tau)=b^{\langle 0\rangle}(\tau)=b(\tau))$. TT_Z159 entspricht

$\wedge x(Z^1(x)$ imp. $\wedge z_1 \ldots \wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.
$(b^{\langle n\rangle}(x), z_1, \ldots, z_n)=x))$

TT_Z160 entspricht

$\wedge z_1 \ldots \wedge z_n((b^{\langle n\rangle}(\underline{k}), z_1, \ldots, z_n)=\underline{k})$

TT_Z161 entspricht

$Z_K^{\langle n\rangle}(b^{\langle n\rangle}(\underline{k}))$

TT_Z162 entspricht

$b^{\langle n\rangle}(\underline{k})=\underline{k}^{\langle n\rangle}$

Beweis: Da $Z^{\langle n\rangle}(b^{\langle n\rangle}(\underline{k}))$, gilt $b^{\langle n\rangle}(\underline{k})T^{\langle n\rangle}\underline{k}^{\langle n\rangle}$; es gilt aber auch $\underline{k}^{\langle n\rangle}T^{\langle n\rangle}b^{\langle n\rangle}(\underline{k})$ nach der Entsprechung zu DT_Z41; denn $Z^{\langle n\rangle}(\underline{k}^{\langle n\rangle})$ u. $Z^{\langle n\rangle}(b^{\langle n\rangle}(\underline{k}))$ u. $\wedge z_1 \ldots \wedge z_n((\underline{k}^{\langle n\rangle}, z_1, \ldots, z_n)T(b^{\langle n\rangle}(\underline{k}), z_1, \ldots, z_n))$, denn $\wedge z_1 \ldots \wedge z_n((\underline{k}^{\langle n\rangle}, z_1, \ldots, z_n)T\underline{k})$ nach der Entsprechung zu TT_Z145 und $T(\underline{k})$, und $\wedge z_1 \ldots \wedge z_n((b^{\langle n\rangle}(\underline{k}), z_1, \ldots, z_n)=\underline{k})$ [Entsprechung zu TT_Z160]; aus $b^{\langle n\rangle}(\underline{k})T^{\langle n\rangle}\underline{k}^{\langle n\rangle}$ und $\underline{k}^{\langle n\rangle}T^{\langle n\rangle}b^{\langle n\rangle}(\underline{k})$ folgt gemäß der Entsprechung zu TT_Z154 $b^{\langle n\rangle}(\underline{k})=\underline{k}^{\langle n\rangle}$.

TT_Z163 entspricht

$\wedge f \wedge g(Z_K^{\langle n\rangle}(f)$ u. $Z_K^{\langle n\rangle}(g)$ imp. $f=g)$

DT_Z45 entspricht

$Z_L^{\langle n\rangle}(\varphi) := Z^{\langle n\rangle}(\varphi)$ u. $\wedge z_1 \ldots \wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.
$(\varphi, z_1, \ldots, z_n)=\underline{t})$
(φ ist ein n-stelliges tautologisches Attribut)

TT_Z164 entspricht

IV., 4.: TZ_n parallel zu TZ_1

$Z_L^{\langle n\rangle}(b^{\langle n\rangle}(\underline{t}))$

TT_Z165 entspricht

$b^{\langle n\rangle}(\underline{t})=\underline{t}^{\langle n\rangle}$

DT_Z46 entspricht

$\underline{t}^{\langle n\rangle} := \iota y(Z^{\langle n\rangle}(y)$ u. $\wedge x(Z^{\langle n\rangle}(x)$ imp. $yT^{\langle n\rangle}x))$ $[=U^{\langle n\rangle}f(f\neq f)]$
(das n-stellige absolut minimale Attribut)

TT_Z166 entspricht

$Z_L^{\langle n\rangle}(\underline{t}^{\langle n\rangle})$

Und TT_Z167 entspricht

$\wedge f\wedge g(Z_L^{\langle n\rangle}(f)$ u. $Z_L^{\langle n\rangle}(g)$ imp. $f=g)$

Beweis: Ang. $Z_L^{\langle n\rangle}(f)$ u. $Z_L^{\langle n\rangle}(g)$, also nach der Entsprechung zu DT_Z45 $Z^{\langle n\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(g)$ u. $\wedge z_1\ldots\wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp. $(f,z_1,\ldots,z_n)=\underline{t})$ u. $\wedge z_1\ldots\wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp. $(g,z_1,\ldots,z_n)=\underline{t})$, also mit der Entsprechung zu TT_Z146 $\wedge z_1\ldots\wedge z_n((f,z_1,\ldots,z_n)=(g,z_1,\ldots,z_n))$, also mit AT_Z^n19 $f=g$.

TT_Z168 entspricht

(i) $\wedge y_1\ldots\wedge y_n\wedge x_1\ldots\wedge x_n[y_1=x_1$ u. ... u. $y_n=x_n$ imp. $Uy((y_1=x_1$ u. ... u. $y_n=x_n)$ u. $y=\underline{k})=\underline{k}]$

(i') $\wedge y_1\ldots\wedge y_n\wedge x_1\ldots\wedge x_n[y_1\neq x_1$ o. ... o. $y_n\neq x_n$ imp. $Uy((y_1=x_1$ u. ... u. $y_n=x_n)$ u. $y=\underline{k})=\underline{t}]$

(ii) $\wedge y_1\ldots\wedge y_n\wedge x_1\ldots\wedge x_n[Uy((y_1=x_1$ u. ... u. $y_n=x_n)$ u. $y=\underline{k})=\underline{k}$ imp. $y_1=x_1$ u. ... u. $y_n=x_n]$

(ii') $\wedge y_1\ldots\wedge y_n\wedge x_1\ldots\wedge x_n[Uy((y_1=x_1$ u. ... u. $y_n=x_n)$ u. $y=\underline{k})=\underline{t}$ imp. $y_1\neq x_1$ o. ... o. $y_n\neq x_n]$

DT_Z47 entspricht

IV., 4.: TZ_n parallel zu TZ_1

$v(\tau_1,\ldots,\tau_n) := \iota o_1\ldots o_n Uy((o_1=\tau_1$ u. ... u. $o_n=\tau_n)$ u. $y=\underline{k})$

TT_Z169 entspricht

(a) $\wedge x_1\ldots\wedge x_n\wedge z_1\ldots\wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.
$((v(x_1,\ldots,x_n),z_1,\ldots,z_n)=\underline{t}$ äqu. $z_1\neq x_1$ o. ... o. $z_n\neq x_n))$

(b) $\wedge x_1\ldots\wedge x_n\wedge z_1\ldots\wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.
$((v(x_1,\ldots,x_n),z_1,\ldots,z_n)=\underline{k}$ äqu. $z_1=x_1$ u. ... u. $z_n=x_n))$

(d) TT_Z151 - TT_Z155 und ihre entsprechenden Verallgemeinerungen korrespondieren den Axiomen AT_Z^n0 - AT_Z^n4 (=AT_Z0 - AT_Z4; entsprechend für AT_Z5 - AT_Z9, AT_Z13, AT_Z21); wir zeigen nun noch die Entsprechungen zu TT_Z175, TT_Z176 und TT_Z177, von denen die beiden letzteren den Axiomen AT_Z^n5 und AT_Z^n6 korrespondieren, und brechen dann die zu TZ_1 parallele Entwicklung von TZ_n ab. Die Verallgemeinerungen von Theoremen und Definitionen von TZ_1 in TZ_n ziehen wir im Folgenden nach Bedarf in Betracht. (Die Numerierung der Theoreme und Definitionen von TZ_n folgt der Regel $TT_Z^nXY=TT_ZXY$, $DT_Z^nXY=DT_ZXY$; die Verallgemeinerung von DT_ZXY ist also *nicht* DT_Z^nXY.)

TT_Z175 entspricht

$\wedge f(Z^{\langle n\rangle}(f)$ u. $(\wedge z_1\ldots\wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.
$(f,z_1,\ldots,z_n)=\underline{t})$ o. $\vee z_1\ldots\vee z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u.
$(f,z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t}$ u. $QA((f,z_1,\ldots,z_n))$ u.
$\wedge x_1\ldots\wedge x_n(Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $(x_1\neq z_1$ o. ... o. $x_n\neq z_n)$
imp. $(f,x_1,\ldots,x_n)=\underline{t})))$ imp. $QA^{\langle n\rangle}(f))$

Beweis: Ang. $Z^{\langle n\rangle}(f)$; ang. $gT^{\langle n\rangle}f$;
($\underline{x}$) $\wedge z_1\ldots\wedge z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp. $(f,z_1,\ldots,z_n)=\underline{t})$,
also $\wedge z_1\ldots\wedge z_n((f,z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n))$; aus $gT^{\langle n\rangle}f$ nach der Entsprechung zu DT_Z41 $\wedge z_1\ldots\wedge z_n((g,z_1,\ldots,z_n)T(f,z_1,\ldots,z_n))$;
also mit AT_Z^n3 und AT_Z^n19 [$Z^{\langle n\rangle}(g)$] $g=f$, also $g=f$ o. $M^{\langle n\rangle}(g)$;
($\underline{xx}$) $\vee z_1\ldots\vee z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $(f,z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t}$ u.
$QA((f,z_1,\ldots,z_n))$ u. $\wedge x_1\ldots\wedge x_n(Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u.
$(x_1\neq z_1$ o. ... o. $x_n\neq z_n)$ imp. $(f,x_1,\ldots,x_n)=\underline{t}))$; ang. $g\neq f$; also
$\vee y_1\ldots\vee y_n(Z^0(y_1)$ u. ... u. $Z^0(y_n)$ u. $(g,y_1,\ldots,y_n)\neq(f,y_1,\ldots,y_n))$

[AT^n_Z19, Entsprechung zu TT_Z146], also nach AT^n_Z3 $\vee y_1 \ldots \vee y_n(\ldots$ u. (non $(g,y_1,\ldots,y_n)T(f,y_1,\ldots,y_n)$ o. non $(f,y_1,\ldots,y_n)T(g,y_1,\ldots,y_n)))$, also wegen $gT^{\langle n\rangle}f$ $\vee y_1 \ldots \vee y_n(Z^0(y_1)$ u. ... u. $Z^0(y_n)$ u. non $(f,y_1,\ldots,y_n)T$ $(g,y_1,\ldots,y_n))$, also $(f,y_1,\ldots,y_n)\neq\underline{t}$; also $y_1=z_1$ u. ... u. $y_n=z_n$; also non $(f,z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n)$; wegen $QA((f,z_1,\ldots,z_n))$ u. $(g,z_1,\ldots,z_n)T(f,z_1,\ldots,z_n)$ nach DT_Z6 [$=DT^n_Z$6] $(g,z_1,\ldots,z_n)=(f,z_1,\ldots,z_n)$ o. $M((g,z_1,\ldots,z_n))$; also $M((g,z_1,\ldots,z_n))$, also nach TT_Z32 [$=TT^n_Z$32] $(g,z_1,\ldots,z_n)=\underline{t}$; außerdem $\wedge x_1 \ldots \wedge x_n(Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $(x_1\neq z_1$ o. ... o. $x_n\neq z_n)$ imp. $(g,x_1,\ldots,x_n)=\underline{t})$, denn $gT^{\langle n\rangle}f$ und die Annahme ($\underline{xx}$); demnach $\wedge x_1 \ldots \wedge x_n(Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ imp. $(g,x_1,\ldots,x_n)=\underline{t})$, also $Z_L^{\langle n\rangle}(g)$ nach der Entsprechung zu DT_Z45, also nach der Entsprechung zu TT_Z166 und TT_Z167 $g=\underline{t}^{\langle n\rangle}$, also $M^{\langle n\rangle}(g)$ nach dem zu TT_Z32 parallelen Theorem für n-stellige Attribute.

TT_Z176 entspricht

$\wedge f \wedge g(Z^{\langle n\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle n\rangle}(g)$ u. $\wedge h(QA^{\langle n\rangle}(h)$ u. $hT^{\langle n\rangle}f$ imp. $hT^{\langle n\rangle}g)$ imp. $fT^{\langle n\rangle}g)$

Beweis: Ang. $Z^{\langle n\rangle}(f)$, $Z^{\langle n\rangle}(g)$, $\wedge h(QA^{\langle n\rangle}(h)$ u. $hT^{\langle n\rangle}f$ imp. $hT^{\langle n\rangle}g)$; ang. $Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$; zu zeigen ist $(f,z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n)$; ang. non $(f,z_1,\ldots,z_n)T$ $(g,z_1,\ldots,z_n)$, also nach AT^n_Z5 $\vee y(QA(y)$ u. $yT(f,z_1,\ldots,z_n)$ u. non $yT(g,z_1,\ldots,z_n))$, also mit der Entsprechung zu TT_Z159 $\vee y(QA((b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n))$ u. $(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)T(f,z_1,\ldots,z_n)$ u. non $(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n))$; man betrachte $\lambda o_1 \ldots o_n((b^{\langle n\rangle}(y),o_1,\ldots,o_n)v(v(z_1,\ldots,z_n),o_1,\ldots,o_n))$; es gilt:
($\underline{i}$) $QA((\lambda o_1 \ldots o_n((b^{\langle n\rangle}(y),o_1,\ldots,o_n)v(v(z_1,\ldots,z_n),o_1,\ldots,o_n)),$ $z_1,\ldots,z_n))$, denn $(\lambda o_1 \ldots o_n(\ \ldots\ ),z_1,\ldots,z_n)=$ $((b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)v(v(z_1,\ldots,z_n),z_1,\ldots,z_n))=$ $((b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)v\underline{k})=(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)$ [AT^n_Z16, Entsprechung zu TT_Z169] und $QA((b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n))$;
($\underline{ii}$) $(\lambda o_1 \ldots o_n(\ \ldots\ ),z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t}$, denn $(\lambda o_1 \ldots o_n(\ \ldots\ ),z_1,\ldots,z_n)=(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)$ und $(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t}$, da non $(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n)$;
($\underline{iii}$) $\wedge x_1 \ldots \wedge x_n(Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $(x_1\neq z_1$ o. ... o. $x_n\neq z_n)$ imp. $(\lambda o_1 \ldots o_n(\ \ldots\ ),x_1,\ldots,x_n)=\underline{t})$, denn angenommen das

IV., 4.: TZ_n parallel zu TZ_1

Antezedenz dann nach AT_Z^n16
$(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ),x_1,\ldots,x_n)=((b^{\langle n\rangle}(y),x_1,\ldots,x_n)v(v(z_1,\ldots,z_n),$
$x_1,\ldots,x_n))=((b^{\langle n\rangle}(y),x_1,\ldots,x_n)v\underline{t})$ [nach der Entsprechung zu
TT_Z169] $=\underline{t}$;
aus (i), (ii) und (iii) folgt mit der Entsprechung zu TT_Z175
$QA^{\langle n\rangle}(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ))$;
außerdem gilt *$\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ )T^{\langle n\rangle}f$*:
ang. $Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$;
(x) $x_1\neq z_1$ o. ... o. $x_n\neq z_n$, dann gemäß (iii)
$(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ),x_1,\ldots,x_n)=\underline{t}$, also
$(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ),x_1,\ldots,x_n)T(f,x_1,\ldots,x_n)$;
(xx) $x_1=z_1$ u. ... u. $x_n=z_n$; dann gemäß der Argumentation
unter (i) $(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ),x_1,\ldots,x_n)=(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)$, und
$(f,x_1,\ldots,x_n)=(f,z_1,\ldots,z_n)$; nun aber
$(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)T(f,z_1,\ldots,z_n)$; also
$(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ),x_1,\ldots,x_n)T(f,x_1,\ldots,x_n)$;
aus dem kursiv Geschriebenen folgt gemäß Annahme
$\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ )T^{\langle n\rangle}g$, also $(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ),z_1,\ldots,z_n)T$
$(g,z_1,\ldots,z_n)$, also gemäß der Argumentation unter (i)
$(b^{\langle n\rangle}(y),z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n)$ – Widerspruch; demnach
$(f,z_1,\ldots,z_n)T(g,z_1,\ldots,z_n)$.

TT_Z177 schließlich entspricht allgemein

$\Lambda f[fT^{\langle n\rangle}U^{\langle n\rangle}gA[g]$ u. non $M^{\langle n\rangle}(f)$ imp. $Vh(hT^{\langle n\rangle}f$ u. non $M^{\langle n\rangle}(h)$
u. $Vk'(hT^{\langle n\rangle}k'$ u. $A[k']))]$

Beweis: Ang. $fT^{\langle n\rangle}U^{\langle n\rangle}gA[g]$ u. non $M^{\langle n\rangle}(f)$; also
$\Lambda z_1\ldots\Lambda z_n((f,z_1,\ldots,z_n)T(U^{\langle n\rangle}gA[g],z_1,\ldots,z_n))$ u. non $Z_L^{\langle n\rangle}(f)$
[Entsprechung zu DT_Z41, TT_Z166, TT_Z167, $M^{\langle n\rangle}(\underline{t}^{\langle n\rangle})$], also mit
der Entsprechung zu DT_Z45 $Vz_1\ldots Vz_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u.
$(f,z_1,\ldots,z_n)T(U^{\langle n\rangle}gA[g],z_1,\ldots,z_n)$ u. $(f,z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t})$, also
mit TT_Z^n32 und der Entsprechung zu TT_Z156
$Vz_1\ldots Vz_n[Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u. $(f,z_1,\ldots,z_n)T$
$UyVk'(Z^{\langle n\rangle}(k')$ u. $A[k']$ u. $y=(k,z_1,\ldots,z_n))$ u. non
$M((f,z_1,\ldots,z_n))]$, also mit AT_Z^n6
$Vr(rT(f,z_1,\ldots,z_n)$ u. non $M(r)$ u. $Vp(rTp$ u. $Vk'(Z^{\langle n\rangle}(k')$ u.
$A[k']$ u. $p=(k',z_1,\ldots,z_n)))))$, also
$Vr(rT(f,z_1,\ldots,z_n)$ u. non $M(r)$ u. $Vk'(Z^{\langle n\rangle}(k')$ u. $A[k']$ u.
$rT(k',z_1,\ldots,z_n)))$; man betrachte $\lambda o_1\ldots o_n((b^{\langle n\rangle}(r),o_1,\ldots,o_n)$

IV., 4.: TZ_n parallel zu TZ_1

$v(v(z_1,\ldots,z_n),o_1,\ldots,o_n))$; es folgt $\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ )T^{\langle n\rangle}f$, $\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ )T^{\langle n\rangle}k'$, non $M^{\langle n\rangle}(\lambda o_1\ldots o_n(\ \ldots\ ))$; damit ergibt sich $\bigvee h(hT^{\langle n\rangle}f$ u. non $M^{\langle n\rangle}(h)$ u. $\bigvee k'(hT^{\langle n\rangle}k'$ u. $A[k']))$.

5. $\underline{id}$, Relationsarten und Sequenzen

(a) Wir betrachten zunächst 2-stellige Attribute, also Entitäten der Kategorie $Z^{\langle 2\rangle} := Z^{\langle 0,0\rangle}$; z.B. $\underline{id}$:

$DT^{n}_{Z}67$ $\quad \underline{id} := \lambda oo'\mathrm{U}y(o{\neq}o' \text{ u. } y{=}\underline{k})$

Es gilt

$TT^{n}_{Z}246$ $\quad$ ($\underline{a}$) $\Lambda z\Lambda z'[Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ imp. } ((\underline{id},z,z'){=}\underline{t} \text{ äqu. } z{=}z')]$
($\underline{b}$) $\Lambda z\Lambda z'[Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ imp. } ((\underline{id},z,z'){=}\underline{k} \text{ äqu. } z{\neq}z')]$

Wir definieren weiter:

$DT^{n}_{Z}68$ $\quad$ (i) $\mathrm{Ref}_{E}(\varphi) := \Lambda z(Z^{0}(z) \text{ imp. } (\varphi,z,z){=}\underline{t})$
(φ ist essentiell reflexiv)
(ii) $\mathrm{Irr}_{E}(\varphi) := Z^{\langle 2\rangle}(\varphi) \text{ u. } \Lambda x((\varphi,x,x){=}\underline{k})$
(φ ist essentiell irreflexiv)
(iii) $\mathrm{Tra}_{E}(\varphi) := Z^{\langle 2}(\varphi) \text{ u. }$
$\Lambda x\Lambda y\Lambda z[(\varphi,x,z)\mathrm{T}((\varphi,x,y)\wedge(\varphi,y,z))]$
(φ ist essentiell transitiv)
(iv) $\mathrm{Sym}_{E}(\varphi) := Z^{\langle 2\rangle}(\varphi) \text{ u. } \Lambda x\Lambda y((\varphi,x,y)\mathrm{T}(\varphi,y,x))$
(φ ist essentiell symmetrisch)
(v) $\mathrm{Kox}_{E}(\varphi) := \Lambda z\Lambda z'(Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ imp. }$
$((\varphi,z,z')\vee(\varphi,z',z)){=}\underline{t})$
(φ ist essentiell konnex)
(vi) $\mathrm{Lin}_{E}(\varphi) := \Lambda z\Lambda z'(Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ imp. }$
$((\varphi,z,z')\vee(\underline{id},z,z')\vee(\varphi,z',z)){=}\underline{t})$
(φ ist essentiell linear)

Man sieht leicht, daß $\underline{id}$ essentiell reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

(b)

$DT^{n}_{Z}69$ $\quad \mathrm{Fun}^{n}_{E}(\varphi) := Z^{\langle n+1\rangle}(\varphi) \text{ u. } \Lambda z_{1}\ldots\Lambda z_{n}(Z^{0}(z_{1}) \text{ u. } \ldots \text{ u. } Z^{0}(z_{n})$
$\text{imp. } \mathrm{V}y(\Lambda x(x{\neq}y \text{ imp. } (\varphi,z_{1},\ldots,z_{n},x){=}\underline{k}) \text{ u. }$
$(\varphi,z_{1},\ldots,z_{n},y){=}\underline{t}))$

(φ ist eine essentielle n-stellige Funktion)

Essentielle n-stellige Funktionen[1] sind spezielle n+1-stellige essentielle Attribute (Relationen): DT_Z49 entspricht

$$Z_E^{\langle n\rangle}(\varphi) := Z^{\langle n\rangle}(\varphi) \text{ u. } \wedge z_1 \ldots \wedge z_n (Z^0(z_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } Z^0(z_n) \text{ imp. } (\varphi, z_1, \ldots, z_n) = \underline{t} \text{ o. } (\varphi, z_1, \ldots, z_n) = \underline{k}))$$

(φ ist ein n-stelliges essentielles Attribut)

$\underline{id}$ ist sowohl ein 2-stelliges essentielles Attribut als auch eine 1-stellige essentielle Funktion.

(c) DT_Z55 entspricht allgemein

$$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) := E((\varphi, \tau_1, \ldots, \tau_n))$$

([die Gegenstände] $\tau_1, \ldots, \tau_n$ erfüllen [das n-stellige Attribut] φ)

Unter Verwendung des Definiendums dieser Definition läßt sich jedes in DT_Z^n68 und DT_Z^n69 definierte Prädikat Q_E *ohne* das Subskript "E" in der üblichen Weise so definieren, daß gilt $\wedge f(Q_E(f) \text{ imp. } Q(f))$; die Umkehrung hiervon ist natürlich nicht gültig. – Mit dem Definiendum der Entsprechung von DT_Z56, d.h. mit dem Definiendum von $(\varphi \text{ in } \alpha)(\tau_1, \ldots, \tau_n) := (\varphi, \tau_1, \ldots, \tau_n) T\alpha$ u. $MK(\alpha)$, kann man auf mögliche Welten relativierte Analoga zu den Prädikaten, die durch DT_Z^n68 und DT_Z^n69 gegeben werden, definieren; z.B. $Sym(\varphi,\alpha) := Z^{\langle 2\rangle}(\varphi) \text{ u. } MK(\alpha) \text{ u. } \wedge x \wedge y((\varphi \text{ in } \alpha)(x,y) \text{ imp. } (\varphi \text{ in } \alpha)(y,x))$ [φ ist symmetrisch in α]. Es gilt dann für die Prädikate aus DT_Z^n68 $\wedge f(Q_E(f) \text{ äqu. } \wedge x(MK(x) \text{ imp. } Q(f,x)))$ [f ist essentiell Q genau dann, wenn f Q in allen möglichen Welten ist].[2] Wir zeigen dies exemplarisch:

$$Kox(\varphi,\alpha) := \wedge z \wedge z'(Z^0(z) \text{ u. } Z^0(z') \text{ imp. } (\varphi \text{ in } \alpha)(z,z') \text{ o. } (\varphi \text{ in } \alpha)(z',z))$$ [3]

Es gilt: $\wedge f(Kox_E(f) \text{ äqu. } \wedge x(MK(x) \text{ imp. } Kox(f,x)))$

Beweis: (i) Ang. $Kox_E(f)$; ang. $MK(x)$; ang. $Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$; zu zeigen ist $(f \text{ in } x)(z,z')$ o. $(f \text{ in } x)(z',z)$; aus $Kox_E(f)$ mit $Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ $((f,z,z') \vee (f,z',z)) = \underline{t}$; also

$((f,z,z')\vee(f,z',z))Tx$, also $(f,z,z')Tx$ o. $(f,z',z)Tx$ [wegen $MK(x)$], also $(f,z,z')Tx$ u. $MK(x)$ o. $(f,z',z)Tx$ u. $MK(x)$, also $(f \text{ in } x)(z,z')$ o. $(f \text{ in } x)(z',z)$;
(ii) ang. $\Lambda x(MK(x)$ imp. $Kox(f,x))$; ang. $Z^{0}(z)$ u. $Z^{0}(z')$; zu zeigen ist $((f,z,z')\vee(f,z',z))=\underline{t}$; aus den Annahmen folgt zunächst $\Lambda x(MK(x)$ imp. $(f \text{ in } x)(z,z')$ o. $(f \text{ in } x)(z',z))$; also $\Lambda x(MK(x)$ imp. $(f,z,z')Tx$ o. $(f,z',z)Tx)$, also $\Lambda x(MK(x)$ imp. $((f,z,z')\vee(f,z',z))Tx)$ [$TT_{Z}26$], also mit $TT_{Z}90$ $((f,z,z')\vee(f,z',z))T\underline{t}$, also $((f,z,z')\vee(f,z',z))=\underline{t}$.

(d) In TZ_{n} lassen sich endliche geordnete Sequenzen (speziell geordnete Paare) von Gegenständen definieren: $DT_{Z}48$ entspricht allgemein

$$i(\tau_1,\ldots,\tau_n) := \lambda o_1\ldots o_n Uy((o_1\neq\tau_1 \text{ o. } \ldots \text{ o. } o_n\neq\tau_n) \text{ u. } y=\underline{k})$$

$DT^{\underline{n}}_{Z}70$ $\quad \langle\tau_1,\ldots,\tau_n\rangle := i(\tau_1,\ldots,\tau_n)$

Es gilt

$TT^{\underline{n}}_{Z}247$ $\quad \Lambda z_1\ldots\Lambda z_n\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n(Z^{0}(z_1)$ u. $\ldots$ u. $Z^{0}(z_n)$ u. $\langle z_1,\ldots,z_n\rangle=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ imp. $z_1=x_1$ u. $\ldots$ u. $z_n=x_n)$

Beweis: Ang. $Z^{0}(z_1)$ u. $\ldots$ u. $Z^{0}(z_n)$ u. $\langle z_1,\ldots,z_n\rangle=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$; also $(\lambda o_1\ldots o_n Uy((o_1\neq z_1$ o. $\ldots$ o. $o_n\neq z_n)$ u. $y=\underline{k}),z_1,\ldots,z_n)=$ $(\lambda o_1\ldots o_n Uy((o_1\neq x_1$ o. $\ldots$ o. $o_n\neq x_n)$ u. $y=\underline{k}),z_1,\ldots,z_n)$; $\lambda o_1\ldots o_n Uy((o_1\neq z_1$ o. $\ldots$ o. $o_n\neq z_n)$ u. $y=\underline{k}),z_1,\ldots,z_n)=$ $Uy(z_1\neq z_1$ o. $\ldots$ o. $z_n\neq z_n)$ u. $y=\underline{k})$ [$AT^{\underline{n}}_{Z}16$] $=\underline{t}$; also $Uy((z_1\neq x_1$ o. $\ldots$ o. $z_n\neq x_n)$ u. $y=\underline{k})=\underline{t}$ [mit $AT^{\underline{n}}_{Z}16$]; würde nun gelten $z_1\neq x_1$ o. $\ldots$ o. $z_n\neq x_n$, so erhielte man $Uy((z_1\neq z_1$ o. $\ldots$ o. $z_n\neq x_n)$ u. $y=\underline{k})=\underline{k}$; also $\underline{t}=\underline{k}$, was $TT_{Z}104$ widerspricht; demnach $z_1=x_1$ u. $\ldots$ u. $z_n=x_n$.

Anmerkungen:

[1]Essentielle Funktionen entsprechen den Funktionen, von denen in der Mengenlehre die Rede ist: Funktionen im üblichen Sinn.

[2]Es gilt aber nicht $\Lambda f(\mathrm{Fun}^n_E(f)$ äqu. $\Lambda x(\mathrm{MK}(x)$ imp. $\mathrm{Fun}^n(f,x)))$,

wobei $\mathrm{Fun}^n(f,x) := Z^{\langle n+1\rangle}(f)$ u. $\mathrm{MK}(x)$ u.

$\Lambda z_1 \ldots \Lambda z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ imp.

$\mathrm{V}y(\Lambda x'(x' \neq y$ imp. non $(f \text{ in } x)(z_1,\ldots,z_n,x'))$ u.

$(f \text{ in } x)(z_1,\ldots,z_n,y)))$.

[3]Aus dem Definiens ergibt sich $Z^{\langle 2\rangle}(\varphi)$ u. $\mathrm{MK}(\alpha)$ mit AT_Z13:

$\mathrm{V}zZ^0(z)$; also $(\varphi \text{ in } \alpha)(z,z)$, also $(\varphi,z,z)\mathrm{T}\alpha$ u. $\mathrm{MK}(\alpha)$, also

$(\varphi,z,z)\neq\underline{k}$, also mit AT^n_Z15 $Z^{\langle 2\rangle}(\varphi)$.

6. Die $TZ_{\underline{n}}$-Semantik einer prädikatenlogischen Sprache

(a) S ist eine Sprache der elementaren Prädikatenlogik. Ihre syntaktische Beschreibung lautet:

Gegenstandskonstanten von S: a a' a'' a''' ...
(GK von S)

Gegenstandsvariablen von S: s s' s'' s''' ...
(GV von S)

Prädikatkonstanten von S: $P_{,}\ P^{'}_{,}\ P^{''}_{,}\ P^{'''}_{,}$ ...
(PK von S) $P_{,,}\ P^{'}_{,,}\ P^{''}_{,,}\ P^{'''}_{,,}$ ...
$P_{,,,}\ P^{'}_{,,,}\ P^{''}_{,,,}\ P^{'''}_{,,,}$ ...
.
.
.

Sätze von S: (i) Ist $P^{k}_{\underline{n}}$ eine PK von S und $a_1,\dots,a_n$ GK von S, so ist $P^{k}_{\underline{n}}a_1\dots a_n$ ein Primsatz von S. ($\underline{n}$ ist eine Strichfolge; n ist die ihr entsprechende Zahl.)
(ii) Jeder Primsatz von S ist ein Satz von S.
(iii) Ist α ein Satz von S und β ein Satz von S, so ist $-\alpha$ und $(\alpha\&\beta)$ ein Satz von S.
(iv) Ist $\beta[a]$ ein Satz von S, a eine GK von S und s eine GV von S, die in $\beta[a]$ nicht vorkommt, so ist $(s)\beta[s]$ ein Satz von S.
(v) Sätze von S sind nur Ausdrücke nach (i) - (iv).

(b) Die Metasprache von S, in der wir gerade die Syntax von S formuliert haben, enthalte $PTZ_{\underline{n}}$ als Teilsprache (sei also teilweise formal), aber sie enthalte keinerlei mengentheoretische Wendungen. Die ontologische Hintergrundstheorie der Semantik von S ist nicht wie üblich die Mengenlehre, sondern $TZ_{\underline{n}}$. Die Ausdrücke von S werden als (abstrakte) Gegenstände aufgefaßt (die sich selbst benennen). In der Metasprache von S kommt die einstellige Funktionskonstante $\underline{sig}|\tau|$ ("die Intension [`Bedeutung'] von τ") und der Name $\underline{s}$ ("die Eigenschaft, in S besprochen zu werden"; von der früheren Bedeutung dieser Konstanten sehen wir ab; ansonsten wären die in S besprochenen Gegenstände genau die existierenden Gegenstände; siehe III., 15., Anmerkung 3) vor, die axiomatisch wie folgt charakterisiert sind:

ASig1 $\underline{s}(\underline{sig}|a|)$, für jede GK a von S.[1]

ASig2 $Z^{\langle\underline{n}\rangle}(\underline{sig}|P^k_{\underline{n}}|)$, für jede PK $P^k_{\underline{n}}$ von S.

ASig3 $\underline{sig}|P^k_{\underline{n}}a_1 \ldots a_n| = (\underline{sig}|P^k_{\underline{n}}|, \underline{sig}|a_1|, \ldots, \underline{sig}|a_n|)$, für jede PK $P^k_{\underline{n}}$ von S und GK $a_1, \ldots, a_n$ von S.

ASig4 $\underline{sig}|(\alpha\&\beta)| = (\underline{sig}|\alpha| \wedge \underline{sig}|\beta|)$, für alle Sätze α und β von S.

ASig5 $\underline{sig}|-\alpha| = \neg\underline{sig}|\alpha|$, für alle Sätze α von S.

ASig6 $\underline{sig}|(s)\beta[s]| = \mathfrak{a}^{\underline{s}}(\underline{sig}_a|\beta[a]|)$, für alle Sätze $(s)\beta[s]$ von S (wo a eine GK von S ist, die in $\beta[s]$ nicht vorkommt; s kommt in $\beta[a]$ nicht mehr vor; die neuen Notationen in diesem Axiom werden gleich anschließend erklärt).

ASig7 $\underline{sig}|\beta[a]| = \mathbf{T}[\underline{sig}|a|]$ imp. $\underline{sig}_a|\beta[a]| = \lambda o\mathbf{T}[o]$, für alle Sätze $\beta[a]$ und GK a von S (a nicht in $\lambda o\mathbf{T}[o]$).

Aus ASig1 geht hervor: $Z^{\langle 0\rangle}(\underline{s})$; $Z^0(\underline{sig}|a|)$, für jede GK a von S. Vergleiche TT_Z193.

DT^n_Z71 $\mathfrak{a}^f(\varphi)$:= UyVz(f(z) u. yT(φ,z))
(der f-beschränkte Allsachverhalt von φ)

Es gilt

TT^n_Z248 $\wedge f \wedge g$[W($\mathfrak{a}^g$(f)) äqu. $\wedge z$(g(z) imp. f(z))]

Beweis: (i) Ang. W($\mathfrak{a}^g$(f)), also mit DT^n_Z32 und DT^n_Z31 $\mathfrak{a}^g$(f)T$\underline{w}$; ang. g(z); Z^1((f,z)); also mit AT^n_Z2 (f,z)T(f,z); also Vz'(g(z') u. (f,z)T(f,z')); also mit TT^n_Z18

(f,z)TUyVz'(g(z') u. yT(f,z')), also mit DT^n_Z71 (f,z)T$\mathfrak{a}^g$(f);
also mit AT^n_Z1 (f,z)T$\underline{w}$, also mit DT^n_Z31, DT^n_Z55 f(z);
(ii) ang. ∧z(g(z) imp. f(z)); ang. Vz(g(z) u. yT(f,z)); also yT$\underline{w}$ mit der 1. Annahme, DT^n_Z55, DT^n_Z31, AT^n_Z1; also ∧y(Vz(g(z) u. yT(f,z)) imp. yT$\underline{w}$), also mit TT^n_Z18 [Z'($\underline{w}$), Z'(y) wegen AT^n_Z0] UyVz(g(z) u. yT(f,z))T$\underline{w}$, also mit DT^n_Z71, DT^n_Z31, DT^n_Z32 W($\mathfrak{a}^g$(f)). (Vergl. den Beweis von TT_Z227.)

Speziell gilt

∧f(W($\mathfrak{a}^{\underline{s}}$(f)) äqu. ∧z($\underline{s}$(z) imp. f(z)))
(Der $\underline{s}$-beschränkte Allsachverhalt von f ist wahr genau dann, wenn f auf alle Gegenstände zutrifft, die in S besprochen werden)

(c) Einige Beispiele zur Handhabung der Sig-Axiome[2]:

Was besagt der Satz (s)(s')P..ss' von S, d.h. was ist sig|(s)(s')P..ss'|?

(1) sig|(s)(s')P..ss'|=$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$($sig_a$|(s')P..as'|) [ASig6]
(2) sig|(s')P..as'|=$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$($sig_{a'}$|P..aa'|) [ASig6]
(3) sig|P..aa'|=(sig|P..|,sig|a|,sig|a'|) [ASig3]
(4) $sig_{a'}$|P..aa'|=λo(sig|P..|,sig|a|,o) [ASig7, (3)]
(5) sig|(s')P..as'|=$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$(λo(sig|P..|,sig|a|,o)) [(2), (4)]
(6) sig_a|(s')P..as'|=λo'$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$(λo(sig|P..|,o',o)) [ASig7, (5)]
(7) *sig|(s)(s')P..ss'|=$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$(λo'$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$(λo(sig|P..|,o',o)))* [(1), (6)]

Was besagt der Satz (s)(P.s&P!s) von S?

(1) sig|(s)(P.s&P!s)|=$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$($sig_a$|(P.a&P!a)|) [ASig6]
(2) sig|(P.a&P!a)|=(sig|P.a|∧sig|P!a|) [ASig4]
(3) sig|P.a|=(sig|P.|,sig|a|) [ASig3]
(4) sig|P!a|=(sig|P!|,sig|a|) [ASig3]
(5) sig|(P.a&P!a)|=((sig|P.|,sig|a|)∧(sig|P!|,sig|a|)) [(3),(4)]
(6) sig_a|(P.a&P!a)|=λo((sig|P.|,o)∧(sig|P!|,o)) [ASig7, (5)]
(7) *sig|(s)(P.s&P!s)|=$\mathfrak{a}^{\underline{s}}$(λo((sig|P.|,o)∧(sig|P!|,o)))* [(1),(6)]

Was besagt der Satz -(s)P..sa von S?

(1) sig|-(s)P..sa|=¬sig|(s)P..sa| [ASig5]

(2) sig|(s)P..sa|=$\bullet^{S}$($sig_{a'}$|P..a'a|) [ASig6]
(3) sig|P..a'a|=(sig|P..|,sig|a'|,sig|a|) [ASig3]
(4) $sig_{a'}$|P..a'a|=℩o(sig|P..|,o,sig|a|) [ASig7, (3)]
(5) sig|(s)P..sa|=$\bullet^{S}$(℩o(sig|P..|,o,sig|a|)) [(4), (2)]
(6) *sig|-(s)P..sa|=¬*$\bullet^{S}$*(℩o(sig|P..|,o,sig|a|))* [(1), (5)]

Was besagt der Satz -((s)P..sa&-P..a'a) von S?

(1) sig|-((s)P..sa&-P..a'a)|=¬sig|((s)P..sa&-P..a'a)| [ASig5]
(2) sig|((s)P..sa&-P..a'a)|=(sig|(s)P..sa|∧sig|-P..a'a|) [ASig4]
(3) sig|(s)P..sa|=$\bullet^{S}$($sig_{a'}$|Pa'a|) [ASig6]
(4) sig|-P..a'a|=¬sig|P..a'a| [ASig5]
(5) sig|P..a'a|=(sig|P..|,sig|a'|,sig|a|) [ASig3]
(6) $sig_{a'}$|P..a'a|=℩o(sig|P..|,o,sig|a|) [ASig7, (5)]
(7) sig|(s)P..sa|=$\bullet^{S}$(℩o(sig|P..|,o,sig|a|)) [(6), (3)]
(8) sig|-P..a'a|=¬(sig|P..|,sig|a'|,sig|a|) [(4), (5)]
(9) sig|((s)P..sa&-P..a'a)|=($\bullet^{S}$(℩o(sig|P..|,o,sig|a|))∧
¬(sig|P..|,sig|a'|,sig|a|)), kurz: sig|(...)|=(___)
[(2), (7), (8)]
(10) *sig|-(...)|=¬(___)* [(1), (9)]

Wir brauchen bei (10) nicht stehen zu bleiben, denn es gilt:

TT^{n}_{Z}249 ∧f∧g∧z(g(z) imp. ($\bullet^{g}$(f)∧¬(f,z))=k)

Beweis: Ang. g(z); (f,z)T(f,z) gemäß AT^{n}_{Z}2, da Z^{1}((f,z)); also ∨z'(g(z') u. (f,z)T(f,z')), also mit TT^{n}_{Z}18 (f,z)T∪y∨z'(g(z') u. yT(f,z')), also gemäß DT^{n}_{Z}71 (f,z)T$\bullet^{g}$(f); also (f,z)T($\bullet^{g}$(f)∧¬(f,z)) gemäß TT^{n}_{Z}25; ¬(f,z)T($\bullet^{g}$(f)∧¬(f,z)) gemäß TT^{n}_{Z}25, AT^{n}_{Z}2; also ((f,z)∧¬(f,z))T($\bullet^{g}$(f)∧¬(f,z)) gemäß TT^{n}_{Z}24, also kT($\bullet^{g}$(f)∧¬(f,z)) gemäß TT^{n}_{Z}53, d.h. ($\bullet^{g}$(f)∧¬(f,z))=k.

Und mit TT^{n}_{Z}249 erhält man: *sig|-((s)P..sa&-P..a'a)|=t*; denn s(sig|a'|) gemäß ASig1; also mit TT^{n}_{Z}249 ($\bullet^{S}$(℩o(sig|P..|,o,sig|a|))∧¬(℩o(sig|P..|,o,sig|a|),sig|a'|))=k; da Z^{0}(sig|a'|) und Z^{1}((sig|P..|,sig|a'|,sig|a|)) folgt gemäß AT^{n}_{Z}16 (℩o(sig|P..|,o,sig|a|),sig|a'|)=(sig|P..|,sig|a'|,sig|a|); also ($\bullet^{S}$(℩o(sig|P..|,o,sig|a|))∧¬(sig|P..|,sig|a'|,sig|a|))=k, also (___)=k, also ¬(___)=t [TT^{n}_{Z}54], woraus sich mit (10) das Gewünschte ergibt.

(d) Die Wahrheitsdefinition[3] von S lautet:

DSig1 α ist ein wahrer Satz von S := α ist ein Satz von S u. E($\underline{\text{sig}}$|α|)

Nach DSig1 ist ein Satz von S genau dann wahr, wenn seine Intension ein existierender (bestehender) Sachverhalt ist; d.h. wenn es sich so verhält, wie er sagt. – Mit DSig1 erhält man z.B.:

(s)(s')P..ss' ist ein wahrer Satz von S äqu. ΛzΛz'($\underline{s}$(z) u. $\underline{s}$(z') imp. $\underline{\text{sig}}$|P..|(z,z'))
(Der Hintersatz besagt, *daß alle in S besprochenen Gegenstände in der durch P.. intendierten Relation zueinander stehen.*)

Beweis: (i) Ang. (s)(s')P..ss' ist ein wahrer Satz von S, also
E($\underline{\text{sig}}$|(s)(s')P..ss'|) nach DSig1, also
E($a^{\underline{s}}$(λo'$a^{\underline{s}}$(λo($\underline{\text{sig}}$|P..|,o',o)))) nach dem in (c) gewonnenen 1. Resultat, also mit TT^n_Z248
Λz($\underline{s}$(z) imp. λo'$a^{\underline{s}}$(λo($\underline{\text{sig}}$|P..|.o'.o))(z)) [W(x) := E(x) gemäß DT^n_Z32], also mit DT^n_Z55
Λz($\underline{s}$(z) imp. E((λo'$a^{\underline{s}}$(λo($\underline{\text{sig}}$|P..|.o'.o)),z))), also mit AT^n_Z16
Λz[$\underline{s}$(z) imp. E($a^{\underline{s}}$(λo($\underline{\text{sig}}$|P..|.z,o)))] (aus $\underline{s}$(z) Z^0(z), und Z^1 ($a^{\underline{s}}$(λo($\underline{\text{sig}}$|P..|,z,o)))), also mit TT^n_Z248
Λz[$\underline{s}$(z) imp. Λz'($\underline{s}$(z') imp. λo($\underline{\text{sig}}$|P..|.z.o)(z'))], also mit DT^n_Z55 ΛzΛz'($\underline{s}$(z) u. $\underline{s}$(z') imp. E((λo($\underline{\text{sig}}$|P..|.z.o).z'))], also mit AT^n_Z16 ΛzΛz'($\underline{s}$(z) u. $\underline{s}$(z') imp. E(($\underline{\text{sig}}$|P..|.z.z'))), also mit der Entsprechung zu DT^n_Z55
ΛzΛz'($\underline{s}$(z) u. $\underline{s}$(z') imp. $\underline{\text{sig}}$|P..|(z.z')):
(ii) man kehre (i) um.

(e) Die ontologische Wahrheit[4] eines Satzes von S wird definiert durch

DSig2 α ist ein ontologisch wahrer Satz von S := α ist ein Satz von S u. $\underline{\text{sig}}$|α|=$\underline{t}$

Gemäß DSig1 und DSig2 ist jeder ontologisch wahre Satz von S ein wahrer Satz von S, denn es gilt ja E($\underline{t}$); die Umkehrung läßt sich natürlich nicht zeigen. – Ontologische Wahrheit koinzidiert nicht mit *prädikatenlogischer Wahrheit.* Zwar ist jeder prädikatenlogisch wahre Satz von S ein ontologisch wahrer Satz von S, aber die Umkehrung gilt nicht. Haben wir z.B. $\underline{sig}|P.|=\underline{t}^{\langle o \rangle}$, so ergibt sich $\underline{sig}|P.a|=\underline{t}$, d.h. P.a ist nach DSig2 ein ontologisch wahrer Satz von S. P.a ist aber kein prädikatenlogisch wahrer Satz von S; $\underline{sig}|P.a|=\underline{t}$ ergibt sich nämlich nicht allein aus den *angegebenen* Axiomen der Semantik von S zusammen mit der Hintergrundstheorie; man benötigt ja die Zusatzannahme $\underline{sig}|P.|=\underline{t}^{\langle o \rangle}$. -((s)P..sa&-P..a'a) dagegen ist demnach ein prädikatenlogisch wahrer Satz von S, denn "-((s)P..sa&-P..a'a) ist ein Satz von S u. $\underline{sig}$|-((s)P..sa&P..a'a)|=$\underline{t}$" ist ein Theorem bzgl. der angegebenen Semantik von S und der Hintergrundstheorie, wie wir gesehen haben.[5] Die gerade angewandte Konzeption der prädikatenlogischen Wahrheit ist aber nicht die, bei der wir stehenbleiben wollen, da in ihre Formulierung der Folgerungsbegriff zwischen metasprachlichen Sätzen eingeht.

(f) Der ontologische Folgerungsbegriff für S wird gegeben durch

DSig3 β folgt$_S$ ontologisch aus $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$:= $\beta,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sind Sätze von S u. $(\underline{sig}|\alpha_1|\wedge\ldots\wedge\underline{sig}|\alpha_n|\wedge\neg\underline{sig}|\beta|)=\underline{k}$

Für "$(\underline{sig}|\alpha_1|\wedge\ldots\wedge\underline{sig}|\alpha_n|\wedge\neg\underline{sig}|\beta|)=\underline{k}$" kann man nach TT^n_Z54 auch setzen "$\neg(\underline{sig}|\alpha_1|\wedge\ldots\wedge\underline{sig}|\alpha_n|\wedge\neg\underline{sig}|\beta|)=\underline{t}$"; bzw. "$\underline{sig}|\beta|T(\underline{sig}|\alpha_1|\wedge\ldots\wedge\underline{sig}|\alpha_n|)$" (oder "$(\underline{sig}|\alpha_1|\wedge\ldots\wedge\underline{sig}|\alpha_n|)\rightarrow\underline{sig}|\beta|$"), denn es gilt:

TT^n_Z250 $\wedge x \wedge y(Z^1(x)$ u. $Z^1(y)$ imp. $(\neg(x\wedge\neg y)=\underline{t}$ äqu. yTx $[x\rightarrow y]))$

Beweis: Ang. $Z^1(x)$, $Z^1(y)$;
(i) $\neg(x\wedge\neg y)=\underline{t}$, also mit TT^n_Z55 $\neg(\neg\neg x\wedge\neg y)=\underline{t}$, also mit TT^n_Z57 $(\neg x\vee y)=\underline{t}$, also mit DT^n_Z22 $(x\supset y)=\underline{t}$, also $M((x\supset y))$ mit TT^n_Z32, also $x\rightarrow y$ mit TT^n_Z61, also yTx mit DT^n_Z11;
(ii) man kehre (i) um.

Über das Verhältnis von ontologischer Folgerung und prädikatenlogischer Folgerung läßt sich gleiches sagen wie über das Verhältnis von ontologischer Wahrheit und prädikatenlogischer Wahrheit. - Zur Erfassung der Begriffe der prädikatenlogischen Wahrheit und der prädikatenlogischen Folgerung bzgl. S ist, wie es scheint, eine Verstärkung von TZ_n nötig – am Ende gar mit mengentheoretischen Mitteln? Aber tatsächlich ist dies nicht der Fall.

(g) Sei β ein Satz von S, in dem die (untereinander verschiedenen) GK von S $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (und keine anderen) und die PK von S $\varrho_1,\ldots,\varrho_k$ (und keine anderen) vorkommen. *Die Analyse von β* ist ein Term ω_β von PTZ_n + Erweiterungen, in dem $\underline{sig}$ nur noch vor den (autonymen) PK $\varrho_1,\ldots,\varrho_n$ und GK $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ vorkommt, und so daß $\underline{sig}|\beta|=\omega_\beta$ nach den Axiomen ASig1 – ASig7. Von der Analyse von β geht man zu ihrer *Alltrivialisierung* über, indem man in ω_β $\underline{sig}|\varrho_i|$ bzw. $\underline{sig}|\alpha_j|$ durch Variablen f_i, x_j ersetzt, den entstehenden Ausdruck gleich $\underline{t}$ setzt; davor wiederum schreibt man "$Z^{\langle\underline{n}(1)\rangle}(f_1)$ u. ... u. $Z^{\langle\underline{n}(k)\rangle}(f_k)$ u. $\underline{s}(x_1)$ u. ... u. $\underline{s}(x_n)$ imp." [$\underline{n}(i)$ ist die Stellenziffer von ϱ_i: die arabische Ziffer für die Anzahl der Striche, die sich rechts unten an ϱ_i befinden]; schließlich wird das Ganze allgeneralisiert. Dann ersetzt man auch noch $\underline{s}$ durch eine Variable g, schreibt "Vz[g(z)] imp." vor den entstandenen Ausdruck und allgeneralisiert abermals. Das läßt sich kurz so zusammmenfassen:

$\beta[\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\varrho_1,\ldots,\varrho_k]$ ($\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sämtliche GK in β; $\varrho_1,\ldots,\varrho_k$ sämtliche PK in β; die Einkastelung bezieht sich auf sämtliche Stellen, an denen sie vorkommen)

\|/

$\omega_\beta[\underline{s},\underline{sig}|\alpha_1|,\ldots,\underline{sig}|\alpha_n|,\underline{sig}|\varrho_1|,\ldots,\underline{sig}|\varrho_k|]$ (die Einkastelung bezieht sich auf sämtliche Stellen, an denen $\underline{s}$, $\underline{sig}|\alpha_j|$, $\underline{sig}|\varrho_i|$ vorkommt)

\|/

$\Lambda f_1\ldots\Lambda f_k\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n(Z^{\langle\underline{n}(1)\rangle}(f_1)$ u. ... u. $Z^{\langle\underline{n}(k)\rangle}(f_k)$ u. $\underline{s}(x_1)$ u. ... u. $\underline{s}(x_n)$ imp. $\omega_\beta[\underline{s},x_1,\ldots,x_n,f_1,\ldots,f_k]=\underline{t})$

\|/

$\Lambda g(Vz[g(z)]$ imp. $\Lambda f_1\ldots\Lambda f_k\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n(Z^{\langle\underline{n}(1)\rangle}(f_1)$ u. ... u. $Z^{\langle\underline{n}(k)\rangle}(f_k)$ u. $g(x_1)$ u. ... u. $g(x_n)$ imp.

$\omega_\beta[g,x_1,\ldots,x_n,f_1,\ldots,f_k]=\underline{t}))$

Dazu ein Beispiel:
β: -((s)P,,sa&-P,,a'a);
ω_β [die Analyse von β]: $\neg(a^{\underline{s}}(\lambda o(\underline{sig}|P,,|,o,\underline{sig}|a|))\wedge$
$\neg(\underline{sig}|P,,|,\underline{sig}|a'|,\underline{sig}|a|))$;
die Alltrivialisierung der Analyse von β: (i) $\wedge f_1 \wedge x_1 \wedge x_2 [Z^{\langle 2\rangle}(f_1)$
u. $\underline{s}(x_1)$ u. $\underline{s}(x_2)$ imp. $\neg(a^{\underline{s}}(\lambda o(f_1,o,x_1))\wedge\neg(f_1,x_2,x_1))=\underline{t}]$;
(ii) $\wedge g(\vee z[g(z)]$ imp. $\wedge f_1 \wedge x_1 \wedge x_2 [Z^{\langle 2\rangle}(f_1)$ u. $g(x_1)$ u. $g(x_2)$ imp.
$\neg(a^{g}(\lambda o(f_1,o,x_1))\wedge\neg(f_1,x_2,x_1))=\underline{t}])$.
Der letztere Satz ist beweisbar wegen TT^n_Z249: Ang. $\vee z[g(z)]$,
$Z^{\langle 2\rangle}(f_1)$, $g(x_1)$, $g(x_2)$; also nach TT^n_Z249
$(a^{g}(\lambda o(f_1,o,x_1))\wedge\neg(\lambda o(f_1,o,x_1),x_2))=\underline{k}$; gemäß AT^n_Z16
$(\lambda o(f_1,o,x_1),x_2)=(f_1,x_2,x_1)$ [aus $g(x_2)$ $Z^0(x_2)$]; also
$(a^{g}(\lambda o(f_1,o,x_1))\wedge\neg(f_1,x_2,x_1))=\underline{k}$, also
$\neg(a^{g}(\lambda o(f_1,o,x_1))\wedge\neg(f_1,x_2,x_1))=\underline{t}$.

Den Begriff der prädikatenlogischen Wahrheit für S definiert man nun wie folgt:

DSig4 β ist prädikatenlogisch wahr in S := β ist ein Satz von S u. T_β
(wo T_β die Alltrivialisierung der Analyse von β ist)[6];

und den Begriff der prädikatenlogischen Folgerung für S durch

DSig5 β folgt$_S$ prädikatenlogisch aus $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$:=
$-(\alpha_1\&\ldots\&\alpha_n\&-\beta)$ ist prädikatenlogisch wahr in S

Demnach ist -((s)P,,sa&-P,,a'a) im präzisen definierten Sinn ein prädikatenlogisch wahrer Satz von S, und P,,a'a folgt$_S$ prädikatenlogisch aus (s)P,,sa.[7]

Es ist im Rahmen dieses Buches nicht möglich zu untersuchen, inwieweit sich die bekannten modelltheoretischen Resultate bzgl. der Prädikatenlogik (etwa Vollständigkeit eines gewissen prädikatenlogischen Kalküls) im gegebenen intensionalistischen Rahmen rekonstruieren lassen. Gegenüber der klassischen extensionalistischen (tarskischen) Modelltheorie wird dafür ein ganz erhebliches Maß an Umdenken nötig sein, und das System TZ_n ist auf jeden Fall zu verstärken (siehe dazu das nächste Kapitel). Der Anfang ist aber gemacht: Die nichtextensionalistische Definition der prädikatenlogischen Wahrheit und Folgerung ist angegeben (und man überlegt sich leicht, wie eine modallogische Erweiterung aussähe). - Wir zeigen abschließend ein wichtiges semantisches Theorem bzgl. der Prädikatenlogik.

(h) Es gilt das *Gesetz der Generalisierung*:

Ist β[a] prädikatenlogisch wahr in S und ist a eine GK von S, die in (s)β[s] nicht vorkommt (s eine GV von S, die in β[a] nicht vorkommt), so ist auch (s)β[s] prädikatenlogisch wahr in S.

Beweis: Ang. β[a] ist prädikatenlogisch wahr in S, a eine GK von S, die in (s)β[s] nicht vorkommt (s eine GV von S, die in β[a] nicht vorkommt); also gemäß DSig4: β[a] ist ein Satz von S u. $T_{\beta[a]}$; also (s)β[s] ein Satz von S (da s eine GV von S, die in β[a] nicht vorkommt) laut Syntax von S; die Analyse von β[a] habe die Gestalt $\mathbf{I}[\underline{sig}|a|, \dots]$ (die Einkastelung beziehe sich auf sämtliche Stellen, an denen $\underline{sig}|a|$ vorkommt); die Analyse von (s)β[s] hat dann die Gestalt $\mathbf{a}^{\underline{s}}(\lambda o\mathbf{I}[o, \dots])$:
$\underline{sig}|\beta[a]|=\omega_{\beta[a]}=\mathbf{I}[\underline{sig}|a|, \dots]$; da $\mathbf{I}[\underline{sig}|a|, \dots]$ die Analyse von β[a] ist und die Einkastelung in $\mathbf{I}[\underline{sig}|a|, \dots]$ sich auf sämtliche Stellen bezieht, an denen $\underline{sig}|a|$ vorkommt, kommt a in $\lambda o\mathbf{I}[o, \dots]$ nicht vor; also folgt nach ASig7
$\underline{sig}_a|\beta[a]|=\lambda o\mathbf{I}[o, \dots]$; da a in (s)β[s] nicht vorkommt, gilt nach ASig6 $\underline{sig}|(s)\beta[s]|=\mathbf{a}^{\underline{s}}(\underline{sig}_a|\beta[a]|)$: also
$\underline{sig}|(s)\beta[s]|=\mathbf{a}^{\underline{s}}(\lambda o\mathbf{I}[o, \dots])$; $\underline{sig}$ kommt in $\mathbf{a}^{\underline{s}}(\lambda o\mathbf{I}[o, \dots])$ nur vor den PK von S und den GK von S in (s)β[s] vor; also handelt es sich bei $\mathbf{a}^{\underline{s}}(\lambda o\mathbf{I}[o, \dots])$ um die Analyse von (s)β[s];
(die Analyse eines Satzes ist - bis auf die Wahl von Extraktionsvariablen (für die man aber auch eine Festlegung treffen kann) - stets eindeutig;)
also $\underline{sig}|(s)\beta[s]|=\omega_{(s)\beta[s]}=\mathbf{a}^{\underline{s}}(\lambda o\mathbf{I}[o, \dots])$; die Alltrivialisierung der Analyse von β[a] hat die Gestalt
$\wedge g(\vee z[g(z)]$ imp. $\wedge f_1 \dots \wedge f_k \wedge x_1 \dots \wedge x_n (\dots g(x_1) \dots$ imp.
$\mathbf{I}[x_1, \dots]=\underline{t}))$; die Alltrivialisierung der Analyse von (s)β[s] hat die Gestalt $\wedge g(\vee z[g(z)]$ imp. $\wedge f_1 \dots \wedge f_k \wedge x_2 \dots \wedge x_n (\dots \dots$ imp.
$\mathbf{a}^{g}(\lambda o\mathbf{I}[o, \dots])=\underline{t}))$; seien nun $g, f_1, \dots, f_k, x_2, \dots, x_n$ Entitäten, die die entsprechenden Bedingungen erfüllen; da die

Alltrivialisierung der Analyse von $\beta[a]$ ($T_{\beta[a]}$) laut Annahme gilt, folgt $\Lambda x_1(g(x_1)$ imp. $\Pi[x_1, \ldots]=\underline{t})$; daraus aber ergibt sich $\varepsilon^{g}(\lambda o\Pi[o, \ldots])=\underline{t}$:
$\varepsilon^{g}(\lambda o\Pi[o, \ldots])=UyVz(g(z)$ u. $yT(\lambda o\Pi[o, \ldots],z))$ [nach $DT^{n}_{Z}71$], $UyVz(g(z)$ u. $yT(\lambda o\Pi[o, \ldots],z))=UyVz(g(z)$ u. $yT\Pi[z, \ldots])$ [nach $AT^{n}_{Z}16$, $TT^{n}_{Z}29$], $UyVz(g(z)$ u. $yT\Pi[z, \ldots])=\underline{t}$, denn $\Lambda x_1(g(x_1)$ imp. $\Pi[x_1, \ldots]=\underline{t})$; es gilt also auch $T_{(s)\beta[s]}$; demnach ist $(s)\beta[s]$ prädikatenlogisch wahr in S.

Das Gesetz der Generalisierung ist spezifisch für "prädikatenlogisch wahr in S"; seine Entsprechung für "ontologisch wahr in S" gilt nicht. Beispielsweise mag P.a ontologisch wahr in S sein; deshalb ist aber nicht auch schon (s)P.s ontologisch wahr in S; aus <u>sig</u>|P.a|=$\underline{t}$, d.h. nach ASig3 (<u>sig</u>|P.|,<u>sig</u>|a|)=$\underline{t}$, folgt nicht $\varepsilon^{\underline{s}}(\lambda o(\underline{sig}|P.|,o))=\underline{t}$, also auch nicht <u>sig</u>|(s)P.s|=$\underline{t}$.

Anmerkungen:

[1]Stärker als ASig1 wäre ASig1*: $Z_E^{\langle 0 \rangle}(\underline{s})$ u. $(\underline{s}, \underline{sig}|a|)=\underline{t}$, für jede GK a von S. ASig1* ist äquivalent mit: $Z_E^{\langle 0 \rangle}(\underline{s})$ u. $\underline{s}(\underline{sig}|a|)$, für jede GK a von S. ASig1* charakterisiert $\underline{s}$ als eine *Menge*, der die Designata der Gegenstandskonstanten von S angehören.

[2]Die semantische Konzeption, die diesen Axiomen zugrundeliegt, ist die Russells, nicht diejenige von Frege. (Für eine Darstellung und Verteidigung von Russells Bedeutungstheorie vergl. *Quality and Concept*, S. 160ff.) Aber es besteht folgender Unterschied zu Russell: Nach Russell bedeuten (*mean*) Sätze Sachverhalte in seinem Sinn (*propositions*); wir transformieren Russells Bedeutungstheorie in eine Intensionstheorie und sagen also, Sätze *intendieren* - als Teil ihrer Bedeutung - Sachverhalte in unserem Sinn. Wir erheben nicht den Anspruch, eine Bedeutungstheorie zu entwickeln. Entsprechend sagen wir, Namen und Prädikate *intendieren* die ihnen entsprechenden Entitäten. - Für die Verwendung von "intendieren" statt "bedeuten" spricht auch das folgende Argument: Es kann vorkommen, daß ein Name und ein Prädikat dasselbe intendieren (nicht jedoch bei der Sprache S!); aber schon allein aufgrund ihrer unterschiedlichen syntaktischen Funktion, die unterschiedliche Weisen der Bezugnahme bedingt, bedeuten sie nicht dasselbe: Der Name "die Liebe" *benennt* das, was er intendiert: die Relation der Liebe; und das Prädikat "Lieben" *drückt das mit aus*, was es intendiert: die Relation der Liebe; diese ist der außersprachliche Teil seiner Bedeutung. Russell muß hier sagen, daß "die Liebe" und "Lieben" dasselbe bedeuten; was krass inadäquat ist.

[3]G. Bealer kritisiert Tarskis semantische Konzeption der Wahrheit in *Quality and Concept*, S. 201f treffend wie folgt: "Defects in the [Tarskian] semantic conception of truth become evident as soon as one sees truth for sentences as dependent upon the central concept of a true thought. Its most glaring fault is that it completely by-passes the primary concept of a true thought, which is that in virtue of which the indefinitely many semantical truth concepts qualify as truth concepts at all. Doing so, it abandons the possibility of explaining why they are all called truth concepts. Matters are worsened for Tarski's semantic conception by its being stated in terms of the theory of reference rather than the theory of meaning. It attempts to define a sentence's truth in terms of relations among the "references" of its primitive predicates and names. But if a sentence is true because of the truth of the thought it expresses, then the "references" of the sentence's predicates would be only indirectly related to the sentence's truth; for the "references" of the predicates could not determine which proposition a sentence expresses. What the predicates *express* is what is relevant to the thought expressed and, in turn, to the sentence's truth. Furthermore, predicates do not refer to anything in the first place; they only express. Tarski's semantic conception of truth thus has the added trouble of resting on a questionable theory of the fundamental relations between words and things. (See §23 and §38 for an extended critique of referential semantics.) A final problem in Tarski's theory of truth is that it is framed within set theory. But set theory is an artifice without ground in our naturalistic ontology

or natural logic and without pragmatic justification either. (See chapter 5 for a critique of set theory.)" Alle Vorwürfe, die Bealer gegen Tarskis semantische Konzeption der Wahrheit erhebt, können gegen *unsere* von einer ontologischen Konzeption der Wahrheit [*ein Sachverhalt ist wahr genau dann, wenn er existiert, aktual ist, besteht*] *abgeleitete* semantische Konzeption der Wahrheit nicht erhoben werden.

[4]Wahrheit für Sätze und ontologische Wahrheit für Sätze haben ihre Entsprechungen auf Sachverhaltsebene; nach DSig1 und DSig2, $DT^{n}_{Z}32$, $TT^{n}_{Z}90$, $TT^{n}_{Z}91$, $TT^{n}_{Z}92$ ist ein Satz von S wahr bzw. ontologisch wahr genau dann, wenn der Sachverhalt, den er intendiert, wahr bzw. logisch wahr, d.h. logisch notwendig ist. (Man wird in den sachverhaltsbezogenen Begriffen statt "logisch" "ontologisch" verwenden, wenn man "logisch" für wesentlich sprachbezogen hält bzw. haben möchte: "ontologisch wahr ist ein Satz genau dann, wenn seine Intension ontologisch wahr ist"; das ist eine rein terminologische Manipulation, denn es geht sachlich um dasselbe: die Identität mit $\underline{t}$.) Analytische Wahrheit, logische Wahrheit für Sätze und prädikatenlogische Wahrheit haben dagegen *keine* Entsprechung auf Sachverhaltsebene; für sie ist die *Satzstruktur* wesentlich, die auf Sachverhaltsebene keine Rolle spielt. (Gemeint ist die *semantische* Satzstruktur, die festgelegt ist durch die syntaktische Satzstruktur und die semantischen Regeln der Sprache: ihre Sig-Axiome.) Bei der einfachen Sprache S fallen prädikatenlogische Wahrheit und logische Wahrheit (für Sätze) zusammen. Ansonsten (bei reicheren Sprachen) ist prädikatenlogische Wahrheit ein Spezialfall der logischen Wahrheit für Sätze, die ihrerseits ein Spezialfall der analytischen Wahrheit ist. Analytisch wahre Sätze von S, die nicht logisch wahre Sätze von S sind, kann man durch Hinzunahme von Sig-Axiomen gewinnen, die nichtlogische Konstanten betreffen. – G. Bealer *identifiziert* inadäquaterweise in *Quality and Concept*, S. 217 logische und analytische Wahrheit: "A thought, I have said, is analytic if and only if every thought having the same logical form is necessary." "Rot ist eine Farbe" ist also, obwohl es sich um eine Bedeutungswahrheit handelt, gemäß Bealer kein analytisch wahrer Satz, denn es drückt einen bealerschen Gedanken – das ist kein Sachverhalt, sondern eine satzähnlich strukturierte Entität zwischen Satz und Sachverhalt – aus, so daß nicht jeder bealersche Gedanke, der dieselbe logische Form hat, notwendig ist. Für uns aber gilt (bezogen auf die Umgangssprache):

p.l. wahr $\overset{1.}{\rightarrow}$ logisch wahr $\overset{2.}{\rightarrow}$ analytisch wahr $\overset{3.}{\rightarrow}$ ontologisch wahr $\overset{4.}{\rightarrow}$ wahr.

Die Umkehrung von 4. gilt nicht, denn "Uwe ist blond" ist wahr, aber nicht ontologisch wahr; die Umkehrung von 3. gilt nicht, denn "Es gibt mindestens zwei mögliche Gegenstände" ist ontologisch wahr, aber nicht analytisch; die Umkehrung von 2. gilt nicht, denn "Rot ist eine Farbe" ist analytisch wahr, aber nicht logisch; die Umkehrung von 1. gilt nicht, denn "Uwe ist Uwe" ist logisch wahr, aber nicht prädikatenlogisch.

[5]Man beachte, daß wir uns nun auf drei verschiedenen Sprachebenen bewegen: S, $PTZ_{\blacksquare}$ + Erweiterungen, Umgangssprache. Wenn wir hier Definitionen, Axiome, Theoreme angeben und Beweise formulieren, dann sprechen wir in der Umgangssprache über Ausdrücke von $PTZ_{\blacksquare}$ +

Erweiterungen. Erwähnung und Gebrauch von Ausdrücken von PTZ_{s} + Erweiterungen wechseln allerdings fließend miteinander ab, zumal viele Ausdrücke von PTZ_{s} + Erweiterungen identisch sind mit Ausdrücken der Umgangssprache. Dieser Situation wird man am besten gerecht, wenn man PTZ_{s} + Erweiterungen als echten Teil der Umgangssprache ansieht.

[6]DSig4 kann man auffassen als eine Präzisierung der Definition: β ist prädikatenlogisch wahr in S := β ist ein Satz von S u. jeder Satz von S, der dieselbe prädikatenlogische Form wie β hat, ist ontologisch wahr in S.

[7]Ein weiteres Beispiel: Die Analyse von -((s)P.s&(s)-P.s) ist $\neg[\mathfrak{a}^{\underline{s}}(\lambda o(\underline{sig}|P.|,o))\wedge\mathfrak{a}^{\underline{s}}(\lambda o\neg(\underline{sig}|P.|,o))]$; die Alltrivialisierung von -((s)P.s&(s)-P.s) ist $\Lambda g(Vz[g(z)]$ imp. $\Lambda f(Z^{\langle 1\rangle}(f)$ imp. $\neg[\mathfrak{a}^{g}(\lambda o(f,o))\wedge\mathfrak{a}^{g}(\lambda o\neg(f,o))]=\underline{t}))$; dies ist in TZ_{s} beweisbar: Ang. $Vz[g(z)]$, $Z^{\langle 1\rangle}$, d.h. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$; zu zeigen ist $[\mathfrak{a}^{g}(\lambda o(f,o))\wedge\mathfrak{a}^{g}(\lambda o\neg(f,o))]=\underline{k}$, woraus sich $\neg[\mathfrak{a}^{g}(\lambda o(f,o))\wedge\mathfrak{a}^{g}(\lambda o\neg(f,o))]=\underline{t}$ ergibt; wegen $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ $\lambda o(f,o)=f$ u. $\lambda o\neg(f,o)=\neg^{\langle 0\rangle}f$ [$TT^{n}_{Z}180$ etc.]; demnach $[\mathfrak{a}^{g}(\lambda o(f,o))\wedge\mathfrak{a}^{g}(\lambda o\neg(f,o))]=(\mathfrak{a}^{g}(f)\wedge\mathfrak{a}^{g}(\neg^{\langle 0\rangle}f))=\mathfrak{a}^{g}((f\wedge^{\langle 0\rangle}\neg^{\langle 0\rangle}f))$ [vergl. $TT_{Z}239$] $=\mathfrak{a}^{g}(\underline{k}^{\langle 0\rangle})$ [mit $ParTT_{Z}53$] $=UyVz(g(z)$ u. $yT(\underline{k}^{\langle 0\rangle},z))$ [mit $DT^{n}_{Z}71$] $=Uy(yT\underline{k})$ [wegen $Vz[g(z)]$, $TT^{n}_{Z}158$, $DT_{Z}40$, $TT^{n}_{Z}29$] $=\underline{k}$.
-((s)P.s&(s)-P.s) ist also ein prädikatenlogisch wahrer Satz von S.

7. Die volle uneingeschränkte Ontologie

(a) Die Mengenlehre wird heute in sehr vielen Bereichen angewendet, am extensivsten beim Aufbau der Mathematik und bei der Formulierung von Interpretationsbegriffen für künstliche Sprachen. Kann sie darin ersetzt werden? - Im vorausgehenden Kapitel haben wir gesehen, wie weit man selbst mit einer relativ bescheidenen vollen Ontologie (eine volle Ontologie ist eine Ontologie von Sachverhalten, Attributen und Gegenständen) auf einem Gebiet kommen kann, wo in der Regel bereits die ganze Maschinerie der Mengenlehre aufgefahren wird: in der Formulierung der Semantik einer einfachen künstlichen Sprache.

Nur lange Gewöhnung und die großen Leistungen etwa der mengentheoretischen Semantik lassen die Mengenlehre als die natürliche ontologische Hintergrundstheorie für alle Zwecke erscheinen. Im Blick auf die ganze ontologische Tradition und auf die natürliche Sprache ist aber die Ontologie der Sachverhalte, Attribute und Gegenstände *die natürliche Ontologie*; in der Umgangssprache redet man nicht von Mengen im Sinne der Mengenlehre (Namen für Mengen in diesem prägnanten Sinn - insofern sie etwas anderes sein sollen als spezielle Eigenschaften - kommen in der Umgangssprache nicht vor); sehr wohl aber von Attributen (z.B. Rot, die Liebe), Sachverhalten (z.B., daß Uwe blond ist) und Gegenständen (z.B. Uwe); in der Philosophie theoretisiert man über diese Arten von Entitäten seit Platon und Aristoteles; über Mengen theoretisiert man seit Ende des 19. Jahrhunderts. Diese historischen Tatsachen sind sicherlich nicht zufällig.

Angesichts der offensichtlichen Natürlichkeit der Ontologie der Attribute, Sachverhalte und Gegenstände ist es befremdlich und kann gleichsam als "eine Verknotung des Verstandes" angesehen werden, daß mancher Philosoph (Quine z.B.) sich auf den Standpunkt versteift, allein extensionale Entitäten (Gegenstände und die über ihnen bildbaren Mengen) seien legitimerweise annehmbar, ja, daß er gar nicht verstehe, was denn (intensionale) Eigenschaften, Propositionen etc. sein sollen.

(b) Um nun mit der Mengenlehre auch der Leistungsstärke nach in Konkurrenz treten zu können, muß die volle Ontologie von den

Einschränkungen befreit werden, die wir bislang observiert haben. Dabei darf man allerdings nicht allzu kühn vorgehen, denn sonst stellen sich Antinomien ein. – Man könnte naiverweise an das folgende System denken:

TZ_n^+ ist in derselben Sprache PTZ_n formuliert wie TZ_n und ist bis AT_Z^n13 identisch mit TZ_n; aber an die Stelle von AT_Z^n14 tritt

$AT_Z^{n+}14$ $\quad \wedge x_1 \ldots \wedge x_n \wedge f(Z^{\langle n \rangle}(f) \text{ imp. } Z^1((f,x_1,\ldots,x_n)));$

an die Stelle von AT_Z^n15 tritt

$AT_Z^{n+}15$ $\quad \wedge x_1 \ldots \wedge x_n \wedge f(\text{non } Z^{\langle n \rangle}(f) \text{ imp. } (f,x_1,\ldots,x_n)=\underline{k});$

an die Stelle von AT_Z^n16 tritt

$AT_Z^{n+}16$ $\quad \wedge x_1 \ldots \wedge x_n (Z^1(\mathfrak{A}[x_1,\ldots,x_n]) \text{ imp.}$
$\quad (\lambda o_1 \ldots o_n \mathfrak{A}[o_1,\ldots,o_n],x_1,\ldots,x_n)=\mathfrak{A}[x_1,\ldots,x_n])$

Auf Modifikationen der Axiome nach AT_Z^n16 brauchen wir nicht einzugehen; $AT_Z^{n+}14$ – $AT_Z^{n+}16$ zeigen hinreichend in welchem Sinn TZ_n^+ gegenüber TZ_n uneingeschränkt ist. Wir brauchen auch aus dem Grunde auf diese Modifikationen nicht einzugehen, weil TZ_n^+ bereits jetzt als inkonsistent erweisbar ist; man kann nämlich bereits jetzt in TZ_n^+ die diesem System angepaßte Version der russellschen Antinomie konstruieren:

Man betrachte $\lambda o U y(o(o)$ u. $y=\underline{k})$, wobei $\varphi(\tau)$ (φ trifft auf τ zu) wie bisher durch $E((\varphi,\tau))$ definiert ist [$E(\tau')$ – τ' ist ein existierender Sachverhalt – ist seinerseits wie bisher definiert]. $\lambda o U y(o(o)$ u. $y=\underline{k})$ ist die essentielle Eigenschaft, die dem Prädikat non $\tau(\tau)$ (τ trifft nicht auf sich selbst zu) entspricht; unter Eigenschaften (Relationen, Attributen) verstehen wir nun aber eben nicht nur Eigenschaften (Relationen, Attribute) von Gegenständen. (Wie wir sahen, repräsentieren essentielle Eigenschaften von Gegenständen Mengen von Gegenständen; essentielle Eigenschaften im Sinne von TZ_n^+ repräsentieren Mengen im Sinn der naiven Mengenlehre.) Für $\lambda o U y(o(o)$ u. $y=\underline{k})$ schreiben wir kurz r.

Gemäß $AT_Z^{n+}16$ $\wedge x(Z^1(Uy'(x(x)$ u. $y'=\underline{k}))$ imp.
$(r,x)=Uy'(x(x)$ u. $y'=\underline{k}))$; nun $Z^1(Uy'(r(r)$ u. $y'=\underline{k}))$; also
$(r,r)=Uy'(r(r)$ u. $y'=\underline{k})$; *falls r(r)*, dann $Uy'(r(r)$ u. $y'=\underline{k})=\underline{k}$;
also $(r,r)=\underline{k}$, also non $E((r,r))$ [da non $\underline{k}T\underline{w}$], also non $r(r)$;

falls non r(r), dann Uy'(r(r) u. y'=$\underline{k}$)=$\underline{t}$; also (r,r)=$\underline{t}$, also E((r,r)) [da $\underline{t}$T$\underline{w}$], also r(r); nun aber r(r) o. non r(r); also r(r) u. non r(r).

In TZ_n bzw. TZ_1 ist dieser Beweisgang blockiert; um (r,r)=Uy'(r(r) u. y'=$\underline{k}$) zu erhalten, müßte man Z^o(r) haben, was man nicht hat.[1]

(c) TZ_n^+ enthält als Teil eine Theorie, die der naiven Mengenlehre isomorph ist, denn man kann beweisen:

<u>Ext</u>   ΛfΛg($Z_E^{\langle o \rangle}$(f) u. $Z_E^{\langle o \rangle}$(g) u. Λx(f(x) äqu. g(x)) imp. f=g)

<u>Abs</u>   Λx(λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$)(x) äqu. A[x])

<u>Mng</u> $Z_E^{\langle o \rangle}$(λoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$))

Diese drei Prinzipien entsprechen dem Extensionalitätsprinzip ("Mengen sind identisch, wenn sie dieselben Elemente haben"), dem Abstraktionsprinzip ("Zur Menge der A gehören genau die A") und dem Mengenprinzip ("Die Menge der A ist eine Menge"). Aus <u>Abs</u> und <u>Mng</u> folgt <u>Kom</u>: Vf($Z_E^{\langle o \rangle}$(f) u. Λx(f(x) äqu. A[x])); <u>Kom</u> entspricht dem Komprehensionsprinzip ("Es gibt eine Menge, zu der genau die A gehören"). Zum Beweis von <u>Ext</u> benötigt man AT_Z^{n+}19, was gleichlautend mit AT_Z^n19 ist; bei allen Ausdrücken ist zu beachten, daß nun zum Universe of Discourse von PTZ_n Attribute *überhaupt* (ohne Rücksicht auf die Weise ihrer Sättigung, auch übrigens Attribute von Sachverhalten) gehören und sich der Sinn der Ausdrücke entsprechend ändert: $Z_E^{\langle o \rangle}$(τ) z.B. darf man nun nicht mehr lesen als "τ ist ein essentielles monadisches Attribut von Gegenständen" , "τ ist eine essentielle Eigenschaft (*im engen Sinn*)", sondern man muß es lesen als "τ ist ein essentielles monadisches Attribut (*gleichgültig von was*)", "τ ist eine essentielle Eigenschaft (*im weiten Sinn*)".

(d) Das System TZ_n^+ ist nicht haltbar. Was ist an seine Stelle zu setzen? - Z.B. das System TT, das in der Sprache PTT formuliert ist. PTT geht aus PT durch Hinzunahme sämtlicher Kategorialprädikate hervor. (Weitere Veränderungen folgen.) Was Kategorialprädikate sind, ist nun aber für PTT anders als bisher definiert:

(1) O und 1 sind Kategorialprädikate von PTT.
(2) Ist Σ ein Kategorialprädikat von PTT, so auch Σ'.
(3) Sind $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ Kategorialprädikate von PTT und sind $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ untereinander verschieden, so ist $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle$ ein Kategorialprädikat von PTT.
(4) Kategorialprädikate von PTT sind nur Ausdrücke nach (1) - (3).

Auch in PTT werden Extraktionsvariablen verwendet. Was Extraktionsvariablen sind, ist für PTT wiederum anders als bisher festgelegt:

(1) Ist Σ ein Kategorialprädikat von PTT, so ist σ eine Extraktionsvariable von PTT.
(2) Extraktionsvariablen von PTT sind nur Ausdrücke gemäß (1).

Mit anderen Worten: Extraktionsvariablen von PTT sind *verkleinerte* Kategorialprädikate von PTT. Σ_i, $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_k\rangle$ seien im Folgenden stets Kategorialprädikate von PTT, σ_i, $\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_k\rangle$ ihre Verkleinerungen; d.h. Extraktionsvariablen von PTT.

(e) Die Axiome ATT0 - ATT9 von TT sind gleichlautend mit den Axiomen AT_Z0 - AT_Z9, außer daß statt Z^1 stets 1 geschrieben wird. Die übrigen Axiome lauten:

ATT10 $\Lambda x(\Sigma_1(x)$ äqu. $\Sigma_2(x))$, wenn Σ_1 und Σ_2 nach Weglassung aller Strichindices denselben Ausdruck ergeben. (Ergeben Σ_1 und Σ_2 nach Weglassung aller Strichindices denselben Ausdruck, so sagen wir auch, daß Σ_1 und Σ_2 *Strichvarianten* voneinander sind.)

ATT11 $\Lambda x(\Sigma_1(x)$ imp. non $\Sigma_2(x))$, wenn Σ_1 und Σ_2 nach Weglassung aller Strichindices verschiedene Ausdrücke ergeben.

ATT13 $\mathrm{V}z0(z)$

ATT14 $\Lambda f\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n 1((f,x_1,\ldots,x_n))$

ATT15 ($\underline{a}$) $\Lambda f\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n(\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(f)$ u. (non $\Sigma_1(x_1)$ o. ... o. non $\Sigma_n(x_n))$ imp. $(f,x_1,\ldots,x_n)=\underline{k})$

(b) $\Lambda f \Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n (\text{non } \langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(f) \text{ u. }$
$\Sigma_1(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } \Sigma_n(x_n) \text{ imp. } (f,x_1,\ldots,x_n)=\underline{k})$

ATT16 $\Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n (1(\mathbb{I}[x_1,\ldots,x_n]) \text{ u. } \Sigma_1(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } \Sigma_n(x_n) \text{ imp. }$
$(\lambda\sigma_1\ldots\sigma_n\mathbb{I}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n],x_1,\ldots,x_n)=\mathbb{I}[x_1,\ldots,x_n])$

(Die $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ sind untereinander alle verschieden, und gehören [die Entitäten] x_i und x_k derselben Kategorie an, so ist Σ_i eine Strichvariante von Σ_k [und umgekehrt]; diese Festlegung gilt nur, wo $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ durch λ gebundene Extraktionsvariablen $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ entsprechen; bei x_i vertritt i einen objektsprachlichen Index, bei Σ_i dagegen i einen metasprachlichen.) Hier einige Spezialfälle von ATT16:

$\Lambda x_1 (1(\mathbb{I}[x_1]) \text{ u. } 0(x_1) \text{ imp. } (\lambda_o\mathbb{I}[o],x_1)=\mathbb{I}[x_1])$
(entspricht AT_Z16),
$\Lambda x_1 \Lambda x_2 (1(\mathbb{I}[x_1,x_2]) \text{ u. } 0(x_1) \text{ u. } 0'(x_2) \text{ imp. }$
$(\lambda_{oo'}\mathbb{I}[o,o'],x_1,x_2)=\mathbb{I}[x_1,x_2])$
(entspricht einem Spezialfall von AT^n_Z16),
$\Lambda x_1 \Lambda x_2 \Lambda x_3 (1(\mathbb{I}[x_1,x_2,x_3]) \text{ u. } 0(x_1) \text{ u. } 0'(x_2) \text{ u. } 0''(x_3) \text{ imp. }$
$(\lambda_{oo'o''}\mathbb{I}[o,o',o''],x_1,x_2,x_3)=\mathbb{I}[x_1,x_2,x_3])$
(entspricht einem weiteren Spezialfall von AT^n_Z16),
$\Lambda x_1 (1(\mathbb{I}[x_1]) \text{ u. } \langle 0\rangle(x_1) \text{ imp. } (\lambda_{\langle o\rangle}\mathbb{I}[\langle o\rangle],x_1)=\mathbb{I}[x_1])$,
$\Lambda x_1 \Lambda x_2 (1(\mathbb{I}[x_1,x_2]) \text{ u. } \langle 0\rangle(x_1) \text{ u. } \langle 0\rangle'(x_1) \text{ imp. }$
$(\lambda_{\langle o\rangle\langle o\rangle'}\mathbb{I}[\langle o\rangle,\langle o\rangle'],x_1,x_2)=\mathbb{I}[x_1,x_2])$,
$\Lambda x_1 \Lambda x_2 (1(\mathbb{I}[x_1,x_2]) \text{ u. } 1(x_1) \text{ u. } 1'(x_2) \text{ imp. }$
$(\lambda_{11'}\mathbb{I}[1,1'],x_1,x_2)=\mathbb{I}[x_1,x_2])$,
$\Lambda x_1 \Lambda x_2 (1(\mathbb{I}[x_1,x_2]) \text{ u. } \langle 0\rangle(x_1) \text{ u. } 0(x_2) \text{ imp. }$
$(\lambda_{\langle o\rangle o}\mathbb{I}[\langle o\rangle,o],x_1,x_2)=\mathbb{I}[x_1,x_2])$.

Aus ATT15(b) und ATT16 folgt

TTT $\mathrm{V} x_1 \ldots \mathrm{V} x_n (1(\mathbb{I}[x_1,\ldots,x_n]) \text{ u. } \Sigma_1(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } \Sigma_n(x_n) \text{ u. }$
$\mathbb{I}[x_1,\ldots,x_n]\neq\underline{k}) \text{ imp. } \langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(\lambda\sigma_1\ldots\sigma_n\mathbb{I}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n])$

ATT17 $\Lambda x_1 \ldots \Lambda x_n (\text{non } 1(\mathbb{I}[x_1,\ldots,x_n]) \text{ imp. }$
$(\lambda\sigma_1\ldots\sigma_n\mathbb{I}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n],x_1,\ldots,x_n)=\underline{k})$

ATT18 $\text{non } \mathrm{V} x_1 \ldots \mathrm{V} x_n (1(\mathbb{I}[x_1,\ldots,x_n]) \text{ u. } \Sigma_1(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } \Sigma_n(x_n)$
$\text{u. } \mathbb{I}[x_1,\ldots,x_n]\neq\underline{k}) \text{ imp. } \langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(\lambda\sigma_1\ldots\sigma_n\mathbb{I}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n])$

Aus ATT18 und TTT erhält man $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(\lambda\sigma_1\ldots\sigma_n\mathbb{I}[\sigma_1,\ldots,\sigma_n])$.

Spezialfälle hiervon sind: $\langle 0\rangle(\lambda_{0}\mathbf{T}[0])$, $\langle 0,0'\rangle(\lambda_{00'}\mathbf{T}[0,0'])$, $\langle 0,0',0''\rangle(\lambda_{00'0''}\mathbf{T}[0,0',0''])$, $\langle\langle 0\rangle\rangle(\lambda_{\langle 0\rangle}\mathbf{T}[\langle 0\rangle])$, $\langle\langle 0\rangle,\langle 0\rangle'\rangle(\lambda_{\langle 0\rangle\langle 0\rangle'}\mathbf{T}[\langle 0\rangle,\langle 0\rangle'])$, $\langle 1,1'\rangle(\lambda_{11'}\mathbf{T}[1,1'])$, $\langle\langle 0\rangle,0\rangle(\lambda_{\langle 0\rangle 0}\mathbf{T}[\langle 0\rangle,0])$. $\langle 0\rangle(\tau)$ ist zu lesen als "τ ist eine Eigenschaft von Gegenständen"; $\langle 0,0'\rangle(\tau)$ [äqu. $\langle 0',0\rangle(\tau)$ äqu. $\langle 0'',0'\rangle(\tau)$ (z.B.)] ist zu lesen als "τ ist eine zweistellige Relation zwischen Gegenständen"; $\langle 0,0',0''\rangle(\tau)$: τ ist eine dreistellige Relation zwischen Gegenständen; $\langle\langle 0\rangle\rangle(\tau)$: τ ist eine Eigenschaft von Eigenschaften von Gegenständen; $\langle\langle 0\rangle,\langle 0\rangle'\rangle(\tau)$: τ ist eine zweistellige Relation zwischen Eigenschaften von Gegenständen; $\langle 1,1'\rangle(\tau)$: τ ist eine zweistellige Relation zwischen Sachverhalten; $\langle\langle 0\rangle,0\rangle$: τ ist eine zweistellige Relation zwischen Eigenschaften von Gegenständen und Gegenständen.

ATT19 $\quad \Lambda f \Lambda g(\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(f)$ u. $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(g)$ u.
$\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n((f,x_1,\ldots,x_n)=(g,x_1,\ldots,x_n))$ imp. $f=g)$

ATT20 $\quad \Lambda f[QA^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}(f)$ imp.
non $Vz_1\ldots Vz_n Vx_1\ldots Vx_n(\Sigma_1(z_1)$ u. ... u. $\Sigma_n(z_n)$ u.
$\Sigma_1(x_1)$ u. ... u. $\Sigma_n(x_n)$ u. $(f,z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t}$ u.
$(f,x_1,\ldots,x_n)\neq\underline{t}$ u. $(z_1\neq x_1$ o. ... o. $z_n\neq x_n))]$,

wobei $QA^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}$, fußend auf DT6, wie folgt definiert ist:

$QA^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}(\tau)$:= $\Lambda y(yT^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}\tau$ imp. $y=\tau$ o.
$M^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}(y))$ u. $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(\tau)$

$M^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}$ seinerseits ist, fußend auf DT4, definiert durch

$M^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}(\tau)$:= $\Lambda y(\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(y)$ imp. $\tau T^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}y)$ u.
$\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(\tau)$

$T^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}$ schließlich ist definiert durch

$\tau T^{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_n\rangle}\tau'$:= $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(\tau)$ u. $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(\tau')$ u.
$\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n((\tau,x_1,\ldots,x_n)T(\tau',x_1,\ldots,x_n))$

ATT21 $\quad Vz Vz'(\langle 0\rangle(\underline{sub})$ u. $\underline{sub}(z)$ u. $\underline{sub}(z')$ u. $z\neq z')$

Die Erfüllungsbeziehung ist wie bisher definiert:

$\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n) := E((\varphi,\tau_1,\ldots,\tau_n))$ $(:= (\varphi,\tau_1,\ldots,\varphi_n)T\underline{w})$;

Aber aus $\varphi(\tau)$ folgt nun nicht $\langle 0\rangle(\varphi)$ u. $0(\tau)$, sondern nur $\langle 0\rangle(\varphi)$ imp. $0(\tau)$, $0(\tau)$ imp. $\langle 0\rangle(\varphi)$; deshalb ist in ATT21 der Zusatz $\langle 0\rangle(\underline{sub})$ aufzunehmen.

(f) Man könnte auch ähnlich wie beim System TZ_1^+ vorgehen. Dies ergibt die Sprache PTT^+ und das System TT^+. Man definiert:

(1) 0, 1 sind Kategorialprädikate von PTT^+.
(2) Sind $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$ Kategorialprädikate von PTT^+, so ist auch $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle$ ein Kategorialprädikat von PTT^+.
(3) Kategorialprädikate von PTT^+ sind nur Ausdrücke nach (1) und (2).

Die Extraktionsvariablen von PTT^+ sind $\circ, \circ', \circ'', \ldots$ wie (bis auf die Verkleinerungen) in den bisher betrachteten Sprachen außer PTT. (Man beachte nun die Unterschiede zu PTT!) Die Axiome ATT^+0 – ATT^+9 sind gleichlautend mit den Axiomen AT_Z0 – AT_Z9 (außer daß statt Z^1 stets 1 geschrieben wird). Die übrigen Axiome lauten (bis ATT^+16):

ATT^+10 $\quad \Lambda x(\Sigma(x)$ imp. non $\Sigma'(x))$
(Σ und Σ' sind verschiedene Kategorialprädikate von PTT^+)

ATT^+13 $\quad Vz0(z)$

ATT^+14 $\quad \Lambda f\Lambda y_1\ldots\Lambda y_n[\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(f)$ u. $\Sigma_1(y_1)$ u. ... u. $\Sigma_n(y_n)$ imp. $1((f,y_1,\ldots,y_n)^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n})]$

ATT^+15 $\quad \Lambda f\Lambda y_1\ldots\Lambda y_n($non $\langle\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\rangle(f)$ o. non $\Sigma_1(y_1)$ o. ... o. non $\Sigma_n(y_n)$ imp. $(f,y_1,\ldots,y_n)^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}=\underline{k})$

ATT^+16 $\quad \Lambda x_1\ldots\Lambda x_n(\Sigma_1(x_1)$ u. ... u. $\Sigma_n(x_n)$ u. $1(\pi[x_1,\ldots,x_n])$ imp. $(\lambda^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}_{\circ_1\ldots\circ_n}\pi[\circ_1,\ldots,\circ_n],x_1,\ldots,x_n)^{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} = \pi[x_1,\ldots,x_n])$

Bis hierher. Die angegebenen Axiome machen deutlich, warum TT TT^+

vorzuziehen ist. Zwar wahrt TT^+ in stärkerem Maße als TT die axiomatische Struktur von TZ_1, aber durch die Proliferation von Indices ist seine Handhabung sehr beschwerlich.

Anmerkungen:

[1]In TZ_1^+ ist er ebenfalls blockiert; dort hat man
$r^m := \iota^m o \mathrm{U}y(o(^m o)$ u. $y=\underline{k})$ $(r := r^0)$;
um $(r^m, r^m)^m = \mathrm{U}y'(r^m(^m r^m)$ u. $y'=\underline{k})$ zu erhalten, müßte man
$Z^{(0,m)}(r^m)$ haben; nach AT_Z^+16 gilt ja
$\Lambda x(Z^{(0,m)}(x)$ u. $Z^1(\mathrm{U}y(x(^m x)$ u. $y=\underline{k}))$ imp. $(\iota^m o \mathrm{U}y(o(^m o)$ u. $y=\underline{k}), x)^m$
$= \mathrm{U}y(x(^m x)$ u. $y=\underline{k}))$; aber $Z^{(0,m+1)}(r^m)$ gemäß TT_Z^+143, was
$Z^{(0,m)}(r^m)$ ausschließt.

Epilog

Epilog

In der Tradition - von Parmenides bis Wittgenstein - sind ontologische und theologische Aussagen oft sehr eng miteinander verknüpft. Es ist deshalb nicht unangemessen, zuletzt zu fragen: Was ist die Rolle Gottes in der Ontologie?

In der Ontologie läßt sich ein Theismus im Sinne eines Pantheismus ohne weiteres begründen. Daß die Welt existiert, ist aus analytischen Prämissen beweisbar (außerdem natürlich empirisch sicher): Ein Sachverhalt existiert genau dann, wenn er Teil der Welt ist (Definition); die Welt ist ein Sachverhalt (so haben wir den Weltbegriff bestimmt); jeder Sachverhalt ist Teil von sich selbst (das analytische Prinzip AT2); folglich: Die Welt existiert.[1] Jeder andere Sachverhalt existiert genau dann, wenn er ein echter Teil von ihr ist; jeder Gegenstand x existiert genau dann, wenn der Sachverhalt (sub,x) existiert; jede n-stellige Universalie (1. Stufe) r existiert genau dann, wenn es Gegenstände $x_1,\ldots,x_n$ gibt, die existieren, und der Sachverhalt $(r,x_1,\ldots,x_n)$ existiert. Die Existenz von Gegenständen und Universalien ist rückführbar auf die Existenz von Sachverhalten[2], diese aber auf die Teilhabe an der Welt.[3]

Wie Thomas von Aquin es ausdrückt: "Unum esse primum entium, totius esse perfectionem plenam possidens, quod Deum dicimus, ostensum est superius, quod ex suae perfectionis abundantia omnibus existentibus esse largitur, ut non solum primum entium, sed et primum principium omnium esse comprobetur." (*Summa contra Gentiles*, 3, 1). Thomas spricht von einem transzendenten Gott, nicht von der Welt. Aber Spinoza steht dafür, daß die Beschreibung nicht minder auf die Welt paßt; nach ihm ist Gott die Welt (allerdings als Gegenstand aufgefaßt, nicht als Sachverhalt). - Auf die pantheistische Explikation des Gottesbegriffes wollen wir hier nicht näher eingehen. Sie ist gewiß nicht offensichtlich inadäquat, hat aber Vor- und Nachteile.[4] Fest steht, daß diese Explikation - wie dargelegt - ein eindrucksvolles ontologisches Fundament besitzt.

Es ist analytisch notwendig, daß die Welt existiert (d.h. L E(w); L dient zum objektsprachlichen Ausdruck des analytisch Wahrseins);[5] daraus darf man aber nicht den Schluß ziehen, daß es analytisch notwendig ist, daß *diese* Welt, *dieser* gewisse maximal-konsistente Sachverhalt existiert.[6] Es ist nämlich nicht gewiß, daß "die Welt" ein starrer Designator ist; die Welt ist *diese* Welt, aber hätte es nicht auch anders sein können? Hätte nicht auch eine andere mögliche Welt die (wirkliche) Welt sein können?

Wenn es nicht analytisch notwendig ist, daß diese Welt existiert, so kann man fragen, warum sie existiert. Aber es ist nicht garantiert, daß es auf diese Frage eine informative Antwort gibt (und schon gar nicht, daß wir sie erkennen können). Doch angenommen, es gäbe eine solche Antwort, so ist noch nicht garantiert, daß sie äquivalent ist mit: "Es gibt eine *gewisse* existierende Entität, zu der diese Welt in einer *gewissen* Beziehung steht, und deshalb existiert sie." Wenn sie aber so formulierbar ist, so ist klar, daß die *gewisse* existierende Entität, von der in ihr die Rede ist, "ganz anders" ist, nämlich weder ein Sachverhalt, noch ein Gegenstand, noch eine Universalie; sie ist ontologisch transzendent (und damit auch epistemologisch). Wäre sie nämlich ein Sachverhalt, ein Gegenstand oder eine Universalie, so würde sie existieren, *weil* diese Welt existiert, und damit wäre die besagte Antwort auf die Frage "Warum existiert diese Welt?" *nicht* informativ, sondern liefe hinaus auf: "Diese Welt existiert, weil diese Welt existiert."

Unter den im letzten Absatz genannten Bedingungen, wenn sie gegeben sind, existiert eine absolut transzendente Entität als Quelle alles Daseins. Sie hätte sicherlich das größte Recht, "Gott" zu heißen. *Diese Welt* im Guten und im Schlechten wäre ihre analytisch kontingente Manifestation, gleichwohl *die Welt* analytisch notwendig existiert[7]: "Esse autem aliis tribuit non necessitate naturae, sed secundum suae arbitrium voluntatis" (*Summa contra Gentiles*, 3, 1).

Anmerkungen:

[1]Es folgt, daß es analytisch notwendig ist, daß überhaupt ein Sachverhalt existiert. Aber ist dies nicht eine kontingente Gegebenheit? Könnte nicht auch kein Sachverhalt existieren? - Nein. Der tautologische Sachverhalt existiert unzweifelhaft mit analytischer Notwendigkeit - gleichgültig wie wir die Existenz für Sachverhalte definieren. Schon deshalb ist es analytisch notwendig, daß überhaupt ein Sachverhalt existiert.

[2]Diese Rückführbarkeit *aufgrund intuitiv naheliegender Definitionen* begründet das natürliche ontologische Primat der existierenden Sachverhalte gegenüber den existierenden Gegenständen und Universalien: diese existieren, *weil* jene existieren; denn wenn wir vom Existenzbegriff für Universalien bzw. für Gegenstände ausgehen (I. bzw. II.), so sind die Definitionen der Existenz für Sachverhalte und der Existenz für Gegenstände, bzw. der für Universalien und der für Sachverhalte nicht *so* intuitiv naheliegend, gleichwohl sie sich angeben lassen (letzteres zeigt aber, daß ein natürliches ontologisches Primat gewisser Existentia gegenüber anderen noch kein absolutes ist):

I. Ein Sachverhalt p existiert genau dann, wenn der Eigenbegriff von p [b(p), d.h. ℩oUx(x=p u. o=o)] existiert; ein Gegenstand x existiert genau dann, wenn der Sachverhalt (sub,x) existiert.

II. Eine n-stellige Universalie f existiert genau dann, wenn existierende Gegenstände $x_1,\ldots,x_n$ f erfüllen; ein Sachverhalt p existiert genau dann, wenn der Eigenbegriff von p existiert.

(Bei II. benötigt man den Erfüllungsbegriff als Grundbegriff; mit ihm läßt sich dann auch der Existenzbegriff für Gegenstände definieren: Ein Gegenstand x existiert genau dann, wenn x sub erfüllt. - Für die Existenz eines Sachverhaltes ist eigentlich nur erforderlich, daß sein Eigenbegriff erfüllt (exemplifiziert) ist, nicht daß dieser existiert (*real* exemplifiziert ist). Wenn es aber überhaupt existierende Gegenstände gibt, so folgt aus dem Erfülltsein des Eigenbegriffs seine Existenz; es gilt ja Vx(Z^0(x) u. b(p)(x)) imp. Λx(Z_0(x) imp. b(p)(x)).)

[3]Das natürliche ontologische Primat der Welt gegenüber den anderen existierenden Sachverhalten ist nicht eindeutig. Einerseits sind alle anderen existierenden Sachverhalte echte Teile der Welt: man ist geneigt zu sagen, daß die Welt als ein Ganzes natürliches ontologisches Primat gegenüber allen anderen existierenden Sachverhalten, ihren echten Teilen hat: diese existieren, *weil* jene existiert. Andererseits ist die Welt (da sie kein Elementsachverhalt ist) die Summe (Konjunktion) ihrer echten Teile, der anderen existierenden Sachverhalte; dies macht einen im Gegenteil geneigt zu sagen, daß die anderen existierenden Sachverhalte natürliches ontologisches Primat gegenüber der Welt haben: diese existiert, *weil* jene existieren. - Klar ist: Weder die Welt noch die anderen existierenden Sachverhalte haben gegenüber dem jeweils anderen *absolutes* ontologisches Primat.

[4]Vergl. hierzu F. v. Kutschera, *Vernunft und Glaube*, S. 185ff.

[5]Eigentümliches Ziel der sogenannten ontologischen Gottesbeweise ist es, die Existenz Gottes als *analytisch* notwendig zu erweisen; mit einer pantheistischen Gotteskonzeption (zusammen mit der Auffassung der Welt als Sachverhalt) gelangt man zu einem *korrekten* ontologischen Gottesbeweis; der dargelegte Beweis aus analytischen Prämissen für die Existenz der Welt ist dann ein Beweis für die Existenz Gottes.

[6]Zur Unterscheidung zwischen *the actual world* und *this world* siehe auch A. Plantinga, *The Nature of Necessity*, S. 50f.

[7]Ein Bild mag dies veranschaulichen: Vor einem Spieler ("Gott") liegen eine Reihe von Kugeln ("Sachverhalte"); die Regeln des Spiels besagen, daß genau eine Kugel - die ausgezeichnete Kugel ("die Welt") - zu wählen ist ("Es ist analytisch notwendig, daß die Welt existiert"); die Regeln des Spiels besagen aber nicht, daß diese oder jene Kugel zu wählen ist; daß eben diese Kugel ("diese Welt") gewählt wird, liegt nicht durch die Spielregeln fest ("Es ist nicht analytisch notwendig, daß *diese* Welt existiert").

PRINZIPIEN UND DEFINITIONEN

(a) Das System T:

AT1 $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(xTy \text{ u. } yTz \text{ imp. } xTz)$

AT2 $\bigwedge x(xTx)$

AT3 $\bigwedge x \bigwedge y(xTy \text{ u. } yTx \text{ imp. } x=y)$

AT4 $\bigvee z[\bigwedge x(A[x] \text{ imp. } xTz) \text{ u. } \bigwedge y(\bigwedge x(A[x] \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } zTy)]$

AT5 $\bigwedge z \bigwedge z'(\bigwedge x(QA(x) \text{ u. } xTz \text{ imp. } xTz') \text{ imp. } zTz')$

AT6 $\bigwedge x[xTUyA[y] \text{ u. non } M(x) \text{ imp. } \bigvee k'(k'Tx \text{ u. non } M(k') \text{ u. } \bigvee z(k'Tz \text{ u. } A[z]))]$

AT7 $\underline{w} \neq \underline{k}$

AT8 $TO(\underline{w})$

AT9 $\underline{w} \neq \underline{t}$

AT10 $\bigvee x A^{\blacksquare}_{+}(x)$

DT1 $\tau T^{+} \tau' := \tau T \tau' \text{ u. } \tau \neq \tau'$

DT2 $A(\tau) := \text{non } \bigvee y(y \neq \tau \text{ u. } yT\tau)$

DT3 $G(\tau) := \text{non } \bigvee y(y \neq \tau \text{ u. } \tau Ty)$

DT4 $M(\tau) := \bigwedge y(\tau Ty)$

DT5 $T(\tau) := \bigwedge y(yT\tau)$

DT6 $QA(\tau) := \bigwedge y(yT\tau \text{ imp. } y=\tau \text{ o. } M(y))$

DT7 $TO(\tau) := \bigwedge y(\tau Ty \text{ imp. } y=\tau \text{ o. } T(y))$

DT8 $HT(\tau,\tau') := \bigvee z(zT\tau \text{ u. } zT\tau')$

DT9 $HG(\tau,\tau') := \bigvee z(\tau Tz \text{ u. } \tau' Tz)$

DT10 $H(\tau,\tau') := HT(\tau,\tau') \text{ o. } HG(\tau,\tau')$

DT11 $\tau' \rightarrow \tau := \tau T \tau'$

DT12 $\tau \wedge \tau' := \iota x(\tau Tx \text{ u. } \tau' Tx \text{ u. } \bigwedge y(\tau Ty \text{ u. } \tau' Ty \text{ imp. } xTy))$

DT13 $\tau \vee \tau' := \iota x(xT\tau \text{ u. } xT\tau' \text{ u. } \bigwedge y(yT\tau \text{ u. } yT\tau' \text{ imp. } yTx))$

DT14 $\neg_1 \tau := \iota y[\bigwedge z(zT\tau \text{ u. } zTy \text{ imp. } M(z)) \text{ u. } \bigwedge k(\bigwedge z(zT\tau \text{ u. } zTk \text{ imp. } M(z)) \text{ imp. } kTy)]$

DT15 $\neg_2 \tau := \iota y[\bigwedge z(\tau Tz \text{ u. } yTz \text{ imp. } T(z)) \text{ u. } \bigwedge k(\bigwedge z(\tau Tz \text{ u. } kTz \text{ imp. } T(z)) \text{ imp. } yTk)]$

DT16 $\neg \tau := \iota y(y=\neg_1 \tau \text{ u. } y=\neg_2 \tau)$

DT17 $UxA[x] := \iota z[\bigwedge x(A[x] \text{ imp. } xTz) \text{ u. } \bigwedge y(\bigwedge x(A[x] \text{ imp. } xTy) \text{ imp. } zTy)]$

DT18 $\underline{t} := \iota y \bigwedge x(yTx)$

DT19 $\underline{k} := \iota y \bigwedge x(xTy)$

DT20 $El(\tau) := QA(\tau)\ \text{u. non}\ M(\tau)$

DT21 $\tau\epsilon\tau' := El(\tau)\ \text{u.}\ \tau T\tau'$

DT22 $\tau\supset\tau' := \neg\tau\vee\tau'$

DT23 $\bigcap xA[x] := \iota z[\bigwedge x(A[x]\ \text{imp.}\ zTx)\ \text{u.}\ \bigwedge y(\bigwedge x(A[x]\ \text{imp.}\ yTx)\ \text{imp.}\ yTz)]$

DT24 $Kon(\tau) := \text{non}\ \bigvee x(xT\tau\ \text{u.}\ \neg xT\tau)$

DT25 $Max(\tau) := \bigwedge x(xT\tau\ \text{o.}\ \neg xT\tau)$

DT26 $MK(\tau) := Max(\tau)\ \text{u.}\ Kon(\tau)$

DT27 $Sch(\tau) := \text{non}\ \bigvee x(\tau Tx\ \text{u.}\ \tau T\neg x)$

DT28 $Min(\tau) := \bigwedge x(\tau Tx\ \text{o.}\ \tau T\neg x)$

DT29 $P(\tau) := \bigvee y(MK(y)\ \text{u.}\ \tau Ty)$

DT30 $N(\tau) := \text{non}\ P(\neg\tau)$

DT31 $E(\tau) := \tau T\underline{w}$

DT32 $W(\tau) := E(\tau)$

DT33 $F(\tau) := W(\neg\tau)$

DT34 $K(\tau) := P(\tau)\ \text{u.}\ P(\neg\tau)$

DT35 $A^0(\tau) := A(\tau)$
$A^{n+1}(\tau) := \bigwedge y(yT\tau\ \text{imp.}\ y=\tau\ \text{o.}\ A^n(y))$

DT36 $G^0(\tau) := G(\tau)$
$G^{n+1}(\tau) := \bigwedge y(\tau Ty\ \text{imp.}\ y=\tau\ \text{o.}\ G^n(y))$

DT37 $A_+^0(\tau) := A^0(\tau)$
$A_+^{n+1}(\tau) := A^{n+1}(\tau)\ \text{u. non}\ A^n(\tau)$

DT38 $G_+^0(\tau) := G^0(\tau)$
$G_+^{n+1}(\tau) := G^{n+1}(\tau)\ \text{u. non}\ G^n(\tau)$

DT39 $\tau NC\tau' := \tau T^+\tau'\ \text{u. non}\ \bigvee z(\tau T^+z\ \text{u.}\ zT^+\tau')$

TT1 $\bigwedge x\bigwedge y\bigwedge z(xT^+y\ \text{u.}\ yT^+z\ \text{imp.}\ xT^+z)$

TT2 $\bigwedge x\ \text{non}\ xT^+x$

TT3 $\bigwedge x\bigwedge y(xT^+y\ \text{äqu.}\ xTy\ \text{u. non}\ yTx)$

TT4 $\bigwedge x\bigwedge y(T(x)\ \text{u.}\ T(y)\ \text{imp.}\ x=y)$

TT5 $\bigwedge x\bigwedge y(M(x)\ \text{u.}\ M(y)\ \text{imp.}\ x=y)$

TT6 $\bigwedge x(T(x)\ \text{imp.}\ G(x))$

TT7 $\bigwedge x(M(x)\ \text{imp.}\ A(x))$

TT8 $\bigvee xT(x)\ \text{imp.}\ \bigvee!xG(x)$

TT9 $\bigvee xM(x)\ \text{imp.}\ \bigvee!xA(x)$

TT10 $\bigvee xT(x)\ \text{imp.}\ \iota xT(x)=\iota xG(x)$

TT11 $\bigvee xM(x)\ \text{imp.}\ \iota xM(x)=\iota xA(x)$

TT12 $\bigwedge xG(x)\ \text{äqu.}\ \bigwedge xA(x)$

TT13 $\bigwedge y\bigwedge x(\bigwedge z(zTy\ \text{äqu.}\ zTx)\ \text{imp.}\ y=x)$

TT14 $\bigwedge x\bigvee y(x\rightarrow y)$

TT15 [die "höchstens ein"-Sätze für DT12 - DT16]

TT16 [der "höchstens ein"-Satz für DT17]

TT17 [der "genau ein"-Satz für DT17]

TT18 Λx(A[x] imp. xTUzA[z]) u. Λy(Λx(A[x] imp. xTy) imp. UzA[z]Ty)

TT19 ΛzΛz'Vx(zTx u. z'Tx u. Λy(zTy u. z'Ty imp. xTy))

TT20 ΛzΛz'((z∧z')=Uk(kTz o. kTz'))

TT21 ΛzΛz'Vx(xTz u. xTz' u. Λy(yTz u. yTz' imp. yTx))

TT22 ΛzΛz'((z∨z')=Uk(kTz u. kTz'))

TT23 ΛzΛz'Λy(yT(z∨z') äqu. yTz u. yTz'), d.h.
ΛzΛz'Λy((z∨z')→y äqu. z→y u. z'→y)

TT24 ΛzΛz'Λy((z∧z')Ty äqu. zTy u. z'Ty), d.h.
ΛzΛz'Λy(y→(z∧z') äqu. y→z u. y→z')

TT25 ΛzΛz'Λy(yTz o. yTz' imp. yT(z∧z'))

TT26 ΛzΛz'Λy(zTy o. z'Ty imp. (z∨z')Ty)

TT27 VyM(y) u. VyT(y)

TT28 Λx(A[x] imp. B[x]) imp. UzA[z]TUzB[z]

TT29 Λx(A[x] äqu. B[x]) imp. UzA[z]=UzB[z]

TT30 Λz(z=Uz'(z'Tz))

TT31 Λz(z=Uz'(QA(z') u. z'Tz))

TT32 Λx(M(x) äqu. x=$\underline{t}$)

TT33 Λz(z=Uz'(z'=z))

TT34 Λx(T(x) äqu. x=$\underline{k}$)

TT35 non VzA[z] imp. UyA[y]=$\underline{t}$

TT36 non Vx(xT$\underline{t}$ u. x≠$\underline{t}$)

TT37 ΛzΛz'(xT(z∧z') u. non M(x) imp. Vk'(k'Tx u. non M(k') u. (k'Tz o. k'Tz')))

TT38 ΛzΛz'Λx(QA(x) u. xT(z∧z') imp. xTz o. xTz')

TT39 Λx(QA(x) imp. ΛzΛz'(xTUy(yTz o. yTz') äqu. xTz o. xTz'))

TT40 Λx[QA(x) u. non M(x) imp. (xTUyA[y] äqu. Vz(xTz u. A[z]))]

TT41 Λx(QA(x) u. non M(x) imp. (xTUy(QA(y) u. A[y]) äqu. A[x]))

TT42 Uy(QA(y) u. A[y])=Uy(QA(y) u. non M(y) u. A[y])

TT43 Λx(El(x) imp. (xTUy(El(y) u. A[y]) äqu. A[x]))

TT44 Λx(x∈Uy(El(y) u. A[y]) äqu. El(x) u. A[x])

TT45 Λx[Λz(zTx u. zTUy(QA(y) u. non yTx) imp. M(z)) u. Λk(Λz(zTx u. zTk imp. M(z)) imp. kTUy(QA(y) u. non yTx))]

TT46 Λx[Λz(zTx u. zT$\neg_1$x imp. M(z)) u. Λk(Λz(zTx u. zTk imp. M(z)) imp. kT$\neg_1$x)]

TT47 Λx($\neg_1$x=Uy(QA(y) u. non yTx))

TT48 Λx[Λz(xTz u. Uy(QA(y) u. non yTx)Tz imp. T(z)) u.

Λk(Λz(xTz u. kTz imp. T(z)) imp. Uy(QA(y) u. non yTx)Tk)]

TT49 Λx[Λz(xTz u. $\neg_2$xTz imp. T(z)) u. Λk(Λz(xTz u. kTz imp. T(z)) imp. $\neg_2$xTk)]

TT50 Λx($\neg_2$x=Uy(QA(y) u. non yTx))

TT51 Λx($\neg_1$x=$\neg_2$x)

TT52 Λx(¬x=$\neg_1$x u. ¬x=$\neg_2$x)

TT53 Für alle x, y, z:

(i) (x∧$\underline{t}$)=x	(i') (x∨$\underline{k}$)=x
(ii) (x∧¬x)=$\underline{k}$	(ii') (x∨¬x)=$\underline{t}$
(iii) (x∧y)=(y∧x)	(iii') (x∨y)=(y∨x)
(iv) (x∧(y∨z))=((x∧y)∨(x∧z))	(iv') (x∨(y∧z))=((x∨y)∧(x∨z))

TT54 ¬$\underline{t}$=$\underline{k}$ u. ¬$\underline{k}$=$\underline{t}$

TT55 Λx(x=¬¬x)

TT56 ΛxΛy(¬(x∨y)=(¬x∧¬y))

TT57 ΛxΛy((x∨y)=¬(¬x∧¬y))

TT58 ΛxΛyΛz(xTy imp. (x∨z)T(y∨z))

TT59 ΛxΛy(xTy äqu. ¬yT¬x)

TT60 ΛxΛy(xT¬y äqu. yT¬x) u. ΛxΛy(¬xTy äqu. ¬yTx)

TT61 ΛxΛy[x→y äqu. M((x⊃y))]

TT62 Vz[Λx(A[x] imp. zTx) u. Λy(Λx(A[x] imp. yTx) imp. yTz)]

TT63 ∩xA[x]=UyΛx(A[x] imp. yTx)

TT64 ∩xA[x]=¬UyVx(A[x] u. y=¬x)

TT65 Λx(A[x] imp. ∩zA[z]Tx) u. Λy(Λx(A[x] imp. yTx) imp. yT∩zA[z])

TT66 Λx(A[x] imp. B[x]) imp. ∩zB[z]T∩zA[z]

TT67 Λz(z=∩z'(zTz'))

TT68 UxA[x]=∩yΛx(A[x] imp. xTy)

TT69 Λy(MK(y) äqu. Λx(non xTy äqu. ¬xTy))

TT70 Λx(Kon(x) äqu. x≠$\underline{k}$)

TT71 Λx(Max(x) äqu. TO(x))

TT72 Λx(MK(x) äqu. TO(x) u. x≠$\underline{k}$)

TT73 Λx(QA(¬x) äqu. TO(x))

TT74 Λx(QA(x) äqu. TO(¬x))

TT75 Λx(QA(x) äqu. Vy(TO(y) u. x=¬y))

TT76 Λx(QA(x) äqu. x=$\underline{t}$ o. Vy(MK(y) u. x=¬y))

TT77 Λx(El(x) äqu. Vy(MK(y) u. x=¬y))

TT78 Λx(El(¬x) äqu. MK(x))

TT79 ΛxΛy(MK(x) u. MK(y) u. xTy imp. y=x)

TT80 ΛxΛy(El(x) u. El(y) u. xTy imp. x=y)

TT81 Λy(non M(y) äqu. non Vx(yTx u. yT¬x))

TT82 Λy(QA(y) äqu. Λx(yTx o. yT¬x))

TT83 Λy(El(y) äqu. Λx(non yTx äqu. yT¬x))

TT84 Λy(El(y) äqu. Min(y) u. Sch(y))

TT85 Λx(Vy(MK(y) u. xTy) imp. non kTx)

TT86 Λx(xTt imp. Λy(MK(y) imp. xTy))

TT87 Λx(Λy(MK(y) imp. xTy) imp. xTt) äqu. ∩xMK(x)=t

TT88 ∩xMK(x)=t äqu. UxEl(x)=k

TT89 UxEl(x)=k

TT90 Λx(Λy(MK(y) imp. xTy) imp. xTt)

TT91 Λx(non kTx imp. Vy(MK(y) u. xTy))

TT92 Λx(N(x) äqu. Λy(MK(y) imp. xTy))

TT93 (i) ΛxΛy(N((x∧y)) äqu. N(x) u. N(y))

(ii) ΛxΛy(N(x) o. N(y) imp. N((x∨y)))

TT94 (i) ΛxΛy(P((x∨y)) äqu. P(x) o. P(y))

(ii) ΛxΛy(P((x∧y)) imp. P(x) u. P(y))

TT95 w=UxE(x)

TT96 Λx(UzA[z]Tx äqu. Λy(A[y] imp. yTx))

TT97 W(UzA[z]) äqu. Λy(A[y] imp. W(y))

TT98 ΛxΛy(W((x∧y)) äqu. W(x) u. W(y))

TT99 Λx(F(x) äqu. ¬wTx)

TT100 Λx(xT∩zA[z] äqu. Λy(A[y] imp. xTy))

TT101 F(∩zA[z]) äqu. Λy(A[y] imp. F(y))

TT102 ΛxΛy((x∨y)=∩z(z=x o. z=y))

TT103 ΛxΛy(F((x∨y)) äqu. F(x) u. F(y))

TT104 t≠k

TT105 Λx(x≠¬x)

TT106 MK(w)

TT107 Λx(non W(x) äqu. F(x))

TT108 ΛxΛy(F((x∧y)) äqu. F(x) o. F(y))

TT109 ΛxΛy(W((x∨y)) äqu. W(x) o. W(y))

TT110 Λx(W(¬x) äqu. F(x))

TT111 Λx(F(¬x) äqu. W(x))

TT112 ΛxΛy(W(¬x) u. W((x∨y)) imp. W(y))

TT113 ΛxΛy(F(¬x) u. F((x∧y)) imp. F(y))

TT114 F(UzA[z]) äqu. Vy(A[y] u. F(y))

TT115 W(∩zA[z]) äqu. Vy(A[y] u. W(y))

TT116 Λx(E(x) äqu. x=t) äqu. w=t

TT117 w=t imp. Λx(x=t o. x=k)

TT118 Λx(x=t o. x=k imp. w=t)

TT119 Vx(E(x) u. x≠t) u. Vx(x≠t u. x≠k)

TT120 K($\underline{w}$)

TT121 Vx(P(x) u. P(¬x))

TT122 non N($\underline{w}$) u. non N(¬$\underline{w}$)

TT123 Vx(non N(x) u. non N(¬x))

TT124 Λx(W(x) imp. P(x)) u. Λx(N(x) imp. W(x))

TT125 Vx(W(x) u. non N(x)) u. Vx(P(x) u. non W(x))

TT126 Λx(M(x) äqu. A^0(x))

TT127 Λx(T(x) äqu. G^0(x))

TT128 Λx(QA(x) äqu. A^1(x))

TT129 Λx(TO(x) äqu. G^1(x))

TT130 Λx(El(x) äqu. A^1_+(x))

TT131 Λx(MK(x) äqu. G^1_+(x))

TT132 Λx(A^i(x) imp. A^{i+1}(x)),
Λx(G^i(x) imp. G^{i+1}(x))

TT133 Λx(A^i(x) imp. A^j(x)),
Λx(G^i(x) imp. G^j(x)), wenn j auf i folgt.

TT134 non Vx(A^i_+(x) u. A^j_+(x)),
non Vx(G^i_+(x) u. G^j_+(x)), wenn j auf i folgt.

TT135 Λx(A^n(x) imp. $V^{\leq n}$y(A^1_+(y) u. yTx))

TT136 Λx($V^{\leq n}$y(A^1_+(y) u. yTx) imp. A^n(x))

TT137 Λx(A^n_+(x) äqu. $V^{=n}$y(A^1_+(y) u. yTx))

TT138 ΛxΛy(xNCy äqu. Vz(El(z) u. non zTx u. y=(x∧z)))

TT139 ΛxΛy(xT^+y imp. Vz'(xNCz') u. Vz'(z'NCy))

TT140 ΛxΛy(xT^+y äqu. xNCy o. Vz'(z'NCy u. xT^+z'))

TT141 Λx((x∧$\underline{w}$)≠$\underline{k}$ imp. xT$\underline{w}$)

(b) Eine Variante von T:

AT1 - AT6

AT7$^+$ Λx(Sub(x) imp. MK(x))

AT8$^+$ VxVy(Sub(x) u. Sub(y) u. x≠y)

DT1$^+$ φ<τ> := MK(τ) u. φTτ

DT2$^+$ E(τ) := Vy(Sub(y) u. τTy)

DT3$^+$ φ<<τ> := Sub(τ) u. φTτ

DT4$^+$ All(φ) := non E(¬φ)

DT5$^+$ φT^eφ' := Λz(φ<z> imp. φ'<z>)

DT6$^+$ φT^e_+φ' := Λz(φ<<z> imp. φ'<<z>)

DT7$^+$ $\underline{s}$:= ∩ySub(y)

Prinzipien und Definitionen

TT1$^+$ Λx(x<x> äqu. MK(x))

TT2$^+$ Λx(x<x> äqu. Λy(x<y> äqu. x=y))

TT3$^+$ ΛfΛx(f<<x> imp. f<x>)

TT4$^+$ Λx(Sub(x) imp. E(x))

TT5$^+$ ΛfΛx(f<<x> imp. E(x) u. E(f))

TT6$^+$ ΛfΛx(f<x> u. E(x) imp. f<<x>)

TT7$^+$ Λx(Sub(x) äqu. MK(x) u. E(x))

TT8$^+$ Λx(E(x) imp. (x<x> äqu. non Vy(E(y) u. x≠y u. x<y>))),
bzw. Λx(E(x) imp. (x<<x> äqu. non Vy(E(y) u. x≠y u.
x<<y>)))

TT9$^+$ Λx((x<<x> äqu. non Vy(E(y) u. x≠y u. x<<y>)) imp. E(x))

TT10$^+$ Λx(E(x) äqu. (x<<x> äqu. non Vy(x≠y u. x<<y>)))

TT11$^+$ Λx(P(x) äqu. (x<x> äqu. non Vy(x≠y u. x<y>)))

TT12$^+$ Λf(E(f) o. E(¬f))

TT13$^+$ Vf(E(f) u. E(¬f))

TT14$^+$ ΛfΛg(E((f∨g)) äqu. E(f) o. E(g))

TT15$^+$ ΛfΛg(E((f∧g)) imp. E(f) u. E(g))

TT16$^+$ VfVg(E(f) u. E(g) u. non E((f∧g)))

TT17$^+$ Λx(Sub(x) imp. x≠t)

TT18$^+$ E(∩fA[f]) äqu. Vf(A[f] u. E(f))

TT19$^+$ ΛfΛg(Λz(f<z> äqu. g<z>) imp. f=g)

TT20$^+$ ΛfΛg(g<z> imp. f<z>) imp. fTg)

TT21$^+$ ΛfΛg(fTg imp. Λz(g<z> imp. f<z>))

TT22$^+$ ΛfΛg(Λz(g<z> imp. f<z>) äqu. fTg)

TT23$^+$ ΛfΛg(fTg äqu. gT^{e}f)

TT24$^+$ ΛxΛy(MK(x) u. MK(y) u. Λf(f<x> äqu. f<y>) imp. x=y)

TT25$^+$ ΛxΛy(MK(x) u. Λf(f<x> imp. f<y>) imp. x=y)

TT26$^+$ ΛxΛy(MK(x) u. MK(y) u. (non MK(¬x) o. non MK(¬y)) u.
Λf(non MK(f) imp. (f<x> äqu. f<y>)) imp. x=y)

TT27$^+$ Λx(Vz(z≠x u. z≠¬x u. z≠t u. z≠k) imp.
Λx(MK(x) imp. non MK(¬x))

TT28$^+$ Λx(∩x'(MK(x') u. A[x'])<x> äqu. MK(x) u. A[x])

TT29$^+$ Λx(A[x] imp. MK(x)) imp. Λx(∩yA[y]<x> äqu. A[x])

TT30$^+$ Λx(∩ySub(y)<x> äqu. Sub(x))

TT31$^+$ Λx(s<x> äqu. Sub(x))

TT32$^+$ Λf((f∧s)≠k imp. Vy(Sub(y) u. f<y>))

TT33$^+$ s=t imp. Λy(Sub(y) äqu. MK(y))

TT34$^+$ s≠k äqu. VySub(y)

TT35$^+$ Λf(fTs imp. E(f))

(c) Das System TZ_1:

AT_Z0 ΛxΛy(xTy imp. Z^1(x) u. Z^1(y))
AT_Z1 AT1
AT_Z2 Λx(Z^1(x) imp. xTx)
AT_Z3 AT3
AT_Z4 Vz(Z^1(z) u. Λx(Z^1(x) u. A[x] imp. xTz) u.
Λy(Z^1(y) u. Λx(Z^1(x) u. A[x] imp. xTy) imp. zTy))
AT_Z5 ΛzΛz'(Z^1(z) u. Z^1(z') u. Λx(QA(x) u. xTz imp. xTz')
imp. zTz')
AT_Z6 AT6
AT_Z7 AT7
AT_Z8 AT8
AT_Z9 AT9
AT_Z10 Λx(Z^1(x) imp. non Z^0(x))
AT_Z11 Λx(Z^1(x) imp. non $Z^{\langle 0 \rangle}$(x))
AT_Z12 Λx(Z^0(x) imp. non $Z^{\langle 0 \rangle}$(x))
AT_Z13 VxZ^0(x)
AT_Z14 ΛxΛy($Z^{\langle 0 \rangle}$(x) u. Z^0(y) imp. Z^1((x,y)))
AT_Z15 ΛxΛy(non $Z^{\langle 0 \rangle}$(x) o. non Z^0(y) imp. (x,y)=$\underline{k}$)
AT_Z16 Λx(Z^0(x) u. Z^1(Π[x]) imp. (λoΠ[o],x)=Π[x])
AT_Z17 Λx(non Z^1(Π[x]) imp. (λoΠ[o],x)=$\underline{k}$)
AT_Z18 non Vx(Z^0(x) u. Z^1(Π[x]) u. Π[x]≠$\underline{k}$) imp. $Z^{\langle 0 \rangle}$(λoΠ[o]))
AT_Z19 ΛfΛg($Z^{\langle 0 \rangle}$(f) u. $Z^{\langle 0 \rangle}$(g) u. Λx((f,x)=(g,x)) imp. f=g)
AT_Z20 Λf($QA^{\langle 0 \rangle}$(f) imp. non VzVz'(Z^0(z) u. Z^0(z') u. (f,z)≠$\underline{t}$ u.
(f,z')≠$\underline{t}$ u. z≠z'))
AT_Z21 VzVz'($\underline{sub}$(z) u. $\underline{sub}$(z') u. z≠z')

DT_Z1 - DT_Z39 die Umschriften von DT1 - DT39: Relativierung
durch $Z^1(\tau)$
DT_Z40 $Z_K^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$:= $Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$ u. Λx((φ,x)=$\underline{k}$)
DT_Z41 $\varphi T^{\langle 0 \rangle} \varphi'$:= $Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$ u. $Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi')$ u. Λx((φ,x)T(φ',x))
DT_Z42 $U^{\langle 0 \rangle}$fA[f] := ιh($Z^{\langle 0 \rangle}$(h) u. Λf($Z^{\langle 0 \rangle}$(f) u. A[f] imp.
f$T^{\langle 0 \rangle}$h) u. Λg($Z^{\langle 0 \rangle}$(g) u. Λf($Z^{\langle 0 \rangle}$(f) u. A[f]
imp. f$T^{\langle 0 \rangle}$g) imp. h$T^{\langle 0 \rangle}$g))
DT_Z43 $\underline{k}^{\langle 0 \rangle}$:= ιy($Z^{\langle 0 \rangle}$(y) u. Λx($Z^{\langle 0 \rangle}$(x) imp. x$T^{\langle 0 \rangle}$y))
DT_Z44 b(τ) := λoUx(x=τ u. o=o)
DT_Z45 $Z_L^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$:= $Z^{\langle 0 \rangle}(\varphi)$ u. Λz(Z^0(z) imp. (φ,z)=$\underline{t}$)

$DT_Z 46$ $\underline{t}^{\langle o \rangle} := \iota y(Z^{\langle o \rangle}(y)$ u. $\wedge x(Z^{\langle o \rangle}(x)$ imp. $yT^{\langle o \rangle}x))$

$DT_Z 47$ $v(\tau) := \lambda o U y(o=\tau$ u. $y=\underline{k})$

$DT_Z 48$ $i(\tau) := \lambda o U y(o \neq \tau$ u. $y=\underline{k})$

$DT_Z 49$ $Z_E^{\langle o \rangle}(\varphi) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(\varphi,z)=\underline{t}$ o. $(\varphi,z)=\underline{k})$

$DT_Z 50$ $Z_A^{\langle o \rangle}(\varphi) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $\wedge z(Z^0(z)$ imp. $(\varphi,z)\neq\underline{t}$ u. $(\varphi,z)\neq\underline{k})$

$DT_Z 51$ $Z_E^{\langle o \rangle}(\varphi,\tau) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $Z^0(\tau)$ u. $((\varphi,\tau)=\underline{t}$ o. $(\varphi,\tau)=\underline{k})$

$DT_Z 52$ $Z_A^{\langle o \rangle}(\varphi,\tau) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $Z^0(\tau)$ u. $(\varphi,\tau)\neq\underline{t}$ u. $(\varphi,\tau)\neq\underline{k}$

$DT_Z 53$ $Z_K^{\langle o \rangle}(\varphi,\tau) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $Z^0(\tau)$ u. $(\varphi,\tau)=\underline{k}$

$DT_Z 54$ $Z_L^{\langle o \rangle}(\varphi,\tau) := Z^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $Z^0(\tau)$ u. $(\varphi,\tau)=\underline{t}$

$DT_Z 55$ $\tau(\tau') := E((\tau,\tau'))$

$DT_Z 56$ $(\varphi$ in $\tau)(\tau') := (\varphi,\tau')T\tau$ u. $MK(\tau)$

$DT_Z 57$ $MK_{\underline{w}}^{\langle o \rangle}(\varphi) := MK^{\langle o \rangle}(\varphi)$ u. $b(\underline{w})T^{\langle o \rangle}\varphi$

$DT_Z 58$ $E^0(\tau) := \underline{sub}(\tau)$

$DT_Z 59$ $E^{\langle o \rangle}(\varphi) := Vz(E^0(z)$ u. $\varphi(z))$

$DT_Z 60$ $rep(\varphi) := \iota g(Z_E^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\wedge z(g(z)$ äqu. $\varphi(z)))$

$DT_Z 61$ $rep(\varphi,\tau) := \iota g(Z_E^{\langle o \rangle}(g)$ u. $\wedge z((g$ in $\tau)(z)$ äqu.
$(\varphi$ in $\tau)(z)))$

$DT_Z 62$ $pos(\varphi) := \neg^{\langle o \rangle} nec(\neg^{\langle o \rangle}\varphi)$

$DT_Z 63$ $nec(\varphi) := \lambda o U y((\varphi,o)\neq\underline{t}$ u. $y=\underline{k})$

$DT_Z 64$ $\mathfrak{a}(\varphi) := UxVz(Z^0(z)$ u. $xT(\varphi,z))$

$DT_Z 65$ $\mathfrak{s}(\varphi) := Ux\wedge z(Z^0(z)$ imp. $xT(\varphi,z))$

$DT_Z 66$ (i) ($\underline{x}$) $\mathfrak{s}^{\underline{>}1}(\varphi) := \cap y V z_1(Z^0(z_1)$ u. $y=(\varphi,z_1))$

($\underline{xx}$) $\mathfrak{s}^{\underline{>}2}(\varphi) := \cap y V z_1 V z_2[Z^0(z_1)$ u. $Z^0(z_2)$ u. $z_1\neq z_2$ u.
$y=((\varphi,z_1)\wedge(\varphi,z_2))]$

$\mathfrak{s}^{\underline{>}3}(\varphi) := \cap y V z_1 V z_2 V z_3[Z^0(z_1)$ u. $Z^0(z_2)$ u.
$Z^0(z_3)$ u. $z_1\neq z_2$ u. $z_1\neq z_3$ u. $z_2\neq z_3$ u.
$y=((\varphi,z_1)\wedge(\varphi,z_2)\wedge(\varphi,z_3))]$

.

.

.

$\mathfrak{s}^{\underline{>}n}(\varphi) := \cap y V z_1 \ldots V z_n[Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$
u. $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ u.
$y=((\varphi,z_1)\wedge\ldots\wedge(\varphi,z_n))]$

(n ist eine arabische Ziffer nach "1"; $Ver(z_1,\ldots,z_n)$ besagt dasselbe wie "$z_1,\ldots,z_n$ sind paarweise voneinander verschieden")

(ii) $\mathfrak{s}^{\underline{<}1}(\varphi) := \neg\mathfrak{s}^{\underline{>}2}(\varphi)$

$\mathfrak{s}^{\underline{<}2}(\varphi) := \neg\mathfrak{s}^{\underline{>}3}(\varphi)$

.

.

.

$\delta^{\leq n}(\varphi) := \neg\delta^{\geq n+1}(\varphi)$

(n ist eine arabische Ziffer nach "0"; n+1 ist die auf n folgende arabische Ziffer)

(iii) (<u>x</u>) $\delta^{0}(\varphi) := \neg\delta^{\geq 1}(\varphi)$

(<u>xx</u>) $\delta^{1}(\varphi) := (\delta^{\geq 1}(\varphi)\wedge\delta^{\leq 1}(\varphi))$

$\delta^{2}(\varphi) := (\delta^{\geq 2}(\varphi)\wedge\delta^{\leq 2}(\varphi))$

.

.

.

$\delta^{n}(\varphi) := (\delta^{\geq n}(\varphi)\wedge\delta^{\leq n}(\varphi))$

(n ist eine arabische Ziffer nach "0")

TT_Z1 – TT_Z141 Umschriften von TT1 – TT141: Relativierung durch $Z^1(\tau)$

TT_Z142 $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^1(\mathfrak{A}[x])$ u. $\mathfrak{A}[x]\neq\underline{k})$ imp. $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\mathfrak{A}[o])$

TT_Z143 $Z^{\langle 0\rangle}(\lambda o\mathfrak{A}[o])$

TT_Z144 non $\bigvee x(Z^0(x)$ u. $Z^1(\mathfrak{A}[x])$ u. $\mathfrak{A}[x]\neq\underline{k})$ imp. $\bigwedge x((\lambda o\mathfrak{A}[o],x)=\underline{k})$

TT_Z145 $\bigwedge x\bigwedge y Z^1((x,y))$

TT_Z146 $\bigwedge x\bigwedge y(\bigwedge z(Z^0(z)$ imp. $(x,z)T(y,z))$ imp. $\bigwedge z((x,z)T(y,z)))$ u. $\bigwedge f\bigwedge g(\bigwedge x(Z^0(x)$ imp. $(f,x)=(g,x))$ imp. $\bigwedge x((f,x)=(g,x)))$

TT_Z147 $\bigwedge x((\lambda o\mathfrak{A}[o],x)=\mathfrak{A}[x]$ o. $(\lambda o\mathfrak{A}[o],x)=\underline{k})$

TT_Z148 $\bigwedge x\bigwedge y((x,y)=(\lambda o(x,o),y))$

TT_Z149 $\bigwedge x\bigwedge y((\lambda o(o,y),x)=\underline{k})$

TT_Z150 $\bigwedge x((\lambda o'\lambda o\mathfrak{A}[o,o'],x)=\underline{k})$

TT_Z151 $\bigwedge f\bigwedge g(fT^{\langle 0\rangle}g$ imp. $Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $Z^{\langle 0\rangle}(g))$

TT_Z152 $\bigwedge f\bigwedge g\bigwedge h(fT^{\langle 0\rangle}g$ u. $gT^{\langle 0\rangle}h$ imp. $fT^{\langle 0\rangle}h)$

TT_Z153 $\bigwedge f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ imp. $fT^{\langle 0\rangle}f)$

TT_Z154 $\bigwedge f\bigwedge g(fT^{\langle 0\rangle}g$ u. $gT^{\langle 0\rangle}f$ imp. $f=g)$

TT_Z155 $\bigvee h(Z^{\langle 0\rangle}(h)$ u. $\bigwedge f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle 0\rangle}h)$ u. u. $\bigwedge g(Z^{\langle 0\rangle}(g)$ u. $\bigwedge f(Z^{\langle 0\rangle}(f)$ u. $A[f]$ imp. $fT^{\langle 0\rangle}g)$ imp. $hT^{\langle 0\rangle}g))$

TT_Z156 $U^{\langle 0\rangle}fA[f]=\lambda oUy\bigvee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,o))$

TT_Z157 $\bigwedge z(Z^0(z)$ imp. $(U^{\langle 0\rangle}fA[f],z)=Uy\bigvee k(Z^{\langle 0\rangle}(k)$ u. $A[k]$ u. $y=(k,z)))$

TT_Z158 $Z_K^{\langle 0\rangle}(\underline{k}^{\langle 0\rangle})$

TT_Z159 $\bigwedge x(Z^1(x)$ imp. $\bigwedge z(Z^0(z)$ imp. $(b(x),z)=x))$

TT_Z160 $\bigwedge z((b(\underline{k}),z)=\underline{k})$

TT$_Z$161 $Z_K^{\langle 0\rangle}(b(\underline{k}))$

TT$_Z$162 $b(\underline{k})=\underline{k}^{\langle 0\rangle}$

TT$_Z$163 $\Lambda f\Lambda g(Z_K^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }Z_K^{\langle 0\rangle}(g)\text{ imp. }f=g)$

TT$_Z$164 $Z_L^{\langle 0\rangle}(b(\underline{t}))$

TT$_Z$165 $b(\underline{t})=\underline{t}^{\langle 0\rangle}$

TT$_Z$166 $Z_L^{\langle 0\rangle}(\underline{t}^{\langle 0\rangle})$

TT$_Z$167 $\Lambda f\Lambda g(Z_L^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }Z_L^{\langle 0\rangle}(g)\text{ imp. }f=g)$

TT$_Z$168 (i) $\Lambda x\Lambda x'(x=x'\text{ imp. }Uy(x=x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{k})$

(i') $\Lambda x\Lambda x'(x\neq x'\text{ imp. }Uy(x=x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{t})$

(ii) $\Lambda x\Lambda x'(Uy(x=x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{k}\text{ imp. }x=x')$

(ii') $\Lambda x\Lambda x'(Uy(x=x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{t}\text{ imp. }x\neq x')$

TT$_Z$169 (a) $\Lambda x\Lambda z'(Z^0(z')\text{ imp. }((v(x),z')=\underline{t}\text{ äqu. }z'\neq x))$

(b) $\Lambda x\Lambda z'(Z^0(z')\text{ imp. }((v(x),z')=\underline{k}\text{ äqu. }z'=x))$

TT$_Z$170 (i) $\Lambda x\Lambda x'(x=x'\text{ imp. }Uy(x\neq x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{t})$

(i') $\Lambda x\Lambda x'(x\neq x'\text{ imp. }Uy(x\neq x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{k})$

(ii) $\Lambda x\Lambda x'(Uy(x\neq x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{t}\text{ imp. }x=x')$

(ii') $\Lambda x\Lambda x'(Uy(x\neq x'\text{ u. }y=\underline{k})=\underline{k}\text{ imp. }x\neq x')$

TT$_Z$171 (a) $\Lambda x\Lambda z'(Z^0(z')\text{ imp. }((i(x),z')=\underline{t}\text{ äqu. }z'=x))$

(b) $\Lambda x\Lambda z'(Z^0(z')\text{ imp. }((i(x),z')=\underline{k}\text{ äqu. }z'\neq x))$

TT$_Z$172 $\Lambda f\Lambda z\Lambda y(Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }Z^0(z)\text{ u. }yT(f,z)\text{ imp. }$
$Vh(hT^{\langle 0\rangle}f\text{ u. }y=(h,z)))$

TT$_Z$173 $\Lambda f(QA^{\langle 0\rangle}(f)\text{ imp. }\Lambda z(Z^0(z)\text{ imp. }QA((f,z))))$

TT$_Z$174 $\Lambda f[QA^{\langle 0\rangle}(f)\text{ imp. }\Lambda z(Z^0(z)\text{ imp. }(f,z)=\underline{t})\text{ o. }$
$Vz(Z^0(z)\text{ u. }(f,z)\neq\underline{t}\text{ u. }QA((f,z))\text{ u. }\Lambda z'(Z^0(z')\text{ u. }$
$z'\neq z\text{ imp. }(f,z')=\underline{t}))]$

TT$_Z$175 $\Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }(\Lambda z(Z^0(z)\text{ imp. }(f,z)=\underline{t})\text{ o. }$
$Vz(Z^0(z)\text{ u. }(f,z)\neq\underline{t}\text{ u. }QA((f,z))\text{ u. }\Lambda z'(Z^0(z')\text{ u. }z'\neq z$
$\text{imp. }(f,z')=\underline{t})))\text{ imp. }QA^{\langle 0\rangle}(f))$

TT$_Z$176 $\Lambda f\Lambda g(Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }Z^{\langle 0\rangle}(g)\text{ u. }\Lambda h(QA^{\langle 0\rangle}(h)\text{ u. }hT^{\langle 0\rangle}f\text{ imp. }$
$hT^{\langle 0\rangle}g)\text{ imp. }fT^{\langle 0\rangle}g)$

TT$_Z$177 $\Lambda f[fT^{\langle 0\rangle}U^{\langle 0\rangle}gA[g]\text{ u. non }M^{\langle 0\rangle}(f)\text{ imp. }$
$Vh(hT^{\langle 0\rangle}f\text{ u. non }M^{\langle 0\rangle}(h)\text{ u. }Vk'(hT^{\langle 0\rangle}k'\text{ u. }A[k']))]$

TT$_Z$178 $\Lambda f\Lambda g[Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }Z^{\langle 0\rangle}(g)\text{ imp. }(f\wedge^{\langle 0\rangle}g)=\lambda o((f,o)\wedge(g,o))]$

TT$_Z$179 $\Lambda f\Lambda g[Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }Z^{\langle 0\rangle}(g)\text{ imp. }(f\vee^{\langle 0\rangle}g)=\lambda o((f,o)\vee(g,o))]$

TT$_Z$180 $\Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ imp. }\neg^{\langle 0\rangle}f=\lambda o\neg(f,o))$

TT$_Z$181 $VfZ_A^{\langle 0\rangle}(f)\text{ äqu. }Vy(Z^1(y)\text{ u. }y\neq\underline{t}\text{ u. }y\neq\underline{k})$

TT$_Z$182 $Z_A^{\langle 0\rangle}(b(\underline{w}))$

TT$_Z$183 $\Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ imp. }Z_E^{\langle 0\rangle}(f))\text{ äqu. }\Lambda y(Z^1(y)\text{ imp. }y=\underline{t}\text{ o. }y=\underline{k}))$

TT$_Z$184 $\Lambda f(Z^{\langle 0\rangle}(f)\text{ imp. }Z_E^{\langle 0\rangle}(f))\text{ äqu. non }VfZ_A^{\langle 0\rangle}(f)$

TT$_Z$185 $\Lambda f\Lambda g[Z_E^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. non }Z_K^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. non }Z_L^{\langle 0\rangle}(f)\text{ u. }Z_A^{\langle 0\rangle}(g)$

$\text{imp. non } Z_E^{\langle o\rangle}((f\wedge^{\langle o\rangle}g)) \text{ u. non } Z_A^{\langle o\rangle}((f\wedge^{\langle o\rangle}g))]$

TT$_Z$186 $\bigwedge z(Z^{0}(z) \text{ u. } \bigvee z'(Z^{0}(z') \text{ u. } z\neq z') \text{ imp. } Z_E^{\langle o\rangle}(i(z)) \text{ u.}$
$\text{non } Z_K^{\langle o\rangle}(i(z)) \text{ u. non } Z_L^{\langle o\rangle}(i(z)))$

TT$_Z$187 $\bigwedge z[Z^{0}(z) \text{ imp. } TO^{\langle o\rangle}((b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))]$

TT$_Z$188 $\bigwedge z(Z^{0}(z) \text{ imp. } (b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z))\neq\underline{k}^{\langle o\rangle})$

TT$_Z$189 $\bigwedge z[Z^{0}(z) \text{ imp. } MK^{\langle o\rangle}((b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))]$

TT$_Z$190 $\bigwedge z[Z^{0}(z) \text{ imp. } El^{\langle o\rangle}(\neg^{\langle o\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))]$

TT$_Z$191 $\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } QA^{\langle o\rangle}(\neg^{\langle o\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z))) \text{ u.}$
$\neg^{\langle o\rangle}(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z))\neq\underline{t}^{\langle o\rangle})$

TT$_Z$192 $\bigwedge z\bigwedge z'(Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ u. } z\neq z' \text{ imp.}$
$(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z))\neq(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z')))$

TT$_Z$193 $\bigwedge x\bigwedge f(f(x) \text{ imp. } Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } Z^{0}(x))$

TT$_Z$194 $\bigwedge f\bigwedge x(f(x) \text{ imp. non } x(f))$

TT$_Z$195 $\bigwedge z(Z^{0}(z) \text{ imp. } [U^{\langle o\rangle}gA[g](z) \text{ äqu.}$
$\bigwedge f(Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } A[f] \text{ imp. } f(z))])$

TT$_Z$196 $\bigwedge z\bigwedge f\bigwedge g[Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } Z^{\langle o\rangle}(g) \text{ imp.}$
$[\neg^{\langle o\rangle}f(z) \text{ äqu. non } f(z)] \text{ u. } [(f\wedge^{\langle o\rangle}g)(z) \text{ äqu.}$
$f(z) \text{ u. } g(z)] \text{ u. } [(f\vee^{\langle o\rangle}g)(z) \text{ äqu. } f(z) \text{ o. } g(z)]]$

TT$_Z$197 $\bigwedge z(Z^{0}(z) \text{ imp. } U^{\langle o\rangle}f[f(z)]=(b(\underline{w})\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))$

TT$_Z$198 $\bigwedge z\bigwedge z'[Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ imp.}$
$(z'=z \text{ imp. } (U^{\langle o\rangle}f[f(z)],z')=\underline{w} \text{ u. } U^{\langle o\rangle}f[f(z)](z')) \text{ u.}$
$(z'\neq z \text{ imp. } (U^{\langle o\rangle}f[f(z)],z')=\underline{k} \text{ u. non } U^{\langle o\rangle}f[f(z)](z'))]$

TT$_Z$199 $\bigwedge f[Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } (\bigwedge z(Z^{0}(z) \text{ imp. } (f,z)=\underline{k}) \text{ o. } \bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u.}$
$(f,z)\neq\underline{k} \text{ u. } TO((f,z)) \text{ u. } \bigwedge z'(Z^{0}(z') \text{ u. } z'\neq z \text{ imp.}$
$(f,z')=\underline{k}))) \text{ imp. } TO^{\langle o\rangle}(f)]$

TT$_Z$200 $\bigwedge f[TO^{\langle o\rangle}(f) \text{ imp. } \bigwedge z(Z^{0}(z) \text{ imp. } (f,z)=\underline{k}) \text{ o.}$
$\bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } (f,z)\neq\underline{k} \text{ u. } TO((f,z)) \text{ u. } \bigwedge z'(Z^{0}(z') \text{ u. } z'\neq z$
$\text{imp. } (f,z')=\underline{k}))]$

TT$_Z$201 $\bigwedge f[MK^{\langle o\rangle}(f) \text{ äqu. } \bigvee z(Z^{0}(z) \text{ u. } MK((f,z)) \text{ u.}$
$\bigwedge z'(Z^{0}(z') \text{ u. } z'\neq z \text{ imp. } (f,z')=\underline{k}))]$

TT$_Z$202 $\bigwedge z\bigwedge y[Z^{0}(z) \text{ u. } MK(y) \text{ imp. } MK^{\langle o\rangle}((b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))]$

TT$_Z$203 $\bigwedge z\bigwedge z'\bigwedge y\bigwedge y'[Z^{0}(z) \text{ u. } Z^{0}(z') \text{ u. } MK(y) \text{ u. } MK(y') \text{ u.}$
$(z'\neq z \text{ o. } y'\neq y) \text{ imp. } (b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z))\neq(b(y')\wedge^{\langle o\rangle}i(z'))]$

TT$_Z$204 $\bigwedge f[MK^{\langle o\rangle}(f) \text{ imp. } \bigvee z\bigvee y(Z^{0}(z) \text{ u. } MK(y) \text{ u.}$
$f=(b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))]$

TT$_Z$205 $\bigwedge z\bigwedge y(Z^{0}(z) \text{ u. } MK(y) \text{ imp.}$
$U^{\langle o\rangle}f[(f \text{ in } y)(z)]=(b(y)\wedge^{\langle o\rangle}i(z)))$

TT$_Z$206 $\bigwedge f[Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } f\neq\underline{k}^{\langle o\rangle} \text{ äqu. } \bigvee z\bigvee y(Z^{0}(z) \text{ u. } MK(y) \text{ u.}$
$(f \text{ in } y)(z))]$

TT$_Z$207 $\bigwedge z\bigwedge y\bigwedge f[(f \text{ in } y)(z) \text{ imp. } Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } MK(y) \text{ u. } Z^{0}(z)]$

TT$_Z$208 Λz[Z^0(z) imp. $MK_{\underline{w}}^{\langle o\rangle}$((b($\underline{w}$)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z)))]

TT$_Z$209 Λf[$MK_{\underline{w}}^{\langle o\rangle}$(f) imp. Vz($Z^0$(z) u. f=(b($\underline{w}$)$\wedge^{\langle o\rangle}$i(z)))]

TT$_Z$210 Λf[$MK_{\underline{w}}^{\langle o\rangle}$(f) äqu. Vz($Z^0$(z) u. f=$U^{\langle o\rangle}$g[g(z)])]

TT$_Z$211 Λf[$MK^{\langle o\rangle}$(f) äqu. VzVy(Z^0(z) u. MK(y) u.
f=$U^{\langle o\rangle}$g[(g in y)(z)])]

TT$_Z$212 Λf[$Z^{\langle o\rangle}$(f) imp. Vg($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u. Λz(g(z) äqu. f(z)))]

TT$_Z$213 ΛgΛg'($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u. $Z_E^{\langle o\rangle}$(g') u. Λz(g(z) äqu. g'(z))
imp. g=g')

TT$_Z$214 ΛfV!g($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u. Λz(g(z) äqu. f(z)))

TT$_Z$215 ΛgΛg'($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u. $Z_E^{\langle o\rangle}$(g') u. Vy(MK(y) u.
Λz[(g in y)(z) äqu. (g' in y)(z)]) imp. g=g')

TT$_Z$216 ΛfΛy[$Z^{\langle o\rangle}$(f) u. MK(y) imp. Vg($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u.
Λz[(g in y)(z) äqu. (f in y)(z)])]

TT$_Z$217 ΛfΛy[MK(y) imp. V!g($Z_E^{\langle o\rangle}$(g) u. Λz[(g in y)(z) äqu.
(f in y)(z)])]

TT$_Z$218 ΛfΛg($Z^{\langle o\rangle}$(f) u. $Z^{\langle o\rangle}$(g) u. Λy(MK(y) imp.
rep(f,y)=rep(g,y)) imp. f=g)

TT$_Z$219 Λz(A[z] imp. Z^0(z)) imp.
Λz(ιoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$)(z) äqu. A[z])

TT$_Z$220 Λz(A[z] imp. Z^0(z)) imp. Λx(MK(x) imp.
Λz[(ιoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$) in x)(z) äqu. A[z]])

TT$_Z$221 $Z_E^{\langle o\rangle}$(ιoUy(non A[o] u. y=$\underline{k}$))

TT$_Z$222 ΛfΛx[$Z^{\langle o\rangle}$(f) u. MK(x) imp.
Λz[(nec(f) in x)(z) äqu. Λy(MK(y) imp. (f in y)(z))]]

TT$_Z$223 ΛfΛx($Z^{\langle o\rangle}$(f) u. MK(x) imp.
Λz[(nec(f) in x)(z) äqu. (f,z)=$\underline{t}$])

TT$_Z$224 Λf[$Z^{\langle o\rangle}$(f) imp. Λz(((nec(f),z)=$\underline{t}$ äqu. (f,z)=$\underline{t}$) u.
((nec(f),z)=$\underline{k}$ äqu. (f,z)≠$\underline{t}$))]

TT$_Z$225 Für alle Eigenschaften f,g:
(i) f$T^{\langle o\rangle}$nec(f),
(ii) nec(f)=nec(nec(f)),
(iii) pos(nec(f))=nec(f),
(iv) (nec(f)$\supset^{\langle o\rangle}$nec(g))$T^{\langle o\rangle}$nec((f$\supset^{\langle o\rangle}$g)),
(v) $Z_E^{\langle o\rangle}$(f) äqu. nec(f)$T^{\langle o\rangle}$f.

TT$_Z$226 UxVz(A[z] u. xTπ[z])=UxVz(A[z] u. Z^1(π[z]) u. x=π[z])

TT$_Z$227 Λf[W($\mathfrak{a}$(f)) äqu. Λz(Z^0(z) imp. f(z))]

TT$_Z$228 ΛfΛz(Z^0(z) imp. (f,z)T$\mathfrak{a}$(f))

TT$_Z$229 Λy[Z^1(y) imp. Λf($\mathfrak{a}$(f)Ty äqu. Λz(Z^0(z) imp. (f,z)Ty))]

TT$_Z$230 Λf[UxΛz(Z^0(z) imp. xT(f,z))=∩xVz(Z^0(z) u. x=(f,z))]

TT$_Z$231 ΛyΛf(Vz(Z^0(z) u. (f,z)Ty) imp. $\mathfrak{s}$(f)Ty)

TT_Z232 $\bigwedge f(\bigvee z(Z^0(z) \text{ u. } f(z)) \text{ imp. } W(\beta(f)))$

TT_Z233 $\bigwedge y(MK(y) \text{ imp. } \bigwedge f(\beta(f)Ty \text{ imp. } \bigvee z(Z^0(z) \text{ u. } (f,z)Ty)))$

TT_Z234 $\bigwedge f(W(\beta(f)) \text{ imp. } \bigvee z(Z^0(z) \text{ u. } f(z))$

TT_Z235 $\bigwedge y(Kon(y) \text{ u. } \bigwedge f(\beta(f)Ty \text{ imp. } \bigvee z_3(Z^0(z_3) \text{ u. } (f,z_3)Ty))$
$\text{imp. } MK(y))$

TT_Z236 $\bigwedge f(W(\beta^{\geq n}(f)) \text{ äqu. } \bigvee^{\geq n}z(Z^0(z) \text{ u. } f(z)))$

TT_Z237 $\bigwedge f(W(\beta^{\leq n}(f)) \text{ äqu. } \bigvee^{\leq n}z(Z^0(z) \text{ u. } f(z)))$

TT_Z238 $\bigwedge f(W(\beta^{n}(f)) \text{ äqu. } \bigvee^{=n}z(Z^0(z) \text{ u. } f(z)))$

TT_Z239 $\bigwedge f \bigwedge g[Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } Z^{\langle o\rangle}(g) \text{ imp. } \alpha((f\wedge^{\langle o\rangle}g))=(\alpha(f)\wedge\alpha(g))]$

TT_Z240 $\bigwedge f(Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ imp. } \beta(f)=\neg\alpha(\neg^{\langle o\rangle}f))$

TT_Z241 $\bigwedge f \bigwedge g(Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ u. } Z^{\langle o\rangle}(g) \text{ imp. } \beta((f\vee^{\langle o\rangle}g))=(\beta(f)\vee\beta(g)))$

TT_Z242 $\bigwedge f(Z^{\langle o\rangle}(f) \text{ imp. } \beta(f)T\alpha(f))$

TT_Z243 Für alle x und f: $Z^1(x)$ u. $Z^{\langle o\rangle}(f)$ imp.
(a) $\alpha(\lambda o((f,o)\supset x))=(\beta(f)\supset x)$,
(b) $\beta(\lambda o((f,o)\supset x))=(\alpha(f)\supset x)$

TT_Z244 $\bigwedge f(QA^{\langle o\rangle}(f) \text{ imp. } QA(\alpha(f)))$

TT_Z245 $\bigwedge f(QA(\alpha(f)) \text{ imp. } \bigwedge z(Z^0(z) \text{ imp. } (f,z)=\alpha(f) \text{ o. } (f,z)=\underline{t}))$

(d) Das System TZ_n:

AT^n_Z0 - AT^n_Z9 AT_Z0 - AT_Z9

AT^n_Z10 $\bigwedge x(Z^n(x) \text{ imp. non } Z^m(x))$
(n, m verschiedene Kategorialindices aus o, 1,
$\langle o,o\rangle$, $\langle o,o,o\rangle$, ...)

AT^n_Z13 AT_Z13

AT^n_Z14 $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n \bigwedge f[Z^{\langle n\rangle}(f) \text{ u. } Z^0(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } Z^0(x_n) \text{ imp.}$
$Z^1((f,x_1,\ldots,x_n))]$
($\langle 1\rangle$: $\langle o\rangle$, $\langle 2\rangle$: $\langle o,o\rangle$, ...)

AT^n_Z15 $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n \bigwedge f(\text{ non } Z^{\langle n\rangle}(f) \text{ o. non } Z^0(x_1) \text{ o. } \ldots \text{ o.}$
$\text{non } Z^0(x_n) \text{ imp. } (f,x_1,\ldots,x_n)=\underline{k})$

AT^n_Z16 $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n[Z^0(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } Z^0(x_n) \text{ u. } Z^1(\Pi[x_1,\ldots,x_n])$
$\text{imp. } (\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n],x_1,\ldots,x_n)=\Pi[x_1,\ldots,x_n])$

AT^n_Z17 $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n(\text{non } Z^1(\Pi[x_1,\ldots,x])) \text{ imp.}$
$(\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n],x_1,\ldots,x_n)=\underline{k})$

AT^n_Z18 $\text{non } \bigvee x_1 \ldots \bigvee x_n(Z^0(x_1) \text{ u. } \ldots \text{ u. } Z^0(x) \text{ u. } Z^1(\Pi[x_1,\ldots,x_n])$
$\text{u. } \Pi[x_1,\ldots,x_n]\neq\underline{k}) \text{ imp. } Z^{\langle n\rangle}(\lambda o_1 \ldots o_n \Pi[o_1,\ldots,o_n])$

AT^n_Z19 $\bigwedge f \bigwedge g(Z^{\langle n\rangle}(f) \text{ u. } Z^{\langle n\rangle}(g) \text{ u. } \bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n((f,x_1,\ldots,x_n)=$
$(g,x_1,\ldots,x_n)) \text{ imp. } f=g)$

AT^n_Z20 $\bigwedge f[QA^{\langle n\rangle}(f) \text{ imp. non } \bigvee z_1 \ldots \bigvee z_n \bigvee x_1 \ldots \bigvee x_n(Z^0(z_1) \text{ u. } \ldots \text{ u.}$

$Z^0(z_n)$ u. $Z^0(x_1)$ u. ... u. $Z^0(x_n)$ u. $(f,z_1,\ldots,z_n)\neq\underline{t}$ u.
$(f,x_1,\ldots,x_n)\neq\underline{t}$ u. $(z_1\neq x_1$ o. ... o. $z_n\neq x_n))]$

AT^n_Z21 AT_Z21

DT^n_Z1 - DT^n_Z66 DT_Z1 - DT_Z66

DT^n_Z67 $\underline{id} := \lambda oo'\mathrm{U}y(o\neq o'$ u. $y=\underline{k})$

DT^n_Z68 (i) $\mathrm{Ref}_E(\varphi) := \Lambda z(Z^0(z)$ imp. $(\varphi,z,z)=\underline{t})$

(ii) $\mathrm{Irr}_E(\varphi) := Z^{\langle 2\rangle}(\varphi)$ u. $\Lambda x((\varphi,x,x)=\underline{k})$

(iii) $\mathrm{Tra}_E(\varphi) := Z^{\langle 2\rangle}(\varphi)$ u. $\Lambda x\Lambda y\Lambda z[(\varphi,x,z)T$
$((\varphi,x,y)\wedge(\varphi,y,z))]$

(iv) $\mathrm{Sym}_E(\varphi) := Z^{\langle 2\rangle}(\varphi)$ u. $\Lambda x\Lambda y((\varphi,x,y)T(\varphi,y,x))$

(v) $\mathrm{Kox}_E(\varphi) := \Lambda z\Lambda z'(Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ imp.
$((\varphi,z,z')\vee(\varphi,z',z))=\underline{t})$

(vi) $\mathrm{Lin}_E(\varphi) := \Lambda z\Lambda z'(Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ imp.
$((\varphi,z,z')\vee(\underline{id},z,z')\vee(\varphi,z',z))=\underline{t})$

DT^n_Z69 $\mathrm{Fun}^n_E(\varphi) := Z^{\langle n+1\rangle}(\varphi)$ u. $\Lambda z_1\ldots\Lambda z_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$
imp. $\mathrm{V}y(\Lambda x(x\neq y$ imp. $(\varphi,z_1,\ldots,z_n,x)=\underline{k})$ u.
$(\varphi,z_1,\ldots,z_n,y)=\underline{t}))$

DT^n_Z70 $\langle\tau_1,\ldots,\tau_n\rangle := i(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ $[:= \lambda o_1\ldots o_n\mathrm{U}y((o_1\neq\tau_1$ o. ...
o. $o_n\neq\tau_n)$ u. $y=\underline{k})]$

DT^n_Z71 $a^f(\varphi) := \mathrm{U}y\mathrm{V}z(f(z)$ u. $yT(\varphi,z))$

TT^n_Z1 - TT^n_Z245 TT_Z1 - TT_Z245

TT^n_Z246 ($\underline{a}$) $\Lambda z\Lambda z'(Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ imp. $((\underline{id},z,z')=\underline{t}$ äqu. $z=z'))$

($\underline{b}$) $\Lambda z\Lambda z'(Z^0(z)$ u. $Z^0(z')$ imp. $((\underline{id},z,z')=\underline{k}$ äqu. $z\neq z'))$

TT^n_Z247 $\Lambda z_1\ldots\Lambda z_n\Lambda x_1\ldots\Lambda x_n(Z^0(z_1)$ u. ... u. $Z^0(z_n)$ u.
$\langle z_1,\ldots,z_n\rangle=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ imp. $z_1=x_1$ u. ... u. $z_n=x_n)$

TT^n_Z248 $\Lambda f\Lambda g[W(a^g(f))$ äqu. $\Lambda z(g(z)$ imp. $f(z))]$

TT^n_Z249 $\Lambda f\Lambda g\Lambda z(g(z)$ imp. $(a^g(f)\wedge\neg(f,z))=\underline{k})$

TT^n_Z250 $\Lambda x\Lambda y(Z^1(x)$ u. $Z^1(y)$ imp. $(\neg(x\wedge\neg y)=\underline{t}$ äqu. $yTx))$

LITERATUR

Anscombe, G. E. M.; Geach, P. T.: *Three Philosophers*, Oxford 1967

Angelelli, I.: *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy*, Dordrecht 1967

Armstrong, D. M.: *Universals and Scientific Realism*, 2 Bände, Cambridge 1978

Barwise, J.; Perry, J.: *Situations and Attitudes*, Cambridge, Mass. 1983

Bealer, G.: *Quality and Concept*, Oxford 1982
– : "Foundations without Sets", *American Philosophical Quarterly* (1981), 18, S. 347 - S. 353

Beth, E. W.: *Mathematical Thought*, Dordrecht 1965

Borkowski, L.: *Formale Logik*, München 1977

Breitkopf, A.; Kutschera, F. v.: *Einführung in die moderne Logik*, München 1985

Burkhardt, H.: *Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz*, München 1980

Carnap, R.: *Meaning and Necessity*, Chicago 1967

Cartwright, R.: "Scattered Objects", in K. Lehrer (Hrsg.), *Analysis and Metaphysics*, Dordrecht 1975, S. 153 - S. 171

Chisholm, R. M.: "Mereological Essentialism", in *Person and Object*, London 1976, S. 145 - S. 158

Cresswell, M. J.; Hughes, G. E.: *An Introduction to Modal Logic*, London 1974

Dummett, M.: *Truth and other Enigmas*, London 1978

Ebbinghaus, H. D.; Flum, J.; Thomas, W.: *Einführung in die mathematische Logik*, Darmstadt 1978

Findlay, J. N.: *Meinong's Theory of Objects and Values*, Oxford 1963

Fine, K.: "Critical Review of Parsons' *Nonexistent Objects*", *Philosophical Studies* (1984), 45, S. 95 - S. 142

Frege, G.: *Die Grundlagen der Arithmetik*, hrsg. von C. Thiel, Hamburg 1986

– : *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 Bände, reprografischer Nachdruck, Darmstadt 1962
– : "Über Sinn und Bedeutung", in *Kleine Schriften*, hrsg. von I. Angelelli, Darmstadt 1967, S. 143 - S. 162
– : "Über Begriff und Gegenstand", in *Kleine Schriften*, S. 167 - S. 178
– : "Logische Untersuchungen I: Der Gedanke", in *Kleine Schriften*, S. 342 - S. 362
– : "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", in *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*, hrsg. von G. Gabriel, Hamburg 1971, S. 25 - S. 34

Goodman, N.: "A World of Individuals", in *Problems and Projects*, Indianapolis 1972, S. 155 - S. 172

Geach, P. T.: *Logic Matters*, Oxford 1972

Gracia, J. J.: *Introduction to the Problem of Individuation in the Early Middle Ages*, München 1980

Hochberg, H.: "Negation and Generality", in *Logic, Ontology, and Language. Essays on Truth and Reality*, München 1984, S. 296 - S. 312

Hodges, W.; Lewis, D.: "Finitude and Infinitude in the Atomic Calculus of Individuals", *Noûs* (1968), 2, S. 405 - S. 410

Kenny, A.: *Aquinas*, Oxford 1980

Kneale, William and Martha: *The Development of Logic*, Neuauflage, Oxford 1988

Küng, G.: *Ontologie und logistische Analyse der Sprache*, Wien 1963

Künne, W.: *Abstrakte Gegenstände*, Frankfurt a. Main 1983

Kutschera, F. v.: *Sprachphilosophie*, München 1975
– : *Einführung in die intensionale Semantik*, Berlin 1976
– : *Gottlob Frege*, Berlin 1989
– : *Vernunft und Glaube*, Berlin 1990
– : "Grundbegriffe der Metaphysik von Leibniz im Vergleich zu Begriffsbildungen der heutigen Modallogik", *Studia Leibnitiana* (1979), Sonderheft 8, S. 93 - S. 107

Lejewski, C.: "Zu Leśniewskis Ontologie", *Ratio* (1957/58), 2, S. 50 - S. 75

Lenzen, W.: "Zur extensionalen und 'intensionalen' Interpretation der Leibnizschen Logik", *Studia Leibnitiana* (1983), 15, S. 129 - S. 148
– : "Leibniz und die Boolesche Algebra", *Studia Leibnitiana* (1984), 16, S. 187 - S. 203

Literatur

Lewis, D.: *On the Plurality of Worlds*, Oxford 1986

– : "Counterpart Theory and Quantified Modal Logic", in *Philosophical Papers I*, Oxford 1983, S. 26 – S. 46

– : "New Work for a Theory of Universals", *Australasian Journal of Philosophy* (1983), 61, S. 343 – S. 377

Loux, M. J.: "The Existence of Universals", in M. J. Loux (Hrsg.), *Universals and Particulars: Readings in Ontology*, London 1976, S. 3 – S. 24

Mates, B.: *The Philosophy of Leibniz*, Oxford 1986

– : "Leibniz über mögliche Welten", in A. Heinekamp, F. Schupp (Hrsg.), *Leibniz' Logik und Metaphysik*, Darmstadt 1988, S. 311 – S. 341

Mulligan, K.; Simons, P.; Smith, B.: "Truth-Makers", *Philosophy and Phenomenological Research* (1984), 44, S. 287 – S. 321

Parsons, T.: *Nonexistent Objects*, New Haven 1980

Plantinga, A.: *The Nature of Necessity*, Oxford 1974

Quine, W. V.: *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass. 1964

– : "On what there is", in M. J. Loux (Hrsg.), *Universals and Particulars: Readings in Ontology*, London 1976, S. 33 – S. 43

Reinach, A.: "Zur Theorie des negativen Urteils", in *Münchener Philosophische Abhandlungen*, hrsg. von A. Pfänder, Leipzig 1911, S. 196 – S. 254

Rescher, N.: *A Theory of Possibility*, Oxford 1975

Russell, B.: "The Philosophy of Logical Atomism", in *The Philosophy of Logical Atomism and Other Essays: 1914 – 1919*, Bd. 8 von *The Collected Papers of Bertrand Russell*, hrsg. von J. G. Slater, London 1986, S. 160 – S. 244

Simons, P.: *Parts. A Study in Ontology*, Oxford 1987

– : "Number and Manifolds", in B. Smith (Hrsg.), *Parts and Moments*, München 1982, S. 160 – S. 198

– : "Plural Reference and Set Theory", in *Parts and Moments*, S. 199 – S. 260

Słupecki, J.: "Towards a Generalized Mereology of Leśniewski", *Studia Logica* (1958), 8, S. 131 – S. 154

Smart, J. J. C.: "Space-Time and Individuals", in *Logic and Art*, hrsg. von R. Rudner, I. Scheffler, Indianapolis 1972, S. 3 – S. 20

Smith, B.: "Introduction to Adolf Reinach 'On the Theory of the

Negative Judgment'", in B. Smith (Hrsg.), *Parts and Moments. Studies in Logic and Formal Ontology*, München 1982, S. 289 - S. 313

Spinoza, *Ethica*

Stegmüller, W.: *Glauben, Wissen und Erkennen. Das Universalienproblem einst und jetzt*, Darmstadt 1967

Stenius, E.: *Wittgensteins Traktat*, Frankfurt a. Main 1969

Tarski, A.: "On the Foundations of Boolean Algebra", in *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford 1956, S. 320 - S. 341

– : "Foundations of the Geometry of Solids", in *Logic, Semantics, Metamathematics*, S. 24 - S. 29

Thomas von Aquin: *Summa contra Gentiles*

– : *Summa Theologiae*

Weingartner, P.: "Extension/Intension" in *Handbuch wissenschaftstheoretischer Begriffe I*, hrsg. von J. Speck, Göttingen 1980, S. 217 - S. 222

Wittgenstein: *Tractatus logico-philosophicus*

Wright, G. H. v.: *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam 1951

Zemach, E.: "Four Ontologies", *The Journal of Philosophy* (1970), 67, S. 231 - S. 247