

Euler- und Pontrjagin-Wachstumspfade: ein Beispiel

Ulrich Karl Schittko

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Schittko, Ulrich Karl. 1971. "Euler- und Pontrjagin-Wachstumspfade: ein Beispiel."
Augsburg: Volkswirtschaftliches Institut, Universität Augsburg.

Nutzungsbedingungen / Terms of use:

licgercopyright

Dieses Dokument wird unter folgenden Bedingungen zur Verfügung gestellt: / This document is made available under these conditions:

Deutsches Urheberrecht

Weitere Informationen finden Sie unter: / For more information see:

<https://www.uni-augsburg.de/de/organisation/bibliothek/publizieren-zitieren-archivieren/publiz/>



DISKUSSIONSREIHE

der

UNIVERSITÄT AUGSBURG

Fachgruppe Volkswirtschaft

EULER- UND PONTRJAGIN-

WACHSTUMSPFADE:

Ein Beispiel

von

ULRICH K. SCHITTKO

Beitrag Nr. 2

Universität Augsburg
Memminger Str. 14
Im Januar 1971

In dieser Reihe werden in unregelmäßigen Abständen volkswirtschaftlich relevante Beiträge einem interessierten Kreis zugänglich gemacht und zur Diskussion gestellt.

Für kritische Einwände sind wir jederzeit dankbar.

**Die Fachgruppe Volkswirtschaft
der Universität Augsburg**

alle Rechte vorbehalten

Euler- und Pontrjagin-Wachstumspfade: Ein Beispiel*

Ulrich K. Schittko
Universität Augsburg

0. Vorbereitungen

Probleme optimaler Steuerung (Kontrollprobleme) entstehen bei einer Vielzahl ökonomischer Prozesse, deren Ergebnis durch die Wahl von Steuerungen (Entscheidungsvektoren oder Instrumentvariablen [Tinbergen]) beeinflusst werden kann. Um ein derartiges (deterministisches) Optimierungsproblem zu formulieren, brauchen wir folgende Informationen bzw. Daten ([1], S. 23 ff.) :

- 1) Die Gleichungen, welche die Veränderungen des wirtschaftlichen Systems beschreiben zusammen mit der Anfangsbedingung.
- 2) Die Angabe einer Menge von Endpunkten im Phasenraum, d.h. eine Menge von Endbedingungen für den Zustandsvektor.
- 3) Die Angabe der Klasse der zulässigen Steuerungen und
- 4) ein Nutzenfunktional, das die Effektivität der verschiedenen Steuerungen mißt.

Methoden zur Lösung von Optimierungsproblemen liefern die Variationsrechnung und darauf aufbauende mathematische Methoden, wie z.B. das auf L. S. Pontrjagin und seine Schüler [2] zurückgehende Maximumprinzip.

*Die vorliegende Arbeit wurde während des akademischen Jahres 1969/70 an der University of Minnesota, Minneapolis/USA abgeschlossen. Dieser Aufenthalt wurde durch die University of Minnesota, die Deutsche Forschungsgemeinschaft bzw. die Heinrich-Hertz-Stiftung des Landes Nordrhein-Westfalen ermöglicht. Der Verfasser hatte in Minneapolis die Gelegenheit, die Vorlesung von Professor E. Bruce Lee über "Advanced Control Topics" zu hören.

1. Heuristische Formulierung der Grundaufgabe

Unser Studienobjekt sei ein sich in der Zeit entwickelndes steuerbares wirtschaftliches System, dessen Zustand in jedem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$ durch einen Vektor $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ des n -dimensionalen Phasenraum $X (= \mathbb{R}^n)$ beschrieben wird.

Die Evolution des Systems wird in jedem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$ derart beschrieben, daß der Zustand $x(t)$ mit der Steuerung $v = (v^1, \dots, v^m)$ durch ein vektorielles Differentialgleichungssystem (das die Veränderung des Systemzustandes beschreibt)

$$(J^*) (1) \quad \dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \dots, x^n, v^1, \dots, v^m), i = 1, 2, \dots, n;$$

auch $\dot{x} = f(t, x, v)$ geschrieben ($\dot{x} := \frac{dx}{dt}$), wobei

$f(t, x, v)$ auf dem $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definiert ist und $0 < m \leq n$,

in Beziehung gesetzt wird, wobei diese Steuerung aus einem nichtleeren Steuerungsbereich $\Omega(t)$ gewählt werden kann, der im allgemeinen mit dem Zustand x und der Zeit t variiert, d.h.

$$(2) \quad v(t) \in \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m \quad (t \in [t_0, t_1]) .$$

In der ursprünglichen Darstellung des Maximumprinzips durch Pontrjagin [2] war Ω als konstant, d.h. als fest vorgegeben vorausgesetzt. Diese Annahme ist, wie sich gezeigt hat [3], nicht entscheidend, da die Theorie ohne Schwierigkeiten auf den Fall $\Omega = \Omega(t)$ ausgeweitet werden kann.

Zur Lösung von (J^*) sei der Anfangspunkt x_0 - ein bekannter Vektor im Zustandsraum - durch

$$(3) \quad x(t_0) = x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^n$$

angegeben, wobei $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ die Menge der zugelassenen Anfangspunkte bezeichne.

In einem wirtschaftlichen System beschreiben die Komponenten von $x(t)$ die augenblickliche Lage der Wirtschaft, z.B. durch die verschiedenen sektoralen Kapitalstöcke gemessen.

Auch sei eine sogenannte Zielmenge (bei Lee & Markus 'target set' genannt) $G(t) \subset \mathbb{R}^n$ für das Kontrollproblem vorgeschrieben, wobei schon jetzt erwähnt sei, daß in ökonomischen Anwendungen häufig $G(t_1) = \mathbb{R}^n$ gilt, d.h. keine Endbedingungen vorgeschrieben sind oder wie man auch sagt, der rechte Randpunkt frei bleibt.

Weiter muß die Wahl der Steuerungen $v(t) \in \Omega(t)$ auf eine Klasse Δ der zulässigen Steuerungen beschränkt werden, die z.B. aus den meßbaren Funktionen $v(t)$ in den verschiedenen Teilintervallen von $t_0 \leq t \leq t_1$ bestehen kann (die meßbaren Funktionen enthalten alle stetigen und stückweise stetigen Funktionen und auch die Limiten derartiger Funktionen), die x_0 in die Zielmenge überführen.

Eine meßbare Steuerung $v^*(t)$, für die eine Lösung $x^*(t)$ von (1) mit $v(t) = v^*(t)$ existiert, die x_0 nach $G(t_1)$ überführt heißt somit zulässig, d.h. $\Delta = \Delta(f, \Omega, x_0, G(t))$ ist die Klasse aller Steuermengen $v(t)$ auf den verschiedenen Teilintervallen von $[t_0, t_1]$ derart, daß ihre zugehörigen Trajektorien $x(t)$ folgende Beziehungen befriedigen:
 $x(t_0) = x_0, x(t_1) \in G(t_1)$.

Als quantitatives Kriterium zur Messung der Effizienz jeder Steuerung $v(t) \in \Delta$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$ haben wir ein Nutzenfunktional, das in folgender Form definiert ist

$$(4) \quad W(v) := \int_{t_0}^{t_1} f^0[t, x(t), v(t)] dt$$

und bezüglich v maximiert werden soll, wobei $f^0[t, x, v]$ eine gegebene, stetig differenzierbare Funktion auf dem $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist.

Unser Kontrollproblem besteht dann darin für den Kontrollprozeß $\{f, x_0, G, \Omega, \Delta, W\}$ eine zulässige Steuerung $v(t)$

und die zugehörige Trajektorie $x(t)$ des wirtschaftlichen Systems derart zu finden, daß die Bahn des Punktes x aus dem Anfangspunkt x_0 nach $x(t_1) \in G(t_1)$ so überführt wird, daß (4) maximal wird.

Eine Steuerung $v^*(t) \in \Delta$ heißt in Bezug auf $W(v)$ dann optimal, falls $W(v^*) \geq W(v)$ für alle $v(t) \in \Delta$ gilt.

Zur Lösung eines derartigen Kontrollproblems bieten sich mehrere mathematische Verfahren an; einmal die klassische Variationsrechnung und dann deren Weiterentwicklungen als deren Repräsentant das Pontrjaginsche Maximumprinzip ausgewählt werden soll.

Wir wollen beide Methoden in ihrer Aussagekraft bei der Lösung eines einfachen Wachstumsproblems vergleichen, und auch auf einige Ausführungen in der Literatur zur Einführung des Maximumprinzips im Wirtschaftswachstum [vgl. insbes. 4] eingehen.

Unser Optimierungsproblem muß aber bezüglich des betrachteten Kontrollprozesses $\{J, x_0, G, \Omega, \Delta, W\}$ noch hinreichend genau gestellt werden, denn es muß angegeben werden, welche Typen von Funktionen etc. für die Behandlung mit den zwei zur Diskussion stehenden mathematischen Verfahren zugelassen werden sollen. Es dreht sich als u. a. um sogenannte Regularitätsbedingungen.

2. Der Ansatz mit der Variationsrechnung

Gesucht ist das Maximum des Integrals (4) bei Erfüllung der Nebenbedingungen (1) und der Anfangs- und Endbedingung. Dieses Maximum von (4) wird 'Extremum unter Nebenbedingungen' genannt.

Hinsichtlich der Daten des Kontrollprozesses könnten wir nun spezifizieren, inwieweit sich der Ansatz mit der Variationsrechnung von dem Ansatz mit dem Maximumprinzip unterscheidet.^{†)}

^{†)} (Vgl. hierzu die Diskussion bei Fel'dbaum [5], insbesondere S. 74 - 76 und auch H. Reichardt, B. Schips, K. Britsch [6])

Zuerst sei aber unter diesem Gliederungspunkt festgestellt: Falls eine Lösung des Kontrollproblems existiert, dann muß sie unter den Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung gesucht werden.

Sei nun die Gleichung (1) auf folgende Form umgeschrieben

$$(1^+) \quad \psi[t, x, \dot{x}, v] = 0,$$

wobei wir annehmen müssen, daß (1) und (1⁺) voneinander unabhängig sind [vgl. [4], S. 48 Bemerkung 1 (nichtholonome Nebenbedingungen); ferner [5], S 61-76].

Führen wir nun Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 5) \quad \tilde{W}(v) &= \int_{t_0}^{t_1} [f^0 - \lambda \cdot \psi] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}^0[t, x, \dot{x}, v, \lambda] dt, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{f}^0 := f^0 - \lambda \cdot \psi$.

Sei nun $v^*(t)$ eine optimale Steuerung, welche $\tilde{W}(v)$ maximiert und $x^*(t)$ eine zugehörige optimale Trajektorie. Seien ferner die zulässigen Funktionen $x(t)$ und $v(t)$ derart beschaffen, daß

$$x(t_0) = x_0 := x_0^* \quad \text{und} \quad x(t_1) = x_1 := x^*(t_1), \quad \text{so daß}$$

folgende Variationen möglich sind

$$(6) \quad x(t) = x^*(t) + \varepsilon_1 \varphi_1(t)$$

$$(7) \quad v(t) = v^*(t) + \varepsilon_2 \varphi_2(t),$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ Skalare und $\varphi(t)$ als sogenannte Testfunktion mit $\varphi_1(t_0) = \varphi_1(t_1) = 0$, $i = 1, 2$, gegeben ist.

Wir erhalten dann für (5) nach Einsetzen von (6) und (7) eine Funktion von $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

$$(8) \quad \tilde{W}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}^0[t, x^*(t) + \varepsilon_1 \varphi_1(t), \dot{x}^*(t) + \varepsilon_1 \dot{\varphi}_1(t), v^*(t) + \varepsilon_2 \varphi_2(t), \lambda] dt.$$

Wir nehmen an, daß die auftretenden Funktionen $f^0, x, \dot{x}$, usw. zumindest zweimal stetig differenzierbar sind.

Die Taylorentwicklung von (8) ergibt dann (vgl. für den allgemeinen Fall einer Funktion $\tilde{W} \in C^2$, z.B. [7] S. 17)

$$(9) \quad \tilde{W}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \tilde{W}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} + \nabla \tilde{W}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} \cdot (\varepsilon_1, \varepsilon_2)' + \frac{1}{2} (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \tilde{W}(\theta \varepsilon_1, \theta \varepsilon_2) \cdot (\varepsilon_1, \varepsilon_2)',$$

wobei $\nabla \tilde{W}(0, 0) \cdot (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$ die erste Variation des Integrals $\tilde{W}$ genannt und mit $\delta \tilde{W}$ bezeichnet wird und $\tilde{h} \tilde{W}$ eine Hesse-Matrix ist.

Falls $v^*(t)$ und $x^*(t)$ optimal sind, dann muß gelten

$$(10) \quad \delta \tilde{W} \equiv 0.$$

Entwickeln wir den Ausdruck für $\delta \tilde{W}$ so erhalten wir aus der ersten Variation des Integrals $\tilde{W}$ ausgerechnet

$$(11) \quad \delta \tilde{W} = \varepsilon_1 \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial \tilde{f}^0}{\partial x^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{f}^0}{\partial \dot{x}^*} \right\} \varphi_1 dt \\ + \varepsilon_2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^0}{\partial v^*} \varphi_2 dt .$$

Als notwendige Bedingungen für die Optimalität erhalten wir dann folgende Gleichungen, die $x^*(t)$ und $v^*(t)$ befriedigen müssen.

$$(12) \quad (a) \quad \frac{\partial \tilde{f}^0}{\partial x^*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{f}^0}{\partial \dot{x}^*} = 0 \\ (b) \quad \frac{\partial \tilde{f}^0}{\partial v^*} = 0 .$$

Die Gleichungen (12,a) und (12,b) liefern notwendige Bedingungen für ein inneres Extremum, d.h. für innere Punkte in den Definitionsbereichen der betrachteten Funktionen.

Diese $n+m$ Gleichungen zusammen mit den n Gleichungen von $\mathcal{J}$ bestimmen $2n+m$ Extremalen $x(t)$, $\lambda(t)$ und $v(t)$ unter denen nach Berücksichtigung der Randbedingungen die Lösungskurve sich befindet, falls sie existiert.

Für den Fall, daß $\varphi_1(t_0)$ und $\varphi_1(t_1)$ nicht gleich Null sind (freie Anfangs- und Endpunkte), erhalten wir aus dem Ausdruck für $\delta \tilde{W}$ die sogenannte Transversalitätsbedingung (13), nämlich aus

$$\delta \tilde{W} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\tilde{f}_x^0 - \frac{d}{dt} \tilde{f}_{\dot{x}}^0 \right] \varphi_1(t) dt + \tilde{f}_{\dot{x}}^0 \varphi_1(t) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad \text{ergibt sich:}$$

$$(13) \quad \tilde{f}_{\dot{x}}^0 \Big|_{t=t_0} = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{f}_{\dot{x}}^0 \Big|_{t=t_1} = 0 .$$

3. Der Ansatz mit dem Maximumprinzip

Wir betrachten dazu unser "nichtautonomes" Kontrollproblem $\{X, x_0, G, \Omega, \Delta, W\}$. Unsere Aufgabe ist es nun (4) unter den Nebenbedingungen (1), (2), (3) und $x(t_1) \in G \subset \mathbb{R}^n$ zu maximieren.

Folgende Voraussetzungen sind dabei zu machen.

x und f sind wie vorher Vektoren im $\mathbb{R}^n$. v ist ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^m$, der vorerst der Einfachheit halber in einem nichtleeren, kompakten von t unabhängigen Steuerbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ variiert, d.h. der Steuerbereich wird als eine fest vorgegebene Menge vorausgesetzt. Wir nehmen weiter an, daß die Funktionen $f^i(t, x, v)$ zusammen mit den Funktionen

$$\frac{\partial f^i(t, x, v)}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f^i(t, x, v)}{\partial t} \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots, n \end{array}$$

reelle stetige Funktionen auf dem $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sind.

Für jedes $v(t) \in \Omega$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$ habe die Differentialgleichung (1) eine eindeutige stetige Lösung $x(t)$ auf einem Teilintervall von $[t_0, t_1]$ mit vorgeschriebenem Anfangspunkt $x(t_0) = x_0$. ([8], S. 43).

Die Zielmenge G sei unabhängig von t als $G = \mathbb{R}^n$ angenommen, d.h. wir haben ein Problem mit freiem rechten Endpunkt. ([1], Bemerkung 1, S. 315).

Zu guter Letzt sei vorausgesetzt, daß eine optimale Steuerung existiert (eine Bedingung die für unser ökonomisches Beispiel erfüllt sein wird). Es ist auch manchmal üblich, eine neue Zustandsvariable $x^0(t)$ derart einzuführen, daß wir die zu $v(t)$ auf $t \in [t_0, t_1]$ gehörende Trajektorie $x(t) = (x^i(t))$, $i=1, \dots, n$ zu einem $n+1$ -Vektor $x(t) = (x^k(t))$, $k=0, 1, \dots, n$ erweitern, wobei

$$(4') \quad x^0(t) := \int_0^t f^0(\tau, x(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad \text{gesetzt wird.}$$

Wir bekämen also

$$(14) \quad \dot{x}^0(t) = f^0(t, x(t), v(t)), \quad x^0(t_0) = 0.$$

Die Aufgabe bestünde nun darin, $x^0(t_1)$ unter Berücksichtigung der oben genannten Nebenbedingungen zu maximieren.

Das Maximumprinzip

Ein $(n+1)$ -Vektor $\hat{\eta}(t) = (\eta_k(t))$, $k = 0, 1, \dots, n$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$ wird eingeführt und adjungierte Funktion (adjungierter Vektor, Momentenvektor, Kozustandsvektor, Lagrangescher Multiplikator, Sensibilitätsparameter etc.) genannt, falls $\hat{\eta}(t)$ eine nicht verschwindende Lösung des Differentialgleichungssystems

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_k &= -\eta_0 \frac{\partial f^0(t, x, v)}{\partial x^k} - \dots - \eta_n \frac{\partial f^n(t, x, v)}{\partial x^k} \\ &= - \sum_{j=0}^n \eta_j \frac{\partial f^j(t, x, v)}{\partial x^k}, \quad j = 0, \dots, n \end{aligned}$$

ist.

Das Skalarprodukt der Vektoren $\hat{\eta}$ und $\hat{f} := \begin{pmatrix} f^0 \\ f \end{pmatrix}$ bezeichnen wir dann als Hamiltonfunktion.

$$(17) \quad \begin{aligned} H(t, \hat{\eta}, x, v) &:= \hat{\eta}' \hat{f}(t, x, v) \\ &= \eta_0 f^0(t, x, v) + \dots + \eta_n f^n(t, x, v) \end{aligned}$$

Für (1), (14) und (15) folgt dann auch

$$(17) \quad \dot{x}^k = \frac{\partial H}{\partial \eta_k} \quad \text{und} \quad \dot{\eta}_k = - \frac{\partial H}{\partial x^k} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ferner setzt man

$$(18) \quad M(t, \hat{\eta}, x) := \max_{v \in \Omega} H(t, \hat{\eta}, x, v)$$

falls M existiert, was nach unseren Voraussetzungen der Fall ist, denn H ist für jedes $t \in [t_0, t_1]$ bei beliebigen aber konstanten $\hat{\eta}$ und x eine stetige Funktion von v ist, wobei v in einem kompakten Bereich variiert.

Aus (15) erhalten wir ferner $\eta_0(t) = \text{konst.}$, da

$$\frac{\partial f^j(t, x, v)}{\partial x^0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \text{ist.}$$

Definition:

$v^*(t)$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$ heißt maximale Steuerung, falls eine adjungierte Funktion $\hat{\eta}^*(t)$ derart existiert, daß

$$1. \quad H(t, \hat{\eta}^*(t), x^*(t), v^*(t)) = M(t, \hat{\eta}^*(t), x^*(t)) \quad \text{für fast alle } t \in [t_0, t_1] \quad (19)$$

und

$$2. \quad \eta_0^*(t) = \text{const.} \geq 0 \quad (20)$$

und

3. die sogenannte Transversalitätsbedingung erfüllt ist.

Wir wollen nun den Satz, den das Maximumprinzip charakterisiert, angeben.

Satz (Maximumprinzip)

Betrachten wir das oben vorgestellte nicht autonome Kontrollproblem $\{\hat{f}, x_0, G, \Omega, \Delta, W\}$.

Sei $v^*(t)$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$ eine optimale Steuerung in Δ . Dann ist $v^*(t)$ eine maximale Steuerung.

Beweis: Vgl. ([1], S. 308 ff.) oder [2], Satz 7)

Wichtig bleibt zu guter Letzt um aus (19) eine maximale Steuerung zu gewinnen, daß wir $\hat{\eta}^*(t_0)$ erhalten. Von η_0^* abgesehen, liefert das Maximumprinzip aber keine Auskunft über diese Anfangswerte.

Die sogenannte Transversalitätsbedingung liefert uns jedoch ^{Auskunft} über $\eta^*(t_1)$. Somit können wir die restlichen Anfangswerte derart wählen, daß die Anfangswerte den durch die Transversalitätsbedingung vorgeschriebenen Endwerten entsprechen.

Satz (Transversalitätsbedingung):

Wenn die Zielbedingung $x(t_1) \in G \subset \mathbb{R}^n$ die Gestalt $x^i(t_1) = x_i^1$ für $i \in I$ (Indexmenge) hat und für die anderen Komponenten $i \in \bar{I}$ keine Bedingungen vorgeschrieben sind, so gilt

$$(21) \quad \eta_i^*(t_1) = 0 \quad \text{für } i \in \bar{I}.$$

Bemerkung:

Falls wie in unserem Falle $I = \emptyset$ folgt $\eta_0^* = +1$.

Beweis: (Vgl. [1], S.308 ff. oder [2]).

In dem von uns gewählten ökonomischen Beispiel werden wir sogar schließen können, daß eine maximale Steuerung immer optimal ist, denn nach Mangasarian (Vgl. O. L. Mangasarian [9]) liefert das Maximumprinzip auch eine hinreichende Bedingung, falls die zu maximierende Funktion konkav ist. (18) muß also eine konkave Funktion von x für gegebenes v, t sein. Dies gilt, falls $f^0(t, x, v)$ und $f^1(t, x, v)$ auch zusammen konkav in den Variablen x, v sind. (Vgl. O. L. Mangasarian [9], insbes. S. 144/145).

In der folgenden ökonomischen Anwendung werden wir es nur mit einem autonomen Kontrollprozeß zu tun bekommen. Dabei ist zu bemerken, daß bei einem in der Zeit veränderlichen Differentialgleichungssystem, das nach der Zeit stetig differenzierbar ist, dieses durch die Einführung einer neuen Zustandsvariablen $x^{n+1} = t$ auf einen autonomen Prozeß zurückführbar ist.

Im allgemeineren Fall eines Systems mit nur stückweise Stetigkeit in bezug auf t finden die Resultate von Lee & Markus und Pontrjagin keine Anwendung.

4. Ein ökonomisches Beispiel

Das Problem des optimalen Wachstums stellt sich für jede Volkswirtschaft.

Koopmans [10], Cass [11] und andere diskutierten dieses Problem vermöge des bekannten aggregierten neoklassischen Wachstumsmodells.

Dieses Modell soll in modifizierter Form auch Ausgangspunkt für unsere Betrachtung sein. Dazu fassen wir kurz die Modellannahmen zusammen.

4.1. Grundannahmen

Es gebe in der betrachteten Modellwirtschaft zwei homogene Produktionsfaktoren, Kapital (K) und Arbeit (L), die kombiniert ein einziges Produkt (Y) erzeugen, das sowohl für konsumtive als auch investive Zwecke verwendet werden kann.

Die technisch effizienten Produktionsmöglichkeiten seien in der Zeit nach der Maßgabe eines Harrod-neutralen technischen Fortschritts veränderlich und werden durch eine aggregierte Produktionsfunktion mit "neoklassischen" Eigenschaften zusammengefaßt.

Diese Reaktion hat dann nach Uzawa [12] folgende Form

$$(22) \quad \tilde{F}(K, L, t) = F[K, A(t) \cdot L] ,$$

wobei $A(t)$ einen Faktor darstellt, der die Effizienz der Arbeit mißt.

$F[K, A(t) \cdot L]$ habe insbesondere folgende Form

$$(23) \quad Y(t) = F[K(t), e^{\pi t} L(t)] , \quad \pi \geq 0 ;$$

wir setzen o.B.d.A. $L(0) = L_0 := 1$ und $A(0) = A_0 := 1$.

Die Konstante π sei die Rate des arbeitsvermehrenden technischen Fortschritts und $e^{\pi t} L(t)$ sei die in Effizienzeinheiten gemessene Arbeit.

Unsere Produktionsfunktion (22) sei linear homogen und für alle $K \geq 0, L > 0, A > 0$ definiert. Sie sei für $K \geq 0, A \cdot L > 0$ stetig und für positive K und $A \cdot L$ zweimal stetig differenzierbar. Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \text{für alle } A \cdot L > 0, K > 0$$

und $\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \text{für alle } L > 0, K > 0.$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad \text{für alle } A \cdot L > 0, K \geq 0$$

und (22) genüge ferner

$F(0, A \cdot L) = 0$, d.h. ohne Kapitaleinsatz sei kein Output produzierbar und

$F(K, 0) = 0$, d.h. ohne Arbeitseinsatz sei kein Output zu erstellen.

Wir erhalten somit, daß F streng quasi-konkav ist, d.h., für jedes $Y(t)$ ist die Menge $\text{der } (K(t), e^{\pi t} L(t))$ für die $F[K(t), e^{\pi t} L(t)] \geq Y(t)$ gilt, streng konkav.

Bezeichnen wir mit $k(t)$ das in Effizienzeinheiten der Arbeit gemessene Kapital, nämlich mit

$$k(t) := \frac{K(t)}{L(t)e^{\pi t}} \quad \text{und setzen wir voraus, daß die}$$

Arbeitsbevölkerung mit einer konstanten exponentiellen Rate $n > 0$ wachsend vorausgesetzt werden wird, dann

$$\text{bekommen wir } k(t) := \frac{K(t)}{L(0)e^{\xi t}}, \text{ wobei } \xi := n + \pi \text{ (die natürliche Wachstumsrate).}$$

Falls $L(0) := 1$ o.B.d.A. gesetzt wird, folgt $k(t) = K(t)e^{-\xi t}$.

Formulieren wir die Forderungen an die Produktionsfunktion in Effizienzeinheiten d.h. in $k(t)$, dann bekommen wir für (23)

(24)

$$\begin{aligned} y(t) &:= \frac{Y(t)}{e^{\pi t} L(t)} = F \left[\frac{K(t)}{L(0) e^{\xi t}}, 1 \right] \\ &= F [K(t) e^{-\xi t}, 1] = F [k(t), 1] \\ &:= f(k(t)) . \end{aligned}$$

als Maß der Produktivität der Effizienzeinheit.

Diese Funktion $f(k)$ ist definiert für $k \geq 0$ und es gilt $f(0) = 0$.

Da $f(k)$ für $k \geq 0$ stetig und für $k > 0$ zweimal stetig differenzierbar ist, bekommen wir weiter

$$(25) \quad a) \frac{\partial}{\partial K} \{e^{\xi t} f(k(t))\} = e^{\xi t} f'(k(t)) \frac{\partial k}{\partial K} = f'(k(t)) > 0,$$

$$b) \text{ und } \frac{\partial^2}{\partial K^2} \{e^{\xi t} f(k(t))\} = f''(k(t)) < 0, \text{ für } k(t) > 0 .$$

Aus der linearen Homogenität folgt bei positiven Arbeitsproduktivität, daß das Durchschnittsprodukt des Kapitals für $k \rightarrow \infty$ nach Null geht, d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} = 0. \quad ([13] \text{ vgl. Okamoto, T. und Inada, K.})$$

In unserer betrachteten geschlossenen Volkswirtschaft erhalten wir für die Verwendungsseite des Sozialprodukts $Y(t)$ auf Konsum $C(t)$ und Sparen $S(t)$.

$$(26) \quad Y(t) = C(t) + S(t) ,$$

wobei die angenommene Gleichheit von Sparen und Investieren folgende Beziehung zur Folge hat

$$(27) \quad K(t) = S(t) = Y(t) - C(t) ,$$

wobei der Gesamtkonsum sich als Produkt von Je-Kopf-Konsum und Gesamtbevölkerungszahl $P(t)$ vorstellen läßt.

Die Entwicklung der Gesamtbevölkerung und der Arbeitsbevölkerung sei exogen vorgegeben und durch

$$(28) \quad \begin{aligned} P(t) &= P(0) e^{nt} \\ L(t) &= L(0) e^{nt} , \text{ für beide } n > 0 \text{ und const.} \end{aligned}$$

beschrieben.

Diese Annahmen implizieren einen konstanten Anteil der Arbeitsbevölkerung an der Gesamtbevölkerung.

Mit der schon oben angegebenen Definition des in Effizienzeinheiten gemessenen Kapitals $k(t)$ erhalten wir dann für $\dot{K}(t)$

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{K}(t) &= \dot{k}(t)e^{\pi t}L(o)e^{nt+k(t)\pi}L(o)e^{nt+k(t)\pi}L(o)e^{nt}e^{\pi t} \\ &= \dot{k}(t)e^{\xi t} + \xi k(t)e^{\xi t}. \end{aligned}$$

Definieren wir ferner die Investitionsrate in Effizienzeinheiten mit

$$z(t) := \frac{\dot{K}(t)}{L(t)e^{\pi t}} = z(t) = \frac{\dot{K}(t)}{e^{\xi t}}, \text{ wobei wie oben angenommen}$$

$L(o) := 1$, dann erhalten wir

$$(30) \quad z(t) = \dot{k}(t) + \xi k(t)$$

Der Konsum ergibt sich dann als

$$(31) \quad \begin{aligned} c(t)P(t) &=: C(t) = F[K(t), e^{\pi t}L(t)] - K(t) \\ &= e^{\xi t}f[k(t)] - [\dot{k}(t) + \xi k(t)]e^{\xi t} \end{aligned}$$

$$(32) \quad \tilde{c}(t) := P(t)c(t)e^{-\xi t} = f[k(t)] - \dot{k}(t) - \xi k(t)$$

Die Art und Weise der Aufteilung des Produktes pro effektiver Arbeitseinheit auf Konsum und Investition soll im Hinblick auf ein noch ökonomisch zu spezifizierendes Nutzenfunktional der Gestalt (4) bestimmt werden.

Zu diesem Zwecke müssen wir auf dieses noch zu definierende Nutzenfunktional näher eingehen.

Dabei wird auch das Problem der Vorgabe des Zeithorizontes wesentlich. Die damit verbundenen Probleme sind immer noch kontrovers, doch erscheint es uns möglich, die damit verbundenen Fragen transparenter zu machen um anschließend leichter eine Entscheidung treffen zu können.

Eine Investitionspolitik ist eine simultane Wahl von gegenwärtigen und zukünftigen Investitionen, wobei die optimale Wahl in verschiedenen Zeitpunkten voneinander abhängt.

Zur Beurteilung der "Güte" dieser Investitionspolitik diene ein Nutzenfunktional. Da ein derartiges Urteil die Wohlfahrt einer Gesellschaft betreffe, die sich aus sehr vielen Mitgliedern zusammensetzen würde, erscheint es uns nicht verwunderlich, daß kein allgemein akzeptiertes Kriterium angegeben werden kann, das allen kritischen Einwänden standhielte. (Vgl. dazu auch die Diskussion in der sowjetökonomischen Literatur in A. Zaubermann [14]).

Es erhebt sich die Frage, ob bei der Spezifizierung des Nutzenfunktionals alle Generationen 'gleich' behandelt werden sollen, d.h. ob die künftigen Generationen allein auch der Tatsache eines stattgefundenen Bevölkerungswachstums bestraft werden sollen oder, ob jedes einzelne Wirtschaftssubjekt 'gleich' behandelt werden solle, d.h. das Wirtschaftssubjekt nicht dadurch bestraft wird, daß es zu einem späteren Zeitpunkt lebt in dem die Gesamtbevölkerung durch das Bevölkerungswachstum eine höhere Zahl aufweist.

Da wir das Bevölkerungswachstum als exogen vorgeben und somit nicht als steuerbar voraussetzen, müssen wir uns für die zweite Alternative entscheiden. (Zu einer gegenteiligen Ansicht vgl. Koopmans [10]).

Was wir hier vorschlagen können, ist eine analytisch zu behandelnde Form eines Nutzenfunktionals, das die von den Individuen aus dem Gesamtsystem abgeleitete Befriedigung widerspiegelt und unser Werturteil bezüglich der intertemporalen Verteilung deutlich macht.

Sei $U[c]$ eine individuelle Nutzenfunktion, die auf $0 < c < +\infty$ definiert ist und folgende Eigenschaften habe:

$$(33) \quad U[c] \quad \text{mit} \quad U'(c) > 0, \quad U''(c) < 0, \quad U'''(c) > 0 \\ \lim_{c \rightarrow 0} U'(c) = +\infty \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} U'(c) = 0$$

$$\text{und } \sigma := - \frac{c U''(c)}{U'(c)} .$$

mit $0 < \sigma < 1$, wobei $c := \frac{C}{P}$.

Ferner seien für unsere Betrachtungen nur iso-elastische Nutzenfunktionen vorausgesetzt, d.h. $\sigma = \text{const.}$

Da wir keine interpersonellen Verteilungsfragen betrachten wollen, müssen wir eine weitgehende Annahme machen um den Gesamtnutzen der Gesellschaft zum Zeitpunkt t durch einfache Aggregation zu erhalten.

Wir müssen annehmen, daß alle Individuen gleich sind und ferner die gesellschaftlichen Nutzenfunktionen derart beschaffen ist, daß die optimale Verteilung egalitär ist.

Dann erhalten wir auf einfache Art und Weise den Gesamtnutzen der Gesellschaft, der einem Je-Kopf-Konsum $c(t)$ im Zeitpunkt t zugerechnet wird durch

$$(34) \quad P(t) \cdot U[c(t)].$$

Führen wir einen puren Zeitdiskont $\rho > 0$ ein, dann erhalten wir für den Gesamtnutzen der Gesellschaft im Zeitpunkt t

$$(35) \quad e^{-\rho t} P(t) U[c(t)] = e^{-\rho t} P(0) e^{nt} U[c(t)] = P(0) e^{(n-\rho)t} U[c(t)].$$

Über einem unendlichen Zeithorizont hat nun unser Nutzenfunktional (4) die Gestalt

$$(36) \quad \int_0^{\infty} e^{-\rho t} P(t) U[c(t)] dt .$$

Der zukünftige Nutzen wurde dabei auf die Gegenwart mit einer konstanten Diskontrate $\rho > 0$ abgezinst.

Gegen dieses Vorgehen wurden zwar Einwände formuliert, doch sind diese, wie wir kurz andeuten werden, nicht sehr überzeugend.

Ein Einwand zielt einfach darauf ab, daß man die Zukunft überhaupt nicht abdiskontieren dürfe. Uns erscheint dies schwer verständlich, daß die offenbarten Präferenzen der Individuen im Zeitverlauf vernachlässigt werden sollen, wenn sie für die Bewertung der laufenden Güterströme zählen. Der andere Einwand zielt auf die Konstanz der Diskontrate ab.

Um aber ein analytisch zu behandelndes Funktional zu bekommen, das gleichzeitig ökonomischen Gehalt aufweist, müssen wir Additivität in der Zeit und Stationarität der Nutzenfunktionen fordern, so daß daraus die Konstanz der Diskontrate ableitbar ist.

Additivität des Nutzens heißt einfach, daß die Grenzrate der Substitution in zwei verschiedenen Zeitpunkten von ihrem Wert in anderen Zeitpunkten unabhängig ist. Dies erscheint uns in einer langfristigen Betrachtung nicht unrealistisch.

Stationarität heißt, daß der Nutzen der aus Gegenwart und Zukunft abgeleitet wird, ohne Rücksicht welchen Zeitpunkt man als Gegenwart festlegt, die gleiche Funktion des Gegenwarts- bzw. Zukunftskonsums bleibt. Die Konsumtion wird nach ihrer zeitlichen Entfernung vom Planungsdatum berechnet, ohne Rücksicht darauf, wie nun das Planungsdatum gesetzt wird.

Eine sehr wesentliche Variable, die Zeitperiode über die wir planen wollen, müssen wir noch diskutieren.

Akkumulationsprozesse für die Volkswirtschaft haben kein natürliches Ende in der definierbaren Zukunft. Jeder gegebene zukünftige Zustand wir selbst wieder Implikationen für die entferntere Zukunft haben. Würde man trotzdem über einen endlichen Zeithorizont planen und den rechten Endpunkt des Zustands frei lassen, bekäme man eine extrem schiefe Verteilung des Konsumstromes als optimale Entwicklung (Vgl. J. Tinbergen [15]).

Gibt man also keinen Endkapitalstock vor, dann würde es optimal sein, den bis zu einem bestimmten Zeitpunkt 'kurz vor

Ende' der Planperiode akkumulierten Kapitalstock in der 'letzten' Periode völlig zu konsumieren.

Postuliert man einen Endkapitalstock $k(T) = k_T$ ($T < \infty$) entscheidet man darüber, wieviel man in der Zeit nachher produzieren kann. Auch der Nutzen von $t > T$ hängt natürlich von dieser Größe $k(T) = k_T$ ab. Evident ist der Einfluß von k_T auf die Konsummöglichkeiten bis T und damit dem Nutzen bis T .

Somit gilt unsere Sorge gerade der Entwicklung die über den spezifizierten Horizont hinausgeht. Für den gesamtwirtschaftlichen Plan heißt das, daß jede Planung auf der Basis eines unendlichen Zeithorizonts unternommen werden muß, denn der Endkapitalstock kann nur dann optimal bestimmt werden, wenn der Nutzen über einen unendlichen Zeithorizont maximiert wird. Unter Akkumulationsprogramm geht also über einen unendlichen Zeithorizont mit freiem rechten Endpunkt, d.h. aus dem Optimierungsverfahren wird, bildlich gesprochen, derjenige Modellzustand bestimmt 'auf dem' wir optimal landen.

Falls man nun einen unendlichen Zeithorizont aus den dargelegten Gründen voraussetzen muß, entstehen zusätzliche Probleme, die einmal u.a. mit der Konvergenz des Nutzenintegrals zusammenhängen.

Ist die Konvergenzforderung nicht erfüllt, dann ist keine Abbildung aus dem Funktionenraum in die reellen Zahlen definiert. Falls das Integral konvergiert, haben wir eine vollständige Ordnung.

Abschließend bleibt für diesen Abschnitt zu sagen, daß wir in diesen Modellen zwar nie genau antizipieren können wie sich die Technik, die Präferenzen und die Arbeitsbevölkerung in der Zukunft entwickeln werden, wir aber durch die nachfolgende Behandlung einen beträchtlichen Einblick in die Dynamik der Volkswirtschaft gewinnen können, wenn wir vereinfachend annehmen, daß alle diese Faktoren mit Sicherheit vorausgesehen werden.

Dann könnte diese Art von Analyse als erste Annäherung dafür dienen, was wir von einer allgemeineren stochastischen Analyse erwarten können.

4.2. Das Ramseysche Divergenzproblem

Unser zugrundeliegendes Problem lautet nun:

$$\text{Maximiere} \quad \int_0^{\infty} e^{-\rho t} P(t) U[c(t)] dt, \quad \rho > 0 \quad (36)$$

unter Berücksichtigung von später noch genau anzugebenden Nebenbedingungen.

Für den Fall $\rho > n$, d.h. $n - \rho := \delta > 0$ ist das Integral (36) konvergent, denn $P(0) \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U[c(t)] dt$ konvergiert, so daß wir eine vollständige stetige Ordnung der Konsumpfade erreichen können.

Für den Fall $\delta = 0$ divergiert das Integral und wir haben das Ramseysche Problem in seiner ursprünglichen Form vorliegen.

Um dieses Problem auch dann zu lösen, müssen wir die Zielfunktion wie folgt transformieren

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & \int_0^{\infty} e^{-\rho t} P(t) \{u[c(t)] - \tilde{u}\} dt \\ & = P(0) \int_0^{\infty} \{u[c(t)] - \tilde{u}\} dt \quad \text{falls } \delta = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

etc., wobei $\tilde{u}$ die obere Grenze des Nutzens ist, die aufgrund von "capital glut" oder "product glut" angenommen wird.

Diese Konzepte beruhen auf der Vorstellung eines kapitalistischen Optimums, ein Begriff, der nach Allais [16] auf Wicksell und Meade zurückgeht und von mehreren Ökonomen gleichzeitig auf den Fall einer dynamischen Wirtschaft verallgemeinert wurde. (Vgl. E.S. Phelps [17]).

"Capital glut" bezieht sich auf den größten Nutzen, der ökonomisch erreichbar ist. D.h. weitere Kapitalakkumulation kann den Nutzen nicht mehr erhöhen.

"Product glut" beruht auf der Vorstellung, daß wirtschaftliche Gründe allein uns nie mehr als einen endlichen Nutzen stiften können und die Gesellschaft immer den größt vorstellbaren Nutzen erreichen möchte. (Vgl. F.P. Ramsey [18]).

Doch können wir das $\tilde{u}$, wie schon erwähnt wurde, auch derart bestimmen, daß es mit einer neoklassischen Technologie, Harrod-neutralem technischen Fortschritt, unbeschränkten Bedürfnissen und einer wachsenden Arbeitsbevölkerung konsistent ist. Auf das Überholkriterium von Weizäcker wollen wir hier nicht eingehen (Vgl. hierzu C.C. von Weizäcker [19]).

Der Ansatz mit der Variationsrechnung

Wir suchen ein Maximum von

$$(36) \quad [P(0)]^\sigma \int_0^\infty e^{-\gamma t} U[\tilde{c}(t)] dt = W(\tilde{c}), \quad \gamma > 0 \quad 1)$$

unter Erfüllung von

$$(38) \quad \dot{k} = f(k) - \xi k - \tilde{c}$$

$$(39) \quad k(0) = k_0$$

und

$$\text{der Steuerung } k \in \Omega := \{k : \dot{k} \in (-\xi k, f(k) - \xi k)\}. \quad (40)$$

Übersetzen wir nun unser Problem in unsere frühere Bezeichnungsweise aus Teil 2, dann sehen wir, daß

$$f^0(t, k, \dot{k}) = e^{-\gamma t} U[f(k) - [\dot{k} - \xi k]]$$

gilt. Ebenso $x = k$ und $v = \dot{k}$.

Falls wir, wie in diesem Spezialfall, $\dot{k}$ als Steuerung auffassen können, brauchen wir nicht eigens Lagrangesche Multiplikatoren einführen, sondern können sofort die Eulerschen Differentialgleichungen ermitteln (vgl. [20] K. Britsch und B. Schips). Eine notwendige Bedingung für ein 'inneres' Extremum ist, daß die gesuchte Extremale die Euler-Gleichung

$$(41) \quad \frac{\partial f^0}{\partial k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial \dot{k}} = 0$$

1) Vorausgesetzt haben wir hierbei, daß die zugrundeliegende Nutzfunktion so beschaffen ist, daß der Grenznutzen homogen vom Grade $-\sigma$ ist. Für die Ableitung von (36) verweisen wir auf den folgenden Abschnitt zum Maximumprinzip.

befriedigt.

Die einzelnen Terme sind nun

$$\frac{\partial f^0}{\partial k} = e^{-\gamma t} U'(\tilde{c}) (f'(k) - \xi)$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial k} = -e^{-\gamma t} U'(\tilde{c})$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial k} = \gamma e^{-\gamma t} U'(\tilde{c}) - e^{-\gamma t} U''(\tilde{c}) \dot{\tilde{c}}.$$

Somit erhalten wir für die Euler-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}} &= - \frac{U'(\tilde{c})}{U''(\tilde{c})} [f'(k) - \xi - \gamma] \\ (42) \quad &= - \frac{U'(\tilde{c})}{U''(\tilde{c})} [f'(k) - \theta] \quad , \quad \theta = \rho + \pi\sigma \\ &= - \frac{U'(\tilde{c})}{U''(\tilde{c})} [g'(k) - \gamma] \quad , \quad \gamma := \theta - \xi \end{aligned}$$

Von früher haben wir

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f(k) - \xi k - \tilde{c} . \\ (43) \quad &= g(k) - \tilde{c} , \\ \text{wobei } g(k) &:= f(k) - \xi k . \end{aligned}$$

Die Gleichungen (42) und (43) bilden nun ein vollständiges System, dessen Gleichgewichtslage sich als Lösung der folgenden Gleichungen

$$(44) \quad g(k) - \tilde{c} = 0 ,$$

$$(45) \quad - \frac{U'(\tilde{c})}{U''(\tilde{c})} (g'(k) - \gamma) = 0$$

darstellt.

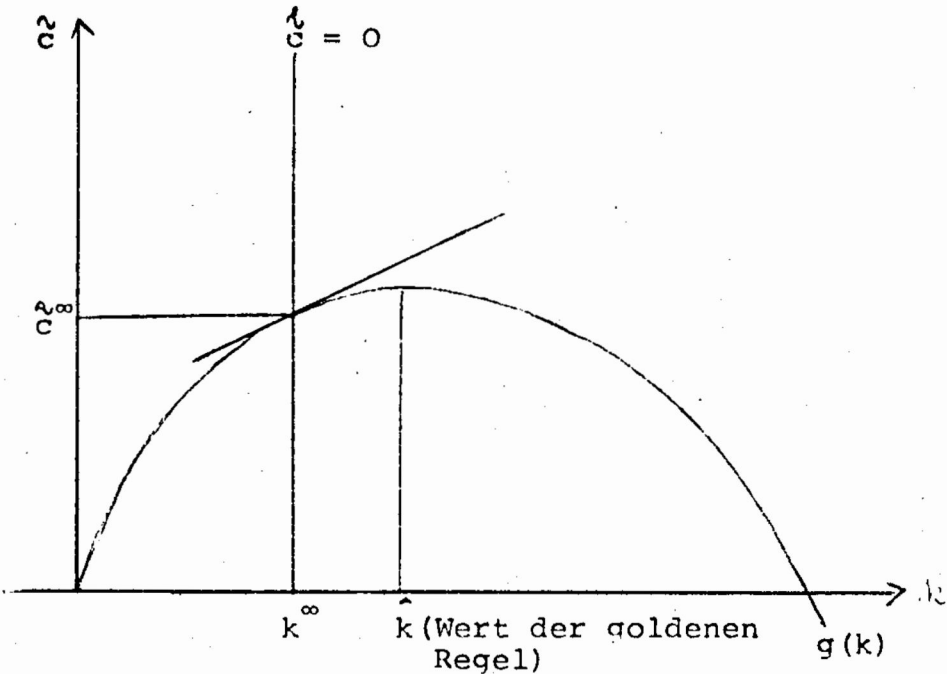
Die erste Gleichung definiert uns einen geometrischen Ort von Punkten $\tilde{c} = g(k)$. Die zweite Gleichung definiert uns eine Gerade $k = k^\infty$, wobei k^∞ durch $g'(k^\infty) = \gamma$ determiniert ist.

Der Schnittpunkt beider Kurven

$$g(k) - \tilde{c} = 0$$

$$k = k^{\infty},$$

der Punkt $(k^{\infty}, \tilde{c}^{\infty})$, stellt eine der gesuchten Gleichgewichtslösungen dar auf die wir uns, als die allein ökonomisch sinnvolle, beschränken.



Wir interessieren uns natürlich für die Stabilität der Gleichgewichtslösung mit den Koordinaten $(k^{\infty}, \tilde{c}^{\infty})$.

Wir untersuchen deshalb die Art der Bewegung eines repräsentativen Punktes in einer Umgebung dieses Gleichgewichtszustandes.

Zu diesem Zwecke führen wir neue Variable $(k^*, \tilde{c}^*)$ ein, welche die Abweichung des repräsentativen Punktes von Gleichgewichtspunkt charakterisieren, nämlich

$$(44) \quad k - k^{\infty} = k^*$$

$$(45) \quad \tilde{c} - \tilde{c}^{\infty} = \tilde{c}^*$$

Entwickeln wir die Funktionen

$$(43') \quad P(k, \tilde{c}) := g(k) - \tilde{c} \quad \text{und}$$

$$(42') \quad Q(k, \tilde{c}) := - \frac{U'(\tilde{c})}{U''(\tilde{c})} [g'(k) - \gamma]$$

in einer Umgebung von $(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$ in einer Taylorreihe in $k^*, \tilde{c}^*$, dann bekommen wir

$$(46) \quad P(k, \tilde{c}) = P(k^\infty, \tilde{c}^\infty) + P_k(k^\infty, \tilde{c}^\infty) k^* + P_{\tilde{c}}(k^\infty, \tilde{c}^\infty) \tilde{c}^* + P_1(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$$

und

$$(47) \quad Q(k, \tilde{c}) = Q(k^\infty, \tilde{c}^\infty) + Q_k(k^\infty, \tilde{c}^\infty) k^* + Q_{\tilde{c}}(k^\infty, \tilde{c}^\infty) \tilde{c}^* + Q_1(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$$

wobei $P(k^\infty, \tilde{c}^\infty) = 0 = Q(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$, da $k^\infty, \tilde{c}^\infty$ die Koordinaten des singulären Punktes sind und $P_1(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$ und $Q_1(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$ analytische Funktionen, die mindestens in zweiter Potenz auftreten.

Die vorstehenden Gleichungen nehmen dann folgende Formen an:

$$(48) \quad \dot{k}^* = P(k, \tilde{c}) = a_{11} k^* + a_{12} \tilde{c}^* + P_1(k^*, \tilde{c}^*)$$

$$(49) \quad \dot{\tilde{c}}^* = Q(k, \tilde{c}) = a_{21} k^* + a_{22} \tilde{c}^* + Q_1(k^*, \tilde{c}^*)$$

$$\text{wobei} \quad a_{11} = P_k(k^\infty, \tilde{c}^\infty) \quad a_{12} = P_{\tilde{c}}(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$$

$$a_{21} = Q_k(k^\infty, \tilde{c}^\infty) \quad a_{22} = Q_{\tilde{c}}(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$$

Wenn wir in den vorstehenden Gleichungen (48) und (49) die Funktionen $P_1(k^*, \tilde{c}^*)$ und $Q_1(k^*, \tilde{c}^*)$ vernachlässigen bekommen wir ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

$$(50) \quad \begin{bmatrix} \dot{k}^* \\ \dot{\tilde{c}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix}$$

Die Gleichungen dieses Systems bezeichnet man als Gleichungen der 'ersten' Annäherung. (Vgl. [21], S. 209 ff. und insbes. [22]), die wir dazu benutzen können, um die Art und die Stabilität des Gleichgewichtszustandes unseren nichtlinearen Systems (42) und (43) zu bestimmen.

Für unseren Fall ergibt dies konkret

$$(50') \quad \begin{bmatrix} \dot{k}^* \\ \dot{\tilde{c}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -1 \\ -\frac{U'(\tilde{c}^\infty)}{U''(\tilde{c}^\infty)} g''(k^\infty) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & -1 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix}$$

wobei $\mu := \frac{U'(\tilde{c}^\infty)}{U''(\tilde{c}^\infty)} g''(k^\infty)$ und $A := \begin{bmatrix} \gamma & -1 \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}$

Die charakteristische Gleichung des Differentialgleichungssystems (50') hat die Form

$$(51) \quad \begin{vmatrix} \gamma - \lambda & -1 \\ -\mu & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

und somit ergibt sich für das charakteristische Polynom

$$(52) \quad \lambda^2 - \gamma\lambda + \mu = 0$$

und für seine Nullstellen

$$(53) \quad \lambda_{1/2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\mu}}{2}.$$

$\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$, da aufgrund unserer Annahmen $\mu > 0$ und $\gamma > 0$ sind.

Daraus resultiert die sogenannte Sattelpunkt-Eigenschaft des Gleichgewichts $(k^\infty, \tilde{c}^\infty)$ auf die wir noch genauer eingehen haben.

Um die Phasenbahnen der Lösung von (50') zu diskutieren, ist es geeignet unser System (50') derart zu transformieren, daß die Analyse der Effekte von λ_1 und λ_2 auf die Art der Trajektorien vereinfacht wird und darüberhinaus dadurch die qualitativen (topologischen) Eigenschaften der Zustandsbeschreibung des Systems erhalten bleiben [Entkopplung der Differentialgleichungssysteme].

Dazu führen wir einen Eigenvektor b^i ($i = 1, 2$) von A ein, der folgenden Beziehung definitionsgemäß genügt

$$(54) \quad A b^i = \lambda_i b^i, \quad i = 1, 2.$$

Sind wie oben alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms voneinander verschieden, so können wir als Basis des Raumes von $\begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix}$ die Eigenvektoren b^1, b^2 der Abbildung A wählen.

Die Koordinaten des Vektors $\begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix}$ in Bezug auf diese Basis bezeichnen wir mit ζ_1, ζ_2 .

In Bezug auf diese Basis entspricht der Abbildung A eine Diagonalmatrix (Vgl. z.B. Halany [23] . S. 48).

Definieren wir aus diesem Grunde eine Transformation

$$(55) \quad \begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$

für unser System (50'). Bezeichnen wir mit

$$B := \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, |B| \neq 0; \quad \zeta := \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix};$$

dann sehen wir, daß $\dot{y} = B \dot{\zeta}$ und somit $Ay = B \dot{\zeta}$ und $AB\dot{\zeta} = B \dot{\zeta}$, d.h.

$$(56) \quad \dot{\zeta} = B^{-1} AB \dot{\zeta}$$

Wenn die Matrix B (B natürlich nicht singulär) so gewählt wurde, daß sie den oben angegebenen Eigenwerten von A entspricht, d.h. $B = [b^1, b^2]$, dann folgt

$B^{-1}AB = \Lambda$ (Λ Diagonalmatrix) und somit

$$(57) \quad \dot{\zeta} = \Lambda \dot{\zeta}$$

oder

$$(57') \quad \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \zeta_1 \\ \lambda_2 \zeta_2 \end{bmatrix}$$

Folglich haben wir als Lösung

$$(58) \quad \zeta_i = m_i e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2)$$

in der ζ -Ebene.

Wir erkennen daraus, daß wir einen Sattelpunkt vorliegen haben, denn

$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

In diesem Fall ist der stabile Ast des Sattels in der ζ_2 -Achse gelegen. Das Phasendiagramm ergibt dann folgendes Bild

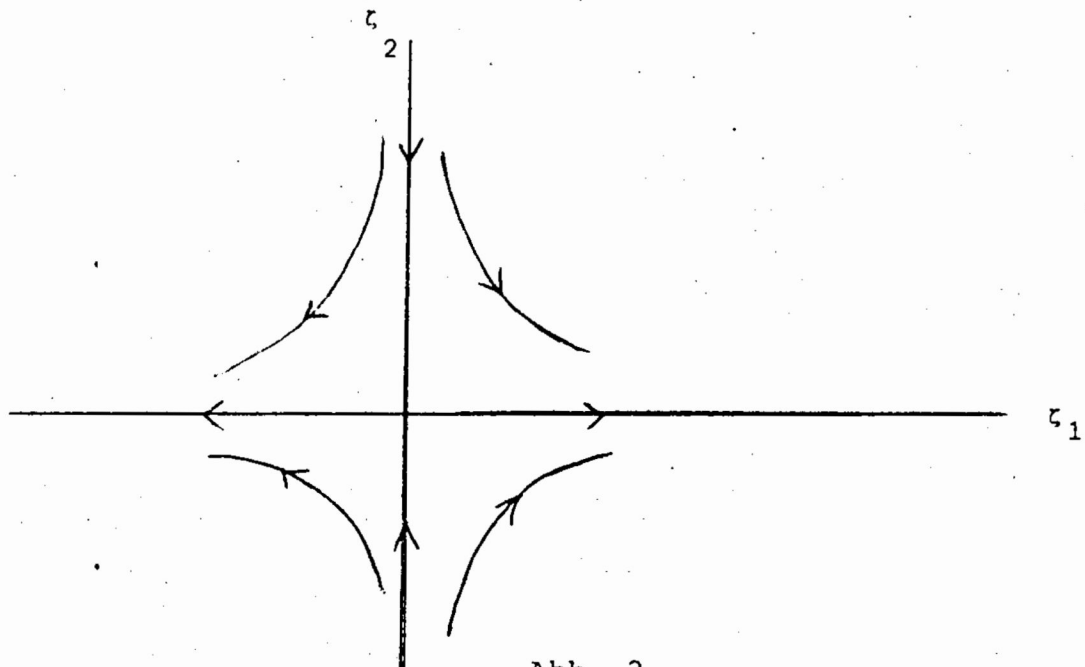


Abb. 2

wobei die Differentialgleichung für die Integralkurven wie folgt aussieht:

$$(59) \quad \frac{d\zeta_2}{d\zeta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\zeta_2}{\zeta_1} .$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{d\zeta_2}{\zeta_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} .$$

und

$$\log |\zeta_2| = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \log |\zeta_1| + \text{const.}$$

oder

$$(60) \quad \zeta_2 = M |\zeta_1|$$

$\zeta_1 = 0$ und $\zeta_2 = 0$ sind dann Integralkurven.

Gleichung (60) ist eine Gleichung von hyperbolischem Typ für welche die ζ_1 und ζ_2 -Achsen Asymptoten darstellen.

Setzen wir $y = B\zeta$ in (58) wieder ein, dann haben wir als allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (50') im $(k^*, \tilde{c}^*)$ -Raum

$$(61) \quad y = b^1 m_1 e^{\lambda_1 t} + b^2 m_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{oder } \begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix} = m_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} + m_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} .$$

Wir müssen nun die Orientierung der Halbachsen in der $k^*, \tilde{c}^*$ -Ebene ermitteln.

Da in unserer Matrix A $a_{12} \neq 0$ ist, können wir mit normalisierten Eigenvektoren arbeiten, d.h.

$$b^i = \begin{bmatrix} 1 \\ b_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad \text{setzen.}$$

Ein charakteristischer Vektor von A muß dann

$$(62) \quad [I\lambda - A] b = 0, \quad b \neq 0$$

befriedigen. Hingeschrieben erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} - a_{12} b \\ -a_{21} + (\lambda - a_{22}) b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oder

$$(63) \quad a_{11}(b)^2 + (a_{11} - a_{22})b - a_{21} = 0.$$

Somit erhalten wir

$$(64) \quad b = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}}{2a_{12}}$$

Vergleichen wir b mit λ , wobei λ von früher

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4[a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}]}}{2}$$

und aufgrund der speziellen Form von A

$$\begin{aligned} &= \frac{a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 + 4a_{21}a_{12}}}{2} \\ &= \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\mu}}{2} \end{aligned}$$

ist, und das zugehörige b für die untersuchte Matrix A entsprechend abgeändert gleich

$$b = \frac{-a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 + 4a_{21}a_{12}}}{2a_{12}} \quad (65)$$

ist, daß

$$(6) \quad b_i = \frac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}}, \quad i = 1, 2;$$

insbesondere ergibt das für unser System

$$(67) \quad b_i = -(\lambda_i - a_{11}) = \gamma - \lambda_i, \quad i = 1, 2;$$

Wir erhalten dann aus (65)

$$(68) \quad b = \frac{+\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\mu}}{2},$$

so daß schließlich gilt

$$(69) \quad \lambda_1 = b_2 > 0$$

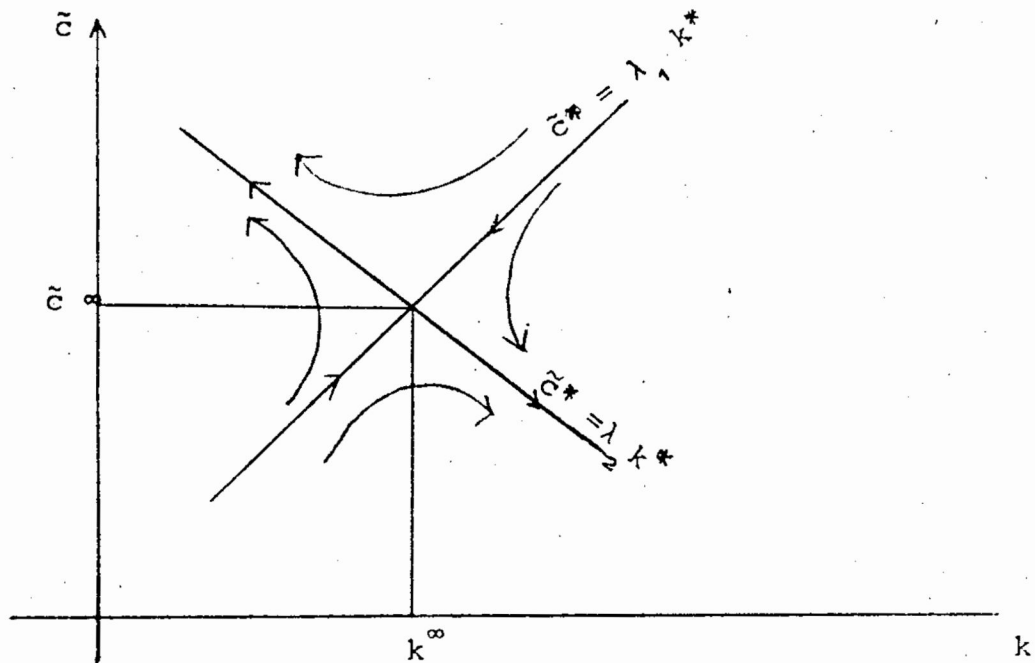
$$(70) \quad \lambda_2 = b_1 < 0.$$

Folglich haben die Äste des Sattelpunktes negative ($b_1 < 0$) und positive ($b_2 > 0$) Steigung.

Die Lösung unseres Systems erhalten wir somit als

$$(71) \begin{bmatrix} k^* \\ \tilde{c}^* \end{bmatrix} = m_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + m_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Zeichnung ist dann



Das Ergebnis unserer Untersuchung läßt sich dann im folgenden Satz formulieren:

Satz:

Sei unsere Modellwirtschaft vermöge der vorstehend gemachten Voraussetzungen gegeben.

Falls $\theta > \xi$, d.h. $\gamma > 0$, wird eine optimale Politik wie folgt beschrieben:

Es gibt für jeden beliebigen Anfangswert $k(0) = K(0)$ genau einen Wert $\tilde{c}(0)$ für den die Lösung des Differentialgleichungssystems (42) (43) mit den Anfangswerten $k(0), \tilde{c}(0)$ zu einem Grenzwert konvergiert, der überall einen positiven Kapitalstock beläßt.

Die Grenzwerte der Größen $k(t)$, $\tilde{c}(t)$ entlang dieser Lösung werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f'(k^\infty) &= 0 \Leftrightarrow g'(k^\infty) = \gamma \\ \tilde{c}^\infty &= f(k^\infty) - \xi k^\infty \Leftrightarrow g(k^\infty) = c^\infty \end{aligned}$$

definiert. Im asymptotischen Gleichgewicht wachsen K mit ξ und $\tilde{c}$ mit π .

Lösungsansatz mit dem Maximumprinzip ^{†)}

Unser Problem ist nochmals hingeschrieben:

Maximiere

$$(34) \quad \int_0^\infty e^{-\rho t} P(t) U[c(t)] dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{K} = F[K(t), e^{\pi t} L(t)] - P(t)c(t)$$

oder

$$(38) \quad \dot{k} = f(k) - \xi k - \tilde{c};$$

der Anfangsbedingung

$$(39) \quad k(0) = k_0$$

und

$$(72) \quad \tilde{c} \in \tilde{\Omega};$$

Dieser Steuerbereich $\tilde{\Omega}$ wird an geeigneter Stelle noch näher spezifiziert.

(36) kann bei unserer Annahme, daß $U'(c)$ homogen vom Grade $1 - \sigma$ mit $1 + \sigma > 0$ ist und der Definition $\tilde{c} := P(t) c e^{-\xi t}$ auf

$$\begin{aligned} (36) \quad \int_0^\infty e^{-\rho t} P(t) U[c(t)] dt &= \int_0^\infty e^{-\rho t} P(0) e^{nt} \frac{e^{\pi(1-\sigma)t} U(c(t))}{[P(0)]^{1-\sigma}} dt \\ &= \int_0^\infty [P(0)]^\sigma e^{-\rho t} e^{nt} e^{\pi(1-\sigma)t} U[\tilde{c}(t)] dt \end{aligned}$$

^{†)}

An dieser Stelle ist eine Bemerkung angebracht. Wir ver-

Fortsetzung der Fußnote:

wenden für unser ökonomisches Beispiel eine Formulierung des Maximumprinzips für den Fall eines Zielfunktional, das durch ein uneigentliches Integral gegeben ist.

Im Gegensatz zu Pontrjagin (Vgl. [2] , S. 183) und Lee/Markus (Vgl. [1]) verwenden wir eine Formulierung des Satzes mit freiem rechten Randpunkt. Leider liefert für diesen Fall, daß Analogon der Transversalitätsbedingung, nämlich $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) k(t) = 0$ keine notwendige Bedingung mehr.

Der Verfasser hatte an der University of Minnesota durch die Professoren J.S. Chipman und Thomas Muench die Gelegenheit ein Gegenbeispiel von Professor Hubert Halkin einzusehen, das dieser in einem persönlichen Brief Professor K. Arrow mitteilte.

Die obige Transversalitätsbedingung bleibt aber für unser Problem hinreichend, so daß unser Beispiel unter dieser Qualifikation zu betrachten ist.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} [P(0)]^{\sigma} e^{-[\rho+\pi\sigma-\xi]t} U[\tilde{c}(t)] dt \\
 &= [P(0)]^{\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} U[\tilde{c}(t)] dt
 \end{aligned}$$

umgeformt werden, wobei

$\theta := \rho + \pi\sigma$ (der asymptotische Zinssatz) und $\xi := n + \pi$ (die natürliche Wachstumsrate) und somit

$$\gamma := \theta - \xi.$$

(36) wird also in Bezug auf $\tilde{c}$ bei gegebenem k_0 und der Dynamik (38) und der Steuerung

$$(72) \quad \tilde{c} \in \tilde{\Omega} := \{\tilde{c} : \tilde{c} \in [0, f(k)]\}$$

maximiert.

Wir hätten für (72) gleichwohl andere Steuerbereiche wählen können, denn der Output in Effizienzeinheiten teilt sich in Konsum und Investition auf. Da der Output und die Konsumtion nicht negativ sein können, haben wir auch eine obere Schranke für die Investition.

Also können wir folgende Steuerbereiche als völlig gleichberechtigt nebeneinander wählen:

$$(73) \quad z(t) \in \Omega_1 := \{z(t) : z(t) \in [0, f(k)]\}$$

oder

$$(74) \quad s(t) \in \tilde{\Omega}_1 = \{s(t) := \frac{z(t)}{f(k(t))} : s(t) \in [0, 1]\}$$

oder

$$(75) \quad \dot{k}(t) \in \Omega_2 = \{\dot{k}(t) : \dot{k}(t) \in [-\xi k, g(k)]\}$$

Wir wollen uns aber für den Steuerbereich $\tilde{\Omega}$ entscheiden und unsere Analyse vermöge des Steuerparameters $\tilde{c}$ durchführen und nur bemerken, daß jede Analyse mit den oben angegebenen restlichen Steuerungsmöglichkeiten zum genau gleichen Ergebnis führen muß.

Die für unser Beispiel zu konstruierende Hamiltonfunktion ist dann

$$(76) \quad H(t, \eta_0, \eta_1, k, v) = \eta_0 f^0(t, k, v) + \eta_1 f^1(t, k, v)$$

wobei gegenüber der früheren Bezeichnungsweise aus Teil 1

$$x = x^1 = k \quad \text{und} \quad v = \tilde{c}$$

gelten.

Insbesondere heißt das

$$(77) \quad H(t, \eta_0, \eta_1, k, \tilde{c}) = \eta_0 e^{-\gamma t} U[\tilde{c}] + \eta_1 [f(k) - \xi k - \tilde{c}]$$

Die entsprechende adjungierte Variationsgleichung ist dann (die Argumente weglassen)

$$(78) \quad \dot{\eta}_1 = -\eta_0 \frac{\partial f^0}{\partial k} - \eta_1 \frac{\partial f^1}{\partial k}$$

Dies ergibt dann

$$(79) \quad \dot{\eta}_1 = 0 - \eta_1 (f'(k) - \xi).$$

Eine notwendige Bedingung für $\tilde{c}$ (36) zu maximieren, ist die Existenz von stetigen nicht verschwindenden Funktionen $(\eta_0(t), \eta_1(t)) \neq (0, 0)$, welche

$$(80) \quad \eta_0(t) \geq 0 \quad \text{und}$$

$$(81) \quad \dot{\eta}_1(t) = -[f'(k) - \xi] \eta_1(t)$$

derart befriedigen, daß (77) in Bezug auf $\tilde{c}$ in jedem Zeitpunkt t maximal ist, wobei $\tilde{c}(t) \in \tilde{\Omega}(t)$.

Das $\tilde{c}$ das H in jedem Zeitpunkt t maximiert, hängt von η_0, η_1 und k ab.

Definieren wir zur Vereinfachung

$$(82) \quad \eta_1 := p e^{-\gamma t},$$

dann bekommen wir

$$\dot{\eta}_1 = \dot{p} e^{-\gamma t} - p \gamma e^{-\gamma t}$$

und somit in (81) eingesetzt

$$\dot{p}(t) = p(t)\gamma - p(t)[f'(k) - \xi]$$

$$(83) \quad \dot{p}(t) = - [f'(k) - \theta] p(t)$$

oder

$$(84) \quad \dot{p}(t) = - [g'(k) - \gamma] p(t)$$

Entsprechend erhalten wir dann für die Hamiltonfunktion

$$(85) \quad \mathcal{H}(t, n_0, p, k, \tilde{c}) = e^{\gamma t} H = n_0 U[\tilde{c}] + p(t) [f(k) - \xi k - \tilde{c}]$$

Bis zum Augenblick haben wir u.a. zwei Differentialgleichungen in k und p , nämlich

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = k = f(k) - \xi k - \tilde{c} \quad (86a)$$

und

$$(83) \quad \dot{p} = - [f'(k) - \theta] p$$

bzw.

$$(84) \quad \dot{p} = - [g'(k) - \gamma] p$$

Wir verwenden nun das Maximumprinzip um $\tilde{c}$ als Funktion von p und k auszudrücken. Dies ist dann möglich, wenn es ein eindeutiges $\tilde{c} \in \tilde{\Omega}$ gibt, das $\mathcal{H}(t, p, k, \tilde{c})$ für gegebenes t, p, k maximiert.

Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß $\mathcal{H}$ eine konkave in keinem offenen Intervall konstante Funktion von $\tilde{c}$ für alle t, p, k -Werte ist. [Vgl. [1] zum "feedback-controller" und [24], S. 149 ff.]

Falls wir dieses $\tilde{c}(t, p, k)$ in (84), (86) einsetzen, erhalten wir ein geschlossenes Differentialgleichungssystem in k und p .

Unsere Hamiltonfunktion erfüllt die oben angegebenen Voraussetzungen, denn $n_0 U'[\tilde{c}]$ ist in $\tilde{c}$ konkav und der zweite Term in $\tilde{c}$ linear, falls wir voraussetzen, daß $p \neq 0$.

Aus (85) erhalten wir

$$(86 \text{ b}) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{c}} = \eta_0 U'(\tilde{c}) - p .$$

Falls $p > \eta_0 U'(0)$, dann impliziert die Konkavität von $U(\tilde{c})$ für jedes $\tilde{c} \geq 0$, daß $U'(\tilde{c}) \leq U'(0)$

und folgendes gilt

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{c}} = \eta_0 U'(\tilde{c}) - p \leq \eta_0 U'(0) - p < 0$$

und $\mathcal{H}$ ist maximal, falls $\tilde{c} = 0$.

Falls andererseits $p < \eta_0 U'(f(k))$, folgt aus der Konkavität von U für jedes $\tilde{c} \leq f(k)$, daß $U'(\tilde{c}) \geq U'(f(k))$ und somit

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{c}} = \eta_0 U'(\tilde{c}) - p \geq \eta_0 U'(f(k)) - p > 0$$

und $\mathcal{H}$ maximal, falls $\tilde{c} = f(k)$.

Übrig bleibt der Fall

$\eta_0 U'(f(k)) \leq p \leq \eta_0 U'(0)$. Das optimale $\tilde{c}$ bestimmt sich hier aus der Lösung der Gleichung

$$(87) \quad \eta_0 U'(\tilde{c}) = p .$$

Falls $\eta_0 = 0$ hat dies $p = 0$ zur Folge und somit $\eta_1 = 0$ im Widerspruch zur Forderung $(\eta_0(t), \eta_1(t)) \neq (0, 0)$ durch das Maximumprinzip.

Somit haben wir die mittlere Möglichkeit nur für $\eta_0 > 0$, so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\eta_0 \equiv 1$ setzen können.

Dann folgt wegen $U''(\tilde{c}) < 0$, daß auch $\eta_0 U'(\tilde{c})$ fällt und somit die Inverse $(\eta_0 U'(\tilde{c}))^{-1}$ existiert, die wir als

$$(88) \quad \tilde{c} = (\eta_0 U'(\tilde{c}))^{-1}(p)$$

schreiben können.

Für unser autonomes System ergeben sich also folgende Steuerungsmöglichkeiten:

$$(89) \quad \tilde{c}(p,k) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \eta_0 U'(0) < p \\ (\eta_0 U'(\tilde{c}))^{-1}(p) & , \text{ falls } p \in [\eta_0 U'(f(k)), \eta_0 U'(0)] \\ f(k) & , \text{ falls } \eta_0 U'(f(k)) > p . \end{cases}$$

Im mittleren Fall folgt $\eta_0 U'(\tilde{c}(p,k)) = p$ und $\tilde{c} \in [0, f(k)]$.

Gehen wir nun wieder über zur Analyse unseres Differentialgleichungssystems und verfolgen wir unser Hauptziel ein 'Phasen-Portrait' der Gesamtheit der Pfade des Systems in der p,k - Ebene zu erhalten.

Unsere Behauptung ist hier wiederum, daß die Gleichgewichtslage (p^∞, k^∞) die Sattelpunkt-Eigenschaft besitzt.

Ausgangspunkte sind die Gleichungen (84) und (86)^a, d.h.

$$(86a) \quad \dot{k} = f(k) - \xi k - \tilde{c}(p,k) =: P(k,p) = g(k) - \tilde{c}(p,k)$$

und

$$(84) \quad \dot{p} = - [f'(k) - \theta] p =: Q(k,p) = [g'(k) - \gamma] p$$

Es folgt aus $\dot{p} = [\theta - f'(k)] p$, daß $\dot{p} = 0$, falls $k = k^\infty$, wobei k^∞ durch die Bedingung $f'(k^\infty) = \theta$ festgelegt ist.

Falls $k < k^\infty \Rightarrow f'(k) > f'(k^\infty) = \theta$ und $\dot{p} < 0$, d.h. p hat zu p entgegengesetztes Vorzeichen.

Falls $k > k^\infty \Rightarrow f'(k) < f'(k^\infty) = \theta$ und $\dot{p} > 0$.

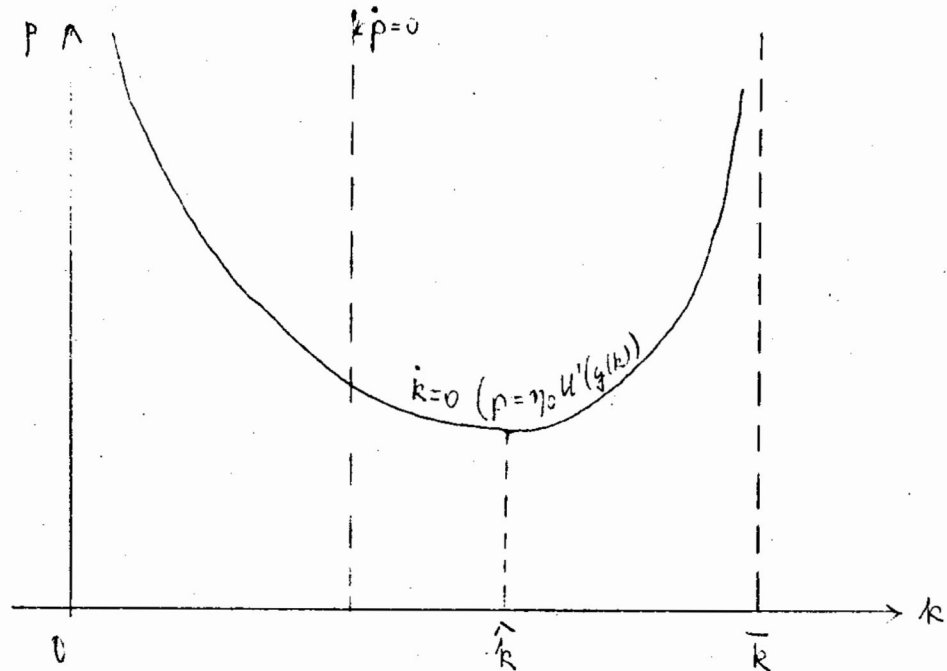
Aus $\dot{k} = f(k) - \xi k - \tilde{c}(p,k)$ erhalten wir den geometrischen Ort für $\dot{k} = 0$, falls wir $g(k) := f(k) - \xi k$ in Bezug auf $\tilde{c}(p,k)$ näher betrachten.

Wir suchen also diejenigen (p,k) -Kombinationen, für die $g(k) - \tilde{c}(p,k) = 0$ gilt

$g(k)$ hat in $\hat{k}$, dem Punkt der 'goldenen Regel' sein Maximum.

Für $0 < k < \bar{k}$ gilt, daß $0 < g(k) < f(k)$, so daß die Gleichung $g(k) = \tilde{c}(p, k)$ nur durch $g(k) = (\eta_0 U'(\tilde{c}))^{-1}(p)$ befriedigt wird. Folglich gilt $\eta_0 U'(g(k)) = p$.

Somit haben wir folgende Kurve die zur p-Achse



und zur $k = \bar{k}$ Linie asymptotisch verläuft,

denn:

falls $k = 0$, dann wird die Gleichung

$g(0) - \tilde{c}(p, 0) = 0$ durch diejenigen p befriedigt, für die gilt $\tilde{c}(p, 0) = 0$.

Da $U'(\tilde{c})$ konstante Elastizität hat, muß $U'(0) = \infty$ sein, so daß $\tilde{c}(p, 0) = 0$ nur für $p = \infty$ gilt.

Falls $k = \bar{k}$ dann wird die Gleichung

$$g(\bar{k}) - \tilde{c}(p, \bar{k}) = 0, \text{ wobei } g(\bar{k}) = 0$$

durch alle p befriedigt für die $\tilde{c}(p, \bar{k}) = 0$.

$f(\bar{k}) \neq 0$ und $(\eta_0 U')^{-1}(p) = 0$ nur für $\eta_0 U'(0) = p$ und somit wird $\tilde{c}(p, \bar{k}) = 0$ nur von denjenigen p befriedigt für die gilt $p \geq \eta_0 U'(0)$. Da aber $U'(0) = \infty$ vorausgesetzt haben wir eine Asymptote zu der zur p-Achse Parallelen $k = \bar{k}$.

Ferner erkennt man sofort, daß für $p > \eta_0 U'(g(k))$ im Intervall $k \in (0, \bar{k})$, daß $\tilde{c}(p, k) = (\eta_0 U')^{-1}(p) < g(k)$ und somit $\dot{k} > 0$. Falls $p < \eta_0 U'(g(k))$, folgt $\dot{k} < 0$.

Zur weiteren Untersuchung definieren wir

$$k^* := k - k^\infty$$

$$p^* := p - p^\infty$$

und entwickeln nun (k^∞, p^∞) in einer Taylorreihe.

Wir erhalten dann für (86) und (84) entsprechend

$$\dot{k}^* = P(k, p) - P(k^\infty, p^\infty) = P_k(k^\infty, p^\infty)k^* + P_p(k^\infty, p^\infty)p^* + P_1(k^*, p^*)$$

$$\dot{p}^* = Q(k, p) - Q(k^\infty, p^\infty) = Q_k(k^\infty, p^\infty)k^* + Q_p(k^\infty, p^\infty)p^* + Q_1(k^*, p^*)$$

wobei $P(k^\infty, p^\infty) = 0 = Q(k^\infty, p^\infty)$, da k^∞, p^∞ die Koordinaten des Gleichgewichts. Falls wir die Funktionen $P_1(k^*, p^*)$ und $Q_1(k^*, p^*)$ vernachlässigen, bekommen wir ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, d.h.

$$(90) \quad \begin{bmatrix} \dot{k}^* \\ \dot{p}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'(k^\infty) - \tilde{c}_k(k^\infty, p^\infty) & -\tilde{c}_p(k^\infty, p^\infty) \\ -p^\infty g''(k^\infty) & -[q'(k^\infty) - \gamma] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^* \\ p^* \end{bmatrix}$$

Wir sehen, daß $g'(k^\infty) = \gamma$, so können wir schreiben

$$(91) \quad \begin{bmatrix} \dot{k}^* \\ \dot{p}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma - \tilde{c}_k(k^\infty, p^\infty) & -\tilde{c}_p(k^\infty, p^\infty) \\ -p^\infty g''(k^\infty) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^* \\ p^* \end{bmatrix}$$

Da in unserem Fall $\tilde{c}(p, k)$ durch $\eta_0 U'(c) - p = 0$ für $\eta_0 f'(k) \leq p \leq \eta_0 U'(0)$ definiert ist, sehen wir, daß $\tilde{c}_k(p, k) = 0$ und

$$\tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty) = -\frac{G_p}{G_c} = +\frac{1}{\eta_0 U''(c^\infty)} < 0$$

wobei $G(p, c)$ die implizite Funktion $\eta_0 U'(c) - p = 0$ ist und $c^\infty = g(k^\infty)$.

Dann bekommen wir schließlich

$$(92) \quad \begin{bmatrix} \dot{k}^* \\ \dot{p}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{1}{\eta_0 U''(c^\infty)} \\ -p^\infty g''(k^\infty) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^* \\ p^* \end{bmatrix}$$

Als charakteristisches Polynom ermitteln wir

$$(93) \quad \lambda^2 - \gamma \lambda - \frac{p^\infty g''(k^\infty)}{\eta_0 U''(c^\infty)} = 0$$

und

$$(94) \quad \lambda = \frac{1}{2} (\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4p^\infty g''(k^\infty) \tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty)})$$

Da $p^\infty > 0$, $g''(k^\infty) < 0$, $\tilde{c}_p(k^\infty, p^\infty) < 0$ ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv und

$$\sqrt{\gamma^2 + 4p^\infty g''(k^\infty) \tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty)} > \gamma$$

Somit sind die Wurzeln λ_1, λ_2 reell mit

$$(95) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} (\gamma + \sqrt{\dots}) > 0,$$

und

$$(96) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (\gamma - \sqrt{\dots}) < 0.$$

Wir können somit schließen, daß wir einen Sattelpunkt vorliegen haben. (Vgl. [21])

Wiederum ist es möglich durch eine geeignete Transformation unser System in der ζ -Ebene zu diskutieren, wobei wir sehen, daß die instabile Art in den Sattelpunkten der ζ_1 -Achse, die stabile in der ζ_2 -Achse liegt. Zur Überprüfung der Orientierung der Halbachsen in der k^*, p^* Ebene bei Verwendung von normalisierten Eigenvektoren

denn:
 $(-\frac{1}{\eta_0 U''(c^\infty)} \neq 0)$ folgt

$$(97) \quad \begin{bmatrix} k^* \\ p^* \end{bmatrix} = B \zeta \quad \text{wobei} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 - \gamma & \lambda_2 - \gamma \\ -\tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty) & -\tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty) \end{bmatrix}$$

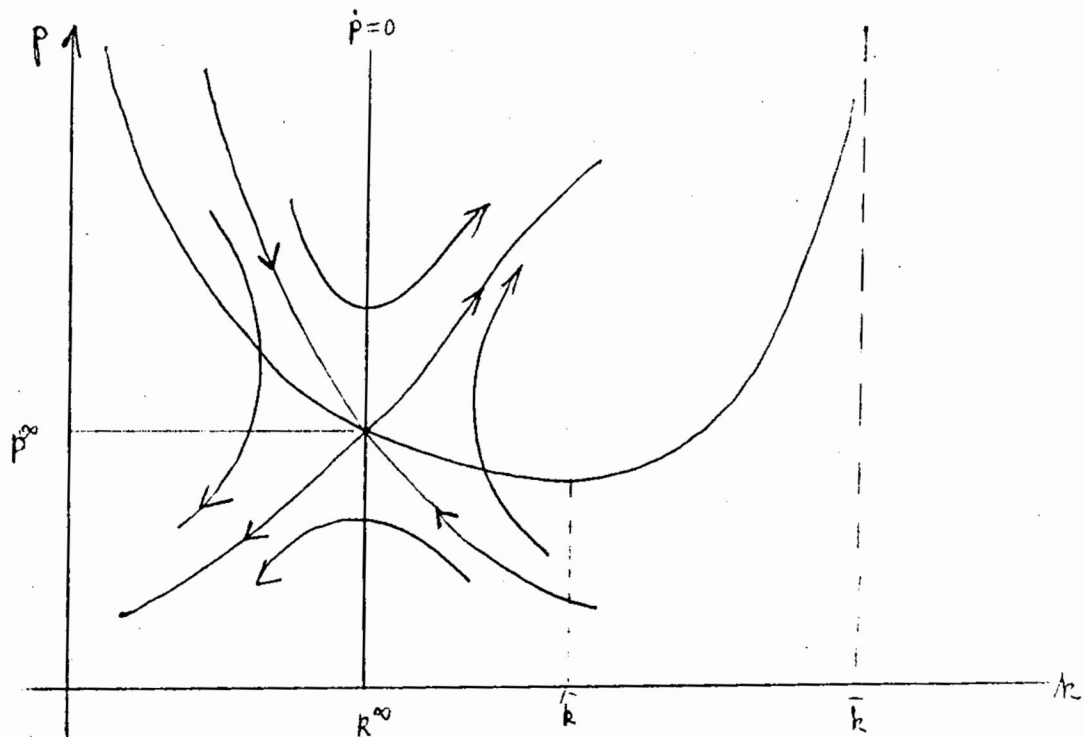
und

$$b_1 = \frac{\lambda_1 - \gamma}{-\tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty)} = \frac{-\lambda_2}{-\tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty)} > 0$$

$$b_2 = \frac{\lambda_2 - \gamma}{-\tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty)} = \frac{\lambda_1}{\tilde{c}_p(p^\infty, k^\infty)} < 0$$

Daraus folgt, daß der stabile Ast negative Steigung hat.

Zur Verdeutlichung sei das folgende Schaubild angefügt:



So können wir folgenden Satz formulieren:

Satz

Unter den in diesem Abschnitt gemachten Voraussetzungen über unsere Modellwirtschaft gibt es für jeden beliebigen Anfangswert $k(0)$ genau ein $p(0)$, für das die Lösung unseres Differentialgleichungssystems mit den Anfangswerten $k(0), p(0)$ nach k^∞, p^∞ konvergiert, falls $\theta > \xi$, d.h. $\gamma > 0$.

Für eine etwas ausführlichere ökonomische Interpretation aggregierter Wachstumsmodelle sei schließlich auf das neue Buch von R.M. Solow [25] und die Ausführungen in Mirrlees [26] verwiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] E. B. Lee u. L. Markus,
Foundations of Optimal Control Theory,
New York - London - Sydney 1967;
- [2] L. S. Pontrjagin, V. G. Boltjanskij, R. V. Gamkrelidze
und E. F. Misčenko,
Mathematische Theorie optimaler Prozesse, 2. verb.
Auflage,
München - Wien 1967;
- [3] L. D. Berkovitz,
Variational Methods in Problems of Control and Program-
ming,
J. Math. Anal. Appl., Vol. 3, 1961, S. 145 - 169;
- [4] B. S. Frey,
Eine einfache Einführung zu Pontrjagins Maximum-
Prinzip im Wirtschaftswachstum, Weltwirtschaftliches
Archiv, Bd. 103, S. 213 - 228 ;
- [5] A. A. Fel'dbaum,
Optimal Control Systems,
London - New York 1965;
- [6] H. Reichardt, B. Schips, K. Britsch,
Zum Problem optimaler Wachstumspfade in mehrsektora-
len Modellen, Zeitschrift für Nationalökonomie,
Bd. 28, 1968, S. 1 - 15;
- [7] M. R. Hestenes,
Calculus of Variations and Optimal Control Theory,
New York - London - Sydney 1966 ;
- [8] E. A. Coddington und N. L. Levinson,
Theory of Ordinary Differential Equations,
New York 1955;

- [9] O. L. Mangasarian,
Sufficient Conditions for Optimal Control of Nonlinear
Systems,
J. SIAM Control, Vol. 4, 1966, S. 139 - 152;

- [10] T. C. Koopmans,
On the Concept of Optimal Economic Growth, in:
Study Week on the Econometric Approach to Development
Planning, Amsterdam 1965, S. 225 - 287;

- [11] D. Cass,
Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital
Accumulation, Review of Economic Studies,
Vol. 32, 1965, S. 233 ff;

- [12] H. Uzawa,
Neutral Inventions and the Stability of Growth
Equilibrium, Review of Economic Studies,
Vol. 28, 1961, S. 117 - 124;

- [13] T. Okamoto und K. Inada,
A Note on the Theory of Economic Growth,
Quarterly Journal of Economics,
Vol. 76, 1962, S. 503 - 507;

- [14] A. Zaubermann,
Aspects of Planometrics, Kapitel 15:
The Objective Function and Optimal Growth,
London 1966, S. 171 - 196;

- [15] J. Tinbergen,
Optimal Saving and Utility Maximization our Time,
Econometrica, Vol 28, 1960, S. 481 - 489;

- [16] M. Allais,
The Influence of the Capital-Output Ratio on Real
National Income, Econometrica, Vol. 30, 1962,
S. 700 - 728;

- [17] E. S. Phelps,
Golden Rules of Economic Growth,
Studies of Efficient and Optimal Investment,
New York 1966;
- [18] F. P. Ramsey,
A Mathematical Theory of Saving,
Economic Journal, Vol. 38, 1928, S. 543 ff.;
- [19] C. C. von Weizsäcker
Existence of Optimal Programs of Accumulation for
an Infinite Time Horizon, Review of Economic Studies,
Vol. 32, 1965, S. 85 - 104;
- [20] K. Britsch und B. Schips,
Eine einfache Einführung zu Pontrjagins Maximum-
prinzip im Wirtschaftswachstum,
Einige Bemerkungen zu dem gleichnamigen Aufsatz von
Bruno S. Frey,
Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 104, 1970, S. 179 - 187;
- [21] L. S. Pontrjagin,
Gewöhnliche Differentialgleichungen,
Berlin 1965;
- [22] A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin,
Theory of Oscillators,
New York etc. 1966;
- [23] A. Halany,
Differential Equations,
New York - London 1966;
- [24] H. Bauer und K. Neumann,
Berechnung optimaler Steuerungen
Berlin - Heidelberg - New York 1969;

- [25] R.M. Solow,
Growth Theory, An Exposition,
Oxford 1970;
- [26] J. A. Mirrlees,
Optimum Growth when Technology is Changing,
Review of Economic Studies,
Vol. 34, 1967, S. 95 - 124.